

Простейшей *цепной* или непрерывной дробью называется выражение

$$a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \dots}}. \quad (1)$$

В наиболее общем случае  $a_0, a_1, a_2, \dots$  являются произвольными переменными. Далее в данной статье мы будем считать, что  $a_0$  – целое число, а  $a_1, a_2, \dots$  – натуральные. Для большего удобства записи непрерывную дробь (1) иногда обозначают так:  $[a_0; a_1; a_2; \dots]$ . Если цепная дробь обрывается на некотором элементе  $a_n$ , то ее называют *конечной* или *n-членной*. В противном случае она называется *бесконечной*.

Например, число  $\sqrt{2}$  допускает разложение в следующую цепную дробь:

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \dots}}}$$

Действительно, пусть  $\sqrt{2} = a_0 + \frac{1}{\alpha_1}$ , и если потребовать того, чтобы  $a_0$  было натуральным, получим, что  $a_0 = 1$  и  $\alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{2}-1}$ . Теперь разложим  $\alpha_1$  в непрерывную дробь: пусть

$$\alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{2}-1} = a_1 + \frac{1}{\alpha_1},$$

тогда  $a_1 = 2$  и

$$\alpha_2 = \frac{1}{\alpha_1 - 2} = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}-1} - 2} = \frac{\sqrt{2}-1}{3-2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}-1}{(\sqrt{2}-1)^2} = \frac{1}{\sqrt{2}-1} = \alpha_1.$$

Легко понять, что тогда все последующие элементы  $a_n$  будут также равны 2. То есть данное разложение будет бесконечным и периодическим.

Отметим основные свойства цепных дробей.

Подходящей дробью называют число:

$$\frac{p_n}{q_n} = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \cdots + \frac{1}{a_n}}}. \quad (2)$$

Несложно понять, что  $\frac{p_n}{q_n} = \frac{P(a_0, \dots, a_n)}{Q(a_0, \dots, a_n)}$ , где  $P$  и  $Q$  – многочлены. Также, очевидно, что  $\frac{p_0}{q_0} = \frac{a_0}{1} = a_0$ . Основы аналитической теории цепных дробей были созданы Леонардом Эйлером в середине XVIII века.

**ТЕОРЕМА 1** (*Закон образования подходящих дробей, Эйлер*). Пусть  $p_0 = a_0$ ,  $q_0 = 1$ ,  $p_{-1} = 1$ ,  $q_{-1} = 0$ . Тогда для любого  $k \geq 1$ :

$$\begin{aligned} p_k &= a_k p_{k-1} + p_{k-2}, \\ q_k &= a_k q_{k-1} + q_{k-2}. \end{aligned} \quad (3)$$

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** При  $k = 1$  непосредственно подстановкой убеждаемся, что эти формулы верны. Пусть они верны для всех  $k < n$ . Рассмотрим цепную дробь  $[a_1; a_2; \dots; a_n]$ . Будем обозначать подходящие дроби к этой цепной дроби как  $\frac{p_k^*}{q_k^*}$ . Несложно убедиться, что

$$\begin{aligned} p_n &= a_0 p_{n-1}^* + q_{n-1}^* \\ q_n &= q_{n-1}^*. \end{aligned} \quad (4)$$

По нашему предположению

$$\begin{aligned} p_{n-1}^* &= a_n p_{n-2}^* + p_{n-3}^* \\ q_{n-1}^* &= a_n q_{n-2}^* + q_{n-3}^* \end{aligned}$$

В итоге, используя (4) получим

$$\begin{aligned} p_n &= a_0(a_n p_{n-2}^* + p_{n-3}^*) + a_n q_{n-2}^* + q_{n-3}^* = \\ &= a_n(a_0 p_{n-2}^* + q_{n-2}^*) + (a_0 p_{n-3}^* + q_{n-3}^*) = a_n p_{n-1} + p_{n-2} \\ q_n &= a_n q_{n-2}^* + q_{n-3}^* = a_n q_{n-1} + q_{n-2}. \end{aligned}$$

Что и требовалось доказать.  $\square$

СЛЕДСТВИЕ 1 (Эйлер). Для всех  $k \geq 0$

$$q_k p_{k-1} - p_k q_{k-1} = (-1)^k. \quad (5)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пользуясь теоремой 1 имеем:

$$\begin{aligned} q_k p_{k-1} - p_k q_{k-1} &= (a_k q_{k-1} + q_{k-2}) p_{k-1} - (a_k p_{k-1} + p_{k-2}) q_{k-1} = \\ &= -(q_{k-1} p_{k-2} - p_{k-1} q_{k-2}) = \dots = (-1)^k (q_0 p_{-1} - p_0 q_{-1}) = (-1)^k. \quad \square \end{aligned}$$

СЛЕДСТВИЕ 2 (Эйлер). Для всех  $n \geq 1$

$$\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} - \frac{p_n}{q_n} = \frac{(-1)^n}{q_n q_{n-1}}. \quad (6)$$

СЛЕДСТВИЕ 3 (Эйлер). Для всех  $k \geq 1$

$$q_k p_{k-2} - p_k q_{k-2} = (-1)^{k-1} a_k. \quad (7)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пользуясь теоремой 1 имеем и следствием 1:

$$\begin{aligned} q_k p_{k-2} - p_k q_{k-2} &= (a_k q_{k-1} + q_{k-2}) p_{k-2} - (a_k q_{k-1} + p_{k-2}) q_{k-2} = \\ &= -a_k (q_{k-1} p_{k-2} - p_{k-1} q_{k-2}) = (-1)^{k-1} a_k. \quad \square \end{aligned}$$

СЛЕДСТВИЕ 4 (Эйлер). Для всех  $n \geq 2$

$$\frac{p_{n-2}}{q_{n-2}} - \frac{p_n}{q_n} = \frac{(-1)^{n-1} a_n}{q_n q_{n-2}}. \quad (8)$$

Отсюда следует, что *подходящие дроби четного порядка образуют возрастающую, а подходящие дроби нечетного порядка - убывающую последовательность. При этом любая подходящая дробь нечетного порядка больше любой подходящей дроби четного порядка.*

Если рассмотреть бесконечную непрерывную дробь, то, очевидно, имеет место следующее утверждение: *значение сходящейся бесконечной непрерывной дроби больше значения любой подходящей дроби четного порядка и меньше значения любой подходящей дроби нечетного порядка.*

## Список литературы

- [1] Хинчин А. Я. Цепные дроби. - М.: ГИТТЛ, 1949.