Простейшей *цепной* или непрерывной дробью называется выражение

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cdots}}. \tag{1}$$

В наиболее общем случае $a_0, a_1, a_2, \ldots$ являются произвольными переменными. Далее в данной статье мы будем считать, что a_0 – целое число, а $a_1, a_2, \ldots$ – натуральные. Для большего удобства записи непрерывную дробь (**??**) иногда обозначают так: $[a_0;\ a_1;\ a_2; \ldots]$. Если цепная дробь обрывается на некотором *элементе* a_n, то ее называют *конечной* или n-членной. В противном случае она называется *бесконечной*.

Например, число $\sqrt{2}$ допускает разложение в следующую цепную дробь:

$$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cdots}}}.$$

Действительно, пусть $\sqrt{2} = a_0 + \frac{1}{\alpha 1}$, и если потребовать того, чтобы a_0 было натуральным, получим, что $a_0 = 1$ и $\alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{2}-1}$. Теперь разложим α_1 в непрерывную дробь: пусть

$$\alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{2}-1} = a_1 + \frac{1}{\alpha 1},$$

тогда $a_1 = 2$ и

$$\alpha_2 = \frac{1}{\alpha_1 - 2} = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}-1} - 2} = \frac{\sqrt{2}-1}{3-2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}-1}{(\sqrt{2}-1)^2} = \frac{1}{\sqrt{2}-1} = \alpha_1.$$

Легко понять, что тогда все последующие элементы a_n будут также равны 2. То есть данное разложение будет бесконечным и периодическим.

Отметим основные свойства цепных дробей.

Подходещей дробью называют число:

$$\frac{p_n}{q_n} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cdots \cfrac{1}{a_n}}}. \tag{2}$$

Несложно понять, что $\frac{p_n}{q_n} = \frac{P(a_0, ..., a_n)}{Q(a_0, ..., a_n)}$, где P и Q – многочлены. Также, очевидно, что $\frac{p_0}{q_0} = \frac{a_0}{1} = a_0$. Основы аналитической теории цепных дробей были созданы Леонардом Эйлером в середине XVIII века.

Теорема 1 *(Закон образования подходящих дробей, Эйлер). Пусть* $p_0 = a_0, \ , q_0 = 1, \ p_{-1} = 1, \ q_{-1} = 0$. *Тогда для любого* $k \geq 1$*:*

$$\begin{aligned} p_k &= a_k p_{k-1} + p_{k-2}, \\ q_k &= a_k q_{k-1} + q_{k-2}. \end{aligned} \tag{3}$$

Доказательство. При $k = 1$ непосредственно подстановкой убеждаемся, что эти формулы верны. Пусть они верны для всех $k < n$. Рассмотрим цепную дробь $[a_1; a_2; \ldots; a_n]$. Будем обозначать подходящие дроби к этой цепной дроби как $\frac{p_r^*}{q_r^*}$. Несложно убедиться, что

$$\begin{aligned} p_n &= a_0 p_{n-1}^* + q_{n-1}^* \\ q_n &= q_{n-1}^*. \end{aligned} \tag{4}$$

По нашему предположению

$$\begin{aligned} p_{n-1}^* &= a_n p_{n-2}^* + p_{n-3}^* \\ q_{n-1}^* &= a_n q_{n-2}^* + q_{n-3}^* \end{aligned}$$

В итоге, используя (**??**) получим

$$p_n = a_0(a_n p_{n-2}^* + p_{n-3}^*) + a_n q_{n-2}^* + q_{n-3}^* =$$
$$a_n(a_0 p_{n-2}^* + q_{n-2}^*) + (a_0 p_{n-3}^* + q_{n-3}^*) = a_n p_{n-1} + p_{n-2}$$
$$q_n = a_n q_{n-2}^* + q_{n-3}^* = a_n q_{n-1} + q_{n-2}.$$

Что и требовалось доказать. □

Следствие 1 *(Эйлер). Для всех $k \geq 0$*

$$q_k p_{k-1} - p_k q_{k-1} = (-1)^k. \tag{5}$$

Доказательство. Пользуясь теоремой **??** имеем:

$$q_k p_{k-1} - p_k q_{k-1} = (a_k q_{k-1} + q_{k-2}) p_{k-1} - (a_k p_{k-1} + p_{k-2}) q_{k-1} =$$
$$= -(q_{k-1} p_{k-2} - p_{k-1} q_{k-2}) = \ \dots \ = (-1)^k (q_0 p_{-1} - p_0 q_{-1}) = (-1)^k. \quad \square$$

Следствие 2 *(Эйлер). Для всех $n \geq 1$*

$$\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} - \frac{p_n}{q_n} = \frac{(-1)^n}{q_n q_{n-1}}. \tag{6}$$

Следствие 3 *(Эйлер). Для всех $k \geq 1$*

$$q_k p_{k-2} - p_k q_{k-2} = (-1)^{k-1} a_k. \tag{7}$$

Доказательство. Пользуясь теоремой **??** имеем и следствием **??**:

$$q_k p_{k-2} - p_k q_{k-2} = (a_k q_{k-1} + q_{k-2}) p_{k-2} - (a_k q_{k-1} + p_{k-2}) q_{k-2} =$$
$$= -a_k (q_{k-1} p_{k-2} - p_{k-1} q_{k-2}) = (-1)^{k-1} a_k. \quad \square$$

Следствие 4 *(Эйлер). Для всех $n \geq 2$*

$$\frac{p_{n-2}}{q_{n-2}} - \frac{p_n}{q_n} = \frac{(-1)^{n-1} a_n}{q_n q_{n-2}}. \tag{8}$$

Отсюда следует, что *подходящие дроби четного порядка образуют возрастающую, а подходящие дроби нечетного порядка - убывающую последовательность. При этом любая подходящая дробь нечетного порядка больше любой подходящей дроби четного порядка.*

Если рассмотреть бесконечную непрерывную дробь, то, очевидно, имеет место следующее утверждение: *значение сходящейся бесконечной непрерывной дроби больше значения любой подходящей дроби четного порядка и меньше значения любой подходящей дроби нечетного порядка.*