

Термин «диофантов» берет свое начало от имени выдающегося греческого математика Диофанта из Александрии. К сожалению, до сих пор неизвестно точно, в каком веке он жил, однако большинство ученых относят его работы к III в. О его жизни практически ничего не известно, за исключением нескольких незначительных фактов, которые упоминаются в одной стихотворной задаче, вошедшей в один более поздний греческий сборник математических головоломок. Судя по этим фактам, у Диофанта был сын, умерший в среднем возрасте, а сам Диофант дожил до 84 лет. До нашего времени дошла примерно половина его главного труда - математического трактата «Арифметика». Поскольку в большинстве задач в этой книге предусматривает решение в целых числах, то для анализа подобного рода стал применяться термин «диофантов». Сам Диофант не предпринимал никаких попыток создать систематическую теорию таких задач, точно так же как нет почти никаких свидетельств использования методов диофантова анализа математиками, жившими до него.

Диофантовы уравнения - алгебраические уравнения или системы алгебраических уравнений с целыми коэффициентами, для которых надо найти целые или рациональные решения. При этом число неизвестных в уравнениях больше числа уравнений. Ни один крупный математик не прошёл мимо теории диофантовых уравнений. Исследование диофантовых уравнений обычно связано с большими трудностями. Более того, можно указать многочлен $F(x, y_1, y_2, \dots, y_n)$ с целыми коэффициентами такой, что не существует алгоритма, позволяющего по любому целому числу x узнавать разрешимо ли уравнение

$$F(x, y_1, y_2, \dots, y_n) = 0$$

относительно y_1, y_2, \dots, y_n . Примеры таких многочленов можно выписать явно. Для них невозможно дать исчерпывающего описания решений.

Современной постановкой диофантовых задач мы обязаны Ферма. Именно он поставил перед европейскими математиками вопрос о решении неопределённых уравнений только в целых числах. Надо сказать,

что это не было изобретением Ферма - он только возродил интерес к поиску целочисленных решений.

Сегодня диофантов анализ – это обширная, сложная область теории чисел, которой посвящена многочисленная научная литература. При этом полная теория разработана лишь для линейных уравнений. Неизвестен (а, может, и не существует) общий метод решения уравнений второй и более высокой степеней. Ни одна область теории чисел не сталкивается с такими трудностями, как исследование диофантовых уравнений. Анализ даже простейшего нелинейного диофантова уравнения может представить огромнейшие трудности. Такое уравнение может вообще не иметь решения, может иметь бесконечное множество решений или, наконец, может обладать произвольным конечным числом решений. Множество таких уравнений — причем порой настолько простых, что они понятны даже ребенку, — упорно сопротивляется всем попыткам найти их решение или доказать, что такое решение невозможно.

При исследовании диофантовых уравнений обычно ставятся следующие вопросы:

- имеет ли уравнение целочисленные решения;
- конечно или бесконечно множество его целочисленных решений;
- решить уравнение на множестве целых чисел, т.е. найти все его целочисленные решения;
- решить уравнение на множестве целых положительных чисел;
- решить уравнение на множестве рациональных чисел.

Список литературы

- [1] Серпинский В. О решении уравнений в целых числах. - М.: ГИФМЛ, 1961.