Математическая логика (*теоретическая логика*, *символическая логика*) — раздел математики, изучающий математические обозначения, формальные системы, доказуемость математических суждений, природу математического доказательства в целом, вычислимость и прочие аспекты оснований математики. В более широком смысле рассматривается как математизированная ветвь формальной логики — «*логика по предмету, математика по методу*», «*логика, развиваемая с помощью математических методов*».

История

Первое дошедшее до нас сочинение по формальной логике — «» Аристотеля (384-322 гг. до нашей эры). В нём рассматриваются основы силлогистики — правила вывода одних высказываний из других. Так из высказываний «Все люди смертны» и «Сократ — человек» можно сделать вывод, что «Сократ смертен». Однако на практике такие рассуждения встречаются крайне редко.

Вопрос о создании символической логики как универсального научного языка рассматривал Лейбниц в 1666 году в работе «Искусство комбинаторики» (). Он думал о записи высказываний на специальном языке, чтобы затем по логическим законам вычислять истинность других. В середине XIX века появились первые работы по алгебраизации аристотелевой логики, сформировавшие первооснову исчисления высказываний (Буль, де Морган, Шрёдер). В работах Фреге и Пирса (конец 1870-х — начало 1880-х) в логику введены предметные переменные, кванторы и, тем самым, основано исчисление предикатов. В конце 1880-х годов Дедекинд и Пеано применили эти инструменты в попытках аксиоматизации арифметики, при этом Пеано создал удобную систему обозначений, закрепившуюся и в современной математической логике.

Уайтхед и Рассел создают в 1910—1913 годах трактат Principia Mathematica, который оказал исключительное влияние на все последующее развитие математической логики. Ещё одной важной вехой в развитии логики стало обнаружение свойственных уровню развития логических исчислений и теории множеств конца XIX века парадоксов, в преодоление которых появилась концепция интуиционизма и интуиционистская логика (Брауэр, 1908) и, в качестве альтернативы, Гильбертом создана программа обоснования математики посредством аксиоматической формализации с использованием строго ограниченных средств, не приводящих к противоречиям.

Основные положения

Применение в логике математических методов становится возможным тогда, когда суждения формулируются на некотором точном языке. Такие точные языки имеют две стороны: синтаксис и семантику. Синтаксисом называется совокупность правил построения объектов языка (обычно называемых формулами). Семантикой называется совокупность соглашений, описывающих наше понимание формул (или некоторых из них) и позволяющих считать одни формулы верными, а другие — нет.

Важную роль в математической логике играют понятия дедуктивной теории и исчисления. Исчислением называется совокупность правил вывода, позволяющих считать некоторые формулы выводимыми. Правила вывода подразделяются на два класса. Одни из них непосредственно квалифицируют некоторые формулы как выводимые. Такие правила вывода принято называть аксиомами. Другие же позволяют считать выводимыми формулы A, синтаксически связанные некоторым заранее определённым способом с конечными наборами $A_1, \ldots A_n$ выводимых формул. Широко применяемым правилом второго типа является правило modus ponens: если выводимы формулы A и $(A \to B)$, то выводима и формула B.

Отношение исчислений к семантике выражается понятиями семантической пригодности и семантической полноты исчисления. Исчисление И называется семантически пригодным для языка Я, если любая выводимая в И формула языка Я является верной. Аналогично, исчисление И называется семантически полным в языке Я, если любая верная формула языка Я выводима в И.

Многие из рассматриваемых в математической логике языков обладают семантически полными и семантически пригодными исчислениями. В частности, известен результат Курта Гёделя о том, что классическое исчисление предикатов является семантически полным и семантически пригодным для языка классической логики предикатов первого порядка (теорема Гёделя о полноте). С другой стороны, имеется немало языков, для которых построение семантически полного и семантически пригодного исчисления невозможно. В этой области классическим результатом является теорема Гёделя о неполноте, утверждающая невозможность семантически полного и семантически пригодного исчисления для языка формальной арифметики.

На практике множество элементарных логических операций является обязательной частью набора инструкций всех современных микропроцессоров и, соответственно, входит в языки программирования. Это является одним из важнейших практических приложений методов математической логики, изучаемых в современных учебниках информатики.

Разделы

В Математической предметной классификации математическая логика объединена в одну секцию верхнего уровня с основаниями математики, в которой выделены следующие разделы:

- общая логика (), включает классическую логику первого порядка, логики высших порядков (логику второго порядка), комбинаторную логику, -исчисление, временную логику, модальную логику, многозначные логики, нечёткую логику, логику в информатике;
- теория моделей;
- теория вычислимости и теория рекурсии;
- теория множеств;

- теория доказательств и конструктивная математика;
- алгебраическая логика (включает вопросы изучения булевых алгебр, алгебр Гейтинга, квантовых логик, цилиндрических и полиадических алгебр, алгебр Поста);
- нестандартные модели.