

Теория чисел – раздел чистой математики, занимающийся изучением целых чисел $0, \pm 1, \pm 2, \dots$ и соотношений между ними. Иногда теорию чисел называют высшей арифметикой. Отдельные вычисления, производимые над конкретными числами, например, $9 + 16 = 25$, не представляют особого интереса и обычно не входят в предмет теории чисел. С другой стороны, выписанное только что равенство становится несравненно более интересным, если заметить, что оно представляет собой простейшее решение в целых числах (если не считать тривиальных решений $x = z, y = 0$) уравнения Пифагора $x^2 + y^2 = z^2$. С этой точки зрения последнее уравнение непосредственно приводит к некоторым подлинным теоретико-числовым проблемам, например,

1. Имеет ли $x^2 + y^2 = z^2$ бесконечно много или только конечное число решений в целых числах и как их можно найти?
2. Какие целые числа представимы в виде $x^2 + y^2$, где x и y - целые числа?
3. Существуют ли решения в целых числах аналогичного уравнения $x^n + y^n = z^n$, где n - целое число, большее 2?

Одна из интригующих особенностей теории чисел состоит в том, что эти три вопроса, формулируемые так легко и понятно, в действительности находятся на совершенно различных уровнях сложности. Пифагор и Платон, а возможно гораздо раньше вавилонские математики, знали, что уравнение $x^2 + y^2 = z^2$ имеет бесконечно много решений в целых числах, а древнегреческому математику Диофанту (ок. 250 до н.э.) было известно, что каждое такое решение представимо в виде $x = r^2 - s^2, y = 2rs, z = r^2 + s^2$ при подходящих целых числах r и s и что при любых двух целых числах r и s соответствующие значения x, y и z образуют решение. Что касается второго вопроса, то П.Ферма (1601-1665) показал, что целое число m представимо в виде суммы двух квадратов в том и только в том случае, когда частное от деления числа m на наибольший квадрат, делящий число m , не содержит простого множителя вида $4k + 3$

(k - целое число). Третий вопрос оставался без ответа, несмотря на упорнейшие усилия самых блестящих математических умов, на протяжении трех последних столетий. Ферма примерно в 1630 на полях одной из книг написал, что уравнение $x^n + y^n = z^n$ не имеет решений в целых числах x , y и z , отличных от нуля, при n больше 2, но самого доказательства не оставил. И только в 1994 Э.Вайлсу из Принстонского университета удалось доказать эту теорему, уже несколько веков носящую название Великой теоремы Ферма.

Вне самой математики теория чисел имеет довольно мало приложений, и развивалась она не ради решения прикладных задач, а как искусство ради искусства, обладающее своей внутренней красотой, тонкостью и трудностью. Тем не менее теория чисел оказала большое влияние на математическую науку, поскольку некоторые разделы математики (в том числе и такие, которые впоследствии нашли применение в физике) были первоначально созданы для решения особенно сложных проблем теории чисел.