УДК 512.556

ИДЕАЛЫ В ЧАСТИЧНЫХ ПОЛУКОЛЬЦАХ НЕПРЕРЫВНЫХ $[0,\infty]$-ЗНАЧНЫХ ФУНКЦИЙ

Е. М. Вечтомов, Н. В. Шалагинова (г.Киров)
vecht@mail.ru, korshunnv@mail.ru

Рассматриваются частичные полукольца $\mathrm{C}^+_\infty(X)$ неперерывных функций на топологических пространствах X со значениями в полукольце $[0,\infty]$, рассматриваемом с обычной топологией [1]. Через $\mathrm{C}^+(X)$ обозначается полукольцо всех непрерывных неотрицательных действительнозначных функций на топологическом пространстве X с поточечно определенными операциями сложения и умножения функций. *Частичные полукольца* $\mathrm{C}^+_\infty(X)$ отличаются от полуколец только тем, что произведения некоторых функций в $\mathrm{C}^+_\infty(X)$ могут быть не определены (разрывны). Непустое множество $I \subseteq \mathrm{C}^+_\infty(X)$ будет идеалом в частичном полукольце $\mathrm{C}^+_\infty(X)$, если для любых $f,g \in I$ и $h \in \mathrm{C}^+_\infty(X)$ функции $f+g, fh \in I$ при условии, что fh является непрерывной функцией.

Идеал $I \neq S$ частичного полукольца S называется: *максимальным*, если в S нет идеалов, отличных от S и строго содержащих I; *простым*, если для любых $a,b \in S$ принадлежность $ab \in I$ влечет $a \in I$ или $b \in I$; *строгим* (*полустрогим*), если $a+b \in I \Rightarrow a,b \in I$ ($a+b, a \in I \Rightarrow b \in I$) для любых $a,b \in S$.

Топологическое пространство называется *тихоновским* (*хьюиттовским*), если оно гомеоморфно (замкнутому) подпространству некоторой тихоновской степени $\mathbf{R}$. Тихоновское пространство называется P-*пространством*, если каждое нуль-множество открыто в нем (см.[2]). Для любой функции $f \in \mathrm{C}^+_\infty(X)$ определяются *нуль-множество* $\mathrm{Z}(f) = \{x \in X : f(x) = 0\}$, замкнутое множество $\mathrm{H}(f) = \{x \in X : f(x) = \infty\}$ и открытое множество $\mathrm{coz}f = X \backslash (\mathrm{Z}(f) \bigcup \mathrm{H}(f))$.

Для любой функции $f \in \mathrm{C}^+_\infty(X)$ определим функции $f^*, f_{(1)} \in \mathrm{C}^+_\infty(X)$:

$$f^*(x) = \begin{cases} \infty, & \text{если } x \in \mathrm{Z}(f), \\ 0, & \text{если } x \in \mathrm{H}(f), \\ f^{-1}(x), & \text{если } x \in \mathrm{coz}f; \end{cases}$$

$$f_{(1)}(x) = \begin{cases} f(x), & \text{если } x \in f^{-1}[0;1], \\ 1, & \text{если } x \in f^{-1}[1;\infty]. \end{cases}$$

Произведение функций ff^* равно 1 на $\mathrm{coz}f$ и 0 на $\mathrm{Z}(f) \cup \mathrm{H}(f)$, поэтому не обязано быть непрерывной функцией. Непрерывность функции ff^* равносильна тому, что нуль-множество $\mathrm{Z}(f)$ и $\mathrm{H}(f) = \mathrm{Z}(f^*)$ открыты. Поэтому частичное полукольцо $\mathrm{C}^+_\infty(X)$ является полукольцом тогда и только тогда, когда X будет P-пространством.

Пусть X — произвольное тихоновское пространство и βX — его стоун-чеховская компактификация [3]. Продолжение функции $f \in \mathrm{C}^+_\infty(X)$ на βX определяется единственным образом и обозначается $f^\beta \in \mathrm{C}^+_\infty(\beta X)$. Для всякой функции

$f \in \mathrm{C}^+_\infty(\beta X)$ имеем $f = (f|_X)^\beta$ и для любой функции $g \in \mathrm{C}^+_\infty(X)$ выполняется равенство $g = g^\beta|_X$.

Пусть $p \in \beta X$. Следующие множества будут идеалами в $\mathrm{C}^+_\infty(X)$:

$$M_p = \{f \in \mathrm{C}^+_\infty(X) | p \in \overline{\mathrm{Z}(f)}^{\beta X}\},$$

$$M_{p,\infty} = \{f \in \mathrm{C}^+_\infty(X) | p \in \overline{\mathrm{Z}(f) \cup \mathrm{H}(f)}^{\beta X}\},$$

$$O_p = \{f \in \mathrm{C}^+_\infty(X) | p \in (\overline{\mathrm{Z}(f)}^{\beta X})^0\},$$

$$O_{p,\infty} = \{f \in \mathrm{C}^+_\infty(X) | p \in (\overline{\mathrm{Z}(f)}^{\beta X})^0 \text{ или } p \in (\overline{\mathrm{H}(f)}^{\beta X})^0\}.$$

Очевидны включения $O_p \subseteq M_p \subset M_{p,\infty}$. Идеалами $M_{p,\infty}$ исчерпываются максимальные идеалы в $\mathrm{C}^+_\infty(X)$ [1].

Лемма 1. *Если для идеала J частичного полукольца $\mathrm{C}^+_\infty(X)$ выполняется $J \nsubseteq M_{p,\infty}$, то существует функция $f \in J \setminus M_{p,\infty}$ со значениями в единичном отрезке* $[0, 1]$.

Лемма 2. *Для любых двух различных точек $p, q \in \beta X$ верно равенство $O_p + O_q = \mathrm{C}^+_\infty(X)$ и идеал O_p содержится в единственном максимальном идеале $M_{p,\infty}$.*

Лемма 3. *Для любых функции $f, g \in \mathrm{C}^+_\infty(X)$ функции $f_{(1)} + g_{(1)}$ и $(f + g)_{(1)}$ делятся друг на друга в подполукольце $C^+(X)$.*

Лемма 4. *Если P — простой идеал в $\mathrm{C}^+_\infty(X)$ и $P \subseteq M_p, p \in \beta X$, то $f \in P$ тогда и только тогда, когда $f_{(1)} \in P$ для любой функции $f \in \mathrm{C}^+_\infty(X)$.*

Теорема 1. *Для всякого тихоновского пространства X любой простой идеал P частичного полукольца $\mathrm{C}^+_\infty(X)$ обладает следующими свойствами:*

1) P содержит идеал O_p для некоторой однозначно определенной точки $p \in \beta X$;

2) если $O_p \subseteq P$ при $p \in \beta X$, то $P \subseteq M_{p,\infty}$;

3) если $P \subseteq M_p, p \in \beta X$, то P — строгий идеал;

4) если $O_p \subseteq P \nsubseteq M_p$ для некоторой точки $p \in \beta X$, то идеал P не является полустрогим и $O_{p,\infty} \subseteq P$.

Следствие 1. *Каждый простой идеал частичного полукольца $\mathrm{C}^+_\infty(X)$ содержится в единственном максимальном идеале.*

Следствие 2. *Для любого простого идеала P в $\mathrm{C}^+_\infty(X)$ эквивалентны следующие условия:*

1) P — строгий;

2) P — полустрогий;

3) $P \subseteq M_p$ для (единственной) точки $p \in \beta X$.

Поскольку M_p — строгие простые идеалы, то из следствия 2 вытекает

Теорема 2. *Для любого тихоновского пространства X идеалы $M_p, p \in \beta X$, суть в точности максимальные среди строгих (полустрогих) простых идеалов частичного полукольца $\mathrm{C}^+_\infty(X)$.*

Замечание 1. *Подобно классической теореме Гельфанда-Колмогорова для колец $\mathrm{C}(X)$ [2, chapter 7] на тихоновском пространстве X существует гомеоморфизм между пространством всех максимальных идеалов частичного полукольца $\mathrm{C}^+_\infty(X)$ и компактификацией βX. Топологическое пространство $\mathrm{MaxC}^+_\infty(X)$ с топологией Стоуна — Зарисского называется максимальным спектром частичного полукольца $\mathrm{C}^+_\infty(X)$. Имеем $\mathrm{MaxC}^+_\infty(X) \approx \beta X$.*

Лемма 5. *Для любой функции $f \in \mathrm{C}^+_\infty(X)$ справедливы следующе утверждения:*

1) $\mathrm{H}(f) = \varnothing \Leftrightarrow$ для любого максимального идеала M частичного полукольца $\mathrm{C}^+_\infty(X)$ если $f \in M$, то $f \in P$ для максимального строгого простого идеала $P \subset M$;

2) $\mathrm{Z}(f) = \varnothing \Leftrightarrow$ для любого максимального идеала M частичного полукольца $\mathrm{C}^+_\infty(X)$ если $f \in M$, то $f \notin P$ для максимального строгого простого идеала $P \subset M$.

В силу леммы 5 условия $\mathrm{H}(f) = \varnothing$ и $\mathrm{Z}(f) = \varnothing$ выражаются на языке частичного полукольца $\mathrm{C}^+\infty(X)$. Поэтому справедливо следующее утверждение:

Предложение 1. *Для любого изоморфизма $\alpha : \mathrm{C}^+_\infty(X) \to \mathrm{C}^+_\infty(Y)$ частичных полуколец выполняется $\alpha(\mathrm{C}^+(X)) = \mathrm{C}^+(Y)$.*

Из предложения 1 и [4, глава 2] вытекает

Теорема 3. *Любое хьюиттовское пространство X определяется — однозначно с точностью до гомеоморфизма — частичным полукольцом $\mathrm{C}^+_\infty(X)$.*

Список цитированной литературы

[1] Вечтомов Е. М., Шалагинова Н. В. О частичных полукольцах непрерывных $[0, \infty]$-значных функций // Современные проблемы математики и ее приложений: труды 45-й Международной молодежной школы-конференции, посвященной 75-летию В. И. Бердышева. Екатеринбург: ИММ УрО РАН, 2014. С. 16–19.

[2] Gillman L., Jerison M. Rings of continuous functions. – N.J.: Springer-Verlag, 1976. 300 p.

[3] Энгелькинг Р. Общая топология. – М.: Мир, 1986. 752 с.

[4] Вечтомов Е. М., Сидоров В. В., Чупраков Д. В. Полукольца непрерывных функций. – Киров: Изд-во ООО ВятГГУ, 2011. 312 с.

Вятский государственный гуманитарный университет

УДК 512.626

О СИЛЬНО НЕРАЗЛОЖИМЫХ ЛОКАЛИЗАЦИЯХ ДЕДЕКИНДОВЫХ КОЛЕЦ

А. В. Гришин (г. Москва)
grishinaleksandr@yandex.ru

Пусть $A \subset B$ — конечное сепарабельное расширение дедекиндовых колец, $\mathfrak{P}$ — простой идеал кольца B, лежащий над простым идеалом $\mathfrak{p}$ кольца A, т.е. $\mathfrak{P} \cap A = \mathfrak{p}$. Пусть далее $f = [B/\mathfrak{P} : A/\mathfrak{p}]$ — степень расширения полей вычетов и e — индекс ветвления $\mathfrak{P}$ над $\mathfrak{p}$, т.е. $\mathfrak{p}B = \mathfrak{P}^e\mathfrak{Q}$, где $\mathfrak{P}$ и $\mathfrak{Q}$ — взаимно простые идеалы. Рассмотрим пополнения $\widehat{A}$ и $\widehat{B}$ колец A и B по простым идеалам $\mathfrak{p}$ и $\mathfrak{P}$ соответственно. Хорошо известно, что $\widehat{B} = \widehat{A}B$ — свободный $\widehat{A}$-модуль ранга ef.

Теорема 1. *Пусть $e = f = 1$, $B_{\mathfrak{p}}$ — локализация кольца B по простому идеалу $\mathfrak{P}$. Тогда A-модуль $B_{\mathfrak{p}}$ сильно неразложим, т.е. не содержит нетривиальной прямой суммы подмодулей $M_1 \oplus M_2$, для которой $B_{\mathfrak{p}}/M_1 \oplus M_2$ аннулируется некоторым ненулевым элементом из A.*

Приведенная теорема обобщает результат из [1], доказанный для колец целых алгебраических чисел, на произвольные дедекиндовы кольца. Её доказательство основано на рассмотрении $\widehat{B}$ как модуля над $\widehat{A}$.

Список цитированной литературы

[1] Grishin A. V. Strongly indecomposable localizations of the ring of algebraic integers // Communications in Algebra, to appear in 2014.

Московский педагогический государственный университет

УДК 511.3

НЕПРЕРЫВНЫЕ ОПЕРАТОРЫ НА ПРОСТРАНСТВЕ ФОРМАЛЬНЫХ РЯДОВ

Н. И. Дубровин (г. Владимир)
ndubrovin@rambler.ru