ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 16 Выпуск 2 (2015)

УДК 512.572

О НОВЫХ СВОЙСТВАХ НЕКОТОРЫХ МНОГООБРАЗИЙ ПОЧТИ ПОЛИНОМИАЛЬНОГО РОСТА

Ю. Р. Пестова (г. Ульяновск)

Аннотация

При изучении разных математических структур хорошо известным и давно используемым в математике алгебраическим приемом является выделение классов объектов исследования с помощью тождеств. Класс всех линейных алгебр над некоторым полем, в которых выполнен фиксированный набор тождественных соотношений, А.И. Мальцев назвал многообразием линейных алгебр над заданным полем. Существует такое понятие как рост многообразия. В математическом анализе принято различать полиномиальный или степенной, экспоненциальный или показательный рост. В данной работе речь пойдет о свойствах некоторых многообразий в разных классах линейных алгебр над полем нулевой характеристики, имеющих почти полиномиальный рост, то есть таких многообразий, рост которых не является полиномиальным, но рост любого собственного подмногообразия полиномиален. Статья носит обзорный характер и не содержит новых результатов.

Один из разделов статьи посвящен описанию основных свойств ассоциативных, лиевых многообразий и многообразий алгебр Лейбница почти полиномиального роста над полем нулевой характеристики. В случае ассоциативных алгебр таких многообразий всего два. В классе алгебр Ли четыре многообразия исчерпывают весь набор разрешимых лиевых многообразий почти полиномиального роста, а одно многообразие является неразрешимым и вопрос о его единственности до сих пор остается открытым. В случае алгебр Лейбница существует девять многообразий почти полиномиального роста. Пять из них это упомянутые многообразия алгебр Ли, которые также являются многообразиями алгебр Лейбница. Оставшиеся четыре это многообразия по свойствам схожие с разрешимыми лиевыми многообразиями почти полиномиального роста.

Следующие два раздела мы посвятим описанию давно известных, а также полученных недавно характеристик двух лиевых многообразий почти полиномиального роста. В одном из разделов речь пойдет о найденной нами кодлине многообразия, порожденного трехмерной простой алгеброй Ли sl_2, которую образует множество всех матриц второго порядка со следом равным нулю над основным полем относительно операции коммутирования. Далее будет описан базис полилинейной части многообразия, состоящего из алгебр Ли с нильпотентным ступени не выше двух коммутантом. Здесь же мы представим явные формулы для вычисления его кодлин и коразмерностей.

Последний раздел будет посвящен описанию базиса полилинейной части многообразия алгебр Лейбница почти полиномиального роста, определенного тождеством $x_1(x_2x_3)(x_4x_5) \equiv 0$.

Ключевые слова: многообразие, почти полиномиальный рост, кодлина, коразмерность, базис полилинейной части.

ON NEW PROPERTIES OF SOME VARIETIES WITH ALMOST POLYNOMIAL GROWTH

Yu. R. Pestova

Abstract

In the study of different mathematical structures well known and long used in mathematics algebraic method is the selection of classes of objects by means of identities. Class of all linear algebras over some field in which a fixed set of identities takes place is called the variety of linear algebras over a given field by A.I. Malcev. We have such concept as the growth of the variety. There is polynomial or exponential growth in mathematical analysis. In this work we will speak about properties of some varieties in different classes of linear algebras over zero characteristic field with almost polynomial growth. That means that the growth of the variety is not polynomial, but the growth of any its own subvariety is polynomial. The article has a synoptic and abstract character.

One unit of the article is devoted to the description of basic properties all associative, Lie's and Leibniz's varieties over zero characteristic field with almost polynomial growth. In the case of associative algebras there are only two such varieties. In the class of Lie algebras there are exactly four solvable varieties with almost polynomial growth and is found one unsolvable variety wiht almost polynomial growth and the question about its uniqueness is opened in our days. In the case of Leibniz algebras there are nine varieties with almost polynomial growth. Five of them are named before Lie varieties, which are Leibniz varieties too. The last four ones are varieties which have the same properties as solvable Lie varieties of almost polynomial growth.

Next units we'll devote to famous and new characteristics of two Lie's varieties with almost polynomial growth. In the first of them we speak about found by us colength of the variety generated by three-dimensional simple Lie algebra sl_2, which is formed by a set of all 2×2 matrices with zero trace over a basic field with operation of commutation.

Then it will be described a basis of multilinear part of the variety which consists of Lie algebras with nilpotent commutant degree not higher than two. Also we'll give formulas for its colength and codimension.

The last unit is devoted to description the basis of multilinear part of Leibniz variety with almost polynomial growth defined by the identity $x_1(x_2x_3)(x_4x_5) \equiv 0$.

Keywords: variety, almost polynomial growth, colength, codimension, basis of multilinear part.

1. Введение

На протяжении всей статьи характеристика основного поля Φ равна нулю. Все неопределяемые понятия можно найти в монографиях [1] и [2].

Напомним, что линейная алгебра является векторным пространством и ее операции являются линейными по каждому аргументу. Пусть u и v разные элементы абсолютно свободной алгебры, то есть $u \neq v$. Мы будем использовать знак равенства с тремя черточками вместо обычного равенства и называть тождеством выражение $u \equiv v$. Одно и тоже тождество может выполняться в одной алгебре и не выполняться в другой. Обычное равенство мы будем понимать в привычном для нас смысле. Например, тождество коммутативности $xy \equiv yx$ выполняется в алгебре многочленов, так как для любых двух многочленов f, g выполняется равенство $fg = gf$. В то же время тождество коммутативности не выполняется в ассоциативной алгебре всех квадратных матриц.

Напомним, что линейная алгебра называется *ассоциативной*, если в ней выполняется тождество ассоциативности $(xy)z \equiv x(yz)$. Если же это тождество не выполняется в алгебре, то необходимо следить за скобочной структурой. Для удобства договоримся опускать в элементах скобки в случае левонормированного произведения, то есть $(ab)c = abc$. *Алгеброй Ли* называется линейная алгебра, в которой выполняются тождество антикоммутативности $x^2 \equiv 0$ и тождество Якоби $xyz + yzx + zxy \equiv 0$. Хорошо известно [1], что любое произведение элементов в алгебре Ли равно линейной комбинации произведений с левонормированной расстановкой скобок. Линейная алгебра называется *алгеброй Лейбница*, если в ней выполняется тождество Лейбница $xyz \equiv xzy + x(yz)$. Заметим, что понятие алгебры Лейбница является обобщением понятия алгебр Ли, так как из тождеств алгебры Ли следует, в частности, тождество Лейбница. Последние две алгебры являются примерами неассоциативных алгебр.

Пусть $\mathbf{V}$ — некоторое многообразие алгебр (ассоциативных, Ли или Лейбница), а $\Phi(X, \mathbf{V})$ — относительно свободная алгебра этого многообразия со счетным множеством свободных образующих $X = \{x_1, x_2, \dots\}$. Множество всех полилинейных элементов от $x_1, \dots, x_n$ в алгебре $\Phi(X, \mathbf{V})$ обозначим через $P_n(\mathbf{V})$ и определим естественным способом на нем структуру модуля симметрической группы S_n. Результат действия перестановки $p \in S_n$ на полилинейном левонормированном мономе

$$x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_n} \in P_n(\mathbf{V})$$

равен $x_{p(i_1)} x_{p(i_2)} \dots x_{p(i_n)}$. Еще в середине прошлого века в работе [3] было показано, что в случае нулевой характеристики основного поля любое тождество эквивалентно системе полилинейных тождеств. Таким образом, вся информация о многообразии $\mathbf{V}$ содержится в пространствах $P_n(\mathbf{V})$, $n = 1, 2, \dots,$ так называемых, полилинейных частях многообразия. Поэтому исследование структуры S_n-модуля $P_n(\mathbf{V})$ играет важную роль при изучении многообразия $\mathbf{V}$. Модуль $P_n(\mathbf{V})$ является вполне приводимым, рассмотрим разложение его характера в целочисленную комбинацию неприводимых характеров χ_λ с кратностями m_λ, где $\lambda \vdash n$ — разбиение числа n,

$$\chi_n(\mathbf{V}) = \chi(P_n(\mathbf{V})) = \sum_{\lambda \vdash n} m_\lambda \chi_\lambda. \tag{1}$$

К важным числовым характеристикам многообразия $\mathbf{V}$ относится его последовательность коразмерностей $c_n(\mathbf{V})$, являющаяся размерностью пространства $P_n(\mathbf{V})$, кратности m_λ и последовательность кодлин

$$l_n(\mathbf{V}) = \sum_{\lambda \vdash n} m_\lambda, \;\; n = 1, 2, \ldots,$$

то есть последовательность длин модулей $P_n(\mathbf{V})$.

Обозначим через d_λ размерность соответствующего разбиению λ неприводимого модуля, то есть $d_\lambda = \deg \chi_\lambda$. Понятно, что имеет место такое равенство

$$c_n(\mathbf{V}) = \dim P_n(\mathbf{V}) = \sum_{\lambda \vdash n} m_\lambda d_\lambda.$$

Асимптотическое поведение размерности пространства $P_n(\mathbf{V})$ определяет рост многообразия. Напомним, что рост многообразия называется полиномиальным, если существуют такие числа C, k, что для любого n выполняется неравенство $c_n(\mathbf{V}) < Cn^k$. Говорят, что многообразие $\mathbf{V}$ имеет почти полиномиальный рост, если рост самого многообразия не является полиномиальным, но рост любого собственного подмногообразия полиномиален. Напомним также, что экспонентой многообразия $\mathbf{V}$ называется предел

$$exp(\mathbf{V}) = \lim_{\mathbf{n} \to \infty} \sqrt[n]{c_n(\mathbf{V})}$$

в случае его существования.

Целью данной работы является описание многообразий почти полиномиального роста в различных классах линейных алгебр.

В случае ассоциативных алгебр существуют только два многообразия почти полиномиального роста. В классе алгебр Ли существует ровно четыре разрешимых многообразий почти полиномиального роста и найдено одно неразрешимое многообразие почти полиномиального роста. В случае алгебр Лейбница найдены еще четыре многообразия с аналогичным экстремальным свойством. Все эти многообразия будут представлены в первом разделе данной работы. В случае поля нулевой характеристики в работе [4] найдена формула кодлины многообразия, порожденного трехмерной простой алгеброй Ли sl_2. Этому результату будет посвящен второй раздел нашей статьи. В третьем разделе будут представлены формулы кодлины и коразмерности многообразия, состоящего из алгебр

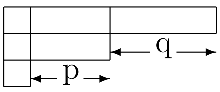
Ли с нильпотентным ступени не выше двух коммутантом, а также описан базис его полилинейной части. Этот результат был опубликован в работе [5]. В последнем разделе мы опишем результат, который был представлен в работе [6], а именно базис полилинейной части многообразия алгебр Лейбница, определенного тождеством $x_1(x_2x_3)(x_4x_5) \equiv 0$.

2. Описание многообразий почти полиномиального роста в классе ассоциативных алгебр, алгебр Ли и алгебр Лейбница

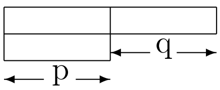
В теории ассоциативных алгебр особую роль играют бесконечномерная алгебра Грассмана G и алгебра верхнетреугольных матриц порядка два UT_2. Существует только два многообразия ассоциативных алгебр почти полиномиального роста. Они порождены алгебрами G и UT_2 соответственно. Перечислим основные свойства многообразий, порожденных этими алгебрами.

Начнем с многообразия, порожденного алгеброй верхнетреугольных матриц порядка два UT_2. В работе [3] найден базис тождеств рассматриваемого многообразия, состоящий из тождества $[x_1, x_2][x_3, x_4] \equiv 0$. Опишем структуру полилинейной части $P_n(\mathbf{UT}_2)$, о которой подробно изложено, например, в работах [7], [8]. В разложении (1) характера полилинейной части $P_n(\mathbf{UT}_2)$ $m_{(n)} = 1$ и $m_{(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)} = \lambda_1 - \lambda_2 + 1$, если $\lambda_2 \geqslant 1$ и $\lambda_3 = 0$ или $\lambda_3 = 1$. Также $m_\lambda = 0$, если $\lambda_4 \neq 0$ или $\lambda_3 \geqslant 2$.

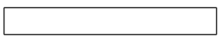
Если полилинейную часть рассматривать как S_n-модуль, то она имеет вид:



$m_\lambda = q + 1$,
где $\lambda = (p + q + 1, p + 1, 1)$;



$m_\lambda = q + 1$,
где $\lambda = (p + q, p)$, $p > 0$;



$m_\lambda = 1$,
где $\lambda = (n)$.

Базис полилинейной части $P_n(\mathbf{UT}_2)$ состоит из следующих множеств полилинейных элементов

$$x_1 \dots x_n \text{ и } x_{i_1} \dots x_{i_r}[x_i, x_j]x_{j_1} \dots x_{j_s}$$

для любых i, j; $r \geqslant 0$ и $s \geqslant 0$ таких, что $n = s + r + 2$ и $i_1 < \dots < i_r$, $j_1 < \dots < j_s$. Для многообразия, порожденного алгеброй UT_2, укажем такие числовые характеристики как коразмерность, кодлина и экспонента:

$$c_n(\mathbf{UT}_2) = 2^{n-1}(n-2) + 2,\ l_n(\mathbf{UT}_2) = \frac{1}{2}n^2 + \frac{5}{2}n + 4,\ \exp(\mathbf{UT}_2) = 2.$$

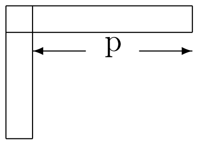
Бесконечномерной алгеброй Грассмана над полем Φ называется ассоциативная алгебра с бесконечным числом образующих $e_1, e_2, e_3, \dots$ и определяющими соотношениями $e_i e_k + e_k e_i = 0$. Многообразие, порожденное этой алгеброй, подробно исследовано, например, в работе [9]. Характер (1) полилинейной части $P_n(\mathbf{G})$ имеет разложение

$$\chi_n(\mathbf{G}) = \sum_{r=0}^{n-1} \chi_{(n-r,1^r)}$$

и кратности находятся по формулам

$$m_\lambda = \begin{cases} 1, & \text{если } \lambda_2 \leqslant 1; \\ 0, & \text{если } \lambda_2 \geqslant 2. \end{cases}$$

Структура полилинейной части $P_n(\mathbf{G})$ многообразия, порожденного бесконечномерной алгеброй Грассмана, как S_n-модуля имеет вид:



$m_\lambda = 1$,
где $\lambda = (p+1, 1^{n-p-1})$,
$p = 0, \ldots, n-1$.

Тождество $[[x_1, x_2], x_3] \equiv 0$ является базисом тождеств этого многообразия. Базис полилинейной части $P_n(\mathbf{G})$ состоит из элементов вида

$$x_{i_1} \ldots x_{i_r} [x_{j_1}, x_{j_2}] \ldots [x_{j_{s-1}}, x_{j_s}],$$

для любых $r \geqslant 0$ и $s \geqslant 0$ таких, что $n = s + r$ и $i_1 < \ldots < i_r$, $j_1 < \ldots < j_s$. Что касается основных числовых характеристик, то коразмерность $c_n(\mathbf{G}) = 2^{n-1}$, кодлина $l_n(\mathbf{G}) = n$ и экспонента $exp(\mathbf{G}) = 2$.

Еще раз повторим, что многообразия, порожденные алгебрами G и UT_2, единственные многообразия почти полиномиального роста в случае ассоциативных алгебр и не существует ассоциативных многообразий промежуточного роста (между полиномиальным и экспоненциальным).

В классе алгебр Ли известны пять многообразий почти полиномиального роста. Сохраним принятые для них в работе [10] обозначения $\mathbf{V}_0$, $\mathbf{V}_1$, $\mathbf{V}_2$, $\mathbf{V}_3$, $\mathbf{V}_4$. Все эти многообразия подробно описаны в работах [10], [11]. Изложим основные сведения о них.

Рассмотрим матрицы второго порядка со следом нуль над основным полем нулевой характеристики относительно операции коммутирования. Множество этих матриц образует трехмерную простую алгебру Ли, которую обозначим sl_2. Многообразие $\mathbf{V}_0$ порождено этой алгеброй. Оно достаточно хорошо изучено, и мы к нему еще вернемся во втором разделе, в частности, перечислим основные свойства этого многообразия, а также определим формулы для вычисления его кодлины.

Обозначим многообразие всех нильпотентных алгебр ступени нильпотентности не выше s через $\mathbf{N_s}$, а многообразие всех абелевых алгебр — $\mathbf{A}$. Тогда их произведение $\mathbf{N}_s\mathbf{A}$ состоит из всех таких алгебр R, которые содержат идеал $I \in \mathbf{N}_s$

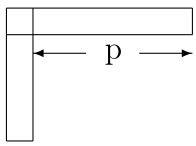
такой, что $R/I \in \mathbf{A}$. $\mathbf{N}_s\mathbf{A}$ — многообразие алгебр Ли, определяемое тождеством $(x_1x_2)\ldots(x_{2s+1}x_{2s+2}) \equiv 0$. Таким образом, многообразие $\mathbf{N}_2\mathbf{A}$ состоит из алгебр, имеющих нильпотентный ступени не выше двух идеал, фактор-алгебра по которому является абелевой и определяется тождеством $(x_1x_2)(x_3x_4)(x_5x_6) \equiv 0$. Многообразие алгебр Ли $\mathbf{V}_1 = \mathbf{N}_2\mathbf{A}$ достаточно подробно исследовано в работе [12]. Основные свойства данного многообразия мы перечислим в третьем разделе, а также предоставим новые результаты для него: построим базис полилинейной части $P_n(\mathbf{N}_2\mathbf{A})$, найдем формулы для вычисления его кодлин и коразмерностей.

Следующим примером лиева многообразия почти полиномиального роста является многообразие $\mathbf{V}_2$, которое было построено в работе [13]. Оно порождается следующей алгеброй. Пусть G является бесконечномерной алгеброй Грассмана. Обозначим через G^0 ту же самую алгебру только относительно другого умножения, когда результат произведения любых двух ее элементов равен нулю, то есть для любых $g_1^0, g_2^0 \in G^0$ произведение $g_1^0 g_2^0 = 0$. Рассмотрим прямую сумму векторных пространств G^0 и G и определим на нем произведение следующим образом

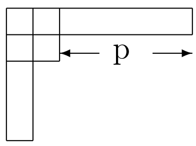
$$(g_1^0 + g_1)(g_2^0 + g_2) = (g_1^0 g_2)^0 - (g_2^0 g_1)^0 + [g_1, g_2],$$

где $[g_1, g_2]$ – это коммутатор в ассоциативной алгебре Грассмана. Изоморфной этой алгебре является алгебра квадратных матриц порядка два, у которой первая строка состоит из элементов алгебры Грассмана, а вторая строка нулевая, рассматриваемая относительно операции коммутирования матриц (подробности см. [1], стр. 265).

Диаграммы Юнга, для которых кратности многообразия $\mathbf{V}_2$ отличны от нуля, имеют следующий вид:



$m_\lambda = 1$,
где $\lambda = (p+1, 1^{n-p-1})$,
$p = 1, \ldots, n-2$;



$m_\lambda = 1$,
где $\lambda = (p+2, 2, 1^{n-p-4})$,
$p = 0, \ldots, n-4$.

Заметим, что базис тождеств этого многообразия состоит из следующих двух тождественных соотношений

$$(x_1x_2x_3)(x_4x_5x_6) \equiv 0,$$

$$(x_1x_2)(x_3x_4)(x_1x_3) \equiv 0.$$

Обратим внимание, что последнее тождество отлично от тождества, определяющего многообразие $\mathbf{V}_1 = \mathbf{N}_2\mathbf{A}$, так как оно не является полилинейным, хотя и имеет ту же скобочную структуру. Формулы для вычисления кодлины и коразмерности данного многообразия следующие: $l_n(\mathbf{V}_2) = 2n - 5$ для всех $n \geqslant 3$, $c_n(\mathbf{V}_2) = (n-2)2^{n-2}$. Экспонента многообразия $exp(\mathbf{V}_2) = 2$.

И наконец, последние два многообразия почти полиномиального роста определяются схожим образом. Многообразия $\mathbf{V}_3$ и $\mathbf{V}_4$ построены в статье [11]. Пусть R – ассоциативно-коммутативное кольцо многочленов от переменной t, рассматриваемое как алгебра с нулевым умножением, то есть $R^2 = 0$. N_3 – это трехмерная нильпотентная алгебра Гейзенберга с базисом $\{a,\, b,\, c\}$ и таблицей умножения $ba = c$, $ab = -c$, $a^2 = b^2 = c^2 = 0$, $ac = ca = bc = cb = 0$, а M_2 – двумерная метабелева (разрешимая ступени 2) алгебра Ли с базисом $\{h,\, e\}$ и таблицей умножения $he = h$, $eh = -h$ и $h^2 = e^2 = 0$.

Превратим R в правый N_3-модуль, полагая

$$f(t)a = f'(t),\ f(t)b = tf(t),\ f(t)c = f(t),$$

а также в M_2-модуль, считая, что

$$f(t)h = tf(t),\ f(t)e = tf'(t),$$

где штрих над многочленом обозначает, как обычно, взятие производной. Пусть N является полупрямым произведением алгебр Ли R и N_3, а M – полупрямым произведением алгебр Ли R и M_2. Тогда в алгебре N умножение определяется так

$$(f_1 + n_1)(f_2 + n_2) = f_1 n_2 - f_2 n_1 + n_1 n_2,$$

где $f_1, f_2 \in R$, $n_1, n_2 \in N_3$ и в алгебре M аналогично. Алгебра N порождает многообразие $\mathbf{V}_3$, а алгебра M – многообразие $\mathbf{V}_4$.

В случае многообразий алгебр Лейбница, кроме лиевых многообразий почти полиномиального роста, построены еще четыре многообразия почти полиномиального роста $\widetilde{\mathbf{V}}_1$, $\widetilde{\mathbf{V}}_2$, $\widetilde{\mathbf{V}}_3$, $\widetilde{\mathbf{V}}_4$, которые по своим свойствам схожи с разрешимыми лиевыми.

Многообразие $\widetilde{\mathbf{V}}_1$ исследовано в работе [8]. Это многообразие определяется тождеством $x_1(x_2x_3)(x_4x_5) \equiv 0$ и оно является аналогом многообразия алгебр Ли $\mathbf{N}_2\mathbf{A} = \mathbf{V}_1$. Более подробно об этом многообразии мы поговорим в четвертом разделе данной работы.

Следующее многообразие $\widetilde{\mathbf{V}}_2$ представлено в работе [14] и его свойства близки к свойствам многообразия алгебр Ли $\mathbf{V}_2$. Это многообразие порождается алгеброй следующего вида. Пусть G^0 бесконечномерная алгебра Грассмана с нулевым умножением. Рассмотрим прямую сумму векторных пространств G^0 and G и определим произведение

$$(g_1^0 + g_1)(g_2^0 + g_2) = (g_1^0 g_2)^0 + [g_1, g_2],$$

где $[g_1, g_2]$ — это коммутатор в ассоциативной алгебре Грассмана. При разложении n-го кохарактера (1) многообразия $\widetilde{\mathbf{V}}_2$ в целочисленную комбинацию неприводимых характеров χ_λ с кратностями $\widetilde{m}_\lambda$ для всех $n \geq 4$ имеем

$$\widetilde{m}_\lambda = \begin{cases} 2, & \text{если } \lambda = (r, 1^{n-r}), \text{ где } n > 2 \text{ и } r = 2, \ldots, n-1; \\ 1, & \text{если } \lambda = (n),\ (1^n) \text{ или } (r, 2, 1^{n-r-2}), \text{ где } r = 2, \ldots, n-4; \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Также для вычисления кодлины многообразия $\widetilde{\mathbf{V}}_2$ верна формула $l_n(\widetilde{\mathbf{V}}_2) = 3n - 5$ при $n \geqslant 3$. Экспонента этого многообразия равна двум $exp(\widetilde{\mathbf{V}}_2) = 2$. В работе [15] доказано, что базис тождеств здесь состоит из следующих двух тождественных соотношений:

$$x(y(zt)) \equiv 0,$$

$$z(x\,y)(x\,y) \equiv 0.$$

Многообразия $\widetilde{\mathbf{V}}_3$ и $\widetilde{\mathbf{V}}_4$ определены следующим образом в работе [16]. Рассмотрим кольцо многочленов R от переменной t как алгебру Лейбница с нулевым умножением. Алгебру R будем считать правым N_3-модулем алгебры Гейзенберга N_3 со следующим действием:

$$f(t)a = f'(t),\ f(t)b = tf(t),\ f(t)c = f(t),$$

где штрих над многочленом обозначает взятие производной. Прямую сумму алгебр N_3 и R обозначим $\widetilde{N}$ и зададим умножение следующим образом:

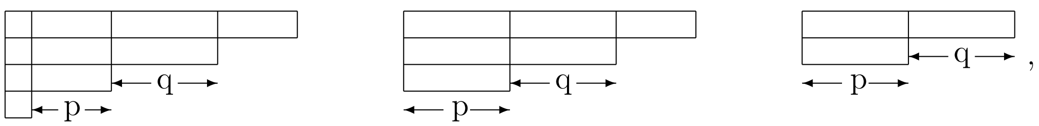
$$(x + f(t))(y + g(t)) = xy + f(t)y,$$

где $x, y \in N_3,\ f(t), g(t) \in R$. Алгебра $\widetilde{N}$ порождает многообразие алгебр Лейбница $\widetilde{\mathbf{V}}_3$. Зададим действие элементов двумерной метабелевой алгебры Ли M_2 на элементы R: $f(t)e = tf'(t),\ f(t)h = tf(t)$. Пусть $\widetilde{M}$ является прямой суммой алгебр N_3 и R с заданной на ней умножением

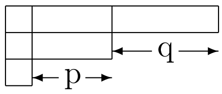
$$(m_1 + f(t))(m_2 + g(t)) = m_1 m_2 + f(t)m_2,$$

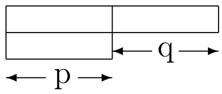
где $m_1, m_2 \in M_2,\ f(t), g(t) \in R$. Тогда эта алгебра порождает многообразие $\widetilde{\mathbf{V}}_4$.

Заметим, что экспонента многообразия $\widetilde{\mathbf{V}}_3$ равна трем, а экспонента $\widetilde{\mathbf{V}}_4$ равна двум. Скажем еще, что для многообразия $\widetilde{\mathbf{V}}_3$ ненулевые кратности существуют только для диаграмм вида



а для многообразия $\widetilde{\mathbf{V}}_4$ они выглядят следующим образом:





Многообразия $\widetilde{\mathbf{V}}_1$, $\widetilde{\mathbf{V}}_2$, $\widetilde{\mathbf{V}}_3$ и $\widetilde{\mathbf{V}}_4$ имеют почти полиномиальный рост и в случае алгебр Лейбница существование других примеров многообразий почти полиномиального роста остается открытой проблемой.

3. Кодлина многообразия, порожденного трехмерной простой алгеброй Ли sl_2

Рассмотрим матрицы второго порядка со следом 0 над основным полем относительно операции коммутирования. Как мы уже говорили, множество этих матриц образует трехмерную простую алгебру Ли, которую обозначим sl_2. Следуя [10], для многообразия, порожденного этой алгеброй, сохраним обозначение $\mathbf{V}_0$. Это многообразие достаточно хорошо изучено. Так, например, в работах [17], [18] доказано, что оно является шпехтовым, это значит, что оно само и любое его подмногообразие определяется конечным набором тождеств; а также получен базис тождеств данного многообразия:

$$\sum_{p\in S_4}(-1)^p x_0x_{p(1)}x_{p(2)}x_{p(3)}x_{p(4)} \equiv 0, \quad (x_2x_1)(x_3x_1)x_1 \equiv 0.$$

В статье [19] получена информация о строении полилинейных частей этого многообразия как модулей симметрических групп, построены ненулевые элементы относительно свободной алгебры многообразия $\mathbf{V}_0$, линеаризациями которых порождаются неприводимые модули в полилинейной части $P_n(\mathbf{V}_0)$. Сформулируем необходимый нам в дальнейшем результат о кратностях в виде отдельной теоремы [19].

Теорема 1. *В разложении (1) характера полилинейной части* $P_n(\mathbf{V}_0)$, $n > 1$, *для кратностей выполняются следующие равенства:*

$$m_\lambda = \begin{cases} 1, & \text{если } \lambda = (p+q+r, p+q, p), \text{ где } p+q \neq 0 \text{ и } q \text{ или } r \text{ нечетное;} \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Поясним, что в связи с тем, что тождества, которые выполняются в алгебре sl_2 имеют степень не менее пяти, то модуль $P_n(\mathbf{V}_0)$ при $n \le 4$ совпадает с соответствующим модулем многообразия всех алгебр Ли и его строение хорошо известно (см., например, [1]), а именно:

$$\chi_1(\mathbf{V}_0) = \chi_{(1)}, \quad \chi_2(\mathbf{V}_0) = \chi_{(1,1)}, \quad \chi_3(\mathbf{V}_0) = \chi_{(2,1)}, \quad \chi_4(\mathbf{V}_0) = \chi_{(3,1)} + \chi_{(2,1,1)}.$$

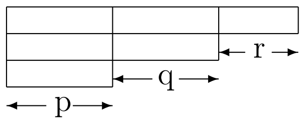
Для доказательства основной теоремы этого раздела нам понадобятся вспомогательные результаты, которые мы сформулируем в виде лемм. Все ниже изложенные результаты принадлежат автору и их доказательство опубликовано в работе [4].

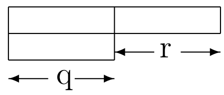
Лемма 1. *Для кодлин многообразия* $\mathbf{V}_0$ *при* $n \ge 4$ *верно следующее соотношение:*

$$l_n(\mathbf{V}_0) = l_{n-3}(\mathbf{V}_0) + a_n + \varepsilon_n, \tag{2}$$

где $a_n = \begin{cases} \frac{n}{4}, & \text{если } n = 4k; \\ \frac{n+2}{4}, & \text{если } n = 4k+2; \\ \frac{n-1}{2}, & \text{если } n = 2m+1 \end{cases}$ *и* $\varepsilon_n = \begin{cases} 1, & \text{если } n = 2m; \\ 0, & \text{если } n = 2m+1. \end{cases}$

Доказательство. С дополнительными условиями на числа p, q, r согласно теореме 1 ненулевые кратности многообразия $\mathbf{V}_0$ могут быть получены только для диаграмм следующих видов:





Обозначим через a_n вклад в кодлину кратностей, соответствующих разбиениям на две части, то есть когда $p = 0$. В зависимости от четности степени n при рассмотрении двухстрочковых диаграмм Юнга и и вычисления соответствующих им кратностей, исходя из теоремы 1, получим сумму a_n. Для диаграмм Юнга, состоящих из трех строчек, рассмотрим два случая. Сперва разберем случай, когда $p \geq 2$, $q \geq 0$, $r \geq 0$ или случай, когда $p = 1$, $q \geqslant 1$. От диаграмм такого вида будем "отрезать" крайний столбец слева. При этом параметры q и r будут оставаться неизменными. Тогда сумма кратностей m_λ, соответствующих указанному разбиению, равна кодлине многообразия $\mathbf{V}_0$ степени $n-3$, то есть $l_{n-3}(\mathbf{V}_0)$. Остался лишь один не подходящий нам случай, когда диаграмма Юнга состоит из трех строчек, но $p = 1$, $q = 0$ и $r = n-3$. Тогда после удаления левого столбца получим диаграмму в виде одной строчки и соответсвующее тождество выполняется в любой алгебре Ли. В этом случае кратность $m_{(n-2,1,1)}$ зависит от четности параметра r. То есть, получится, что если $n = 2t$, то кратность $m_{(n-2,1,1)}$ равна 1, если же $n = 2t+1$, то кратность $m_{(n-2,1,1)}$ равна 0. Вклад кратностей $m_{(n-2,1,1)}$ в кодлину многообразия $\mathbf{V}_0$ обозначим ε_n.

Напомним, что по определению кодлина многообразия равна сумме кратностей по всем разбиениям числа n. Таким образом, кодлина многообразия $\mathbf{V}_0$ вычисляется по формуле (2). Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Для кодлин многообразия* $\mathbf{V}_0$ *при* $n \geq 4$ *верно следующее соотношение:*

$$l_{n+1}(\mathbf{V}_0) = l_n(\mathbf{V}_0) + e_n, \tag{3}$$

где $e_n = \begin{cases} k, & \text{\textit{если} } n = 4k; \\ 1, & \text{\textit{если} } n = 4k+1; \\ k, & \text{\textit{если} } n = 4k+2; \\ 1, & \text{\textit{если} } n = 4k+3. \end{cases}$

Доказательство. Будем писать просто l_n для обозначения кодлины вместо $l_n(\mathbf{V}_0)$. Доказательство проведем методом математической индукции по степени n. Выполнимость формулы (3) для $n = 5, 6, 7, 8$ можно проверить непосредственно с помощью рассмотрений соответствующих диаграмм Юнга и вычислений. Это и будет составлять базу индукции. По предположению индукции будем считать, что в многообразии $\mathbf{V}_0$ выполняются следующие равенства:

$$l_{4k-3} = l_{4(k-1)} + k - 1, \;\; l_{4k-2} = l_{4k-3} + 1 = l_{4(k-1)} + k - 1 + 1 = l_{4(k-1)} + k,$$

$$l_{4k-1} = l_{4k-2} + k - 1 = l_{4(k-1)} + 2k - 1, \;\; l_{4k} = l_{4k-1} + 1 = l_{4(k-1)} + 2k.$$

Распишем значения кодлин для следующих четырех степеней n по формуле (2) и убедимся, что наше предположение верно:

$$l_{4k+1} = l_{4k-2} + \frac{4k+1-1}{2} = l_{4k} + k, \ \ l_{4k+2} = l_{4k-1} + \frac{4k+2+2}{4} + 1 = l_{4k+1} + 1,$$

$$l_{4k+3} = l_{4k} + \frac{4k+3-1}{2} = l_{4k+2} + k, \ \ l_{4k+4} = l_{4k+1} + \frac{4k+4}{4} + 1 = l_{4k+3} + 1.$$

Таким образом, формула (3) выполняется для всех степеней n. Лемма 2 доказана.

Сформулируем основной результат этого параграфа.

Теорема 2. *Для всех $n \geq 2$ кодлина многообразия $\mathbf{V}_0$ вычисляется по формулам:*

$$l_n(\mathbf{V}_0) = \begin{cases} \frac{n^2+4n}{16}, & \text{если } n = 4k; \\ \frac{n^2+6n-7}{16}, & \text{если } n = 4k+1; \\ \frac{n^2+4n+4}{16}, & \text{если } n = 4k+2; \\ \frac{n^2+6n-11}{16}, & \text{если } n = 4k+3. \end{cases}$$

Доказательство. Рассмотрим сначала случай $n \geqslant 4$. При обозначении кодлины мы, по-прежнему, как при доказательстве леммы 2, опускаем символ многообразия, то есть пишем l_n вместо $l_n(\mathbf{V}_0)$. Используя последние четыре равенства доказательства леммы 2, подставим в выражение l_{4k+4} через l_{4k+1} выражение l_{4k+1} через l_{4k} и получим

$$l_{4(k+1)} = l_{4k} + 2k + 2. \tag{4}$$

Сначала методом математической индукции по k, где $k > 0$, покажем, что для $n = 4k$, верно

$$l_{4k} = k(k+1). \tag{5}$$

Формула верна при $k = 1$, так как $l_4 = 2$. Предположим, что $l_{4k} = k(k+1)$ и сделаем индуктивный переход. Для степени $n = 4(k+1)$, используя соотношение (4), запишем

$$l_{4(k+1)} = l_{4k} + 2k + 2 = k(k+1) + 2k + 2 = k^2 + 3k + 2 = (k+1)(k+2).$$

Таким образом, равенство (5) выполняется в многообразии $\mathbf{V}_0$. Пользуясь формулами (3) и (5), получим

$$l_{4k} = \frac{n}{4}\left(\frac{n}{4} + 1\right) = \frac{n^2+4n}{16}, \ \ l_{4k+1} = l_{4k} + k = \left(\frac{n-1}{4}\right)^2 + 2\,\frac{n-1}{4} = \frac{n^2+6n-7}{16},$$

$$l_{4k+2} = l_{4k+1} + 1 = \left(\frac{n-2}{4}\right)^2 + 2\,\frac{n-2}{4} + 1 = \frac{n^2+4n+4}{16},$$

$$l_{4k+3} = l_{4k+2} + k = \left(\frac{n-3}{4}\right)^2 + 3\,\frac{n-3}{4} + 1 = \frac{n^2+6n-11}{16}.$$

Формулы, которые мы получили для вычисления кодлины многообразия $\mathbf{V}_0$, совпадают с формулами, которые указаны в формулировке теоремы. Таким образом, для $n \geqslant 4$ теорема доказана. По формулам для $n = 2, 3$ получаем равенства $l_2 = l_3 = 1$, что правильно, так как полилинейные части многообразия $\mathbf{V}_0$ совпадают с полилинейными частями многообразия всех алгебр Ли. Теорема полностью доказана.

4. Новые свойства многообразия алгебр Ли $\mathbf{N_2A}$

В алгебрах Ли фраза "правило дифференцирования" означает использование следующего тождественного соотношения

$$xyz \equiv xzy + x(yz), \tag{6}$$

то есть использование того факта, что умножение справа является, так называемым, внутренним дифференцированием алгебры Ли.

Многообразие алгебр Ли $\mathbf{N_2A}$ определяется тождеством

$$(x_1x_2)(x_3x_4)(x_5x_6) \equiv 0 \tag{7}$$

и состоит из алгебр Ли с нильпотентным ступени не выше двух коммутантом. Многообразие $\mathbf{N_2A}$ было достаточно подробно исследовано в работе [12], где установлена почти полиномиальность роста этого многообразия, найдены формулы для кратностей вхождения неприводимых модулей в разложение полилинейной части, рассматриваемой как модуль симметрической группы, описаны на "языке тождеств" подмногообразия с дистрибутивной решеткой подмногообразий.

Договоримся использовать для обозначения оператора умножения справа на элемент, например y, соответствующую заглавную букву Y, то есть $xY = xy$. Это обозначение в некоторых случаях оказывается удобным. Например, левонормированное произведение $xy\dots y$ степени $m+1$ нельзя записать так xy^m, но можно записать в таком виде xY^m, где Y^m — степень линейного оператора. Кроме того, будем использовать специальный символ над образующими (звезду, черту или волну) для обозначения кососимметризации. Если же образующие в наборах совпадают, то будем говорить об альтернированных наборах образующих, так как в этом случае обычное свойство кососимметризации нарушается.

Используя тождество антикоммутативности и тождество Якоби, которые определяют алгебру Ли, можно показать, что в ней выполняются следующие тождества

$$x_1^*x_2^*f \equiv 2x_1x_2f; \;\; x_1^*x_2^*x_3^*f \equiv 0; \tag{8}$$
$$x_1^*x_2^*x_3f \equiv 2x_1^*x_3x_2^*f; \;\; 2wx_1^*x_2^*f \equiv w(x_1^*x_2^*)f,$$

где w - любой элемент алгебры, а f - произвольный ассоциативный полином от внутренних дифференцирований. Отметим, что применение нечетной перестановки к переменным, помеченным специальным символом, влечет изменение знака. Например,

$$x_4x_1^*x_2^*x_3^* = -x_4x_2^*x_1^*x_3^* = x_4x_3^*x_1^*x_2^*.$$

Фраза "проальтернируем тождество по паре образующих", например, по x и y означает получение из тождества $f(x,y,\dots) \equiv 0$ такого следствия $f(x,y,\dots) - f(y,x,\dots) \equiv 0$. При этом степень тождества по этим образующим должна быть равна единице.

Перейдем к изложению результатов о свойствах многообразия $\mathbf{N}_2\mathbf{A}$. Выпишем некоторые тождественные соотношения, которые выполняются в многообразии $\mathbf{N}_2\mathbf{A}$. Используя тождества (8) и правило дифференцирования (6), элемент, содержащий пару альтернированных образующих, можно переписать так:

$$wx_1^*Y_1\dots Y_mx_2^* = \frac{1}{2}w(x_1^*x_2^*)Y_1\dots Y_m - \sum_{i=2}^{m} wx_1^*Y_1\dots Y_{i-1}(x_2^*Y_i)Y_{i+1}\dots Y_m.$$

Это соображение позволяет получить такие тождественные соотношения многообразия $\mathbf{N}_2\mathbf{A}$:

$$(xyx_{p(1)}\dots x_{p(k)})(zty_{q(1)}\dots y_{q(m)}) \equiv (xyx_1\dots x_k)(zty_1\dots y_m) \tag{9}$$

где $p\in S_k$, $q\in S_m$. Таким образом, в скобках можно менять местами любые два соседних элемента, начиная с третьей позиции.

Сформулируем полученный в работе [12] результат о кратностях многообразия $\mathbf{N}_2\mathbf{A}$ в виде отдельной теоремы. Для этого определим две числовые величины, которые зависят от целых неотрицательных аргументов:

$$m(p,q) = \begin{cases} [\frac{q}{2}]+1, & \text{если } p \text{ или } q \text{ нечетное число;}\\ \frac{q}{2}, & \text{если оба параметра четные;}\end{cases}$$

$$n(p,q) = \begin{cases} [\frac{q+1}{2}], & \text{при } p=0;\\ q+1, & \text{в противном случае.}\end{cases}$$

Квадратные скобки означают целую часть числа.

Теорема 3. *В разложении (1) характера полилинейной части $P_n(\mathbf{N}_2\mathbf{A})$, $n\geqslant 6$, для кратностей выполняются следующие равенства:*

$$m_\lambda = \begin{cases} m(p,q), & \textit{если } \lambda=(p+q+1,p+1,1,1),\ n=2p+q+4;\\ m(p,q), & \textit{если } \lambda=(p+q+2,p+2,2),\ n=2p+q+6;\\ m(p,q), & \textit{если } \lambda=(p+q,p), p\geq 2,\ n=2p+q;\\ n(p,q), & \textit{если } \lambda=(p+q+1,p+1,1),\ n=2p+q+3;\\ 1, & \textit{если } \lambda=(n-1,1);\\ 0 & \textit{в остальных случаях.}\end{cases}$$

Следует пояснить, что тождество (7) имеет шестую степень, поэтому модуль $P_n(\mathbf{N}_2\mathbf{A})$ при $n\leqslant 5$ совпадает с соответствующим модулем многообразия всех алгебр Ли и его строение хорошо известно (см., например, п. 4.8.4 монографии [1]). Сформулируем новые результаты, касающиеся этого многообразия [5].

Теорема 4. *Кодлина многообразия $\mathbf{N}_2\mathbf{A}$ вычисляется по следующим формулам:*

$$l_n(\mathbf{N}_2\mathbf{A}) = \begin{cases} \frac{5n^2-24n+32}{8}, & \textit{если } n=4m;\\ \frac{5n^2-24n+36}{8}, & \textit{если } n=4m+2;\\ \frac{5n^2-24n+35}{8}, & \textit{если } n=4m+1 \textit{ или } n=4m+3.\end{cases}$$

Формула получена непосредственным вычислением, используя формулы для кратностей из теоремы 3.

Теорема 5. *Базис полилинейной части $P_n(\mathbf{N}_2\mathbf{A})$ состоит из элементов вида:*

$$x_{i_1}x_nx_{i_2}\ldots x_{i_{n-1}}, \tag{10}$$

где $i_1 < n > i_2 > \cdots > i_{n-1}$;

$$(x_{i_1}x_nx_{i_2}\ldots x_{i_{n-k-1}})(x_{j_1}x_{j_2}\ldots x_{j_k}), \tag{11}$$

где $k = 2, \ldots, (n-2)$ и $i_1 < n > i_2 > \cdots > i_{n-k-1}, j_1 < j_2 > j_3 > \cdots > j_k$.

При $n \geqslant 2$ коразмерность многообразия задается формулой

$$c_n(\mathbf{N}_2\mathbf{A}) = (n-1)\left((n-4)2^{n-3}+2\right).$$

Доказательство. Хорошо известно, что любой полилинейный элемент равен линейной комбинации левонормированных мономов с одной и той же образующей, например x_n, на первом слева месте, а следовательно, в силу тождества антикоммутативности с одной и той же образующей на втором слева месте. Рассмотрим произвольный такой моном $x_{i_1}x_nx_{i_2}\ldots x_{i_{n-1}}$. Если выполняются неравенства $i_1 < n > i_2 > \cdots > i_{n-1}$, то это моном вида (10). Пусть в мономе $x_{i_1}x_n\ldots x_ix_jx_{j_1}\ldots x_{j_k}$ существует пара соседних образующих x_i, x_j с возрастающими индексами, то есть $i < j$. В этом случае воспользуемся тождеством $x(yz) \equiv xyz - xzy$, которое выполняется в любой алгебре Ли, и получим

$$x_{i_1}x_n\ldots x_ix_jx_{j_1}\ldots x_{j_k} \equiv x_nx_{i_1}\ldots(x_ix_j)x_{j_1}\ldots x_{j_k} + x_n\ldots x_jx_ix_{j_1}\ldots x_{j_k}.$$

Несложная индукция по числу соседних пар образующих, индексы которых возрастают, позволяет установить, что любой моном выражается через элементы вида (10) и элементы вида $x_{i_1}x_n\ldots(x_ix_j)x_{j_1}\ldots x_{j_k}$. Заметим, что дифференцируя последний элемент образующими $x_{j_1}, \ldots, x_{j_k}$, получаем мономы вида (11), в которых дополнительно можно считать, что вторая слева образующая второго произведения является максимальной, то есть индекс j_2 является максимальным среди индексов $j_1, j_2, \ldots, j_k$. Для завершения доказательства, что элементы вида (10) и (11) порождают векторное пространство $P_n(\mathbf{N}_2\mathbf{A})$, осталось заметить, что в силу тождества (9) образующие $x_{i_2}, \ldots, x_{i_{n-k-1}}$, так же как и образующие $x_{j_3}, \ldots, x_{j_k}$, в мономах вида (11) можно менять местами. Таким образом, получаем необходимые неравенства $i_1 < n > i_2 > \cdots > i_{n-k-1}$, $j_1 < j_2 > j_3 > \cdots > j_k$.

Итак, пространство $P_n(\mathbf{N}_2\mathbf{A})$ является линейной оболочкой мономов вида (10) и (11). Докажем теперь, что это множество мономов является линейно независимым. Рассмотрим линейную комбинацию этих элементов и предположим, что она равна 0. Так как в относительно свободной алгебре любое равенство от свободных образующих является тождеством многообразия, то мы получаем, что в многообразии $\mathbf{N}_2\mathbf{A}$ выполнено тождество

$$\sum_{i_1=1}^{n-1} \alpha_{i_1} x_{i_1} x_n x_{i_2} \dots x_{i_{n-1}} + \sum \beta_{I,J,i_1,j_1} (x_{i_1} x_n x_{i_2} \dots x_{i_{n-k-1}})(x_{j_1} x_{j_2} \dots x_{j_k}) \equiv 0, \quad (12)$$

где коэффициенты во второй сумме зависят от индексов i_1, j_1 и множеств

$$I = \{i_1, i_2, \dots, i_{n-k-1}\}, \quad J = \{j_1, j_2, \dots, j_k\}.$$

Если существует i_1 такой, что $\alpha_{i_1} \neq 0$, то подставив в (12) вместо образующей x_{i_1} образующую x, а вместо остальных образующих – y, получим в качестве следствия тождество энгелевости $xY^{n-1} \equiv 0$. Получили противоречие, так как в силу теоремы 3 кратность $m_{(n-1,1)}$ отлична от нуля. Таким образом, тождество (12) приобретает вид

$$\sum \beta_{I,J,i_1,j_1} (x_{i_1} x_n x_{i_2} \dots x_{i_{n-k-1}})(x_{j_1} x_{j_2} \dots x_{j_k}) \equiv 0, \quad (13)$$

в котором хотя бы один коэффициент отличен от нуля.

Переобозначим образующие (в частности, $x_n = x$, $x_{j_2} = y$) так, чтобы слагаемое с отличным от нуля коэффициентом имело вид:

$$(x y_k y_{k+1} \dots y_{n-2})(y y_1 \dots y_{k-1}).$$

Мы еще воспользовались антикоммутативностью и переставили первые пары в каждой скобке. В полученное тождество вместо образующей x подставим $z_1 z_2 x_1 \dots x_{k-1}$, а вместо образующей y подставим $z_3 z_4 x_{k+1} \dots x_{n-2}$. Проальтернируем по парам образующих x_s, y_s, где $s = 1, 2, \dots, n-2$. В силу тождеств (9) после произведенной подстановки и альтернирований все остальные слагаемые станут равны нулю, останется только выделенное слагаемое и полученное следствие примет вид

$$(z_1 z_2 \bar{x}_1 \dots \tilde{x}_k \bar{\bar{y}}_{k+1} \dots \tilde{\tilde{y}}_{n-2})(z_3 z_4 \bar{y}_1 \dots \tilde{y}_k \bar{\bar{x}}_{k+1} \dots \tilde{\tilde{x}}_{n-2}) \equiv 0.$$

Получили противоречие, так как это тождество не выполняется в многообразии $\mathbf{N}_2\mathbf{A}$, иначе бы, например, кратность $m_{(p,p)}$ при нечетном $p > n+2$ была бы равна 0, а не 1, как было установлено в теореме 3.

Итак, все элементы вида (10) и (11) линейно независимы и образуют базис пространства $P_n(\mathbf{N}_2\mathbf{A})$. Понятно, что количество элементов вида (10) равно $n-1$. Элементы вида (11) зависят от выбора индексов $j_1, ..., j_k$, а также от выбора i_1, j_1. Простые комбинаторные соображения позволяют выписать такую формулу для коразмерностей

$$c_n(\mathbf{N}_2\mathbf{A}) = (n-1) + \sum_{k=2}^{n-2} (k-1)(n-k-1) \binom{n-1}{k}.$$

Для завершения доказательства достаточно использовать следующие равенства, касающиеся биномиальных коэффициентов:

$$\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}=2^m,\quad \sum_{k=0}^{m}k\binom{m}{k}=m\cdot 2^{m-1},\quad \sum_{k=0}^{m}k^2\binom{m}{k}=(m^2+m)\cdot 2^{m-2},$$

доказательства которых мы опускаем. Теорема 5 доказана.

5. Базис полилинейной части многообразия алгебр Лейбница $\widetilde{\mathbf{V}}_1$

Напомним, что алгебра Лейбница определяется тождеством Лейбница

$$xyz\equiv xzy+x(yz), \tag{14}$$

которое позволяет выразить любое произведение элементов алгебры в виде линейной комбинации левонормированных произведений. В частности,

$$x(yz)\equiv xyz-xzy.$$

Кроме того, если подставить $z=y$ в тождество Лейбница, то получим тождество

$$x(y^2)\equiv x(yy)\equiv 0,$$

линеаризация которого имеет вид

$$x(yz)\equiv -x(zy). \tag{15}$$

Пусть e_{ij} — матричные единички, а $UT_2=UT_2(\Phi)=\Phi e_{11}+\Phi e_{12}+\Phi e_{22}$ — ассоциативная алгебра верхнетреугольных матриц размера 2×2 над основным полем Φ. Обозначим через UT_2^0 алгебру тех же матриц только относительно другого умножения, когда результат произведения двух матриц равен нулю, то есть для любых $a_1^0,a_2^0\in UT_2^0$ произведение $a_1^0a_2^0=0$ равно нулю. Пусть теперь $U=UT_2^0\oplus UT_2$ — прямая сумма двух векторных пространств UT_2^0 и UT_2. Зададим на U структуру алгебры, определяя произведение в ней следующим образом $(a_1^0+a_1)(a_2^0+a_2)=(a_1^0a_2)^0+[a_1,a_2]$, где $[a_1,a_2]=a_1a_2-a_2a_1$ коммутатор матриц, а

$$e_{ij}^0e_{hl}=\begin{cases} e_{il} & \text{, если } j=h\\ 0 & \text{, если } j\neq h.\end{cases}$$

В работе [8] сделан вывод, что алгебра U является алгеброй Лейбница, которая порождает многообразие $\widetilde{\mathbf{V}}_1$. Это многообразие определяется тождеством

$$x_1(x_2x_3)(x_4x_5)\equiv 0. \tag{16}$$

Из выше упомянутой работы (следствие 2.3 и лемма 3.3) получаем, что для коразмерностей исследуемого многообразия верна формула $c_n(\widetilde{\mathbf{V}}_1) = 2^{n-2}n(n-3)+2n$. Таким образом, экспонента равна двум, то есть $exp(\widetilde{\mathbf{V}}_1) = 2$. Приведем также полученные в той же самой работе результаты, касающиеся кратностей и кодлины. Для кодлины при $n > 2$ выполнены формулы: $l_n(\widetilde{\mathbf{V}}_1) = n^2 - \frac{7}{2}n + 6$, если n четное, и $l_n(\widetilde{\mathbf{V}}_1) = n^2 - \frac{7}{2}n + \frac{11}{2}$, если n нечетное. В разложении (1) характера полилинейной части $P_n(\widetilde{\mathbf{V}}_1)$, кратности вычисляются по следующим формулам:

$$\widetilde{m}_\lambda = \begin{cases} q+1, & \text{если } \lambda = (p+q+1, p+1, 1, 1),\ (p+q+2, p+2, 2),\ (q+1, 1); \\ 2q+1, & \text{если } \lambda = (q+1, 1, 1); \\ 2q+2, & \text{если } \lambda = (p+q, p),\ p \geqslant 2; \\ 3q+3, & \text{если } \lambda = (p+q+1, p+1, 1),\ p > 0; \\ 1, & \text{если } \lambda = (n); \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Для получения основного результата этого параграфа нам потребуется такая несложная лемма.

Лемма 3. *В многообразии алгебр Лейбница $\widetilde{\mathbf{V}}_1$ выполняются следующие тождественные соотношения, где $p \in S_k$, $q \in S_m$.*

$$(xx_{p(1)} \dots x_{p(k)})(zty_{q(1)} \dots y_{q(m)}) \equiv (xx_1 \dots x_k)(zty_1 \dots y_m), \tag{17}$$

Отметим, что достаточно показать, что можно в первой скобке менять местами любые два соседних элемента, начиная со второго места, а во второй скобке — начиная с третьего.

Замечание 0. *Из леммы следует, что наличие пары альтернированных образующих начиная со второй позиции внутри первой скобки или во второй скобке, начиная с третьей позиции, влечет равенство элемента нулю.*

Замечание 0. *Тождество*

$$(z_1\bar{x}_1 \dots \tilde{x}_k\bar{\bar{y}}_{k+1} \dots \tilde{\bar{y}}_{n-2})(z_2z_3\bar{y}_1 \dots \tilde{y}_k\bar{\bar{x}}_{k+1} \dots \tilde{\bar{x}}_{n-2}) \equiv 0$$

не выполняется в алгебре U, а следовательно и в многообразии $\widetilde{\mathbf{V}}_1$. Действительно, достаточно подставить $z_1 = e_{11}^0$, $z_2 = e_{11}$, $z_3 = e_{12}$, $x_s = e_{11}$, $y_s = e_{22}$, $s = 1, 2, \dots, n-2$, чтобы получить отличный от нуля результат.

Сформулируем основной результат этого раздела [6].

Теорема 6. *Базис полилинейной части $P_n(\widetilde{\mathbf{V}}_1)$ состоит из элементов вида:*

$$x_{i_1}x_{i_2} \dots x_{i_n}, \tag{18}$$

где $i_2 > \dots > i_n$;

$$(x_{i_1}x_{i_2} \dots x_{i_{n-k}})(x_{j_1}x_{j_2} \dots x_{j_k}), \tag{19}$$

где $k = 2, \dots, (n-1)$, $i_2 > \dots > i_{n-k}$, $j_1 < j_2$ и $j_2 > j_3 > \dots > j_k$.

Доказательство. Так как любой элемент полилинейной части является линейной комбинацией левонормированных, достаточно рассмотреть левонормированный элемент $x_{j_1}x_{j_2}\dots x_{j_n}$. Используя тождество Лейбница (14), получим $x_{j_1}x_{j_2}\dots x_{j_n} = x_{j_1}x_{i_2}\dots x_{i_n} + w$, где $i_2 > \dots > i_n$, а w является линейной комбинацией элементов вида

$$x_{j_1}\dots x_{j_m}(x_i x_j)x_{k_1}\dots x_{k_t}, \tag{20}$$

в которых $m \geq 1$, $t \geq 0$, $m + t = n - 2$, а множество $\{j_1,\dots,j_m,i,j,k_1,\dots,k_t\}$ совпадает с начальным отрезком натурального ряда $\{1,\dots,n\}$. Отметим, что первое слагаемое является элементом из множества (18).

Рассмотрим элемент (20). Дифференцируя в нем образующими x_{k_s}, $s = 1,\dots,t$, получим линейную комбинацию элементов вида:

$$(x_{i_1}x_{i_2}\dots x_{i_{n-k}})(x_{j_1}x_{j_2}\dots x_{j_k}),$$

где $k \geq 2$ и $n-k \geq 1$. Применяя к этим элементам тождества (14) и (15), которые позволяют внутри второй скобки действовать аналогично случаю алгебр Ли, можно добиться, чтобы индекс j_2 был максимальным среди индексов $j_1,\dots,j_k$. Используя тождества из леммы 3, делаем так, чтобы в этих элементах индексы, начиная со второго в первой скобке, и начиная с третьего во второй скобке, были упорядочены по убыванию. Таким образом, мы доказали, что элементы вида (18) и (19) порождают полилинейную часть P_n как векторное пространство. Для завершения доказательства осталось установить их линейную независимость.

Рассмотрим линейную комбинацию этих элементов и предположим, что она равна 0. Так как в относительно свободной алгебре любое равенство от свободных образующих является тождеством многообразия, то мы получаем, что в многообразии $\widetilde{\mathbf{V}}_1$ выполнено тождество

$$\sum_{s=1}^{n}\alpha_i\,(x_s x_n\dots \widehat{x_s}\dots x_1)+$$

$$+\sum \beta_{I,J,i_1,j_1}\,(x_{i_1}x_{i_2}\dots x_{i_{n-k}})(x_{j_1}x_{j_2}\dots x_{j_k}) \equiv 0, \tag{21}$$

где коэффициенты во второй сумме зависят от индексов i_1, j_1 и множеств

$$I = \{i_2,\dots,i_{n-k-1}\}, \quad J = \{j_2,\dots,j_k\},$$

а домиком, как общепринято, обозначено отсутствие в последовательности букв соответствующей образующей.

Если существует индекс s такой, что $\alpha_s \neq 0$, то подставив в (21) вместо образующей x_s квадрат x^2, а вместо остальных образующих — y, получим, используя тождество $xy^2 \equiv 0$, в качестве следствия тождество $xxY^{n-1} \equiv 0$, из которого следует такое $xX^n \equiv 0$. Получили противоречие, так как в разложении кохарактера многообразия $\widetilde{\mathbf{V}}_1$ кратность $\widetilde{m}_{(n+1)}$ не равна нулю, точнее $\widetilde{m}_{(n+1)} = 1$.

Таким образом, все коэффициенты первой суммы равны нулю и тождество (21) приобретает вид

$$\sum \beta_{I,J,i_1,j_1}(x_{i_1}x_{i_2}\dots x_{i_{n-k-1}})(x_{j_1}x_{j_2}\dots x_{j_k}) \equiv 0,$$

в котором хотя бы один коэффициент отличен от нуля.

Переобозначим образующие (в частности, $x_{i_1} = x$, $x_{j_1} = y$) так, чтобы слагаемое с отличным от нуля коэффициентом имело вид

$$(xy_k y_{k+1}\dots y_{n-2})(yy_1\dots y_{k-1}).$$

В полученное тождество вместо образующей x подставим $z_1x_1\dots x_{k-1}$, а вместо образующей y подставим $z_2z_3x_k\dots x_{n-2}$. Проальтернируем по парам образующих x_s, y_s, где $s = 1, 2, \dots, n-2$. В силу замечания 1 в результате произведенной подстановки и альтернирований все остальные слагаемые станут равны нулю, останется только выделенное слагаемое, которое примет вид

$$(z_1\bar{x}_1\dots\tilde{x}_k\bar{\bar{y}}_{k+1}\dots\tilde{\tilde{y}}_{n-2})(z_2z_3\bar{y}_1\dots\tilde{y}_k\bar{\bar{x}}_{k+1}\dots\tilde{\tilde{x}}_{n-2}) \equiv 0.$$

Получили противоречие, так как в силу замечания 2 это тождество не выполняется в алгебре U, а следовательно и в многообразии $\widetilde{\mathbf{V}}_1$. Теорема полностью доказана.

Отметим взаимосвязь формул для коразмерностей трех многообразий: многообразия ассоциативных алгебр $\mathbf{UT}_2$, порожденного алгеброй верхнетреугольных матриц порядка два UT_2; многообразия $\mathbf{N}_2\mathbf{A}$ всех алгебр Ли, коммутанты которых нильпотентны ступени не выше двух и многообразия алгебр Лейбница $\widetilde{\mathbf{V}}_1$. Для всех $n \geqslant 1$ выполнены равенства

$$c_n(\widetilde{\mathbf{V}}_1) = n \cdot c_{n-1}(\mathbf{UT}_2) = c_{n+1}(\mathbf{N}_2\mathbf{A}).$$

В заключении выражаю искреннюю признательность и благодарность своему научному руководителю, доктору физико-математических наук, профессору Сергею Петровичу Мищенко за предложенное направление исследований, полезные советы, постоянное внимание к работе и поддержку.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бахтурин Ю. А. Тождества в алгебрах Ли. М.: Наука. 1985. 448 с.

2. Giambruno A., Zaicev M. Polynomial Identities and Asymptotic Methods. Mathematical Surveys and Monographs, AMS, Providence, RI. Vol. 122. 2005. 352 p.

3. Мальцев А. И. Об алгебрах с тождественными определяющими соотношениями // Математический сборник. 1950. Т. 26(68), № 1. С. 19–33.

4. Пестова Ю. Р. Кодлина многообразия, порожденного трехмерной простой алгеброй Ли sl_2 // Вестник Моск. Унив-та. Сер. 1. Математика. Механика. 2015. № 3. С. 58–61.

5. Мищенко С. П., Фятхутдинова Ю. Р. Новые свойства многообразия алгебр Ли $\mathbf{N_2A}$ // Фундаментальная и прикладная математика. 2012. Т. 17, № 7. С. 165–173.

6. Мищенко С.П., Пестова Ю. Р. Базис полилинейной части многообразия алгебр Лейбница $\widetilde{\mathbf{V}}_1$ // Вестник СамГУ. Естественнонаучная серия. 2014. № 3 (114). С. 72–78.

7. Berele A. Codimensions of products and of intersections of verbally prime $T-$ideals // Izrael J.Math. 1998. № 103. P. 17–28.

8. Mishchenko S. A Leibniz variety with almost polynomial growth // J. Pure Appl. Algebra. 2005. V. 202. P. 82–101.

9. Krakowsky A. The polynomial identities of the Grassmann algebra // Trans. Amer. Math. Soc. 1973. V. 181. P. 429–438.

10. Мищенко С. П. Рост многообразий алгебр Ли // Успехи мат. наук. 1990. Т. 45, № 6. С. 25–45.

11. Мищенко С. П. О многообразиях разрешимых алгебр Ли // ДАН СССР. 1990. Т. 313, № 6. С. 1345–1348.

12. Мищенко С. П. Многообразия алгебр Ли с двуступенно нильпотентным коммутантом // Весцi АН БССР: Сер. фiз. матем. наук. 1987. № 6. С. 39–43.

13. Воличенко И. Б. Об одном многообразии алгебр Ли, связанном со стандартными тождествами // Весцi АН БССР: Сер. фiз. матем. наук. 1980. № 1. С. 23–30.

14. Абанина Л. Е. Структура и тождества некоторых многообразий алгебр Лейбница [Текст] : дис. ... канд. физ-мат наук : 01.01.06. Ульяновск: УлГУ, 2003. 65 с.

15. Рацеев С. М. Структура и тождества некоторых алгебр лиевского типа : дис. ... канд. физ-мат наук : 01.01.06. Ульяновск: УлГУ, 2006. 101 с.

16. Абанина Л. Е. Некоторые многообразия алгебр Лейбница // Математические методы и приложения. Труды десятых математических чтений МГСУ. М.: Союз, 2002. С. 95–99.

17. Размыслов Ю. П. О конечной базируемости тождеств матричной алгебры второго порядка над полем характеристики нуль // Алгебра и логика. 1973. Т. 12, № 1. С. 83–113.

18. Размыслов Ю. П. Конечная базируемость некоторых многообразий алгебр // Алгебра и логика. 1974. Т. 13, № 6. С. 685–693.

19. Дренски В. С. Представления симметрической группы и многообразия линейных алгебр // Матем. сб. 1980. Т. 115, № 1. С. 98–115.

REFERENCES

1. Bahturin, Yu. A. 1985, *"Identities in algebras Lie"*, Science, Moscow, 448 pp.

2. Giambruno, A. & Zaicev, M. 2005, *"Polynomial Identities and Asymptotic Methods"*, Math. Surv. and Monographs, vol. 122, Providence, RI, Amer. Math. Soc., 352 pp.

3. Malcev, A. I. 1950, "On algebras with identical defining relations", *Matematicheskii Sbornik*, vol. 26(68), issue 1, pp. 19–33.

4. Pestova, Yu. R. 2015, "Colength of the variety generated by a three-dimensional simple Lie algebra", *Vestnik Mosk. Univ. Ser. 1. Matematika. Mekhanika.*, issue 3, pp. 58–61.

5. Mishchenko, S. P. & Fyathutdinova, Yu. R. 2014, "New properties of the Lie algebra variety $\mathbf{N}_2\mathbf{A}$", *Journal of Mathematical Sciences*, vol. 197, issue 4, pp. 558–564. doi: 10.1007/s10958-014-1734-1

6. Mishchenko, S. P. & Pestova, Yu. R. 2014, "Bases of multilinear part of Leibniz algebras variety $\widetilde{\mathbf{V}}_1$", *Vestnik of Samara State University. Natural Science Series*, issue 3 (114), pp. 72–78.

7. Berele, A. 1998, "Codimensions of products and of intersections of verbally prime $T-$ideals", *Izrael J.Math.*, issue 103, pp. 17–28.

8. Mishchenko, S. 2005, "A Leibniz variety with almost polynomial growth", *J. Pure Appl. Algebra*, vol. 202, pp. 82–101.

9. Krakowsky, A. 1973, "The polynomial identities of the Grassmann algebra", *Trans. Amer. Math. Soc.*, vol. 181, pp. 429–438.

10. Mishchenko, S. P. 1990, "Growth of varieties of Lie algebras", *Uspekhi Mat. Nauk*, vol. 45, issue 6, pp. 25–45.

11. Mishchenko, S. P. 1990, "Varieties of solvable Lie algebras", *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, vol. 313, issue 6, pp. 1345–1348.

12. Mishchenko, S. P. 1987, "Varieties of Lie algebras with two-step nilpotent commutant", *Vestsi Akad. Navuk BSSR Ser. Fiz.-Mat. Navuk*, issue 6, pp. 39–43.

13. Volichenko, I. B. 1980, "On one Lie variety connected with sdandart identities", *Vestsi Akad. Navuk BSSR Ser. Fiz.-Mat. Navuk*, issue 1, pp. 23–30.

14. Abanina, L. E. 2003, *"Structure and identities of some Leibniz varieties"*, Ulyanovsk, UlSU, 65 pp.

15. Ratseev, S. M. 2006, *"Structure and identities of some Lie algebras"*, Ulyanovsk, UlSU, 101 pp.

16. Abanina, L. E. 2002, "Some Leibniz varieteis", *Mathematical methods and applications. Proceedings of the 14th Mathematical Readings*, pp. 95–99.

17. Razmyslov, Yu. P. 1973, "On the finite basis of identities of the matrix algebra of the second order over a field of characteristic zero", *Algebra and Logiks*, vol. 12, issue 1, pp. 83–113.

18. Razmyslov, Yu. P. 1974, "Finite bases of some algebras varieties", *Algebra and Logiks*, vol. 13, issue 6, pp. 685–693.

19. Drenski, V.S. 1980, "Representations of the symmetric group and varieties of linear algebras", vol. 115, issue 1, pp. 98–115.

Ульяновский государственный университет.
Получено 22.04.2015