Функция (**отображение**, **оператор**, **преобразование**) — в математике соответствие между элементами двух множеств, установленное по такому правилу, что каждому элементу одного множества ставится в соответствие некоторый элемент из другого множества.

Математическое понятие функции выражает интуитивное представление о том, как одна величина полностью определяет значение другой величины. Так, значение переменной x однозначно определяет значение выражения x^2, а значение месяца однозначно определяет значение следующего за ним месяца.

Аналогично, задуманный заранее алгоритм по значению входного данного выдаёт значение выходного данного.

Часто под термином «функция» понимается числовая функция, то есть функция, которая ставит одни числа в соответствие другим. Эти функции удобно представлять в виде графиков.

История

Термин «функция» (в некотором более узком смысле) был впервые использован Лейбницем (1692 год). В свою очередь, Иоганн Бернулли в письме к тому же Лейбницу употребил этот термин в смысле, более близком к современному.

Первоначально понятие функции было неотличимо от понятия аналитического представления . Впоследствии появилось определение функции, данное Эйлером (1751 год), затем — у Лакруа (1806 год), — уже практически в современном виде. Наконец, общее определение функции (в современной форме, но для числовых функций) было дано Лобачевским (1834 год) и Дирихле (1837 год).

К концу XIX века понятие функции переросло рамки числовых систем. Сначала понятие функции было распространено на векторные функции, вскоре Фреге ввёл логические функции (1879), а после появления теории множеств Дедекинд (1887) и Пеано (1911) сформулировали современное универсальное определение.

Определения

Наиболее строгим является теоретико-множественное определение функции (на основе понятия бинарного отношения). Часто вместо определения функции даётся понятие функции, то есть описание математического объекта с помощью понятий обычного языка, таких как «закон», «правило» или «соответствие».

Понятие функции

Говорят, что на множестве X имеется **функция** (***отображение, операция, оператор***) f со значениями из Y, если каждому элементу x из множества X по правилу f поставлен в соответствие некоторый элемент y из множества Y.

Говорят также, что функция f *отображает* множество X в множество Y. Функцию обозначают также записью $y = f(x)$.

Если используется термин *оператор*, то говорят, что оператор f *действует* из множества X в множество Y и добавляют запись $y = fx$.

Если хотят подчеркнуть, что правило соответствия f считается известным, то говорят, что на множестве X *задана* функция f, принимающая значения из Y. Если функция f должна находиться в результате решения какого-нибудь уравнения, то говорят, что f — неизвестная или неявно заданная функция. Но в любом случае, функция, по смыслу этого понятия, считается заданной, хотя и косвенно.

Если элементу $x \in X$ сопоставлен элемент $y \in Y$, то тем самым на элементе x задано и правило соответствия f (которое может быть разным для разных элементов). Следовательно, задание соответствия на каждом элементе множества X эквивалентно заданию функции f на этом множестве. Поэтому понятие функции можно сформулировать без понятия *правило* и необходимости его обозначать:

Говорят, что на множестве X задана **функция** f, принимающая значения из Y, если каждому элементу x из множества X поставлен в соответствие некоторый элемент y из множества Y. Функцию обозначают также записью $y = f(x)$.

Например, функция, заданная на X таблицей пар элементов x и y, содержит и правило соответствия для каждого элемента из X, поскольку значения функции при переходе от элемента к элементу множества X располагаются по вполне определенному правилу.

Для числовых функций, часто задаваемых формулами, понятие функции формулируется как соответствие между элементами множеств посредством правила. Правило не обозначается, чтобы избежать совпадения обозначений правила и функции:

Если каждому элементу x из множества X по какому-либо правилу ставится в соответствие некоторый элемент y из множества Y, то указанное соответствие называется **функцией** $y = f(x)$, заданной на множестве X со значениями из Y. Буква f в этом обозначении — индивидуальный знак функции.

Итак, **функция** $y = f(x)$ (или кратко: **функция** $f(x)$ или f) представляет собой ***тройку*** объектов: X, f, Y, где

- множество X называется **областью задания** или **областью определения** функции;
- множество Y называется **областью значений** функции;
- f — правило, по которому каждому элементу $x \in X$ сопоставляется некоторый элемент $y \in Y$. Для правила здесь использовано то же обозначение, что и для функции.

Обозначенный буквой x каждый элемент множества X называется ***независимой переменной*** или ***аргументом*** функции. Множество X при этом называется областью изменения переменной x.

Элемент y, соответствующий фиксированному элементу x называется ***частным значением*** функции в точке x.

Совокупность всех частных значений y, обозначаемая символом $\{y\}$, называется ***множеством значений*** функции.

Теоретико-множественное определение

Понятие множества упорядоченных пар (отношения) позволяет исключить из формулировки понятия функции не только понятие *правило*, но и понятие *соответствие*, к которому сводится понятие функции в обычных формулировках предыдущего подраздела.

Таким образом, для функции можно сформулировать определение, использующее только начальные математические понятия:

Функцией f называется множество упорядоченных пар $(x, y) \in X \times Y$, таких, что пары существуют для всех элементов множества X, и, если первые элементы пар совпадают, то совпадают и вторые их элементы.

При этом:

- Множество X называется **областью задания** или **областью определения** функции;
- множество Y называется **областью значений** функции
- множество всех элементов $y \in Y$, для которых существует пара $(x, y) \in f$, $x \in X$, называется ’*множеством значений*’ функции;
- множество упорядоченных пар $f \subset X \times Y$ называется также графиком функции; понятие графика функции и понятие функции при таком определении функции совпадают. При обычной формулировке понятия функции её графиком называется множество пар $(x, f(x))$.

Функции f и g называются равными, если их графики совпадают.

Поскольку равенство функций (в любой формулировке понятия функции) включает в себя не только совпадение правил соответствия между элементами множеств, но и совпадение областей задания, то функции $f_1(x) = x :\to$ и $f_2(x) = x :^{+}\to$, где — множество вещественных чисел, а $^{+}$ — множество положительных вещественных чисел, являются разными функциями.

Более общим, включающим в себя не только однозначные функции, является следующее определение функции:

Функцией f называется любое множество упорядоченных пар $(x, y) \in X \times Y$.

При этом:

- Множество X называется **областью отправления** функции. Множество всех элементов $x \in X$, для которых существует пара $(x, y) \in f$, называется областью задания функции;
- множество Y называется **областью прибытия** функции. Множество всех элементов $y \in Y$, для которых существует пара $(x, y) \in f$, называется множеством значений функции.

Обозначения функции

Если на множестве X задана функция f, принимающая значения из множества Y, то

- этот факт записывают в виде $f\colon X \to Y$ или $X \xrightarrow{f} Y$;
- множество X — область задания функции f — обозначается символом $D(f)$ или $\operatorname{dom} f$;
- множество Y — область значений функции f;
- множество значений $\{y\}$ функции f обозначается символом $E(f)$ или $\operatorname{cod} f$ $(\operatorname{ran} f)$.
- Если область значений Y и множество значений $E(f)$ совпадают, то говорят, что f *отображает* множество X *на* Y.
- Функция, заданная на множестве X, наиболее часто обозначается как *соответствие* между элементами $x \in X$ и $y \in Y$:

  $y = f(x)$, или кратко

$$f(x)$$

или f;

$x \mapsto y$ или $x \mapsto f(x)$;

- для сокращения числа обозначений знак функции, заданной на множестве X, может обозначаться той же буквой, что и каждое значение функции:

  $y = y(x)$, $z = z(x)$;

- функция обозначается и как "функция "f, которая *отображает* множество X в Yс обозначением соответствия между элементами $x \in X$ и $y \in Y$:

  $f\colon x \mapsto y$ или $f\colon y = f(x)$;

- реже используется обозначение функции как соответствие между элементами $x \in X$ и $y \in Y$ без скобок: $y = fx$, $y = f \circ x$ или $y = xf$,

- а там, где необходимо подчеркнуть двойственность, используются обозначения со скобками: $y = (f, x)$ или $y = (x, f)$;

- также существует и операторное обозначение $y = x^f$, которое можно встретить в общей алгебре.

- В лямбда-исчислении Чёрча используется обозначение $\lambda x.y$.

Функции нескольких аргументов

Понятие функции легко обобщается на случай функции многих аргументов.

Если множество X представляет собой декартово произведение множеств $X_1,\ X_2,\ \ldots,\ X_n$, тогда отображение $f\colon X \to Y$, где Y — множество вещественных чисел, оказывается n-местным отображением, при этом элементы упорядоченного набора $x = (x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)$ называются аргументами (данной n-местной функции), каждый из которых пробегает своё множество:

$x_i \in X_i$ где $i = \overline{1, n}$.

В этом случае запись $y = f(x)$ означает, что $y = f(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)$.

Способы задания функции

Аналитический способ

Функцию можно задать с помощью аналитического выражения (например, формулой). В этом случае её обозначают как соответствие в форме равенства записью $y = f(x)$, где x есть переменная, пробегающая область задания функции, а соответствующие значения переменной y (или, что то же самое, значения выражения принадлежат области значений функции. Например, равенство $y = x^2$, где x пробегает множество вещественных чисел, задает числовую функцию $y = f(x)$.

Само по себе равенство $y = f(x)$, без указания что это функция, заданная на некотором множестве, функцией не является.

Например, $y = x^2$ есть равенство выражений, содержащих разные переменные. Аналогично, если $f(x)$ является другим обозначением переменной y, то $f(x) = x^2$ также есть равенство выражений, содержащих разные переменные. Если же в равенстве $f(x) = x^2$слева стоит обозначение выражения, содержащего переменную x, то имеется равенство двух выражений, содержащих одну переменную.

Однако высказывание *функция* $y = x^2$ (или *функция* $f(x) = x^2$) на множестве задания обозначает именно функцию. Более того, часто функцию $x \mapsto f(x)$ (или $y = f(x)$) для краткости обозначают как *функцию* $f(x)$ на множестве задания. Это соглашение является удобным и оправданным.

Графический способ

Числовые функции можно также задавать с помощью графика. Пусть $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — вещественная функция n переменных. Тогда её графиком является множество точек в $n+1$-мерном пространстве

$$\{(x_1, x_2, \ldots, x_n, f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\}$$

. Это множество точек, часто является поверхностью. В частности при $n = 1$, график функции может в некоторых случаях может быть изображён кривой в двумерном пространстве.

Для функций трёх и более аргументов такое графическое представление не применимо. Однако, и для таких функций можно придумать наглядное полугеометрическое представление (например каждому значению четвёртой координаты точки сопоставить некоторый цвет на графике).

Связанные определения

Сужение и продолжение функции

Пусть дано отображение $f\colon X \to Y$ и $M \subset X$.

Отображение $g\colon M \to Y$, которое принимает на M те же значения, что и функция f, называется **сужением** (или, иначе **ограничением**) функции f на множество M.

Сужение функции f на множество M обозначается как $f\big|_M$.

Если функция $g\colon M \to Y$ такова, что она является сужением для некоторой функции $f\colon X \to Y$, то функция f, в свою очередь, называется **продолжением** функции g на множество X.

Образ и прообраз (при отображении)

Элемент $y = f(x)$, который сопоставлен элементу x, называется **образом** элемента (точки) x (при отображении f).

Если взять целиком *подмножество* A области задания функции f, то можно рассмотреть совокупность образов всех элементов множества A, а именно подмножество области значений (функции f) вида

$f(A) := \{f(x)\colon x \in A\}$,

которое, называется **образом множества** A при отображении f. Это множество иногда обозначается как $f[A]$ или A^f.

Наоборот, взяв некоторое подмножество B области значений функции f, можно рассмотреть совокупность тех элементов области задания функции f, чьи образы попадают в множество B, а именно — множество вида

$f^{-1}(B) := \{x\colon f(x) \in B\}$,

которое называется (**полным**) **прообразом** множества B (при отображении f).

В том частном случае, когда множество B состоит из одного элемента, скажем, $B = \{y\}$, множество $f^{-1}(\{y\}) = \{x\colon f(x) = y\}$ имеет более простое обозначение $f^{-1}(y)$.

Тождественное отображение

Отображения, у которых совпадают область задания и область значений, называются отображениями заданного множества **в себя** или **преобразованиями**.

В частности, преобразование $f\colon X \to X$, которое сопоставляет каждой точке x множества X её саму или, что то же самое,

$f(x) = x$ для каждого $x \in X$, называется **тождественным**.

Это отображение имеет специальное обозначение: id_X или, проще, id (если из контекста понятно, какое множество имеется в виду). Такое обозначение обязано своим происхождением англ. слову *identity* («идентичность, тождественность»).

Другое обозначение тождественного преобразования — 1_X. Такое отображение является унарной операцией, заданной на множестве X. Поэтому, нередко, тождественное преобразование называют **единичным**.

Композиция отображений

Пусть $f\colon X \to Y$ и $g\colon Y \to Z$ — два отображения, таких, что область значений первого отображения является подмножеством области задания второго отображения. Тогда для всякого $x \in X$ однозначно определяется элемент $y \in Y$ такой, что $y = f(x)$, но для этого самого y однозначно определяется элемент $z \in Z$ такой, что $z = g(y)$. То есть, для всякого $x \in X$ однозначно определяется элемент $z \in Z$ такой, что

$z = g(f(x))$. Другими словами, задано отображение h такое, что

$h(x) = g(f(x))$ для всякого $x \in X$.

Это отображение называется **композицией** отображений f и g, оно обозначается выражением $g \circ f$ (именно в таком порядке!), которое читается g *после* f.

Обратное отображение

Если отображение $f\colon X \to Y$ является взаимно однозначным или биективным (см. ниже), то существует отображение $f^{-1}\colon Y \to X$, у которого

- область задания (множество Y) совпадает с областью значений отображения f ;
- область значений (множество X) совпадает с областью задания отображения f ;
- $x = f^{-1}(y)$ тогда и только тогда, когда $y = f(x)$.

Отображение f^{-1} называется **обратным** по отношению к отображению f.

Отображение, у которого существует обратное, называется **обратимым**.

В терминах композиции отображений, свойство обратимости заключается в одновременном выполнении двух условий: $f^{-1} \circ f = id_X$ и $f \circ f^{-1} = id_Y$.

Свойства

Свойства образов и прообразов

Свойства образов Пусть A и B — подмножества области задания функции $f\colon X \to Y$. Тогда образы множеств A и B, при отображении f, обладают следующими свойствами:

- $f(\varnothing) = \varnothing$;
- $A \neq \varnothing \Rightarrow f(A) \neq \varnothing$;
- $A \subset B \Rightarrow f(A) \subset f(B)$.
- образ объединения множеств равен объединению образов: $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$;
- образ пересечения множеств является подмножеством пересечения образов $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$.

Последние два свойства допускают обобщение на любое количество множеств.

Свойства прообразов Положим, A и B — подмножества множества Y.

Прообразы множеств A и B, при отображении f, обладает следующими двумя очевидными свойствами:

- прообраз объединения равен объединению прообразов: $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$;
- прообраз пересечения равен пересечению прообразов $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$.

Данные свойства допускают обобщение на любое количество множеств.

Если отображение *обратимо* (см. ниже), прообраз каждой точки области значений одноточечный, поэтому для обратимых отображений выполняется следующее усиленное свойство для пересечений:

- образ пересечения равен пересечению образов: $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$.

Поведение функций

Сюръективность Функция f называется **сюръективной** (или, коротко, f — **сюръекция**), если каждому элементу множества Y может быть сопоставлен хотя бы один элемент множества X. То есть, функция f **сюръективна**, если образ множества X при отображении совпадает с множеством Y: $f(X) = Y$.

Такое отображение называется ещё **отображением** множества X ***на*** множество Y.

Другими словами, при сюръекции не бывает так, чтобы какой-то элемент Y не имел прообраза.

Если условие сюръективности нарушается, то такое отображение называют **отображением** множества X **в** множество Y.

Инъективность Функция f называется **инъективной** (или, коротко, f — **инъекция**), если любым двум разным элементам из множества X сопоставляются разные элементы из множества Y. Более формально, функция f **инъективна**, если для любых двух элементов $x_1, x_2 \in X$ таких, что $f(x_1) = f(x_2)$, следует, что $x_1 = x_2$.

Другими словами, при инъекции не бывает так, чтобы два или больше разных элементов из множества X отображались в один и тот же элемент из Y.

Биективность Если функция является и *сюръективной*, и *инъективной*, то такую функцию называют **биективной** или **взаимно однозначной**.

Возрастание и убывание Пусть дана функция $f\colon M \subset\to$. Тогда

- функция f называется **неубывающей** на M, если

$$\forall x, y \in M,\ x > y \Rightarrow f(x) \geq f(y);$$

- функция f называется **возрастающей** на M, если

$\forall x, y \in M,\ x > y \Rightarrow f(x) > f(y);$

- функция f называется **невозрастающей** на M, если

$\forall x, y \in M,\ x > y \Rightarrow f(x) \le f(y);$

- функция f называется **убывающей** на M, если

$\forall x, y \in M,\ x > y \Rightarrow f(x) < f(y).$

Невозрастающие и неубывающие функции называются монотонными.

Возрастающие и убывающие функции называются строго монотонными.

Периодичность Функция $f\colon M \to N$ называется периодической с **периодом** $T \neq 0$, если выполняется равенство

$f(x+T) = f(x), \quad \forall x \in M.$

Если это равенство не выполнено ни для какого $T \in M, T \neq 0$, то функция f называется **апериодической**.

Чётность

- Функция $f\colon X \to \mathbb{R}$ называется нечётной, если справедливо равенство

$f(-x) = -f(x), \quad \forall x \in X.$

- Функция f называется чётной, если справедливо равенство

$f(-x) = f(x), \quad \forall x \in X.$

Экстремумы функции Пусть задана функция $f\colon X \to$, и $x_0 \in X$ — внутренняя точка области задания f. Тогда

- x_0 называется точкой локального максимума, если существует окрестность M точки x_0 такая, что

  $\forall x \in M, x \neq x_0 : \quad f(x) < f(x_0);$

- x_0 называется точкой локального минимума, если существует окрестность M точки x_0 такая, что

  $$\forall x \in M, x \neq x_0 : \quad f(x) > f(x_0).$$

Свойства множеств и функций

В зависимости от того, какова природа области задания и области значений, различают следующие случаи областей:

1. абстрактные множества — множества без какой-либо дополнительной структуры;

2. множества, которые наделены некоторой структурой.

В случае **1** рассматриваются отображения в самом общем виде и решаются наиболее общие вопросы. Таким общим вопросом, например, является вопрос о сравнении множеств по мощности: если между двумя множествами существует взаимно однозначное отображение (биекция), то два данных множества называют *эквивалентными* или *равномощными*. Это позволяет провести классификацию множеств в виде единой шкалы, начальный фрагмент выглядит следующим образом:

- конечные множества — здесь мощность множества совпадает с количеством элементов;

- счётные множества — множества, эквивалентные множеству натуральных чисел;

- множества мощности континуума (например, отрезок вещественной прямой или сама вещественная прямая).

В соответствии с этим, имеет смысл рассматривать следующие примеры отображений:

- конечные функции — отображения конечных множеств;

- последовательности — отображение счётного множества в произвольное множество;

- континуальные функции — отображения несчётных множеств в конечные, счётные или несчётные множества.

В случае **2**, основной объект рассмотрения — заданная на множестве структура (дополнительные свойства элементов множества) и то, что происходит с этой структурой при отображении: если при взаимно однозначном отображении сохраняются свойства заданной структуры, то говорят, что между двумя структурами установлен изоморфизм. Таким образом, изоморфные структуры, заданные в различных множествах, невозможно различить, поэтому в математике принято говорить, что данная структура рассматривается «с точностью до изоморфизма».

Существует большое разнообразие структур, которые могут быть заданы на множествах. Сюда относится:

- структура порядка — частичный или линейный порядок элементов множества;

- алгебраическая структура — группоид, полугруппа, группа, кольцо, тело, область целостности или поле, заданные на элементах множества;

- структура метрического пространства — на элементах множества задаётся функция расстояния;

- структура евклидового пространства — на элементах множества задаётся скалярное произведение;

- структура топологического пространства — на множестве задаётся совокупность «открытых множеств»;

- структура измеримого пространства — на множестве задаётся сигма-алгебра подмножеств исходного множества (например, посредством задания меры с данной сигма-алгеброй в качестве области задания функции)

Функции с конкретным свойством могут не существовать на множествах, не обладающих соответствующей структурой. Например, формулировка свойства *непрерывности* функции, заданной на множестве, требует задания на этом множестве *топологической структуры*.

Обобщения

Частично определённые функции

Частично определённая функция f из множества X в множество Y есть функция $f\colon X' \to Y$ с областью задания $X' \subset X$.

Некоторые авторы понимают под функцией частично определённую функцию. Это имеет свои преимущества, например, возможна запись $f\colon \ \to$, где $f(x) = 1/x$ в этом случае $\operatorname{Dom} f = \setminus\{0\}$.

Многозначные функции

В силу определения функции, заданному значению аргумента соответствует ровно одно значение функции. Несмотря на это, нередко можно услышать про так называемые многозначные функции. В действительности, это не более чем удобное обозначение функции, область значений которой сама является семейством множеств.

Пусть $f\colon X \to \mathbb{B}$, где $\mathbb{B}$ — семейство подмножеств множества Y. Тогда $f(x)$ будет множеством для всякого $x \in X$.

Функция **однозначна**, если каждому значению аргумента соответствует единственное значение функции. Функция **многозначна**, если хотя бы одному значению аргумента соответствует два или более значений функции.