

Теория чисел, или высшая арифметика — раздел чистой математики, изучающий свойства натуральных и целых чисел.

Понятие числа является одним из основных понятий современной математики. Оно является одним из древнейших. Считается, что термин «натуральное число» впервые применил римский государственный деятель, философ, автор трудов по математике и теории музыки Боэций (480 – 524 гг.), но еще греческий математик Никомах из Геразы говорил о натуральном, то есть природном ряде чисел. Понятием «натуральное число» в современном его понимании последовательно пользовался выдающийся французский математик, философ-просветитель Даламбер (1717-1783 гг.).

Ранний период развития арифметики характеризуется тем, что постепенно и притом весьма медленно развивается сам процесс счета, выявляются возможности неограниченного его продолжения, создается практическая арифметика, в которой решаются отдельные конкретные арифметические задачи.

В трудах Евклида теоретико-числовые исследования занимают сравнительно небольшое место, однако уже у него мы встречаем ряд основных положений теории делимости и хотя простой, но чрезвычайно важный результат: бесконечность множества простых чисел.

Греческим математикам был известен способ выделения простых чисел из натурального ряда, получивший название эратосфенова решета. Теорию чисел как особую область математики можно рассматривать только начиная с работ Диофанта. Диофант рассмотрел ряд задач о представимости чисел в определенной форме и более общие задачи решения уравнений в целых и рациональных числах. Именно эти задачи явились позднее отправным пунктом всей теории форм и той базой, откуда возникла проблематика теории диофантовых приближений.

В период упадка античной культуры работы Диофанта были почти совсем забыты. В VIII—IX веках в арабских странах возникает своеобразная математическая культура. Арабская математика, культивируя исследования по алгебре и тригонометрии, проявляла незначительный интерес

к теоретико-числовым задачам. Некоторые арабские ученые комментировали Диофанта, рассматривали арифметические задачи того же типа, что и Диофант, однако ничего существенно нового ими не было получено.

В Европе, начиная с эпохи крестовых походов вплоть до XVII века, развитие теории чисел, как, впрочем, и всей математики, было очень медленным. Математики обычно рассматривали только отдельные конкретные задачи теоретико-числового характера. Общие методы были почти неизвестны. В этот период в основном развилась практическая арифметика действий. Из работ этого времени наибольший след в дальнейшем развитии теории чисел оставили весьма незначительные для этой эпохи работы Леонардо Пизанского и работы Региомонтана, который нашел труды Диофанта и впервые в Европе стал систематически их изучать.

В XVI и в начале XVII века на латинском и французском языках были изданы сочинения Диофанта, и ряд математиков того времени, из которых в первую очередь можно назвать Виета, занялись комментированием этих сочинений, несколько дополняя их новыми результатами.

В настоящем смысле теорию чисел как науку надо считать начиная с работ французского математика П. Ферма, получившего основной результат теории делимости на заданное простое число и решившего ряд важных задач теории диофантовых уравнений.

В XVIII веке Л. Эйлер значительно продвинул вперед развитие теории чисел. Эйлер обобщил основной результат Ферма для случая делимости на составные числа, создал общую теорию так называемых степенных вычетов, получил очень большое число разнообразных результатов о представимости чисел в виде форм определенного типа, исследовал ряд систем диофантовых уравнений и получил интересные результаты о разбиении чисел на слагаемые. У Эйлера мы впервые встречаемся с идеей применения методов математического анализа к задачам теории чисел. Рассмотрение бесконечных рядов и произведений явилось у Эйлера действенным орудием для получения теоретико-числовых результатов.

После работ Эйлера почти все крупные математики XVIII и XIX веков в той или иной степени занимаются теорией чисел. В частности,

существенный след в развитии теории чисел оставил французский математик Лагранж, развивший дальше методы Эйлера. Лагранж рассматривал вопрос о представлении чисел в виде бинарной квадратичной формы $ax^2 + bxy + cy^2$, доказал теорему о представимости чисел в виде суммы четырех квадратов и провел существенные исследования по теории непрерывных дробей.

Большое влияние на дальнейшее развитие теории чисел оказали и работы А.Лежандра по теории диофантовых уравнений высших степеней. Лежандр нашел также эмпирическую формулу для числа простых чисел в заданных пределах. Работы Эйлера, Лагранжа и Лежандра создали базу для цельной теории, получившей позже у Гаусса название теории сравнений.

Замечательные работы немецкого математика К.Гаусса имели особенно большое значение для всей теории чисел. Работы Гаусса по теории сравнений 2-й степени придали ей законченный вид, так что в настоящее время вся эта область теории чисел базируется на результатах, изложенных им в книге «Арифметические исследования». В этой книге рассматривается также теория квадратичных форм, в которой им были получены фундаментальные результаты. Гаусс наряду с изучением обычных целых чисел начал рассматривать также и арифметику чисел, получивших название целых гауссовых чисел. Эти его исследования положили начало алгебраической теории чисел.

После работ Гаусса в течение всего XIX века и до сегодняшнего дня исследования по теории приобретают все увеличивающийся размах.