Аналитическая теория чисел — раздел теории чисел, в котором свойства целых чисел исследуются методами математического анализа. Наиболее известные результаты относятся к исследованию распределения простых чисел и аддитивным проблемам Гольдбаха и Варинга.

Первым шагом в этом направлении стал метод производящих функций, сформулированный Эйлером. Для определения количества целочисленных неотрицательных решений линейного уравнения вида

$a_1x_1 + ... + a_nx_n = N$,

где $a_1, ..., a_n$ — натуральные числа, Эйлер построил производящую функцию, которая определяется как произведение сходящихся рядов (при $|z| < 1$)

$F_i(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (z^{a_i})^k$

и является суммой членов геометрической прогрессии, при этом

$F(z) = \sum_{N=0}^{\infty} l(N) z^N$,

где $l(N)$ — число решений изучаемого уравнения. На основе этого метода был построен круговой метод Харди — Литлвуда.

В работе над квадратичным законом взаимности Гаусс рассмотрел конечные суммы вида $S(a) = \sum_{n=1}^{p} e^{2\pi i a n^2/p}$, которые могут быть представлены в виде суммы синусов и косинусов (по формуле Эйлера), из-за чего они являются частным случаем тригонометрических сумм. Метод тригонометрических сумм, позволяющий оценивать число решений тех или иных уравнений или систем уравнений в целых числах играет большую роль в аналитической теории чисел. Основы метода разработал и впервые применил к задачам теории чисел И. М. Виноградов.

Работая над доказательством теоремы Евклида о бесконечности простых чисел Эйлер рассмотрел произведение по всем простым числам и сформулировал тождество:

$\Pi_p \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$,

которое стало основанием для теорий дзета-функций. Наиболее известной и до сих пор не решённой проблемой аналитической теории чисел является доказательство гипотезы Римана о нулях дзета-функции, утверждающей, что все нетривиальные корни уравнения $\zeta(s) = 0$ лежат на так называемой *критической прямой* $\operatorname{Re} s = \frac{1}{2}$, где $\zeta(s)$ — дзета-функция Римана.

Для доказательства теоремы о бесконечности простых чисел в общем виде Дирихле использовал произведения по всем простым числам, аналогичные эйлерову произведению, и показал, что

$\Pi_p \left(1 - \frac{\chi(p)}{p^s}\right)^{-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s}$,

при этом функция $\chi(p)$, получившая название характер Дирихле, определена так, что удовлетворяет следующим условиям: она является периодической, вполне мультипликативной и не равна тождественно нулю. Характеры и ряды Дирихле нашли применение и в других разделах математики, в частности в алгебре, топологии и теории функций.

Чебышёв показал, что число простых чисел, не превосходяших X, обозначенное как $\pi(X)$, стремится к бесконечности по следующему закону:

$a\frac{X}{\ln(X)} < \pi(X) < b\frac{X}{\ln(X)}$, где $a > 1/2 \ln 2$ и $b < 2 \ln 2$.

Другим направлением аналитической теории чисел является применение комплексного анализа в доказательстве теоремы о распределении простых чисел.