3. Фролова Ю.Ю., Шулежко О.В. О почти нильпотентных многообразиях алгебр Лейбница // Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения: тез. докл. XI Междунар. конф. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2013. С. 84–85.

4. Мищенко С.П., Шулежко О. В. Почти нильпотентные многообразия любой целой экспоненты // Вестник Московского университета. Серия 1. Математика. Механика. 2015. № 2. С. 53–57.

5. Mishchenko S., Valenti A. An almost nilpotent variety of exponent 2 // Israel Journal of Mathematics, V. 199 (2014). Issue 1. P. 241–257.

Ульяновский государственный университет
Получено 13.04.2015

УДК 511.3

Экстремальные задачи сферических упаковок[1]

О. Р. Мусин (Москва)
oleg.musin@utb.edu

В докладе предполагается обсудить серию наших работ по упаковкам шаров [1–10]. Мы рассмотрим проблему контактных чисел, задачу Таммеса и другие экстремальные задачи сферических упаковок.

Контактным числом $k(n)$ называют наибольшее число не пересекающихся шаров одинакового радиуса в $\mathbb{R}^n$, которые можно расположить так, чтобы все они касались одного (центрального) шара такого же радиуса.

Очевидно, что $k(2) = 6$. В трехмерном пространстве, в задаче о контактных числах спрашивается: "Как много белых бильярдных шаров могут одновременно касаться черного бильярдного шара?" Этот вопрос был предметом спора между И. Ньютоном и Д. Грегори в 1694 году. Ньютон считал, что $k(3) = 12$, в то время как Грегори думал, что ответ может быть равен 13. Эту задачу Ньютона — Грегори часто называют *проблемой тринадцати шаров*. Проблема тринадцати шаров оказалось достаточно трудной и была решена только в 1953 году. К. Шютте и Б. Л. Ван дер Варден доказали, что Ньютон был прав и $k(3) = 12$. Заметим, что проблема контактных чисел решена только для размерностей $n = 3, 4, 8$ и 24 (см. [1, 2, 4, 5]).

У проблемы 13 шаров имеется естественное обобщение: найти расположение множества X, состоящего из N точек на $\mathbb{S}^2$, такое что минимальное расстояние между точками X - максимально возможное. Эту задачу впервые поставил голландский ботаник Таммес в 1930 году.

Задача Таммеса решена только для нескольких значений N:

[1]Работа выполнена при частичной поддержке грантов РФФИ 15–01–99563 и 13–01–12458.

для $N = 3, 4, 6, 12$ ее решил Л. Фейеш Тот (1943);
для $N = 5, 7, 8, 9$ — Шютте и ван дер Варден (1951);
для $N = 10, 11$ — Л. Данцер (1963) и
для $N = 24$ — Р. М. Робинсон (1961).
Недавно мы решили эту задачу для $N = 13$ [7] и для $N = 14$ [10].

В работе [8], с точностью до изометрии, нами были перечислены все локально-жесткие упаковки конгруэнтных кругов (сферических шапочек) на единичной сфере с числом кругов $N < 12$. Эта задача эквивалентна перечислению сферических неприводимых контактных графов. В докладе мы покажем, что с помощью списка неприводимых контактных графов можно решать различные задачи об экстремальных упаковках таких как задача Таммеса для сферы и проективной плоскости, задача о наибольшем числе контактов у сферических упаковок, задачи Данцера и другие задачи о неприводимых контактных графах, см. [9].

Список цитированной литературы

1. P. Boyvalenkov, S. Dodunekov and O. R. Musin, A survey on the kissing numbers, Serdica Mathematical Journal, **38** (2012), 507-522.

2. О. Р. Мусин, Проблема двадцати пяти сфер, УМН, **58:4** (2003), 153-154.

3. O. R. Musin, The kissing problem in three dimensions, Discrete Comput. Geom., **35** (2006), 375-384.

4. O. R. Musin, The one-sided kissing number in four dimensions, Periodica Math. Hungar., **53** (2006), 209-225.

5. O. R. Musin, The kissing number in four dimensions, Ann. of Math., **168** (2008), 1-32.

6. O. R. Musin and A. V. Nikitenko, Optimal packings of congruent circles on a square flat torus, Discrete Comput. Geom., 2015

7. O. R. Musin and A. S. Tarasov, The Strong Thirteen Spheres Problem, Discrete & Comput. Geom., **48** (2012), 128-141.

8. О. Р. Мусин, А. С. Тарасов, Перечисление неприводимых контактных графов на сфере, Фундамент. и прикл. матем., **18:2** (2013), 125–145.

9. О. Р. Мусин, А. С. Тарасов, Экстремальные задачи упаковок кругов на сфере и неприводимые контактные графы, Тр. МИАН, 2015, **288** (2015), 133–148.

10. O. R. Musin and A. S. Tarasov, The Tammes problem for N=14, Experimental Math., 2015

ИППИ РАН и UTB (University of Texas at Brownsville).
Получено 5.05.2015

УДК 511.36+517.91

Алгебраическая независимость решений линейных дифференциальных уравнений

Ю. В. Нестеренко (Москва)
nester@mi.ras.ru

Область математической деятельности, связанная с исследованиями указанных в названии доклада проблем, пережила период активности и плодотворного развития в период 1960-х — 1980-х годов, после того, как А. Б. Шидловский доказал свою знаменитую теорему об алгебраической независимости значений E-функций Зигеля в алгебраических точках [1].

Открывшиеся после этого перспективы доказательства трансцендентности и алгебраической независимости значений целых обобщённых гипергеометрических функций с рациональными параметрами привели к доказательству новых достаточно общих результатов во многом исчерпавших эту область. Плодотворными оказались не аналитические методы исследования комплексных линейных дифференциальных уравнений с коэффициентами — рациональными функциями, но алгебраические подходы основанные на методах дифференциальной алгебры, исследованиях формальных дифференциальных полей и их теории Галуа.

Одновременно количественные проблемы теории трансцендентных чисел — исследования оценок мер алгебраической независимости значений функций, удовлетворяющих дифференциальным уравнениям, привели к пониманию важности аналогичных вопросов в функциональной области. Речь шла об оценках кратностей нулей многочленов от фиксированных решений дифференциальных уравнений в зависимости от степеней многочленов.

Приложения к исследованиям эллиптических и абелевых функций породили с одной стороны исследования кратностей нулей многочленов на алгебраических группах, а с другой — исследования алгебраической независимости функций, удовлетворяющих нелинейным алгебраическим дифференциальным уравнениям. Последнее оказалось связанным с результатами об арифметических свойствах значений модулярных функций. В частности, на этом пути была доказана алгебраическая независимость чисел π и e^{π}.

Я хотел бы своим докладом привлечь внимание к описанной выше области математической деятельности, переживающей в настоящее время период некоторого затишья.