

Арифметическая комбинаторика — раздел математики, возникший на стыке теории чисел, комбинаторики, эргодической теории и гармонического анализа.

Пусть \mathbb{N} — множество натуральных чисел, \mathbb{E} — чётных, \mathbb{P} — простых, а \mathbb{S} — множество всех квадратов натуральных чисел.

Знаменитую теорему Лагранжа можно компактно сформулировать как равенство $\mathbb{S} + \mathbb{S} + \mathbb{S} + \mathbb{S} = \mathbb{N}$, а не менее знаменитую гипотезу Гольдбаха — как $\mathbb{P} + \mathbb{P} \supseteq \mathbb{E}$. Изучением поведения подмножеств целых чисел (а также более сложных алгебраических структур) относительно имеющих операций занимается (в тесном сотрудничестве с традиционной теорией чисел) арифметическая комбинаторика.

Аддитивная комбинаторика относится к специальному случаю арифметической комбинаторики, когда во внимание берутся только операции сложения и вычитания.

Изучаемые множества могут быть подмножествами алгебраических структур, отличных от целых чисел, например, групп, колец или полей.

Арифметическая комбинаторика объясняется в рецензии Грина на книгу «Аддитивная комбинаторика» Тао и Ву.

Пример задачи

Пусть A — множество, содержащее n целых чисел, каков будет размер множества сумм

$$A + A := \{x + y : x, y \in A\},$$

множества разностей (не путать с разностью множеств)

$$A - A := \{x - y : x, y \in A\},$$

или множества произведений (не путать с произведением множеств)

$$A \times A := \{xy : x, y \in A\}$$

Как связаны размеры этих множеств?