6. Диофантовы приближения и теория трансцендентных чисел

В докладах данной секции представлены последние достижения по алгебраическим, трансцендентным и p-адическим числам.

УДК 511.2

Системы счисления в диофантовых равенствах

В. В. Агафонцев (Псков)
fon-valery-ag@yandex.ru

Как известно, в общественной жизни наибольшее распространение получила десятичная система счисления, во многих случаях заменив римскую непозиционную систему. С появлением компьютеров и развитием информационных технологий в их технической составляющей стала использоваться двоичная система счисления, а в программной составляющей — восьмеричная и шестнадцатеричная системы. В принципе для записи различных количественных соотношений могут использоваться позиционные системы счисления с *произвольным* основанием. [1]

Рассмотрим их применение при исследовании диофантовых равенств вида:

$$A^x + B^y = C^z, \text{ где } A, B, C, x, y, z \in \mathbb{N};\ x, y, z \geq 2.$$

В частности, целью данного доклада является доказательство утверждения, основанного на использовании позиционных систем счисления с *произвольным* основанием:

Теорема 1. *Равенство*

$$A^x + B^y = C^z, \tag{1}$$

где $A, B, C, x, y, z \in \mathbb{N}; x, y, z > 2$, *выполнимо только при составных числах* A, B, C.

Доказательство этого утверждения включает три этапа.

Этап 1. Доказательство леммы:

Лемма 1. *Необходимое и достаточное условие выполнения равенства*

$$A^x + B^y = C^z, \tag{2}$$

[1]Представление натурального числа n в позиционной системе счисления с основанием C имеет вид: $\sum_{\nu=0}^{h} n_\nu C^\nu$, где $n_\nu \in A(C) = \{0, 1, \ldots, C-1\}$.

в котором $A, B, C, x, y, z \in \mathbb{N}; x, y, z \geq 2; (A, B, C) = 1$, *представимо триадой равенств:*

$$A^x = a_{z-1} \cdot C^{z-1} + a_{z-2} \cdot C^{z-2} + \ldots + a_1 \cdot C + a_0 \tag{3}$$
$$B^y = b_{z-1} \cdot C^{z-1} + b_{z-2} \cdot C^{z-2} + \ldots + b_1 \cdot C + b_0 \tag{4}$$
$$C = a_0 + b_0 = a_i + b_i + 1, \tag{5}$$

где $i \in [1; z-1]$*;* $a_i, b_i, a_0, b_0 \in A(C); a_0, b_0 \neq 0$.

Этап 2. Доказательство теоремы 2:

Теорема 2. *Равенство*
$$A^x + B^y = C^z, \tag{6}$$
где $A, B, C, x, y, z \in \mathbb{N}$, *выполнимое при* $x, y > 2, z = 2$ *и* $(A, B, C) = 1$, *выполнимо при* $x, y, z > 2$ *и составных натуральных числах* A^*, B^*, C^*.

Этап 3. Доказательство теоремы 3:

Теорема 3. *Равенство*
$$A^x + B^y = C^z, \tag{7}$$
где $A, B, C, x, y, z \in \mathbb{N}$, *невыполнимо при* $x, y, z > 2$ *и* $(A, B, C) = 1$.

Из сопоставления заключения теорем 2 и 3 следует истинность утверждения об условии выполнимости равенства (1).

Кратко представим главные шаги каждого этапа.

На этапе 1: *шаг 1* — выполняется запись правой и левой части (2) в C-ричной позиционной системе счисления.

$$(A^x)_c + (B^y)_c = (10\ldots0)_c, \quad \text{где число нулей равно } z. \tag{8}$$

Очевидно, запись каждого из слагаемых левой части (8) не может содержать больше, чем $\mathbf{z}$ C-ричных разрядов, поэтому эти слагаемые представимы так:

$$(A^x)_c = (a_{z-1}a_{z-2}\ldots a_1a_0)_c; \quad (B^y)_c = (b_{z-1}b_{z-2}\ldots b_1b_0)_c \tag{9}$$

Здесь $a_i, b_i \in N, i \in [0; z-1]; a_i, b_i \leq C-1$.

Шаг 2: выполняется запись чисел A^x и B^y их количественным эквивалентом:

$$A^x = a_{z-1} \cdot C^{z-1} + a_{z-2} \cdot C^{z-2} + \ldots + a_1 \cdot C + a_0,$$

$$B^y = b_{z-1} \cdot C^{z-1} + b_{z-2} \cdot C^{z-2} + \ldots + b_1 \cdot C + b_0.$$

Шаг 3: учитывая тождество

$$C^z = (C-1) \cdot C^{z-1} + (C-1) \cdot C^{z-2} + \ldots + (C-1) \cdot C + C,$$

получаем необходимое и достаточное условие выполнения равенства (2), выражаемое соотношениями (3), (4), (5).

Убеждаемся в том, что этому условию удовлетворяют *любые* пифагоровы тройки чисел (случай $x = y = z = 2$), а также тройки ненулевых целых чисел, для которых $x \neq y$; $x, y > 2$; $z = 2$. В этом случае необходимое и достаточное условие выполнения равенства (2) в соответствии с (3), (4), (5) запишется так:

$$A^x = a_1 \cdot C + a_0; \quad B^y = b_1 \cdot C + b_0; \quad C = a_1 + b_1 + 1 = a_0 + b_0$$

Пример: тройки чисел $(2, 1, 3)$ и $(6, 5, 29)$, для которых $2^3 + 1^k = 3^2$, где k — любое натуральное число, и $6^3 + 5^4 = 29^2$. Так, для тройки $(6, 5, 29)$:

$$A^x = 6^3 = 7 \cdot 29 + 13; a_1 = 7, a_0 = 13; \quad B^y = 5^4 = 21 \cdot 29 + 16; b_1 = 21, b_0 = 16;$$

$$C = a_1 + b_1 + 1 = 7 + 21 + 1 = a_0 + b_0 = 13 + 16 = 29.$$

На этапе 2: *шаг 1* — левая и правая часть (6) умножается на число $C^{x \cdot y \cdot z}$; при $z = 2$ получим: $(A \cdot C^{2 \cdot y})^x + (B \cdot C^{2 \cdot x})^y = (C^2)^{1 + x \cdot y}$.

Шаг 2: обозначим $A^* = A \cdot C^{2 \cdot y}; B^* = B \cdot C^{2 \cdot x}; C^* = C^2; z = 1 + x \cdot y$.

С учётом этих обозначений равенство (6) запишется так:

$$(A^*)^x + (B^*)^y = (C^*)^z. \tag{10}$$

Равенство (10) соответствует заключению теоремы 2, так как $x, y, z > 2$ и числа A^*, B^*, C^* являются ***составными*** *натуральными числами.*

На этапе 3: *шаг 1* — предполагается выполнение диофантова равенства (7) и, следовательно, по лемме должны выполняться равенства (3), (4), (5). Исходя из (5), должно выполняться такое равенство:

$$(a_2 + b_2) \cdot C^2 + (a_1 + b_1) \cdot C + a_0 + b_0 = C^3. \tag{11}$$

Шаг 2: из *факта* отсутствия ненулевых целочисленных решений для уравнения Ферма третьей степени (см. [1,§3], [2, гл.2, пп.2.1, 2.2], [3]), на основании невыполнения для этого случая *трёх* равенств (3), (4), (5) доказывается справедливость неравенства

$$(a_2 + b_2) \cdot C^2 + (a_1 + b_1) \cdot C + a_0 + b_0 \neq C^3. \tag{12}$$

В этом видится противоречие, позволяющее доказать теорему 3.

Список цитированной литературы

1. Постников М. М. Теорема Ферма. Введение в теорию алгебраических чисел. М.: Наука, 1978. 130 с.

2. Эдвардс Г. Последняя теорема Ферма. Генетическое введение в алгебраическую теорию чисел. М.: Мир, 1980. 485 с.

3. Мачис Ю. Ю. О предпологаемом доказательстве Эйлера // Мат. заметки. 2007. Том. 3. № 82. С. 395–400.

Псковский государственный университет
Получено 23.03.2015

УДК 511.42

Распределение алгебраических точек в областях малой меры и вблизи поверхностей

В. И. Берник, А. Г. Гусакова (Минск, Беларусь), А. В. Устинов (Хабаровск)

bernik.vasili@mail.ru gusakova.anna.0@gmail.com ustinov.alexey@gmail.com

Пусть задано некоторое $Q > 1$ и цилиндр $T = I \times K$, где $I \subset \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$ - интервал длины $|I| = c_1 Q^{-\gamma}$, $K \subset B(0,1)$ - круг радиуса $c_2 Q^{-\gamma}$ в комплексной плоскости, $0 < \gamma \le 1$. Также считаем, что $T \cap \{|\Im\, z| \le \delta\} = \varnothing$, где δ - некоторая малая величина. Рассмотрим неприводимый многочлен $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ с условием НОД$(a_1, \ldots, a_n) = 1$ степени $\deg P = n$ и высоты $H(P) \le Q$. Корни такого многочлена α являются алгебраическими числами степени $\deg\alpha = \deg P = n$ и высоты $H(\alpha) = H(P) \le Q$. Многочлен $P(x)$ называется минимальным многочленом алгебраического числа α.

Здесь и далее $c_i, i = 1, 2, ...$ являются величинами, зависящими только от степени многочлена.

Точку (α, β), $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{C}$ будем называть алгебраической, если α и β корни одного многочлена $P \in \mathbb{Z}[x]$.

Можно доказать, что алгебраические точки всюду плотны в пространстве $\mathbb{R} \times \mathbb{C}$, однако, если воспользоваться методом Шмидта [4], то меры цилиндров T окажутся значительно больше, чем $c_3 Q^{-3}$. В [5] доказано, что действительные алгебраические числа обязательно попадают в интервалы длины $c_4 Q^{-1}$ при достаточно большой величине c_4.

Нами доказано несколько теорем о распределении алгебраических точек в $\mathbb{R} \times \mathbb{C}$.

Теорема 1. *Для любых натуральных Q и $n \geqslant 3$ существует цилиндр T объема $\mu T = c_5 Q^{-3}$, внутри которого нет алгебраических точек (α, β) степени $\deg\alpha = \deg\beta \le n$ и высоты $H(\alpha) = H(\beta) \le Q$.*

Введем класс многочленов

$$\mathcal{P}_3(Q) = \{P(x) \in \mathbb{Z}[x], \deg P = 3, H(P) \le Q\}.$$

Следующая теорема 2 позволяет связать количество алгебраических точек третьей степени и высоты, не превосходящей Q с объемом цилиндра T.