РФИ
БИБЛИОТЕКА ЧЕБЫШЕВСКОГО СБОРНИКА

АЛГЕБРА, ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ, ДИСКРЕТНАЯ ГЕОМЕТРИЯ И МНОГОМАСШТАБНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ: СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ, ПРИЛОЖЕНИЯ И ПРОБЛЕМЫ ИСТОРИИ

Материалы XIX Международной конференции, посвящённой 200-летию со дня рождения академика П. Л. Чебышёва

Библиотека Чебышевского сборника

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Министерство просвещения Российской Федерации
Российская академия наук
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
Математический институт им. В. А. Стеклова РАН
Институт истории естествознания и техники им. С. И. Вавилова РАН
Московский педагогический государственный университет
Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого
Тульский государственный университет

АЛГЕБРА, ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ, ДИСКРЕТНАЯ ГЕОМЕТРИЯ И МНОГОМАСШТАБНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ: СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ, ПРИЛОЖЕНИЯ И ПРОБЛЕМЫ ИСТОРИИ

Материалы XIX Международной конференции, посвящённой 200-летию со дня рождения академика П. Л. Чебышёва

Тула, 18–22 мая 2021 г.

Тула
2021

ББК 22.1
УДК 51
А45

Председатель программного комитета –
доктор физико-математических наук, профессор *В. Н. Чубариков*

Сопредседатели программного комитета:
доктор физико-математических наук, профессор, член-корреспондент РАН *В. М. Бухштабер;*
доктор физико-математических наук, профессор, академик РАН *С. В. Конягин;*
доктор физико-математических наук, профессор, академик РАН *Ю. В. Матиясевич;*
доктор физико-математических наук, профессор, академик РАН *А. Н. Паршин;*
доктор физико-математических наук, профессор, академик РАН *В. П. Платонов*

Ответственный секретарь *– Н. М. Добровольский*

Программный комитет:
В. А. Артамонов (Москва), И. Н. Балаба (Тула),
В. И. Берник (Минск, Белоруссия), В. А. Быковский (Хабаровск),
С. В. Востоков (Санкт-Петербург), М. А. Всемирнов (Санкт-Петербург),
С. Б. Гашков (Москва), С. А. Гриценко (Москва), Е. И. Деза (Москва),
С. С. Демидов (Москва), Н. П. Долбилин (Москва), А. М. Зубков (Москва),
А. О. Иванов (Москва), В. И. Иванов (Тула), В. К. Карташов (Волгоград),
П. О. Касьянов (Киев, Украина), М. А. Королёв (Москва), В. Н. Кузнецов (Саратов),
А. Лауринчикас (Вильнюс, Литва), А. В. Михалёв (Москва), С. П. Мищенко (Ульяновск),
Б. З. Мороз (Москва), Ю. В. Нестеренко (Москва), А. И. Нижников (Москва),
А. Ю. Ольшанский (Нашвилл, США), У. М. Пачев (Нальчик),
З. Х. Рахмонов (Душанбе, Таджикистан), А. Л. Семёнов (Москва), А. В. Устинов (Хабаровск),
А. А. Фомин (Москва), В. Г. Чирский (Москва), Antonio Mucherino (France),
Patrick Sole (France), Mathieu Dutour (France), Aleksandar Jurišić (Slovenia),
Yaokun Wu (China), Mikhail Bounyaev (USA), Oleg Musin (USA), Sergey Shpectorov (UK),
Fukshansky Lenny (California, USA), Navin Singhi (India), Marcelo Firer (Brasil), Yulia Kempner (Israel)

Редакционная коллегия:
доктор физико-математических наук, профессор *В. Н. Чубариков;*
доктор физико-математических наук, профессор *Н. М. Добровольский;*
кандидат физико-математических наук, доцент *И. Ю. Реброва;*
кандидат физико-математических наук *Н. Н. Добровольский;*
старший преподаватель *А. В. Родионов*

Алгебра, теория чисел, дискретная геометрия и многомасштабное моделирование: современные проблемы, приложения и проблемы истории: Материалы XIX Междунар. конф., посвящённой 200-летию со дня рождения академика П. Л. Чебышёва. – Тула: Тул. гос. пед. ун-т им. Л. Н. Толстого, 2021. – 442 с.

А45

ISBN 978-5-6045159-8-3

Сборник содержит материалы, представленные на XIX Международной конференции «Алгебра, теория чисел, дискретная геометрия и многомасштабное моделирование: современные проблемы, приложения и проблемы истории», посвящённой 200-летию со дня рождения академика П. Л. Чебышёва.

Материалы конференции будут полезны научным работникам, преподавателям вузов, аспирантам и студентам старших курсов по соответствующим специальностям.

ББК 22.1
УДК 51

ISBN 978-5-6045159-8-3

© Авторы статей, 2021
© ТГПУ им. Л. Н. Толстого, 2021

Пленарные доклады

УДК 511.3

О новых методах П. Л. Чебышёва в математике и образовании

В. Н. Чубариков (Россия, г. Москва)
Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
e-mail: chubarik2020@mail.ru

About new methods of P. L. Chebyshev in mathematics and education

V. N Chubarikov (Russia, Moscow)
Lomonosov Moscow State University
e-mail: chubarik2020@mail.ru

$$T_n(x) = \frac{1}{2^{n-1}} \cos(n \arccos x),$$

$$a < \frac{\pi(x) \ln x}{x} < b,$$

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(x_k - a_k)\right| > \varepsilon\right\} = 0.$$

Три открытия П. Л. Чебышёва, отраженные на титульной странице его "Избранных трудов" (1955, Изд-во АН СССР)

В сообщении предполагается рассказать следующее:

1. Биографическая справка

2. Методологические принципы П. Л. Чебышёва в научно-исследовательской работе

3. "Теория сравнений" (1849).

4. "Об определении числа простых чисел, не превосходящих данной величины" (1848).

5. "О простых числах" (1852).

6. "О квадратичных формах"

7. "Письмо П.Л.Чебышёва к академику Фусу о новой теореме, относящейся к числу простых чисел вида $4n+1$ и $4n+3$." (1853).

8. "Об одном преобразовании числовых рядов"

9. "Заметка о некоторых рядах" (1851).

10. "Об одном арифметическом вопросе" (1866).

Биографическая справка (Из биографического очерка, составленного учениками П. Л. Чебышёва академиками А. А. Марковым и Н. Я. Сониным).

П. Л. Чебышёв родился 26(14) мая 1821 г. в с. Окатово Боровского уезда Калужской губернии. Семейство Пафнутия Львовича принадлежало к старинному дворянскому роду; отец

его, Лев Павлович, был по тому времени человек образованный и с порядочными материальными средствами. Грамоте его обучала дома мать, Аграфена Ивановна, а арифметике и французскому языку, двоюродная сестра А. К. Сухарева.

В 1832 г. семья Чебышёвых переехала на жительство в Москву, чтобы приготовить П.Л. и его старшего брата к поступлению в университет.

В 1837 г. П.Л. поступил в Московский университет, уже при переходе с первого курса на второй Чебышёв написал работу "Вычисление корней уравнения", за которую был награжден серебряной медалью.

П.Л. становится учеником Н. Д. Брашмана, глубочайшее уважение к которому он сохранил на всю жизнь; до самой смерти П.Л. берег как некоторую святыню фотографический портрет Брашмана.

В 1841 г. П. Л. Чебышёв окончил университетский курс.

В 1846 г. П. Л. Чебышёв защитил в Московском университете магистерскую диссертацию "Опыт элементарного анализа теории вероятностей".

В 1847 г. он переехал в Петербург, получив после защиты диссертации "Об интегрировании помощию логарифмов" должность адъюнкт-профессора в Петербургском университете.

В 1849 г. он получил степень доктора за третью диссертацию — известное руководство по теории чисел "Теория сравнений".

В 1853 г. П. Л. Чебышёв избран в адъюнкты, в 1859 г. в ординарные академики Академии наук.

Профессорская деятельность П. Л. Чебышёва продолжалась ровно 35 лет с 1847 по 1882 г. и протекала исключительно в Петербургском университете.

Утром 8 декабря (26 ноября) 1894 г. Пафнутий Львович Чебышёв, сидя за письменным столом, внезапно почувствовал себя дурно и после непродолжительной агонии скончался от паралича сердца.

Методологические принципы П. Л. Чебышёва

Кем для нас является академик Пафнутий Львович Чебышёв? Во первых, он является учителем, поборником многосторонней основательной математической образованности.

Во вторых, своими научными трудами он проложил новые пути и создал мощные плодотворные методы для решения труднейших задач, идущих из древних времен и не поддававшихся усилиям его предшественников.

В третьих, величайшей заслугой П. Л. Чебышёва явилось создание знаменитой петербургской математической школы, он стоял у истоков московской математической школы и первого математического журнала "Математический сборник".

Методологические принципы, касающиеся научного поиска и творчества, в достаточно емкой, краткой и ясной форме, с исчерпывающей полнотой Чебышёв выразил в своей речи "Черчение географических карт", произнесенной на торжественном акте в С.-Петербургском университете 8 февраля 1856 г.:

"Сближение теории с практикой дает самые благотворные результаты, и не одна только практика от этого выигрывает, сами науки развиваются под влиянием ее: она открывает им новые предметы для исследования или новые стороны в предметах давно известных... Если теория много выигрывает от новых приложений старой методы или от новых развитий её, то она еще более приобретает открытием новых метод, и в этом случае науки находят себе верного руководителя в практике".

В необыкновенно живой и выразительной форме эти принципы изобразил знаменитый ученик Чебышева Александр Михайлович Ляпунов: "П. Л. Чебышёв и его последователи остаются постоянно на реальной почве, руководствуясь взглядом, что только те изыскания имеют цену, которые вызываются приложениями (научными или практическими), и только те теории действительно полезны, которые вытекают из рассмотрения частных случаев. Детальная

разработка вопросов, особенно важных с точки зрения приложений и в то же время представляющих особенные теоретические трудности, требующие изобретения новых методов и создание этим путем более или менее общей теории — таково направление большинства работ П. Л. Чебышёва и ученых, усвоивших его взгляды".

Глубокое проникновение в тайны научного творчества Чебышева нашел А. Н. Колмогоров. Он писал: "С математической стороны основной переворот, совершенный Чебышёвым, заключается не только в том, что он впервые с полной настойчивостью выдвинул требование абсолютной строгости доказательства предельных теорем..., но главным образом в том, что Чебышёв пытался получить точные оценки отклонений от предельных закономерностей..."

Особенно ярко эта мысль Колмогорова выражает факт доведения Чебышёвым результата исследования до числа, "до цифры", постоянное стремление к построению алгоритма, дающего этот результат, как при положительном, так и при отрицательном решении проблемы, и, конечно же, Чебышева всегда интересовала в определенном виде сложность алгоритма.

В подтверждение этих слов приведем требования к методу, высказанные П. Л. Чебышёвым уже в первой его научной работе. Первое требование П. Л. Чебышёва к методу исследования касалось полноты и единства теории. Он писал: "Исчерпав одним общим приемом все способы, как известные, так и возможные, мы сообщаем теории, с одной стороны, полноту, какой не могли бы доставить ей тысячи способов, а с другой, единство, которое теперь еще при небольшом числе их потеряно. Так усовершенствуется теория, и необходимым следствием этого будет удобность ее приложений."

Второе его требование — оценка точности приближения. "С такой ли точностью, как у нас, определяется обыкновенно погрешность нового приближения. Ньютон ее совершенно не определял, а вычислял только примерно — это составляло главный недостаток его способа. Фурье исправлял этот недостаток: определил ее, но чем же? Величиною неизвестною!... В нашу же формулу входят одни известные — и посмотрите, какая быстрота, точность сообщается методу Ньютона."

Третье требование — эффективность метода. "Для показания важности этого способа приложу его к известному уравнению Ньютона

$$x^3 - 2x - 5 = 0.$$

...Фурье решал это уравнение по своему способу и получил после пяти приемов только 32 верные цифры, мы же в три приема нашли 48. Что же касается до 5,6,... верных цифр, как это большей частью бывает нужно в практике, мы получили в один прием."

Особенно сильно развивал эти положения Чебышева академик А. Н. Крылов, говоря о самом тщательном и разностороннем учете и анализе цифровой информации, он писал, что вычисления должны производиться с той степенью точности, которая необходима для практики, и что результаты вычислений не могут быть точнее сделанных предположений и исходных данных. А. Н. Крылов неоднократно приводил высказывание известного геолога Гексли о том, что "математика, подобно жернову, перемалывает то, что под него засыпают, и как, засыпав лебеду, вы не получите муки, так, исписав целые страницы формулами, вы не получите истины из ложных предпосылок". Добавим к этому, что история науки ярко и выразительно свидетельствует о том, какую великую и неоценимую услугу предоставляет метод в развитии науки наряду с совершенствованием ее языка.

По свидетельству современников П. Л. Чебышёв был блестящим профессором. Как нельзя кстати, к этой его деятельности подходят слова учителей древности: "Не до́лжно унижать образования, как рассуждают об этом некоторые: напротив, надобно признать глупыми и невежественными тех, кто, держась такого мнения, желали бы видеть всех подобными себе и избежать обличения в невежестве".

П.Л. всегда тщательно готовился к чтению лекций, что всегда приводило к изумительной ясности и продуманности их содержания, к прекрасному языку изложения материала. Сле-

дует отметить, что в 1847/48 учебном году профессору В. Я. Буняковскому было поручено посещать лекции адъюнкта П. Л. Чебышёва для того, чтобы представить мнение о новом преподавателе.

В 1864 г. П. Л. Чебышёв в докладе Ученому комитету Министерства народного просвещения отмечал, что наша педагогическая литература достаточно богата и представляет все средства для преподавания математики в гимназиях.

"Об определении числа простых чисел" (24 мая 1848)

Г. Давенпорт: "*Чебышёв был первым математиком всех времен, доказавшим сто́ящие результаты о поведении* $\pi(x)$ *при* $x \to \infty$." Здесь $\pi(x)$ обозначает число простых чисел, не превосходящих $x \geq 2$.

Тождество Л. Эйлера (эйлеровское произведение), 1748. При $\mathrm{Re}s > 1$ имеем

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1},$$

где p пробегает все простые числа.

Чебышёвское интегральное представление дзета-функции при $s > 1$ имеет вид

$$\zeta(s) - \frac{s}{s-1} = \frac{1}{\Gamma(s)} \int\limits_0^{+\infty} \left(\frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{x}\right) e^{-x} x^{s-1}\, dx.$$

Отсюда, используя эйлеровское произведение, П. Л. Чебышёв устанавливает, что при $\rho \to 0+$ все производные выражений

$$\zeta(1+\rho) - \frac{1}{\rho} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{1+\rho}} - \frac{1}{\rho},$$

$$\log(\rho\zeta(1+\rho)) = \log\rho - \sum_p \log\left(1 - \frac{1}{p^{1+\rho}}\right),$$

$$-\log\zeta(1+\rho) + \sum_p \frac{1}{p^{1+\rho}} = \sum_p \log\left(1 - \frac{1}{p^{1+\rho}}\right) + \sum_p \frac{1}{p^{1+\rho}},$$

стремятся к конечным пределам.

Пусть $\phi(x) = \sum\limits_{p<x} 1$. Тогда

$$\Delta(\rho) = \sum_p \frac{\log^n p}{p^{1+\rho}} - \sum_{m=2}^{\infty} \frac{\log^{n-1} m}{m^{1+\rho}} =$$

$$= \sum_{m=2}^{\infty} \left(\phi(m+1) - \phi(m) - \frac{1}{\log m}\right) \frac{\log^n m}{m^{1+\rho}}.$$

Таким образом, при $\rho \to 0+$ получим, что величина

$$\Delta(\rho) = \left(\log\rho + \sum_p \frac{\log^n p}{p^{1+\rho}}\right)^{(n)} - \left(\zeta(1+\rho) - \frac{1}{\rho}\right)^{(n-1)} =$$

$$= \left(\log(\rho\zeta(1+\rho)) + \left(-\zeta(1+\rho) + \sum_p \frac{\log^n p}{p^{1+\rho}}\right)\right)^{(n)} - \left(\zeta(1+\rho) - \frac{1}{\rho}\right)^{(n-1)}$$

стремится к конечному пределу.

Далее при $\rho \to 0+$ находим, что сходится ряд

$$\sum_{m=2}^{\infty} \left(\phi(m+1) - \phi(m) - \int_{m}^{m+1} \frac{dx}{\log x} \right) \frac{\log^n m}{m^{1+\rho}}.$$

Отсюда П. Л. Чебышёв выводит, что "выражение $\frac{x}{\phi(x)} - \log x$ при $x \to \infty$ не может иметь предела, отличного от -1."

Другими словами, он доказал, что

$$\underline{\lim}_{x\to\infty} \frac{\pi(x)}{\mathrm{li}(x)} \le 1 \le \overline{\lim}_{x\to\infty} \frac{\pi(x)}{\mathrm{li}(x)},$$

где $\mathrm{li}(x) = \int_{2}^{x} \frac{dt}{\ln t}$.

"О простых числах" (1852)

Данная работа П. Л. Чебышёва посвящена доказательству так называемого *постулата Бертрана:* при $n > 3$ на промежутке $[n, 2n-2)$ находится по крайней мере одно простое число.

При $x \ge 2$ определим функцию Чебышёва

$$\psi(x) = \sum_{n \le x} \Lambda(n),$$

где

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \ln p, & \text{если} \quad n = p^r, \\ 0, & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

функция Мангольдта, причем $\ln n = \sum_{d|n} \Lambda(d)$. При целых x, полагая

$$T(x) = \ln \Gamma(x+1) = \ln(x!) = \sum_{n \le x} \psi\left(\frac{x}{n}\right) = x \ln x - x + O(\ln x),$$

Чебышёв рассматривает выражение

$$T(x) + T(x/30) - T(x/2) - T(x/3) - T(x/5),$$

которое представляет знакопеременный ряд

$$\psi(x) - \psi(x/6) + \psi(x/7) - \psi(x/10) + \psi(x/11) - \dots$$

Отсюда находим

$$\psi(x) - \psi(x/6) \le T(x) + T(x/30) - T(x/2) - T(x/3) - T(x/5) \le \psi(x).$$

Далее, используя формулу Стирлинга, Чебышёв получает

$$\psi(x) > Ax - \frac{5}{2} \ln x - 1, \quad \psi(x) - \psi(x/6) < Ax + \frac{5}{2} \ln x,$$

где

$$A = \ln \frac{2^{\frac{1}{2}} 3^{\frac{1}{3}} 5^{\frac{1}{5}}}{30^{\frac{1}{30}}}.$$

Наконец, из этих неравенств при $n > 160$ Чебышёв устанавливает, что на промежутке $[n, 2n-2)$ лежит по крайней мере одно простое число.

Поясним идею Чебышёва рассмотрением другой линейной комбинации (С. Рамануджан)

$$T(x) - 2T(x/2) = \sum_{k \le x} (-1)^{k-1} \psi(x/k) = x \ln 2 + O(\ln x).$$

Поскольку $\psi(x)$ — неубывающая функция, из предыдущего равенства получим

$$\psi(x) - \psi(x/2) \le x \ln 2 + O(\ln x) \le \psi(x) - \psi(x/2) + \psi(x/3). \qquad (*)$$

Определим целое число r из условия $x/2 < 2^r \le x$. Имеем цепочку неравенств

$$\psi(x) - \psi(x/2) \le x \ln 2 + O(\ln x),$$

$$\psi(x/2) - \psi(x/4) \le \frac{x}{2} \ln 2 + O(\ln(x/2),$$

$$\dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots$$

$$\psi\left(\frac{x}{2^r}\right) - \psi\left(\frac{x}{2^{r+1}}\right) \le \frac{x}{2^r} \ln 2 + O\left(\ln \frac{x}{2^r}\right).$$

Складывая эти неравенства, получим

$$\psi(x) \le 2x \ln 2 + O(\ln^2 x).$$

Из неравенства (*) и предыдущего неравенства находим

$$\psi(x) \ge \psi(x/2) - \psi(x/3) + x \ln 2 + O(\ln x) \ge \psi(x/2) + \frac{x}{3} + O(\ln^2 x).$$

Подобно предыдущему, складывая неравенства, имеем

$$\psi(x) \ge \frac{2x}{3} \ln 2 + O(\ln^3 x).$$

Далее Чебышёв при $x \ge 3$ устанавливает неравенства

$$0,92129 < \pi(x) / \left(\frac{x}{\ln x}\right) < 1,10555,$$

которые указывают границы колебания функции $\pi(x)$ — числа простых чисел, вокруг величины $x/\ln x$.

“Письмо П. Л. Чебышёва к академику Фусу” (1853)

По известной теореме Дирихле при $x \to \infty$ справедливы асимптотические равенства

$$\pi(x; 4, 1) \sim \frac{1}{2} \operatorname{li}(x), \pi(x; 4, 1) \sim \frac{1}{2} \operatorname{li}(x),$$

где $\pi(x; k, l)$ — число простых чисел p вида $p \le x, p \equiv l \pmod k$ и $\operatorname{li}(x) = \int\limits_2^x \frac{dt}{\ln t}$.

В 1853 г. П. Л. Чебышёв в письме к академику Фусу писал: “Отыскивая предельное выражение функций, которые определяют число простых чисел вида $4n + 1$ и вида $4n + 3$, взятых до некоторого очень большого предела, я пришел к заключению, что эти две функции значительно отличаются друг от друга своими вторыми членами, причем для чисел $4n + 3$ второй член больше, чем для чисел $4n + 1$.”

Далее Чебышёв высказывает гипотезу, что имеет место предельное соотношение

$$\lim_{c \to 0+} \sum_{p>2} (-1)^{(p+1)/2} e^{-pc} = +\infty,$$

т.е. в смысле суммирования по Абелю простых чисел вида $4n+3$ больше, чем простых чисел вида $4n+1$.

В 1918 г. Г. Харди и Д. Литтлвуд и Э. Ландау доказали, что эта гипотеза П. Л. Чебышёва эквивалентна отсутствию нулей при $\operatorname{Re} s > 1/2$ ряда Дирихле вида

$$L(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^s}.$$

Простые числа и дзета-функция Римана

При $\operatorname{Re} s > 1$ дзета-функция Римана определяется так:

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1}.$$

Б. Риман при $\operatorname{Re} s > 1$ выводит формулу, подобную формуле Чебышёва,

$$\zeta(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} \frac{e^{-x}}{1-e^{-x}} x^{s-1}\, dx,$$

из которой получает аналитическое продолжение дзета-функции. Далее он находит функциональное уравнение

$$\pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\zeta(s) = \pi^{(1-s)/2}\Gamma((1-s)/2)\zeta(1-s).$$

Используя тождество Эйлера, при $\operatorname{Re} s > 1$ Риман вывел следующее равенство

$$\frac{\ln \zeta(s)}{s} = \int_1^{\infty} \Pi(x) x^{-s-1}\, dx, \quad \Pi(x) = \pi(x) + \pi(\sqrt{x}) + \pi(\sqrt[3]{x}) + \ldots,$$

из которого при $a > 1$ получает

$$\Pi(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \ln \zeta(s) \frac{x^s}{s}\, ds.$$

Простые числа и тригонометрические суммы

В работе “Об одном преобразовании числовых рядов” (1879) П. Л. Чебышёв для любой функции $f(x), x > 0$, нашел тождество

$$\sum_{n=2}^{\infty} f(n) \ln n = \sum_p F(p) \ln p,$$

где

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} f(nx^m).$$

Отсюда, полагая $f(x) = x^{-s}$, имеем тождество Эйлера

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} = \prod_p (1-p^{-s})^{-1},$$

а, полагая

$$f(n) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad n \le x, \\ 0, & \text{если} \quad n > x, \end{cases}$$

получаем тождество Чебышёва

$$\sum_{n \le x} \ln n = \sum_{m \le x} \psi\left(\frac{x}{m}\right).$$

Подобное тождество лежит в основе метода И. М. Виноградова оценок сумм с простыми числами:

$$\Phi(1) + \sum_{H < y \le N} \Phi(y) = \sum\sum_{dm \le x} \mu(d)\Phi(dm),$$

где H — любое число с условием $1 < H \le \sqrt{N}$, числа y пробегают натуральные, не делящиеся на простые, не превосходящие H, d пробегают произведения простых (включая пустое произведение, равное 1), не превосходящих H, наконец, m пробегает все натуральные числа.

Если в этом тождестве положить $\Phi(m) = m^{-s}$, то путем предельного перехода при $N \to \infty$ получим тождество Эйлера.

Другая реализация идеи И. М. Виноградова принадлежит Р. Вону. Пусть N — натуральное число, $1 \le U < N$. Тогда для любой комплекснозначной функции $f(x)$ справедливо тождество

$$\sum_{U < n \le N} \Lambda(n) f(n) = \sum_{d \le U} \mu(d) \sum_{l \le Nd^{-1}} f(ld) \ln l -$$

$$- \sum_{d \le U} \mu(d) \sum_{n \le U} \Lambda(n) \sum_{r \le N(dn)^{-1}} f(ndr) -$$

$$- \sum_{U < m \le NU^{-1}} \left(\sum_{\substack{d \mid m \\ d \le U}} \mu(d) \right) \sum_{U < n \le Nm^{-1}} \Lambda(n) f(nm).$$

С. М. Воронин заметил, что поскольку функция $f(n)$ входит в правую и левую часть этого тождества линейно, и при $1 \le n \le N$ множество всех комплекснозначных функций образует линейное пространство, достаточно проверить его при $f(n) = n^{-s}$. Тогда тождество Р. Вона следует из очевидного равенства

$$0 = \zeta'(s) - \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \cdot \zeta(s) = \left(\sum_{n \le U} \frac{\mu(n)}{n^{-s}} \right) \left(\zeta'(s) - \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \cdot \zeta(s) \right),$$

которое имеет место при $\operatorname{Re} s > 1$.

Простые числа и арифметические функции

Во втором приложении к "Теории сравнений" П. Л. Чебышев указывает некоторые последовательности простых чисел, для которых указывает наименьший первообразный корень.

Пусть $p = 2^{2^n} + 1$. Тогда 3 — первообразный корень по модулю p.

Пусть $p = 4q + 1, p, q$ — простые. Тогда 2 — первообразный корень по модулю p.

Пусть $p = 4 \cdot 2^m q + 1, q > \frac{9^{2^m}}{4 \cdot 2^m}, m \ge 1$. Тогда 3 — первообразный корень по модулю p.

3. Наименьший квадратичный невычет $n = n(p)$ и первообразный корень $g = g(p)$ по модулю p. (И. М. Виноградов).

$$n(p) \ll p^{\frac{1}{2\sqrt{e}}} \ln^2 p, g(p) \ll 2^m \sqrt{p} \ln \ln p, m = \omega(p-1).$$

В 1942 г. Хуа Ло-кен доказал, что $g(p) < 2^{m+1}\sqrt{p}$, а в 1957 г. Д. Берджесс улучшил оценку И. М. Виноградова для наименьшего квадратичного невычета:

$$n(p) \ll p^{\frac{1}{4\sqrt{e}}+\varepsilon},$$

где $\varepsilon > 0$ — сколь угодно малая постоянная.

В 1952 г. Н. Г. Анкени доказал, что в предположении справедливости расширенной гипотезы Римана, имеют место оценки

$$n(p) \ll (\ln p)^2, \quad g(p) \ll 2^m \ln^2 p \ln^2 (2^m \ln p).$$

Пусть символ Ω обозначает отрицание символа O. Тогда доказано, что

$$n(p) = \Omega(\ln p), \quad g(p) = \Omega(\ln p).$$

В заключение доклада отметим, что оригинальные методы и идеи П. Л. Чебышёва в теории чисел явились блестящим началом деятельности петербургской и московской математических школ.

УДК 51(091)

П. Л. Чебышёв – учёный, учитель и деятель науки

С. С. Демидов (Россия, г. Москва)
Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова
e-mail: serd42@mail.ru

P. L. Chebyshev – scientist, teacher and scientific figure

S. S. Demidov (Russia, Moscow)
Lomonosov Moscow State University
e-mail: serd42@mail.ru

Имеется в Жуковском районе Калужской области удивительный памятник: глыба серого гранита с выбитой на ней надписью – «Здесь у Льва Павловича и Аграфены Ивановны Чебышевыхъ родилось пятеро сыновей и четыре дочери». Глыбой этой отмечено место, на котором когда-то стоял вместительный помещичий дом, в котором проживала семья участника Отечественной войны 1812 года русского дворянина Льва Павловича Чебышева. Старшим из его сыновей и был великий русский математик Пафнутий Львович Чебышев, увидевший свет в российском захолустье – сельце Окатово тогдашнего Боровского уезда Калужской губернии – 4 (16) мая 1821 года. Памятник этот, установленный самим П.Л. Чебышевым и его младшими братьями, свидетельствует о чуде – чуде рождения великого учёного из глубин казалось бы вполне заурядной жизни русской провинции.

С детства Чебышев обладал физическим недостатком – у него была сведена нога и он немного прихрамывал, опираясь на палку. Поэтому в детских играх участия не принимал, предпочитая читать и заниматься всякого рода механическими устройствами, что положило начало его последующему увлечению конструированием механизмов. Начальное образование он получил дома. А в 1832 г., когда пришла пора готовить старших братьев Пафнутия и Павла к поступлению в университет, семья переехала в Москву. В гимназию их не отдали, предпочитая домашнее образование. Уроки математики им давал один из лучших педагогов первопрестольной Платон Николаевич Погорельский. Магистр Московского университета, он

внёс значительный вклад в совершенствование системы обучения в средних учебных заведениях Московского учебного округа, в частности, в преподавание математики и физики. Его учебники использовались в гимназиях по всей России, а его «Алгебру» (1-е издание – 1833) Чебышев считал лучшим учебником по этому предмету на русском языке. На юного Чебышева он произвёл неизгладимое впечатление. Именно личность Погорельского и его уроки – в этом сходятся все биографы Чебышева – стали определяющими при выборе им будущих занятий – он решил изучать математику.

Успешно выдержав вступительные испытания, в сентябре 1837 г. Чебышев поступил на математическое отделение Московского университета, которое в ту пору переживало небывалый подъём, вызванный прежде всего деятельностью двух профессоров – Николая Дмитриевича Брашмана и Николая Ефимовича Зернова. Брашман, воспитанник Венского университета и Венского политехнического института, преподававший до этого под началом Н.И. Лобачевского в Казанском университете, был талантливым учёным и выдающимся педагогом, ориентировавшимся на стандарты парижской Политехнической школы. Зернов, хотя и вырос в Москве, но был широко образованным математиком, внимательно следившим за новыми идеями западноевропейской научной мысли, в частности, за курсами О. Коши по анализу. И если до прихода Брашмана и Зернова в том, что касается математических наук, Московский университет выглядел глухой провинцией, то их усилиями он преобразился в центр европейского уровня.

Брашман сразу заметил одарённого студента и стал руководить его занятиями. Свидетельством необычайного математического дарования юноши стала уже его первая работа «Вычисление корней уравнения», подготовленная для объявленного на 1840/41 учебный год конкурса студенческих работ. Работа эта, опубликованная лишь в 1951 г. в пятом томе его *Полного собрания сочинений* и посвященная задаче нахождения приближённого решения алгебраического уравнения, содержит итерационную формулу, переоткрытую в 1870 г. известным немецким математиком Эрнстом Шрёдером. Основные идеи работы Шрёдера были в 1953 прокомментированы американским специалистом в области численного анализа А.С. Хаусхолдером, предложившим для этой формулы иное представление. Разумеется, ни Хаусхолдер, ни, тем более, Шрёдер не могли знать о результате Чебышева. Мы же упоминаем здесь об их работах с единственной целью – подчеркнуть необычайную одарённость начинающего студента, первый же результат которого оказался на уровне исследований профессионалов середины XX столетия.

Чебышев, блестяще завершивший в 1841 г. университетский курс, был оставлен при университете для приготовления к профессорскому званию. В 1843 он успешно преодолел магистерские экзамены и в 1843 – 44 гг. опубликовал в журналах Лиувилля и Крелле свои первые работы по анализу. Тему своей магистерской диссертации он избрал из области теории вероятностей – предмета, интерес к которому был в значительной степени обусловлен влиянием Брашмана. Диссертацией стало руководство по теории вероятностей «Опыт элементарного анализа теории вероятностей», написанное для студентов Демидовского лицея в Ярославле и опубликованное в 1845 г. Её защита успешно прошла летом 1846 г. Это учебное руководство представляло собой образцовое изложение теории, основывающееся в основном на методах элементарной математики, лишь в минимальной степени использовавшее аппарат математического анализа. Тенденция к использованию в математических построениях по возможности простых и элементарных средств стала одной из отличительных черт творчества Чебышева. Это стремление, воспитывавшееся им в учениках, стало одной из характерных особенностей стиля его школы. К диссертации в качестве приложения он добавил сочинение «Элементарное доказательство одного общего предложения теории вероятностей», в котором дал строгое и в тоже время элементарное доказательства закона больших чисел Пуассона. Французский перевод этого приложения опубликован в журнале Крелле в 1846 г. Этим сочинениям было суждено открыть одно из главных направлений исследований Чебышева и его школы –

теоретико-вероятностное. За ними с известными перерывами последовал еще ряд работ, выстроенных вокруг двух основных законов этой науки – закона больших чисел и центральной предельной теоремы. Именно в трудах Чебышева берёт своё начало их современная трактовка. Созданный им метод моментов дал ему возможность приступить к доказательству центральной предельной теоремы, которое довел до конца уже его ученик А.А. Марков.

С работ Чебышёва начинается история теории вероятностей как одного из важнейших разделов математики: до этого её рассматривали как одну из прикладных дисциплин, в которой существенную роль играют математические методы. Такой взгляд на теорию вероятностей ещё в 1900 г. разделял Д. Гильберт: так он аттестует её в докладе "Математические проблемы". Одной из главных исторических заслуг Чебышёва наряду с его собственными выдающимися теоретико-вероятностными достижениями стало то, что он возбудил интерес к этой теории своих учеников и создал первую в ее истории школу – А.А. Марков, А.М. Ляпунов, наследовавшие им Я.В. Успенский, С.Н. Бернштейн, традиции которой продолжила советская теоретико-вероятностная школа – А.Я. Хинчин, А.Н. Колмогоров, Б.В. Гнеденко и др.

В 1847 г. Чебышев переехал в Петербург и уже в тамошнем университете защитил диссертацию на право чтения лекций – «Об интегрировании с помощью логарифмов», основанную на результатах исследований по теории интегрирования алгебраических функций проведённых в Москве. Эти исследования, разрабатывавшие вопросы, поставленные Н.Г. Абелем, М.В. Остроградским и Ж. Лиувиллем, были продолжены в мемуарах, опубликованных в 1853 – 67 гг., и вылились в одно из важных направлений исследований его самого и его преемников.

Северная столица открывала перед молодым амбициозным математиком широкие перспективы. В осеннем семестре он приступил к преподаванию в Петербургском университете: начал читать алгебру на 2 курсе и теорию чисел на четвёртом. В следующем году он уже читал сферическую тригонометрию, аналитическую геометрию, интегральное исчисление. Впоследствии к этому прибавились также теория вероятностей, исчисление конечных разностей, теория эллиптических функций и теория определённых интегралов.

По натуре своей и воспитанию, наконец, по полученному под руководством Брашмана образованию Чебышев питал расположение к той математике, которая оказывалась полезной в практической деятельности. Те же её разделы, которые приложений не имели, не были у него в чести. Разумеется, задачи теории чисел, в те времена никаких значимых приложений не имевшие, вряд ли могли вызвать у него особый интерес. Но здесь судьба преподнесла ему сюрприз. Дело в том, что в Архиве Академии наук были обнаружены рукописи Л. Эйлера по теории чисел, которые было решено издать. Подготовку их к публикации взял на себя академик В.Я. Буняковский, который предложил Чебышеву участвовать в этой работе. Он согласился. И это согласие оказалось судьбоносным для него самого и для петербургской математической школы. Он погрузился в теоретико-числовые штудии Эйлера, которые захватили и увлекли его. Это издание рукописей, появившееся в 1849 году в двух томах, оказало заметное воздействие на развитие теории чисел в XIX веке, но, что для нас самое главное, сделало эту теорию одним из центральных направлений творчества Чебышева и его школы. К занятиям рукописями Эйлера добавилась необходимость читать курс теории чисел студентам, что стимулировало его самостоятельные занятия этой дисциплиной. Он пишет руководство по своему курсу «Теория сравнений» (опубликовано в 1849) и в мае 1849 г. защищает его как диссертацию на степень доктора. В приложении к диссертации Чебышев поместил работу «Об определении числа простых чисел, не превосходящих данной величины», французский перевод которой издал в 1851 году в записках Академии наук и в 1852 в журнале Лиувилля. Вслед за этой работой последовал развивавший её идеи мемуар «О простых числах», в котором, в частности, доказывался «постулат Бертрана». Открытия Чебышева, составившие содержание этих двух ставших классическими сочинений произвели сильнейшее впечатление в математическом мире и утвердили его имя в ряду крупнейших аналитиков своего времени. Его исследованиями по теории про-

стых чисел открывается история одной из самых знаменитых в истории теории чисел школ – Петербургской, прославленной результатами А.Н. Коркина и Е.И. Золотарёва, А.А. Маркова, Г.Ф. Вороного, Я.В. Успенского, традиции которой уже в советское время были продолжены Б.Н. Делоне, И.М. Виноградовым и его учениками.

Чебышевская «Теория сравнений» на протяжении долгого времени служила в России университетским учебником по теории чисел. Его профессорская карьера успешно развивалась. В 1850 г. он стал экстраординарным, а в 1860 ординарным профессором. Лектором он был превосходным. Целиком вкладываясь в излагаемый предмет, он оставлял у слушателей не только ясное о нём представление, но и ощущение причастности к самому процессу открытия математической теории.

Через всю свою творческую жизнь пронёс Чебышев увлечённость машинами и механизмами, их конструированием и их теорией. В июле – ноябре 1852 г. он отправляется командировку во Францию, Великобританию и Германию, одной из целей которой стало посещение металлургических заводов, мельниц, лабораторий и технических музеев. Итогом этой поездки стала его вовлечённость в проблемы теории механизмов. Результатом этих занятий стал его знаменитый мемуар “Теория механизмов, известных под названием параллелограммов” (1854). Этой работой Чебышёв заложил фундамент теории синтеза механизмов, ставшей одним из важнейших разделов современной теории механизмов и машин. Самим Чебышевым было сконструировано, не считая различных модификаций, более 40 механизмов[1]. Для нас же представляется особо важным подчеркнуть тот факт, что изучение механизмов, известных под названием параллелограммов, привело Чебышева к математической проблематике общей теории функций, наименее уклоняющихся от нуля. Эти исследования, подхваченные его учениками Е.И. Золотарёвым, братьями А.А. и В.А. Марковыми, уже в XX столетии получили новое развитие у С.Н. Бернштейна, назвавшего это направление конструктивной теорией функций.

При всей значимости достигнутых Чебышевым результатов и разработанных им методов ничуть не меньшее для развития математических наук значение имела его педагогическая деятельность, главным результатом которой стала созданная им школа, ставшая краеугольным камнем в фундаменте Советской математической школы. Людей, почитавших Чебышёва как учителя, было множество. К числу его непосредственных учеников принадлежат такие известные математики, как А.Н. Коркин, Ю.В. Сохоцкий, Е.И. Золотарёв, А.А. Марков, А.М. Ляпунов, И.Л. Пташицкий, И.И. Иванов, К.А. Поссе, Д.А. Граве, Г.Ф. Вороной, А.В. Васильев.

По своим воспитанию и убеждениям Чебышев был человеком всецело преданным Отечеству. Поэтому он с готовностью отдавал свои знания и опыт каждому делу, приносящему пользу стране. Об этом свидетельствует его деятельность в различных ученых комитетах по линии народного образования и военного ведомства. Так, с 1857 по 1873 год он был деятельным сотрудником Ученого комитета Министерства народного просвещения, активно участвуя в реформах школьного образования, в разработке уставов и программ, рецензируя многочисленные учебники. Невозможно переоценить его вклад в совершенствование российской артиллерии. Его работа в Артиллерийском комитете в 1850-е – 1860-е годы имела большое значение для развития артиллерийской науки.

Один из законодателей математической мысли своего времени, Чебышев в сотрудничестве со своими учениками превратил Петербург рубежа столетий в одну из столиц математического мира. Заметим, однако, что сам подъем математического Петербурга был подготовлен “старой столицей”, ее в известном смысле неожиданным пробуждением еще в 40-е – 50-е годы, положившим начало формированию в первопрестольной математического центра. Именно в Москве Чебышев сформировался как ученый – здесь он учился, здесь сделал свои первые

[1] С механизмами Чебышева можно ознакомится на организованном сотрудником Математического института им. В.А. Стеклова Н.Н. Андреевым специальном сайте: https://tcheb.ru/

открытия, здесь следует искать истоки многих его математических идей и тех воззрений, которые стали идеологией петербургской математической школы, в итоге обусловившей и конфронтационные взаимоотношения математиков двух столиц в конце XIX – первой трети XX столетия.

Однако сам Чебышёв, своим творчеством и мировоззрением определивший идеологию своей школы, ставшую главной предпосылкой для конфронтации, в столкновениях участия не принимал, напротив, начинаниям москвичей способствовал и оказывал горячую поддержку наиболее важным из них. Он был одним из создателей и деятельных членов Московского математического общества, выступив одним из его учредителей. Активно помогал в издании "Математического сборника", особенно на первом этапе его издания, печатаясь на его страницах, пропагандируя журнал и находя для него источники финансирования. Если отношение к московским коллегам наиболее значимых его учеников (и прежде всего всегда воинственно настроенного А.А. Маркова) было отмечено известной долей агрессивности, нетерпимости к их взглядам и даже высокомерия, Чебышёв старался поддерживать с ними хорошие отношения, храня сыновью почтительность к своей alma mater. И хотя по взглядам он радикально расходился с лидерами москвичей, например с Н.В. Бугаевым, в своих печатных и устных выступлениях возникавших разногласий избегал, чем кардинально отличался от своих учеников. Великий математик и как мыслитель был вовсе не ровня своим ортодоксальным последователям. Его математический гений не мог оказаться скованным жесткими положениями методологических схем ни в идейном отношении, ни тем более в персональных отношениях. Он, например, не только не оказал им никакой поддержки в развернутой ими кампании против С.В. Ковалевской в связи с обнаруженными А.А. Марковым пробелами в доказательствах в ее знаменитых исследованиях о движении твердого тела вокруг неподвижной точки, но вместе с академиками В.Я. Буняковским и В.Г. Имшенецким выдвинул ее в 1889 году в члены-корреспонденты Академии наук. В своем противостоянии Петербургу москвичи продолжали рассматривать Чебышёва в качестве одного из отцов-основателей их собственной школы. И когда в июне 1921 года в медленно приходящем в себя постреволюционном еще голодном Петрограде состоялись организованные по инициативе А.А. Маркова торжества по случаю 100-летия великого мастера, из Москвы нагрянула внушительная делегация во главе с Н.Н. Лузиным и В.А. Костицыным. Этот первый шаг к сближению двух школ, случившийся уже в советской России, к заметному потеплению в отношениях не привел. Конец эпохе противостояния был положен лишь в 30-е годы прошлого века, когда "по велению свыше" академический Ленинград переехал в Москву и ведущие ленинградские и московские математики были буквально вынуждены работать вместе. В результате возник удивительный синтез двух математических школ, положивший начало Советской математической школе – одной из ведущих в мире второй половины XX столетия. Конечно, наследие Чебышева послужило в этом синтезе одним из важнейших объединяющих творческих начал.

Однако, вернёмся в XIX век, в 60-е его годы, когда в обстановке реформ Александра II заметно активизировался процесс формирования российского математического сообщества: зародилось Московское математическое общество, вышел в свет первый том «Математического сборника», начались регулярные Всероссийские съезды естествоиспытателей, на которых одной из самых активных выступала секция математики. Во всех этих начинаниях видную роль играл П.Л. Чебышев, одним своим участием чрезвычайно поднимая их научную значимость и статус. Завоевав репутацию одного из крупнейших математиков Европы, Чебышёв, много передвигавшийся по континенту и общавшийся практически со всеми ведущими европейскими математиками, а со многими даже находившийся в дружеских отношениях, способствовал укреплению международных связей в области математики и становлению международного математического сообщества. Его переписка с И.-Ж. Бьенэме, Ш. Делоне, Ж. Дюамелем, Л. Кремоной, Ж. Лиувиллем, Г. Миттаг-Леффлером, Дж. Сильвестром, М. Шалем, Ш. Эрми-

том и др. даёт широкую панораму математической жизни Европы второй половины XIX века. Свидетельством международного признания его достижений служит внушительный список академий избравших его своим членом.

Земной путь Пафнутия Львовича Чебышева завершился 26 ноября (8 декабря) 1894 года в Санкт-Петербурге. Погребён он неподалёку от Окатово – места, где ему было суждено появиться на свет. Его усыпальница расположена в склепе под колокольней храма Преображения Господня, построенного его предками. Так была поставлена точка в жизни П.Л. Чебышева – одного из крупнейших математиков XIX века, основоположника теории синтеза механизмов, автора фундаментальных результатов в области теории вероятностей, преобразовавшего эту науку в один из наиболее динамически развивающихся разделов математики и математического естествознания, автора замечательных достижений в теории чисел, теории функций, в математическом анализе и в других разделах математики, создателя блистательной Петербургской математической школы, вместе с Ш. Эрмитом, К. Вейершрассом, Дж. Сильвестром, Г. Миттаг-Леффлером, выступившего одним из лидеров только зарождавшегося европейского (а по тем временам и мирового) математического сообщества.

УДК 511.3

Дзета-функция моноидов натуральных чисел и смежные вопросы[1]

Н. Н. Добровольский (Россия, г. Тула)
Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого
e-mail: cheb@tspu.tula.ru, nikolai.dobrovolsky@gmail.com

Zeta function of monoids of natural numbers and related issues [1]

N. N. Dobrovol'skii (Russia, Tula)
Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University
e-mail: cheb@tspu.tula.ru, nikolai.dobrovolsky@gmail.com

Гиперболическая дзета-функция в общем виде была определена в работе [3].

Определение 1. *Гиперболической дзета-функции решёток $\zeta(\Lambda|\alpha)$ называется функция, которая задаётся в правой полуплоскости $\alpha = \sigma + it$, $\sigma > 1$ дзета рядом*[2]

$$\zeta(\Lambda|\alpha) = \sum_{\vec{x}\in\Lambda}{}' (\overline{x_1}\dots\overline{x_s})^{-\alpha}. \tag{1}$$

В работе [10] доказана уточненная асимптотическая формула для гиперболической дзета-функции алгебраической решётки.

Обозначим через $\zeta_{D_0}(\alpha|F)$ дзета-функцию Дедекинда главных идеалов чисто-вещественного поля F:

$$\zeta_{D_0}(\alpha|F) = \sum_{(\omega)} |N(\omega)|^{-\alpha},$$

тогда

$$\zeta_{D_0}^{(\nu)}(\alpha|F) = (-1)^{\nu} \sum_{(\omega)} \ln^{\nu}|N(\omega)||N(\omega)|^{-\alpha}, \quad \nu \geqslant 1.$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ №19-41-710004_р_а
[1]This work was prepared under a grant from the RFBR №19-41-710004_p_a

[2]Символ $\sum'$ означает, что из области суммирования исключается $\vec{x} = \vec{0}$, и для любого вещественного x величина $\overline{x}$ задается равенством $\overline{x} = \max(1, |x|)$.

Теорема 1. *При $t > e^a$ справедливо асимптотическое равенство*

$$\zeta_H(\Lambda(t)|\alpha) = \frac{2(\det\Lambda)^\alpha}{R(s-1)!}\sum_{\nu=0}^{s-1} C_{s-1}^{\nu}\frac{(\ln\det\Lambda(t)-\ln\det\Lambda)^{s-1-\nu}(-1)^\nu\zeta_{D_0}^{(\nu)}(\alpha|F)}{(\det\Lambda(t))^\alpha} + R(\Lambda,\alpha,\theta), \quad (2)$$

где

$$R(\Lambda,\alpha,\theta) = O\left(\frac{\ln^{s-2}(\det\Lambda(t))}{(\det\Lambda(t))^\alpha}\right) \quad \textit{и} \quad R \ \textit{– регулятор поля.}$$

Множество значений нормы $|N(\omega)|$ образуют моноид натуральных чисел $M(\mathbb{Z}_F)$, а дзета-функция Дедекинда главных идеалов чисто-вещественного поля F является первым нетривиальным примером дзета-функции моноида натуральных чисел. Общее определение следующее [7]:

Определение 2. *Для любого множества A натуральных чисел определим дзета-функцию $\zeta(A|\alpha)$ равенством*

$$\zeta(A|\alpha) = \sum_{x\in A}\frac{1}{x^\alpha} \quad (\alpha = \sigma + it,\ \sigma > 1). \quad (3)$$

Если множество A конечное, то равенство (3) задает дзета-функцию $\zeta(A|\alpha)$ на всей комплексной α-плоскости. Если множество A бесконечное, то равенство (3) задает дзета-функцию $\zeta(A|\alpha)$ только при $\sigma > \sigma_A$, при этом обязательно в точке $\alpha = \sigma_A$ будет полюс первого порядка и $0 \leqslant \sigma_A \leqslant 1$, так как это следует из свойств дзета-ряда для дзета-функции $\zeta(\alpha)$. Отметим, что при $\sigma > \sigma_A$ ряд абсолютно сходится, а при $\sigma \geqslant \sigma_0$ для любого $\sigma_0 > \sigma_A$ ряд равномерно сходится.

Будем через $M(A)$ обозначать минимальный мультипликативный моноид, содержащий множество A. Таким образом, мы имеем:

$$M(A) = \{a_1\dots a_l | a_1,\dots,a_l \in A, l \geqslant 0\}.$$

Здесь мы используем естественное соглашение, что пустое произведение равно 1.

Хорошо известны моноиды натуральных чисел, образующие геометрические прогрессии с первым членом равным 1 и арифметические прогрессии с первым членом равным 1 и произвольной натуральной разностью. Последний пример был частным случаем знаменитой теоремы Дирихле о простых в арифметической прогрессии, при доказательстве которой он использовал характеры Дирихле и L-функции Дирихле, а заодно и заложил основы теории рядов Дирихле.

Отметим, что моноид $M_{1,4} = \{1 + 4n | n \geqslant 0, n \in \mathbb{Z}\}$, как пишет Г. Дэвенпорт в своей "Высшей арифметике", Д. Гильберт использовал как пример замкнутой мультипликативной системы, в которой отсутствует одназначность разложения на простые элементы (простые числа и псевдопростые).

В работах [1]–[20] содержится широкий спектр проблем, которые связаны с теорией гиперболической дзета-функции решёток и теорией дзета-функций моноидов натуральных чисел.

Мы остановимся только на двух примерах, непосредственно связанных с тематикой нашей конференции. Первый пример из работы [7].

Пусть $q \geqslant 2$ — произвольное натуральное число, тогда бесконечную последовательность простых чисел $p_1 < p_2 < \dots < p_n < \dots$ будем называть экспоненциальной, если выполняются соотношения $q \leqslant p_1 < q^2$, $q^\nu < p_\nu < q^{\nu+1}$ $(\nu \geqslant 2)$.

В силу постулата Бертрана, доказанного П. Л. Чебышёвым, (см. [19]) для любого $q \geqslant 2$ существует бесконечно много экспоненциальных последовательностей простых чисел.

Теорема 2. *Для любого $q \geqslant 2$ и любой экспоненциальной последовательности простых чисел $PE = \{p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots\}$ дзета ряд для дзета-функции $\zeta(M(PE)|\alpha)$ абсолютно сходится для любого α в полуплоскости $\sigma > 0$ и равномерно в полуплоскости $\sigma \geqslant \sigma_0$ для любого $\sigma_0 > 0$.*

Остановимся на вопросе о количестве простых элементов в моноиде $M(A)$, не превосходящих x, которое будем обозначать через $\pi_{M(A)}(x)$. В общем случае это непростая задача, однако для случая любой экспоненциальной последовательности простых чисел $PE = \{p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots\}$ и моноида $M(PE)$ можно дать удовлетворительный ответ [8].

Теорема 3. *Для любого $q \geqslant 2$ и любой экспоненциальной последовательности простых чисел $PE = \{p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots\}$ для количества простых элементов в моноиде $M(PE)$, не превосходящих x, справедливо равенство*

$$\pi_{M(PE)}(x) = \pi_{PE}(x) = \frac{\ln x}{\ln q} - \theta_{PE}(x),$$

где $0 \leqslant \theta_{PE}(x) < 2$.

Другой парадоксальный факт связан с аналитическим продолжением дзета-функции моноида $M(PE)$. В работе [14] была сформулирована гипотеза о заградительном ряде, а в работе [11] она была решена следующим образом:

Теорема 4. *Областью голоморфности дзета-функции $\zeta(M(PE)|\alpha)$ является α-полуплоскость $\sigma > 0$.*

Работы по дзета-функции моноидов натуральных чисел оказались тесно связаны с циклом работ Б. М. Бредихина о чём говорится в работе [18] и в обзорной работе [6].

Б. М. Бредихин работал с понятием степенной плотности последовательности. Это понятие не работает в случае моноидов, образованных произвольной экспоненциальной последовательностью простых. Естественно дать новое определение.

Определение 3. *Последовательность M натуральных чисел имеет C логарифмическую θ–степенную плотность, если для функции $\nu_M(x)$, заданной равенством*

$$\nu_M(x) = \sum_{n \in M,\, n \leqslant x} 1,$$

справедливо равенство

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\ln \nu_M(x)}{\ln^{\theta} x} = C, \quad C > 0, \quad \theta > 0.$$

Показано, что любой моноид $M(PE)$ для произвольной экспоненциальной последовательности простых PE типа q имеет C логарифмическую θ–степенную плотность с $C = \pi\sqrt{\frac{2}{3\ln q}}$ и $\theta = \frac{1}{2}$.

Второй пример в некотором смысле более неожиданный. Обозначим для произвольного простого числа q через $\mathbb{P}(q)$ множество псевдопростых чисел, заданное равенством

$$\mathbb{P}(q) = \{q^n p_n | n \geqslant 1\},$$

и моноид $M(\mathbb{P}(q))$, заданный своим множеством простых элементов. Будем называть его основным моноидом типа q.

Лемма 1. *Моноид $M(\mathbb{P}(q))$ — моноид с однозначным разложением на простые множители.*

Для исследования таких моноидов будет использоваться теорема Россера о простых числах в следующей формулировке:

Теорема 5. *Для любого $n > 1$ и простого p_n выполнены неравенства*

$$n \ln n < p_n < n(\ln n + 2 \ln \ln n). \tag{4}$$

Так как моноид $M(\mathbb{P}(p))$ относится к числу моноидов с однозначным разложением на простые множители, то для него имеет место разложение дзета-функции в Эйлерово произведение:

$$\zeta(M(\mathbb{P}(q))|\alpha) = \prod_{r \in \mathbb{P}(q)} \left(1 - \frac{1}{r^\alpha}\right)^{-1} = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{(q^n p_n)^\alpha}\right)^{-1}. \tag{5}$$

Равенство (3) справедливо при $\sigma > 0$.

Теорема 6. *Существует $n_1 = n_1(q) \geqslant n_0$ такое, что при $x \geqslant q^{n_1} n_1 \ln n_1$ справедливы оценки для $\pi_{M(\mathbb{P}(q))}(x)$:*

$$\pi_{M(\mathbb{P}(q))}(x) = \frac{\ln x - \ln \ln x + \ln \ln q - \ln(\ln \ln x - \ln \ln q)}{\ln q} + \theta(x), \quad |\theta(x)| \leqslant 1.$$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Л. П. Добровольская, М. Н. Добровольский, Н. М. Добровольский, Н. Н. Добровольский, “Гиперболические дзета-функции сеток и решеток и вычисление оптимальных коэффициентов”, Чебышевский сб., 13:4 (2012), 4–107

2. Л. П. Добровольская, М. Н. Добровольский, Н. М. Добровольский, Н. Н. Добровольский, И. Ю. Реброва, “Некоторые вопросы теоретико-числового метода в приближенном анализе”, Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика, 13:4(2) (2013), 47–52

3. Добровольский Н. М. Гиперболическая дзета функция решёток. / Деп. в ВИНИТИ 24.08.84, N 6090–84.

4. Н. М. Добровольский, Н. Н. Добровольский, В. Н. Соболева, Д. К. Соболев, Л. П. Добровольская, О. Е. Бочарова, “О гиперболической дзета-функции Гурвица”, Чебышевский сб., 17:3 (2016), 72–105

5. Н. М. Добровольский, Н. Н. Добровольский, В. Н. Соболева, Д. К. Соболев, Е. И. Юшина, “Гиперболическая дзета-функция решётки квадратичного поля”, Чебышевский сб., 16:4 (2015), 100–149

6. Н. М. Добровольский, У. М. Пачев, В. Н. Чубариков. Борис Максимович Бредихин и его научно-педагогическая деятельность // Чебышевский сборник, 2020, т. 21, вып. 4, с. 19–28.

7. Добровольский Н. Н. Дзета-функция моноидов натуральных чисел с однозначным разложением на простые множители // Чебышевский сб. 2017. Т. 18, вып. 4. С. 187–207.

8. Добровольский Н. Н. О моноидах натуральных чисел с однозначным разложением на простые элементы // Чебышевский сб. 2018. Т. 19, вып. 1. С. 79–105.

9. Добровольский Н. Н. Дзета-функция моноидов с заданной абсциссой абсолютной сходимости // Чебышевский сб. 2018. Т. 19, вып. 2. С. 142–150.

10. Добровольский Н. Н. О двух асимптотических формулах в теории гиперболической дзета-функции решёток // Чебышевский сб. 2018. Т. 19, вып. 3. С. 109–134.

11. Добровольский Н. Н. Одна модельная дзета-функция моноида натуральных чисел // Чебышевский сборник. 2019. Т. 20, вып. 1, С. 148–163.

12. Добровольский Н. Н. Об абсциссе абсолютной сходимости одного класса обобщенных произведений Эйлера // Матем. заметки, 2021, Т. 109, вып. 3, С. 464–469.

13. Добровольский Н. Н., Добровольский М. Н., Добровольский Н. М. Об одном обобщенном эйлеровом произведении, задающем мероморфную функцию на всей комплексной плоскости // Чебышевский сборник. 2019. Т. 20, вып. 2, С. 156–168.

14. Добровольский Н. Н., Добровольский М. Н., Добровольский Н. М., Балаба И. Н., Реброва И. Ю. Гипотеза о "заградительном ряде" для дзета-функций моноидов с экспоненциальной последовательностью простых // Чебышевский сб. 2018. Т. 19, вып. 1. С. 106–123.

15. Добровольский Н. Н., Калинина А. О., Добровольский М. Н., Добровольский Н. М. О количестве простых элементов в некоторых моноидах натуральных чисел // Чебышевский сборник. 2018. Т. 19, вып. 2, С. 123–141.

16. Добровольский Н. Н., Калинина А. О., Добровольский М. Н., Добровольский Н. М. О моноиде квадратичных вычетов // Чебышевский сборник. 2018. Т. 19, вып. 3, С. 95–108.

17. Добровольский Н. Н., Добровольский М. Н., Добровольский Н. М., Балаба И. Н., Реброва И. Ю. Алгебра рядов Дирихле моноида натуральных чисел // Чебышевский сборник. 2019. Т. 20, вып. 1, С. 180–196.

18. Добровольский Н. Н., Реброва И. Ю., Добровольский Н. М. Обратная задача для моноида с экспоненциальной последовательностью простых // Чебышевский сборник. 2020. Т. 21, вып. 1, С. 165–185.

19. Чандрасекхаран К. Введение в аналитическую теорию чисел. — М.: Мир, 1974. 188 с.

20. Dobrovolskaya L. P., Dobrovolsky M. N., Dobrovol'skii N. M., Dobrovolsky N. N., "On Hyperbolic Zeta Function of Lattices", Continuous and Distributed Systems, Solid Mechanics and Its Applications, 211, 2014, 23–62.

УДК 517.5

Задача Чебышёва о моментах неотрицательных многочленов[1]

В. И. Иванов (Россия, г. Тула)
Тульский государственный университет
email: Ivaleryi@mail.ru

Chebyshev's problem on the moments of nonnegative polynomials

V. I Ivanov (Russia, Tula)
Tula State University
email: Ivaleryi@mail.ru

Введение. Пусть $w(x)\colon [-1,1] \to \mathbb{R}_+$ — весовая функция на отрезке $[-1,1]$, $n \in \mathbb{Z}_+$, Π_n — подпространство алгебраических многочленов степени не выше n с действительными коэффициентами, $\Pi_n^+ \subset \Pi_n$ — подмножество неотрицательных на $[-1,1]$ многочленов, $k \in \mathbb{Z}_+$, $\mu_k(p,w) = \int_{-1}^{1} x^k p(x) w(x)\,dx$ — k-й момент многочлена $p \in \Pi_n$.

Рассмотрим экстремальную задачу о наибольшем и наименьшем моментах неотрицательных многочленов, поставленную П.Л. Чебышевым в 1883 году [1, С. 132–156].

Вычислить величины

$$\overline{M}_k(n,w) = \max \mu_k(p,w), \quad \underline{M}_k(n,w) = \min \mu_k(p,w), \tag{1}$$

если

$$p \in \Pi_n^+, \quad \mu_0(p,w) = \int_{-1}^{1} p(x)w(x)\,dx = 1.$$

Для многочленов, неотрицательных на отрезке $[-1,1]$, по теореме Люкача [2, С. 18–19] справедливы представления:

$$p_{2m-2}(x) = q_{m-1}^2(x) + (1-x^2)r_{m-2}^2(x),$$

$$p_{2m-1}(x) = (1+x)q_{m-1}^2(x) + (1-x)r_{m-1}^2(x),$$

поэтому естественно определить следующие экстремальные величины:

$$\overline{N}_k(2m,w) = \max\Big\{\mu_k(p^2,w)\colon p \in \Pi_m,\ \mu_0(p^2,w) = 1\Big\},$$

$$\underline{N}_k(2m,w) = \min\Big\{\mu_k(p^2,w)\colon p \in \Pi_m,\ \mu_0(p^2,w) = 1\Big\}.$$

В [1] П.Л. Чебышев, не используя представления неотрицательных многочленов, указал вид экстремальных многочленов.

Теорема А. *Экстремальные многочлены в задачах $\overline{M}_k(n,w)$ и $\underline{M}_k(n,w)$ (1) имеют вид*

$$p^*(x) = (1-x)^\alpha (1+x)^\beta p^2(x).$$

где $\alpha, \beta \in \{0,1\}$, $p \in \Pi_m$ и $\alpha + \beta + 2m \leqslant n$.

Следствие. Если $w_0(x) = w(x)$, $w_1(x) = (1-x^2)w(x)$, $w_2(x) = (1-x)w(x)$, $w_3(x) = (1+x)w(x)$, то

$$1)\quad \overline{M}_k(2m,w) = \max\Big\{\overline{N}_k(2m,w_0),\, \overline{N}_k(2m-2,w_i)\colon i = 1,2,3\Big\},$$

[1]Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 18-11-00199, https://rscf.ru/project/18-11-00199/.

$$2)\quad \underline{M}_k(2m,w)=\min\Big\{\underline{N}_k(2m,w_0),\,\underline{N}_k(2m-2,w_i)\colon i=1,2,3\Big\},$$

$$3)\quad \overline{M}_k(2m+1,w)=\max\Big\{\overline{N}_k(2m-2,w_1),\,\overline{N}_k(2m,w_i)\colon i=0,2,3\Big\},$$

$$4)\quad \underline{M}_k(2m+1,w)=\min\Big\{\underline{N}_k(2m-2,w_1),\,\underline{N}_k(2m,w_i)\colon i=0,2,3\Big\}.$$

Возникает следующий естественный вопрос. В каких случаях 1)–4) экстремальный многочлен имеет один и тот же вид независимо от веса w? П.Л. Чебышев [1] в случае веса $w(x)=1$ и Г. Сеге [2, С. 194–196] в случае произвольного веса доказали, что при $k=1$ это верно всегда.

Пусть $\{P_n^{\alpha,\beta}(x)\}_{n=0}^{\infty}$ система ортогональных многочленов на отрезке $[-1,1]$ с весом $(1-x)^\alpha(1+x)^\beta w(x)$, где $\alpha,\beta\in\{0,1\}$, $-1<t_{n,n}^{\alpha,\beta}<\cdots<t_{1,n}^{\alpha,\beta}<1$ — нули многочлена $P_n^{\alpha,\beta}(x)$, занумерованные в порядке убывания. При $\alpha=\beta=0$ верхние индексы опускаем.

Теорема B [1,2]. *Если $n=2m-2$, то*

$$\overline{M}_1(n,w)=\overline{N}_1(n,w)=t_{1,m},\quad \underline{M}_1(n,w)=\underline{N}_1(n,w)=t_{m,m}.$$

Единственные экстремальные многочлены имеют вид

$$\overline{p}_{2m-2}(x)=c_1\Big(\frac{P_m(x)}{x-t_{1,m}}\Big)^2,\quad \underline{p}_{2m-2}(x)=c_2\Big(\frac{P_m(x)}{x-t_{m,m}}\Big)^2.$$

Теорема C [1,2]. *Если $n=2m-1$, то*

$$\overline{M}_1(n,w)=\overline{N}_1(2m-2,(1+x)w(x))=t_{1,m}^{0,1},$$

$$\underline{M}_1(n,w)=\underline{M}_1(2m-2,(1-x)w(x))=t_{m,m}^{1,0}.$$

Единственные экстремальные многочлены имеют вид

$$\overline{p}_{2m-1}(x)=c_3(1+x)\Big(\frac{P_m^{0,1}(x)}{x-t_{1,m}^{0,1}}\Big)^2,\quad \underline{p}_{2m-1}(x)=c_4(1-x)\Big(\frac{P_m^{1,0}(x)}{x-t_{m,m}^{1,0}}\Big)^2.$$

При решении задачи (1) для первого момента П.Л. Чебышев использовал теорию непрерывных дробей, а Г. Сеге — представление неотрицательных многочленов, ортогональные многочлены, квадратурную формулу Гаусса и сравнение нулей ортогональных многочленов.

Случай моментов нечетного порядка. В 2020 году нам удалось решить задачу (1) для произвольных моментов нечетного порядка [3, 4]. Мы применяли следующий аппарат:

1. Ортогональные многочлены $\{P_n^{\alpha,\beta}(x,\lambda)\}_{n=0}^{\infty}$ на отрезке $[-1,1]$ с параметрическим весом $(1-x)^\alpha(1+x)^\beta w(x,\lambda)$, где $\alpha,\beta\in\{0,1\}$, $\lambda\in[-1,1]$,

$$w_1(x,\lambda)=w(x)\frac{x^{2k+1}-\lambda^{2k+1}}{x-\lambda}=w(x)\sum_{s=0}^{k}\lambda^{2(k-s)}x^{2s}\geqslant 0.$$

Нули многочлена $P_n^{\alpha,\beta}(x,\lambda)\colon\ -1<t_{n,n}^{\alpha,\beta}(\lambda)<\cdots<t_{1,n}^{\alpha,\beta}(\lambda)<1$.

Нули $t_{\nu,n}^{\alpha,\beta}(\lambda)$ осуществляют непрерывное отображение отрезка $[-1,1]$ в себя [5, приложение 1], поэтому по теореме Брауэра о неподвижной точке [6, §1] существует набор $-1<\lambda_{n,n}^{\alpha,\beta}<\cdots<\lambda_{1,n}^{\alpha,\beta}<1$, такой, что

$$t_{\nu,n}^{\alpha,\beta}(\lambda_{\nu,n}^{\alpha,\beta})=\lambda_{\nu,n}^{\alpha,\beta},\quad P_n^{\alpha,\beta}(\lambda_{\nu,n}^{\alpha,\beta},\lambda_{\nu,n}^{\alpha,\beta})=p_n^{\alpha,\beta}((\lambda_{\nu,n}^{\alpha,\beta})^{2k+1})=0,$$

где $p_n^{\alpha,\beta}(x)$ некоторый многочлен степени n. Этот набор единственный.

2. Параметрические квадратурные формулы для многочленов.

Лемма 1. *Для любого многочлена $p \in \Pi_{2m-1}$ справедлива квадратурная формула Гаусса*

$$\int_{-1}^{1} p(x)w_1(x,\lambda)\,dx = \sum_{s=1}^{m} \gamma_s(\lambda)p(t_{s,m}(\lambda))$$

с положительными весами $\gamma_s(\lambda)$.

Лемма 2. *Для любого многочлена $p \in \Pi_{2m}$ справедливы квадратурные формулы Маркова*

$$\int_{-1}^{1} p(x)w_1(x,\lambda)\,dx = \gamma_0^{0,1}(\lambda)p(-1) + \sum_{s=1}^{m} \gamma_s^{0,1}(\lambda)p(t_{s,m}^{0,1}(\lambda))$$

и

$$\int_{-1}^{1} p(x)w_1(x,\lambda)\,dx = \gamma_0^{1,0}(\lambda)p(1) + \sum_{s=1}^{m} \gamma_s^{1,0}(\lambda)p(t_{s,m}^{1,0}(\lambda))$$

с фиксированными узлами ± 1 и положительными весами $\gamma_s^{0,1}(\lambda)$, $\gamma_s^{1,0}(\lambda)$.

Квадратурные формулы Гаусса и Маркова, а также их применение к решению экстремальных задач можно найти в [7].

Используя этот аппарат, мы построили следующие специальные квадратурные формулы.

Теорема 1 [3,4]. *Пусть $n = 2m-2$. Существуют наборы положительных весов $\{\delta_s^1\}_{s=2}^m$, $\{\delta_s^2\}_{s=1}^{m-1}$, такие, что для любого многочлена $p \in \Pi_n$ справедливы квадратурные формулы*

$$\int_{-1}^{1} x^{2k+1}p(x)w(x)\,dx - (\lambda_{1,m})^{2k+1}\int_{-1}^{1} p(x)w(x)\,dx = -\sum_{s=2}^{m} \delta_s^1 p(t_{s,m}(\lambda_{1,m}))$$

и

$$\int_{-1}^{1} x^{2k+1}p(x)w(x)\,dx - (\lambda_{m,m})^{2k+1}\int_{-1}^{1} p(x)w(x)\,dx = \sum_{s=1}^{m-1} \delta_s^2 p(t_{s,m}(\lambda_{m,m})).$$

Теорема 2 [3,4]. *Пусть $n = 2m-1$. Существуют наборы положительных весов $\{\delta_0^3\}\cup\{\delta_s^3\}_{s=2}^m$, $\{\delta_s^4\}_{s=0}^{m-1}$, такие, что для любого многочлена $p \in \Pi_n$* справедливы квадратурные формулы

$$\int_{-1}^{1} x^{2k+1}p(x)w(x)\,dx - (\lambda_{1,m}^{0,1})^{2k+1}\int_{-1}^{1} p(x)w(x)\,dx$$
$$= -\delta_0^3 p(-1) - \sum_{s=2}^{m} \delta_s^3 p(t_{s,m}^{0,1}(\lambda_{1,m}^{0,1}))$$

и

$$\int_{-1}^{1} x^{2k+1}p(x)w(x)\,dx - (\lambda_{m,m}^{1,0})^{2k+1}\int_{-1}^{1} p(x)w(x)\,dx$$
$$= \delta_0^4 p(1) + \sum_{s=1}^{m-1} \delta_s^4 p(t_{s,m}^{1,0}(\lambda_{m,m}^{1,0})).$$

Из них легко получается решение задачи (1) для моментов нечетного порядка.

Теорема 3 [3,4]. *Если $n = 2m-2$, то*

$$\overline{M}_{2k+1}(n,w) = \overline{N}_{2k+1}(n,w) = (\lambda_{1,m})^{2k+1},$$
$$\underline{M}_{2k+1}(n,w) = \underline{N}_{2k+1}(n,w) = (\lambda_{m,m})^{2k+1}.$$

Единственные экстремальные многочлены имеют вид

$$\overline{p}_{2m-2}(x) = c_1\Big(\frac{P_m(x,\lambda_{1,m})}{x-\lambda_{1,m})}\Big)^2,\ \underline{p}_{2m-2}(x) = c_2\Big(\frac{P_m(x,\lambda_{m,m})}{x-\lambda_{m,m}}\Big)^2.$$

Теорема 4 [3,4]. *Если $n = 2m-1$, то*

$$\overline{M}_{2k+1}(n,w) = \overline{N}_{2k+1}(2m-2,(1+x)w(x)) = (\lambda_{1,m}^{0,1})^{2k+1},$$

$$\underline{M}_{2k+1}(n,w) = \underline{N}_{2k+1}(2m-2,(1-x)w(x)) = (\lambda_{m,m}^{1,0})^{2k+1}.$$

Единственные экстремальные многочлены имеют вид

$$\overline{p}_{2m-1}(x) = c_3(1+x)\Big(\frac{P_m^{0,1}(x,\lambda_{1,m}^{0,1})}{x-\lambda_{1,m}^{0,1}}\Big)^2,\ \underline{p}_{2m-1}(x) = c_4(1-x)\Big(\frac{P_m^{1,0}(x,\lambda_{m,m}^{1,0})}{x-\lambda_{m,m}^{1,0}}\Big)^2.$$

Случай момента второго порядка. Если $k=2$, то вес

$$w_2(x,\lambda) = \frac{x^2-\lambda^2}{x-\lambda}w(x) = (x+\lambda)w(x)$$

уже не является положительным на отрезке [-1,1]. В этом случае теория ортогональных многочленов в общем объеме неверна, поэтому приходится внимательно изучать справедливость нужных фактов в отдельности.

Пусть $t_{k,n}$, $k=1,\dots,n$, — нули многочлена $P_n(x)$, ортогонального с весом $w(x)$, занумерованные в убывающем порядке, $t_{n+1,n} = -\infty$, $t_{0,n} = \infty$, $\rho_{k,n} = -t_{n+1-k,n}$, $I_{k,n} = (\rho_{k,n}, \rho_{k-1,n})$, $k = 1,\dots,n+1$.

Для $\lambda \in I_n = \bigcup_{k=0}^n I_{k,n}$ рассмотрим многочлены

$$q_{n+1}(x,\lambda) = P_{n+1}(x) - \frac{P_{n+1}(-\lambda)}{P_n(-\lambda)}P_n(x) \in \Pi_{n+1}, \quad Q_n(x,\lambda) = \frac{q_{n+1}(x)}{x+\lambda} \in \Pi_n.$$

На каждом интервале $I_{k,n}$ многочлен $q_{n+1}(x,\lambda)$ имеет $n+1$ нуль

$$-\infty < \tau_{n+1,k,n}(\lambda) < \dots < \tau_{1,k,n}(\lambda) < \infty.$$

Нули многочлена $Q_n(x,\lambda)$ получаются выбрасыванием нуля $x=-\lambda$. Перечислим некоторые свойства этих многочленов и их нулей на I_n [2]:

1) Многочлен $Q_n(x,\lambda)$ ортогонален с весом $(x+\lambda)w(x)$ подпространству Π_{n-1}.

2) На каждом интервале $I_{k,n}$, $\tau_{n+2-k,k,n} = -\lambda$,

$$-\infty < \tau_{n+1,k,n}(\lambda) < t_{n,n} < \tau_{n,k,n}(\lambda) < t_{n-1,n} < \dots < t_{1,n} < \tau_{1,k,n}(\lambda) < \infty.$$

3) Функции $\tau_{l,k,n}(\lambda)$ убывают на $I_{k,n}$ и $\lim_{\lambda\to\rho_{k,n}+0}\tau_{l,k,n}(\lambda) = t_{l-1,n}$, $\lim_{\lambda\to\rho_{k-1,n}-0}\tau_{l,k,n}(\lambda) = t_{l,n}$. На интервалах $\widetilde{I}_{k,n} = (\rho_{k,n},\rho_{0,n})$, $k=1,\dots,n$, они определяют непрерывные функции $\gamma_{k,n}(\lambda)$, убывающие от ∞ до $t_{k,n}$, причем $\gamma_{k,n}(\lambda) > -\lambda$. Поэтому они имеют по одной неподвижной точке $\widetilde{\lambda}_{k,n}$, $0 < \widetilde{\lambda}_{n,n} < \dots < \widetilde{\lambda}_{1,n}$. Неподвижная точка $\widetilde{\lambda}_{1,n} \in \widetilde{I}_{1,n} = I_{1,n}$ и является наибольшим корнем уравнения $Q_n(\lambda,\lambda) = 0$ или $q_{n+1}(\lambda,\lambda) = 0$. Неподвижная точка $\widetilde{\lambda}_{n,n} \in I_n$, если только $t_{k,n} + t_{k-1,n} \neq 0$ для всех k. Неподвижная точка $\widetilde{\lambda}_{n,n} \in I_n$ является наименьшим положительным корнем уравнения $Q_n(\lambda,\lambda) = 0$ или $q_{n+1}(\lambda,\lambda) = 0$.

Теорема 5. *Пусть $n = 2m-2$. Существует набор положительных весов $\{\delta_s^3\}_{s=2}^m$ такой, что для любого многочлена $p \in \Pi_n$ справедлива квадратурная формула*

$$\int_{-1}^1 x^2 p(x)w(x)\,dx - (\widetilde{\lambda}_{1,m})^2\int_{-1}^1 p(x)w(x)\,dx = -\sum_{s=2}^m \delta_s^1 p(\tau_{s,1,m}(\widetilde{\lambda}_{1,m})). \qquad (2)$$

Если $\widetilde{\lambda}_{m,m} \in I_{k_0,m} \subset I_m$, то существует набор положительных весов $\{\delta_s^4\}_{s=1}^{m-1}$ такой, что для любого многочлена $p \in \Pi_n$

$$\int_{-1}^{1} x^2 p(x)w(x)\,dx - (\widetilde{\lambda}_{m,m})^2 \int_{-1}^{1} p(x)w(x)\,dx = \sum_{s=1}^{m-1} \delta_s^4 p(\tau_{s,k_0,m}(\widetilde{\lambda}_{m,m})).$$

Теорема 6. *Если $n = 2m-2$, то*

$$\overline{M}_2(n,w) = \overline{N}_2(n,w) = (\widetilde{\lambda}_{1,m})^2. \tag{3}$$

Если $n = 2m-2$ и $\widetilde{\lambda}_{m,m} \in I_m$, то $\underline{M}_{2k}(n,w) = \underline{N}_2(n,w) = (\widetilde{\lambda}_{m,m})^2$.

Единственные экстремальные многочлены имеют вид

$$\overline{p}_{2m-2}(x) = c_5\Big(\frac{P_m(x,\widetilde{\lambda}_{1,m})}{x-\widetilde{\lambda}_{1,m})}\Big)^2,\ \underline{p}_{2m-2}(x) = c_6\Big(\frac{P_m(x,\widetilde{\lambda}_{m,m})}{x-\widetilde{\lambda}_{m,m}}\Big)^2.$$

Похожими рассуждениями можно получить аналоги квадратурной формулы (2) и равенства (3) для моментов произвольного четного порядка, если рассмотреть параметрический вес

$$w_3(x,\lambda) = w(x)\frac{x^{2k}-\lambda^{2k}}{x-\lambda} = (x+\lambda)w(x)\sum_{s=0}^{k-1}\lambda^{2(k-1-s)}x^{2s} = (x+\lambda)w_4(x,\lambda).$$

и многочлены, ортогональные с положительным весом $w_4(x,\lambda)$

Если $n = 2m-1$, то решение задачи (1) может быть различным в зависимости от веса $w(x)$, то есть нужных квадратурных формул, справедливых сразу для всех весов нет. Например, если $w_4(x) = 1+x$, $w_5(x) = 1-x$, то $\overline{M}_2(3,w_4(x)) = \overline{N}_2(2,(1+x)w_4(x))$, $\overline{M}_2(3,w_5(x)) = \overline{N}_2(2,(1-x)w_5(x))$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Чебышев П. Л. Об отношении двух интегралов, распространенных на одни и те же величины переменной. Сочинения, Т.3. М.: Изд-во АН СССР, 1948.
2. Сеге Г. Ортогональные многочлены. М.: Физматгиз, 1962. 500 с.
3. Иванов В.И. Экстремальные значения моментов неотрицательных многочленов // Математические заметки. 2020. Т. 108, № 4. С. 625–628.
4. Иванов В.И. Задача Чебышева об экстремальных значениях моментов неотрицательных алгебраических многочленов // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2020. Т. 26, № 4. С. 138–154.
5. Островский А. М. Решение уравнений и систем уравнений. М.: ИЛ, 1963. 219 с.
6. Шашкин Ю.А. Неподвижные точки. М.: Наука, 1989. 80 с.
7. Горбачев Д. В., Иванов В. И. Лекции о квадратурных формулах и их применении в экстремальных задачах. Тула: Изд-во ТулГУ, 2016. 132 с.

УДК 517.5

Об иррегулярности конечных последовательностей

С. В. Конягин (Россия, г. Москва)
Математический институт им. В. А. Стеклова Российской академии наук
email: konyagin@mi-ras.ru

Irregularity of finite sequences

S. V. Konyagin (Russia, Moscow)
Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences
email: konyagin@mi-ras.ru

Последовательность $(x_1, x_2, \dots, x_{N+d})$ чисел из $[0,1)$ называется N-регулярной с не более чем d иррегулярностями, если для любого натурального числа $n \leqslant N$ каждый из полуинтервалов
$[0,1), [1,2), \dots, [n-1,n)$ содержит хотя бы один элемент последовательности $(nx_1, nx_2, \dots, nx_{n+d})$. Наибольшее N, для которого существует N-регулярная последовательность с не более чем d иррегулярностями, обозначается через $s(d)$. Показано, что $s(d) \geqslant 2d$ для любого натурального d и $s(d) < 200d$ для достаточно большого d.

УДК 517.5

Группы с квадратичной функцией Дена

А. Ю. Ольшанский (Россия, г. Москва)
Университет Вандербильда, Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
e-mail: alexander.olshanskiy@vanderbilt.edu

Groups with quadratic Dehn function

A. Yu. Olshanskii (Russia, Moscow)
Vanderbilt University, Lomovosov Moscow State University
e-mail: alexander.olshanskiy@vanderbilt.edu

The talk is based on a joint paper with M. V. Sapir. We construct and study finitely presented groups with quadratic Dehn function (QD-groups) and present the following applications of the method developed in our recent papers.

(1) The isomorphism problem is undecidable in the class of QD-groups.

(2) For every recursive function f, there is a QD-group G containing a finitely presented subgroup H whose Dehn function grows faster than f.

(3) There exists a group with undecidable conjugacy problem but decidable power conjugacy problem; this group is QD. Also there exist finitely presented groups with decidable conjugacy problem but undecidable power conjugacy problem.

УДК 512.71+512.666+511.22

Ряды Лорана над кольцами и многомерный символ Конту-Каррера

Д. В. Осипов (Россия, г. Москва)
Математический институт им. В.А. Стеклова Российской академии наук; Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»; Национальный исследовательский технологический университет «МИСиС»
e-mail: e-mail: d_osipov@mi-ras.ru

Laurent series over rings and higher-dimensional Contou-Carrère symbol

D. V. Osipov (Russia, Moscow)
Steklov Mathematical Institute of Russsian Academy of Sciences; National Research University Higher School of Economics; National University of Science and Technology «MISiS»
e-mail: e-mail: d_osipov@mi-ras.ru

Доклад основан на совместных работах с С. О. Горчинским, см. [1], [2], [3].

Пусть A — коммутативное кольцо с 1. Мы рассматриваем итерированные n раз ряды Лорана над кольцом A, а именно: $\mathcal{L}^n(A) = A((t_1))\dots((t_n))$. Пусть $\mathcal{L}^n(A)^*$ есть группа обратимых элементов этого кольца. Тогда n-мерный символ Конту-Каррера CC_n есть некоторое функториальное по кольцу A, полилинейное (относительно умножения), кососимметрическое отображение:

$$CC_n \ : \ \underbrace{\mathcal{L}^n(A)^* \times \ldots \times \mathcal{L}^n(A)^*}_{n+1} \longrightarrow A^*.$$

Многомерный символ Конту-Каррера удовлетворяет свойству Стейнберга, которое связывает его с алгебраической K-теорией:

$$CC_n(f_1, \ldots, f, \ldots, 1-f, \ldots, f_n) = 1,$$

где все $f_i, f, 1-f$ принадлежат группе $\mathcal{L}^n(A)^*$.

Если кольцо A есть поле, то символ Конту-Каррера совпадает с многомерным ручным символом. Для специальных артиновых колец A из символа Конту-Каррера можно получить многомерный вычет. Символ Конту-Каррера связан с многомерной теорией полей классов, а также с многомерными законами взаимности Паршина-Като для алгебраических многообразий, обобщающими известный закон взаимности Вейля на проективной алгебраической кривой, а также закон взаимности для суммы дифференциальных форм на проективной алгебраической кривой.

Символ Конту-Каррера удовлетворяет следующему свойству

$$CC_n(a, t_1, \ldots, t_n) = a, \text{ где } \quad a \in A^*,$$

которое вместе со следующим универсальным свойством, полученным в [1], характеризует его однозначно: через символ CC_n однозначно пропускаются все функториальное по кольцу A, полилинейные (относительно умножения) отображения

$$\Phi \ : \ \underbrace{\mathcal{L}^n(A)^* \times \ldots \times \mathcal{L}^n(A)^*}_{n+1} \longrightarrow A^*,$$

удовлетворяющие свойству Стейнберга.

В работах [2], [3] универсальное свойство было обобщено до случая, когда в образе отображения Ф рассматриваются не группы A^*, а A-точки алгебраической группы (с некоторыми условиями).

Про все это будет рассказано в докладе.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Горчинский С. О., Осипов Д. В., Многомерный символ Конту-Каррера: локальная теория // Математический сборник. 2015. Том 206, № 9, С. 21-98.

2. Горчинский С. О., Осипов Д. В., Многомерный символ Конту-Каррера и коммутативные групповые схемы // Успехи математических наук. 2020. Том 75, № 3(453), С. 185-186.

3. Горчинский С. О., Осипов Д. В., Итерированные ряды Лорана над кольцами и символ Конту-Каррера // Успехи математических наук. 2020. Том 75, № 6(456), С. 3-84.

УДК 511.6

О периодичности непрерывных дробей квадратичных иррациональностей для кубических многочленов над числовыми полями[1]

В. П. Платонов (Россия, г. Москва)
Научно-исследовательский институт системных исследований Российской академии наук, Математический институт им. В. А. Стеклова Российской академии наук
e-mail: platonov@mi-ras.ru
М. М. Петрунин (Россия, г. Москва)
Научно-исследовательский институт системных исследований Российской академии наук
e-mail: petrushkin@yandex.ru

On the periodicity of continued fractions of quadratic irrationalities for cubic polynomials over number fields

V. P. Platonov (Russia, Moscow)
Scientific Research Institute for System Analysis of Russian Academy of Sciences, Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences
e-mail: platonov@niisi.ras.ru
M. M. Petrunin (Russia, Moscow)
Scientific Research Institute for System Analysis of Russian Academy of Sciences
e-mail: petrushkin@yandex.ru

Рассмотрим свободный от квадратов многочлен $f(x) \in \mathbb{K}[x]$ степени $2g+1$ над полем $\mathbb{K}$, $\operatorname{char}\mathbb{K} = 0$. Для рассматриваемых задач наибольший интерес представляет случай, когда $\mathbb{K}$ — поле алгебраических чисел. Предположим, что $f(x)$ не делится на x, и $f(0)$ — полный

[1]Работа выполнена в рамках государственного задания по проведению фундаментальных научных исследований по проекту N 0065-2019-0011.

квадрат в поле $\mathbb{K}$, таким образом, нормирование ν_x, соответствующее униформизующей x, имеет два продолжения: ν_x^+, ν_x^- в поле $\mathbb{K}(x)(\sqrt{f(x)})$. При этих предположениях существует вложение $\sqrt{f(x)}$ (и тем самым поля $\mathbb{K}(x)(\sqrt{f(x)})$) в поле формальных рядов Лорана $\mathbb{K}((x))$, что позволяет рассмотреть разложение этого элемента или любого другого элемента поля $\mathbb{K}(x)(\sqrt{f(x)})$ в непрерывную дробь (подробнее, см. [1]).

Поскольку степень $f(x)$ нечетна, гладкая компактификация гиперэллиптической кривой $y^2 = f(x)$ над полем $\mathbb{K}$, которую мы обозначим через $\mathcal{C}_\mathbb{K}$, получается добавлением единственной точки ∞. Иногда в обозначении $\mathcal{C}_\mathbb{K}$ мы будем опускать индекс, отвечающий полю. Имеет место вложение кривой $\mathcal{C}$ в свой якобиан, определенное над полем $\mathbb{K}$, и переводящее точку $Q \in \mathcal{C}$ в класс $Q-\infty$. В случае, когда класс $P-\infty$, соответствующий точке $P = (0, \sqrt{f(0)})$, имеет конечный порядок в якобиане, существуют элементы поля $\mathbb{K}(x)(\sqrt{f})$, для которых разложение в непрерывную дробь периодично. Такими элементами, например, являются $\sqrt{f(x)}/x^g$ и $\sqrt{f(x)}/x^{g+1}$.

В свою очередь, сам элемент $\sqrt{f(x)}$ периодичен не всегда, что является существенным отличием от случая разложения в непрерывную дробь в $\mathbb{K}((1/x))$. В связи с этим в работе [3] была поставлена проблема описания всех многочленов $f(x) \in \mathbb{K}[x]$ степени $2g+1$ для различных классов полей алгебраических чисел $\mathbb{K}$ с периодическим разложением $\sqrt{f(x)}$ в непрерывную дробь в поле $\mathbb{K}((x))$. Там же она была полностью решена для кубических многочленов над полем рациональных чисел.

Следует отметить ключевые моменты, позволившие решить эту проблему. Основной — это ограничение на порядок N точки кручения эллиптической кривой над полем $\mathbb{Q}$, полученное Мазуром, а именно $2 \le N \le 10$ или $N = 12$. Далее использовалась рациональность соответствующих модулярных кривых $X_1(N)$, отвечающих возможным порядкам N точки кручения, определенной над $\mathbb{Q}$ из теоремы Мазура. Напомним, что $\mathbb{K}$-точки аффинной кривой $Y_1(N)$, определенной над $\mathbb{Q}$, отвечают множествам пар $(\mathcal{C}, P)$, определенных над $\mathbb{K}$, и состоящих из эллиптической кривой $\mathcal{C}$ и точки P конечного порядка N на ней (через $X_1(N)$ обозначается гладкая компактификация $Y_1(N)$, получающаяся добавлением так называемых каспидальных точек, не отвечающим никаким парам). Это обстоятельство позволяет получить для данных значений N так называемую рациональную параметризацию множества таких пар $(\mathcal{C}, P)$ в зависимости от параметра t или иными словами многочленов $f_t(x)$, где точка P соответствует $x = 0$. И последний этап — это непосредственно вычисление непрерывной дроби для $\sqrt{f_t(x)}$ в зависимости от параметра t, и применение критерия периодичности $\sqrt{f_t(x)}$, который может быть сформулирован в виде неравенства на нормирования для числителя и знаменателя дроби, представляющей наилучшее приближение к квадратичной иррациональности $\sqrt{f}/x^{g+1}$. Это условие может быть переписано в виде условия на обращение в нуль некоторого коэффициента при степени x в соответствующих разложениях (см. подробнее [2, 3]).

Отметим сложности, возникающие при попытке обобщения этого результата на более общие числовые поля $\mathbb{K}$. Полное описание порядков точек кручения (аналог теоремы Мазура) известно только для квадратичных и кубических полей, а оценка на кручение, которую можно получить из результата Парента, слишком велика, чтобы сделать вычисления эффективными. Второй проблемой для непосредственного обобщения метода работы [3] является то обстоятельство, что кривые $X_1(N)$ перестают быть рациональными для порядков точек кручения, встречающихся над квадратичными полями и, тем более, полями степени 3 и выше над $\mathbb{Q}$. В связи с этими сложностями в работе [4] были изучены конкретные квадратичные числовые поля, где актуальные к тому моменту методы вычисления позволяли дать полный ответ, а в работах [5], [6] было исследовано на периодичность разложение $\sqrt{f(x)}$ в предположениях ограничивающих его период. Последнее условие достигалось ограничением порядка точки кручения, что эквивалентно ограничению степени фундаментальной S-единицы. В последних двух работах без использования параметризаций были исследованы многочлены f, соответ-

ствующие эллиптическим кривым с точками кручения порядка $N \leqslant 12$, $N = 14, 16, 18$. Тем самым для полного описания периодических элементов $\sqrt{f}$ над квадратичными расширениями $\mathbb{Q}$ оставалось рассмотреть порядки кручения 13 и 15, однако соответствующая вычислительная задача, сводящаяся к вычислению базиса Гребнера или к решению системы путём последовательного вычисления соответствующих результантов для сложной системы алгебраических уравнений, выходила далеко за пределы текущих вычислительных мощностей.

Отметим, что во всех указанных работах проверяется лишь несколько более слабое условие, а именно условие квазипериодичности, из которого для элементов вида $\sqrt{f}/x^n$ следует периодичность (см. [2]).

В работах [7] и [8] существенное развитие получили методы, которые использовалось в работе [3]. Важную роль сыграло более тонкое и эффективное применение методов символьных вычислений непрерывных дробей, а также использование базисов Грёбнера. Это позволило полностью решить проблему периодичности $\sqrt{f}$ для квадратичных и числовых полей степени 3 над $\mathbb{Q}$, а именно, было получено полное описание периодических разложений для пар, состоящих из квадратичного числового поля (соответственно степени 3 над $\mathbb{Q}$) и периодического элемента $\sqrt{f}$ (это доказывает гипотезу из работы [6], сформулированную в более слабой форме), а также была доказана теорема конечности для расширений $\mathbb{Q}$ степени $\leqslant 6$. Последний результат является следствием описания периодических элементов $\sqrt{f}$ для кубических многочленов $f(x)$, определяющих эллиптические кривые с точками порядка $3 \leqslant N \leqslant 30$. Как оказалось, рациональность кривых $X_1(N)$, которая была краеугольным камнем работы [3], совершенно не является существенной для доказательства вышеописанных результатов, хотя сильно упрощает вычислительную часть работы.

Периодичность разложения $\sqrt{f(x)}$ в непрерывную дробь равносильна периодичности $\sqrt{f^\sigma(x)}$, где $\sigma \in \mathrm{Aut}(\mathbb{K}/\mathbb{Q})$ — автоморфизм поля $\mathbb{K}$ постоянный на $\mathbb{Q}$, а также периодичности $\sqrt{a^2 f(bx)}$ для некоторых $a, b \in \mathbb{K}^\times$. Поэтому мы будем рассматривать многочлены с точностью до эквивалентности, определяемой преобразованиями, указанными выше.

Отметим, что для произвольного поля констант $\mathbb{K}$ существует серия кубических многочленов $f = cx^3 + 1$, $c \in \mathbb{K}^\times$, с периодическим разложением $\sqrt{f}$ в непрерывную дробь с длиной периода 2. Более того, в указанном семействе встречается бесконечное число попарно неэквивалентных многочленов. В [3] показано, что над полем рациональных чисел помимо серии $cx^3 + 1$, $c \in \mathbb{Q}$, существует ровно три многочлена f, для которых $\sqrt{f}$ периодичен. В работе [7] доказано, что если расширить рассматриваемое множество полей констант до бесконечного множества всех квадратичных расширений $\mathbb{Q}$, то к найденным ранее трём многочленам с указанным свойством добавится лишь один. Удивительным является то, что этот многочлен соответствует точке на модулярной кривой с рациональной параметризаций, тогда как точки на модулярных кривых большего рода при переходе к числовым полям степени 2 не дают новых решений.

Теорема 1. *Число классов эквивалентности свободных от квадратов кубических многочленов $f \in \mathbb{K}[x]$, отличных от вида $cx^3 + 1$, над полем алгебраических чисел $\mathbb{K}$ степени $d = 2$ над $\mathbb{Q}$, имеющих периодическое разложение $\sqrt{f(x)}$ в непрерывную дробь над $\mathbb{K}$, — конечно, и определяется следующими представителями:*

$$12x^3 - 8x^2 + 4x + 1, \quad 12x^3 - 5x^2 + 2x + 1, \quad -120x^3 + 25x^2 + 2x + 1,$$

$$6\left(9\sqrt{21} - 41\right)x^3 - 4\left(3\sqrt{21} - 13\right)x^2 + 4x + 1, \text{ для } \mathbb{K} = \mathbb{Q}(\sqrt{21}).$$

А если рассмотреть множество всех расширений $\mathbb{Q}$ степени 3, то в работе [8] доказано, что появится лишь три новых многочлена с периодическим разложением корня в непрерывную дробь. Два из этих решений соответствуют точкам на модулярных кривых с рациональной параметризацей, а третье — точке на эллиптической модулярной кривой.

Теорема 2. *Число классов эквивалентности свободных от квадратов кубических многочленов $f \in \mathbb{K}[x]$, отличных от вида cx^3+1, над полем алгебраических чисел $\mathbb{K}$ степени $d=3$ над $\mathbb{Q}$, имеющих периодическое разложение $\sqrt{f(x)}$ в непрерывную дробь над $\mathbb{K}$, — конечно, и определяется следующими представителями:*

$$12x^3-8x^2+4x+1,\quad 12x^3-5x^2+2x+1,\quad -120x^3+25x^2+2x+1,$$

$$x^3+\left(-6z^2-6\right)x^2+\left(249z^2+105z+360\right)x+\frac{2397}{2}z^2+\frac{2055}{4}z+\frac{3495}{2},$$

где z корень многочлена $t^3-t^2+\frac{1}{2}t-\frac{1}{12}$;

$$(x+9z^2-6z+2)\cdot\left(x^2+\left(-48z^2+36z-14\right)x+216z^2-156z+65\right),$$

где z корень многочлена t^3-3t^2-5;

$$x^3+\frac{1}{84}\left(64z^2-40z-123\right)x^2+\frac{1}{49}\left(-32z^2+32z+39\right)x+\frac{1}{343}\left(216z-369\right),$$

где z корень многочлена $t^3+t^2-2t-\frac{9}{2}$.

Эта теорема является следствием результата работы [8] об описании периодических элементов $\sqrt{f}$ для кубических многочленов $f(x)$, определяющих эллиптические кривые с точками порядка $3 \leqslant N \leqslant 30$, также представляющего непосредственный интерес. Кроме того, указанный результат позволяет сделать вывод о конечности числа многочленов с периодическим разложением $\sqrt{f} \in \mathbb{K}[x]$ в случае, если $\mathbb{K}$ — поле алгебраических чисел степени не выше 6.

Теорема 3. *Число классов эквивалентности свободных от квадратов кубических многочленов $f \in \mathbb{K}[x]$, отличных от вида cx^3+1, над полем алгебраических чисел $\mathbb{K}$ степени $d \leqslant 6$ над $\mathbb{Q}$, имеющих периодическое разложение $\sqrt{f(x)}$ в непрерывную дробь над $\mathbb{K}$, — конечно.*

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Платонов В. П. Теоретико-числовые свойства гиперэллиптических полей и проблема кручения в якобианах гиперэллиптических кривых над полем рациональных чисел // УМН. 2014. Т.69, №1 (415). С. 3–38.

2. Платонов В. П., Петрунин М. М. Группы S-единиц и проблема периодичности непрерывных дробей в гиперэллиптических полях// Тр. МИАН. 2018. Т. 302, С. 354–376.

3. Платонов В. П., Федоров Г. В. О проблеме периодичности непрерывных дробей в гиперэллиптических полях// Математический сборник. 2018. Т. 209, № 4, С. 54–94.

4. Платонов В. П., Жгун В. С., Федоров Г. В. О периодичности непрерывных дробей в гиперэллиптических полях над квадратичным полем констант// ДАН. 2018. Т. 482, № 2. С. 137–141.

5. Платонов В. П., Жгун В. С., Петрунин М. М., Ю. Н. Штейников О конечности гиперэллиптических полей со специальными свойствами и периодическим разложением $\sqrt{f}$// ДАН. 2018. Т. 483, № 6. С. 603–608.

6. Платонов В. П., Петрунин М. М., Ю. Н. Штейников О конечности числа эллиптических полей с заданными степенями S-единиц и периодическим разложением $\sqrt{f}$// ДАН. 2019. Т. 488, № 3. С. 9–14.

7. Платонов В. П., Жгун В. С., Петрунин М. М. О проблеме периодичности разложений в непрерывную дробь $\sqrt{f}$ для кубических многочленов над числовыми полями// Доклады Российской академии наук. Математика, информатика, процессы управления, Т. 493. 2020. С. 32-37.

8. Платонов В. П., Петрунин М. М. О конечности числа периодических разложений в непрерывную дробь $\sqrt{f}$ для кубических многочленов над полями алгебраических чисел// Доклады Российской академии наук. Математика, информатика, процессы управления, Т. 495. 2020. С. 37-43.

УДК 511.32

Короткие тригонометрические суммы с простыми числами в большие дуги

З. Х. Рахмонов (Таджикистан, г. Душанбе)
Институт математики им. А.Джураева НАН Таджикистана
e-mail: zrahmonov@mitas.tj

Short exponential sums with primes in major arcs

Z. Kh. Rakhmonov (Tajikistan, Dushanbe)
A.Dzhuraev Institute of Mathematics, NAS of Tajikistan
e-mail: zrahmonov@mitas.tj

Согласно теореме Дирихле о приближении действительных чисел рациональными числами, каждое α из промежутка $[-æ, 1-æ]$, $æ\tau = 1$ представимо в виде

$$\alpha = \frac{a}{q} + \lambda, \quad (a,q) = 1, \qquad 1 \leqslant q \leqslant \tau, \qquad |\lambda| \leqslant \frac{1}{q\tau}.$$

Через $\mathfrak{M}(P)$ обозначим те числа α, для которых $q \leqslant P$, через $\mathfrak{m}(P)$ обозначим оставшиеся α. $\mathfrak{M}(P)$ и $\mathfrak{m}(P)$ соответственно называются большими и малыми дугами.

Виноградов И.М. [1] первым начал изучать короткие тригонометрические суммы с простыми числами. Для сумм вида

$$S_k(\alpha; x, y) = \sum_{x-y<n\leqslant x} \Lambda(n) e(\alpha n^k),$$

при $k = 1$, используя свой метод оценок сумм с простыми числами, он доказал нетривиальную оценку в малых дугах $\mathfrak{m}(\exp(c(\ln\ln x)^2))$, $\tau = x^{\frac{1}{3}}$ при $y > x^{\frac{2}{3}+\varepsilon}$, основу которой, наряду с «решетом Виноградова», при $k = 1$ составляют оценки коротких двойных тригонометрических сумм вида

$$J_k(\alpha; x, y, M, N) = \sum_{M<m\leqslant 2M} a_m \sum_{\substack{U<n\leqslant 2N \\ x-y<mn\leqslant x}} b_n e(\alpha(mn)^k),$$

где a_m и b_n – произвольные вещественные функции, $|a_m| \leqslant \tau^c(m)$, $|b_n| \leqslant \tau^c(n)$, M, N, $U \geqslant N$ – натуральные, $x > x_0$, y – вещественные числа, c – абсолютная постоянная, не всё время одна и та же. Затем Хейзелгроув С.Б. [2], Статулявычус В. [3], Пан Ч.Д и Пан Ч.Б. [4], Тао Ж. [5] для суммы $S_1(\alpha; x, y)$, $y \geqslant x^{\theta}$, получив нетривиальную оценку в малых дугах

и изучив ее поведение в больших дугах, доказали асимптотическую формулу в тернарной проблеме Гольдбаха с почти равными слагаемыми с условиями $|p_i - N/3| \leqslant H$, $H = N^\theta$, соответственно при

$$\theta = \frac{63}{64} + \varepsilon, \qquad \frac{279}{308} + \varepsilon, \qquad \frac{2}{3} + \varepsilon, \qquad \frac{5}{8} + \varepsilon.$$

Лю Дж. и Тао Ж. [6] как в малых дугах, так и в больших дугах получив нетривиальную оценку суммы $S_2(\alpha; x, y)$ при $y \geqslant x^{\frac{11}{16}+\varepsilon}$ доказали теорему, что достаточно большое натуральное число N можно представить в виде виде

$$N = p_1 + p_2 + p_3^2, \qquad \left|p_j - \frac{N}{3}\right| \leqslant H, \qquad \left|p_3^2 - \frac{N}{3}\right| \leqslant H, \qquad H \geqslant N^{\frac{27}{32}+\varepsilon},$$

и в работе [7] решили задачу Хуа о представимости достаточно большого натурального числа в виде суммы пяти квадратов почти равных простых чисел и показали, что достаточно большое натуральное число N, $N \equiv 5 (\mathrm{mod}\ 24)$ можно представить в виде

$$N = p_1^2 + \ldots + p_5^2, \quad \left|p_j - \sqrt{\frac{N}{5}}\right| \leqslant H, \quad H \geqslant N^{\frac{9}{20}+\varepsilon}.$$

Лю Дж. и Тао Ж. [8] воспользовавшись теоремой Ютилой М. [9] о четвёртом моменте L-функций Дирихле в критической прямой, получили нетривиальную оценку суммы $S_k(\alpha; x, y)$, $k \geqslant 3$ в больших дугах $\mathfrak{M}(\mathscr{L}^{c_1})$, $\tau = y^{2k-1}x^{-k+1}\mathscr{L}^{-c_3}$ при $y \geqslant x^{1-\frac{1}{2k-1}+\varepsilon}$, где $\mathscr{L} = \ln xq$. Кумчев А.В. [10] получил нетривиальную оценку суммы $S_k(\alpha; x, y)$ в малых дугах $\mathfrak{m}(P)$, $\tau = x^{k-\frac{2}{2k+3}}P^{-1}$ при $y \geqslant x^{1-\frac{1}{2k+3}+\varepsilon}$.

Яо Я. [11], воспользовавшись этими оценками обобщил теорему Хуа в проблеме Варинга – Гольдбаха для кубов в случае почти равных слагаемых, то есть доказал, что всякое достаточно большое нечетное натуральное число N можно представить в виде

$$p_1^3 + p_2^3 + \ldots + p_9^3 = N, \qquad \left|p_i - \sqrt[3]{\frac{N}{9}}\right| \leqslant N^{\frac{1}{3}-\frac{1}{51}+\varepsilon}.$$

В 2016 г. З.Х. Рахмонову и Ф.З. Рахмонову [12] воспользовавшись методом оценки тригонометрических сумм с простыми числами И.М. Виноградова получили нетривиальную оценку вида

$$S_3(\alpha; x, y) \ll \frac{y}{\mathscr{L}^B},$$

на малых дугах $\mathfrak{m}\left(\mathscr{L}^{32(B+20)}\right)$, $\tau = y^5x^{-2}\mathscr{L}^{-32(B+20)}$ при $y \geqslant x^{\frac{4}{5}}\mathscr{L}^{8B+151}$, где B — абсолютная постоянная.

Доклад посвящается теореме о поведении суммы $S_k(\alpha; x, y)$ в больших дугах $\mathfrak{M}(\mathscr{L}^b)$, $\tau = y^{2k-1}x^{-k+1}\mathscr{L}^{-b_1}$, где b, b_1 — произвольные фиксированные положительные числа.

Теорема 1. *Пусть $x \geqslant x_0$, $k \geqslant 3$ — фиксированное целое число, A, b_1, b — произвольные фиксированные положительные числа, $1 \leqslant q \leqslant \mathscr{L}^b$, $\tau = \frac{y^{2k-1}}{x^{k-1}}\mathscr{L}^{-b_1}$,*

$$S_k(\alpha; x, y) = \sum_{x-y<n\leqslant x} \Lambda(n)e(\alpha n^k), \qquad \alpha = \frac{a}{q} + \lambda, \quad (a, q) = 1, \quad |\lambda| \leqslant \frac{1}{q\tau}.$$

Тогда при $\lambda \leqslant \left(2\pi k^2 x^{k-2}y^2\right)^{-1}$ и $y \geqslant x^{\frac{5}{8}}\mathscr{L}^{1,5A+0,25b+18}$ справедливо равенство:

$$S_k(\alpha; x, y) = \frac{\tau(\chi_0, a, k)}{\varphi(q)} \int_{x-y}^{x} e(\lambda u^k)du + O\left(y\mathscr{L}^{-A}\right),$$

а при $\lambda > \left(2\pi k^2 x^{k-2} y^2\right)^{-1}$ *и* $y \geqslant x^{1-\frac{1}{2k-1+\eta_k}} \mathscr{L}^{c_k}$, *где*

$$\eta_k = \frac{2}{4k-5+2\sqrt{(2k-2)(2k-3)}}, \qquad c_k = \frac{2A+22+\left(\frac{2\sqrt{2k-3}}{\sqrt{2k-2}}-1\right)b_1}{2\sqrt{(2k-2)(2k-3)}-(2k-3)},$$

имеет место оценка

$$S_k(\alpha; x, y) \ll y\mathscr{L}^{-A}.$$

Явное значение параметра η_k при k равным 3, 4, 5 и 6 имеют вид:

$$\eta_3 = \frac{2}{7+4\sqrt{3}} \approx 0,1435935394, \qquad \eta_4 = \frac{2}{11+2\sqrt{30}} \approx 0,0910976998,$$
$$\eta_5 = \frac{2}{15+4\sqrt{14}} \approx 0,0667409058, \qquad \eta_6 = \frac{2}{19+2\sqrt{90}} \approx 0,052668078.$$

Эта теорема чуть слабее чем вышеуказанной теоремы Лю Дж. и Тао Ж. [8] и в её доказательстве используется теорема о втором моменте L - функций Дирихле в критической прямой [13, 14].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Виноградов И. М. Избранные труды. — М: изд-во АН СССР. 1952.
2. *Haselgrove C.B.* Some theorems in the analitic theory of number // J. London Math.Soc. 1951. V. 26. P. 273 – 277.
3. *Статулявичус В.* О представлении нечетных чисел суммою трех почти равных простых чисел // Вильнюс. Ученые труды университета. Сер. мат., физ. и хим. н. 1955. № 2. С. 5 – 23.
4. *Pan Cheng-dong, Pan Cheng-biao.* On estimations of trigonometric sums over primes in short intervals (III) // Chinese Ann. of Math. 1990. V. 2. P. 138 – 147.
5. *Zhan T.* On the Representation of large odd integer as a sum three almost equal primes // Acta Math Sinica. New ser. 1991. V. 7, No 3. P. 135 – 170.
6. *Liu J., Zhan T.* Estimation of exponential sums over primes in short intervals I. Mh Math, 1999, 127: 27 – 41.
7. *Liu J., Lu G. & Zhan T.* Exponential sums over primes in short intervals // Science in China: Series A Mathematics. 2006. V. 49, No 5. P. 611 – 619. DOI:10.1007/s11425-006-0611-x
8. *Liu J., Zhan T.* Estimation of exponential sums over primes in short intervals II. In Analytic Number Theory: Proceedings of a Conference in Honor of Heini Halberstam. 1996. Birkhauser. P. 571 – 606.
9. Jutila, M., 1991, "Mean value etstimates for exponential sums with applications to L-functions", *Acta Arithmetica*, vol. 57, Is. 2. pp. 93-114.
10. *Kumchev A V.* On Weyl sums over primes in short intervals // "Arithmetic in Shangrila" — Proceedings of the 6th China-Japan Seminar on Number Theory. Series on Number Theory and Its Applications. 2012. V. 9. Singapore: World Scientific. P. 116–131.

11. *Yao Y.* Sums of nine almost equal prime cubes // Frontiers of Mathematics in China. October 2014. V. 9, Is. 5. P. 1131 – 1140. DOI:10.1007/s11464-014-0384-4.

12. Рахмонов З.Х., Рахмонов Ф.З. Короткие кубические суммы простыми числами // Труды МИАН. 2016. Т. 296. С. 220 – 242.

13. Rane, V. V., On the mean square value of Dirichlet L-series // J. London Math. Soc., (2) 21 (1980), 203-215.

14. Zhan Tao On the Mean Square of Dirichlet L-Functions // Acta Mathematica Sinica. New Series. 1992. Vol. 8, No 2. pp. 204-224.

УДК 517

Теория определимости сегодня[1]

А. Л. Семенов (Россия, г. Москва)
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
email: alsemno@ya.ru
С. Ф. Сопрунов (Россия, г. Москва)
Центр педагогического мастерства Департамента образования и науки Москвы, Институт кибернетики и образовательной информатики им. А.И. Берга ФИЦ ИУ РАН
email: soprunov@mail.ru

Definability theory today

A. L. Semenov (Russia, Moscow)
Lomonosov Moscow State University
email: alsemno@ya.ru
S. F. Soprunov (Russia, Moscow)
Center for pedagogical excellence of Moscow Department of Education and Science, Axel Berg Institute of Cybernetics and Educational Computing FRC SCS of the Russian Academy of Sciences
email: soprunov@mail.ru

"Mathematicians, in general, do not like to operate with the notion of definability; their attitude towards this notion is one of distrust and reserve".
Alfred Tarski

[1]Работа выполнена при поддержке РНФ (А. Л. Семенов, грант № 17-11-01377 – разделы 1, 3, 5) и РФФИ (С. Ф. Сопрунов, грант № 19-29-14199 – разделы 2, 4).

1. Введение. Основное понятие

Доклад посвящен теории определимости – разделу математической логики, работающему с понятием определения, не менее фундаментальным, чем понятия истины, доказательства, вычисления. Более подробное изложение и ссылки можно найти в работе [1].

Перейдем к системе базовых понятий. *Язык*, в котором мы формулируем определения – это язык логики отношений, к чисто логическому ядру языка (первого порядка) мы добавляем *имена отношений*, образующие *сигнатуру*. Если задана структура, то каждая формула в языке с сигнатурой этой структуры *определяет* отношение на носителе (универсуме) D структуры.

Иногда мы рассматриваем языки с переменными по подмножествам D и кванторами по этим подмножествам (*монадический* язык), или по конечным подмножествам D (*слабый монадический* язык), или вообще без кванторов (*бескванторный* язык).

Зафиксируем универсум D и любое семейство отношений S на D.

Возьмем произвольное конечное подмножество элементов из S и дадим имена его элементам. Любая формула в возникающем языке определяет отношение на D. Все такие отношения мы называем *определимыми через* отношения из S, другими словами, *определимыми в* S (над D).

Все отношения, определимые в S, составляют *замыкание* S. Мы говорим, что S *порождает* свое замыкание, а S является *базисом* своего замыкания. Любое замкнутое множество отношений называется *пространством определимости* (над D).

Все пространства определимости над D составляют решетку с естественными решеточными операциями.

Решетку подпространств заданного пространства определимости мы называем *решеткой определимости* этого пространства или *решеткой определимости* соответствующей структуры. Подпространства и порождающие их множества называют также редуктами (reducts) исходного пространства.

Любое пространство определимости S (как и вообще любое множество отношений) имеет свою *группу автоморфизмов* $\mathsf{Aut}(S)$, образованную перестановками на D, сохраняющими все отношения из пространства S. Соответствие между пространствами определимости и их группами автоморфизмов – антимонотонное соответствие Галуа.

2. Возникновение и мотивировка проблематики

Логика отношений присутствует уже у Джорджа Пикока и Джорджа Буля. За ними идут работы 1860–1890 годов Готлоба Фреге и Чарлза Пирса. По сути, там и была развита проблематика определимости.

2.1. Как определить основные математические структуры? Геометрия и числа. Ширина пространств отношений

В конце XIX века итальянские математики (Джузеппе Пеано, Алессандро Падоа, Марио Пьери, ...) и немецкие математики (Готлоб Фреге, Мориц Паш, Давид Гильберт и др.) пытались найти «лучший» набор базовых понятий для геометрии и арифметики. Речь шла именно о том, «как определить что-то через что-то».

Альфред Тарский и Адольф Линденбаум показали, что не существует семейства бинарных отношений, через которое можно определить все отношения евклидовой геометрии. В общем контексте теории определимости это приводит к следующему понятию.

Definition 1. *Пусть задано пространство определимости S. Его* ширина *– это минимальное n такое, что S порождается отношениями с n или меньшим количеством аргументов.*

Теорема 1. *Существуют пространства определимости любой конечной или счетной ширины.*

2.2. Элиминация кванторов. Глубина пространства отношений

Ряд знаменитых первых работ в математической логике был связан с элиминацией кванторов, относящейся к теории определимости. Глубина пространства определимости – это минимальная (по всем конечным множествам образующих) длина кванторной иерархии для него.

Теорема 2. *Существуют пространства определимости любой конечной или счетной глубины.*

Априори длина иерархии для пространства S может зависеть от выбора (конечного) F.

Проблема 1. *Зависит ли глубина пространства от выбора базиса?*

Проблема 2. *Существуют ли естественные примеры «большой» (2, 3, 4, ...) конечной глубины?*

2.3. Разрешимость в пространствах отношений. Проблема Элгота—Рабина

Проблема 3. *Существуют ли пространства произвольной конечной или бесконечной глубины с разрешимой теорией, пространства, все элементы которых (равномерно) разрешимы?*

Проблема 4. *Элгот—Рабин: Существует ли конечно-порожденное пространство, теория которого разрешима, а теория любого большего пространства – не разрешима (*максимально разрешимая теория*)?*

С. Ф. Сопрунов доказал (используя метод форсинга), что теория пространства, содержащего ветвящийся порядок, не является максимальным.

Теорема 3. *Если в структуре с разрешимой теорией выразим ветвящийся порядок, то теория такой структуры не является максимально разрешимой.*

Типичным примером ветвящегося порядка является порядок $\succ$ на словах в конечном алфавите, определенный так, что $a \succ b \leftrightarrows$ (слово a является началом слова b).

Следствие 1. *Разрешимая теория натурального ряда с несколькими следованиями не является максимально разрешимой. То же самое верно для любого обогащения данной структуры.*

Следствие 2. *Не существует структуры с максимально разрешимой слабой монадической теорией.*

Проблема 5. *Существует ли структура с максимально разрешимой монадической теорией?*

Проблема 6. *Верно ли, что у структуры $\langle \mathbb{N}, \{<\} \rangle$ нет максимально разрешимого расширения?*

Проблема 7. *Существует ли пространство, все элементы которого разрешимы, а для любого большего это не так?*

3. Фундаментальная теорема об определимости. Полнота автоморфизмов

Тарский в своей статье «Что такое логические понятия?», явно ссылается на Клейна с его Эрлангенской программой, объясняя предмет логики как изучение «всего... с точностью до перестановок»: «Я попытаюсь расширить его [Клейна] метод за пределы геометрии и применить его также к логике...».

Понятие элементарного расширения (и, соответственно, элементарного ограничения) можно естественно определить для пространств определимости. В 1959 году Ларс Свенониус (Lars Svenonius) доказал следующую теорему:

Теорема Свенониуса. *Пусть S^-, S — счетные пространства определимости на носителе A, причем $S^- \subset S$. Тогда для любого отношения $R \in S$ следующие два утверждения равносильны:*

(a) $R \in S^-$;

и

(b) для любого счетного пространства определимости S', являющегося элементарным расширением пространства S, и любых $S_0 \subset S', R_0 \in S'$, таких, что ограничение S_0 на A совпадает с S^-, ограничение R_0 на A совпадает с R, группа перестановок носителя пространства S', сохраняющая все отношения из S_0, сохраняет и R_0.

Теорему Свенониуса можно считать «Теоремой полноты для определимости», реализующей программу Клейна—Тарского.

Фактически, мы можем модифицировать теорему так, чтобы использовать один универсум, как было показано авторами.

Для ω-категоричных структур определимые подпространства находятся во взаимно однозначном соответствии с замкнутыми группами автоморфизмов. Простым обобщением понятия ω-категоричности является понятие (счетной) *полноты вверх*, названной в предыдущих работах авторов максимальностью. А именно: счетное пространство S назовем *полным вверх*, если любое его счетное элементарное расширение изоморфно S.

Из теормы Свенониуса непосредственно следует:

Следствие 1. *Пусть S^-, S – счетные пространства определимости на носителе A, причем $S^- \subset S$ и пространство S полно вверх. Тогда для любого отношения $R \in S$ следующие два утверждения равносильны:*

(a) $R \in S^-$

и

(b) группа перестановок на A, сохраняющая все отношения из S^-, сохраняет R.

4. Конкретные примеры решеток определимости

Эдвард Хантингтон в работе 1935 г. описал подпространства определимости для порядка: «(1) линейный порядок; (2) «между»; (3) «цикл» и (4) «разделение» (то есть ни один из двух отрезков не лежит внутри другого)». То, что эти пространства исчерпывают всю решетку определимости для порядка рациональных чисел $\langle \mathbb{Q}; < \rangle$, было доказано Клодом Фрасне в 1965 году. Следующим замечательным примером является однородный граф. И здесь, как для рациональных чисел, решетка состоит из пяти элементов.

Проблема 8. *Гипотеза Томаса. Решетка всякого конечно порожденного однородного пространства конечна.*

Мы не так уж много знаем о решетках определимости не ω-категоричных структур. Естественно начать рассмотрение с числовых структур. Авторам удалось получить полное описание счетной решетки определимости для $\langle \mathbb{Z}; +1 \rangle$ и несчетной решетки для сложения рациональных чисел.

Проблема 9. *Описать решетку подпространств для* $\langle \mathbb{N}; +1 \rangle$.

Проблема 10. *Описать решетку подпространств для натуральных чисел с несколькими следованиями.*

5. Разрешимость в решетках. Самоопределимость Мучника

Естественная алгоритмическая проблема для алгебраической структуры, в нашем случае – решетки определимости: принадлежит ли элемент пространства (заданный формулой) подпространству, порожденному заданным набором элементов?

Андрей Мучник ввел понятие *самоопределимости* и доказал, что пространство $\langle \mathbb{N}; + \rangle$ самоопределимо и что указанная проблема для этого пространства разрешима. Источником этой теоремы для Мучника было доказательство Семенова теоремы Кобхэма—Семенова. Доказательство Мучника существенно проще доказательства Семенова и вполне соответствует духу исследований Тарского по определимости.

Проблема 11. *Найти еще примеры структур со свойством самоопределимости.*

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. А. Л. Семенов, С. Ф. Сопрунов. Решетка определимости. Источники и направления исследований // Чебышевский сборник, 2020, т. XXII, вып. 1(77), с. 304–327.

Секция 1. Группы

УДК 511.32

О когерентности групп[1]

В. Н. Безверхний (Россия, г. Москва)
Таможенная академия России
e-mail: vnbezv@rambler.ru
Н. Б. Безверхняя (Россия, г. Москва)
Академия гражданской защиты МЧС России
e-mail: vnbezv@rambler.ru

On coherence groups

V. N. Bezverkhnii (Russia, Moscow)
Customs Academy of Russia
e-mail: vnbezv@rambler.ru
N. B. Bezverkhnyaya (Russia, Moscow)
Academy of Civil Protection EMERCOM of Russia
e-mail:vnbezv@rambler.ru

Определение 1. *Будем говорить, что группа G обладает свойством когерентности, если каждая ее конечнопорожденная подгруппа конечно определена.*

Теорема 1. *Пусть группа G есть свободное произведение групп A и B с объединением по изоморфным подгруппам U_1, U_2 где $U_1 < A, U_2 < B$, с помощью фиксированного изоморфизма φ; то есть*

$$G = \langle A * B | relA, relB, \varphi(U_1) = U_2 \rangle$$

Тогда если группы A, B обладают свойством когерентности, объединяемые подгруппы U_1, U_2 обладают свойством максимальности, то группа G обладает свойством когерентности.

При доказательстве теоремы используем понятие специального множества [1], являющегося обобщением понятия нильсеновского множества для свободных групповых конструкций.

Условия, налагаемые на объединяемые подгрупп существенны, и позволяют каждое конечное множество слов W группы G привести к конечному специальному множеству, порождающему подгруппу $\langle W \rangle$ группы G.

Теорема 2. *Пусть*

$$G^* = \left\langle G, t; relG, t^{-1}U_1 t = \varphi(U_1) \right\rangle$$

есть HNN – расширение группы G с помощью изоморфных подгрупп $U_1, \varphi(U_1) = U_2$ группы G. Тогда, если группа G обладает свойством когерентности, а подгруппы U_1, U_2 группы G свойством максимальности, то группа G^* обладает свойством когерентности.

При доказательстве также используем понятие специального множества образующих подгруппы группы G^* [2].

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ 19-41-710002 р_а

Следствие 1. *Пусть $G = A * B$ - свободное произведение групп A, B каждая из которых является когерентной. Тогда группа является G когерентной.*

Следствие 2. *Свободное произведение двух свободных групп ранга два с циклическим объединением*

$$G = F_2 *_C F_2$$

является когерентной группой.

Следствие 3. *HNN – расширение свободной группы F_2 с ассоциированными циклическими подгруппами*

$$G^* = \langle F_2, t; relG, t^{-1}ut = v\rangle$$

где u и v слова группы F_2, отличные от единицы в F_2, является когерентной группой.

Прямое произведение свободных групп ранга два:

$$G = F_2 \times F_2$$

не является когерентной, так как содержит конечнопорожденную подгруппу с бесконечным числом определяющих соотношений. [3], [4].

Т.А. Маканиной было доказано, что группы кос $\mathcal{B}_{n+1}$с числом образующих $n > 3$ содержат группу $F_2 \times F_2$. [5]. В статье [6] доказано, что все неприводимые группы Артина конечного типа:

$$B_n, n > 3, D_n, E_6, E_7, E_8, F_4, H_4$$

содержат подгруппу $F_2 \times F_2$, следовательно, являются некогерентными.

Любая группа Артина конечного типа является прямым произведением конечного числа неприводимых групп Артина конечного типа, поэтому класс групп Артина конечного типа является некогерентным. Действительно, рассмотрим прямое произведение групп

$$\mathcal{B}_3 = \langle \sigma_1, \sigma_2; \sigma_1\sigma_2\sigma_1 = \sigma_2\sigma_1\sigma_2\rangle$$

и

$$B_2 = \langle a_1, a_2; a_1a_2a_1a_2 = a_2a_1a_2a_1\rangle$$

Известно, что подгруппа группы $\mathcal{B}_3$ порожденная элементами σ_1^2, σ_2^2 свободна, а так же подгруппа группы B_2 порожденная элементами a_1^2, a_2^2, тоже свободна, поэтому группа $\mathcal{B}_3 \times B_2$ содержит подгруппу $F_2 \times F_2$,

Каждой группе Артина G:

$$G = \left\langle a_1, \ldots, a_n; \langle a_ia_j\rangle^{m_{ij}} = \langle a_ja_i\rangle^{m_{ji}}, i, j \in \overline{1, n}\right\rangle$$

соответствует конечный граф Γ, между вершинами которого и образующими группы G можно установить взаимно-однозначное соответствие, а ребру, соединяющему вершины a_i, a_j соответствует соотношение $\langle a_ia_j\rangle^{m_{ij}} = \langle a_ja_i\rangle^{m_{ji}}$.

В статье [7] доказано, что группа Артина соответствующий граф Γ которой есть цикл с числом ребер большим трех, не является когерентной.

Теорема 3. *Группа Артина с двумя образующими когерентна.*

В [6] показано, что группа Артина

$$G_{ab} = \langle a, b; \langle ab\rangle^{m_{ab}} = \langle ba\rangle^{m_{ba}}\rangle$$

если $m_{ab} = 2k + 1$ изоморфна группе

$$\left\langle x, y; x^{2k+1} = y^2\right\rangle$$

а если $m_{ab} = 2k$, то изоморфна группе

$$\left\langle x, t; t^{-1}x^mt = x^m\right\rangle$$

Из теорем 1-2 следует, что группа Артина с двумя образующими является когерентной.

Группа Артина есть группа с древесной структурой, если соответствующий граф Г является дерево-графом.

Теорема 4. *Группа Артина с древесной структурой когерентна.*

Действительно, группа Артина с древесной структурой есть древесное произведение группы Артина с двумя образующими с циклическим объединением. Поэтому используя теорему 1, получаем, что группа Артина с древесной структурой когерентна.

Задача 1. *Если группа не когерентна, то будет ли в ней неразрешима проблема вхождения.*

Задача 2. *Пусть группа G не содержит прямое произведение двух свободных групп ранга два, и пусть в G не разрешима проблема вхождения, тогда будет ли группа G не когерентна.*

Задача 3. *Существует ли группа с разрешимой проблемой вхождения, являющаяся некогерентной.*

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Безверхний В.Н. Решение проблемы вхождения для одного класса групп // Вопросы теории групп и полугрупп. Тульский гос. пед. ин-т, 1972, С. 3-86.

2. В. Н. Безверхний. Решение проблемы вхождения в классе HNN-групп. //Алгоритм. проблемы теории групп и полугрупп. Межвуз. сб. науч. тр. Тула, 1981, С. 20-62.

3. К. А. Михайлова. Проблема вхождения для прямых произведений групп. //Докл. АН СССР, т.19, с. 1103-1105, 1958.

4. К. А. Михайлова. Проблема вхождения для прямых произведений групп.//Матем. сборник, 75, с. 199-210, 1968

5. Т. А. Маканина. Проблема вхождения для групп кос $\mathcal{B}_{n+1}$ с $n+1 \geqslant 5$. // Мат. заметки, т.29, 1981, с. 16-17.

6. Безверхний В. Н. Неразрешимость проблемы вхождения в группах Артина конечного типа.//Сиб. Мат. журнал, Т. XXVI №5, 1985, С. 27-42.

7. S. M. Hermiller and J. Meier. Artin groups, rewriting systems and three-manifold.//J. Pure. Appl. Algebra, 136 (1999), 141-156.

УДК 511.32

О сопряженности слов в группах Артина с треугольной структурой[1]

В. Н. Безверхний (Россия, г. Москва)
Таможенная академия России
e-mail: vnbezv@rambler.ru

On the conjugacy of words in Artin groups with a triangular structure

V. N. Bezverkhnii (Russia, Moscow)
Customs Academy of Russia
e-mail: vnbezv@rambler.ru

Группа Артина задается системой образующих $A = \langle a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n\rangle$ и системой определяющих соотношений: $\langle a_i a_j\rangle^{m_{ij}} = \langle a_j a_i\rangle^{m_{ji}}; i \neq j;\quad i,j \in \overline{1,n}$, где $\langle a_i a_j\rangle^{m_{ij}}$ - слово длины m_{ij} состоящее из m_{ij} чередующихся букв $a_i,\ a_j$; m_{ij}– числа симметрической матрицы Коксетера, $m_{ii} = 1$ при $i \in \overline{1,n}$; $m_{ij} \geqslant 2$, при с $i \neq j$, соответствующей данной группе G.

Копредставление группы G будет иметь вид:

$$G = \langle a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n\ ;\ \langle a_i a_j\rangle^{m_{ij}} = \langle a_j a_i\rangle^{m_{ji}}; i \neq j;\quad i,j \in \overline{1,n}\rangle \tag{1}$$

Рассмотрим конечный граф Г, между вершинами v_i которого и образующими группы установлено взаимно-однозначное соответствие, причем, если вершины $v_i,\ v_j$ соединены ребром, то данному ребру соответствует число Коксетера m_{ij}, если вершины $v_i,\ v_j$ не соединены ребром, то паре $(v_i,\ v_j)$ соответствует ∞.

Построенный граф называется графом Коксетера группы Артина G, имеющей копредставление (1).

К. Аппелем и П. Шуппом были определены группы Артина большого типа с $m_{ij} \geqslant 3$ и группы Артина экстрабольшого типа с $m_{ij} > 3$ [1].

Для групп Артина экстрабольшого типа ими были решены проблемы равенства и сопряженности слов. Проблемы равенства и сопряженности слов в группах Артина большого типа были решены в [2], [3].

В [4] были определены группы Артина с древесной структурой, то есть группы, граф Коксетера которой есть дерево-граф.

Отметим, что числа Коксетера m_{ij} матрицы Коксетера, соответствующей группе Артина с древесной структурой, принимают следующие значения:

$$m_{ij} \in 2,\ 3,\ 4,\ \ldots,\ n.,\ \ldots$$

В группах Артина с древесной структурой в [5] были положительно решены проблемы равенства и сопряженности слов.

Целью данной статьи является решение основных алгоритмических проблем в группах Артина с m–угольной структурой, при $m = 3$.

Определение 1. *Будем говорить, что группа Артина G является группой с m–угольной структурой, если соответствующий группе граф Коксетера* Г *образован m–угольниками, $m > 2$; причем любые два m–угольника либо не пересекаются, либо имеют общую вершину, либо общее ребро.*

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ 19-41-710002 р_а

Числа m_{ij} матрицы Коксетера M, соответствующей группе с m–угольной структурой, принимают значения: $m_{ij} \in 2,\ 3,\ 4,\ \ldots,\ n.,\ \ldots$.

Для группы Артина с m–угольной структурой, при $m > 3,$ в [6] доказана разрешимость проблем равенства и сопряженности слов.

Рассмотрим группы Артина с треугольной структурой, то есть $m = 3$.

Пусть G - группа Артина, граф Г Коксетера которой есть треугольник. Тогда ее копредставление имеет вид:

$$G = \langle\ a_1,\ a_2,\ a_3\ ;\ \langle a_1a_2\rangle^{m_{12}} = \langle a_2a_1\rangle^{m_{21}},\ \langle a_2a_3\rangle^{m_{23}} = \langle a_3a_2\rangle^{m_{32}},\quad \langle a_1a_3\rangle^{m_{13}} = \langle a_3a_1\rangle^{m_{31}}\ \rangle \tag{2}$$

Рассмотрим подгруппу группы G :

$$G_0 = \langle a_1,\ a_2,\ a_3\ ;\ \langle a_1a_2\rangle^{m_{12}} = \langle a_2a_1\rangle^{m_{21}},\ \langle a_2a_3\rangle^{m_{23}} = \langle a_3a_2\rangle^{m_{32}},\ \rangle \tag{3}$$

Данная подгруппа есть свободное произведение групп

$$G_1 = \langle a_1, a_2; \langle a_1a_2\rangle^m_{12} = \langle a_2a_1\rangle^m_{21},\rangle \tag{4}$$

$$G_2 = \langle a_2^{'}, a_3\langle a_2^{'}a_3\rangle^m_{23} = \langle a_3a_2^{'}\rangle^m_{32},\rangle \tag{5}$$

$'$ с объединением по циклической подгруппе $\langle a_2\rangle = \langle a_2^{'}\rangle$ то есть

$$G_0 = \langle G_1 * G_2; relG_1, relG_2, a_2 = a_2^{'}\rangle \tag{6}$$

Таким образом G_0 есть древесное произведение групп G_1 и G_0.

Если в группе G числа Коксетера $m_{ij} > 2$, то данная группа будет группой большого или экстрабольшого типа, и в этом классе разрешимы проблемы равенства и сопряженности слов.

Если $m_{12} = m_{23} = 2$ и $m_{13} \geqslant 2$, то в G разрешима проблемы равенства и сопряженности слов, так как G есть прямое произведение циклической группы $\langle a_1\rangle$ и группы

$$G_{13} = \langle a_1,\ a_3;\ \langle a_1a_3\rangle^{m_{13}} = \langle a_3a_l\rangle^{m_{31}},\quad \rangle$$

В группе G_{13} разрешимы данные проблемы, что следует из утверждения:

Теорема 1. *[1]. Группа Артина с двумя образующими, есть мало сократимая группа типа* $C\,(4)\,\&T(4)$.

В группе с условием $C\,(4)\,\&T(4)$ разрешимы проблемы равенства и сопряженности слов. [7]. Поэтому интерес представляет группа с числами Коксетера: $m_{12} > 2,\ m_{23} > 2,\ \ m_{13} \geqslant 2$.

Используя преобразования Тице, представим группу (3) в виде

$$G = \langle a_1, a_2, a_3, \overline{a_1}, \overline{a_2}, \overline{a_3}; \langle a_1a_2\rangle^m_{12} = \langle a_2a_1\rangle^m_{21}, \tag{7}$$

$$\langle a_2a_3\rangle^m_{23} = \langle a_3a_2\rangle^m_{32}, \langle \overline{a_1a_3}\rangle^m_{13} = \langle \overline{a_3a_1}\rangle^m_{31}, a_1 = \overline{a_1}, a_3 = \overline{a_3}\rangle \tag{8}$$

Обозначим через $\overline{G}_0$ группу с представлением

$$\overline{G}_0 = \langle \overline{a}_1,\ \overline{a}_3; \langle \overline{a}_1\overline{a}_3\ \rangle^{m_{13}} = \langle\ \overline{a}_3\overline{a}_1\rangle^{m_{31}}\ \rangle \tag{9}$$

Тогда группу (7)можно представить в виде:

$$G = \langle G_0 * \overline{G}_0; relG_0, rel\overline{G}_0,\ a_1 = \overline{a}_1,\ a_3 = \ \overline{a}_3\ \ \rangle \tag{10}$$

Используя представление (10)и применяя понятия R-сокращения и специального R-сокращения [3], [8], можно доказать, что каждое слово $w \in G$ может быть записано в виде $w = w_1 w_2 \dots w_n$ где каждое w_i принадлежит одному из сомножителей $G_0, \overline{G}_0$, причем $w_i \neq 1$ в соответствующем сомножителе. $\forall i,\ 1 \leqslant i < n,\ w_i,\ w_{i+1}$ принадлежат различным сомножителям, w_i несократимо (является кратчайшим по длине) в соответствующем сомножителе и между $w_i,\ w_{i+1},\ 1 \leqslant i < n$ нет сокращений.

Такое представление w назовем каноническим.

Лемма 1. *Пусть* $w = w_1 w_2 \dots w_n,\quad v = v_1 v_2 \dots v_n$ *- каноническое представление соответственно слов* $w,\ v$. *Тогда если* $w = v$ *то* $m = n$ *и для любогоі,* $i \in \overline{1,n},\quad w_i,\ v_i$ *принадлежат одному сомножителю группы* G *и существует однослойная диаграмма* M *с граничным циклом* $\partial M = \gamma\delta$ *с метками* $\varphi(\gamma) = w,\quad \varphi(\delta) = v^{-1}$.

Определение 2. *Диаграмма* M, $\partial M = \gamma\delta$, *называется однослойной, если каждая ее область* D *имеет непустое пересечение как с* γ *так и с* δ.

Теорема 2. *В группе Артина* G, *граф Косетера, который есть треугольный цикл, разрешима проблема равенства и сопряженности слов.*

При доказательстве используется метод диаграмм. Доказывается, что диаграмма, соответствующая равенству слов и кольцевая диаграмма, соответствующая сопряженности слов, являются однослойными диаграммами. Кроме того, непосредственно следующее утверждения.

Теорема 3. *[5]. В группах Артина с древесной структурой разрешимы проблемы равенства и сопряженности слов.*

Теорема 4. *Пусть* G *группа Артина с древесной структурой и* $A = \langle a_1,\ a_2,\ \dots,\ a_n \rangle$ *- система образующих групп* G, *и пусть* $x,\ y \in A$ *и существует* $z \in G,\quad p,\ q \in \mathbb{Z}$, *такие что* $z^{-1}x^p z = y^q$, *тогда* $p = q$.

Определение 3. *Будем говорить, что в группе* B *разрешима проблема вхождения, если существует алгоритм, позволяющий для любой конечно порожденной подгруппы* $H < G$ *и любого* $w \in B$ *установить принадлежит ли* w *подгруппе* H.

Определение 4. *Будем говорить, что в группе* B *разрешима проблема:*

а) пересечения конечнопорожденных подгрупп, если существуют алгоритм, позволяющий для любых подгрупп H_1, H_2 *из* B *выписать образующие пересечения* $H_1 \cap H_2$.

б) пересечения смежных классов конечно порожденных подгрупп, если существует алгоритм, позволяющий для любых подгрупп $H_1,\ H_2$ *из* B *и любого элемента* $w \in B$ *определить, пусто или не пусто пересечение* $wH_1 \cap H_2$.

Теорема 5. *В группах Артина с древесной структурой разрешима проблема вхождения.*

Теорема 6. *В группах Артина с древесной структурой разрешима проблема пересечения циклических подгрупп и проблема пересечения смежных классов циклических подгрупп.*

Теорема 7. ***(Основная теорема)**. В группах Артина граф Коксетера, который состоит из* m*-угольников, где* $m = 3$, *алгоритмически разрешимы проблемы равенства и сопряженности слов.*

При доказательстве используется метод диаграмм и теоремы 1-6.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Appel K., Schupp P. Artin groups and infinite Coxeter groups // Ivent. Math. 1983, Vd 72, p. 201-220.

2. Appel K. One Artin groups and Coxeter groups of large type/Contemp. Math. 1984, V.33, P.50-78.

3. Безверхний. В.Н. Решение проблемы сопряженности слов в группах Артина и Кокстера большого типа. Алгоритмич. проблемы теории групп и полугрупп. Меж. вузов. сб. науч. тр. Тула, 1986, С. 26-61.

4. Безверхний. В.Н. О группах Артина и Кокстера с древесной структурой. Алгебра и теория чисел. Тезисы V международ. конф. Тула, 2003, С. 33-34.

5. Безверхний В. Н. Карпова О. Ю. Проблема равенства и сопряженности слов в группах Артина с древесной структурой. // Известия ТулГу. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2006, Т.12, Вып.1,С. 67-82.

6. Безверхний В. Н., Безверхняя Н. Б. Решение проблемы равенства и сопряженности слов в некотором классе групп Артина.// Фундаментальная и прикладная математика 2019 г. Т. 22, №4, С. 9-27.

7. Линдон Р., Шупп П. Комбинаторная теория групп. М. Мир, 1980.

8. Безверхний. В.Н. Решение проблемы обобщенной сопряженности слов в группах Артина большого типа.// Фундаментальная и прикладная математика 1999 г. Т. 5, Вып. 1, С. 1-38.

УДК 511.32

О гиперболичности некоторых HNN-расширений свободных групп[1]

Н. Б. Безверхняя (Россия, г. Москва)
Академия гражданской защиты МЧС России
e-mail: vnbezv@rambler.ru

On hyperbolicity of some HNN-extensions of free groups

N. B. Bezverkhnyaya (Russia, Moscow)
Academy of Civil Protection EMERCOM of Russia
e-mail:vnbezv@rambler.ru

Вопрос об описании гиперболических групп в классе групп с одним определяющим соотношением является весьма важным, так как гиперболические группы обладают рядом ценных алгоритмических и комбинаторных свойств, которые несправедливы в классе конечно представленных групп в общем. Например, в гиперболических группах разрешимы проблемы равенства и сопряженности слов. Доказательство этих фактов дал М. Громов. В классе гиперболических групп без кручения З. Селом решена проблема изоморфизма. Р.И. Григорчук

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ 19-41-710002 р_а

и Г. Ф. Курчанов дали описание решений квадратичных уравнений в гиперболических группах. А.Ю. Ольшанский доказал, что все неэлементарные гиперболические группы являются SQ-универсальными.

Рассмотрим группу

$$G^* = \langle a_0, a_1, a_2, \ \ldots, \ a_n, \ t; \ t^{-1}a_0t = a_1, \ t^{-1}a_1t = a_2, \ \ldots, t^{-1}a_{n-1}t = a_n, t^{-1}a_nt = w\rangle$$

, где w есть некоторое слово от образующих $a_0, a_1, a_2, \ \ldots, \ a_n$. Автором дано полное описание гиперболических и не гиперболических групп в случае, когда

а) w есть некоторое слово от образующих $a_0, a_1 (a_n = a_1)$ [4].

б) $w = a_0^{\varepsilon} w_0 a_0^{\delta}, \varepsilon, \delta \in \{\pm 1\}\, w_0$ слово от образующих $a_0, a_1, a_2, \ \ldots, \ a_n$. [4].

Пусть $G = \langle A; R\rangle$ – конечноопределенная группа с множеством образующих A и множеством определяющих соотношений R. Слово $w \in F(A)$, где $F(A)$-свободная группа, равно единице в G тогда и только тогда, когда

$$w = \sum_{i=1}^{n} S_i^{\varepsilon_i} R_i^{\varepsilon} S_i^{-\varepsilon_i} \tag{1}$$

в свободной группе $F(A)$, где $S_i \in F(A), \varepsilon_i, \ \varepsilon \in \{\pm 1\}$, $R_i \in R$ и $i \in \{1, \ 2, \ \ldots, \ n\}$.

Через $L(w)$ обозначим наименьшее целое n для которого слово w представимо в виде (1). Конечноопределенную группу G назовем гиперболической [1], если $L(w)$ ограничена сверху линейной функцией $c\,|w|$, зависящей от длины слова w и константы c.

Пусть

$$G^* = \langle G, \ t; \ t^{-1}\alpha_{-1}(c)\, t = \alpha_1(c), \ c \in C\rangle \tag{2}$$

HNN - расширение группы G, соответствующее мономорфизмам $\alpha_{-1}, \ \alpha_1 : C \to G$ для некоторой группы C.

Определение 1. *[2] Аннулятором длины $2M+1$ в (2) будем называть пару*
$\sum = (\overline{p}, \overline{c})$, *где* $\overline{p} = (t^{\varepsilon_{-M}}, h_{-M}, t^{\varepsilon_{-M+1}}, \ \ldots, \ t^{\varepsilon_0}, h_0, \ t^{\varepsilon_1}, \ \ldots, h_{M-1}, \ t^{\varepsilon_M})$,
где все h_i *для* $i \in \{-M, \ \ldots, \ M-1\}$ *принадлежат группе* G, $\varepsilon_i = \pm 1$;
$\overline{c} = (c_{-M}, \ c_{-M+1}, \ \ldots, c_0, \ c_1, \ \ldots, c_M)$, *где для* $i \in \{-M, \ \ldots, \ M-1\}$ *все* $c_i \in C$, *причем пара* $\sum = (\overline{p}, \overline{c})$ *должна удовлетворять следующему условию: для любого*
$i \in \{-M, \ \ldots, \ M-1\}$, $h_i^{-1}\alpha_{\varepsilon_i}(c_i)\, h_i = \alpha_{-\varepsilon_{i+1}}(c_{i+1})$, *то есть* $p^{-1}\alpha_{-\varepsilon_{-M}}(c_{-M})\, p = \alpha_{\varepsilon_M}(c_M)$, *где* $p = t^{\varepsilon_M} h_M t^{\varepsilon_{M-1}} \ldots \ t^{\varepsilon_0} h_0 \ t^{\varepsilon_1} \ \ldots h_{M-1} \ t^{\varepsilon_M}$.

Определение 2. *[2]. Аннулятор $\sum = (\overline{p}, \overline{c})$ называется существенным, если не содержит подпоследовательности вида $t^{-1}, \alpha_{-1}(c)$, t или t, $\alpha_1(c)$, t^{-1}.*

Пусть G^* имеет копредставление (2). G и C конечнопорожденные группы. Обозначим через l_C, l_G, l_{G^*} - функции длины соответственно в группах C, G, G^*.

Определение 3. *[3]. Пусть $\sum = (\overline{p}, \overline{c})$ - аннулятор длины $2M+1$, тогда $l_C(c_0)$ будем называть обхватом аннулятора, а $max(l_G(h_i))$ - его шириной.*

Определение 4. *[2]. Если существует действительное число $\lambda > 1$, такое что*
$\lambda l_C(c_0) < max\{l_C(c_{-M}), l_C(c_M)\}$ *то аннулятор называется*
λ *- гиперболическим.*

Определение 5. *[3]. Пусть G - конечнопорожденная гиперболическая группа. X – множество ее образующих и l_x – словарная функция длины в G. H –конечнопорожденная подгруппа группы G, Y - множество образующих группы и l_x - словарная функция длины в H. Будем говорить, что H квазивыпукла в G, если существует $c > 0$, такое, что для любого $h \in H$ имеем: $\frac{1}{c} l_x(h) \leqslant l_y(h) \leqslant c l_x(h)$.*

Доказательство, полученное автором результата, опирается на **комбинаторную теорему Бествины.** [2], [3].

Пусть G – гиперболическая конечнопорожденная группа, и пусть $\alpha_{-1},\ \alpha_1 : C \to G$ – мономорфизмы, такие, что подгруппы $\alpha_{-1}(\mathrm{C}),\ \alpha_1(\mathrm{C})$ квазивыпуклы в G. G^*- есть HNN-расширение G.

Если существует действительное число $\lambda > 1$ и целое $M > 0$, такие, что для произвольного $\rho > 0$ существует $H(\rho)$, такие, что всякий существенный аннулятор длины 2M+1 с шириной не более ρ и обхватом не менее $H(\rho)$ является λ – гиперболическим, тогда G^*- гиперболическая группа.

Рассмотрим группу

$$G^* = \langle a_0, a_1, a_2,\ \ldots,\ a_n,\ t;\ t^{-1}a_0t = a_1,\ t^{-1}a_1t = a_2,\ \ldots, t^{-1}a_{n-1}t = a_n, t^{-1}a_nt = w\rangle$$

где $w = a_i w_0 a_j,\quad w_0 = a_0^{\varepsilon}\overline{w}_0 a_0^{\delta}, \varepsilon, \delta = \pm 1, a_i,\ a_j \in \{a_1, a_2,\ \ldots,\ a_n\},\ i \neq 0,\ j \neq 0$

Пусть $G = \langle a_0, a_1, a_2,\ \ldots,\ a_n\rangle$, тогда G^* является HNN - расширением свободной группы G

Пусть f - произвольный элемент из группы $G = \langle a_0, a_1, a_2,\ \ldots,\ a_n\rangle$. Очевидно, что $\left|t^{-1}ft\right| = |f|$, если f не содержит ни одного вхождения образующего a_n.

Длина элемента $t^{-1}ft$ может быть меньше длины f, только если f содержит подслова вида:

$$a_{i-1}^{-1}a_n,\quad a_n^{-1}a_{i-1},\quad a_{j-1}a_n^{-1},\quad a_n a_{j-1}^{-1},\quad a_{i-1}^{-1}a_n a_{j-1}^{-1},\qquad a_{j-1}a_n^{-1}a_{i-1} \tag{3}$$

Определение 6. *Назовем слово $G \in \langle a_0, a_1, a_2,\ \ldots,\ a_n\rangle$ 1-сокращаемым, если оно содержит хотя бы одно подслово вида* (3).

Определение 7. *Слово G называется k- сокращаемым, если оно содержит хотя бы одно подслово вида:*

$$a_{i-1-k}^{-1}a_{n-k},\quad a_{n-k}^{-1}a_{i-1-k},\quad a_{j-1-k}a_{n-k}^{-1},\quad a_{n-k}a_{j-1-k}^{-1},\quad a_{i-1-k}^{-1}a_{n-k}a_{j-1-k}^{-1}$$

$$a_{j-1-k}a_{n-k}^{-1}a_{i-1-k}$$

.

Теорема 1. *Пусть*

$$G^* = \langle a_0, a_1, a_2,\ \ldots,\ a_n,\ t;\ t^{-1}a_0t = a_1,\ t^{-1}a_1t = a_2,\ \ldots, t^{-1}a_{n-1}t = a_n, t^{-1}a_nt = w\rangle$$

где $w = a_i w_0 a_j,\quad w_0 = a_0^{\varepsilon}\overline{w}_0 a_0^{\delta},\quad \varepsilon,\ \delta = \pm 1, a_i,\ a_j \in \{a_1, a_2,\ \ldots,\ a_n\},\ i \neq 0,\ j \neq 0$

тогда группа G^* является гиперболической, если слово w удовлетворяет следующим требованиям:

1. *w не является k-сокращаемым.*
2. *$w \neq a_i x a_l^p x^{-1} a_i^{-1}$, где $a_l \in \{a_0, a_1, a_2,\ \ldots,\ a_n\},\quad x \in G$*
3. *если слово w является циклически несократимым, то $|w_0| > 3$*
4. *если слово w является циклически сократимым, то $|w_0| > 4$*

Теорема 2. *Группа вида*

$$G^* = \langle a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n,\ t;\ t^{-1}a_0t = a_1, t^{-1}a_1t = a_2, \ldots, t^{-1}a_{n-1}t = a_n, t^{-1}a_nt = a_i x a_l^p x^{-1} a_i^{-1}\rangle$$

является негиперболической.

Вопрос о гиперболичности групп вида

$$G^* = \langle a_0, a_1, a_2, \ \ldots, \ a_n, \ t; \ t^{-1}a_0t = a_1, \ t^{-1}a_1t = a_2, \ \ldots, t^{-1}a_{n-1}t = a_n, t^{-1}a_nt = w \rangle$$

где $w = a_i^{\varepsilon}a_0a_j^{\delta}$ или $w = a_i^{\varepsilon}a_0^2a_j^{\delta}$ или $w = a_i^{\varepsilon}a_0^3a_j^{\delta}$ или $w = a_i^{\varepsilon}a_0^{\pm 1}a_la_0^{\pm 1}a_j^{\ \delta}$ или $w = a_i^{\varepsilon}a_0a_la_0a_i^{-\varepsilon}$ или $w = a_i^{\varepsilon}a_0a_l^2a_0a_i^{\ -\varepsilon}$ остается открытым.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. M. Gromov. Hyperbolic groups// Essays in group theory ed. S.M. Gertsen M.S.P.I. Publ. 8. Springer. 1987. P. 75-263.

2. I. Kapovich. A non-quasiconvex subgroup of a hyperbolic groups with an exotic limit set// New York J. Math. 1994/95. P 184-195.

3. I. Kapovich. Howson property and on-relator groups// Communication in algebra. 1999. V.27 (2). P.1057-1072.

4. Н. Б. Безверхняя. Гиперболичность некоторых 2-порожденных групп с одним определяющим соотношением. Дискр. Матем. Москва, 2002 г., т. 14, №3, С. 54-70.

5. Н. Б. Безверхняя. Описание гиперболических и негиперболических групп, являющихся некоторыми HNN-расширениями свободных групп. Чебышевский сборник, Т3, Вып. 1, 2002, С.17-31.

УДК 511.32

О степенной сопряженности слов в обобщенных древесных структурах групп Артина[1]

И. В. Добрынина (Россия, г. Москва)
Академия гражданской защиты МЧС России
e-mail: dobrynirina@yandex.ru
А. С. Угаров (Россия, г. Тула)
Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого
e-mail: ugarandrey@gmail.com

On the power conjugacy of words in generalized tree structures of Artin groups

I. V. Dobrynina (Russia, г. Moscow)
Academy of Civil Protection of EMERCOM of Russia
e-mail: dobrynirina@yandex.ru
A. S. Ugarov (Russia, г. Tula)
Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University
e-mail: ugarandrey@gmail.com

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ 19-41-710002 р-а.

Пусть G — конечно порожденная группа Артина с копредставлением

$$G = \langle a_1, ..., a_l; < a_i a_j >^{m_{ij}} = < a_j a_i >^{m_{ji}}, i, j = \overline{1,l}, i \neq j \rangle,$$

где $< a_i a_j >^{m_{ij}}$ — слово длины m_{ij}, состоящее из m_{ij} чередующихся букв a_i и $a_j, i \neq j$, m_{ij} — число, соответствующее симметрической матрице Кокстера: $m_{ij} \in \mathbb{N} \setminus \{1\} \cup \{\infty\}, i \neq j$.

Группа Артина называется группой Артина экстрабольшого типа, если $m_{ij} > 3$ для любых $i \neq j$. Данный класс групп в 1983 году выделен К. Аппелем и П. Шуппом [1].

Для группы Артина G построим граф Г так, что образующим a_i соответствуют вершины графа Г, а каждому определяющему соотношению $< a_i a_j >^{m_{ij}} = < a_j a_i >^{m_{ji}}, m_{ij} < \infty$, — ребро, соединяющее вершины, соответствующие a_i и a_j, $i \neq j$. Если при этом получится дерево-граф, то группа Артина G называется группой Артина с древесной структурой.

Класс групп Артина с древесной структурой введен в рассмотрение В. Н. Безверхним в 2003 году [2].

Группа Артина G с древесной структурой может быть представлена как свободное произведение двупорожденных групп Артина, объединенных по бесконечным циклическим подгруппам: от графа Г группы Артина G перейдем к графу $\overline{\Gamma}$ так, что вершинам графа $\overline{\Gamma}$ поставим в соответствие группы Артина на двух образующих $G_{ij} = \langle a_i, a_j; < a_i a_j >^{m_{ij}} = < a_j a_i >^{m_{ji}} \rangle$, а всякому ребру $\overline{e}$, соединяющему вершины, соответствующие G_{ij} и G_{jk} — циклическую подгруппу $\langle a_j \rangle$ [3].

Далее рассмотрим группу Артина

$$G = \langle \prod_{s=1}^{t} * G_s; a_{i_m} = a_{j_k}, i \neq j, i, j \in \{\overline{1,t}\} \rangle,$$

представляющую собой древесное произведение групп Артина G_s, где G_s либо группа Артина с древесной структурой, либо группа Артина экстрабольшого типа, запись $a_{i_m} = a_{j_k}$ означает, что объединение групп Артина G_i и G_j ведется по бесконечным циклическим подгруппам $\langle a_{i_m} \rangle, \langle a_{j_k} \rangle$, где a_{i_m} — некоторый образующий группы G_i, a_{j_k} — некоторый образующий группы G_j. Такую группу Артина G будем называть обобщенной древесной структурой групп Артина [4] и далее под G будем понимать такую группу.

Обобщенные древесные структуры групп Артина относятся к классу почти больших групп Артина [5].

Известно, что в обобщенной древесной структуре групп Артина разрешимы проблемы равенства, сопряженности слов [4] и построения централизатора произвольного элемента [6].

Определение 1. *Правильная область D R-диаграммы M [7] называется деновской, если $i(D) < d(D)/2$, где $i(D)$ — число внутренних ребер в граничном цикле D, $d(D)$ — число ребер в граничном цикле D.*

Определение 2. *Удаление внешней границы деновской области R-диаграммы M называется деновским сокращением R-диаграммы M или R-сокращением.*

R-диаграмма M является R-приведенной, если в M выполнены все деновские сокращения.

Слово $w \in G$ назовем R-приводимым (R-сократимым), если w приведено в F и содержит подслово s, являющееся подсловом некоторого соотношения $r \in R$, $r = sb$, где $||b|| < ||s||$.

Определение 3. *Поддиаграмма $\Pi = \bigcup_{i=1}^{n} D_i$ образует полосу в R-приведенной R-диаграмме M с граничным циклом $\partial M = \sigma \cup \tau$, если*

1. $\partial D_i \cap \partial D_{i+1} = e_i$, $i = \overline{1, n-1}$, *где e_i — ребро ;*

2. $\partial D_i \cap \sigma = \sigma_i,\ i = \overline{1,n}$, *где* σ_i *— связный путь, причем* $||\sigma_i|| \geqslant 1$;

3. $||\partial D_1 \cap \sigma|| = ||\partial D_1 \backslash (\partial D_1 \cap \sigma)||$ *и* $||\partial D_n \cap \sigma|| = ||\partial D_n \backslash (\partial D_n \cap \sigma)||$;

4. $||\partial D_j \cap \sigma|| + 2 = ||\partial D_j \backslash (\partial D_j \cap \sigma)||,\ j = \overline{2, n-1}$.

Определение 4. *Пусть* Π *— полоса* R*-диаграммы* M*. Замену* R*-диаграммы* M *на* R*-диаграмму* M_1*, полученную из* M *удалением полосы* Π*, назовем* $\overline{R}$*-сокращением.*

R-приведенное слово w группы G назовем $\overline{R}$-приводимым ($\overline{R}$-сократимым), если в нем можно выделить подслово $s_1 s_2 \cdots s_n$, где каждое s_t содержится в некоторой группе G_{ij} и является подсловом соотношения $s_t^{-1} d_t^{-1} b_t d_{t+1} \in R$, причем при $1 \leq t \leq n$ $\quad ||d_t|| = ||d_{t+1}|| = 1$, $||s_t|| = ||b_t|| + 2$ и для t, $1 < t < n$, $||b_t|| = ||s_t||$.

Лемма 1. *Существует алгоритм, позволяющий для любого циклически приведенного слова* w *группы Артина* G *выяснить, является ли* w R*-приведенным.*

Существует алгоритм, позволяющий для любого циклически приведенного слова w *группы Артина* G *выяснить, является ли* w $\overline{R}$*-приведенным.*

Определение 5. *Приведенную связную кольцевую* R*-диаграмму* M *с границей* $\partial M = \sigma \cup \tau$ *будем называть однослойной, если*

1) M *состоит из областей* $D_1, D_2, \ldots, D_m$*, где* $D_j \cap D_{j+1} = e_j, j = \overline{1, m-1}, D_1 \cap D_m = e_m, D_j \cap \sigma \neq \emptyset, D_j \cap \tau \neq \emptyset, j = \overline{1,m}$*,* e_j *– ребро,*

или

2) $M = (\bigcup\limits_{i=1}^{p} N_i) \cup (\bigcup\limits_{j=1}^{p} \gamma_j)$*,* N_i *— поддиаграммы (диски) в* M *с границами* $\partial N_i = \sigma_i \cup \tau_i, \sigma_i \cap \tau_i = \{A_i, B_i\}$ *– вершины,* $i = \overline{1,p}$*,* γ_i *– простые пути с концами* $B_{i-1}, A_i, i = \overline{2,p}$*, простой путь* γ_1 *имеет начало* B_p*, а конец –* A_1*, где каждое* N_i *из состоит из областей* $D_{i_1}, D_{i_2}, \ldots, D_{i_{m_i}}$*, причем* $D_{i_j} \cap D_{i_{j+1}} = e_{i_j}, j = \overline{1, m_i - 1}, D_{i_j} \cap \sigma \neq \emptyset, D_{i_j} \cap \tau \neq \emptyset, j = \overline{1, m_i}$*,* e_{i_j} *– ребро.*

Определение 6. *Область* D *с граничным циклом* $\partial D = e\sigma e^{-1}\tau$*, расположенная по обе стороны относительно ребра* e*, в которой склеенные ребра* e *и* e^{-1} *пересекают граничный цикл* D*, называется* $(s-i)$*-областью.*

Теорема 1. *Пусть* M *— приведенная связная кольцевая* R*-диаграмма сопряженности слов* $\varphi(\sigma)$*,* $\varphi(\tau) \in G$ *над группой Артина* G*, не содержащая* $(s-i)$*-областей;* σ*,* τ *— соответственно внешний и внутренний граничный циклы* M*, слова* $\varphi(\sigma)$*,* $\varphi(\tau)$ *циклически* R *и* $\overline{R}$*-несократимы. Тогда* M *является однослойной.*

Лемма 2. *Пусть* M *— связная приведенная* $R, \overline{R}$*-приведенная кольцевая диаграмма над группой* $G_{ij} = \langle a_i, a_j; \langle a_i, a_j \rangle^{m_{ij}} = \langle a_j a_i \rangle^{m_{ij}} \rangle, \sigma, \tau$ *— граничные циклы* M *и* $\phi(\sigma) = x^p$*. Тогда* $\phi(\tau) = y^p$*, где* $x, y \in \{a_i^{\pm 1}, a_j^{\pm 1}\}$.

Используя работы [3], [8], получим:

Определение 7. *Область* D *назовем областью первого типа, если* $||\partial D \cap \sigma|| = ||\partial D \cap \tau||$*, где* $d(D) = ||\partial D \cap \sigma|| + ||\partial D \cap \tau|| + 2$.

Определение 8. *Область* D *назовем областью второго типа, если* $||\partial D \cap \sigma|| + 2 = ||\partial D \cap \tau||$*, где* $d(D) = ||\partial D \cap \sigma|| + ||\partial D \cap \tau|| + 2$.

Определение 9. *Область* D *назовем областью третьего типа, если* $||\partial D \cap \sigma|| = ||\partial D \cap \tau|| + 2$*, где* $d(D) = ||\partial D \cap \sigma|| + ||\partial D \cap \tau|| + 2$.

Рассмотрим связную колцьевую приведенную R-диаграмму M сопряженности слов v и w. Пусть $\varphi(\sigma) = w, \varphi(\tau) = v$, где σ — внешняя граница диаграммы M, а τ — внутренняя.

Предположим, что диаграмма состоит из областей первого типа и одной области второго (или третьего) типа. Но тогда $||v|| = ||w|| + 2$, или наоборот $||w|| = ||v|| + 2||$. В этом случае переход с помощью сопряжения от слова с большей слоговой длиной к слову с меньшей слоговой длиной назовем кольцевым сокращением.

Определение 10. *Циклически R и $\overline{R}$-несократимое слово w и в группе Артина G назовем тупиковым, если к нему нельзя применить кольцевое сокращение.*

Лемма 3. *Пусть $v, w \in G$ — тупиковые слова и пусть v сопряжено с w в G. Тогда $||v|| = ||w||$ и никакое слово $u \in G$ такое, что $||u|| < ||v||$, не сопряжено с v в G.*

Лемма 4. *Пусть G — обобщенная древесная структура групп Артина с множеством образующих A, $|A| < \infty$, G_j — параболическая подгруппа группы G с множеством образующих A_j, $A_j \subset A$. И пусть $w \in G$, w — R, $\overline{R}$-несократимое слово, не равное единице в G. Слово w сопряжено некоторому слову $v \in G_j$, то есть существует слово $z \in G$ такое, что $z^{-1}wz = v, |v| \geq 2$. Тогда w, z — слова на образующих A_j.*

Лемма 5. *Пусть слово $w \in G$ циклически $R, \overline{R}$-несократимо. Существует алгоритм, строящий по слову w сопряженное с ним или с его квадратом в группе G слово w_0, любая степень которого $R, \overline{R}$-несократима.*

Определение 11. *Будем говорить, что в группе G разрешима проблема степенной сопряженности слов, если существует алгоритм, позволяющий для двух любых слов $w, v \in G$ установить, существуют ли ненулевые целые числа n, m такие, что слова w^n, v^n сопряжены в группе G.*

Теорема 2. *В обобщенных древесных структурах групп Артина разрешима проблема степенной сопряженности слов.*

Лемма 6. *[8] В группе Артина экстрабольшого типа разрешима проблема степенной сопряженности слов.*

Лемма 7. *[3] В группе Артина с древесной структурой разрешима проблема степенной сопряженности слов.*

Лемма 8. *Пусть $M = (\bigcup\limits_{i=1}^{p} N_i) \cup (\bigcup\limits_{j=1}^{p} \gamma_j)$ — простая кольцевая R-диаграмма сопряженности циклически $R, \overline{R}$-несократимых слов w_0^n, v_0^m, N_i — поддиаграммы (диски) в M с границами $\partial N_i = \sigma_i \cup \tau_i, \sigma_i \cap \tau_i = \{A_i, B_i\}$ — вершины, $i = \overline{1,p}$, γ_i — простые пути с концами $B_{i-1}, A_i, i = \overline{2,p}$, простой путь γ_1 имеет начало B_p, а конец — A_1, причем числа m, n — наименьшие с таким свойством. Тогда m, n можно ограничить.*

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Appel K., Schupp P. Artins groups and infinite Coxter groups // Ivent. Math. 1983. Vol. 72. P. 201-220.

2. Безверхний В. Н. О группах Артина, Кокстера с древесной структурой. // V Международная конференция «Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения»: тезисы докладов. — Тула, 2003. С. 33-34.

3. Карпова О. Ю., Безверхний В. Н. Решение проблемы степенной сопряженности в группах Артина с древесной структурой // / Известия Тульского государственного университета. Естественные науки. 2009. Вып. 3. С. 42-59.

4. Добрынина И. В., Угаров А. С. О проблеме сопряженности слов в обобщенных древесных структурах групп Артина // Международная конференция, посвященная 90-летию кафедры высшей алгебры механиком-математического факультета МГУ: тезисы докладов. — МГУ, 2019. С. 28-29.

5. Huang, J. and Osajda, D. Large type Artin groups are systolic // Proc. London Math. Soc. 2020. Vol. 120. P. 95-123

6. Добрынина И. В., Угаров А. С. О централизаторе элемента в обобщенных древесных структурах групп Артина // XVII Международная конференция, посвященная 100-летию со дня рождения профессора Н. И. Фельдмана и 90-летию со дня рождения профессоров А. И. Виноградова, А. В. Малышева и Б. Ф. Скубенко: тезисы докладов. Тула, 2019. С. 42-44.

7. Линдон Р., Шуп П. Комбинаторная теория групп // М.: Мир, 1980.

8. Безверхний В. Н., Кузнецова А. Н. Разрешимость проблемы степенной сопряженности слов в группах Артина экстрабольшого типа // Чебышевский сборник. 2008. Т. 9. Вып. 1. С. 50-68.

УДК 512.5

Элементарные группы и замкнутые элементарные сети над полем нулевой характеристики

С. С. Икаев (Россия, г. Владикавказ)
Северо-Осетинский государственный университет им. К. Л. Хетагурова
e-mail:ikaev.sar@yandex.ru
В. А. Койбаев (Россия, г. Владикавказ)
Северо-Осетинский государственный университет им. К. Л. Хетагурова, Южный математический институт ВНЦ РАН
e-mail: koibaev-k1@yandex.ru

S. S. Ikaev (Russia, Vladikavkaz)
North-Ossetian State University
e-mail:ikaev.sar@yandex.ru
V. A. Koibaev (Russia, Vladikavkaz)
North-Ossetian State University, Southern Mathematical Institute of the Vladikavkaz Scientific Center of the RAS
e-mail: koibaev-k1@yandex.ru

Строится пример замкнутой (допустимой) элементарной сети (ковра) над полем характеристики 0, которую нельзя дополнить до (полной) сети.

Всякая дополняемая элементарная сеть (диагональ которой можно дополнить подгруппами, получив при этом полную сеть) над произвольным полем является замкнутой (см., например, [1]). Следовательно, справедливо включение

$$\text{дополняемые эл.сети} \subset \text{замкнутые (допустимые) эл.сети.} \tag{1}$$

Важным этапом исследования замкнутых сетей является построение замкнутых элементарных сетей, которые при этом не являются дополняемыми. Над полем четной характеристики такая элементарная сеть была построена в [2]. Таким образом, элементарная сеть и элементарная группа, построенные в настоящей работе, показывают, что для полей характеристики 0 и 2 включение (1) является строгим.

Система $\sigma = (\sigma_{ij}), \quad 1 \leq i, j \leq n$, аддитивных подгрупп кольца R называется *сетью (ковром)* [1] над кольцом R порядка n, если $\sigma_{ir}\sigma_{rj} \subseteq \sigma_{ij}$ при всех значениях индексов i, r, j. Сеть, рассматриваемая без диагонали, называется элементарной сетью (элементарный ковер) ([1], [3, вопрос 15.46]). Элементарная сеть $\sigma = (\sigma_{ij}), 1 \leq i \neq j \leq n$, называется *дополняемой*, если для некоторых аддитивных подгрупп σ_{ii} кольца R таблица (с диагональю) $\sigma = (\sigma_{ij}), 1 \leq i, j \leq n$, является (полной) сетью.

Назовем элементарную сеть σ *замкнутой (допустимой)* ([2], [3, вопрос 15.46]), если элементарная сетевая подгруппа $E(\sigma)$ не содержит новых элементарных трансвекций: если из включения $t_{ij}(\alpha) \in E(\sigma)$ следует, что $\alpha \in \sigma_{ij}$ для всех $i \neq j$. Замкнутыми являются, например, дополняемые элементарные сети (см., например, [1]).

В этой связи отметим гипотезу В.М.Левчука, сформулированную в Коуровской тетради ([3], вопрос 15.46): для допустимости (замкнутости) элементарного ковра (сети) $\sigma = (\sigma_{ij})$ необходимо и достаточно допустимость (замкнутость) каждой пары $(\sigma_{ij}, \sigma_{ji})$, $i \neq j$. Отметим, что пример, построенный в настоящей статье, подтверждает верность этой гипотезы.

Пусть

$$\sigma_{12} = \sigma_{21} = B, \quad \sigma_{ij} = R_4, \ 1 \leq i \neq j \leq n, \ \{i, j\} \neq \{1, 2\},$$

где $R_4 = x^4\mathbb{Z}[x], \quad B = \mathbb{Z}x + 2\mathbb{Z}x^3 + R_4$.

Теорема 1. *Элементарная сетевая группа $E(\sigma)$ не содержит новых элементарных трансвекций, а потому построенная элементарная сеть σ порядка $n \geq 2$ является замкнутой элементарной сетью, которая не является дополняемой.*

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Боревич З. И. О подгруппах линейных групп, богатых трансвекциями// Зап. научн. сем. ЛОМИ. 1978. Том 75, С. 22–31.

2. Койбаев В. А. Элементарные сети в линейных группах// Труды ИММ УрО РАН. 2011. Том 17, № 4, С. 134–141.

3. Коуровская тетрадь. Нерешенные вопросы теории групп// Новосибирск, 2010. Издание 17-е.

УДК 512.542

О конечных группах с заданными подгруппами равной мощности

К. В. Кислакова (Россия, г. Брянск)
Брянский государственный университет имени академика И. Г. Петровского
e-mail: unlimi@bk.ru
С. В. Путилов (Россия, г. Брянск)
Брянский государственный университет имени академика И. Г. Петровского
e-mail: algebra.bgu@yandex.ru

On finite groups with given subgroups of equal cardinality

K. V. Kislakova (Russia, Bryansk)
Bryansk State University named after academician I. G. Petrovsky
e-mail: unlimi@bk.ru
S. V. Putilov (Russia, Bryansk)
Bryansk State University named after academician I. G. Petrovsky
e-mail: algebra.bgu@yandex.ru

Рассматриваются только конечные группы G. Здесь $F(G)$ – подгруппа Фиттинга.

Теорема 1. *Пусть в группе G для каждой максимальной подгруппы M с отношением $|G_p| \mid |M|$, $G_p \in Syl_p(G)$ существует p-разложимая подгруппа M_1 и $|M_1| = |M|$. Тогда группа G или нильпотентна, или $|\pi(G)| = 2$ и $G/F(G)$ имеет простой порядок.*

Следствие 1. [1]. *Пусть в группе G для каждой максимальной подгруппы H существует нильпотентная подгруппа H_1 такая, что $|H_1| = |H|$. Тогда либо группа G нильпотентна, либо $|\pi(G)| = 2$ и $G/F(G)$ имеет простой порядок.*

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Монахов В. С., Тютянов В. Н. Конечные группы со сверхразрешимыми подгруппами заданных порядков // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2019. Том 25, № 4. С. 155-163.

УДК 511.32

О строго 2-максимальных подгруппах конечных групп

М. Н. Коновалова (Россия, г. Брянск)
Российская академия народного хозяйства и государственной службы при Президенте Российской Федерации
e-mail: msafe83@mail.ru
В. С. Монахов (Беларусь, г. Гомель)
Гомельский государственный университет имени Ф. Скорины
e-mail: victor.monakhov@gmail.com
И. Л. Сохор (Беларусь, г. Брест)
Брестский государственный университет имени А. С. Пушкина
e-mail: irina.sokhor@gmail.com

On strictly 2-maximal subgroups of finite groups

M. N. Konovalova (Russia, Bryansk)
Russian Presidential Academy of National Economy and Public Administration
e-mail: msafe83@mail.ru
V. S. Monakhov (Belarus, Gomel)
Francisk Skorina Gomel State University
e-mail: victor.monakhov@gmail.com
I. L. Sokhor (Belarus, Brest)
Brest State A. S. Pushkin University
e-mail: irina.sokhor@gmail.com

Рассматриваются только конечные группы. Принятые обозначения стандартны и соответствуют [1]. В частности, запись $M \lessdot G$ означает, что M — максимальная подгруппа группы G.

Пусть G — группа и H — ее подгруппа. Введем следующее обозначение

$$\mathrm{Max}(G, H) = \{M \lessdot G \mid H \leqslant M\}.$$

Если $H = 1$ — единичная подгруппа группы G, то вместо $\mathrm{Max}(G, 1)$ пишем $\mathrm{Max}(G)$. Понятно, что $\mathrm{Max}(G) = \varnothing$ в точности тогда, когда $G = 1$.

Подгруппа H группы G называется *2-максимальной подгруппой* группы G, если существует $M \in \mathrm{Max}(G, H)$ такая, что $H \lessdot M$; и *n-максимальной подгруппой* группы G для $n \geqslant 3$, если существует $M \in \mathrm{Max}(G, H)$ такая, что H — $(n-1)$-максимальная подгруппа в M. Подгруппа H группы G называется *строго 2-максимальной подгруппой* группы G, если $H \lessdot M$ для всех $M \in \mathrm{Max}(G, H)$. Ясно, что строго 2-максимальная подгруппа группы G является 2-максимальной группы G и не будет n-максимальной группы G для любого $n > 2$.

Из леммы об индексах следует, что 2-максимальная подгруппа наименьшего индекса будет строго 2-максимальной, поэтому любая неединичная группа непростого порядка содержит строго 2-максимальную подгруппу.

Второй автор статьи предложил следующую проблему [2, 19.54], которая в описанной терминологии может быть сформулирована следующим образом:

Каковы главные факторы конечной группы, в которой каждая 2-максимальная подгруппа является строго 2*-максимальной?*

Эта проблема исследовалась в [3]. Развивая результаты этой работы, мы доказали следующую теорему.

Теорема 1. *Пусть M — собственная подгруппа p-разрешимой группы G. Если $|G : M| = p$, то каждая максимальная в M подгруппа является строго* 2*-максимальной подгруппой группы G. В частности, в разрешимой группе все максимальные подгруппы из подгруппы простого индекса являются строго* 2*-максимальными подгруппами группы.*

Вопрос. *Можно ли в теореме 1 убрать требование p-разрешимости группы?*

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Doerk K., Hawkes T. Finite Soluble Groups. — Berlin; New York: Walter de Gruyter, 1992. 891 p.

2. Нерешенные вопросы теории групп. Коуровская тетрадь // Сост. В. Д. Мазуров, Е. И. Хухро. 19 изд. доп. Новосибирск: Институт математики Сибирского отделения РАН, 2018. — 248 с.

3. Meng H., Guo X. Weak second Maximal subgroups in solvable groups // J. Algebra. 2019. Vol. 517. P. 112–118.

УДК 512.542

О конечных группах с нильпотентными или простыми максимальными кофакторами

А. П. Кривошапко (Россия, г. Брянск)
Брянский государственный университет имени академика И. Г. Петровского
e-mail: anna.crivoshapcko@yandex.ru
С. В. Путилов (Россия, г. Брянск)
Брянский государственный университет имени академика И. Г. Петровского
e-mail: algebra.bgu@yandex.ru

On finite groups with nilpotent or simple maximal cofactors

A. P. Krivoshapko (Russia, Bryansk)
Bryansk State University named after academician I. G. Petrovsky
e-mail: anna.crivoshapcko@yandex.ru
S. V. Putilov (Russia, Bryansk)
Bryansk State University named after academician I. G. Petrovsky
e-mail: algebra.bgu@yandex.ru

Рассматриваются только конечные группы.

В [1] кофактором подгруппы H группы G называется фактор-группа H/H_G, где $H_G = \cap_{x\in G} x^{-1}Hx$ – ядро подгруппы H в G. Подгруппу M группы G называют максимальной подгруппой в G, если $M \neq G$ и в G не существует подгруппы K с отношениями $M \subset K \subset G$. Под максимальным кофактором группы G будем понимать кофактор любой максимальной подгруппы в G. В [2] доказано, что если каждая максимальная подгруппа ненильпотентной группы G нильпотентна или проста, то G – группа Шмидта. В [3] доказана разрешимость группы с нильпотентными максимальными кофакторами.

Лемма 1. *Если в ненильпотентной группе G каждый максимальный кофактор или нильпотентная, или простая группа, то G – непростая группа.*

Теорема 1. *Если в ненильпотентной группе G каждый максимальный кофактор или нильпотентная, или простая группа, то G разрешима или группа Шмидта.*

Следствие 1. [3]. *Если в группе G каждый максимальный кофактор нильпотентен, то G разрешима.*

Следствие 2. [4]. *Если в группе G каждая ненормальная максимальная подгруппа нильпотентная или простая, то G разрешима или группа Шмидта.*

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лемешев И. В. О конечных группах с p-разложимыми кофакторами подгрупп // Математические заметки. 2012. Том 92, № 3. С. 440-446.

2. Монахов В. С., Тютянов В. Н. О конечных группах с заданными максимальными подгруппами // Сибирский математический журнал. 2014. Том 55, № 3. С. 553-561.

3. Беркович Я. Г. Конечные группы с большими ядрами максимальных подгрупп // Сибирский математический журнал. 1968. Том 9, № 2. С. 243-248.

4. Путилов С. В. О непростых конечных группах // Ученые записки Брянского государственного университета: физико-математические науки. 2019. № 3. С. 17-23. [Электронный ресурс], Режим доступа: http://scim-brgu.ru.

УДК 512.542

Брауэровы решетки ω-веерных формаций конечных групп

С. П. Максаков (Россия, г. Брянск)
Брянский государственный университет имени академика И.Г. Петровского
e-mail: msp222@mail.ru

Brauer Lattices of ω-Fibered Formations of Finite Groups

S. P. Maksakov (Russia, Bryansk)
Bryansk State University named after academician I.G. Petrovsky
e-mail: msp222@mail.ru

Рассматриваются только конечные группы. Классом групп называется такая совокупность групп, которая с каждой своей группой содержит все группы ей изоморфные. Формация представляет собой класс групп, замкнутый относительно гомоморфных образов и подпрямых произведений. Решеточные методы к исследованию формаций конечных групп впервые были применены А.Н. Скибой в 1986 году [1]. Изучением различных решеток формаций и классов Фиттинга конечных групп занимались многие алгебраисты (см., например, [2]). В приведенных ниже результатах изучаются решеточные свойства ω-веерных формаций конечных групп. В монографии [3] А.Н. Скибой была введена следующая конструкция для классов групп. Пусть $\mathfrak{F}$ – непустой класс групп и $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$ – некоторая совокупность непустых подклассов класса $\mathfrak{F}$. Тогда $\mathfrak{F} = \oplus_{i\in I}\mathfrak{F}_i$, если для любых различных $i, j \in I$ имеет место $\mathfrak{F}_i \cap \mathfrak{F}_j = (1)$ и каждая группа $G \in \mathfrak{F}$ имеет вид $G = A_{i_1} \times \ldots \times A_{i_t}$, где $A_{i_1} \in \mathfrak{F}_{i_1}, \ldots, A_{i_t} \in \mathfrak{F}_{i_t}$ для некоторых $i_1, \ldots, i_t \in I$ [3]; в этом случае говорят, что класс $\mathfrak{F}$ является *прямо разложимым*. В теореме 2 для ω-веерной формации $\mathfrak{F} = \oplus_{i\in I}\mathfrak{F}_i$ с направлением δ установлено, что брауэрова решетка $\omega\delta F(\mathfrak{F})$ всех ω-веерных подформаций из $\mathfrak{F}$ с направлением δ является стоуновой решеткой.

Используются стандартные определения и обозначения для групп, классов групп, решеток (см., например, [3], [4]). Через $(\mathfrak{X})$ обозначается класс групп, порожденный совокупностью групп $\mathfrak{X}$, в частности, (1) – класс всех единичных групп; ω – непустое подмножество множества $\mathbb{P}$ всех простых чисел; $O_\omega(G)$ – наибольшая нормальная ω-подгруппа группы G; $f : \omega\cup\{\omega'\} \to \{\text{формации групп}\}$, где $f(\omega') \neq \varnothing$, $h : \mathbb{P} \to \{\text{формации групп}\}$, $\delta : \mathbb{P} \to \{\text{непустые формации Фиттинга}\}$ – функции, называемые соответственно ωF-функцией, $\mathbb{P}F$-функцией

и $\mathbb{P}FR$-функцией; для $p \in \mathbb{P}$ через $G_{\delta(p)}$ обозначается $\delta(p)$-радикал группы G, т.е. наибольшая нормальная подгруппа группы G, принадлежащая классу групп $\delta(p)$. Формация $\mathfrak{F} = (G \mid G/O_\omega(G) \in f(\omega')$ и $G/G_{\delta(p)} \in f(p)$ для всех $p \in \omega \cap \pi(G))$ называется *ω-веерной* формацией с направлением δ; формация $\mathfrak{H} = (G \mid G/G_{\delta(p)} \in h(p)$ для всех $p \in \pi(G))$ называется *веерной* формацией с направлением δ [5].

В соответствии с [4], *решетка* – частично упорядоченное множество Θ, в котором любые два элемента x и y имеют точную нижнюю грань $x \wedge_\Theta y$ и точную верхнюю грань $x \vee_\Theta y$. *Нулем* (*единицей*) решетки называется наименьший (наибольший) элемент данной решетки. Пусть Θ – решетка с нулем O. Элемент $a \in \Theta$ называется *атомом* решетки Θ, если $a \neq O$ и не существует такого элемента $x \in \Theta$, что $O < x < a$. Решетка $\mathbf{L}$ называется *браэуровой* решеткой, если для любых элементов a, $b \in \mathbf{L}$ множество $\mathscr{X} = \{x \in \mathbf{L} \mid a \wedge_\mathbf{L} x \leq b\}$ имеет наибольшый элемент, называемый *относительным псевдодополнением a в b* и обозначаемый $b : a$. В брауэровой решетке $\mathbf{L}$ с нулем O элемент a^* называется *псевдодополнением* элемента $a \in \mathbf{L}$, если $a^* = O : a$. Брауэрова решетка $\mathbf{L}$ с нулем O и единицей I называется *стоуновой* решеткой, если $a^* \vee_\mathbf{L} (a^*)^* = I$ для всех $a \in \mathbf{L}$. Отметим, что в брауэровой решетке $\mathbf{L}$ последнее тождество равносильно каждому из следующих утверждений: a) $a^* \vee_\mathbf{L} b^* = (a \wedge_\mathbf{L} b)^*$ для всех $a, b \in \mathbf{L}$; b) каждый элемент a^* $(a \in \mathbf{L})$ имеет дополнение в $\mathbf{L}$ (см. [4], стр. 173).

Пусть δ – произвольная $\mathbb{P}FR$-функция. Через $\omega\delta F$ обозначим множество всех ω-веерных формаций с направлением δ; для формации $\mathfrak{F}$ полагаем $\omega\delta F(\mathfrak{F}) = \{\mathfrak{X} \mid \mathfrak{X} \in \omega\delta F$ и $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{F}\}$. Если $\mathfrak{F}$ – неединичная ω-веерная формация с направлением δ, то $\omega\delta F(\mathfrak{F})$ является решеткой с нулем (1) и единицей $\mathfrak{F}$.

Теорема 1. *Пусть δ – $\mathbb{P}FR$-функция, $\delta_0 \leq \delta$, $\mathfrak{F}$ – ω-веерная формация с направлением δ и $\Theta = \omega\delta F(\mathfrak{F})$. Если Θ – брауэрова решетка, то $\omega F(\mathfrak{B}^* \cup (\mathfrak{B}^*)^*, \delta) \subseteq \mathfrak{F}$ для любой формации $\mathfrak{B} \in \Theta$.*

Теорема 2. *Пусть δ – $\mathbb{P}FR$-функция, $\delta_0 \leq \delta$, $\mathfrak{F}$ – ω-веерная формация с направлением δ и $\mathfrak{F} = \oplus_{i \in I}\mathfrak{F}_i$, где $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$ – набор всех атомов решетки $\Theta = \omega\delta F(\mathfrak{F})$. Если Θ – брауэрова решетка, то Θ является стоуновой решеткой.*

Поскольку направления ω-полной, ω-локальной, ω-специальной, ω-центральной формаций удовлетворяют условию $\delta_0 \leq \delta$, то из полученной теоремы вытекают соответствующие результаты для ω-полных, ω-локальных, ω-специальных, ω-центральных формаций. В [5] установлено, что непустая неединичная формация $\mathfrak{F}$, при условии $\pi(\mathfrak{F}) \subseteq \omega$, является ω-веерной тогда и только тогда, когда она является веерной. В этой связи справедливы соответствующие свойства для веерных формаций конечных групп, в частности, для полных, локальных, специальных и центральных формаций.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Скиба А. Н. О локальных формациях длины 5 // В кн. Арифметическое и подгрупповое строение конечных групп. — Минск: Наука и техника. 1986. С. 149-156.
2. Воробьев Н. Н. Алгебра классов конечных групп. — Витебск: Витебский гос. ун-т им. П.М. Машеролва, 2012.
3. Скиба А. Н. Алгебра формаций. — Минск: Изд-во Беларуская навука, 1997. 240 с.
4. Биркгоф Г. Теория решеток. — Москва: Изд-во Наука, 1984. 568 с.
5. Ведерников В. А., Сорокина М. М. ω-Веерные формации и классы Фиттинга конечных групп // Математические заметки. 2002. Том 71, № 1. С. 43-60.

УДК 512.542

О подгруппах конечной группы, близких по мощности к самой группе

Д. Г. Новикова (Россия, г. Брянск)
Брянский государственный университет имени академика И. Г. Петровского
e-mail: dyasha,19@ya.ru
С. В. Путилов (Россия, г. Брянск)
Брянский государственный университет имени академика И. Г. Петровского
e-mail: algebra.bgu@yandex.ru

On subgroups of a finite group close in cardinality to the group

D. G. Novikova (Russia, Bryansk)
Bryansk State University named after academician I. G. Petrovsky
e-mail: dyasha,19@ya.ru
S. V. Putilov (Russia, Bryansk)
Bryansk State University named after academician I. G. Petrovsky
e-mail: algebra.bgu@yandex.ru

Рассматриваются только конечные группы.

В [1] дан положительный ответ на вопрос 5.5, который поставлен в [2]: пусть всякая собственная не максимальная подгруппа конечной группы G содержится в подгруппе простого индекса группы G; верно ли, что G – разрешимая группа? Здесь анонсируется усиление теоремы из [1]. В цепи максимальных подгрупп $M_n < \cdot M_{n-1} < \cdot \ldots < \cdot M_1 < \cdot G$ группы G подгруппа M_n называется n-максимальной.

Теорема 1. *Если в конечной группе G каждая ненормальная в G вторая максимальная подгруппа включается в подгруппу простого индекса, то $G/F(G)$ сверхразрешима.*

Следствие 1. [1]. *Если G – конечная группа, у которой любая собственная не максимальная подгруппа содержится в подгруппе простого индекса, то факторгруппа $G/F(G)$ сверхразрешима.*

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Монахов В. С., Тютянов В. Н. О конечных группах с некоторыми подгруппами простых индексов // Сибирский математический журнал. 2007. Том 48, № 4. С. 833-836.

2. Berkovich Y., Kazarin L. Indices of elements and normal structure of finite groups // J. Algebra. 2005. V. 283, N 3. P. 564-583.

УДК 512.542

Об $\bar{\omega}$-веерных формациях конечных групп

М. М. Сорокина (Россия, г. Брянск)
Брянский государственный университет имени академика И. Г. Петровского
e-mail: mmsorokina@yandex.ru
А. А. Горепекина (Россия, г. Брянск)
Брянский государственный университет имени академика И. Г. Петровского
e-mail: nastya3296@mail.ru

On $\bar{\omega}$-Fibered Formations of Finite Groups

M. M. Sorokina (Russia, Bryansk)
Bryansk State University named after academician I. G. Petrovsky
e-mail: mmsorokina@yandex.ru
A. A. Gorepekina (Russia, Bryansk)
Bryansk State University named after academician I. G. Petrovsky
e-mail: nastya3296@mail.ru

Рассматриваются только конечные группы. В работе [1] (см. также [2]) для произвольного разбиения σ множества $\mathbb{P}$ всех простых чисел А.Н. Скиба построил σ-локальные формации — естественное обобщение локальных формаций, хорошо изученных и нашедших многочисленные применения (см., например, [3]). Другим известным обобщением понятия локальной формации является понятие ω-локальной формации, где ω — непустое подмножество множества $\mathbb{P}$ [4]. Разработанная В.А. Ведерниковым концепция ω-веерности для классов групп позволила построить серию новых видов формаций [5], при этом ω-локальные формации составили один из видов данной серии. В представленных ниже результатах σ-концепция А.Н. Скибы применяется к построению $\bar{\omega}$-веерных формаций, где $\bar{\omega}$ — произвольное разбиение множества ω.

Используемые определения и обозначения для групп и классов групп стандартны (см., например, [3]). Классом групп называется всякая совокупность групп, содержащая с каждой своей группой все группы ей изоморфные. Формация — класс групп, замкнутый относительно фактор-групп и подпрямых произведений; класс Фиттинга (иначе, радикальный класс) — класс групп, замкнутый относительно нормальных подгрупп и произведений нормальных подгрупп, принадлежащих данному классу; формация Фиттинга — класс групп, являющийся формацией и классом Фиттинга. Для класса Фиттинга $\mathfrak{F}$ через $G_{\mathfrak{F}}$ обозначается $\mathfrak{F}$-радикал группы G, т.е. наибольшая нормальная подгруппа группы G, принадлежащая классу $\mathfrak{F}$. Через $\mathfrak{E}$ обозначается класс всех конечных групп; $\mathbb{P}$ — множество всех простых чисел; ω — непустое подмножество множества $\mathbb{P}$; $\mathfrak{E}_\pi$ — класс всех π-групп, где $\varnothing \subset \pi \subseteq \mathbb{P}$; $\pi' = \mathbb{P} \setminus \pi$; $\mathfrak{E}_{p'} = \mathfrak{E}_{\{p\}'}$, где $p \in \mathbb{P}$; $\pi(G)$ — совокупность всех простых делителей порядка группы G.

Пусть h — ωF-функция (или, иначе, ω-формационная функция), т.е. функция вида $h : \omega \cup \{0\} \to \{\text{формации групп}\}$, где $h(0) \neq \varnothing$; δ — $\mathbb{P}FR$-функция (иначе, формационно-радикальная функция), т.е. функция вида $\delta : \mathbb{P} \to \{\text{непустые формации Фиттинга групп}\}$, где $\mathfrak{E}_{p'} \subseteq \delta(p)$ для любого $p \in \mathbb{P}$. Формация

$$\mathfrak{H} = \{G \in \mathfrak{E} \mid G/O_\omega(G) \in h(0) \text{ и } G/G_{\delta(p)} \in h(p) \text{ для любого } p \in \omega \cap \pi(G)\}$$

называется *ω-веерной формацией с направлением δ и ω-спутником h* (здесь $O_\omega(G)$ и $G_{\delta(p)}$ — $\mathfrak{E}_\omega$-радикал и $\delta(p)$-радикал группы G соответственно) и обозначается $\mathfrak{H} = \omega F(h, \delta)$ [5].

Следуя [1], полагаем $\bar{\omega} = \{\omega_i \mid i \in I\}$ — произвольное разбиение множества ω, т.е. $\omega = \cup_{i\in I}\omega_i$, $\omega_i \neq \varnothing$ для любого $i \in I$, и $\omega_i \cap \omega_j = \varnothing$ для любых $i, j \in I$, $i \neq j$.

Функцию вида $f : \bar{\omega} \cup \{0\} \to \{\text{формации групп}\}$, где $f(0) \neq \varnothing$, назовем *$\bar{\omega}F$-функцией* (иначе, $\bar{\omega}$-формационной функцией); функцию вида $\gamma : \bar{\omega} \to \{\text{непустые формации Фиттинга групп}\}$, удовлетворяющую условию $\mathfrak{E}_{\omega_i'} \subseteq \gamma(\omega_i)$ для любого $\omega_i \in \bar{\omega}$, назовем *$\bar{\omega}FR$-функцией* (иначе, $\bar{\omega}$-формационно-радикальной функцией). Для любой группы G полагаем $\bar{\omega} \cap \pi(G) = \{\omega_i \in \bar{\omega} \mid \omega_i \cap \pi(G) \neq \varnothing\}$. Класс групп

$$\mathfrak{F} = \{G \in \mathfrak{E} \mid G/O_\omega(G) \in f(0) \text{ и } G/G_{\gamma(\omega_i)} \in f(\omega_i) \text{ для любого } \omega_i \in \bar{\omega} \cap \pi(G)\}$$

является формацией (здесь $G_{\gamma(\omega_i)}$ — $\gamma(\omega_i)$-радикал группы G), которую назовем *$\bar{\omega}$-веерной формацией с направлением γ и $\bar{\omega}$-спутником f* и обозначим $\mathfrak{F} = \bar{\omega}F(f, \gamma)$. Нетрудно проверить, что формация $\mathfrak{F} = \bar{\omega}F(f, \gamma)$ имеет следующее строение:

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{E}_\omega f(0) \cap (\cap_{\omega_i \in Supp_{\bar{\omega}}(f)} \gamma(\omega_i) f(\omega_i)) \cap (\cap_{\omega_i \in \bar{\omega} \setminus Supp_{\bar{\omega}}(f)} \mathfrak{E}_{\omega_i'}),$$

где $Supp_{\bar{\omega}}(f) = \{\omega_i \in \bar{\omega} \mid f(\omega_i) \neq \varnothing\}$. Всякая $\bar{\omega}$-веерная формация $\mathfrak{F}$ является непустой, поскольку, ввиду определения $\bar{\omega}$-веерной формации, $G = 1 \in \mathfrak{F}$. Простейшими примерами $\bar{\omega}$-веерных формаций являются класс $\mathfrak{E}$, класс всех единичных групп, а также всякая формация $\mathfrak{F}$, удовлетворяющая условию $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{E}_{\omega'}$. Следующая теорема дает еще один пример $\bar{\omega}$-веерных формаций.

Теорема 1. *Пусть $\bar{\omega}$ — произвольное разбиение множества ω, γ — произвольная $\bar{\omega}FR$-функция, π — такое непустое подмножество множества $\mathbb{P}$, что для любого $\omega_i \in \bar{\omega}$ либо $\omega_i \cap \pi = \varnothing$, либо $\omega_i \subseteq \pi$, f — $\bar{\omega}F$-функция, имеющая следующее строение: $f(0) = \mathfrak{E}_{\pi\cap\omega}$, и для любого $\omega_i \in \bar{\omega}$ справедливо: если $\omega_i \cap \pi = \varnothing$, то $f(\omega_i) = \varnothing$; если $\omega_i \subseteq \pi$, то $f(\omega_i) = \mathfrak{E}_{\omega\cap\pi}$. Тогда $\bar{\omega}F(f, \gamma) = \mathfrak{E}_{\pi\cap\omega}$.*

Из теоремы 1, в частности, следует, что класс $\mathfrak{E}_{\omega_i}$ является $\bar{\omega}$-веерной формацией для любого $\omega_i \in \bar{\omega}$. Следуя [2], наименьшим разбиением множества ω назовем такое разбиение $\bar{\omega}$, при котором ω_i — одноэлементное множество для любого $\omega_i \in \bar{\omega}$. Следующая теорема устанавливает взаимосвязь между $\bar{\omega}$-веерными и ω-веерными формациями.

Теорема 2. *Пусть $\bar{\omega}$ — наименьшее разбиение множества ω, $\mathfrak{F}$ — непустая формация, γ и δ — $\bar{\omega}FR$-функция и $\mathbb{P}FR$-функция соответственно такие, что $\gamma(\{p_i\}) = \delta(p_i)$ для любого $\omega_i = \{p_i\} \in \bar{\omega}$. Тогда формация $\mathfrak{F}$ является $\bar{\omega}$-веерной с направлением γ в том и только в том случае, когда $\mathfrak{F}$ — ω-веерная формация с направлением δ.*

Пусть $\bar{\omega}$ и $\bar{\mathbb{P}}$ — такие разбиения множеств ω и $\mathbb{P}$ соответственно, что $\bar{\omega} \subseteq \bar{\mathbb{P}}$. В следующей теореме установлена взаимосвязь между $\bar{\omega}$-веерными и $\bar{\mathbb{P}}$-веерными формациями.

Теорема 3. *Пусть $\mathfrak{F}$ — непустая формация, $\pi(\mathfrak{F}) \subseteq \omega$, $\bar{\omega}$ и $\bar{\mathbb{P}}$ — такие разбиения множеств ω и $\mathbb{P}$ соответственно, что $\bar{\omega} \subseteq \bar{\mathbb{P}}$, $\gamma_{\bar{\omega}}$ и $\gamma_{\bar{\mathbb{P}}}$ — $\bar{\omega}FR$-функция и $\bar{\mathbb{P}}FR$-функция соответственно, удовлетворяющие условию: $\gamma_{\bar{\omega}}(\omega_i) = \gamma_{\bar{\mathbb{P}}}(\omega_i)$ для любого $\omega_i \in \bar{\omega}$. Тогда формация $\mathfrak{F}$ является $\bar{\omega}$-веерной с направлением $\gamma_{\bar{\omega}}$ в том и только в том случае, когда $\mathfrak{F}$ — $\bar{\mathbb{P}}$-веерная формация с направлением $\gamma_{\bar{\mathbb{P}}}$.*

Как отмечено ранее, важным видом ω-веерных формаций являются ω-локальные формации. Следуя [1], $\bar{\omega}$-веерную формацию с направлением γ назовем *$\bar{\omega}$-локальной*, если $\gamma(\omega_i) = \mathfrak{E}_{\omega_i'}\mathfrak{E}_{\omega_i}$ для любого $\omega_i \in \bar{\omega}$. Следуя [5], $\bar{\omega}$-веерную формацию с направлением γ назовем *$\bar{\omega}$-полной*, если $\gamma(\omega_i) = \mathfrak{E}_{\omega_i'}$ для любого $\omega_i \in \bar{\omega}$.

Теорема 4. *Пусть $\mathfrak{F}$ — непустая неединичная формация и $\omega = \pi(\mathfrak{F})$. Тогда $\mathfrak{F}$ является $\bar{\omega}$-полной формацией для любого разбиения $\bar{\omega}$ множества ω.*

Направление γ $\bar{\omega}$-веерной формации назовем *p-направлением*, если $\gamma(\omega_i) = \mathfrak{E}_{\omega_i'}\gamma(\omega_i)$ для любого $\omega_i \in \bar{\omega}$. Известно, что класс $\mathfrak{E}_{p'}\mathfrak{N}_p$ всех p-нильпотентных групп, где $p \in \mathbb{P}$, определяющий направление локальной формации, также является локальной формацией. Аналогичный факт справедлив для классов, являющихся значениями p-направления $\bar{\omega}$-веерной формации.

Теорема 5. *Пусть $\bar{\omega}$ — произвольное разбиение множества ω, γ — $\bar{\omega}FR$-функция, являющаяся p-направлением $\bar{\omega}$-веерной формации. Тогда для любого $\omega_i \in \bar{\omega}$ формация $\gamma(\omega_i)$ является $\bar{\omega}$-веерной формацией с направлением γ.*

Из теоремы 5, в частности, следует, что для любого разбиения $\bar{\omega}$ множества ω формация $\mathfrak{E}_{\omega_i'}\mathfrak{E}_{\omega_i}$ является $\bar{\omega}$-локальной формацией, для любого $\omega_i \in \bar{\omega}$; формация $\mathfrak{E}_{\omega_i'}$ является $\bar{\omega}$-полной формацией, для любого $\omega_i \in \bar{\omega}$.

Теорема 6. *Пусть $\mathfrak{F}$ — ω-веерная формация с произвольным направлением δ. Тогда для любого разбиения $\bar{\omega}$ множества ω найдутся $\bar{\omega}$-веерные формации $\mathfrak{F}_1$ и $\mathfrak{F}_2$ с направлениями γ_1 и γ_2 соответственно, где $\gamma_1 \leq \gamma_2$, такие, что $\mathfrak{F}_1 \subseteq \mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}_2$.*

Из теоремы 6 следует, что всякая ω-веерная формация является подформацией некоторой $\bar{\omega}$-веерной формации. Таким образом, изучение подформационного строения $\bar{\omega}$-веерных формаций позволяет получать сведения о свойствах и строении ω-веерных (в частности, ω-полных, ω-локальных, ω-центральных и др.), а также веерных (полных, локальных, центральных и др.) формаций групп.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Скиба А. Н. О σ-локальных формациях конечных групп. — Гомель: препринт ГГУ им. Ф. Скорины, 2017.

2. Skiba A. N. On one generalization of the local formations // Проблемы физики, математики и техники. 2018. Том 1, № 34. С. 79-82.

3. Скиба А. Н. Алгебра формаций. — Минск: Беларуская навука, 1997. 240 с.

4. Скиба А. Н., Шеметков Л. А. Кратно ω-локальные формации и классы Фиттинга конечных групп // Математические труды. 1999. Том 2, № 2. С. 114-147.

5. Ведерников В. А., Сорокина М. М. ω-Веерные формации и классы Фиттинга конечных групп // Математические заметки. 2002. Том 71, № 1. С. 43-60.

УДК 512.541

Два класса абелевых групп, определяемых классом конечных абелевых групп

А. А. Фомин (Россия, г. Москва)
Московский педагогический государственный университет
e-mail: alexander.fomin@mail.ru

Two classes of abelian groups defined by the class of finite abelian groups

A. A. Fomin (Russia, Moscow)
Moscow State Pedagogical University
e-mail: alexander.fomin@mail.ru

Всякая конечная последовательность элементов конечно представимого модуля над кольцом полиадических чисел определяет две абелевы группы: группу без кручения конечного ранга и смешанную факторно делимую группу. Как показано в [1], это есть удобный способ задания таких групп, развивающий известные теоремы А.И.Мальцева и А.Г.Куроша.

Всякая периодическая абелева группа является модулем над кольцом полиадических чисел. При этом, она является конечно представимым модулем тогда и только тогда, когда она конечна.

Таким образом, конечная последовательность элементов $g_1, \ldots, g_n$, порождающая конечную группу $G = \langle g_1, \ldots, g_n \rangle$, определяет две абелевы группы: группу без кручения A с отмеченной максимальной линейно независимой системой элементов $a_1, \ldots, a_n$ и смешанную факторно делимую группу B с отмеченным базисом $b_1, \ldots, b_n$. Следующие две теоремы описывают эти группы.

Теорема 1. Группа A является свободной и $A/F \cong G$, где $F = \langle a_1, \ldots, a_n \rangle$ - свободная подгруппа группы A, порожденная данными элементами.

Теорема 2. $B = G \oplus D$, где D - делимая группа без кручения с максимальной линейно независимой системой элементов $d_1, \ldots, d_n$. Группа B является факторно делимой с отмеченным базисом $b_1 = g_1 + d_1, \ldots, b_n = g_n + d_n$.

Следствие. Если последовательность состоит из n нулей $0, \ldots, 0$, то ей соответствуют две группы: свободная группа со свободным базисом в качестве группы без кручения и делимая группа без кручения ранга n в качестве факторно делимой группы с произвольной максимальной линейно независимой системой элементов в качестве ее базиса.

Работа выполнена совместно с Екатериной Игоревной Компанцевой и подробно изложена в [2].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Alexander Fomin, A matrix description for torsion free abelian groups of finite rank, Rendiconti del Seminario Matematico della Universita di Padova, Volume 144 (2020), pages 115-128

2. Е. И. Компанцева, А. А. Фомин, Факторно делимые группы и группы без кручения, соответствующие конечным абелевым группам, Чебышевский сб., 20:2 (2019), 221-233

Секция 2. Полугруппы и универсальные алгебры

УДК 512

Проблемы Шпехтового типа для универсальных алгебр

А. Я. Канель-Белов (г. Москва, Россия; г. Рамат-Ган, Израиль)
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Университет Бар-Илана
kanelster@gmail.com

Specht-type problems for universal algebras

A. Ya. Kanel-Belov (Moscow, Russia; г. Ramat Gan, Israel)
Lomonosov Moscow State University, Bar-Ilan University
kanelster@gmail.com

Посвящается светлой памяти Виктора Николаевича Латышева

Хорошо известна следующая

Проблема Шпехта. *Будет ли система тождеств ассоциативной алгебры над полем характеристики ноль конечно базируема, т.е. задаваться конечным базисом тождеств?*

Она была решена А. Р. Кемером А. Р. Кемер, "Конечная базируемость тождеств ассоциативных алгебр" , Алгебра и логика, 26:5 (1987), 597-641

На самом деле более фундаментальным являнется вопрос о *представимости*. Многообразие алгебр, удовлетворяющее системе тождеств, является полной подкатегорией категории всех алгебр. Универсальным отталкивающими объектами в этой подкатегории являются т.н. *относительно свободные алгебры. Представимость* относительно свободной ассоциативной алгебры над полем означает ее вложимость в алгебру матриц над кольцом многочленов. *Локальная представимость многообразия* означает представимость конечно порожденных ассоциативных алгебр.

Над полем нулевой характеристики и над бесконечным полем она была установлена А.Р.Кемером (А. Р. Кемер, "Представимость приведенно-свободных алгебр", Алгебра и логика, 27:3 (1988), 274–294). А. Р. Кемер, "Тождества конечнопорожденных алгебр над бесконечным полем", Изв. АН СССР. Сер. матем., 54:4 (1990), 726–753)

Для алгебр над конечным полем а также над нетеровыми ассоциативно- коммутативными кольцами (без условия нетеровости основного кольца проблема конечной базируемости имеет тривиальное отрицательное решение, а именно систему тождеств $\lambda_i \cdot x = 0$ где $\{\lambda_i\}$ порождают бесконечно базируемый идеал в основном кольце) ситуация такова.

Под *представимостью* следует понимать вложимость в алгебру, являющуюся нетеровым модулем над своим центроидом. Такое же определение естественно дать в контексте универсальных алгебр, причем произвольной сигнатуры.

Автором доклада была установлена следующая

Теорема. *Многообразие алгебр над нетеровым ассоциативно коммутативным кольцом* локально конечно базируемо *(т.е. любая система тождеств от конечного числа переменных следует из конечной подсистемы.) и локально представимо.*

А.Я.Белов, "Локальная конечная базируемость и локальная представимость многообразий ассоциативных колец", Изв. РАН. Сер. матем., 74:1 (2010), 3–134

Отметим, что многообразие ассоциативных алгебр над полем положительной характеристики бесконечно базируемо. Первые контрпримеры были построены автором и доложены на семинаре по теории колец под руководством В.Н.Латышева, А.В.Михалева, Е.С.Голода, чуть позже и другие участники семинара построили контрпримеры. А. Я. Белов, "О нешпехтовых многообразиях", Фундамент. и прикл. матем., 5:1 (1999), 47–66, А. Я. Белов, "Контрпримеры к проблеме Шпехта", Матем. сб., 191:3 (2000), 13–24 В. В. Щиголев, "Примеры бесконечно базируемых T-идеалов", Фундамент. и прикл. матем., 5:1 (1999), 307–312, В. В. Щиголев, "Примеры бесконечно базируемых T-пространств", Матем. сб., 191:3 (2000), 143–160, А. В. Гришин, "Примеры не конечной базируемости T-пространств и T-идеалов в характеристике 2", Фундамент. и прикл. матем., 5:1 (1999), 101–118.

В этой связи возникает вопрос об обобщении ассоциативных результатов на неассоциативный случай. Огромное значение в развитии неассоциативной тематики послужила монография К.А. Жевлаков, А. М. Слинько, И. П. Шестаков, А. И. Ширшов. "Кольца, близкие к ассоциативным".

А.В.Ильтяков (ученик И.П.Шестакова) доказал локальную конечную базируемость многообразий альтернативных PI-алгебр над полем характеристики ноль (А. В. Ильтяков, "Конечность базиса тождеств конечно-порожденной альтернативной PI-алгебры над полем характеристики нуль", Сиб. матем. журн., 32:6 (1991), 61–76). Для положительной характеристике он построил контрпримеры. Он же привел примеры бесконечно базируемых многообразий в альтернативном случае. Для алгебр Ли над полем нулевой характеристики была показана локальная конечная базируемость (Il'tyakov, A. V. "On finite basis of identities of Lie algebra representations". Nova J. Algebra Geom. 1, No. 3, 207–259 (1992). А.Вайс и Е.И.Зельманов установили локальную конечную базируемость многообразий йордановых PI-алгебр. (А. Я. Вайс, Е. И. Зельманов, "Теорема Кемера для конечнопорожденных йордановых алгебр", Изв. вузов. Матем., 1989, 6, 42–51)

В этой связи следует отметить, что вышеупомянутые работы доказывали только *локальную конечную базируемость* многообразий но не *локальную представимость*. Это связано со следующим обстоятельством. В доказательстве Кемера используется стартовая конечномерная алгебра, все тождества которой выполняются в данном многообразии. Существование такой алгебры выводится из теоремы Размыслова-Кемера-Брауна о нильпотентности радикала (имеющую неассоциативные аналоги), и теоремы Левина о полупрямом произведении, позволяющей переходить ь к степени идеала. Принципиальная трудность заключается в отсутствии аналога теоремы Левина, поэтому доказательства проблемы Шпехта используют обходной маневр.

С другой стороны в работе А. Я. Белов, "О кольцах, асимптотически близких к ассоциативным", Матем. тр., 10:1 (2007), 29–96 доказана достаточно общая

Теорема (а) *Пусть $\mathfrak{M}$ – удобное многообразие алгебр над полем нулевой характеристики, все подмногообразия которого представимы. Тогда ряд Гильберта H_Q произвольного T-пространства Q в относительно свободной алгебре из $\mathfrak{M}$ рационален.*

(б) *Удобное многообразие алгебр над полем нулевой характеристики локально шпехтово, и относительно свободные алгебры из этого многообразия представимы.*

Определение *Многообразие $\mathfrak{M}$ называется* структурируемым, *если каждая конечномерная алгебра из M разлагается в сумму простых компонент и нильпотентного радикала.*

Структурируемое многообразие называется удобным, *если оно порождено некоторой конечномерной алгеброй.*

При этом выполнимость всех тождеств некоторой конечномерной алгебры пришлось постулировать.

Вместе с тем, принципиальным является понимание взаимодействия полупростых компонент через радикал, и в этой связи чрезвычайно важно исследование неассоциативных моду-

лей Е.И.Зельмановым, И.П.Шестаковым, школой. Здесь имеется весьма перспективное поле исследования.

Удивительно, что в высокой степени общности можно доказывать достаточно нетривиальные результаты. Имеет место

Теорема о ранге. *Первичная алгебра, в которой выпоняется система тождеств Капелли порядка $n+1$ но не порядка n после локализации центроида вкладывается в n-мерую алгебру над своим центроидом.*

Теорема Размыслова-Кушкулея. *Неизоморфные простые алгебры над алгебраически замкнутом полем произвольной характеристики порождают различные многообразия.*

Теорема *Представимая (многоосновная) алгебра произвольной сигнатуры имеет целую размерность Гельфанда-Кириллова.*

Отметим, что работы А.Р.Кемера существенно продвинули понимание "супер-теории". Он свел изучение бесконечно-порожденных алгебр над полем нулевой характеристики к изучению конечно-порожденных супер алгебр. Идеи Кемера позволили И.П.Шестакову осознать ряд контрпримеров в неассоциативной ситуации. Все они оказались грассмановыми оболочками конечномерных алгебр. (И. П. Шестаков, “Супералгебры и контрпримеры”, Сиб. матем. журн., 32:6 (1991), 187–196).

На этом пути ученик С.В.Пчелинцева (А. В. Бадеев, “О шпехтовости многообразий коммутативных альтернативных алгебр над полем характеристики 3 и коммутативных луп Муфанг”, Сиб. матем. журн., 41:6 (2000), 1252–1268) построил бесконечно базируемое многообразие коммутативных луп Муфанг. Отметим, что работа Н. И. Санду, “Бесконечные неприводимые системы тождеств коммутативных луп Муфанг и дистрибутивных квазигрупп Штейнера”, Изв. АН СССР. Сер. матем., 51:1 (1987), 171–188 по мнению В.Н.Латышева, является ошибочной.

УДК 512.579

Об абстрактной характеризации решеток квазимногообразий унаров

В. К. Карташов (Россия, г. Волгоград)
Волгоградский государственный социально-педагогический университет
e-mail: kartashovvk@yandex.ru
А. В. Карташова (Россия, г. Волгоград)
Волгоградский государственный социально-педагогический университет
e-mail: kartashovaan@yandex.ru

On abstract characterization of lattices of quasivarieties of unars

V. K. Kartashov (Russia, Volgograd)
Volgograd State Socio-Pedagogical University
e-mail: kartashovvk@yandex.ru
A. V. Kartashova (Russia, Volgograd)
Volgograd State Socio-Pedagogical University
e-mail: kartashovaan@yandex.ru

Основные идеи теории квазимногообразий были разработаны А. И. Мальцевым [1].

Одна из проблем, указанных им, заключается в следующем. Пусть $\mathfrak{M}$ – произвольное квазимногообразие алгебраических систем данной сигнатуры. Тогда его подквазимногообразия образуют полную решетку $L_q(\mathfrak{M})$ относительно включения. Решетка $L_q(\mathfrak{M})$ содержит значительную информацию о семантических и синтаксических свойствах систем из $\mathfrak{M}$. Этим объясняется необходимость исследования свойств решеток квазимногообразий.

В настоящее время это направление широко развито (см., например, [2], [3]).

Одной из актуальных задач при исследовании решеток квазимногообразий алгебраических систем является их абстрактная характеризация, т. е. нахождение условий при которых решетка вида $L_q(\mathfrak{M})$ изоморфна некоторой уже исследованной ранее решетке, либо получается из таких решеток с помощью стандартных или новых конструкций.

Такие вопросы рассматривались и для других решеток, связанных с алгебраическими системами (см., например, [4] - [9]).

В данном сообщении аналогичная задача рассматривается для решеток квазимногообразий унаров (т. е. алгебр с одной унарной операцией).

В [10] была дана абстрактная характеризация дистрибутивных решеток квазимногообразий унаров.

Здесь доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть L – конечная решетка квазимногообразий унаров, которая имеет n атомов и является решеткой с дополнениями. Тогда либо L – булева решетка, либо мощность L равна $2^{n-2}(n+3)$.*

Далее указан *алгоритм построения всех конечных решеток с дополнениями, которые изоморфны некоторой решетке квазимногообразий унаров.*

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Мальцев А. И. Алгебраические системы. — М.: Наука, 1970. – 392 с.

2. Кравченко А. В., Нуракунов А. М., Швидефски М. В. О строении решеток квазимногообразий. I. Независимая аксиоматизируемость // Алгебра и логика. 2018. Том 57, №6. С. 684-710.

3. Hyndman J., Nation J. B. The Lattice of Subquasivarieties of a Locally Finite Quasivariety, CMS Books in Mathematics. — Berlin: Springer, 2018. – 162 p.

4. Виноградов А. А. Квазимногообразия абелевых групп // Алгебра и логика. 1965. Том 4, № 6. С. 15-19.

5. Карташов В. К. Характеризация решетки квазимногообразий алгебр $L_qA_{1,1}$ // Алгебраические системы. – Волгоград: изд-во Волгоградского государственного пединститута, 1989. С. 37–45.

6. Карташов В. К., Карташова А. В., Пономарёв В. Н. Об условиях дистрибутивности и модулярности решеток конгруэнций коммутативных унарных алгебр // Известия Саратовского ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2013. Том 13 выпуск 4(2). С. 52–57.

7. Карташова А. В. О решетках конгруэнций прямых сумм сильно связных коммутативных унарных алгебр // Известия Саратовского ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2013. Том 13 выпуск 4(2). С. 57-62.

8. Карташова А. В. Коммутативные унарные алгебры с линейно упорядоченной решеткой конгруэнций // Математические заметки. 2014. Том 95, №1. С. 80-92.

9. Kartashova A. V. Commutative unary algebras with modular and distributive topology lattices // Communications in Algebra. 2020. Vol. 48, №3. P. 1041-1051.

10. Kartashov V. K., Kartashova A. V. Remarks on NQ-critical commutative unary algebras // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2020. Vol. 41, №2. P. 204-206.

УДК 512.579

О решетках формаций унарных алгебр

А. Л. Расстригин (Россия, г. Волгоград)
Волгоградский государственный социально-педагогический университет
e-mail: rasal@fizmat.vspu.ru

On lattices of formations of unary algebras

A. L. Rasstrigin (Russia, Volgograd)
Volgograd State Socio-Pedagogical University
e-mail: rasal@fizmat.vspu.ru

Многообразием называется класс алгебр, замкнутый относительно гомоморфных образов, подалгебр и прямых произведений. Хорошо известно, что класс будет многообразием если потребовать его замкнутости относительно гомоморфных образов и подпрямых произведений. *Формацией* называется класс алгебр, замкнутый относительно гомоморфных образов и конечных (с конечным числом множителей) подпрямых произведений. В общей алгебре многообразиям отводится одно из центральных мест. Формации же появились в теории групп и применяются в основном в связи с конечными алгебрами [1]. Как следует из определения, каждое многообразие образует также формацию. Но кроме этого между формациями и многообразиями существуют и другие разнообразные связи.

Всякое множество многообразий алгебр определенной сигнатуры, замкнутое относительно операций пересечения многообразий и взятия многообразия, порожденного объединением данной совокупности многообразий образует *решетку многообразий*. Аналогичным образом рассматриваются и *решетки формаций* [1]; например, говорим о решетке всех формаций конечных алгебр определенной сигнатуры.

В настоящем сообщении рассматривается вопрос о свойствах как решетки формаций, так и решетки многообразий для сигнатуры унарых алгебр. Алгебра называется *унарной*, если все ее основные операции унарны. Другими словами, речь идет о множествах, на которых действует полугруппа, или о полигонах над полугруппой, или об автоматах без выхода. Эти определения часто взаимозаменяемы в литературе. Унарная алгебра называется *коммутативной*, если любые две ее операции перестановочны между собой. Унарные алгебры с одной операцией называются *унарами*.

Перечислим некоторые свойства, известные для формаций унарных алгебр. Так решетка формаций конечных унаров представляется как произведение цепей [2, 3] и, следовательно, является дистрибутивной. Решетка всех формаций счетных унаров уже не будет модулярной [4]. В сообщении показано, что решетка формаций конечных унарных алгебр не является модулярной.

В случае произвольной сигнатуры решетка всех многообразий алгебр этой сигнатуры образует также подрешетку во всякой содержащей ее решетке формаций алгебр этой сигнатуры. Кроме того, каждому многообразию соответствует формация всех конечных алгебр из этого многообразия. Известно [1], что решетка всех локально конечных многообразий вкладывается с помощью такого соответствия в решетку всех конечных формаций. Для сигнатуры унаров [5] такое соответствие будет вложением решетки всех многообразий в решетку всех конечных формаций.

Теорема 1. *Решетка всех локально конечных многообразий коммутативных унарных алгебр с двумя операциями не модулярна.*

Теорема 2. *Решетка всех формаций конечных коммутативных унарных алгебр с двумя операциями не модулярна.*

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Шеметков Л. А., Скиба А. Н. Формации алгебраических систем. М.: Наука, 1989.

2. Расстригин А. Л. Формации конечных унаров // Чебышевский сборник. 2011. Т. 12, № 2 (38). С. 102–109.

3. Jakubíková-Studenovská D., Pócs J. Formations of finite monounary algebras // Algebra universalis. 2012. Vol. 68, No. 3-4. P. 249–255.

4. Rasstrigin A. L. On lattices of formations of monounary algebras with finitely many cycles // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2015. Vol. 36, No. 4. P. 419–425.

5. Расстригин А. Л. О решетках формаций унаров // Ученые записки Орловского государственного университета. 2012. № 6-2 (50). С. 190–194.

УДК 512.577

Унары с периодической полугруппой эндоморфизмов

С. В. Сыроватская (Россия, г. Волгоград)
Волгоградский государственный социально-педагогический университет
e-mail: svs_kagi@mail.ru

Unars with periodic endomorphism semigroup

S. V. Syrovatskaya (Russia, Volgograd)
Volgograd State Socio-Pedagogical University
e-mail: svs_kagi@mail.ru

Унаром называется алгебра $\mathfrak{A} = \langle A, f \rangle$ с одной унарной операцией f. Под $\operatorname{End}\mathfrak{A}$ будем подразумевать полугруппу эндоморфизмов $\mathfrak{A}$. Другие термины теории унаров можно найти, например, в [1].

Одним из основных направлений в исследовании полугрупп эндоморфизмов унаров является описание класса всех унаров, полугруппа эндоморфизмов которых обладает заданным

свойством. Так, работы [2] и [3] посвящены описанию класса всех унаров с коммутативной полугруппой эндоморфизмов. В [4] перечислены все унары, полугруппа эндоморфизмов которых является регулярной, инверсной, группой. В работе [5] описан класс всех унаров, обладающих сепаративной полугрупппой эндоморфизмов.

Полугруппа называется *периодической*, если всякая ее моногенная подполугруппа конечна.

Предложение 1. *Полугруппа эндоморфизмов унара* $\mathfrak{A}$ *периодическая тогда и только тогда, когда унар* $\mathfrak{A}$ *конечный.*

Следствие 1. *Полугруппа* $\operatorname{End}\mathfrak{A}$ *конечна тогда и только тогда, когда* $\mathfrak{A}$ *конечен.*

Пример бесконечной унарной алгебры с периодической полугруппой эндоморфизмов.

Пусть $\mathbb{N}$ — множество целых положительных чисел. Обозначим через $\mathfrak{A}'$ унарную алгебру $\langle \mathbb{N}, f', g' \rangle$, где операция f' определяется правилом: для любого $n \in \mathbb{N}$

$$nf' = \begin{cases} n-1, & \text{если } n > 1, \\ 1, & \text{если } n = 1 \end{cases},$$

и операция g' задана так: для произвольного $n \in \mathbb{N}$

$$ng' = \begin{cases} n-1, & \text{если } n > 4 \text{ или } n = 2, \\ 2, & \text{если } n = 4, \\ 3, & \text{если } n = 1 \text{ или } n = 3. \end{cases}$$

Полугруппа эндоморфизмов алгебры $\mathfrak{A}'$ является периодической.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Карташов В. К. Квазимногообразия унаров // Математические заметки. 1980. Том 27, № 1. С. 7-20.

2. Varlet J. C. Endomorphisms and fully invariant congruences in unary algebras $\langle A, \Gamma \rangle$ // Bull. Soc. Roy. Sci. Liege. 1970. V. 39. P. 575-589.

3. Бочкин А. М. Унары с коммутативным моноидом эндоморфизмов // Свойства полугрупп. 1984. С. 3-14.

4. Skornjakov L. A. Unary algebras with regular endomorphism monoids // Acta. Sci. Math. 1978. V. 40. P. 375-381.

5. Бочкин А. М. Унары с сепаративным моноидом эндоморфизмов // Известия Вузов. Математика. 1983, № 5. С. 71-74.

УДК 512.579

Об эндоморфно простых и конгруэнц-эндоморфно устойчивых алгебрах с одним оператором

В. Л. Усольцев (Россия, г. Волгоград)
Волгоградский государственный социально-педагогический университет
e-mail: usl2004@mail.ru

On endomorphically simple and congruence endomorphically stable algebras with one operator

V. L. Usoltsev (Russia, Volgograd)
Volgograd State Socio-Pedagogical University
e-mail: usl2004@mail.ru

Конгруэнция θ универсальной алгебры A называется вполне инвариантной (см., например, [1]), если для любых $x, y \in A$ и любого эндоморфизма φ алгебры A из условия $x\theta y$ следует, что $\varphi(x)\theta\varphi(y)$ (то есть, конгруэнция θ устойчива относительно эндоморфизма φ). Известно, что совокупность всех вполне инвариантных конгруэнций любой универсальной алгебры A образует полную решетку $Con_{FI}A$ относительно включения.

Неодноэлементная алгебра A называется эндоморфно простой [2], если она не имеет нетривиальных вполне инвариантных конгруэнций. Другими словами, алгебра A эндоморфно проста, если решетка $Con_{FI}A$ является двухэлементной цепью. Заметим, что в [2] данные алгебры были названы $\mathcal{E}$-простыми, однако, термин "эндоморфно простая алгебра" представляется нам более удачным, так как понятие эндоморфной простоты для универсальных алгебр является естественным обобщением соответствующего понятия для групп (см., например, [3], с. 60). Эндоморфно простыми будут, например, полурешетки, дистрибутивные решетки и булевы алгебры (см. [2]).

Назовем алгебру A конгруэнц-эндоморфно устойчивой, если любая ее конгруэнция является вполне инвариантной (примеры таких алгебр см. в [4]). Иными словами, алгебра A конгруэнц-эндоморфно устойчива, если решетка $Con_{FI}A$ совпадает с решеткой $Con\,A$ обычных конгруэнций алгебры A.

Неодноэлементная алгебра A называется псевдопростой [5], если для любой ее неединичной конгруэнции θ выполнено условие $A/\theta \cong A$.

Назовем неодноэлементную алгебру A эндоморфно псевдопростой, если для любой ее неединичной вполне инвариантной конгруэнции θ выполнено условие $A/\theta \cong A$.

В [4] изучались эндоморфно простые и конгруэнц-эндоморфно устойчивые алгебры в классе унаров — алгебр с одной унарной операцией. Унарные алгебры естественным образом связаны с другим классом универсальных алгебр — алгебрами с операторами.

Алгеброй с операторами называется универсальная алгебра $\langle A, \Omega\rangle$ сигнатуры $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$, где Ω_1 произвольна и непуста, а Ω_2 состоит из унарных операций, перестановочных с любой операцией из Ω_1, то есть, действующих как эндоморфизмы относительно операций из Ω_1. Унарные операции из Ω_2 называются операторами.

Через C_h^t, где $h \geqslant 1$, $t \geqslant 0$, обозначается унар $\langle A, f\rangle$ с порождающим элементом a, заданный определяющим соотношением $f^t(a) = f^{t+h}(a)$. Унар C_n^0 называется циклом длины n. Элемент a унара называется циклическим, если подунар, порожденный этим элементом, является циклом. Через C_n^∞ обозначается объединение возрастающей последовательности унаров $C_n^{t_1} \subseteq C_n^{t_2} \subseteq \ldots$, где $n > 0$ и $0 \leqslant t_1 < t_2 < \ldots$. Элемент a унара $\langle A, f\rangle$ называется периодическим, если $f^t(a) = f^{t+n}(a)$ для некоторых $t \geqslant 0$ и $n > 0$. Через $T(A)$ обозначается множество

всех периодических элементов унара A. Если a — периодический элемент, то наименьшее из чисел t, для которых $f^t(a) = f^{t+n}(a)$ при некотором $n \geqslant 1$, называется глубиной элемента a. Элемент x называется минимальным, если не существует такого $y \in A$, что $f(y) = x$. Унар $\langle A, f\rangle$ называется связным, если для любых $x, y \in A$ выполняется условие $f^n(x) = f^m(y)$ для некоторых $n, m \geqslant 0$. Максимальный по включению связный подунар унара A называется компонентой связности унара A. Элемент a унара $\langle A, f\rangle$ называется узловым, если найдутся такие элементы $b, c \in A$, что $f(b) = a = f(c)$ и $|\{a, b, c\}| = 3$. Элемент a унара $\langle A, f\rangle$ называется неподвижным, если $f(a) = a$. Связный унар с неподвижным элементом называется корнем. Корень с неподвижным элементом a, не содержащий узловых элементов, кроме, может быть, элемента a, называется корнем без нетривиальных узлов.

Пусть $k \in N$. Через σ_k обозначается конгруэнция $Ker\ f^k$ унара $\langle A, f\rangle$. Положим также $\sigma_0 = \triangle_A$. Через σ обозначается бинарное отношение, заданное на унаре $\langle A, f\rangle$ по правилу [6]: $x\sigma y$ для $x, y \in A$ выполнено тогда и только тогда, когда $f^n(x) = f^n(y)$ для некоторого $n > 0$.

В [6] показано, что бинарные отношения σ и σ_n при любом $n \in N \cup \{0\}$ являются вполне инвариантными конгруэнциями произвольной алгебры $\langle A, \Omega \cup \{f\}\rangle$ с оператором f и произвольной основной сигнатурой Ω.

Предложение 1 ([7]). *Пусть $\langle A, \Omega\rangle$ — произвольная неодноэлементная универсальная алгебра с оператором $f \in \Omega$. Если алгебра $\langle A, \Omega\rangle$ является эндоморфно простой, то либо операция f инъективна на A, либо унар $\langle A, f\rangle$ содержит такой элемент a, что $f(x) = a$ для любого $x \in A$.*

Необходимое условие эндоморфной простоты алгебры $\langle A, \Omega\rangle$ с оператором $f \in \Omega$, указанное в предложении 1, не является достаточным.

Предложение 2. *Пусть $\langle A, \Omega\rangle$ — произвольная универсальная алгебра с оператором $f \in \Omega$. Если унар $\langle A, f\rangle$ изоморфен унару C_1^t, $t \in N \cup \{\infty\}$, то алгебра $\langle A, \Omega\rangle$ является конгруэнц-эндоморфно устойчивой и эндоморфно псевдопростой.*

Тернарная операция $d(x, y, z)$ называется мальцевской, если она удовлетворяет тождествам $d(x, y, y) = d(y, y, x) = x$. Мальцевская операция d называется операцией Пиксли, если она удовлетворяет тождествам $d(x, y, y) = d(y, y, x) = d(x, y, x) = x$. Мальцевская операция d называется операцией меньшинства, если для нее выполняются тождества $d(y, y, x) = d(x, y, y) = d(y, x, y) = x$. Тернарная операция $d(x, y, z)$ называется операцией большинства, если она удовлетворяет тождествам $d(x, x, y) = d(y, x, x) = d(x, y, x) = x$. Операция большинства является тернарным вариантом операции почти единогласия, то есть операции φ, для которой выполняются тождества $\varphi(x, \ldots, x, y) = \varphi(x, \ldots, x, y, x) = \ldots = \varphi(y, x, \ldots, x) = x$.

В [8] показано, что на любом унаре $\langle A, f\rangle$ можно так задать операцию Пиксли $p(x, y, z)$, что алгебра $\langle A, p, f\rangle$ становится алгеброй с оператором f. Эта операция определяется следующим образом. Пусть $x, y \in A$. Положим $M_{x,y} = \{n \in \mathrm{N} \cup \{0\} \mid f^n(x) = f^n(y)\}$, а также $k(x, y) = \min\ M_{x,y}$, если $M_{x,y} \neq \emptyset$ и $k(x, y) = \infty$, если $M_{x,y} = \emptyset$. Положим далее

$$p(x, y, z) \stackrel{def}{=} \begin{cases} z, & \text{если } k(x, y) \leqslant k(y, z) \\ x, & \text{если } k(x, y) > k(y, z). \end{cases} \tag{1}$$

В [9], на основе подхода, предложенного в [8], на произвольном унаре $\langle A, f\rangle$ задается операция меньшинства $s(x, y, z)$, перестановочная с операцией f:

$$s(x, y, z) \stackrel{def}{=} \begin{cases} z, & \text{если } k(x, y) < k(y, z); \\ y, & \text{если } k(x, y) = k(y, z); \\ x, & \text{если } k(x, y) > k(y, z). \end{cases} \tag{2}$$

Сходным способом на произвольном унаре $\langle A, f\rangle$ можно задать операцию большинства $m(x, y, z)$, перестановочную с f (см. [10]):

$$m(x,y,z) \stackrel{def}{=} \begin{cases} z, & \text{если } k(x,y) \geqslant k(y,z); \\ x, & \text{если } k(x,y) < k(y,z). \end{cases} \tag{3}$$

Теорема 1. *Пусть $\langle A, d, f\rangle$ — неодноэлементная алгебра с оператором f и тернарной операцией d, заданной по одному из правил (1)–(3). Алгебра $\langle A, d, f\rangle$ является эндоморфно простой тогда и только тогда, когда либо операция f инъективна на A, либо унар $\langle A, f\rangle$ содержит такой элемент a, что $f(x) = a$ для любого $x \in A$.*

Теорема 2. *Пусть $\langle A, d, f\rangle$ — конечная алгебра с оператором f и тернарной операцией d, заданной по одному из правил (1)–(3). Алгебра $\langle A, d, f\rangle$ является конгруэнц-эндоморфно устойчивой тогда и только тогда, когда выполнено одно из условий: 1) унар $\langle A, f\rangle$ изоморфен унару C_n^0, $n \in N$; 2) унар $\langle A, f\rangle$ изоморфен унару C_1^t, $t \in N$; 3) унар $\langle A, f\rangle$ — конечный связный унар, имеющий единственный узловой элемент, являющийся циклическим; 4) унар $\langle A, f\rangle$ изоморфен сумме одной компоненты из п. 2) или п. 3), и конечного числа циклических компонент связности.*

Предложение 3. *Пусть $\langle A, d, f\rangle$ — алгебра с оператором f и тернарной операцией d, заданной по одному из правил (1)–(3). Если унар $\langle A, f\rangle$ является бесконечным корнем без нетривиальных узлов, имеющим для всех $m > 0$ равномощные друг другу (возможно, пустые) множества минимальных элементов глубины m, то алгебра $\langle A, d, f\rangle$ является конгруэнц-эндоморфно устойчивой и эндоморфно псевдопростой.*

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Bergman C., Berman J. Fully invariant and verbal congruence relations // Algebra Universalis. 2013. Vol. 70. P. 71–94.

2. Varlet J. C. Remarks on fully invariant congruences // Contributions to Universal Algebra (Colloq. Math. Soc. J. Bolyai, 17. Szeged, Hungary, 1975) — Amsterdam, Oxford, New York: North-Holland Publ. Co., 1977. P. 515–554.

3. Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. И. Основы теории групп. — М.: Наука, 1977. 240 с.

4. Varlet J. C. Endomorphisms and fully invariant congruences in unary algebras $\langle A; f\rangle$ // Bulletin de la Soc. Royale des Sciences de Liege. 1970. Vol. 39. N 11–12. P. 575–589.

5. Monk D. On pseudo-simple universal algebras // Proc. Amer. Math. Soc. 1962. Vol. 13. P. 543–546.

6. Usoltsev V. L. Simple and pseudosimple algebras with operators // Journal of Mathematical Sciences. 2010. Vol. 164, N 2. P. 281–293.

7. Усольцев В. Л. Об эндоморфно простых алгебрах с операторами // Научные перспективы XXI века. Достижения и перспективы нового столетия : VII Международная научно-практическая конференция (Новосибирск, 12–13 декабря 2014 г.) — Новосибирск, 2014. С. 131–133.

8. Карташов В. К. Об унарах с мальцевской операцией // Международный семинар «Универсальная алгебра и ее приложения», посвященный памяти профессора Л. А. Скорнякова: тезисы докладов (Волгоград, 6-11 сентября 1999 г.) — Волгоград, 1999. С. 31–32.

9. Усольцев В. Л. Свободные алгебры многообразия унаров с мальцевской операцией p, заданного тождеством $p(x, y, x) = y$ // Чебышевский сборник. 2011. Том 12, № 2(38). С. 127–134.

10. Усольцев В. Л. Алгебры Риса и конгруэнц-алгебры Риса в одном классе алгебр с оператором и основной операцией почти единогласия // Чебышевский сборник. 2016. Том 17, № 4(60). С. 157–166.

УДК 512. 548

Преобразования слов в заданном алфавите

Н. А. Щучкин (Россия, г. Волгоград)
Волгоградский государственный социально-педагогический университет
e-mail: nikolaj_shchuchkin@mail.ru

Word conversions in a given alphabet

N. A. Shchuchkin (Russia, Volgograd)
Volgograd State Socio-Pedagogical University
e-mail: nikolaj_shchuchkin@mail.ru

Для преобразования слов в заданном алфавите активно применяются квазигруппы (латинские квадраты) (см., например, [1], [2], [3]). Мы в этой работе будем применять n-квазигруппы ([4], стр. 6) для преобразования слов, где $n \geq 2$.

Большое количество n-квазигрупповых операций на заданном конечном множестве позволяет использовать n-квазигруппы для шифрования. Такое использование квазигрупп (n-квазигрупп при $n = 2$) рассматривается в работе [5]. Мы будем применять n-квазигруппы для $n \geq 2$.

Выбираем конечную n-квазигруппу $\langle Q, f\rangle$, где $Q = \{a_1, \ldots, a_k\}$. Этой n-квазигруппе соответствует n-мерная матрица k-го порядка $B = (b_{j_1 j_2 \ldots j_n} | j_1, j_2, \ldots, j_n = 1, 2, \ldots, k)$ ([6], стр. 5), где $b_{j_1 j_2 \ldots j_n} = f(a_{j_1}, a_{j_2}, \ldots, a_{j_n})$, причем, в силу однозначной разрешимости уравнения

$$f(a_1, \ldots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \ldots, a_n) = a_i \tag{1}$$

для любого индекса $i = 1, \ldots, n$, в строках направления (i) стоят разные элементы из Q. Указанное соответствие будет взаимно однозначным. При $n = 2$ квазигруппе $\langle Q, \cdot\rangle$ соответствует латинский квадрат k-го порядка.

Множество всех слов в алфавите Q обозначим $Q^+ = \{x_1 \ldots x_m | x_i \in Q, m \geq 1\}$. На множестве Q^+ в работе [7] уже рассматривались преобразования строк с помощью n-квазигрупп. Здесь мы рассмотрим другие преобразования строк, также используя n-квазигруппы. Для фиксированного набора элементов $\alpha = (a_1, \ldots, a_{n-1})$ из Q на множестве Q^+ определим отображение

$$F_\alpha(x_1 \ldots x_m) = y_1 \ldots y_m \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = f(a_1, \ldots, a_{n-2}, a_{n-1}, x_1), \\ y_{i+1} = f(a_1, \ldots, a_{n-2}, y_i, x_{i+1}), \quad (i = 1, \ldots, m-1) \end{cases}, \tag{2}$$

которое будет биективным. Найдем обратное отображение для F_α. В силу однозначной разрешимости уравнения (1) для $i = n$, на множестве Q определим еще одну n-арную операцию g по правилу $g(a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n) = b \Leftrightarrow f(a_1, \ldots, a_{n-1}, b) = a_n$. Операции f и g связаны тождествами

$$g(x_1, \ldots, x_{n-1}, f(x_1, \ldots, x_{n-1}, y)) = y = f(x_1, \ldots, x_{n-1}, g(x_1, \ldots, x_{n-1}, y)). \tag{3}$$

Для набора элементов α на множестве Q^+ определим отображение

$$G_\alpha(y_1 \dots y_m) = x_1 \dots x_m \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = g(a_1, \dots, a_{n-2}, a_{n-1}, y_1), \\ x_{i+1} = g(a_1, \dots, a_{n-2}, y_i, y_{i+1}), \quad (i = 1, \dots, m-1) \end{cases}, \tag{4}$$

которое также будет биективным. Согласно (3) имеем равенства

$$G_\alpha(F_\alpha(\beta)) = \beta = F_\alpha(G_\alpha(\beta)) \tag{5}$$

для любого слова $\beta \in Q^+$, т.е. отображение G_α является обратным для отображения F_α.

Далее рассмотрим композицию s отображений вида (2). Выбираем n-квазигрупповые операции $f_1, f_2, \dots, f_s$ на множестве Q и для фиксированных наборов элементов $\alpha_j = (a_{1j}, \dots, a_{n-1j})$ из Q, $j = 1, 2, \dots, s$, на множестве Q^+ определяем соответственно отображения $F^{(1)}_{\alpha_1}, F^{(2)}_{\alpha_2}, \dots, F^{(s)}_{\alpha_s}$ по правилу (2), затем строим композицию $F_{\alpha_s,\dots,\alpha_1} = F^{(s)}_{\alpha_s} \circ F^{(s-1)}_{\alpha_{s-1}} \circ \dots \circ F^{(1)}_{\alpha_1}$. Обратным отображением для отображения $F_{\alpha_s,\dots,\alpha_1}$ будет композиция $G_{\alpha_1,\dots,\alpha_s} = G^{(1)}_{\alpha_1} \circ G^{(2)}_{\alpha_2} \circ \dots \circ G^{(s)}_{\alpha_s}$, где отображения $G^{(j)}_{\alpha_j}$, $j = 1, 2, \dots, s$, построены в соответствии с отображениями $F^{(j)}_{\alpha_j}$ также, как G_α построено по отображению F_α. Отображение $F_{\alpha_s,\dots,\alpha_1}$ можно использовать для шифрования текстов в алфавите Q. Ключом при таком шифровании будет набор n-арных операций $f_1, f_2, \dots, f_s$.

Заметим, что при $n = 2$ отображения $F_{\alpha_s,\dots,\alpha_1}$ и $G_{\alpha_1,\dots,\alpha_s}$ будут такими же, как в работе [5]. В этой работе доказаны свойства таких отображений, которые указывают на актуальность применения этих отображений в криптографии. Для наших отображений мы тоже докали эти свойства.

Теорема 1. *Пусть $b_1 \dots b_m$ – слово в алфавите $Q = \{a_1, \dots, a_k\}$. Для любых n-квазигрупповых операций $f_1, f_2, \dots, f_s$ на множестве Q и для любых наборов элементов $\alpha_j = (a_{1j}, \dots, a_{n-1j})$ из Q, $j = 1, 2, \dots, s$, найдется единственное слово $d_1 \dots d_m$ в алфавите Q такое, что верно равенство*

$$F_{\alpha_s,\dots,\alpha_1}(d_1 \dots d_m) = b_1 \dots b_m. \tag{6}$$

Перейдем теперь к оценке возможностей отыскания ключей $f_1, f_2, \dots, f_s$ (n-арных операций), которые участвуют в отображении (6) по заданным наборам элементов $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ и словам $d_1 \dots d_m$, $b_1 \dots b_m$.

Теорема 2. *Для нахождения всех ключей $f_1, f_2, \dots, f_s$ (n-арных операций), которые удовлетворяют (6) при заданных наборах элементов $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ и словах $d_1 \dots d_m$, $b_1 \dots b_m$, необходимо произвести столько испытаний, сколько существует упорядоченных наборов из $s-1$ n-квазигрупповых операций на множестве Q.*

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Глухов М.М. О применениях квазигрупп в криптографии // ПДМ. - 2008. - №2. - С. 28-32.

2. Artamonov V. A., Chakrabarti S., Gangopadhyay S., Pal S. K. On Latin squares of polynomially complete quasigroups and quasigroups generated by shifts // Quasigroups and Related Systems. - 2013. - Vol. 21, No. 2. - P. 117–130.

3. Artamonov V. A., Chakrabarti S., Pal S. K. Characterization of Polyno- mially Complete Quasigroups based on Latin Squares for Cryptographic Transformations // Discrete Applied Mathematics. - 2016. - P. 5–17.

4. Белоусов В.Д. n-Арные квазигруппы. Кишинев. Штиинца, 1972. 228 с.

5. Markovski S., Gligoroski D., Bakeva V. Quasigroup String Processing: Part 1 // Proc. of Maked. Academ. of Sci. and Arts for Math. And Tect. Sci. XX. - 1999 - 1-2. - P. 157-162.

6. Соколов Н.П. Введение в теорию многомерных матриц. Киев. Наукова думка, 1972. 175 с.

7. Щучкин Н.А. Преобразования строк с помощью n-квазигрупп // АЛГЕБРА, ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ И ДИСКРЕТНАЯ ГЕОМЕТРИЯ: СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ, ПРИЛОЖЕНИЯ И ПРОБЛЕМЫ ИСТОРИИ. Материалы XVIII Международной конференции, посвященной 100-летию со дня рождения профессоров Б. М. Бредихина, В. И. Нечаева и С. Б. Стечкина. Тула, 2020. С. 117-119.

Секция 3. Кольца и модули

УДК 512.552

Обобщенно полукоммутативные подкольца матричных колец

И. М. Зильберборд (Россия, г. Санкт-Петербург)
Санкт-Петербургский государственный университет
e-mail: i.zilberbord@mail.spbu.ru

Generalized semicommutative subrings of matrix rings

I. M. Zilberbord (Russia, Saint Petersburg)
Saint Petersburg State University
e-mail: i.zilberbord@mail.spbu.ru

Основной текст тезисов.

Обобщения коммутативных колец играют заметную роль в теории ассоциативных колец. К настоящему времени известны и достаточно хорошо изучены разнообразные содержательные обобщения понятия коммутативного кольца, в частности, полукоммутативные, центрально полукоммутативные и абелевы кольца.

Один из новых подходов к обобщению некоммутативных колец предпринят индийскими математиками Д. Роем и Т. Субеди в их статье 2020г. ([1]):

Определение 1. *Пусть R — ассоциативное кольцо с 1. R называется обобщенно полукоммутативным (или, кратко, GSC-кольцом), если для любых элементов $a, b \in R$ таких, что $ab = 0$, найдутся натуральные числа m, n, для которых $a^m R b^n = 0$.*

В своём докладе я расскажу о результатах об обобщенно полукоммутативных кольцах, полученных мной совместно с профессором А. И. Генераловым (СПбГУ). Мы дополнили и обобщили некоторые утверждения работы [1], касающиеся GSC-подколец колец матриц над полями, а также предложили способ построения новых GSC-колец. Основная часть наших результатов, о которых будет идти речь в докладе, опубликована в статье [2].

Все рассматриваемые далее кольца — ассоциативные и с единицей.

Теорема 1. *Пусть I —нильпотентный двусторонний идеал кольца S, и пусть R — подкольцо в S такое, что S — прямая сумма R и I (как абелевых групп). Предположим, что идеал I обладает свойством: если $a, b \in R$ и $aRb = 0$, то $aIb = 0$,*

Тогда равносильны следующие утверждения:

(1) R является GSC-кольцом; (2) S является GSC-кольцом.

Приведём следствие из этой теоремы, которое дополняет один из результатов работы [1]. Сформулируем сначала определение, данное в [1].

Определение 2. *Пусть $S_p(R)$ — подкольцо кольца $M_p(R)$, состоящее из матриц вида $A = \alpha E_p + B$, где $\alpha \in R$, а B — строго верхнетреугольная матрица (т.е. $b_{ij} = 0$ при $i > j$).*

Следствие 1. *Пусть $p > 2$. R является GSC-кольцом тогда и только тогда, когда $S_p(R)$ – GSC-кольцо.*

Заметим, что в работе [1] утверждение следствия 1 доказано лишь для $p \leqslant 3$.

Наше следующее утверждение обобщает теорему 2.18 из [1].

Следствие 2. *Пусть M — R-бимодуль, удовлетворяющий условию: если $a, b \in R$ таковы, что $aRb = 0$, то $aMb = 0$. Пусть $T = T(R, M)$ — тривиальное расширение кольца R с помощью M. Тогда равносильны следующие утверждения:*
(1) R является GSC-кольцом; (2) T является GSC-кольцом.

Далее мы ограничимся случаем, когда R является полем, и докажем, что $S_p(R)$ —– максимальное(по включению) GSC-подкольцо матричного кольца $M_p(R)$. Этот результат позволит также построить некоторые другие максимальные GSC-подкольца в кольце $M_p(R)$.

Теорема 2. *Пусть R — поле, p —натуральное число. Тогда $S_p(R)$ — максимальное GSC-подкольцо кольца $M_p(R)$.*

В следующем утверждении мы для данного разбиения $p_1, p_2, \ldots, p_k$ натурального числа p отождествляем кольцо $M_{p_1}(R) \times M_{p_2}(R) \times \ldots \times M_{p_k}(R)$ и подкольцо кольца $M_p(R)$, состоящее из матриц соответствующей блочно—диагональной структуры.

Следствие 3. *Пусть R — поле, $p_1, p_2, \ldots, p_k$ — натуральные числа с суммой, равной p. Тогда $S_{p_1}(R) \times S_{p_2}(R) \times \ldots \times S_{p_k}(R)$ — максимальное GSC-подкольцо кольца $M_p(R)$.*

Замечание 1. *Ясно, что если D — некоторое максимальное GSC-подкольцо кольца $M_p(R)$, то для любой матрицы $C \in \mathrm{GL}_p(R)$ CDC^{-1} — тоже максимальное GSC-подкольцо кольца $M_p(R)$.*

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Рой Д., Субеди Т. Обобщенно полукоммутативные кольца // Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 1. Математика. Механика. Астрономия. 2020. Том 7(65), в.1. С. 91-103.

2. Генералов А. И., Зильберборд И. М. Заметка об обобщенно полукоммутативных кольцах // Записки научных семинаров Санкт-Петербургского отделения математического института им. В.А.Стеклова РАН.2020. Том 492. С. 69-74.

УДК 512.541+512.552

О E-кольцах

М. Н. Зонов (Россия, г. Томск)
Томский государственный университет
e-mail: mat.zonov@yandex.ru
Е. А. Тимошенко (Россия, г. Томск)
Томский государственный университет
e-mail: tea471@mail.tsu.ru

On E-rings

M. N. Zonov (Russia, Tomsk)
Tomsk State University
e-mail: mat.zonov@yandex.ru
E. A. Timoshenko (Russia, Tomsk)
Tomsk State University
e-mail: tea471@mail.tsu.ru

Все встречающиеся в работе группы являются абелевыми.

Кольцо R называют *E-кольцом*, если каждый эндоморфизм аддитивной группы кольца R представляет собой умножение слева на некоторый элемент из R. Кольцо R называют *обобщённым E-кольцом*, если существует какой-либо кольцевой изоморфизм между R и кольцом эндоморфизмов аддитивной группы кольца R. Понятие E-кольца было введено Шульцем в работе [1]. Многие важные свойства E-колец установлены Боушеллом и Шульцем в [2]. Известно, что обобщённое E-кольцо является E-кольцом тогда и только тогда, когда оно коммутативно; для колец, имеющих конечный ранг без кручения, понятия E-кольца и обобщённого E-кольца совпадают.

Пусть n – неотрицательное целое число. Группу G называют *факторно делимой группой ранга n*, если её периодическая часть $T(G)$ редуцированна и существует свободная подгруппа $F \subset G$ ранга n такая, что G/F – делимая периодическая группа.

Естественно называть группу G произвольного ранга без кручения *обобщённой факторно делимой*, если её периодическая часть $T(G)$ редуцированна и сама группа G является расширением свободной группы с помощью делимой периодической группы.

Ранее авторами был построен пример E-кольца, аддитивная группа которого имеет ранг без кручения 2 и не является факторно делимой. Приведём необходимые и достаточные условия для того, чтобы аддитивная группа обобщённого E-кольца была обобщённой факторно делимой.

Теорема 1. *Если аддитивная группа обобщённого E-кольца имеет бесконечный ранг без кручения, то она является обобщённой факторно делимой.*

Через $N(R)$ будем обозначать наибольший нильпотентный идеал кольца R (такой идеал всегда существует, если R – кольцо без кручения конечного ранга).

Теорема 2. *Пусть R – E-кольцо, имеющее периодическую часть T и конечный ненулевой ранг без кручения. Эквивалентны следующие условия*:

1) *Аддитивная группа кольца R факторно делима.*

2) *Аддитивная группа кольца R/T факторно делима.*

3) *Аддитивная группа идеала $N(R/T)$ факторно делима.*

Следующая теорема теорема описывает все группы, которые могут служить аддитивными группами идеала $N(R/T)$ для E-кольца R, имеющего конечный ранг без кручения.

Теорема 3. *Пусть G – группа без кручения конечного ранга. Эквивалентны следующие условия*:

1) *Существует E-кольцо R конечного ранга без кручения такое, что $G \cong N(R/T)$, где T есть периодическая часть кольца R.*

2) *Множество всех простых чисел p таких, что $pG = G$, бесконечно.*

Из теорем 2 и 3 следует, что существует достаточно много E-колец, аддитивные группы которых имеют конечный ранг без кручения и не являются факторно делимыми.

Будем говорить, что кольца R и K *квазиизоморфны*, если существуют подкольца $R' \subset R$ и $K' \subset K$ и натуральные числа m и n такие, что $R' \cong K'$, $mR \subset R'$ и $nK \subset K'$.

Пусть R – произвольное E-кольцо. Обозначим через S множество всех простых чисел p таких, что p-компонента R_p аддитивной группы кольца R отлична от 0. Для всякого $p \in S$ существует кольцевое прямое разложение $R = R_p \oplus R'_p$, причём дополнительное слагаемое R'_p определено однозначно. Записав $r = r_p + r'_p$, где $r_p \in R_p$ и $r'_p \in R'_p$, можно задать кольцевой гомоморфизм

$$\xi \colon R \to \prod_{p \in S} R_p,$$

полагая $\xi(r) = (r_p)_{p \in S}$ для всех $r \in R$. Известно [1], что ядро гомоморфизма ξ представляет собой идеал без кручения

$$A = \bigcap_{p \in S} \bigcap_{n=1}^{\infty} p^n R,$$

а образ гомоморфизма ξ является E-кольцом. В работе Боушелла и Шульца [2] поставлена следующая проблема:

Задача 4. *Верно ли, что всякое E-кольцо R квазиизоморфно прямой сумме кольца $\xi(R)$ и некоторого E-кольца без кручения, содержащего идеал A?*

Проблема была положительно решена Царёвым в работе [3] для E-колец, у которых ранг без кручения не превышает 2. Авторами было построено E-кольцо ранга без кручения 3, служащего контрпримером к вопросу Боушелла и Шульца.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Schultz P. The endomorphism ring of the additive group of a ring // J. Austral. Math. Soc. 1973. Vol. 15, No. 1. P. 60-69.

2. Bowshell R. A., Schultz P. Unital rings whose additive endomorphisms commute // Math. Ann. 1977. Vol. 228, No. 3. P. 197-214.

3. Царёв А. В. E-кольца малых рангов // Чебышевский сборник. 2017. Том 18, № 2. С. 235-244.

УДК 512.541

Абсолютные идеалы групп без кручения конечного ранга

Е. И. Компанцева (Россия, г. Москва)
Финансовый университет при Правительстве РФ, Московский государственный педагогический университет
email: kompantseva@yandex.ru

Absolute ideals of tosion-free groups of finite rank

E. I. Kompantseva (Russia, Moscow)
Financial University under the Government of the RF, Moscow Pedagogical State University
email: kompantseva@yandex.ru

Умножением на абелевой группе G называется гомоморфизм $\mu : G \otimes G \to G$. Абелева группа G с заданным на ней умножением называется кольцом на G. На любой абелевой группе G можно определить умножение $\mu : G \otimes G \to 0$, которое называется нулевым. Если на группе G не существует умножения (ассоциативного умножения), кроме нулевого, то G называется nil-группой (nil_a-группой). Проблема определения кольцевых структур на абелевой группе была поставлена Бьюмонтом [1], который рассматривал кольца на прямых суммах циклических групп.

Под абсолютным идеалом абелевой группы G понимается ее подгруппа, которая является идеалом в любом кольце на G. Изучению абсолютных идеалов абелевых групп посвящены работы [3, 5, 6, 9–14, 17]. В монографии Л. Фукса [7] оформулирована проблема описания абелевых групп, доспускающих кольцевую структуру, в которой любой идеал является абсолютным (проблема 93). Такие группы называются RAI-группами.

Нетрудно видеть, что любая вполне харатеристическая подгруппа абелевой группы является ее абсолютным идеалом. Однако обратное неверно. В [5] Е. Фридом была оформулированна проблема описания абелевых групп, в которых любой абсолютный идеал является вполне характеристической подгруппой. Такие группы называют afi-группами.

Все группы, рассматриваемые в работе, абелевы, и слово «группа» везде в дальнейшем означает «абелева группа».

До настоящего времени RAI-группы и afi-группы были описаны в некоторых классах периодических и смешанных групп [12, 13, 14, 17]. Что касается групп без кручения, в [11] описаны RAI-группы и afi-группы в классе почти вполне разложимых групп с циклическим регуляторным фактором.

В настоящей работе изучаются RAI-группы и afi-группы в классе групп Мерли. В [15, 16] С. Е. Мерли систематически исследовал редуцированные группы без кручения G конечного ранга такие, что p-ранг группы G не превосходит единицы для каждого простого числа p, теперь такие группы называются группами Мерли. Отметим, что Л. Фукс в [8] решил нарушить эту традицию в терминологии, чтобы отдать должное Л. Прохазка, и называет указанные группы группами Прохазка-Мерли. Действительно, исследование груп из этого класса было начато Л. Прохазка [18] за несколько лет до публикации работы С. Е. Мерли [15] более существенными результатами.

Сформулируем некоторые свойства групп Мерли и колец на них.

Теорема 1. *1) В классе групп Мерли понятия изорморфизма и квазиизоморфизма эквивалентны. Следовательно, любая неразложимая группа Мерли строго неразложима [15].*

2) Любая однородная группа Мерли неразложима.

3) Любое умножение на группе Мерли является ассоциативным и коммутативным.

Приведен пример, демонстрирующий, что утверждение, обратное теореме 1(2), неверно.

Следующие две теоремы сводят проблемму изучения RAI-групп и afi-групп в классе групп Мерли к случаю неразложимых групп, не являющихся nil-группами.

Теорема 2. *Пусть G – группа Мерли, $G = G_1 \oplus G_2$. Тогда*

1) Группа G является RAI-группой тогда и только тогда, когда G_i – RAI-группа для каждого $i \in \{1; 2\}$.

2) Группа G является afi-группой тогда и только тогда, когда G_i – afi-группа для каждого $i \in \{1; 2\}$.

Теорема 3. *1) Любая nil-группа является RAI-группой.*

2) nil-группа является afi-группой тогда и только тогда, когда $End\ G \cong \mathbb{Z}$.

Обозначим: $\mathcal{MI}$ класс всех неразложимых групп Мерли (которые в силу теоремы 1 являются сильно неразложимыми), $\mathcal{NIL}$ – класс всех nil-групп.

Для описании групп из $\mathcal{MI} \setminus \mathcal{NIL}$, дадим следующие определения. Согласно [2], группа без кручения G конечного ранга называется факторно делимой, если она имеет свободную подгруппу F такую, что G/F – делимая периодическая группа. Группа G называется сильно однородной [15] если для любых ее сервантных подгрупп A и B ранга 1 существует автомофизм φ группы G такой, что $\varphi(A) = B$. Сильно однородная факторно делимая группа Мерли называется специальной группой. Специальные группы в определенном смысле играют в классе $\mathcal{MI}$ ту же роль, что и группы идемпотентного типа в классе групп без кручения ранга 1. Например, группа $G \in \mathcal{MI}$ является аддитивной группой кольца эндоморфизмов некоторой группы Мерли тогда и только тогда, когда G – специальная группа. Из теоремы 4 следует, что класс специальных групп совпадает с классом $\mathcal{MI} \setminus \mathcal{NIL}$.

Теорема 4. *Пусть $G \in \mathcal{MI}$, тогда следующие условия равносильны*

1. G не является nil-группой.

2. G не является nil_a-группой.

3. G – сильно однородная группа идемпотентного типа.

4. G — специальная группа.

Лемма 1. *Любая специальная группа является RAI-группой и afi-группой.*

Из теорем 3, 4 и леммы 1 получаем описание RAI-групп и afi-групп в классе $\mathcal{MI}$.

Теорема 5. *1) Любая группа $G \in \mathcal{MI}$ является RAI-группой.*

2) Группа $G \in \mathcal{MI}$ является afi-группой тогда и только тогда, когда G – специальная группа или $End\ G \cong \mathbb{Z}$.

В заключение покажем, насколько обширны и разнообразны классы $\mathcal{MI} \cap \mathcal{NIL}$ и $\mathcal{MI} \setminus \mathcal{NIL}$.

Теорема 6. *Пусть t – тип, отличный от $(\infty, \infty, \cdots)$, $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$. Тогда в классе $\mathcal{MI} \cap \mathcal{NIL}$ существует система $\{G_i \mid i \in I\}$, состоящая из $2^{\aleph_0}$ попарно не квазиизоморных однородных групп типа t и ранга n.*

Если тип t не содержит символ ∞, то G_i является afi-группой при каждом $i \in I$.

Если тип t содержит символ ∞, то G_i не является afi-группой при каждом $i \in I$.

Согласно теореме 4 в классе $\mathcal{MI} \setminus \mathcal{NIL}$ любая группа однородна. Чтобы описать возможные типы групп из $\mathcal{MI} \setminus \mathcal{NIL}$, введем следующие обозначения. Пусть P – множество всех простых чисел, $\mathbb{Q}_p^*$ – поле p-адических чисел, t – тип, $f(x)$ – многочлен из $\mathbb{Z}[x]$.

Обозначим: $P_0(t) = \{p \in P \mid t(p) = 0\}$, $P(f) = \{p \in P \mid f(x)$ имеет корень в $\mathbb{Q}_p^*\}$.

Теорема 7. *Пусть $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, t тип, отличный от $(\infty, \infty, \cdots)$. В классе $\mathcal{MI} \setminus \mathcal{NIL}$ специальных групп существует группа G ранга n и типа t тогда и только тогда, когда t – идемпотентный тип и $P_0(t) \subseteq P(f)$ для некоторого неприводимого многочлена $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ степени n.*

В [2] показано, что если $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ и $deg\ f(x) > 1$, то множество $P(f)$ бесконечно. С другой стороны, из [4] следует, что для каждого неприводимого многочлена $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ множество $P \setminus P(f)$ тоже бесконечно. Поэтому в силу теоремы 7 в классе $\mathcal{MI} \setminus \mathcal{NIL}$ не существует групп типа t, если в t почти все компоненты равны 0, в частности, не существует группы типа $t = (0, 0, \cdots)$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Beaumont R. A. Rings with additive groups which is the direct sum of cyclic groups // Duke Math. J. 1948. Vol. 15, №2. P. 367-369.
2. Beaumont R., Pierce R. Torsion free rings // Illinois J. Math. 5 (1961). P. 61–98.
3. Cheklov A. R. On abelian groups, in which all subgroups are ideals // Vestn. Tomsk. Gos. Univ. Mat. Mekh. 2009. №3(7). C. 64-67. (*Russian*)
4. Fjellstedt L. Bemerkungen uber gleichzeitige losbarkeit von Kongruenzen // Arkiv Mat. 1955. Vol 3. №2. P. 193-198.
5. Fried E. On the subgroups of abelian groups that are ideals in every ring // Proc. Colloq. Abelian groups, Budapest, 1964. P. 51-55.
6. Fried E. Preideals in modules // Period. Math. Hung. 1971. Vol. 1. №3. P. 163-169.
7. Fuchs L., Infinite Abelian groups Vol.2, Academic Press, New York and London, 1973.
8. Fuchs L. Abelian groups, Switz.: Springer International Publishing, 2015.
9. Kompantseva E. I. Rings on almost completely decomposable Abelian groups // J. of Mathematical Sciences. 2009. Vol. 163. №6. P. 688-693.
10. Kompantseva E. I. Absolute *nil*-ideals of Abelian Groups // J. of Mathematical Sciences. 2014. Vol. 197. №5. P. 625-634.
11. Kompantseva E. I., Fomin A. A. Absolute ideals of almost completely decomposable abelian groups // Chebyshevskii Sb. 2015. №4 (16). C. 200–211. (*Russian*)
12. Kompantseva E. I., Pham T. T. T. Absolute ideals of algebraically compact Abelian groups // Fundam. Prikl. Mat. 2019. Vol.22. №5. C. 91-114. (*Russian*)

13. McLean K. R. The additive ideals of a p-ring // J. London Math. Soc. 1975. Vol. 2. P. 523-529.

14. McLean K. R. p-ring whose only right ideals are the fully invariant subgroups // Proc. London Math. Soc. 1975. Vol. 3. P. 445-458.

15. Murley C. E. The classification of certain classes of torsion-free abelian groups // Pacisic J. Math. 1972. Vol. 40. P. 647-665.

16. Murley C. E. Direct products and sums of torsion-free abelian groups // Proc. Amer. Math. Soc. 1973. 38. P. 235-241.

17. Pham T. T. T. Torsion abelian afi-groups // Vestn. Tomsk. Gos. Univ. Mat. Mekh. 2011. №4. C. 18-22. (*Russian*)

18. Prochazka L. A note on quasi-isomorphism of torsion abelian groups of finite rank // Czechoslov. Math. J. 1965. 15,. P. 1-8.

УДК 512.552

Метод регулярного множества построения конечных квазиполей[1]

О. В. Кравцова (Россия, г. Красноярск)
Сибирский федеральный университет
e-mail: ol71@bk.ru

Spread set method of finite quasifields construction

O. V. Kravtsova (Russia, Krasnoyarsk)
Siberian Federal University
e-mail: ol71@bk.ru

Алгебраическая система $(Q, +, \cdot)$ с бинарными операциями $+$ и $\cdot$ называется *правым квазиполем*, если

1) $(Q, +)$ — абелева группа;
2) $Q^* = (Q \setminus \{0\}, \cdot)$ — лупа;
3) выполнен правый дистрибутивный закон $(a + b)c = ac + bc$ $(a, b, c \in Q)$;
4) $a \cdot 0 = 0$ для всех $a \in Q$;
5) уравнение $xa = xb + c$ однозначно разрешимо для всех $a, b, c \in Q$, $a \neq b$.

Квазиполя изучаются взаимосвязанно с проективными плоскостями трансляций, исследования восходят к началу 20-го века (О. Веблен, Д. Маклаган–Веддерберн, Л. Диксон). Взаимосвязь обусловлена координатизацией конечной проективной плоскости элементами алгебраической системы, что приводит к зависимости геометрических свойств плоскости от алгебраических свойств координатизирующего множества, и наоборот. Начиная с работ Д. Кнута и Э. Клейнфелда 1960-х годов, исследования конечных квазиполей и ассоциированных плоскостей трансляций систематически используют методы компьютерной алгебры, подробнее [1].

В конечном правом квазиполе Q правое умножение $R_a : x \to xa$ является линейным преобразованием левого векторного пространства Q над его ядром. Все такие преобразования

[1]Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 19-01-00566 А

образуют *регулярное множество* (spread set) R, свойства которого непосредственно связаны со свойствами квазиполя и координатизируемой проективной плоскости трансляций. Так, если регулярное множество R является полем, то Q – также поле и координатизирует дезаргову (классическую) проективную плоскость. Регулярное множество почти-поля (ассоциативного квазиполя) замкнуто относительно умножения, полуполя (дистрибутивного квазиполя) – относительно сложения. Эта зависимость позволяет широко использовать регулярные множества конечных квазиполей для их построения и классификации, в том числе методами компьютерной алгебры, для изучения строения (подквазиполя и подполя, порядки элементов, автоморфизмы и автотопизмы).

Дополнительные ограничения на квазиполе, связанные, например, с геометрическими свойствами координатизируемой плоскости трансляций, позволяют строить матричное представление регулярного множества и решать вопросы существования. С помощью метода регулярного множества автором доказано, в частности, что проективная плоскость, координатизируемая конечным полуполем, не может допускать группы коллинеаций (автоморфизмов) определенного строения [2, 3]. Эти результаты дают продвижение в решении известной проблемы Хьюза о разрешимости полной группы коллинеаций конечной недезарговой полуполевой плоскости.

В отличие от конечных почти-полей, полностью классифицированных Х. Цассенхаузом в 1936 г., ни полуполя, ни тем более квазиполя не получили к настоящему времени исчерпывающей классификации. Одними из наиболее изученных являются квазиполя с ассоциативными степенями. Будем называть квазиполе Q *квазиполем Муфанг*, если Q^* есть *лупа Муфанг*, то есть для всех $x, y, z \in Q^*$ выполняется одно из эквивалентных тождеств:

$$(xy)(zx) = (x(yz))x, \qquad ((xy)z)y = x(y(zy)), \qquad x(y(xz)) = ((xy)x)z.$$

Известно [4, 5], что на лупы Муфанг переносятся некоторые из теоретико-групповых результатов: теорема Лагранжа, теорема Силова и другие. Возникает естественный вопрос (А.В. Заварницин, Мальцевские чтения, 2020):

Существуют ли неассоциативные конечные квазиполя Муфанг?

Применение метода регулярного множества к решению данного вопроса приводит к следующему результату.

Теорема 1. *Не существует неассоциативных квазиполей Муфанг порядка 25.*

Примененный метод позволил избежать компьютерного перебора всех квазиполей порядка 25 с проверкой выполнения тождеств Муфанг. Для доказательства существенно использованы структурные результаты О.Чейна [6] для луп Муфанг порядка 24, поэтому метод не переносится на другие порядки непосредственно. Тем не менее, метод регулярного множества представляется перспективным для решения вопроса существования квазиполей Муфанг – положительного либо отрицательного.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Johnson N. L., Jha V., Biliotti M. Handbook of finite translation planes. — Chapman and Hall, Boca Raton, London, New York, 2007, 861 p.

2. Кравцова О. В., Дураков Б. К. Полуполевые плоскости нечетного порядка, допускающие подгруппу автотопизмов, изоморфную A_5 // Сиб. матем. журн. 2018. Том 59, № 2. С. 396-411.

3. Kravtsova O. V. Elementary abelian 2-subgroups in an autotopism group of a semifield projective plane // Известия Иркутского государственного университета. Серия «Математика». 2020. Том 32. С. 49–63.

4. Grishkov A. N., Zavarnitsine A. V. Lagrange's theorem for Moufang Loops // Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 2005. Vol. 139, № 1. P. 41–57.

5. Grishkov A. N., Zavarnitsine A. V. Sylow's theorem for Moufang loops // Journal of Algebra. 2009. Vol. 321, Iss. 7. P. 1813–1825.

6. Chein O. Moufang loops of small order // Transactions of the American mathematical society. 1974. Vol. 188, Iss. 2. P. 31–51.

УДК 512.552.7

О длине коммутативных групповых алгебр в модулярном случае[1]

О. В. Маркова (Россия, г. Москва)
Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
e-mail: ov_markova@mail.ru

On the length of commutative group algebras in the modular case

O. V. Markova (Russia, Moscow)
Lomonosov Moscow State University
e-mail: ov_markova@mail.ru

Представленные в данном сообщении результаты получены коллективом авторов: **А. Э. Гутерман, О. В. Маркова, М. А. Хрыстик** (Москва).

Определение 1 ([1]). Длиной конечной системы $\mathcal{S}$ порождающих *конечномерной ассоциативной алгебры* $\mathcal{A}$ *над произвольным полем называется наименьшее натуральное число* $l(\mathcal{S})$, *такое что слова длины не большей* $l(\mathcal{S})$ *порождают данную алгебру как векторное пространство.* Длиной алгебры *называется максимум длин её систем порождающих, обозначим её* $l(\mathcal{A})$.

Длина является важной числовой характеристикой алгебры, трудность вычисления которой даже для классических алгебр обусловлена необходимостью рассмотрения всех систем образующих в данной алгебре.

Общая задача исследования связи функции длины с другими характеристиками алгебры была впервые поставлена К. Паппаченой в [1]. В частности, получена следующая нетривиальная верхняя оценка длины произвольной ассоциативной алгебры:

Теорема 1 ([1]). *Пусть* $\mathcal{A}$ *— конечномерная ассоциативная алгебра с* 1 *над произвольным полем* $\mathbb{F}$. *Положим* $d = \dim \mathcal{A}$, $m = \max\{\deg \mu_a(t) : a \in \mathcal{A}\}$. *Тогда*

$$l(\mathcal{A}) < m\sqrt{\frac{2d}{m-1} + \frac{1}{4}} + \frac{m}{2} - 2.$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РНФ 17-11-01124.

Результаты в этом направлении для коммутативных алгебр были получены автором в [2].

Теорема 2 ([2]). *Пусть $\mathcal{A}$ — конечномерная ассоциативная коммутативная алгебра с 1 над произвольным полем $\mathbb{F}$. Положим $d = \dim \mathcal{A}$, $m = \max\{\deg \mu_a(t) : a \in \mathcal{A}\}$. Тогда*

$$l(\mathcal{A}) \leq g(d,m) := (m-1)[\log_m d] + [m^{\{\log_m d\}}] - 1.$$

Верхнюю оценку длины алгебры также можно получить с помощью вычисления длины её фактор-алгебры по радикалу Джекобсона и индекса нильпотентности радикала.

Теорема 3 ([3]). *Пусть $\mathbb{F}$ — произвольное поле и $\mathcal{A}$ — $\mathbb{F}$-алгебра. Через $N = N(J(\mathcal{A}))$ обозначим индекс нильпотентности радикала Джекобсона $J(\mathcal{A})$ алгебры $\mathcal{A}$. Тогда*

$$l(\mathcal{A}) \leq (l(\mathcal{A}/J(\mathcal{A})) + 1)N - 1.$$

В докладе будут представлены результаты работ [5],[6] о длине групповых алгебр абелевых групп в модулярном случае, т.е. когда характеристика поля делит порядок группы. Основные результаты получены с использованием теорем 2 и 3. Для вычисление индекса нильпотентности радикала Джекобсона групповой алгебры мы используем *теорию Дженнингса* [4].

Для длины групповой алгебры $\mathbb{F}G$ конечной группы G справедлива тривиальная верхняя оценка $l(\mathbb{F}G) \leq |G| - 1$; более того $l(\mathbb{F}G) = |G| - 1$ тогда и только тогда, когда алгебра $\mathbb{F}G$ является однопорождённой.

Очевидно выполнена:

Лемма 1. *Пусть $\mathbb{F}$ — произвольное поле и пусть G — конечная циклическая группа. Тогда $l(\mathbb{F}G) = |G| - 1$.*

Для произвольной конечной абелевой p-группы длину её групповой алгебры удалось вычислить явно:

Теорема 4 ([5]). *Пусть $\mathrm{char}\mathbb{F} = p > 0$. Пусть $m \in \mathbb{N}$ и G — конечная абелева p-группа, содержащая a_i копий $\mathbb{Z}_{p^i}$ в разложении на примарные циклические, где $a_1, \ldots, a_{m-1} \in \mathbb{Z}_+, a_m \in \mathbb{N}$. Тогда*

$$l(\mathbb{F}G) = \sum_{i=1}^{m} a_i(p^i - 1).$$

Следствие 1. *Пусть $\mathrm{char}\mathbb{F} = p > 0$ и G — конечная абелева p-группа. Тогда алгебра $\mathbb{F}G$ является однопорождённой тогда и только тогда, когда группа G — циклическая.*

Для длины групповой алгебры произвольной абелевой группы в модулярном случае получены точные верхние и нижняя оценки:

Теорема 5 ([5]). *Пусть $\mathrm{char}\mathbb{F} = p > 0$. Пусть G — конечная абелева группа порядка $|G| = p^t \cdot m$, $(m,p) = 1$ разложенная в прямое произведение $G \cong H \times P$, где P — p-группа, $|H| = m$. Тогда*

$$l(\mathbb{F}P) + l(\mathbb{F}H) \leq l(\mathbb{F}G) \leq \min\{|H| \cdot (l(\mathbb{F}P) + 1) - 1, g(|G|, m(\mathbb{F}G))\}.$$

Верхняя оценка в последней теореме совпадает с тривиальной границей $|G| - 1$ тогда и только тогда, когда $l(\mathbb{F}P) = |P| - 1$, что возможно только для циклической группы P. Оказывается, что при дополнительном условии на поле коэффициентов, эта оценка даёт точное значение длины:

Теорема 6 ([5]). *Пусть $m \in \mathbb{N}$ и $\mathbb{F}$ — совершенное поле характеристики $p > 0$, $|\mathbb{F}| \geq m$ и $(m, p) = 1$. Пусть G — конечная абелева группа, разложенная в прямое произведение $G \cong H \times P$, где P — циклическая p-группа, $|H| = m$. Тогда алгебра $\mathbb{F}G$ является однопорождённой и $l(\mathbb{F}G) = |G| - 1$.*

В работе [6] предложен другой подход к вычислению длин групповых алгебр. Показано, что в данном случае можно применить технику вычисления длины двублочных матричных алгебр, разработанную автором ранее в [7]. С помощью данного метода вычислена длина групповой алгебры нециклической абелевой группы порядка $2p^2$, $p > 2$ — простое число, над полем характеристики p, а именно доказано, что длина данной алгебры равна $3p - 2$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Pappacena C. J. An upper bound for the length of a finite-dimensional algebra // J. Algebra. 1997. V. 197. P. 535–545.
2. Маркова О. В. Верхняя оценка длины коммутативных алгебр // Матем. сб. 2009. Том 200, № 12. С. 41–62.
3. Маркова О. В. О связи длины алгебры и индекса нильпотентности ее радикала Джекобсона // Матем. заметки 2013. Том 94, № 5. С. 682–688.
4. Passman D. S. The Algebraic Structure of Group Rings. — Wiley, New York, 1977.
5. Guterman A. E., Markova O. V., Khrystik M. A. On the lengths of group algebras of finite abelian groups in the modular case // J. Algebra Appl. 2022. P. 2250117–2250130.
6. Маркова О. В. Пример вычисления длины групповой алгебры нециклической абелевой группы в модулярном случае // Фундамент. и прикл. матем. 2020. Том 23. № 2. С. 217–229.
7. Маркова О. В. Функция длины и матричные алгебры // Фундамент. и прикл. матем. 2012. Том 17. № 6. С. 65–173.

УДК УДК 512.55+512.545

Интерполяционные псевдоупорядоченные кольца[1]

А. В. Михалев (Россия, г. Москва)
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
e-mail: aamikhalev@mail.ru
Е. Е. Ширшова (Россия, г. Москва)
Московский педагогический государственный университет
e-mail: shirshova.elena@gmail.com

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Гранта Московского центра фундаментальной и прикладной математики МГУ "Структурная теория и комбинаторно-логические методы в теории алгебраических систем"

Interpolation pseudo-ordered rings

A. V. Mikhalev (Russia, Moscow)
Lomonosov Moscow State University
e-mail: aamikhalev@mail.ru
E. E. Shirshova (Russia, Moscow)
Moscow Pedagogical State University
e-mail: shirshova.elena@gmail.com

Пусть $R =< R, +, \cdot >$ – произвольное кольцо (не обязательно ассоциативное).
Если $< R, +, \leqslant >$ является частично упорядоченной группой, то R принято называть:

частично упорядоченным кольцом, если выполняется условие

(1) из $a \leqslant b$ и $0 < c$ следуют неравенства $ac \leqslant bc$ и $ca \leqslant cb$ для всех $a, b, c \in R$;

частично псевдоупорядоченным кольцом (см.[1]), если выполняется условие:

(2) если $0 \leqslant a$ в $< R, +, \leqslant >$, то $ab \leqslant a$ и $ba \leqslant a$ для любого $b \in R$.

Частично упорядоченная группа называется *направленной*, если любые два элемента имеют в этой группе верхнюю грань.

Если группа $< R, +, \leqslant >$ частично псевдоупорядоченного кольца R является направленной (линейно упорядоченной), то R называется *направленно (линейно) псевдоупорядоченным кольцом*.

Следует отметить, что *частично псевдоупорядоченное кольцо R не может содержать единицу*.

Часто условию (2) удовлетворяют аддитивные группы колец без единицы (колец Ли, йордановых колец, например).

Первоначально свойства линейно псевдоупорядоченных колец исследовались в работах [2, 3]. Изначально эти кольца были названы частично $\mathcal{K}$-упорядоченными, так как данное упорядочение колец согласуется с определением частично упорядоченной алгебры Ли, принадлежащим В.М. Копытову [4].

Алгебра Ли $L =< L, +, \{\alpha |\ \alpha \in F\}, \cdot >$ над частично упорядоченным полем F называется *частично упорядоченной алгеброй Ли*, если $< L, +, \leqslant >$ является частично упорядоченной группой, удовлетворяющей одновременно условиям:

из $a \leqslant b$ следует $\alpha a \leqslant \alpha b$ для всех $a, b \in L$ и $\alpha > 0$ из поля F;

(3) если $a \leqslant b$, то $a + ac \leqslant b + bc$ для всех элементов $a, b, c \in L$.

Сравнив условия (2) и (3), можно сделать вывод, что частично упорядоченная алгебра Ли L является частично псевдоупорядоченным кольцом.

В работе [5] характеризуется аналог первичного радикала в подклассе направленно псевдоупорядоченных колец.

Подгруппа M частично упорядоченной группы G называется *выпуклой*, если для любых элементов $a, b \in M$ и $g \in G$ из неравенств $a \leqslant g \leqslant b$ всегда следует $g \in M$.

Идеал I частично псевдоупорядоченного кольца $R =< R, +, \cdot, \leqslant >$ называется *выпуклым*, если группа $< I, +, \leqslant >$ является выпуклой подгруппой аддитивной группы $< R, +, \leqslant >$.

Пусть R – частично псевдоупорядоченное кольцо.

Будем обозначать символом R^+ множество $\{x \in R |\ 0 \leqslant x\}$ всех положительных элементов кольца R.

Отображение f частично псевдоупорядоченного кольца R в частично псевдоупорядоченное кольцо S называется *о-гомоморфизмом (порядковым гомоморфизмом) псевдоупорядоченных колец*, если выполняются условия:

1) $f(a+b) = f(a) + f(b)$ для всех $a, b \in R$;

2) $f(ab) = f(a)f(b)$ для всех $a, b \in R$;

3) $f(R^+) \subseteq S^+$.

При этом, f называется *строгим о-гомоморфизмом псевдоупорядоченных колец*, если выполняется условие

4) $f(R^+) = S^+ \cap f(R)$.

Если для o-гомоморфизма колец f существует o-гомоморфизм колец f^{-1}, то f называется *о-изоморфизмом псевдоупорядоченных колец.*

Отметим, что *если f – о-гомоморфизм псевдоупорядоченных колец, являющийся изоморфизмом колец, то он не обязан быть о-изоморфизмом.*

Например, пусть R – кольцо верхнетреугольных матриц над кольцом $\mathbb{Z}$.

Будем обозначать матрицу $\begin{pmatrix} 0 & a & c \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = (a, b, c)$.

Рассмотрим частично псевдоупорядоченное кольцо $S = R$, где $(a, b, c) \in S^+$, если $0 < a, 0 < b$, или $a = b = 0$ и $0 \leqslant c$, и частично псевдоупорядоченное кольцо $T = R$, где $(a, b, c) \in T^+$, если $0 < a$, или $0 < b$, или $a = b = 0$ и $0 \leqslant c$.

Определим функцию $f : S \to T$ по правилу: $(a, b, c)f = (a, b, c)$. Тогда f – изоморфизм колец.

Кроме того, $f(S^+) \subset T^+$, т.е. f – o-гомоморфизм псевдоупорядоченных колец.

С другой стороны, матрица $(2, -1, 1) \in T^+$, но ее прообраз $(2, -1, 1)f^{-1} \parallel (0, 0, 0)$ в кольце S.

Следовательно, f^{-1} не является o-гомоморфизмом псевдоупорядоченных колец.

Теорема 1 ([5]). *Если $f : R \to S$ – строгий о-гомоморфизм частично псевдоупорядоченных колец, то существует о-изоморфизм частично псевдоупорядоченных колец $\varphi : R/\ker f \to f(R)$, где $\varphi(r + \ker f) = f(r)$ для всех $r \in R$.*

Заметим, что для произвольных частично псевдоупорядоченных колец справедливы не все аналоги теорем об изоморфизмах для колец.

Например, рассмотрим в частично псевдоупорядоченном кольце $P = R$, где $(a, b, c) \in P^+$, если $0 \leqslant a, 0 < b$, или $a = b = 0$ и $0 \leqslant c$, выпуклые идеалы

$$A = \{(a, 0, c)\}, \qquad B = \{0, b, c)\}, \qquad C = A \cap B.$$

При этом, факторкольцо A/C упорядоченно тривиально, а P/B – линейно псевдоупорядоченное кольцо.

Учитывая вышесказанное, для доказательства некоторых следствий из теоремы 1 (второй и третьей теорем об o-изоморфизмах псевдоупорядоченных колец) нам пришлось рассмотреть более узкий класс частично псевдоупорядоченных колец.

Напомним, что частично упорядоченная группа G называется *интерполяционной группой*, если для любых элементов $a_1, a_2, b_1, b_2 \in G$ из неравенств $a_1, a_2 \leqslant b_1, b_2$ следует существование элемента $c \in G$, для которого верны неравенства $a_1, a_2 \leqslant c \leqslant b_1, b_2$. Класс интерполяционных групп включает классы решеточно упорядоченных групп, линейно упорядоченных групп и групп Рисса.

Частично псевдоупорядоченное кольцо $R =< R, +, \cdot, \leqslant >$ будем называть *интерполяционным псевдоупорядоченным кольцом*, если аддитивная группа $R =< R, +, \leqslant >$ является интерполяционной группой.

Справедливы следующие утверждения.

Теорема 2. *Пусть R – интерполяционное псевдоупорядоченное кольцо, I и J – выпуклые направленные идеалы в кольце R, $I \subset J$. Тогда существует o-изоморфизм интерполяционного псевдоупорядоченного кольца R/J на интерполяционное псевдоупорядоченное кольцо $R/I/J/I$.*

Теорема 3. *Пусть R – интерполяционное псевдоупорядоченное кольцо, I и J – выпуклые направленные идеалы в кольце R. Тогда:*

1) существует строгий o-гомоморфизм интерполяционного псевдоупорядоченного кольца $I(J)$ на интерполяционное псевдоупорядоченное кольцо $I + J/J(I + J/I)$ с ядром $I \cap J$;

2) интерполяционное псевдоупорядоченное кольцо $I/I \cap J(J/I \cap J)$ o-изоморфно интерполяционному псевдоупорядоченному кольцу $I + J/J(I + J/I)$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Михалев А. В., Ширшова Е. Е. Упорядоченные неассоциативные алгебраические структуры.// XV Международная конференция "Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы и приложения посвященная столетию доктора физико-математических наук, профессора Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова Коробова Николая Михайловича.: тезисы докладов международной конференции (Тула, 28-31 мая 2018 г.). — Тула, 2018. С. 46-47.

2. Бибаева В. Н., Ширшова Е. Е. О линейно K-упорядоченных кольцах.// Фундаментальная и прикладная математика. 2011/2012. Том 17, № 4. С. 13-23.

3. Ширшова Е. Е. О частично K-упорядоченных кольцах.// Фундаментальная и прикладная математика. 2016. Том 21, № 1. С. 225-239.

4. В.М. Копытов. Решеточно упорядоченные группы. – М.: Наука, 1984. 320 с.

5. А.В. Михалев, Е.Е. Ширшова. Первичный радикал направленных псевдоупорядоченных колец.// Фундаментальная и прикладная математика. 2019. Том 22, № 4. С. 147-166.

УДК 512.55+512.545

Нетеровость и центральные элементы алгебр, близких к алгебрам Новикова[1]

К. М. Туленбаев (Казахстан, г. Алматы)
Университет им. С. Демиреля
e-mail: tulen75@hotmail.com

Noetherianity and central elements of algebras close to Novikov algebras

K. M. Tulenbaev (Kazakhstan, Almaty)
Suleyman Demirel University
e-mail: tulen75@hotmail.com

1. Introduction

David Hilbert proved in 1890 the theorem on basis for ring of polynomials $A = C[x_1, \cdots, x_n]$. It states that any ideal in $C[x_1, \cdots, x_n]$ is finitely generated [4].

Definition.A is weakly Noetherian algebra iff any two-sided ideal of A is finitely generated.

We will follow to original formulation of Hilbert of his theorem on basis. We will say that Hilbert theorem on basis is true for free nonassociative algebra $A = C < x_1, \ldots, x_n >$ with nonassociative identities if any ideal of $A = C < x_1, \ldots, x_n >$ is finitely generated. So natural question arises: for what nonassociative algebras Hilbert theorem on basis is true? In given article we give negative answer on this question for close to Novikov algebras.

Novikov algebras were appeared in work [2] as formalism, describing Hamiltonian criteria for operators of defined type. In article [1] Novikov algebras were introduced for studying Lie algebras, appeared from Poisson brackets of hydrodynamical type. Theoretical aspects of Novikov algebras theory were given in [7]. Zelmanov proved, that if A is a left-nilpotent finite-dimensional Novikov algebra over field of char 0, then A^2 is a nilpotent algebra [3]. Author of this article jointly with A. S. Dzhumadil'daev proved Engel theorem for Novikov algebras in [5]

2. Counterexample for Novikov algebras

Let $A = (A, \circ)$ be an algebra, with A a vector space over a field K of characteristic $p \geqslant 0$ and $A \times A \to A$, $(a, b) \mapsto a \circ b$, a multiplication. An algebra A is called *Novikov* [1], [2], [7], if

$$a_1 \circ (a_2 \circ a_3) - (a_1 \circ a_2) \circ a_3 = a_1 \circ (a_3 \circ a_2) - (a_1 \circ a_3) \circ a_2,$$

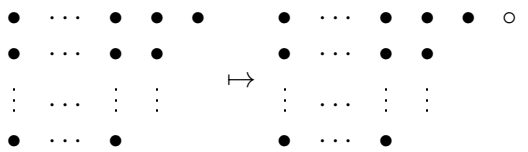
$$a_1 \circ (a_2 \circ a_3) = a_2 \circ (a_1 \circ a_3),$$

for any $a_1, a_2, a_3 \in A$.

Let us remain, that Young diagram is (we denote them bullet) with non-decreasing number of cells in every row. Rows and columns are numerated from up to below and from left to right. Let n be the number of rows and r_i the number of cells in i-th row. General number of cells is $r_1 + \cdots + r_n$, and called the order of Young diagram.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке гранта AP08855944-OT-20 МОН РК

In order to create Novikov diagram, we will add to Young diagram "nose". It means we are adding one else cell tj the first row.



Number of cells in Novikov diagram is called its order. So, difference between the orders of Novikov diagram and corresponding Young diagram is equal to 1.

Let us take some alphabet (ordered set) Ω. It is necessary to fill Novikov diagram by elements from Ω to create Novikov element from Ω. We denote $a_{i,j}$ element from Ω in chain (i,j), at the intersection of i-th row and j-th column. The rule of filling is following:

- $a_{i,1} \geqslant a_{i+1,1}$, if $r_i = r_{i+1}, i = 1,2,\ldots,n-1$.
- sequence

$$a_{n,2}\cdots a_{n,r_n}a_{n-1,2}\cdots a_{n-1,r_{n-1}}\cdots a_{1,2}\cdots a_{1,r_1}$$

  is non-decreasing.

In particular, all cells, starting with second place in every row are filled by non-decreasing elements. Let us denote by R_n set of Novikov elements Ω.

Let $F(\Omega)$ be free Novikov algebra, generated by Ω. $F_n(\Omega)$ is subspace, generated by basis elements of degree n. Corresponding Novikov table

$$\begin{array}{ccccccc} a_{1,1} & \cdots & \cdots & a_{1,r_1-1} & a_{1,r_1} & a_{1,r_1+1} \\ a_{2,1} & \cdots & a_{2,r_2-1} & a_{2,r_2} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,r_n} \end{array}$$

element

$$X = X_n \circ (X_{n-1} \circ (\cdots \circ (X_2 \circ X_1)\cdots))$$

(rightnormed product), where

$$X_i = (\cdots((a_{i,1} \circ a_{i,2}) \circ a_{i,3})\cdots \circ a_{i,r_i-1}) \circ a_{i,r_i+\delta_{i,1}}$$

(leftnormed product). All basis elements of free Novikov algebra $F(\Omega)$ are obtaining by this way.

Theorem 1. Let $A = C < x_1,\ldots,x_n >$ be a free Novikov algebra on n variables. Then A is not weakly Noetherian algebra.

Proof. It is enough to check the statement for $A = C < x >$ free Novikov algebra on one variable. As counterexample to Hilbert theorem on basis we take ideals I_n, generated by elements $y_1, \cdots, y_n$, where $y_n = (((x \circ x) \circ \cdots) \circ x) \circ (((x \circ x) \circ \cdots) \circ x)$ in the first multiplier we take x n times and in the second multiplier $n+2$ times correspondingly. Let us prove that y_{n+1} does not lie in I_n. It is easy to see that $\forall z \in A$ $z \circ y_i$ where $i \leq n$ has neck greater than neck of y_{n+1}. As for $y_i \circ z$. If $z \neq x$ we have also neck of $y_i \circ z$ greater than neck of y_{n+1}. So we must consider case $z = x$ and y_n. By RSym identity

$$y_n \circ z = ((((x \circ x) \circ \cdots) \circ x) \circ (((x \circ x) \circ \cdots) \circ x)) \circ x =$$

$$(((x \circ x) \circ \cdots) \circ x)(\circ(((x \circ x) \circ \cdots) \circ x)) \circ x) +$$

$$((((x \circ x) \circ \cdots) \circ x) \circ x) \circ (((x \circ x) \circ \cdots) \circ x) -$$

$$((((x \circ x) \circ \cdots) \circ x) \circ (x \circ (((x \circ x) \circ \cdots) \circ x))$$

By LCom identity

$$y_n \circ z = ((((x \circ x) \circ \cdots) \circ x) \circ (((x \circ x) \circ \cdots) \circ x)) \circ x =$$

$$(((x \circ x) \circ \cdots) \circ x)(\circ(((x \circ x) \circ \cdots) \circ x)) \circ x) +$$

$$((((x \circ x) \circ \cdots) \circ x) \circ x) \circ (((x \circ x) \circ \cdots) \circ x) -$$

$$x \circ ((((x \circ x) \circ \cdots) \circ x) \circ (((x \circ x) \circ \cdots) \circ x))$$

For the first member difference is 3 when for y_{n+1} difference is 2. For other two elements necks are greater then neck of y_{n+1}. So y_{n+1}does not lie in I_n

3. Counterexample for Close to Novikov algebras

Close to Novikov algebras were introduced by A. S. Dzhumadil'daev and are given by identities $a \circ (b \circ c) = b \circ (a \circ c)$ and $(a \circ b - b \circ a) \circ c = 0$

In Close to Novikov algebras base elements can be formed by elements that are right-bracketed products of left-bracketed elements as for Novikov algebras but with different rule of filling and multiplication.

It is easy to check that left annihilator is $[A, A]$.

Lemma 1. Let $A = C < x_1, \ldots, x_m >$ be free close to Novikov algebra on $m \geq 2$ variables. Then A has no central elements.

Theorem 2. Let $A = C < x_1, \ldots, x_m >$ be free close to Novikov algebra on $m \geq 2$ variables. Then A is not weakly Noetherian.

This publication is supported by the grant AP08855944-OT-20 from the Ministry of Science and Education of the Republic of Kazakhstan.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. A.A. Balinskii, S.P. Novikov, *Poisson bracket of hamiltonian type, Frobenius algebras and Lie algebras,* Dokladu AN SSSR, **283**(1985), No.5, 1036-1039.

2. I.M. Gelfand, I.Ya. Dorfman, *Hamiltonian operators and related algebraic structures,* Funct. Anal. Prilozhen. **13**(1979), No. 4, 13-30= engl.transl. Funct. Anal. Appl. **13**(1979), 248-262.

3. E.I. Zelmanov, *A class of local translation-invariant Lie algebras,* Dokl. Akad. Nauk SSSR, **292**(1987), no. 6, 1294–1297= engl. transl. Soviet Math.Dokl, **35**(1987), 216-218.

4. Hilbert D. "Ueber die Theorie der algebraischen Formen"// Mathematische Annalen,1890, 36 (4), P.473–534.

5. Dzhumadil'daev A.S., Tulenbaev K.M. Engel theorem for Novikov algebras // Comm. Algebra, 2006,v.34, No.3, P.883–888.

6. Dzhumadil'daev A.S., Lofwall C. Trees, free right-symmetric algebras, free Novikov algebras and identities // Homology,Homotopy and Appl., 2002, V.4, No.2(1), P.165–190.

7. J.M. Osborn, *Novikov algebras,* Nova J. Algebra Geom., **1**(1992), 1-14.

Секция 4. Прикладная и компьютерная алгебры, криптография и дискретная математика

УДК 519.716

О рациональных A-функциях с рациональными коэффициентами

Н. Ф. Алексиадис (Россия, г. Москва)
Национальный исследовательский университет «МЭИ»
e-mail: aleksiadis@yandex.ru

Rational A-functions with rational coefficients

N. Ph. Aleksiadis (Russia, Moscow)
National Research University "MPEI"
e-mail: aleksiadis@yandex.ru

В настоящей работе исследуется проблема полноты (и, в частности, полные системы, состоящих из одной функции) для функциональной системы рациональных функций с рациональными коэффициентами, которая играет ключевую роль не только в самой дискретной математике и математической кибернетике, но и во многих других областях математики, например, в теории функций (аппроксимационные теоремы Чебышева и Вейерштрасса), в вычислительной математике и технике (построение и анализ вычислительных чипов и нейронных сетей). Актуальность полученных результатов также состоит и в развитии самой теории функциональных систем как в плане охвата новых модельных объектов типа рациональных функций, так и в вычислении позитивных результатов типа существования A-функции, а также в отсечении негативных ситуаций, когда указанной функции нет.

При изложении материала в основном используется терминология книг [1] и [2]. Несмотря на то, что при изложении материала мы используем стандартные обозначения и общеизвестные понятия дискретной математики (в частности, теории функциональных систем), с целью корректного понимания изложенного все-таки следует уточнить некоторые "моменты".

Функциональная система (ф.с.) $\mathbf{F}$ — это пара вида $\mathbf{F} = (F, O)$, где F — множество функций, а O множество операций над функциями из F, при этом каждая операция из O замкнута относительно множества F.

Для произвольного подмножества A множества F обозначим через $[A]$ множество всех функций из F, которые получаются из функций множества A с помощью конечного числа применения операций из O. Множество $[A]$ называется *замыканием множества* A.

Множество $A\,(A \subseteq F)$ называется *замкнутым* в функциональной системе $\mathbf{F}$, если $[A] = A$.

Замкнутое множество принято называть *замкнутым классом*.

Множество $A\,(A \subseteq F)$ называется *полным* в функциональной системе $\mathbf{F}$, если $[A] = F$.

Полное множество принято называть *полной системой*.

Функциональной система $\mathbf{F}$ называется *конечно-порожденной*, если в $\mathbf{F}$ существует конечная полная система.

$\mathbf{F} = (F, O)$ называется *функциональной системой счетной мощности*, если F счетное множество.

Проблематика теории функциональных систем обширна. Одной из основных проблем является *проблема полноты, состоящая в описании всех подмножеств A множества функций F, которые являются полными в ф.с. $\boldsymbol{F}$, т.е.* $[A] = F$.

Функция $f \in F$ называется *A-функцией*, если система $\{f\}$ является полной. Другими словами, функция $f \in F$ называется *A-функцией*, если из этой одной функции можно получить все функций из F с помощью конечного числа применения операций из O. [1]

Целью настоящей работы является исследование задачи об $A-$функциях:

- *существует ли $A-$функция*?
- *найти число $A-$функций*;
- *найти конкретные $A-$функции.*

Введем несколько стандартных обозначений, необходимых для дальнейшего изложения.

N — множества всех натуральных (включая 0).

Q — множества всех рациональных чисел.

c_0 — мощность счетного множества.

$\equiv$ — обозначим, по определению, тождественно равно.

Для удобства изложения полагаем, что $0^0 = 1$.

Выражение вида $cx_1^{k_1}x_2^{k_2}\dots x_n^{k_n}$, где $n, k_1, k_2, \dots, k_n \in N$, а $c \in Q$ называется *мономом с рациональным коэффициентом*, зависящим от n переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$; при этом, когда $n = 0$, тогда заданный моном является просто константой c, т.е. мономом с рациональным коэффициентом, зависящим от 0-го числа переменных.

Конечная сумма мономов с рациональными коэффициентами называется *полиномом с рациональными коэффициентами.*

Функция вида

$$f(x_1, \dots, x_n) = \frac{g(x_1, \dots, x_n)}{h(x_1, \dots, x_n)},$$

где $g(x_1, \dots, x_n)$ и $h(x_1, \dots, x_n)$ — полиномы с рациональными коэффициентами, при этом $h(x_1, \dots, x_n) \not\equiv 0$, называется *рациональной функцией с рациональными коэффициентами.*

Рациональные функции с рациональными коэффициентами будем называть также *$rq-$функциями.*

Обозначим через F_{RQ} множество всех рациональных функций с рациональными коэффициентами.

Следует отметить, что в определении рациональной функции с рациональными коэффициентами фразу "полиномы с рациональными коэффициентами" можно заменить на "полиномы с целыми коэффициентами".

Ну, пришло время определить основной объект нашего исследования — функциональная система рациональных функций с рациональными коэффициентами.

Функциональная система рациональных функций с рациональными коэффициентами $\mathbf{F}_{RQ}$ — это пара $\mathbf{F}_{RQ} = (F_{RQ}, O)$, где F_{RQ} — множество всех рациональных функций с рациональными коэффициентами, а O — множество операции суперпозиции. Операции суперпозиции включают в себя перестановку переменных, переименования переменных (без отождествления), отождествления переменных, введение фиктивной переменной, удаление фиктивной переменной, подстановку одной функции в другую.

Заметим, что это определение функциональной системы $\mathbf{F}_{RQ} = (F_{RQ}, O)$ корректное, так как любая суперпозиция функций из F_{RQ} является опять функцией из F_{RQ}.

[1] Раньше автор этой статьи вместо термина "А-функция" употреблял термин "универсальная функция". Но после того, как начал исследовать функциональную систему рекурсивных функций, а как известно в теории рекурсивных функций термин "универсальная функция" уже существует, он хорошо известен и по содержанию имеет другой смысл, то логично ввести новый термин (что и было сделано, например, в статьях [3] и [4]).

Теорема 1. *В функциональной системе* $\mathbf{F}_{RQ}$ *система функций*

$$\{1, x-y, xy, \frac{x}{y}(y \neq 0)\}$$

является полной системой.

Доказательство. Обозначим через

$$B = \{1, x-y, xy, \frac{x}{y}(y \neq 0), \}$$

а через

$$f(x,y) \equiv x-y, g(x,y) \equiv xy, h(x,y) \equiv \frac{x}{y}.$$

Сначала получим все константы из Q. Имеем

$$f(x,x) = 0; i(x) \equiv f(0,x) = -x;$$

$$f_1(x,y) \equiv f(x,i(y)) = x+y;$$

$$f_1(1,1) = 2, f_1(1,2) = 3, f_1(1,3) = 4, \ldots$$

$$i(1) = -1, i(2) = -2, i(3) = -3, \ldots$$

Итак, мы получили все целые числа. Из этих чисел и функции $h(x,y)$ с помощью операции суперпозиции можно получил все рациональные числа.

Теперь построим все мономы с рациональными коэффициентами, отличные от константы, т.е. rq-функции вида $cx_1^{k_1}x_2^k \ldots x_n^{k_n}$ где c — произвольное рациональное число, отличное от нуля, n — произвольное положительное целое число, а $k_1, k_2, \ldots, k_n$ — произвольные натуральные числа (в том числе и 0), при этом $k_1 + k_2 + \ldots + k_n \neq 0$ (т.е. имеем хотя бы одну существенную переменную). Очевидно, что из функции $g(x,y)$ и константы 1 с помощью операций суперпозиции можно получить любой моном вида $x_1^{k_1}x_2^k \ldots x_n^{k_n}$ (в том числе и тождественную функцию $f(x) = x$). Далее, подставляя в функцию $g(x,y)$ вместо x константу c, а вместо y — моном $x_1^{k_1}x_2^k \ldots x_n^{k_n}$, мы получим rq-моном $cx_1^{k_1}x_2^k \ldots x_n^{k_n}$.

Ясно, что из функции $f_1(x,y)$ с помощью операций суперпозиции можно получить любую линейную функцию вида $x_1 + x_2 + \ldots + x_m (m \geq 2)$. Поскольку любой полином с рациональными коэффициентами является конечной суммой rq-мономов, то, если в подходящей линейной функции $x_1 + x_2 + \ldots + x_m$ вместо ее переменных подставим соответствующие rq-мономи, то получим желаемый полином с рациональными коэффициентами.

Далее, из полиномов с рациональными коэффициентами и функции $h(x,y)$ с помощью операций суперпозиций можно получить любую рациональную функцию с рациональными коэффициентами.

Таким образом, из функций множества B с помощью операций суперпозиции можно получить все функции из F_{RQ}, поэтому $[B] \supseteq F_{RQ}$. Но, с другой стороны, поскольку $B \subset F_{RQ}$, то в силу свойства оператора замыкания $[B] \subseteq F_{RQ}$. Следовательно, $[B] = F_{RQ}$, т.е. B является полной системой в $\mathbf{F}_{RQ}$. Теорема доказана. □

Следствие 1. $\mathbf{F}_{RQ}$ *является конечно-порожденной функциональной системой.*

Следствие 2. $\mathbf{F}_{RQ}$ *является функциональной системой счетной мощности.*

Так как ф.с. $\mathbf{F}_{RQ}$ является конечно-порожденной, то имеет смысл рассмотреть вопрос об $A-$функциях.

Теорема 2. *$rq-$функция*

$$f(x,y,z,t,u,v) = (t-u)\cdot\frac{x}{v} + xz - yz + z + 1$$

является A-функцией в функциональной системе $\mathbf{F}_{RQ}$.

Доказательство. Надо показать, что система $\{f\}$ является полной, т.е. $[\{f\}] = F_{RQ}$. Имеем

$$g(x,y,z) \equiv f(x,y,z,t,t,v) = xz - yz + z + 1;$$

$$h(x) \equiv g(x,x,x) = x+1; g(x,h(x),x) = 1; h(1) = 2, h(2) = 3, h(3) = 4;$$

$$g(1,3,2) = -1; g(1,1,-1) = 0;$$

$$g_1(x,y) \equiv g(x,y,1) = x - y + 2;$$

$$g_2(x,y,z) \equiv g_1(g_1(x,y),z) = x - y - z + 4;$$

$$g_3(x,y) \equiv g_2(x,y,4) = x - y;$$

$$g_4(x,y) \equiv g(x,0,y) = xy + y + 1;$$

$$g_6(x,y) \equiv g_3(g_4(x,y),h(y)) = xy;$$

И еще получим одну функцию $\frac{x}{y}$.

$$g_7(x,y) \equiv f(x,0,0,1,0,y) = \frac{x}{y} + 1.$$

$$g_8(x,y) \equiv g_3(g_7(x,y),1) = \frac{x}{y}.$$

Итак, $[f(x,y,z,t,u,v)]$ содержит подситему

$$\{1, x-y, xy, \frac{x}{y}(y \neq 0)\},$$

которая является полной в силу теоремы 1. Следовательно, система $\{f(x,y,z,t,u,v)\}$ является полной в функциональной системе $\mathbf{F}_{RQ}$. Теорема доказана. □

Теорема 3. *В функциональной системе $\mathbf{F}_{RQ}$ существует счетное число A-функций.*

Доказательство. Достаточно заметить, что $rq-$функция

$$g(x,y,z,t,u,v,w,x_1,\ldots,x_n) \equiv f(x,y,z,t,u,v) + (v-w)h(x_1,\ldots,x_n),$$

где $f(x,y,z,t,u,v)$ — A-функция из теоремы 2, а $h(x_1,\ldots,x_n)$ — произвольная $rq-$функция, является A-функцией в функциональной системе $\mathbf{F}_{RQ}$, так как

$$g(x,y,z,t,u,v,v,x_1,\ldots,x_n) = f(x,y,z,t,u,v).$$

Итак, число A-функций не меньше c_0. Но, с другой стороны, это число не может быть больше c_0, так как функциональная система $\mathbf{F}_{RQ}$ счетной мощности в силу следствия 2. Теорема доказана. □

Автор выражает глубокую благодарность старшему научному сотруднику МГУ имени М.В.Ломоносова А.В. Галатенко за постоянную поддержку при выполнении данной работы.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кудрявцев В. Б. Функциональные системы. — М.: Изд–во МГУ, 1982. 157 с.

2. Яблонский С. В. Введение в дискретную математику. — М.: Изд–во Наука, 1986. 384 с.

3. Алексиадис Н. Ф. О существовании рекурсивных A-функций //Вестник МЭИ. 2011. *N* 6. С. 109-111.

4. Алексиадис Н. Ф., Тхан Тун Аунг Об одной рекурсивной A-функции // Труды XXI международной научно-технической конференции "Информационные средства и технологии". (Москва, 19-21 ноября 2013 г.) — М.: Издательский дом МЭИ, 2013. Т. 3. С. 96-101.

УДК 519.17

Дистанционно регулярные графы с массивами пересечений $\{7,6,6;1,1,2\}$ и $\{42,30,2;1,10,36\}$ не существуют [1]

В. В. Биткина (Россия, г. Владикавказ)
Северо-Осетинский государственный университет им. К. Л. Хетагурова
e-mail:bviktoriyav@mail.ru
А. К. Гутнова (Россия, г. Владикавказ)
Северо-Осетинский государственный университет им. К. Л. Хетагурова
e-mail: gutnovaalina@gmail.com
А. А. Махнев (Россия, г. Екатеринбург)
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского
e-mail: makhnev@imm.uran.ru

Distance-regular graphs with intersection arrays $\{7,6,6;1,1,2\}$ and $\{42,30,2;1,10,36\}$ do not exist

V. V. Bitkina (Russia, Vladikavkaz)
North-Ossetian State University
e-mail:bviktoriyav@mail.ru
A. K. Gutnova (Russia, Vladikavkaz)
North-Ossetian State University
e-mail: gutnovaalina@gmail.com
A. A. Makhnev (Russia, Ekaterinburg)
N. N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics
e-mail: makhnev@imm.uran.ru

Мы рассматриваем неориентированные графы без петель и кратных ребер. Если a, b — вершины графа Γ, то через $d(a,b)$ обозначается расстояние между a и b, а через $\Gamma_i(a)$ — подграф графа Γ, индуцированный множеством вершин, которые находятся на расстоянии i в Γ от вершины a. Подграф $\Gamma_1(a)$ называется *окрестностью вершины* a и обозначается через $[a]$, если граф Γ фиксирован.

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Российского фонда фундаментальных исследований-ГФЕН Китая (проект № 20-51-53013)

Если вершины u, w находятся на расстоянии i в Γ, то через $b_i(u,w)$ (через $c_i(u,w)$) обозначим число вершин в пересечении $\Gamma_{i+1}(u)$ (в пересечении $\Gamma_{i-1}(u)$) с $[w]$. Граф диаметра d называется дистанционно регулярным с массивом пересечений $\{b_0, ..., b_{d-1}; c_1, ..., c_d\}$, если значения $b_i(u,w)$ и $c_i(u,w)$ не зависит от выбора вершин u, w на расстоянии i (см. [1]). Положим $a_i = k - b_i - c_i$ и $k_i = |\Gamma_i(u)|$ (значение k_i не зависит от выбора вершины u). Графом Тэйлора называется дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{k, \mu, 1; 1, \mu, k\}$.

Пусть Γ является дистанционно регулярным графом диаметра d. Для $i, j \in \{1, 2, 3, ..., d\}$ граф Γ_i определен на множестве вершин графа Γ и две вершины u, w смежны в Γ_i тогда и только тогда, когда $d_\Gamma(u,w) = i$.

Система инцидентности, состоящая из точек и прямых, называется *α-частичной геометрией порядка* (s,t), если каждая прямая содержит $s+1$ точку, каждая точка лежит на $t+1$ прямой (прямые пересекаются не более, чем по одной точке) и для любой точки a, не лежащей на прямой L, найдется точно α прямых, проходящих через a и пересекающих L (обозначение $pG_\alpha(s,t)$). Если $\alpha = t+1$, то геометрия называется двойственной 2-схемой.

Точечным графом геометрии точек и прямых называется граф, вершинами которого являются точки геометрии, и две различные вершины смежны, если они лежат на общей прямой. Легко понять, что точечный граф частичной геометрии $pG_\alpha(s,t)$ сильно регулярен с параметрами: $v = (s+1)(1+st/\alpha)$, $k = s(t+1)$, $\lambda = (s-1)+(\alpha-1)t$, $\mu = \alpha(t+1)$. Сильно регулярный граф, имеющий вышеуказанные параметры, называется *псевдогеометрическим графом для* $pG_\alpha(s,t)$.

Пусть Γ — дистанционно регулярный граф диаметра 3 без треугольников, u — вершина графа Γ, $\Delta^i = \Gamma_i(u)$ и $\Sigma^i = \Delta^i_{2,3}$. Тогда граф Σ^i является кореберно регулярным с параметрами (v', k', μ'), где $v' = k_i$, $k' = k_i - a_i - 1$ и $\mu' = 2k' + 2 - v'$.

Приведем примеры допустимых массивов пересечений дистанционно регулярных графов диаметра 3 без треугольников из [1, с. 425-431].

1. $\{4, 3, 3; 1, 1, 2\}$ (нечетный граф на 7 точках).
2. $\{5, 4, 2; 1, 1, 4\}$ (граф Сильвестра).
3. $\{5, 4, 3; 1, 1, 2\}$ (граф не существует по [2]).
4. $\{6, 5, 2; 1, 1, 3\}$ (граф Перкеля).
5. $\{7, 6, 5; 1, 1, 3\}$, (свернутый 7-куб).
6. $\{7, 6, 6; 1, 1, 2\}$.
7. $\{8, 7, 5; 1, 1, 4\}$.
8. $\{11, 10, 4; 1, 1, 5\}$.
9. $\{15, 14, 12; 1, 1, 9\}$ (граф из [1, §11.4B]).
10. $\{17, 16, 10; 1, 2, 8\}$, $q^3_{33} = 0$.
11. $\{21, 20, 10; 1, 1, 12\}$.
12. $\{21, 20, 16; 1, 2, 12\}$ (граф смежных классов дважды усеченного бинарного кода Голея).
13. $\{22, 21, 4; 1, 2, 14\}$.
14. $\{22, 21, 20; 1, 2, 6\}$ (граф смежных классов усеченного бинарного кода Голея), $q^3_{33} = 0$.
15. $\{25, 24, 3; 1, 3, 20\}$.
16. $\{25, 24, 9; 1, 1, 20\}$.
17. $\{31, 30, 17; 1, 2, 15\}$.

В работе доказано, что дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{7, 6, 6; 1, 1, 2\}$ не существует.

Теорема 1. *Дистанционно регулярный граф с массивом пересечений* $\{7, 6, 6; 1, 1, 2\}$ *не существует.*

В [3] получен следующий результат.

Предложение 1. *Если существует сильно регулярный граф с параметрами* $(176, 49, 12, 14)$, *в котором окрестности вершин являются* 7×7*-решетками, то существует и дистанционно регулярный граф с массивом пересечений* $\{7, 6, 6; 1, 1, 2\}$.

Следствие 1. *Не существует сильно регулярный граф с параметрами* $(176, 49, 12, 14)$, *в котором окрестности вершин являются* 7×7*-решетками.*

М.П. Голубятников заметил, что для дистанционно регулярного графа Γ с массивом пересечений $\{7, 6, 6; 1, 1, 2\}$ граф Γ_2 является дистанционно регулярным с массивом пересечений $\{42, 30, 2; 1, 10, 36\}$.

Теорема 2. *Дистанционно регулярный граф с массивом пересечений* $\{42, 30, 2; 1, 10, 36\}$ *не существует.*

Теорема 2 дает другое доказательство несуществования дистанционно регулярного графа Γ с массивом пересечений $\{7, 6, 6; 1, 1, 2\}$.

В работе используются тройные числа пересечений [4].

Пусть Γ — дистанционно регулярный граф диаметра d. Если u_1, u_2, u_3 — вершины графа Γ, r_1, r_2, r_3 — неотрицательные целые числа, не большие d, то $\left\{ \begin{smallmatrix} u_1u_2u_3 \\ r_1r_2r_3 \end{smallmatrix} \right\}$ — множество вершин $w \in \Gamma$ таких, что $d(w, u_i) = r_i$, $\left[\begin{smallmatrix} u_1u_2u_3 \\ r_1r_2r_3 \end{smallmatrix} \right] = |\left\{ \begin{smallmatrix} u_1u_2u_3 \\ r_1r_2r_3 \end{smallmatrix} \right\}|$. Числа $\left[\begin{smallmatrix} u_1u_2u_3 \\ r_1r_2r_3 \end{smallmatrix} \right]$ называются тройными числами пересечений. Для фиксированной тройки вершин u_1, u_2, u_3 вместо $\left[\begin{smallmatrix} u_1u_2u_3 \\ r_1r_2r_3 \end{smallmatrix} \right]$ будем писать $[r_1r_2r_3]$.

Пусть u, v, w — вершины графа Γ, $W = d(u, v), U = d(v, w), V = d(u, w)$. Так как имеется точно одна вершина $x = u$ такая, что $d(x, u) = 0$, то число $[0jh]$ равно 0 или 1. Отсюда $[0jh] = \delta_{jW}\delta_{hV}$. Аналогично, $[i0h] = \delta_{iW}\delta_{hU}$ и $[ij0] = \delta_{iU}\delta_{jV}$.

Другое множество уравнений можно получить, фиксируя расстояние между двумя вершинами из $\{u, v, w\}$, и сосчитав число вершин всех расстояний от третьей, получим:

$$\sum_{l=1}^{d}[ljh] = p^U_{jh} - [0jh], \sum_{l=1}^{d}[ilh] = p^V_{ih} - [i0h], \sum_{l=1}^{d}[ijl] = p^W_{ij} - [ij0]\,(+)$$

При этом некоторые тройки исчезают. При $|i - j| > W$ или $i + j < W$ имеем $p^W_{ij} = 0$, поэтому $[ijh] = 0$ для всех $h \in \{0, ..., d\}$.

Положим $S_{ijh}(u, v, w) = \sum_{r,s,t=0}^{d} Q_{ri}Q_{sj}Q_{th} \left[\begin{smallmatrix} uvw \\ rst \end{smallmatrix} \right]$. Если параметр Крейна $q^h_{ij} = 0$, то $S_{ijh}(u, v, w) = 0$.

Зафиксируем вершины u, v, w дистанционно регулярного графа Γ диаметра 3 и положим $\{ijh\} = \left\{ \begin{smallmatrix} uvw \\ ijh \end{smallmatrix} \right\}$, $[ijh] = \left[\begin{smallmatrix} uvw \\ ijh \end{smallmatrix} \right]$, $[ijh]' = \left[\begin{smallmatrix} uwv \\ ihj \end{smallmatrix} \right]$, $[ijh]^* = \left[\begin{smallmatrix} vuw \\ jih \end{smallmatrix} \right]$ и $[ijh]^\sim = \left[\begin{smallmatrix} wvu \\ hji \end{smallmatrix} \right]$. В случаях $d(u, v) = d(u, w) = d(v, w) = 2$ или $d(u, v) = d(u, w) = d(v, w) = 3$ вычисление чисел $[ijh]' = \left[\begin{smallmatrix} uwv \\ ihj \end{smallmatrix} \right]$, $[ijh]^* = \left[\begin{smallmatrix} vuw \\ jih \end{smallmatrix} \right]$ и $[ijh]^\sim = \left[\begin{smallmatrix} wvu \\ hji \end{smallmatrix} \right]$ (симметризация массива тройных чисел пересечений) может дать новые соотношения, позволяющие доказать несуществование графа.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. A.E. Brouwer, A.M. Cohen, A. Neumaier. Distance-Regular Graphs// Berlin Heidelberg New York. 1989. Springer-Verlag.

2. D. Fon Der Flaas. There exists no distance-regular graph with intersection array $\{5, 4, 3; 1, 1, 2\}$// Europ. J. Comb. 1993. Vol. 14, № 5. pp. 409–412.

3. M.S. Nirova. On distance-regular graphs with $\theta_2 = -1$// Trudy IMM UrO RAN. 2018. Vol. 24, № 2. pp. 212–219.

4. K. Coolsaet, A. Jurishich. Using equality in the Krein conditions to prove nonexistence of certain distance-regular graphs// J. Comb. Theory, Series A. 2008. Vol. 115. pp.1086–1095.

УДК 512.548.7, 519.716.2

Об одном алгоритме проверки существования нетривиальных n-подквазигрупп

А. В. Галатенко (Россия, г. Москва)
Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
e-mail: agalat@msu.ru
А. Е. Панкратьев (Россия, г. Москва)
Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
e-mail: apankrat@intsys.msu.ru
В. М. Староверов (Россия, г. Москва)
Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
e-mail: staroverovvl@imscs.msu.ru

An algorithm for checking the existence of nontrivial n-subquasigroups

A. V. Galatenko (Russia, Moscow)
Lomonosov Moscow State University
e-mail: agalat@msu.ru
A. E. Pankratiev (Russia, Moscow)
Lomonosov Moscow State University
e-mail: apankrat@intsys.msu.ru
V. M. Staroverov (Russia, Moscow)
Lomonosov Moscow State University
e-mail: staroverovvl@imscs.msu.ru

1. Введение

В последние годы конечные квазигруппы стали активно использоваться в практических криптоалгоритмах. В частности, в конкурсах NIST по выбору криптографических стандартов принимали участие хэш-функция EDON-R' ([1]) и алгоритмы легковесной криптографии GAGE и InGAGE ([2]). Возникает интерес и к алгоритмам, использующим структуры более высокой размерности, такие как 3-квазигруппы ([3]). Одним из требований, предъявляемых к квазигруппам в криптографических приложениях, является отсутствие собственных подквазигрупп, при этом в ряде случаев подквазигруппы порядка 1 считаются допустимыми. В работе [4] был предложен алгоритм проверки наличия собственных подквазигрупп; этот алгоритм легко обобщается на случай подквазигрупп порядка не меньше 2. Алгоритм с улучшенными временными характеристиками был анонсирован в [5]. В настоящей работе идеи, предложенные в [5], применены к задаче проверки существования подквазигрупп в n-квазигруппах (n-подквазигрупп).

2. Основные определения

Определение 1. *Конечной n-квазигруппой называется пара (Q, f), где $Q = \{q_1, \ldots, q_k\}$ — конечное множество, а $f\colon Q^n \to Q$ такова, что при произвольной фиксации любых $n-1$ переменных результат является биекцией, то есть перестановкой на множестве Q. При этом операция f называется n-квазигрупповой.*

В дальнейшем для краткости слово "конечный" будет опускаться.

Пусть $Q' \subseteq Q$. Через $f(Q')$ обозначим замыкание множества Q' относительно операции f, то есть множество всех констант, выразимых через f и элементы Q'. Очевидно, что замыкание обладает свойством монотонности: из вложения $Q' \subseteq Q''$ следует вложение $f(Q') \subseteq f(Q'')$.

Определение 2. *Множество $Q' \subseteq Q$ называется полным, если $f(Q') = Q$.*

В силу монотонности из полноты Q' следует полнота всех его надмножеств.

Определение 3. *Пусть $Q' \subset Q$, $1 \leqslant |Q'| < |Q|$. Если $f(Q') = Q'$, то говорим, что n-квазигруппа (Q, f) содержит собственную n-подквазигруппу Q' (точнее, n-подквазигруппу (Q', f'), где f' — ограничение операции f на $(Q')^n$). Если дополнительно выполнено условие $|Q'| \geqslant 2$, то n-подквазигруппа называется нетривиальной.*

Определение 4. *Пусть M, $|M| < \infty$ — некоторое множество, $k \in \mathbb{N}$, $M_1, \ldots, M_k$ — подмножества M. Множество $M_0 \subseteq M$ называется системой представителей для $M_1, \ldots, M_k$, если для всех i от 1 до k найдется элемент $m_i \in M_0$, такой что $m_i \in M_i$.*

Заметим, что представители для различных i могут совпадать.

В дальнейшем все логарифмы полагаются двоичными.

3. Вспомогательные утверждения

Лемма 1 ([5]). *Пусть $|M| = N$, $M_1, \ldots, M_K \subset M$, $|M_1| = \ldots = |M_K| = T$. Тогда жадный алгоритм строит систему представителей M_0, такую что $|M_0| \leqslant \left(\frac{N}{T} + 1\right)(\log K + 2)$.*

Под жадным алгоритмом понимается процедура, которая стартует с пустого M_0 и набора множеств $\mathbf{M} = M_1, \ldots, M_K$, на каждом шаге добавляет в M_0 элемент M_i, наиболее часто встречающийся среди набора $\mathbf{M}$, и исключает из $\mathbf{M}$ все множества M_j, содержащие выбранный элемент M_i.

Зафиксируем $d \in \mathbb{N}$, $d \leqslant k/2$. Содержательно d задает минимально допустимый порядок n-подквазигруппы. Пусть $D = C_k^d$, $Q_1, \ldots, Q_D$ — всевозможные d-элементные подмножества Q, $l\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ — некоторая функция. Рассмотрим следующую процедуру:

цикл по i от 1 до D

вычисляем частичное замыкание Q_i до выполнения одного из следующих условий:

либо пока не получим n-подквазигруппу,

либо пока размер частичного замыкания не станет равным $l(k)$

если найдена n-подквазигруппа, вернуть "есть n-подквазигруппы"

иначе обозначить частичное замыкание через Q'_i

конец цикла

вернуть "требуется дальнейший анализ"

В дальнейшем будем считать, что $l(k)$ монотонно стремится к бесконечности при $k \to \infty$.

Лемма 2. *Сложность процедуры составляет $O\left(k^d \cdot (l(k))^n\right)$ при фиксированном n и d и $k \to \infty$.*

Будем считать, что результатом процедуры стала необходимость дальнейшего анализа (в противном случае задача проверки существования n-подквазигруппы решена). Рассмотрим множества $\hat{Q}_i$, состоящие из всех d-элементных подмножеств соответствующих Q'_i. Обозначим через $\hat{Q}_0$ систему представителей этих множеств. В силу леммы 1 $|\hat{Q}_0| \leqslant \left(\frac{D}{l(k)} + 1\right) \cdot (\log D + 2)$.

Лемма 3. *n-квазигруппа (Q, f) содержит собственную n-подквазигруппу порядка не меньше d тогда и только тогда, когда существует $q_0 \in \hat{Q}_0$, такое что $f(q_0) \neq Q$.*

Алгоритм проверки существования подквазигрупп

Рассмотрим алгоритм, состоящий из трех этапов. Сперва с помощью приведенной выше процедуры либо находится n-подквазигруппа порядка $\geqslant d$ (и работа заканчивается), либо создаются множества Q'_i и $\hat{Q}_i$. После этого для множеств $\hat{Q}_1, \ldots, \hat{Q}_D$ с помощью жадного алгоритма строится система представителей. На последнем этапе проверяется полнота элементов системы представителей. Если полнота нарушается хотя бы для одного элемента, возвращается ответ "есть n-подквазигруппы", в противном случае возвращается "нет n-подквазигрупп".

Для реализации алгоритма в интересующих случаях $d = 1$ и $d = 2$ остается только выбрать подходящую функцию l, определяющую размер частичных замыканий, вычисляемых на первом шаге. Для $d = 1$ выберем $l(k) = \left[c \cdot k^{\frac{n}{n+1}} \cdot \log^{\frac{1}{n+1}} k\right]$, для $d = 2$ (нетривиальные n-подквазигруппы) возьмем $l(k) = \left[c \cdot k^{\frac{n}{n+2}} \cdot \log^{\frac{1}{n+2}} k\right]$, где c — константа, являющаяся параметром алгоритма, в частности, влияющая на объем необходимой памяти. При таком выборе верны следующие утверждения.

Теорема 1. *При фиксированной константе c и фиксированном n предложенный алгоритм проверяет наличие собственных n-подквазигрупп в n-квазигруппе порядка k со сложностью $O\left(k^{\frac{n^2+n+1}{n+1}} \log^{\frac{n}{n+1}} k\right)$.*

Теорема 2. *При фиксированной константе c и фиксированном n предложенный алгоритм проверяет наличие нетривиальных n-подквазигрупп в n-квазигруппе порядка k со сложностью $O\left(k^{\frac{n^2+2n+4}{n+2}} \log^{\frac{n}{n+2}} k\right)$.*

Корректность алгоритма вытекает из леммы 3, оценка сложности — из лемм 1 и 2.

В случае $n = 2$ второе утверждение несущественно улучшает сложность алгоритма из работы [5].

Заметим, что в случае использования обобщения алгоритма из [4] сложность проверки наличия собственных n-подквазигрупп составит $O\left(k^{n+1}\right)$, а сложность проверки наличия нетривиальных n-подквазигрупп $O\left(k^{n+2}\right)$. Приведем таблицы с значениями порядка сложности для небольших значений n, представляющих наибольший практический интерес.

В случае проверки существования собственных n-подквазигрупп получаются следующие порядки сложности.

алгоритм	n=2	n=3	n=4	n=5
обобщение [4]	k^3	k^4	k^5	k^6
оптимизированный	$k^{7/3}\log^{2/3} k$	$k^{13/4}\log^{3/4} k$	$k^{21/5}\log^{4/5} k$	$k^{31/6}\log^{5/6} k$

В следующей таблице сведены порядки сложности проверки существования нетривиальных n-подквазигрупп.

алгоритм	n=2	n=3	n=4	n=5
обобщение [4]	k^4	k^5	k^6	k^7
оптимизированный	$k^3\log^{1/2} k$	$k^{19/5}\log^{3/5} k$	$k^{14/3}\log^{2/3} k$	$k^{39/7}\log^{5/7} k$

Из приведенных теорем следует, что для обеих задач первый сомножитель порядка сложности оптимизированного алгоритма с ростом n приближается к k^n.

4. Заключение

В работе предложены оптимизированные алгоритмы для проверки существования собственных n-подквазигрупп и нетривиальных n-подквазигрупп в n-квазигруппах. В дальнейшем планируется более тонкое рассмотрение пространственной сложности, а также создание программной реализации и исследование возможности распараллеливания.

Авторы благодарят В. А. Артамонова и С. Чакрабарти за плодотворные обсуждения и внимание к работе.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Gligoroski D., Ødegård R. S., Mihova M., Knapskog S. J., Drapal A., Klíma V., Amundsen J., El-Hadedy M. Cryptographic hash function EDON-R' // Proceedings of the 1st International Workshop on Security and Communication Networks. 2009. P. 1–9.

2. Gligoroski D. On the S-box in GAGE and InGAGE [электронный ресурс]. 2019. URL: http://gageingage.org/upload/LWC2019NISTWorkshop.pdf (дата обращения: 05.05.2021).

3. Xu M., Tian Z. An Image Cipher Based on Latin Cubes // Proceedings of the 3rd International Conference on Information and Computer Technologies. 2020. P. 160–168.

4. Собянин П. И. Об алгоритме проверки наличия подквазигруппы в квазигруппе // Интеллектуальные системы. Теория и приложения. 2019. Т. 23, № 2. С. 79–84.

5. Галатенко А. В., Панкратьев А. Е., Староверов В. М. Об одном алгоритме проверки существования нетривиальных подквазигрупп // Материалы XVIII Международной конференции «Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы, приложения и проблемы истории», Тула, 2020, С. 150–153.

УДК 512.548.7, 519.716.39

Об одном критерии правильности семейства функций

А. В. Галатенко (Россия, г. Москва)
Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
e-mail: agalat@msu.ru
В. А. Носов (Россия, г. Москва)
Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
e-mail: vnosov40@mail.ru
А. Е. Панкратьев (Россия, г. Москва)
Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
e-mail: apankrat@intsys.msu.ru
В. М. Староверов (Россия, г. Москва)
Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
e-mail: staroverovvl@imscs.msu.ru

A criterion of properness of a family of functions

A. V. Galatenko (Russia, Moscow)
Lomonosov Moscow State University
e-mail: agalat@msu.ru
V. A. Nosov (Russia, Moscow)
Lomonosov Moscow State University
e-mail: vnosov40@mail.ru
A. E. Pankratiev (Russia, Moscow)
Lomonosov Moscow State University
e-mail: apankrat@intsys.msu.ru
V. M. Staroverov (Russia, Moscow)
Lomonosov Moscow State University
e-mail: staroverovvl@imscs.msu.ru

Введение

Задача порождения больших параметрических семейств латинских квадратов имеет важное значение в криптографических приложениях. В случае, когда параметры играют роль ключа, размер семейства определяет стойкость к атакам методом грубой силы. Одно из возможных решений этой задачи — использование правильных семейств функций — было предложено В. А. Носовым в работе [1]. В первоначальном варианте рассматривались порядки квадратов, являющиеся степенями двойки. Элементы квадратов задавались с помощью булевой вектор-функции. Позже конструкция была обобщена на случай квадратов порядка k^n и вектор-функций k-значной логики ([2, 3])).

Существенным шагом в исследовании булева случая стал результат К. Д. Царегородцева, в котором была установлена эквивалентность понятия правильности семейства булевых функций и одностоковости ориентации ребер булева куба ([4]). Автору удалось построить биекцию между всеми семействами из n n-местных булевых функций, таких что одноименная переменная является фиктивной, и всеми ориентациями ребер n-мерного булева куба, при которой правильные семейства сюръективно переводятся в ориентации ребер, такие что в любой грани существует единственная вершина-сток. В процессе доказательства было неявно установлено еще одно характеристическое свойство правильных семейств, а именно существование и единственность неподвижной точки у всего семейства и всех его производных семейств (в смысле определения, приведенного ниже).

Естественное обобщение связи правильности и одностоковости ориентаций с булева случая на случай логики произвольной значности оказалось трудной задачей. Мы покажем, что прямой перенос здесь невозможен. В частности, переход от $k = 2$ к $k = 3$ приводит к существенному усложнению критерия правильности в терминах неподвижных точек.

Основные определения

Для натурального k обозначим множество $\{0, 1, \ldots, k-1\}$ через E_k.

Определение 1. *Пусть $k, n \in \mathbb{N}$, $k \geqslant 2$. Семейство $G = (g_1, \ldots, g_n)$, состоящее из n-арных функций k-значной логики, называется правильным, если для любых двух входных наборов $s = (s_1, \ldots, s_n)$, $t = (t_1, \ldots, t_n)$, $s \neq t$, найдется индекс i, $1 \leqslant i \leqslant n$, для которого $s_i \neq t_i$, но $g_i(s) = g_i(t)$.*

Из определения непосредственно вытекает, что переменная x_i фиктивна для g_i. Таким образом, все правильные семейства порядка 1 состоят из констант. Известно ([3]), что для $n = 2$ по крайней мере одна из функций должна быть константой.

Определение 2. *Пусть $F = (f_1, \ldots, f_n)$ — семейство из n функций k-значной логики арности n. Набор $\alpha \in E_k^n$, $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, называется неподвижной точкой для семейства F, если $f_i(\alpha) = \alpha_i$, $i = 1, \ldots, n$.*

Определение 3. *Пусть $F = (f_1, \ldots, f_n)$ — семейство из n функций k-значной логики арности n. Семейство, полученное из F произвольной фиксацией произвольного собственного подмножества переменных и отбрасыванием функций с индексами, соответствующими зафиксированным переменным, назовем производным для F.*

Несложно показать (см., например, [3]), что в случае правильных семейств все производные семейства также являются правильными.

Определение 4. *Пусть $F = (f_1, \ldots, f_n)$ — семейство n-арных функций k-значной логики, $\sigma_1, \ldots, \sigma_n, \tau_1, \ldots, \tau_n$ — произвольные перестановки на множестве E_k, $\hat{f}_i(x_1, \ldots, x_n) = \tau_i\left(f_i(\sigma_1(x_1), \ldots, \sigma_n(x_n))\right)$, $i = 1, \ldots, n$. Тогда семейство $\hat{F} = (\hat{f}_1, \ldots, \hat{f}_n)$ называется перекодировкой семейства F.*

В дальнейшем мы будем рассматривать только семейства, в которых каждая функция фиктивным образом зависит от одноименной переменной.

Критерий правильности в терминах неподвижных точек отображения

В работе [3] было показано, что для любого правильного семейства неподвижная точка существует и единственна. К. Д. Царегородцевым был неявно установлен следующий факт (см. [4]; из доказательства вытекает, что точка является неподвижной для производного семейства тогда и только тогда, когда она соответствует стоку грани, порождающей это семейство).

Лемма 1. *Пусть $n \in \mathbb{N}$, $G = (g_1, \ldots, g_n)$ — семейство булевых функций арности n, такое что для G и для каждого семейства, производного для G, существует и единственна неподвижная точка. Тогда семейство G является правильным.*

Следствие 1. *Семейство булевых функций является правильным тогда и только тогда, когда для всего семейства и для всех его производных семейств существует и единственна неподвижная точка.*

Заметим, что уже при переходе к $k = 3$ достаточность критерия нарушается. В качестве котрпримера можно рассмотреть семейство $(2x_2, x_1)$. Все производные семейства являются константами и поэтому имеют единственные неподвижные точки, а неподвижность точки (α_1, α_2) для всего семейства эквивалентна условию

$$\begin{cases} \alpha_1 = 2\alpha_2, \\ \alpha_2 = \alpha_1 \end{cases}$$

которому удовлетворяет только набор $(0, 0)$.

Легко увидеть, что свойство правильности инвариантно относительно перекодировки.

Лемма 2. *Пусть $G = (g_1, \ldots, g_n)$ — правильное семейство функций k-значной логики, $\hat{G}$ — произвольная перекодировка семейства G. Тогда семейство $\hat{G}$ также является правильным.*

Замечание 1. *Лемма 2 допускает следующие переформулировки:*

1. *семейство является правильным тогда и только тогда, когда все его перекодировки правильные;*

2. *семейство не обладает свойством правильности тогда и только тогда, когда все его перекодировки не обладают свойством правильности.*

С помощью леммы 2 можно "тиражировать" известные правильные семейства за счет перекодирования. Очевидной верхней оценкой на число попарно различных семейств, являющихся перекодировкой заданного семейства, является $(k!)^{2n}$. Получение нижних оценок является темой дальнейших исследований.

Лемма 3. *Пусть семейство $F = (f_1, \ldots, f_n)$ n-арных функций k-значной логики не является правильным. Тогда существует производное семейство F', допускающее перекодировку, имеющую не меньше двух неподвижных точек.*

Замечание 2. *Для справедливости леммы 3 достаточно рассматривать перекодировки, в которых все σ_i являются тождественными перестановками.*

В случае рассмотренного выше примера достаточно использовать $\tau_1(x) = 2 \cdot x \pmod 3$, а оставшиеся перестановки взять тождественными. В результате перекодировки возникнет семейство (x_2, x_1), имеющее неподвижные точки $(0, 0)$, $(1, 1)$ и $(2, 2)$.

Из лемм 2 и 3 вытекает следующий факт.

Теорема 1. *Пусть $F = (f_1, \ldots, f_n)$ — семейство n-арных функций k-значной логики. Семейство F является правильным тогда и только тогда, когда для самого семейства F и всех его производных семейств любая перекодировка имеет единственную неподвижную точку.*

Таким образом, требование существования и единственности неподвижной точки при рассмотрении всех производных семейств заменено на существование и единственность неподвижной точки при рассмотрении всех перекодировок всех производных семейств. Применение критерия для доказательства правильности приводит к высокой вычислительной сложности, превышающей сложность проверки по определению. С другой стороны, возникает новое интересное характеристическое свойство, с помощью которого можно эффективно доказывать отсутствие правильности.

Заключение

В работе предложено обобщение критерия правильности семейства функций с булева случая на случай логики произвольной значности. Прямое обобщение оказалось неверным, что по всей видимости означает невозможность непосредственного переноса техники, связанной с одностоковыми ориентациями кубов. В дальнейшем планируется исследовать возможность переноса на k-значный случай других результатов, в частности, метода порождения равномерного распределения на всех правильных семействах заданного порядка.

Авторы благодарят К. Д. Царегородцева за плодотворные обсуждения.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Носов В. А. Построение классов латинских квадратов в булевой базе данных // Интеллектуальные системы. 1999. Том 4, № 3–4. С. 307–320.

2. Nosov V. A., Pankratiev A. E. Latin squares over Abelian groups // Journal of Mathematical Sciences. 2008. Vol. 149, № 3. P. 1230–1234.

3. Galatenko A.V., Nosov V. A., Pankratiev A. E. Latin squares over quasigroups // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2020. Vol. 41. P. 194–203.

4. Царегородцев К. Д. О взаимно однозначном соответствии между правильными семействами булевых функций и рёберными ориентациями булевых кубов // Прикладная дискретная математика. 2020. № 48. С. 16–21.

УДК 512.548.7, 519.716.2

Эффективность проверки полиномиальной полноты n-квазигрупп

А. В. Галатенко (Россия, г. Москва)
Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
e-mail: agalat@msu.ru
А. Е. Панкратьев (Россия, г. Москва)
Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
e-mail: apankrat@intsys.msu.ru
В. М. Староверов (Россия, г. Москва)
Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
e-mail: staroverovvl@imscs.msu.ru

Efficiency of deciding polynomial completeness of n-quasigroups

A. V. Galatenko (Russia, Moscow)
Lomonosov Moscow State University
e-mail: agalat@msu.ru
A. E. Pankratiev (Russia, Moscow)
Lomonosov Moscow State University
e-mail: apankrat@intsys.msu.ru
V. M. Staroverov (Russia, Moscow)
Lomonosov Moscow State University
e-mail: staroverovvl@imscs.msu.ru

1. Введение

К настоящему моменту построено значительное количество криптографических алгоритмов на основе латинских квадратов, или, что эквивалентно, квазигрупп ([1, 2]). В последние годы стал расти интерес к использованию структур большей арности, таких как латинские кубы (3-квазигруппы) или латинские гиперкубы ([3, 4]). В. А. Артамонов с соавторами заметили, что желательным для криптографии свойством квазигрупп и n-квазигрупп является полиномиальная полнота ([5]), так как задача разрешимости уравнений над полиномиально полной алгеброй NP-полна ([6]). В работе [7] был предложен полиномиальный по сложности алгоритм проверки полиномиальной полноты квазигрупп, заданных таблицами Кэли. В работе [8] этот алгоритм был дополнительно оптимизирован. Обобщение алгоритма на случай n-квазигрупп было анонсировано в [9].

В данной работе проводится анализ практической эффективности программной реализации алгоритма из [9].

2. Основные определения и обозначения

Определение 1. *Конечной n-квазигруппой называется пара (Q, f), где $Q=\{q_1, \ldots, q_k\}$ — конечное множество, а $f\colon Q^n \to Q$ такова, что при произвольной фиксации любых $n-1$ переменных результат является биекцией, то есть перестановкой на множестве Q. При этом операция f называется n-квазигрупповой.*

В дальнейшем для краткости слово "конечный" будет опускаться, а свойства n-квазигрупповой операции будут отождествляться со свойствами соответствующей n-квазигруппы.

Легко увидеть, что таблица Кэли n-квазигрупповой операции является n-мерным латинским гиперкубом, то есть n-мерной матрицей размера $|Q| \times \ldots \times |Q|$, такой что каждая одномерная "строка" задает перестановку на множестве Q, и обратно, произвольный n-мерный латинский гиперкуб задает n-квазигрупповую операцию с соответствующим носителем.

Без ограничения общности можно считать, что $Q = E_k = \{0, 1, \ldots, k-1\}$ для некоторого $k \in \mathbb{N}$. В этом случае f является функцией k-значной логики. Множество всех функций k-значной логики обозначим через P_k, множество всех констант — через P_k^0, замыкание множества $F \subseteq P_k$ — через $[F]$.

Определение 2. *n-квазигруппа (Q, f) называется полиномиально полной, если замыкание множества из функции f и всех констант равно P_k.*

Определение 3. *n-квазигруппа (Q, f) называется простой, если функция f не сохраняет ни одно нетривиальное отношение эквивалентности на множестве E_k.*

Определение 4. *n-квазигруппа (Q, f) называется аффинной, если существует абелева группа $(Q, +)$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathrm{Aut}(Q, +)$ и $c \in Q$, такие что выполнено тождество*

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \alpha_1(x_1) + \ldots + \alpha_n(x_n) + c \tag{1}$$

Известно ([10]), что полиномиальная полнота эквивалентна одновременной простоте и неаффинности.

3. Проверка простоты

Рассмотрим следующий алгоритм.

```
цикл по i от 1 до k-1
  задать тривиальное отношение эквивалентности
  создать пустую очередь пар на проверку
  добавить пару {0, i} на проверку, положить 0 ~ i
  пока очередь непуста и размеры классов <= k/2
    извлечь первую пару из очереди (пусть это пара {s, t})
    цикл по всем парам {u, v} вида (f(x), f(y)), где x и y - пара входных
                          наборов, отличающихся ровно на одной позиции j,
                          причем x[j] = s, y[j] = t
      если эквивалентность u~v не установлена
        положить u~v
        добавить пару {u,v} в очередь
        слить классы эквивалентности элементов u и v
      конец если
    конец цикла
  конец цикла
```

```
  если отношение ~ нетривиально и размеры всех классов <= k/2
    вернуть ‘‘непростая’’
  конец если
конец цикла
вернуть ‘‘простая’’
```

Теорема 1. *Алгоритм корректно устанавливает простоту n-квазигрупп и имеет сложность $O\left(k^{n+1}\right)$ при фиксированном n и $k \to \infty$.*

Алгоритм был программно реализован с поддержкой OpenMP-распараллеливания. Программа была протестирована на рабочей станции с 8-ядерным процессором i7–3770 CPU @3.40GHz и 32 гигабайтами памяти на 3-квазигруппах, аналогичных тестовым примерам из [8]. Время работы представлено в следующей таблице. В левом столбце приведены порядки 3-квазигрупп, в столбцах со второго по пятый содержатся времена работы в секундах на соответствующем числе ядер.

n	1	2	4	8
32	0	0	0	0
64	0	0	0	0
128	2	1	1	1
256	75	47	30	17
512	1332	733	456	426

Легко увидеть, что результаты численного эксперимента по проверке простоты согласуются с теоретической ассимптотикой времени работы алгоритма в зависимости от порядка 3-квазигрупп. Полученные результаты подтверждают возможность проверки простоты 3-квазигрупп за приемлемое время до порядка 512 включительно.

4. Проверка неаффинности

Рассмотрим следующий алгоритм.

```
задать квазигруппу (Q,f’), где f’(x,y)=f(x,y,0,...,0)
проверить аффинность (Q,f’)
если (Q,f’) неаффинна, вернуть ‘‘неаффинна’’
# в противном случае найдены группа (Q,+), автомрофизмы f1 и f2 и константа c
для i от 3 до k
  найти такие a[1],...,a[i-1],a[i+1],...,a[n], что
        fi=f(a[1],...,a[i-1],0,a[i+1],...,a[n]) = 0
  проверить, что fi - автоморфизм
  если нет, вернуть ‘‘неаффинна’’
конец цикла
проверить тождество (1) для всех входных наборов
если оно нарушается хотя бы на одном наборе, вернуть ‘‘неаффинна’’
иначе вернуть ‘‘аффинна’’
```

Теорема 2. *Алгоритм корректно устанавливает неаффинность n-квазигрупп и имеет сложность $O\left(k^n\right)$ при фиксированном $n \geqslant 3$ и $k \to \infty$.*

Алгоритм был программно реализован с поддержкой OpenMP-распараллеливания. Программа была протестирована на рабочей станции с 8-ядерным процессором i7–3770 CPU

@3.40GHz и 32 гигабайтами памяти на 3-квазигруппах, аналогичных тестовым примерам из [8]. Время работы представлено в следующей таблице. В левом столбце приведен порядок 3-квазигрупп, в столбцах со второго по пятый содержатся времена работы в секундах на соответствующем числе ядер для неаффинных/аффинных квазигрупп.

n	1	2	4	8
512	1/1	1/1	1/1	1/1
1024	4/5	4/4	3/3	2/3
2048	79/83	56/61	42/46	32/32

Легко увидеть, что результаты численного эксперимента по проверке неафинности согласуются с теоретической ассимптотикой времени работы алгоритма в зависимости от порядка 3-квазигрупп. Полученные результаты подтверждают возможность проверки неафинности 3-квазигрупп за приемлемое время до порядка 2048 включительно. Отметим, что при данном объеме оперативной памяти порядок 2048 является максимально возможным порядком 3-квазигруппы, для которой табица Кэли помещается в опертаивную память. Т.е. при расчетах был достигнут максимально возможный порядок 3-квазигруппы, для которого табица Кэли вмещается в оперативную память данного компьютера.

5. Заключение

В работе описаны алгоритмы, устанавливающие простоту и неаффинность n-квазигрупп, и проведен анализ практической эффективности этих алгоритмов. С одной стороны, оказалось, что n-квазигруппы достаточно большого порядка могут быть обработаны на обычной рабочей станции за приемлемое время. С другой стороны, проверка порстоты работает существенно дольше, чем проверка неаффинности. В дальнейшем планируется дополнительная оптимизация этого алгоритма.

Авторы благодарят В. А. Артамонова и С. Чакрабарти за плодотворные обсуждения и внимание к работе.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Глухов М. М. О применениях квазигрупп в криптографии // Прикладная дискретная математика. 2008. №2. С. 28–32.

2. Shcherbacov V. A. Quasigroups in cryptology // Computer Science Journal of Moldova. 2009. Vol. 17, № 2(50). P. 193–228.

3. Xu M., Tian Z. An Image Cipher Based on Latin Cubes // Proceedings of the 3rd International Conference on Information and Computer Technologies. 2020. P. 160–168.

4. Личное общение с С. Чакрабарти.

5. Artamonov V. A., Chakrabarti S., Gangopadhyay S., Pal S. K. On Latin squares of polynomially complete quasigroups and quasigroups generated by shifts // Quasigroups and Related Systems. 2013. Vol. 21. P. 117-130.

6. Horváth G., Nehaniv C. L., Szabó Cs. An assertion concerning functionally complete algebras and NP-completeness // Theoretical Computer Science. 2008. Vol. 407, №. 1. P. 591–595.

7. Galatenko A. V., Pankratiev A. E. The complexity of checking the polynomial completeness of finite quasigroups // Discrete Mathematics and Applications. 2020. Vol. 30, № 3. P. 169–175.

8. Galatenko A. V., Pankratiev A. E., Staroverov V. M. Efficient verification of polynomial completeness of quasigroups // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2020. Vol. 41, № 8. P. 1444-1453.

9. Галатенко А. В., Панкратьев А. Е., Староверов В. М. Об одном алгоритме проверки существования нетривиальных подквазигрупп // Материалы XVIII Международной конференции «Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы, приложения и проблемы истории», Тула, 2020, С. 150–153.

10. Hagemann J., Herrmann C. Arithmetical locally equational classes and representation of partial functions // Universal Algebra, Esztergom (Hungary). 1982. Vol. 29. P. 345–360.

УДК 512

Быстрое извлечение квадратных и кубических корней и решение уравнений степени не выше четвертой в некоторых башнях конечных полей[1]

С. Б. Гашков (Россия, г. Москва)
Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
e-mail: sbgashkov@gmail.com
А. Б. Фролов (Россия, г. Москва)
Московский энергетический институт (технический университет)
e-mail: abfrolov@mail.ru

Fast computation of the square roots and cube roots and solving degree four equations in some towers of finite fields

S. B. Gashkov (Russia, Moscow)
Lomonosov Moscow State University
e-mail: sbgashkov@gmail.com
A. B. Frolov (Russia, Moscow)
Moscow Energy Institute (Technical University)
e-mail: abfrolov@mail.ru

1. Введение

Обозначаем $\lambda(n) = \lceil \log_2 n \rceil$, и $M_p(n)$ число операций в простом конечном поле $GF(p)$ для умножения двух многочленов степени n над этим полем. В [1] получена оценка

$$M_p(n) = O(n\lambda(n)).$$

Битовая сложность умножения в поле $GF(p^n)$, где p — простое, при использовании любого полиномиального базиса равна

$$M(GF(p^n)) = O(M_p(n)M(\lambda(p))),$$

[1]Исследование выполнено за счет гранта РФФИ (проекты 19-01-00294, , 18-01-00337).

где $M(n)$ — битовая сложность умножения двух $n-$битных чисел, которая согласно [2] равна $O(n\lambda(n))$. При использовании нормального базиса битовая сложность умножения равна

$$O(M_{norm}(n)M(\lambda(p))),$$

где $M_{norm}(n)$ обозначает число операций в поле $GF(p)$ для умножения в данном базисе. Известно, что в в произвольных нормальных базисах $M_{norm}(n)$ субквадратична, а в гауссовых нормальных базисах и в оптимальных нормальных базисах

$$M_{norm}(n) = O(M(n)) = O(n\lambda(n)).$$

2. Формулировки результатов

Теорема 1. *Пусть* $p^n - 1 = q_1^{\alpha_1} \dots q_m^{\alpha_m}$, $t = q_1^{\beta_1} \dots q_m^{\beta_m}$, *и при* $q_1 = 2, \beta_1 \geq 2$

$$p^n = 1 \bmod 4.$$

Тогда в поле $GF(p^N)$, $N = nt$, *в полиномиальном базисе, определяемом многочленом* $f(x^t)$, *где* $f(x)$ *— примитивный многочлен степени* n *над полем* $GF(p)$, *для битовой сложности инвертирования и деления в поле* $GF(p^N)$ *справедлива оценка*

$$I(GF(p^{nt})) = O(M(N)M(\lambda(p))) + I(GF(p^n)),$$

где $I(GF(p^n))$ *— сложность инвертирования в поле* $GF(p^n)$. *В случае использования в подполе* $GF(p^n)$ *нормального базиса*

$$I(GF(p^n)) = O(\lambda(n))M_{norm}(n)M(\lambda(p)).$$

Если $n = n_1 \dots n_m, n_1 = p_1^{\gamma_1}, \dots, n_m = p_m^{\gamma_m}$, *то при использовании башни нормальных базисов*

$$I(GF(p^n)) = O(\lambda(n_1)M_{norm}(n_1) \dots M_{norm}(n_m)M(\lambda(p))).$$

Если N *гладкое, т.е.* $N = nt$, *где* $t = q_1^{\beta_1} \dots q_m^{\beta_m}$, $\lambda(N) > pnq_1 \dots q_m$ *и при* $q_1 = 2, \beta_1 \geq 2$ *выполнено условие* $p^n = 1 \bmod 4$, *то*

$$I(GF(p^N)) = O(M(GF(p^N)) = O(M(N)M(\lambda(p))).$$

Теорема 2. *Сложность извлечения кубического корня в поле* $GF(q)$, *где* $q = p^s$, $p \neq 0 \pmod 3$, $p > 2$, $s = 2^k(2r+1)$, *равна*

$$O(M(2^k)k(M(r))M(\lambda(p)) + r^4(\lambda(p))^4) + kr^{1+o(1)}\lambda(p).$$

При $k \to \infty$, $r = O(1)$, $p = O(1)$ *эта оценка имеет вид*

$$O_{r,p}(M(2^k)k(M(r))M(\lambda(p)) = O_{r,p}(M(s)\lambda(s)).$$

Теорема 3. *Извлечение кубических корней в поле* $GF(q)$, $q = 2^s$, $s = 2r \cdot 3^k$, r *не кратно* 3, *выполняется со сложностью*

$$O(M(3^k)(k+r)M(r) + 3^k krM(r)) = O_r(M(GF(q))\lambda(\lambda(q)) = O_r(M(s)\lambda(s)).$$

Извлечение квадратных корней в том же базисе того же поля выполняется со сложностью

$$O(3^k M(r)) = O_r(M(s)).$$

Теорема 4. *Решение уравнений степени не выше четырех в поле* $GF(p^s)$, *где* $p > 3$, $s = 2^k r$, $k \to \infty$, $r = \pm 1 \pmod 6$, $p, r = O(1)$, *при использовании подходящего базиса можно найти с битовой сложностью*

$$O_r(M(2^k)kM(r)M(\lambda(p))) = O_{r,p}(M(s)\lambda(s)).$$

В полях $GF(3^s)$, *где* $s = \pm 1 \pmod 6$, *в нормальном базисе решения можно найти с битовой сложностью* $O(M(GF(3^s))\lambda(s))$, *а в полях* $GF(2^s)$, *где* $s = 2r$, $r \neq 0 \pmod 3$, *— с битовой сложностью* $O(M(GF(2^s))\lambda(s))$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Harvey D. & van der Hoeven J. Polynomial multiplication over finite fields in time O(n log n)// HAL Techn. report № 02070816, 2019, available at: https://hal.archives-ouverts.fr/hal-02070816.

2. Harvey D. & van der Hoeven J. Integer multiplication in time O(n log n)// HAL Techn. report № 02070778, 2019, available at: https://hal.archives-ouverts.fr/hal-02070778.

УДК 519.1

К вопросу о перечислении деревьев

Е. И. Деза (Россия, г. Москва)
Московский педагогический государственный университет
e-mail: elena.deza@gmail.com

On trees' enumeration

E. I. Deza (Russia, Moscow)
Moscow Pedagogical State University
e-mail: elena.deza@gmail.com

Вопросы перечисления тех или иных дискретных структур формируют один из важнейших разделов современной дискретной математики в целом и перечислительной комбинаторики, в частности. Одной из центральных в этой области является задача перечисления графов, состоящая в нахождении количества тех или иных типов графов, выраженном, как правило, в виде функции от числа их вершин и решаемая либо алгебраически (получение точных формул), либо асимптотически. Эти задачи находятся в центре внимания многих исследователей прежде всего в силу их высокой значимости, как теоретической, так и прикладной.

Деревья - связные графы, не содержащие циклов, - формируют один из простейших классов графовых структур, и вопросы их перечисления (а также родственных им графовых структур) занимают в перечислительной комбинаторике центральное место. Терема Кэли утверждает, что число помеченных деревьев на n вершинах равно n^{n-2}, $n \geq 2$. С помощью чисел Каталана можно пересчитать количество бинарных корневых деревьев на n вершинах. Позволяя деревьям иметь "листы" в форме петель, мы получим возможность перечисления данного типа графовых структур с помощью чисел Моцкина.

Большой класс практико-ориентированных проблем, связанных с теорией информации, может быть решен, опираясь на вопросы подсчета тех или иных структур, связанных с остовными лесами графов, используемых для моделирования случайного блуждания по схеме цепей Маркова. [4, 1] Нами получен ряд новых результатов такого рода.

Напомним, что остовным лесом графа G называется любой лес, являющийся подграфом графа G и содержащий все его вершины. Если построенный лес состоит из одной компоненты, мы получаем остовное дерево (связного) графа G. Выбрав в каждом из деревьев, формирующих остовной лес, вершину, называемую корнем, мы получим корневой остовной лес (дерево) графа G. В случае орграфов ситуация совершенно аналогична. Однако в данном случае мы рассматриваем сходящиеся деревья – слабосвязные орграфы, в которых одна вершина, называемая корнем, имеет нулевое значение для исходящей степени, а оставшиеся вершины имеют

для исходящей степени значение 1. Сходящийся лес орграфа Γ определяется теперь как остовной подграф орграфа Γ, все компоненты которого являются сходящимися деревьями.

Имеют место следующие утверждения, связанные с подсчетом остовных деревьев простейших неориентированных и ориентированных графовых структур:

• *число корневых сходящихся деревьев орграфа* $\vec{P}_n$, $n \geq 2$, *равно 1; число корневых сходящихся деревьев орграфа* $\vec{C}_n$, $n \geq 3$, *равно* n; *число корневых деревьев графа* P_n, $n \geq 2$, *равно* n; *число корневых деревьев графа* C_n, $n \geq 3$, *равно* n^2.

Подсчет общего числа остовных лесов даст следующие результаты:

• *число корневых сходящихся лесов орграфа* $\vec{P}_n$, $n \geq 2$, *равно* 2^{n-1}; *число корневых сходящихся лесов орграфа* $\vec{C}_n$, $n \geq 3$, *равно* $2^n - 1$; *число корневых лесов графа* P_n, $n \geq 2$, *равно* u_{2n}; *число корневых лесов графа* C_n, $n \geq 3$, *равно* $u_{2n-1} + u_{2n+3} - 2$.

Если третий и четвертый случаи явным образом связаны с числами Фибоначчи u_n ([3]), то и первые два можно интерпретировать в терминах специальных чисел: во втором случае это число Мерсенна M_n; в первом - число $M_{n-1} + 1$.

Для практических приложений важно знать количество остовных лесов того или иного графа или орграфа, состоящих ровно из двух деревьев. В этом случае имеют место следующие утверждения:

• *число корневых* 2*-деревьевых сходящихся лесов орграфа* $\vec{P}_n$, $n \geq 2$, *равно* $n - 1$; *число корневых* 2*-деревьевых сходящихся лесов орграфа* $\vec{C}_n$, $n \geq 3$, *равно* $\frac{n(n-1)}{2}$; *число корневых* 2*-деревьевых лесов графа* P_n, $n \geq 2$, *равно* $\frac{(n-1)n(n+1)}{6}$; *число корневых* 2*-деревьевых лесов графа* C_n, $n \geq 3$, *равно* $\frac{n^2(n-1)(n+1)}{12}$.

В первом случае результат тривиален. Во втором мы получаем числа сочетаний C_n^2 или, что то же, последовательность треугольных чисел. В третьем случае формула для подсчета 2-деревьевых сходящихся лесов простого пути на n вершинах принимает вид $\sum_{k=1}^{n-k} k \cdot (n-k)$. В последнем случае мы имеем формулу $\sum_{k=1}^{n-k} k \cdot (n-k)^2$.

Вторая группа результатов связана с матрицей относительной лесной доступности, определяемой, для графа G (орграфа Γ) на n вершинах, по закону $\frac{((f_{ij}))}{f}$, где f_{ij} - количество остовных корневых (сходящихся) лесов графа G (орграфа Γ), в которых вершины i и j принадлежат одному дереву с корнем i (сходящегося к j), а f – общее количество остовных корневых (сходящихся) лесов графа G (орграфа Γ). [2, 3]

Именно, имеют место следующие утверждения (см. [3]):

• *для орграфа* $\vec{P}_n$, $n \geq 2$, $f = 2^{n-1}$; $f_{ii} = f$ *при* $i = 1$, *и* $f_{ii} = 2^{n-2}$ *при* $2 \leq i \leq n$; $f_{ij} = 2^{n-j}$ *при* $j = 1$, $f_{ij} = 2^{n-i+j-2}$ *при* $2 \leq j < i \leq n$, *и* $f_{ij} = 0$ *при* $1 \leq i < j \leq n$; *для орграфа* $\vec{C}_n$, $n \geq 3$, $f = 2^n - 1$; $f_{ii} = 2^{n-1}$; $f_{ij} = 2^{n-(i-j)-1}$ *при* $1 \leq j < i \leq n$, *и* $f_{ij} = 2^{(j-i)-1}$ *при* $1 \leq i < j \leq n$; *для графа* P_n, $n \geq 2$, $f = u_{2n}$, $f_{ij} = u_{2\min(i,j)-1} \cdot u_{2(n+1-\max(i,j))-1}$; *для графа* C_n, $n \geq 3$, $f = u_{2n+1} + u_{2n+3} - 2$, $f_{ij} = u_{2|i-j|} + u_{2(n-|i-j|)}$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Деза Е.И., Мханна Б. О специальных свойствах некоторых квазиметрик // Чебышевский сборник. 2020. Том 21, выпуск 1. С. 145 – 164.

2. Чеботарев П.Ю., Агаев Р.П. Матричная теорема о лесах и лапласовские матрицы орграфов. - М.: LAP LAMBERT Academic publishing, 2011.

3. Chebotarev P. Spanning forest and the Golden ratio // Discrete Applied Mathematics. 2008. Vol. 156. P. 813 – 821.

4. Chebotarev P., Deza E. Hitting time quasi-metric and its forest representation // Optimization Letters. 2020. Vol. 14. P. 291 – 307.

УДК 512.55+519.7

Строение конечной групповой алгебры группы Гейзенберга и приложения к теории кодирования

Э. Л. Иноземцев (Россия, г. Ростов-на-Дону)
Южный федеральный университет
e-mail: edick_inozemcev@mail.ru
К. В. Веденёв (Россия, г. Ростов-на-Дону)
Южный федеральный университет
e-mail: vedenev@sfedu.ru

Structure of the finite Heisenberg group algebra and its application to coding theory

E. L. Inozemtsev (Russia, Rostov-on-Don)
Southern Federal University
e-mail: edick_inozemcev@mail.ru
K. V. Vedenev (Russia, Rostov-on-Don)
Southern Federal University
e-mail:vedenev@sfedu.ru

1. Введение

Пусть G - группа, $\mathbb{F}_q$ - поле Галуа мощности q. Групповой алгеброй

$$\mathbb{F}_q G = \left\{ \sum_{g \in G} a_g g \mid a_g \in \mathbb{F}_q \right\}$$

называется векторное пространство с базисом G, при этом умножение определено следующим образом:

$$\sum_{g \in G} \alpha_g g \sum_{g \in G} \beta_g g = \sum_{g \in G} \left(\sum_{h \in H} \alpha_{gh^{-1}} \beta_h \right) g.$$

Из теоремы Машке следует, что если $\gcd(q, |G|) = 1$, то групповая алгебра является полупростой. В этом случае в силу теоремы Веддербёрна групповая алгебра $\mathbb{F}_q G$ изоморфна прямой сумме матричных алгебр над некоторыми расширениями поля $\mathbb{F}_q$.

Группа Гейзенберга над кольцом $\mathbb{Z}_n$ определяется следующим образом:

$$H_3(\mathbb{Z}_n) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x_{12} & x_{13} \\ 0 & 1 & x_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, x_{ij} \in \mathbb{Z}_n \right\}.$$

Рассмотрим элементы a, b, c:

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, c = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Нетрудно заметить, что выполняются следующие соотношения:

$$ab = ba, ab = c^{-1}ac, bc = cb.$$

Легко проверить ([1], §1.4), что группа Гейзенберга $H_3(\mathbb{Z}_n)$ задаётся копредставлением:

$$H_3(\mathbb{Z}_m) = \langle a, b, c \mid a^n, b^n, c^n, ab = ba, ab = c^{-1}ac, bc = cb \rangle.$$

В работе в случае, когда $n \mid (q-1)$, построено разложение групповой алгебры $\mathbb{F}_q H_3(\mathbb{Z}_n)$. Полученные результаты применены для исследования помехоустойчивых кодов (левых идеалов) над группой Гейзенберга $H_3(\mathbb{Z}_n)$.

2. Разложение Веддербёрна

Пусть $d = \gcd(t, n)$, $r = n/d$. Для $0 \le k \le d-1$ и $0 \le t \le n-1$ определим гомоморфизмы

$$T_{k,t} : \mathbb{F}_q H_3(\mathbb{Z}_n) \to \mathrm{M}_r(\mathbb{F}_q\langle h | h^d \rangle),$$

заданные своими значениями на образующих элементах следующим образом:

$$T_{k,t} : a \mapsto \begin{pmatrix} \alpha^k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha^{k+t} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \alpha^{k+t(\frac{n}{d}-1)} \end{pmatrix}, T_{k,t} : b \mapsto \begin{pmatrix} \alpha^t & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha^t & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \alpha^t \end{pmatrix},$$

$$T_{k,t} : c \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & h \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Теорема 1. *Пусть $n \mid (q-1)$. Имеет место изофорфизм:*

$$\tau : \mathbb{F}_q H_3(\mathbb{Z}_n) \to \bigoplus_{t=0}^{n-1} \bigoplus_{k=0}^{d-1} \mathrm{M}_r(\mathbb{F}_q\langle h | h^d \rangle), \quad \tau = \bigoplus_{t=0}^{n-1} \bigoplus_{k=0}^{d-1} T_{k,t}.$$

Пусть $\alpha_d \in \mathbb{F}_q$ — примитивный корень степени d. Тогда

$$x^d - 1 = \prod_{i=0}^{d-1} (x - \alpha_d^i),$$

откуда в силу китайской теоремы об остатках ([2], с. 382) следует, что отображение

$$f_d : \mathbb{F}_q\langle h | h^d \rangle \to \mathbb{F}_q^d, \quad h \mapsto (\alpha_d^0, \alpha_d^1, \dots, \alpha_d^{d-1})$$

является изоморфизмом $\mathbb{F}_q$–алгебр. Нетрудно заметить, что f_d естественным образом индуцирует изоморфизм $\hat{f}_d : \mathrm{M}_k(\mathbb{F}_q\langle h | h^d \rangle) \to \mathrm{M}_k(\mathbb{F}_q)^d$. Таким образом, справедливо следующее следствие.

Следствие 1. *Пусть $n \mid (q-1)$. Имеет место изоморфизм:*

$$\mathcal{T} : \mathbb{F}_q H_3(\mathbb{Z}_n) \to \bigoplus_{t=0}^{n-1} \bigoplus_{k=0}^{d-1} \bigoplus_{l=0}^{d-1} \mathrm{M}_r(\mathbb{F}_q), \quad \mathcal{T} = \bigoplus_{t=0}^{n-1} \bigoplus_{k=0}^{d-1} \hat{f}_d T_{k,t}.$$

3. Групповые коды

Всякий собственный левый идеал групповой алгебры $\mathbb{F}_q G$ называется групповым кодом (или же G–кодом). Такой подход к построению помехоустойчивых кодов, впервые предложенный С. Д. Берманом, позволяет строить новые и изучать существующие коды алгебраическими методами (см. обзор [3]).

Ниже в случае, когда $n \mid (q-1)$, с использованием разложения групповой алгебры $\mathbb{F}_q H_3(\mathbb{Z}_n)$ из предыдущего раздела получено полное алгебраическое описание всех кодов (левых идеалов) над группой $H_3(\mathbb{Z}_n)$.

Пусть V_r — векторное подпространство пространства $\mathbb{F}_q^r$. Определим множество:

$$I(\mathbb{F}_q, r, V_r) = \{A \in M_r(\mathbb{F}_q) \mid \forall v \in V \quad Av = 0\}.$$

Известно, что всякий левый идеал матричной алгебры $M_r(\mathbb{F}_q)$ имеет вид $I(\mathbb{F}_q, r, V_r)$, при этом имеется взаимно–однозначное соответствие между левыми идеалами $M_r(\mathbb{F}_q)$ и подпространствами V ([4], с. 92).

Теорема 2. *Пусть I - произвольный левый идеал ($H_3(\mathbb{Z}_n)$–код) алгебры $\mathbb{F}_q H_3(\mathbb{Z}_n)$. Тогда его образ при изоморфизме $\mathcal{T}$ имеет вид:*

$$\mathcal{T}(I) = \bigoplus_{t=0}^{n-1} \bigoplus_{k=0}^{d-1} \bigoplus_{l=0}^{d-1} I(\mathbb{F}_q, r, V_r).$$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Coxeter H. S. M., Moser W. O. J. Generators and relations for discrete groups. — Springer, 2013. – Т. 14.
2. Винберг Э. Б. Курс алгебры. — М.: МЦНМО, 2019.
3. Kelarev A. V., Solé P. Error-correcting codes as ideals in group rings //Contemporary Mathematics. – 2001. – Т. 273. – С. 11-18.
4. Jacobson N. Structure of rings. — American Mathematical Soc., 1956. – Т. 37.

УДК 004.056.55

Аппаратная реализация сбалансированных S-блоков

Е. А. Курганов (Россия, г. Москва)
Научно-исследовательский институт «Восход»
e-mail: kuev@yandex.ru

Hardware implementation of balanced S-boxes

E. A. Kurganov (Russia, Moscow)
Scientific and Research Institute Voskhod
e-mail: kuev@yandex.ru

1. Введение

S-блок — это нелинейное преобразование, принимающее на вход n бит и возвращающее m бит. Такое преобразование проще всего представлять как таблицу подстановок размером $n \times m$. Чаще всего в криптографии используют только сбалансированные S-блоки (это значит, что отображение, задаваемое S-блоком, является биекцией). Иными словами это значит, что число входных битов равно числу выходных битов.

S-блок — важная часть большинства симметричных шифров. Подбор правильной подстановки позволяет сделать связь между ключом и зашифрованным текстом более сложной (нелинейной), что значительно усложняет взлом.

В настоящем докладе рассматривается аппаратная реализация сбалансированных S-блоков. Определяющими параметрами производительности таких реализаций являются глубина и сложность схемы. Под глубиной понимается длина максимального простого пути, а под сложностью — общее число элементов схемы. Рассматривается базис из элементов конъюнкции, дизъюнкции, отрицания и задержки. При этом отрицание игнорируется при вычислении глубины и сложности (вычисление проводится по тем же правилам, что и в работах [1, 2]).

В докладе рассматриваются различные универсальные методы, позволяющие получить аппаратную реализацию произвольного сбалансированного S-блока. После этого в плане глубины и сложности сравниваются аппаратные реализации S-блоков, полученные разными методами. Для этого автором была написана программа, позволяющая построить схему на языке Verilog для заданной подстановки тем или иным методом синтеза.

2. Описание программы

Программа написана на языке C++ и рассчитана на S-блоки размером не больше, чем 16×16 бит. На вход программы подается сама подстановка (записанная в файл) и метод, которым надо сгенерировать схему. На выходе получается файл со схемой на языке Verilog. Поддерживаются следующие пять методов синтеза:

- наивный;
- улучшенный наивный;
- Шеннона;
- Лупанова;
- на основе упрощения дизъюнктивной нормальной формы (ДНФ).

Описание и исходный код программы можно найти по адресу:
https://github.com/ekurganov/sbox_circuit.

3. Краткое описание методов синтеза

Определение 1. *Дешифратор от переменных $x_1, \ldots, x_n$ — схема, реализующая все конъюнкции вида $x_1^{\sigma_1} \& x_2^{\sigma_2} \& \ldots \& x_n^{\sigma_n}$, где $\sigma_i = 0, 1$, $i = 1, \ldots, n$; $x^1 = x, x^0 = \bar{x}$ (всего будет 2^n конъюнкций, на каждом наборе только одна из них будет равна 1). Обозначим эту схему D_n.*

Наивный метод на основе совершенной дизъюнктивной нормальной формы (СДНФ). При использовании данного метода схема для сбалансированного S-блока от n переменных строится следующим образом:

1. строится схема дешифратора D_n;
2. для каждого выхода S-блока y_j, $j = 1, \ldots, n$ выбирается 2^{n-1} из 2^n получившихся на прошлом шаге конъюнкций, которым соответствуют те входные значения, на которых $y_j = 1$;
3. для каждого выхода S-блока y_j, $j = 1, \ldots, n$ считается дизъюнкция 2^{n-1} элементов, выбранных на прошлом шаге.

Утверждение 1. *Для любого сбалансированного S-блока размером $n \times n$ бит верно следующее:*

- *каждая булева функция, реализующая выходной бит S-блока, равна 0 и 1 на 2^{n-1} наборах переменных;*
- *обе булевы функции из любой пары, реализующей выходные биты S-блока, одновременно равны 1 на 2^{n-2} наборах переменных.*

4. Улучшенный наивный метод

Описанный выше наивный метод реализации S-блоков можно улучшить, воспользовавшись утверждением 1. Для этого сгруппируем выходы дешифратора D_n. Разобьем выходы S-блока $z_1, \ldots, z_n$ на пары произвольным образом. Для каждой пары (j_1, j_2) выберем те выходы дешифратора, на которых $z_{j_1} = z_{j_2} = 1$. Таких элементов будет ровно $2^{n-1} + 2^{n-2}$, причем 2^{n-2} из них будут общими. Пусть для z_{j_1} это будут элементы $y_1^{j_1}, \ldots, y_{2^{n-1}}^{j_1}$, а для z_{j_1} — $y_1^{j_2}, \ldots, y_{2^{n-1}}^{j_2}$, и при этом $y_{2^{n-2}+1}^{j_1} = y_{2^{n-2}+1}^{j_2}, \ldots, y_{2^{n-1}}^{j_1} = y_{2^{n-1}}^{j_2}$. Тогда для данной пары можно сначала параллельно посчитать дизъюнкции $\bigvee_{i=1}^{2^{n-2}} y_i^{j_1}$, $\bigvee_{i=1}^{2^{n-2}} y_i^{j_2}$, $\bigvee_{i=2^{n-2}+1}^{2^{n-1}} y_i^{j_1}$, а потом уже дизъюнкцию двух посчитанных элементов для каждого выхода.

Методы Шеннона и Лупанова. Данные методы являются широко известными универсальными методами синтеза схем из функциональных элементов и описаны в большом количестве литературы. Подробнее см, например, [3].

Метод на основе упрощения ДНФ. Рассмотрим каждый выходной бит S-блока $n \times n$ как отдельную булеву функцию от n переменных.

Применим для каждой из этих функций алгоритм ESPRESSO [4], который считает ДНФ, близкую к минимальной (для небольших n она совпадает с минимальной). Далее для полученной ДНФ схема строится таким же образом, как и в методе на основе СДНФ. А именно, сначала считаются все необходимые элементарные конъюнкции, после чего считается их дизъюнкция.

Сложность такой схемы можно уменьшить следующим способом: начиная с числа $t = n-1$ и уменьшая его до 2, начнем искать среди каждой элементарной конъюнкции, входящей в ДНФ какого-либо из выходов S-блока, общие конъюнкции, состоящие ровно из t элементов. При нахождении таких конъюнкций будем предвычислять их до вычисления значения функции выхода таким образом, чтобы общая глубина вычисления исходной конъюнкции не увеличилась. На каждом новом шаге будем искать общие конъюнкции также среди найденных ранее общих частей. Таким образом, итоговая схема будет иметь примерно такой вид:

- общие элементы вида $x_{i_1} \& x_{i_2}$;
- общие элементы вида $x_{i_1} \& x_{i_2} \& x_{i_3}$;
- $\ldots$
- общие элементы вида $x_{i_1} \& \ldots \& x_{i_n}$;
- $z_1 = \bigvee x_{i_1} \& \ldots \& x_{i_n}$;
- $\ldots$
- $z_n = \bigvee x_{i_1} \& \ldots \& x_{i_n}$.

5. Общие оценки

Обозначим глубину схемы S через $D(S)$, а сложность — $L(S)$.

Утверждение 2. *Для схемы S произвольного сбалансированного S-блока от n переменных ($n \in \mathbb{N}$), полученной в результате работы программы, верны следующие оценки:*

- *для наивного метода*
  - $D(S) \leqslant \lceil \log_2 n \rceil + n - 1$;
  - $L(S) \leqslant 2^n + (n+1)(2^{n-1} - 1) + 1$;
- *для улучшенного наивного метода*
  - $D(S) \leqslant \lceil \log_2 n \rceil + n - 1$;
  - $L(S) \leqslant 2^n + (n+1)2^{n-1} - (n-1)(2^{n-3} + 1)$;
- *для метода Шеннона*
  - $D(S) \leqslant \min(k + \lceil \log_2 k \rceil - 1, \lceil \log_2(n-k) \rceil) + 1 + n - k$;
  - $L(S) \leqslant 2^{2^k - 1} + 2^{k-1} + (2n+1)2^{n-k} + 2^{n-k-1} - n - k - 1$;
- *для метода Лупанова*
  - $D(S) \leqslant \min(\lceil \log_2 k \rceil + \lceil \log_2 s \rceil + \lceil \log_2 \lceil \frac{2^k}{s} \rceil \rceil, \lceil \log_2(n-k) \rceil) + 1 + n - k$;
  - $L(S) \leqslant n\lceil \frac{2^k}{s} \rceil \ \min\left(2^s - s - 1, n(s-1)2^{n-k}\right) + \left(n(\lceil \frac{2^k}{s} \rceil + 1) + 1\right) 2^{n-k} + 2^{n-k-1} + 2^k + 2^{k-1} - n$.

6. Практические результаты

Для того, чтобы понять, насколько эффективны приведенные выше методы, были сгенерированы схемы для некоторых S-блоков, использующихся в криптографических алгоритмах (см. таблицу ниже).

S-блок	**Шифр**	**Размер**
S_1	Шифр Кузнечик	8×8 бит
S_2	Шифр AES	8×8 бит
S_3	Шифр ZUC (первый S-блок)	8×8 бит
S_4	Шифр ZUC (второй S-блок)	8×8 бит
S_5	Шифр SNOW3G	8×8 бит
S_6	Шифр KASUMI (первый S-блок)	7×7 бит
S_7	Шифр KASUMI (второй S-блок)	9×9 бит

Для сравнения эффективности реализаций данные S-блоки также были синтезированы на программе Logic Friday (LF) [5]. Однако при работе с S-блоком размером 9×9 бит программа зависает. Глубина и сложность реализации разными алгоритмами отражена в таблицах 1, 2.

Как видно из таблицы 1, во все случаях метод нахождения ДНФ, близкой к минимальной, для каждого выхода S-блока по отдельности позволяет добиться минимальной глубины реализации.

Из таблицы 2 следует, что лучший результат в плане сложности во всех случаях показывает метод Лупанова. При этом метод Шеннона совсем немного проигрывает ему в плане сложности, хотя он лучше в плане глубины.

Таблица 1: Глубина реализации S-блоков

S-блок	**Наивный+улучшенный**	**Шеннона**	**Лупанова**	**Мин. ДНФ**	**LF**
S_1	10	10	12	9	16
S_2	10	10	12	9	16
S_3	10	10	12	9	16
S_4	10	10	12	9	17
S_5	10	10	12	9	18
S_6	9	9	10	8	15
S_7	11	11	13	10	–

Таблица 2: Сложность реализации S-блоков

S-блок	**Наивный**	**Ул. наивный**	**Шеннона**	**Лупанова**	**Мин. ДНФ**	**LF**
S_1	1319	1068	680	677	973	823
S_2	1319	1068	680	677	973	780
S_3	1319	1068	680	677	960	800
S_4	1319	1068	680	677	929	747
S_5	1319	1068	680	677	987	862
S_6	604	512	372	353	463	461
S_7	2878	2371	1359	1340	1846	–

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Курганов Е. А. О глубине аппаратной реализации блочного шифра Кузнечик // Интеллектуальные системы. 2016. Том 20, № 1. С. 61-76.

2. Болотов А. А., Галатенко А. В., Гринчук М. И. и др. Методы оптимизации глубины реализации хэш-функций // Интеллектуальные системы. 2013. Том 17, № 1-4. С.224-228.

3. Яблонский С. В. Введение в дискретную математику. — Москва: Изд. Наука, 1986. 384 с.

4. Rudell R. L., Sangiovanni-Vincentelli A. Multiple-valued minimization for PLA optimization // IEEE Transactions on Computer-Aided Design of Integrated Circuits and Systems. 1987. Vol 6, № 5. P.727-750.

5. Программа в сети Интернет [Электронный ресурс], Режим доступа: `https://download.cnet.com/developer/logic-friday/i-10268041`.

УДК 519.7

Критерий существования скрытых каналов в модели невлияния

В. А. Кузовихина (Россия, г. Москва)
Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
e-mail: pletnyova_va@mail.ru

Criterion of existence of hidden channels in noninterference model

V. A. Kuzovikhina (Russia, Moscow)
Lomonosov Moscow State University
e-mail: pletnyova_va@mail.ru

Большинство современных систем является многопользовательскими, причем пользователи различаются по глубине прав доступа и возможности выполнения различных действий. Возникает задача поиска возможных каналов передачи информации между пользователями с различными правами доступа.

Понятие невидимости данных высокого уровня для пользователей низкого уровня тесно связано с понятием невлияния. В широком смысле невлияние означает невозможность для одного пользователя своими действиями влиять на работу другого пользователя. Иначе, появляется вероятность компрометации секретных данных по такому каналу передачи данных между различными уровнями доступа.

Классическая модель невлияния описана в работе [1]: вводится автоматная модель и дается определение безопасной системы в автоматных терминах. В работе [2] модель из работы [1] была усилена: добавились возможность параллельного ввода команд, рассмотрение выходной функции автомата. Кроме того, авторы ввели механизм передачи информации через зависимость входных и выходных последовательностей различных пользователей. Оказалось, что безопасные в смысле невлияния системы могут допускать такие каналы передачи информации. В работе [2] приведено достаточное условие отсутствия возможности передачи через зависимости.

Оказывается, что классическая и обобщенная модели невлияния эквивалентны. Будем считать модели эквивалентными, если существуют отображения вложения первой модели во вторую и второй модели в первую. Под вложением (выразимостью) понимается инъективное отображение систем в терминах исходной модели в системы в терминах целевой модели, сохраняющее свойство безопасности и являющееся гомоморфизмом с точки зрения функционирования (содержательно это означает, что система-прообраз и система-образ функционируют одинаково).

Также в данной работе сформулирован критерий отсутствия скрытых каналов.

Приведем формальное определение классической модели невлияния, взятое из работы [1].

Имеются два пользователя High (H) с высоким уровнем доступа и Low (L) с низким уровнем доступа.

Система описывается автоматом без выхода $B = (S, \Sigma, \delta)$, где

1. S — множество состояний. Каждое состояние задается как вектор значений $s = (s_1, \ldots, s_n)$ и S — совокупность возможных векторов.

2. Σ — входной алфавит.

3. $\delta : S \times \Sigma \to S$ — функция переходов.

Продолжим функцию δ на множество $S \times \Sigma^*$, где Σ^* — множество всех слов, составленных из букв алфавита Σ, e — пустое слово:

1. $\delta(s, e) = s$
2. $\delta(s, (x^1 \dots x^{n+1})) = \delta(\delta(s, (x^1 \dots x^n)), x^{n+1})$, где $x^i \in \Sigma$.

Определение 1. *Автомат называется двухуровневым, если входной алфавит Σ представляется как объединение двух непересекающихся множеств: $\Sigma = \Sigma_H \sqcup \Sigma_L$, а множество состояний — как $S = S_H \times S_L$.*

Определение 2. *Состояния $s^1, s^2 \in S$ называются эквивалентными, пишем $s^1 \sim s^2$, если их Low-компоненты равны.*

Таким образом, S разбивается на классы эквивалентности. Класс эквивалентности, содержащий $s \in S$, будем обозначать $[s]$. Обозначим отображение, разбивающее S на классы эквивалентности, $\pi : S \to S/_\sim$.

Также вводится функция Z_L: $\Sigma^* \to \Sigma_L^*$, которая из последовательности входов автомата оставляет только команды пользователя Low:

1. $Z_L(x) = e$, если $x \in \Sigma_H$, $Z_L(x) = x$, если $x \in \Sigma_L$;
2. $Z_L(x^1 x^2) = Z_L(x^1) Z_L(x^2)$.

Определение 3. *Система, задаваемая автоматом $B = (S, \Sigma, \delta)$, называется безопасной, если:*

1. *Отображение $\tilde{\delta} : S/_\sim \times \Sigma_L^* \to S/_\sim$, определяемое формулой $\tilde{\delta}([s], w_L) = [\delta(s, w_L)]$, где $[s] \in S/_\sim$ и $w_L \in \Sigma_L^*$, корректно определено.*
2. *$\pi \circ \delta = \tilde{\delta} \circ (\pi \times Z_L)$.*
   В левой и правой части равенств стоят отображения $S \times \Sigma^* \to S/_\sim$. Иными словами, следующая диаграмма коммутативна:

$$\begin{array}{ccc} S \times \Sigma^* & \xrightarrow{\delta} & S \\ {\scriptstyle \pi \times Z_L}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \pi} \\ S/_\sim \times \Sigma_L^* & \xrightarrow[\tilde{\delta}]{} & S/_\sim \end{array}$$

Содержательно 1 пункт определения безопасности означает, что “нет чтения вверх”, а 2 пункт означает, что “нет записи вниз”.

Приведем формальное определение обобщенной модели невлияния, взятое из работы [2].

Компьютерная система моделируется абстрактным автоматом $A = A(X, S, Y, \delta, \lambda)$, где X, S, Y — конечные непустые множества, представляющие собой, соответственно, входной алфавит, множество состояний и выходной алфавит, $\delta : S \times X \to S$ — функция переходов, $\lambda : S \times X \to Y$ — функция выходов.

Рассматривается следующая автоматная модель двухуровневой компьютерной системы.

Пусть $X = X_H \times X_L, X_H \bigcap X_L = \emptyset$, где X_H и X_L — множества входов для пользователей уровней H (High) и L (Low), соответственно, $S = S_H \times S_L$, $Y = Y_H \times Y_L$. Также введем обозначения координатных функций δ_H и $\delta_L(s, x)$: $\delta(s, x) = (\delta_H(s, x), \delta_L(s, x))$ и аналогично λ_H и λ_L.

Отношение эквивалентности на множестве S определяется так же как и в классической модели. Аналогично определим отношение эквивалентности на множестве Y.

Определение 4. *Будем говорить, что L не видит H, если функция $\tilde{\delta}\colon S/_\sim \times X_L \to S/_\sim$, определяемая формулой*

$$\tilde{\delta}([s], x_L) = [\delta(s', (x_H, x_L))],\ x_H \in X_H,\ s' \in [s],$$

и функция $\tilde{\lambda}\colon S/_\sim \times X_L \to Y/_\sim$, определяемая формулой

$$\tilde{\lambda}([s], x_L) = [\lambda(s', (x_H, x_L))],\ x_H \in X_H,\ s' \in [s],$$

корректно определены.

Система, удовлетворяющая определению 4, считается безопасной.

Теорема 1. *Классическая и обобщенная модели невлияния эквивалентны.*

Несмотря на эквивалентность моделей при практической реализации модели всё же могут различаться. По замечанию А.А. Грушо в классической модели невлияния отсутствуют скрытые каналы по времени, а в обобщенной этот вид скрытых каналов присутствует.

Хотя в обобщенной модели невлияния пользователю L неизвестно сообщение x_H, ему может быть известна статистическая связь между входными сообщениями x_L и x_H или известно априорное совместное распределение векторов (x_L, x_H). В этих случаях возможен скрытый канал с верхнего уровня на нижний.

Пусть на множестве $X = X_H \times X_L$ задано вероятностное распределение P (считаем, что в X нет элементов, вероятность которых равна нулю). Распределение P индуцирует на множествах X_H и X_L распределения вероятностей P_H и P_L.

С помощью функции λ при каждом фиксированном состоянии s распределение P индуцирует на Y распределение вероятностей Q^s такое, что

$$Q^s(y) = P\{x \in X : \lambda(s, x) = y\}.$$

Аналогично распределению P, Q индуцирует распределения Q_H и Q_L на H и L.

Определим совместную вероятность на $X_H \times Y_L$ при каждом состоянии $s \in S$:

$$P^s(x_H^0, y_L^0) = P\{(x_H^0, x_L) : x_L \in X_L, \lambda((x_H^0, x_L), s) = (y_H, y_L), y_H \in Y_H\}.$$

Тогда условную вероятность можно записать в виде:

$$P^s(y_L|x_H) = \frac{P^s(x_H, y_L)}{P_H(x_H)}$$

Определение 5. *Пусть L не видит H. Будем говорить, что L не видит H по вероятности, если для всех $x_H \in X_H$, $y_L \in Y_L$, $[s] \in S/_\sim$*

$$P^{s^1}(y_L|x_H) = Q^{s^2}(y_L),\ s^1, s^2 \in [s]$$

Для каждого s функция $\lambda(x, s)$ разбивает X_L на классы эквивалентности:

Определение 6. *Пусть L не видит H и зафиксировано состояние $s \in S$. Будем L-входы $x_L^1, x_L^2 \in X_L$ называть s-эквивалентными, если соответствующие им L-выходы равны. Более формально:*

$$x_L^1 \overset{s}{\sim} x_L^2 \Leftrightarrow \forall x'_H, x''_H \in X_H : \lambda(s, (x'_H, x_L^1)) = \lambda(s, (x''_H, x_L^2)).$$

Определение 7. *Пусть L не видит H и зафиксирован класс состояний $[s] \in S/_\sim$. Назовем L-входы $x_L^1, x_L^2 \in X_L$ $[s]$-эквивалентными, если:*

$$x_L^1 \overset{[s]}{\sim} x_L^2 \Leftrightarrow \tilde{\lambda}([s], x_L^1) = \tilde{\lambda}([s], x_L^2)$$

Перейдем от рассмотрения X_L к рассмотрению $X_L/_{\underset{\sim}{s}}$. Обозначим $X_L/_{\underset{\sim}{s}}$ за $\overline{X}^s_L$. Элементами $\overline{x}_L \in \overline{X}^s_L$ будут множества эквивалентных элементов X_L.

Отметим, что распределение P_L вероятности на множестве X_L также индуцирует распределение вероятности на $\overline{X}^s_L$.

Теорема 2. *Пусть L не видит H. Вероятностное невлияние имеет место тогда и только тогда, когда для любого состояния s вероятностные распределения на X_H и $\overline{X}^s_L$ независимы.*

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Moskowitz I.S., Costich O.L.. A classical automata approach to noninterference type problems// Proc. Computer Security Foundations Workshop V. IEEE Press. 1992. 2–8.

2. Грушо А.А., Шумицкая Е.Л.. Модель невлияния и скрытые каналы // Дискретная математика. 2002. 14 №1. 11–16

УДК 519.142

k-конфигурации

Ф. М. Малышев (Россия, г. Москва)
Математический институт им. В. А. Стеклова Российской академии наук
e-mail: malyshevfm@mi-ras.ru

k-configurations

F. M. Malyshev (Russia, Moscow)
Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences
e-mail: malyshevfm@mi-ras.ru

Понятие k-конфигурации введено автором тезисов в связи с производственной необходимостью в разреженных матрицах L над полем $GF(2)$ с равномерным распределением числа единиц по строкам и столбцам матрицы, причём это свойство должно выполняться и для обратной матрицы. Для различных k матрицы с таким свойством используются в шифраторах.

Определение 1. *Матрицу $L \in GL(v, 2)$ называем k-матрицей, если у неё и у матрицы L^{-1} в каждой строке и в каждом столбце k единиц и $v - k$ нулей.*

В докладе даётся обзор известных результатов по построению k-матриц. Значение k должно быть нечётным, поскольку иначе сумма строк матрицы L была бы нулевой. С практической точки зрения интересны значения $k = 3, 5, 7, 9$. Когда важен размер v матрицы L, будем говорить о (v, k)-матрицах. При $k = 1$ это подстановочные матрицы.

Если L_i – (v_i, k)-матрицы, $i = 1, 2$, то их прямая сумма $L_1 \dot{+} L_2 = \begin{pmatrix} L_1 & 0 \\ 0 & L_2 \end{pmatrix}$ будет $(v_1 + v_2, k)$-матрицей. Если L – (v, k)-матрица, а P и Q – подстановочные матрицы размера v, то PLQ тоже (v, k)-матрица. Матрицы PLQ получаются из L независимыми перестановками строк и столбцов, будем называть их комбинаторно эквивалентными. Матрицу, комбинаторно эквивалентную прямой сумме двух матриц, называем разложимой. Интересны как раз неразложимые (v, k)-матрицы. Если L_i – (v_i, k_i)-матрицы, $i = 1, 2$, то их тензорное произведение $L_1 \otimes L_2$ будет $(v_1 v_2, k_1 k_2)$-матрицей, поскольку $(L_1 \otimes L_2)^{-1} = L_1^{-1} \otimes L_2^{-1}$.

Предложение 1. *Пусть L – (v,k)-матрица, v чётно, а матрица $\overline{L}$ получается из L инвертированием всех её элементов. Тогда $\overline{L}$ – $(v,v-k)$-матрица.*

Доказательство следует из равенства $(J_v+L)(J_v+L^{-1})=I_v$, где J_v – матрица из одних единиц, I_v– единичная матрица, обе размера v. При чётном v, тем самым, все $(v,v-1)$-матрицы получаются инвертированием подстановочных.

Только эти приведённые выше замечания позволяют строить разнообразные примеры (v,k)-матриц для чётного v. Например, понимая под (v,k) какую-либо (v,k)-матрицу, получаем $(16,7)=\overline{(4,3)\otimes(4,3)}$, $(8,5)=\overline{(4,3)\dot{+}(4,3)}$, $(14,9)=\overline{(6,5)\dot{+}(8,5)}$, $(24,9)=\overline{(4,3)\otimes(6,5)}$.

Под k-матрицей следует понимать всё множество попарно комбинаторно эквивалентных (v,k)-матриц. Тогда естественным образом возникает эквивалентное k-матрицам понятие k-конфигураций на неупорядоченное множество X конечной мощности v. Складывая подмножества $A,B\subseteq X$ этого множества по правилу $A+B=(A\cup B)\setminus(A\cap B)$, получаем элементарную абелеву группу, изоморфную группе $GF(2)^v$ по сложению.

Определение 2. *Совокупность $\mathcal{X}\subset 2^X$ из v подмножеств мощности k в множестве X, $|X|=v$, называем k-конфигурацией, если:*

i) каждый элемент $x\in X$ принадлежит ровно k подмножествам из $\mathcal{X}$,

ii) каждый элемент $x\in X$ является суммой (как множество $\{x\}$) ровно k подмножеств из $\mathcal{X}$, причём каждое подмножество из $\mathcal{X}$ участвует в качестве слагаемого ровно в k таких суммах.

Матрица инциденций $L_{\mathcal{X}}$ для k-конфигурации $\mathcal{X}$ будет k-матрицей. Для k-конфигурации обозначение (v,k)-конфигурации не совсем уместно. Здесь нет столь жёсткой зависимости между значениями v и k, как, например, в (v,k,λ)-конфигурациях, в которых $0<\lambda<k<v-1$, $\lambda(v-1)=k(k-1)$ [1]. В определение k-конфигурации заложены не столь жёсткие требования на v, как для (v,k,λ)-конфигураций, но, тем не менее, для конкретных нечётных значений параметров v и k вопрос существования (v,k)-конфигураций часто является проблематичным.

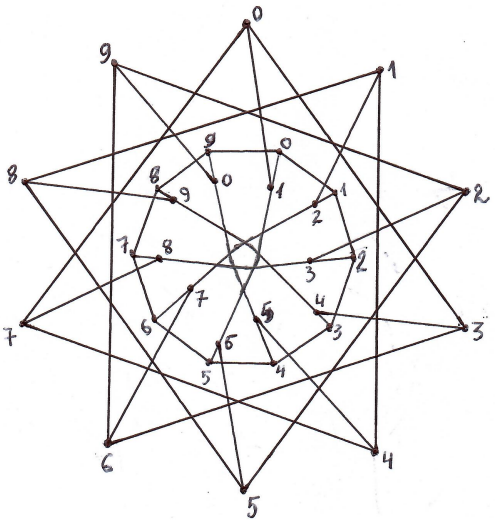
В построении k-конфигураций, кроме автора тезисов, в разное время принимали участие Брославский М.В., Зубков А.М., Красулина Е.Г., Сачков В.Н., Тараканов В.Е., Тришин А.Е., Фролов А.А. Представляется, что понятие k-конфигурации интересно не только с практической точки зрения. Первоначальные примеры k-конфигураций удавалось строить на основе правильных многогранников, регулярных и симметрических графов, квадратичных вычетов и невычетов, конечных групп, (v,k,λ)-конфигураций, включая конфигурации, которые отвечают совершенным разностным множествам, конечным проективным плоскостям и матрицам Адамара.

1. k-конфигурации в регулярных графах. Рассматриваем неориентированные графы Γ на v вершинах без петель и кратных рёбер. Регулярность означает, что от всех вершин p отходит одинаковое количество рёбер, равное $|\Gamma(p)|$, если $\Gamma(p)$ – совокупность вершин, смежных p.

Предложение 2. *Если в графе Γ на множестве вершин V, $|V|=v$, для всех его вершин $p\in V$ $|\Gamma(p)|=k$ – нечётно, а для любых двух различных вершин $p\neq q\in V$ мощность пересечения $\Gamma(p)\cap\Gamma(q)$ чётна, то $\mathcal{V}=\{\Gamma(p)|\,p\in V\}$ является k-конфигурацией на множестве V.*

Предложение 2 и его аналоги применялись к графам, образованным рёбрами правильных многогранников, а также к регулярным графам Γ на множестве вершин V из 14 главы монографии [2]. Если Γ – граф, образованный рёбрами икосаэдра, то $\mathcal{X}=\{\Gamma(p)|\,p\in V\}$ является $(12,5)$-конфигурацией. Аналогично, тетраэдр предоставляет $(4,3)$-конфигурацию, а куб – $(8,3)$-конфигурацию, распадающуюся на две $(4,3)$-конфигурации. В случае додекаэдра подмножества из 9 вершин, отстоящих от какой-либо вершины на одно или два ребра,

образуют $(20, 9)$-конфигурацию. На вершинах октаэдра естественным образом задаётся $(6, 3)$-конфигурация. Обращение к призмам, многомерным кубам, к графам Кокстера, Хивуда, Мак-Джи из [2] позволяло строить (v, k)-конфигурации, но снова только для чётных v. Исключение составил представленный ниже граф Леви.



В графе Леви все 8 вершин, отстоящих от заданной вершины p на максимально возможное число рёбер, равное 4, имеют с p пометки одинаковой чётности. Добавляя к этим восьмёркам вершин вершины p, получим 30 9-подмножеств, образующих $(30, 9)$-конфигурацию, распадающуюся на две $(15, 9)$-конфигурации.

2. (v, k)-конфигурации и (v, k, λ)-конфигурациями. Напомним (см. [1]), что (v, k, λ)-конфигурацией при $0 < \lambda < k < v - 1$ называется совокупность k-подмножеств $X_1, \dots, X_v$ в v-множестве X, для которой $|X_i \cap X_j| = \lambda$ при всех $1 \leqslant i < j \leqslant v$. Тогда автоматически всякий элемент $x \in X$ содержится ровно в k подмножествах X_i, $i \in \{1, \dots, v\}$. В случае(v, k, λ)-конфигурации на v-множестве X дополнения $Z_i = X \setminus X_i$, $i = 1, \dots, v$, образуют $(v, v - k, v - 2k + \lambda)$-конфигурацию.

Предложение 3. *Пусть k-подмножества $X_1, \dots, X_v$ в v-множестве X образуют (v, k, λ)-конфигурацию. Если k – нечётно, а λ – чётно, то эта совокупность подмножеств $\mathcal{X} = \{X_1, \dots, X_v\}$ является (v, k)-конфигурацией. А если k – чётно, λ – нечётно и v – нечётно, то дополнения $Z_i = X \setminus X_i$, $i = 1, \dots, v$, образуют $(v, v - k)$-конфигурацию.*

По двухстам (v, k, λ)-конфигурациям и $(v, v - k, v - 2k + \lambda)$-конфигурациям из приложения в [1] с помощью предложения 6 удалось получить 11 (v, k)-конфигураций. Конкретно, это $(11, 5)$, $(13, 9)$, $(19, 9)$, $(37, 9)$, $(27, 13)$, $(40, 13)$, $(31, 21)$, $(31, 25)$, $(57, 49)$, $(91, 81)$, $(133, 121)$-конфигурации. Здесь только в одном случае значение v чётно. Близость этих понятий подчёркивается другим определением (v, k)-конфигурации, эквивалентным определению 2.

Определение 3. *Совокупность k-подмножеств $X_1, \dots, X_v$ в множестве X такая, что каждое $x \in X$ содержится ровно в k из этих подмножеств, является (v, k)-конфигурацией, $0 < k < v = |X|$, если существует другое семейство k-подмножеств $Y_1, \dots, Y_v$ в X, для которого тоже каждое $x \in X$ содержится ровно в k из этих подмножеств, причём $|X_i \cap Y_j|$ нечётно для $j = i$ и чётно для $j \neq i$, $\quad i, j = 1, \dots, v$.*

Теорема 1. *При любых чётном v и нечётном k, $0 < k < v$, существует неразложимая (v, k)-конфигурация. Если при нечётных v и k существует (v, k)-конфигурация, то $v \geqslant k + (1 + \sqrt{4k - 3})/2$. Для $k \leqslant 17$ и всех $v \geqslant k + (1 + \sqrt{4k - 3})/2$ существует (v, k)-конфигурация за исключением при $k = 3$ значения $v = 7$, когда её не существует.*

Третье утверждение теоремы потребовало построения нескольких специальных (v,k)-матриц. А.Е. Тришин построил циркулянтные $(13,5)$, $(17,7)$, $(19,7)$, $(17,9)$, $(21,9)$-матрицы [5]. Он же посредством алгоритма, реализующего поиск в глубину, построил $(11,7)$-матрицу. Этим же алгоритмом он установил отсутствие неразложимых $(9,3)$ и $(11,3)$-матриц. Ранее автор тезисов доказал отсутствие $(7,3)$-матриц [3]. Разбиение листа Мёбиуса на 5 треугольников с вершинами на его границе в количестве 5, предоставляет $(5,3)$-конфигурацию, соответствующая $(5,3)$-матрица легко строится непосредственно. Потребовались ещё $(13,7)$ и $(19,9)$-матрицы, построенные В.Е. Тараканом. Приведём полученную им в [3] теорему общего характера.

Теорема 2. *Пусть p простое, R – множество ненулевых квадратичных вычетов кольца $\mathbb{Z}_p=\{0,1,\dots,p-1\}$, $\mathcal{R}=\{i+R|\, i\in\mathbb{Z}_p\}$ при $p\equiv 3 \bmod 8$ и $\mathcal{R}=\{i+(R\cup\{0\})|\, i\in\mathbb{Z}_p\}$ при $p\equiv 5 \bmod 8$. Тогда $\mathcal{R}$ будет $(p,(p-1)/2)$-конфигурацией при $p\equiv 3 \bmod 8$ и $(p,(p+1)/2)$-конфигурацией при $p\equiv 5 \bmod 8$.*

Теорема 3. *Неразложимые $(v,3)$-конфигурации для чётных $v\geqslant 4$ исчерпываются наборами подмножеств $\{2i,2i+1,2i+2\}$, $\{2i,2i+1,2i+3\}$, $i=0,1,\dots,v/2-1$, в кольце $\mathbb{Z}_v$. Для нечётных v неразложимой является только $(5,3)$-конфигурация.*

Доказательство теоремы 3 геометрической природы имеется в [4]. В качестве гипотезы (на фоне доказанной в [3] ниже приводимой теоремы 4) она выступала, когда стало известно отсутствие $(7,3)$, $(9,3)$ и $(11,3)$-матриц, а также после полученной Фроловым А.А. с помощью компьютерных вычислений классификации $(6,3)$, $(8,3)$-матриц и инволютивных $(v,3)$-матриц для $v\geqslant 4$. Для $k\geqslant 5$ пока классификационные теоремы имеются только для отдельных классов (v,k)-конфигураций.

3. (v,k)-группы. Если в определение 3 на множестве X задана структура группы G, и для некоторых подмножеств $H,S\subset G$, $\{X_1,\dots,X_v\}=\{gH|\, g\in G\}$, $\{Y_1,\dots,Y_v\}=\{gS|\, g\in G\}$, то говорим о (v,k)-группе (G,H). Не ограничивая общности, можно считать, что пересечение $H\cap G$ содержит единицу группы. Неразложимость соответствующей (v,k)-конфигурации равносильна порождаемости группы G элементами из H, что далее предполагается.

Теорема 4. *С точностью до изоморфизма $(v,3)$-группами являются: $(\mathbb{Z}_5,\{0,1,4\})$; $(\mathbb{Z}_{2n},\{0,1,n+1\})$, $n\geqslant 2$; $(\mathbb{Z}_{2n}\times\mathbb{Z}_2,\{(0,0),(1,0),(1,1)\})$, $n\geqslant 1$, они абелевы и других нет.*

При $k\geqslant 5$ возможны и не абелевы $(v,5)$-группы. Усилиями А.Е. Тришина [6] и А.А. Фролова [7] получена исчерпывающая классификация абелевых $(v,5)$-групп.

Теорема 5. *Циклические $(v,5)$-группы $(\mathbb{Z}_v,H)$ существуют тогда и только тогда, когда v кратно 2 или 3, либо равно одному из чисел: 11, 13, 17, 19. Такие $(v,5)$-группы кроме 26 исключительных случаев исчерпываются двумя бесконечными сериями: $H=\{0,u,u+t,z,z+t\}$, $v=2t$, $u,z\in\mathbb{Z}_v\setminus\{0,t\}$, $u\neq z$, $u-z\neq t$, $НОД(u,z,t)=1$, $t\geqslant 3$; $H=\{0,t,2t,z+t,z+2t\}$, $v=3t$, $z\in\mathbb{Z}_v$, $НОД(z,t)=1$, $t\geqslant 3$. В исключительных случаях $10\leqslant v\leqslant 19$.*

Теорема 6. *Абелевы нециклические $(v,5)$-группы с неинволютивной матрицей инциденций исчерпываются единственной серией: $(\mathbb{Z}_3\times\mathbb{Z}_{3n},\{(0,0),(1,0),(2,0),(1,1),(2,1)\})$, $n\geqslant 1$. Все абелевы (v,k)-группы с инволютивной матрицей инциденций являются факторами $(k-1)/2$-й декартовой степени группы $\mathbb{Z}_{2n}\times\mathbb{Z}_2$, $n\geqslant 1$.*

4. Надежду на классификацию $(v,5)$-конфигураций (хотя бы по модулю конечного числа исключительных случаев) даёт то обстоятельство, что большая часть известных примеров (v,k)-конфигураций получается факторизацией k-конфигураций работ [8], [9] на бесконечных счётных множествах. Представляется, что произвольные (∞,k)-конфигурации естественным образом ложатся на вещественные многообразования размерности, непревосходящей $(k-1)/2$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Холл, М.* Комбинаторика / М. Холл – М.:Мир, 1970.
2. *Харари, Ф.* Теория графов / Ф. Харари – М.:Мир, 1973.
3. *Малышев, Ф.М.* О (v, k)-конфигурациях / Ф.М. Малышев, В.Е. Тараканов– Мат. сборник, 2001, Т.192, № 9, С. 85-108.
4. *Малышев, Ф.М.* Классификация $(v, 3)$-конфигураций / Ф.М. Малышев, А.А. Фролов //Математические заметки. Т. 91, вып. 5, 2012 г., стр. 741-749.
5. *Тришин, А.Е.* Примеры (v, k)-матриц / А.Е. Тришин – Вестник ИКСИ (серия К), специальный выпуск, посвящённый 100-летию академика А. Н. Колмогорова – М., 2003, с. 179-185.
6. *Тришин, А.Е.* Классификация циркулянтных $(v, 5)$-матриц / А.Е. Тришин – Обозрение прикладной и промышленной математики, т. 11, вып. 2. – М.:ОПиПМ, 2004, с. 258-259.
7. *Фролов, А.А.* Классификация неразложимых абелевых $(v, 5)$-групп / А.А. Фролов //Дискретная математика. Том 20, № 1, 2008 г., стр. 94-108.
8. *Малышев, Ф.М.* Три семейства 5-конфигураций / Мат. вопросы криптографии, **4**:3 (2013), 83–97.
9. *Малышев, Ф.М.* Четыре бесконечные серии k-конфигураций / Мат. вопросы криптографии, **4**:4 (2013), 65–75.

УДК 511.32

Статистические свойства частичных сумм полиадических рядов

В. Ю. Матвеев (Россия, г. Москва)
Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, Российская академия народного хозяйства и государственной службы при Президенте Российской Федерации
e-mail: salomaa@mail.ru
В. Г. Чирский (Россия, г. Москва)
Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, Российская академия народного хозяйства и государственной службы при Президенте Российской Федерации
e-mail: vgchirskii@yandex.ru

Statistical properties of partial sums of polyadic series

V. Y. Matveev (Russia, Moscow)
Lomonosov Moscow State University, The Russian Presidential Academy of National Economy and Public Administration
e-mail: salomaa@mail.ru

V. G. Chirskii (Russia, Moscow)
Lomonosov Moscow State University, The Russian Presidential Academy of National Economy and Public Administration
e-mail:vgchirskii@yandex.ru

Полиадическое число имеет каноническое представление вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n n!, a_n \in \mathbb{Z}, 0 \le a_n \le n.$$

Рассматриваемый ряд сходится во всех полях p–адических чисел. В докладе рассказывается об исследованиях статистических свойств цифр конечных сумм таких рядов

$$\sum_{n=1}^{M} a_n n!.$$

УДК 519.1

Ориентированные метрические конструкции на графах

Мханна Батуль (Россия, г. Москва)
Московский педагогический государственный университет
e-mail: batool.mhanna77@gmail.com

Oriented metric constructions on graphs

Mhanna Batool (Russia, г. Moscow)
Moscow State Pedagogical University
e-mail: batool.mhanna77@gmail.com

Мы рассматриваем свойства квазиметрики среднего времени первого прохода (обобщенной метрической структуры, тесно связанной с эргодическими однородными цепями Маркова), построенной на основе нескольких графовых моделей, в том числе на базе простого цикла, простого пути и их ориентированных аналогов. [1, 2]

Для неориентированного цикла получен следующий результат.

Теорема 1. Пусть C_n, $n \ge 3$ – неориентированный цикл на n вершинах: $C_n = (V, E)$, $V = \{1, 2, ..., n\}$, $E = \{21, 32, ..., n(n-1), 1n\}$ (здесь пара ij соответствует ребру (i, j)). Пусть $M = ((m_{ij}))$, $i, j = 1, 2, ..., n$ – матрица среднего времени первого прохода цепи Маркова, соответствующей простому случайному блужданию по C_n. Тогда имеют место следующие соотношения:

$$m_{ii} = n,\ 1 \le i \le n;\ ,\ m_{ij} = |i-j| \cdot (n - |i-j|), 1 \le i \ne j \le n.$$

Для ориентированного цикла получен следующий результат.

Теорема 2. Пусть $\overrightarrow{C_n}$, $n \ge 3$ – ориентированный цикл на n вершинах: $\overrightarrow{C_n} = (V, E)$, $V = \{1, 2, ..., n\}$, $E = \{21, 32, ..., n(n-1), 1n\}$ (здесь пара ij соответствует дуге $\langle i, j\rangle$). Пусть $M = ((m_{ij}))$, $i, j = 1, 2, ..., n$ – матрица среднего времени первого прохода цепи Маркова, соответствующей простому случайному блужданию по $\overrightarrow{C_n}$. Тогда имеют место следующие соотношения:

$$m_{ii} = n,\ 1 \le i \le n;\ \ m_{ij} = \begin{cases} i - j, & \text{если } 1 \le j < i \le n, \\ n + i - j, & \text{если } 1 \le i < j \le n. \end{cases}$$

Аналогичные рассуждения проведены для квазиметрики среднего времени первого прохода для неориентированного пути P_n, $n \ge 2$, и ориентированного пути $\overrightarrow{P_n}$, $n \ge 2$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Деза Е.И., Мханна Б. О специальных свойствах некоторых квазиметрик // Чебышевский сборник. 2020. Том 21, выпуск 1. С. 145 – 164.

2. Chebotarev P., Deza E. Hitting time quasi-metric and its forest representation // Optimization Letters. 2020. Vol. 14. P. 291 – 307.

УДК 511

О генераторах последовательностей матриц над конечным полем

О. А. Пихтилькова (Россия, г. Москва)
МИРЭА – Российский технологический университет
e-mail: opikhtilkova@mail.ru
Е. В. Мещерина (Россия, г. Оренбург)
Оренбургский государственный университет
e-mail: elena_lipilina@mail.ru
А. Н. Благовисная (Россия, г. Оренбург)
Оренбургский государственный университет
e-mail: matmet@bk.ru

On generators of sequences of matrices over a finite field

O. A. Pikhtilkova (Russia, Moscow)
MIREA – Russian Technological University
e-mail: opikhtilkova@mail.ru
E. V. Mescherina (Russia, Orenburg)
Orenburg State University
e-mail: elena_lipilina@mail.ru
A. N. Blagovisnaya (Russia, Orenburg)
Orenburg State University
e-mail: matmet@bk.ru

Важнейшей характеристикой генераторов псевдослучайных последовательностей, применяемых в криптографических конструкциях, является период вырабатываемой генератором последовательности. Для периодической последовательности u период $T(u)$ определяется как наименьшее натуральное число $t \in N$, для которого существует $\lambda \in N_0$, такое, что $\forall i \geq \lambda$: $u(i+t) = u(i)$ [2, с.528]. Чем больше значение периода, тем больше преимуществ дают последовательности в практических приложениях. Мы рассматриваем вычислительные результаты оценок периодов последовательностей матриц, элементами которых являются элементы простых конечных полей. Алгоритмы получения последовательностей основаны на идеях линейных конгруэнтных генераторов и мультипликативных генераторов Фибоначчи с запаздыванием, описание которых для последовательностей целых чисел можно найти, например, в книге [1].

Линейный конгруэнтный генератор определялся рекуррентным соотношением вида

$$U_{i+1} = [A, U_i] + B,$$

где A, B – постоянные квадратные матрицы порядка n, U_0 – начальная квадратная матрица порядка n.

Мультипликативный генератор Фибоначчи с запаздыванием, вырабатывающий квадратные матрицы с элементами из простого конечного поля, определялся с помощью рекуррентного соотношения вида

$$U_i = [U_{i-r}, U_{i-q}],$$

где r, q – целые числа, $U_0, U_1, \ldots, U_i, \ldots$ – квадратные матрицы порядка n. Элементами матриц являются элементы простого конечного поля $GF(p)$. В качестве умножения матриц выбрана скобка Ли.

Определённые таким образом генераторы реализованы двумя способами:

— в среде Visual Studio Community Edition 2019 на языке C# с использованием технологии WPF создано программное средство «Генераторы последовательностей элементов матричных алгебр Ли»;

— в системе компьютерной алгебры Sage написаны программы, позволяющие получать последовательности по описанным рекуррентным соотношениям и находить соответствующие им периоды.

Вычислительный эксперимент заключался в случайной генерации комбинаций матриц-коэффициентов и начальных условий, получения на их основе последовательности, поиске периодов получившихся последовательностей и дальнейшем выборе максимального из получающихся значений периодов. Последовательности генерировались с помощью программного средства «Генераторы последовательностей элементов матричных алгебр Ли» и системы Sage.

Результаты поиска таких периодов представлены в таблицах 1 и 2, где введены следующие обозначения:

– p – характеристика поля $GF(p)$;

– n – порядок матриц (в скобках указывается количество сгенерированных последовательностей и найденных периодов, из которых выбиралось максимальное значение);

– ЛКГ – линейный конгруэнтный генератор;

– МГФ – мультипликативный генератор с запаздыванием с $r = 2$, $q = 1$.

Таблица 1: Результаты поиска максимально возможных значений периодов последовательностей

	$n = 2(2000)$		$n = 3(2000)$		$n = 4(2000)$		$n = 5(1000)$		$n = 6(1000)$	
p	ЛКГ	МГФ	ЛКГ	МГФ	ЛКГ	МГФ	ЛКГ	МГФ	ЛКГ	МГФ
2	2	1	7	24	15	54	126	108	126	1008
3	6	6	26	6	80	180	2184	1452	2184	8712
5	10	12	124	120	624	3720	15624	93744	15624	22320
7	14	24	342	168	2400	7200	117648	470568	117648	57600
11	22	60	1330	960	14640	31920	1771560	63840	1771560	79800
13	26	24	2196	1464	28560	114192	4826808	13104	4826808	8736

В ячейках таблицы 1 представлены максимальные значения периодов, которые удалось достичь при случайной генерации последовательностей. Выбор максимально возможного периода происходил как наибольшего из полученных периодов. В таблице 2 указано процентное соотношение найденных последовательностей с наибольшим периодом по отношению к числу всех сгенерированных последовательностей с заданными параметрами p и n.

Сравнение результатов максимальных значений периодов последовательностей, вырабатываемых двумя различными генераторами, позволяет сделать вывод о том, большим потенци-

Таблица 2: Доля последовательностей с максимальным периодом (%)

	$n = 2(2000)$		$n = 3(2000)$		$n = 4(2000)$		$n = 5(1000)$		$n = 6(1000)$	
p	ЛКГ	МГФ	ЛКГ	МГФ	ЛКГ	МГФ	ЛКГ	МГФ	ЛКГ	МГФ
2	39.1	100	9.4	8.2	4.75	6.45	1.7	0.2	2.8	0.2
3	20.3	30.2	12.2	33.3	9	0.8	1.8	0.1	1.5	0.1
5	15.15	46.54	12.9	4.55	15.05	0.1	6.5	0.1	11	0.1
7	12.15	64.18	11.1	0.4	13.5	0.05	5	0.1	9	0.1
11	7.95	65.58	23.8	0.8	18	0.05	0.3	0.1	0.1	0.1
13	7.1	75.3	8.6	0.15	15.2	0.05	0.2	0.1	0.1	0.1

алом для получения последовательностей максимального периода обладают мультипликативные генераторы Фибоначчи с запаздыванием, однако доля таких последовательностей может оказаться невелика.

Данные о значениях периодов последовательностей, вырабатываемых аналогом линейного конгруэнтного генератора, позволяют предполагать некоторые закономерности и делать предположения о зависимости максимальных значений периодов от характеристики поля и порядка матрицы. Например, для квадратных матриц второго порядка максимальное значение периода получилось равным $2p$, где $p > 2$. Для квадратных матриц третьего и четвёртого порядков можно заметить, что максимальные значения периодов есть $p^n - 1$.

В заключение отметим, что полученные результаты послужат основой для проведения дальнейших исследований в области теории псевдослучайных генераторов.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Иванов М.А., Чугунков И.В. Теория, применение и оценка качества генераторов псевдослучайных последовательностей. – Москва: КУДИЦ-ОБРАЗ, 2003. 238 с.

2. Глухов М.М., Елизаров В.П., Нечаев А.А. Алгебра. – Санкт-Петербург: Лань, 2020. 608 с.

УДК 519.[172-178]

Проблемы вычислительно эффективного сравнения деревьев процессов локализованными тестами графовых изоморфизмов

И. А. Склонин (Россия, г. Долгопрудный)
Московский физико-технический институт (Национальный исследовательский университет)
e-mail: sklonin.ilya@phystech.edu
Н. Н. Ефанов (Россия, г. Долгопрудный)
Московский физико-технический институт (Национальный исследовательский университет)
e-mail: nefanov90@gmail.com

Problems of Computationally Efficient Comparison of Process Trees by Localized Tests of Graph Isomorphisms

I. A. Sklonin (Russia, Dolgoprudnyy)
Moscow Institute of Physics and Technology (National Research University)
e-mail: sklonin.ilya@phystech.edu
N. N. Efanov (Russia, Dolgoprudnyy)
Moscow Institute of Physics and Technology (National Research University)
e-mail: nefanov90@gmail.com

В работе рассматривается способ сравнения деревьев процессов с помощью локализованных тестов на изоморфизм помеченных графов. Производится построение разметки вершин дерева процессов Linux для применимости способов проверки на изоморфизм помеченных графов к деревьям с согласованной перестановкой некорневых идентификаторов. Отдельно рассматриваются случаи с укорачиванием (завершением процессов): показаны проблемы применимости предложенного метода в тестах на изоморфизм при укорачивании.

1. Введение

Задача восстановления дерева процессов Linux, имеющая ряд важных практических приложений в современных компьютерных системах, может быть решена за полиномиальное время построением графа реконструкции, содержащего помеченным ребёрным покрытием последовательности команд построения - системных вызовов [7]. Извлечение последовательностей команд из такого графа может быть проведено топологической сортировкой за линейное время [9]. В силу вышесказанного, а также в силу комбинаторного взрыва количества деревьев при увеличении числа различных атрибутов процесса и системных вызовов [8], представляет интерес переиспользование готовых графов реконструкций для восстановления деревьев процессов, сходных по структурным и атрибутным свойствам с деревьями, для которых эти графы были построены. Для этого требуется разработать метод сравнения деревьев и графов реконструкции, обеспечивающий корректную и вычислительно эффективную работу с ориентированными помеченными графами со сложной структурой меток вершин.

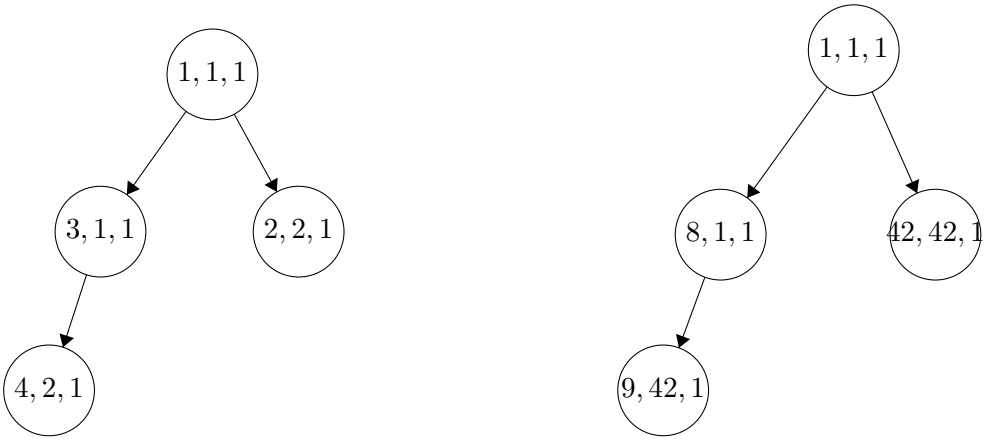


Рис. 1: Пример согласованной перестановки идентификаторов некорневых верших дерева процессов. Идентификаторы #1, #2, #3 – идентификаторы процесса *pid*, группы *pgid* и сессии *sid* соответственно. Корневой процесс всегда имеет идентификаторы “1,1,1”.

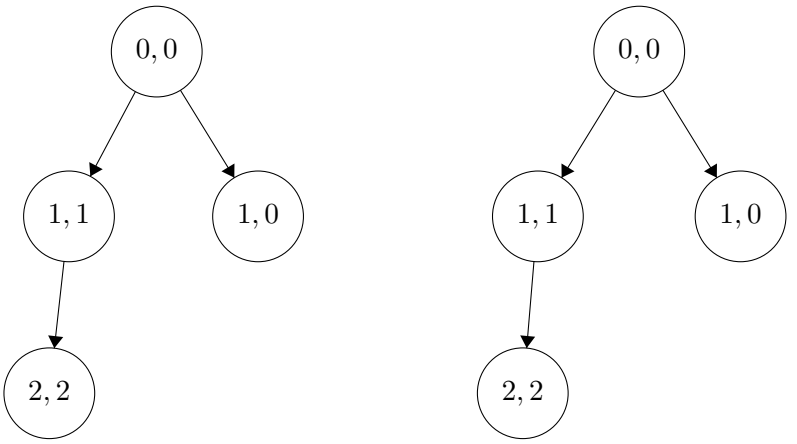


Рис. 2: Пример переразмеченных деревьев процессов с рис. 1. Идентификаторы #1, #2 – инвариантные метки из леммы 1 и леммы 2

2. Поиск инвариантов

Пусть дерево $T = (V, E, L)$ – корректное дерево процессов Linux [7], L – повершинная разметка дерева (V, E) кортежами идентификаторов $\{pid, pgid, sid\}$, $F(T)$ – дерево, полученное некоторой перестановкой некорневых идентификаторов pid согласованно с остальными идентификаторами (Рис. 1). Считаем, что в деревьях нет укорачиваний, то есть ни один процесс не завершился. Требуется построить такую новую разметку дерева процессов (Рис. 2), что метки L' нечувствительны к введенной выше перестановке, при этом структурные свойства и зависимости между идентификаторами сохраняются в метки вершины, либо её соседей [1]. Очевидно, что в таком случае дерево процессов $F(T)$ восстанавливается теми же последовательностями системных вызовов с точностью до аргументов, что и T. Переразмеченные деревья пометим как $\tilde{T} = (V, E, L')$. Именно такие деревья и будут исследоваться на изоморфизм.

Метка-инвариант сессий находится из однозначности положения лидера сессии в дереве процессов.

Лемма 1. *Метка длины пути от вершины процесса до лидера сессии в дереве процессов T_1 является инвариантом относительно перестановки идентификаторов $F(T_1)$*

Известно, что и дерево процессов, и его граф реконструкции являются верхней полной полурешеткой по отношению зависимости между состояниями процессов [7]. Следовательно, для любых двух вершин $u, v \in V$ $\exists! c \in V : u \sqcup v = c$. Используем данное свойство для построения инварианта группы процессов. Введем метку, значение которой равно длине пути от данной вершины v до наименьшей общей границы с вершиной u – лидером группы, либо -1, если лидера данной группы в дереве нет.

Лемма 2. *Вершина с является инвариантом для перестановки идентификаторов $F(T_1)$*

Теорема 1. *Для двух деревьев процессов $T_1, T_2 = F(T_1) \Rightarrow WL(\tilde{T_1}, \tilde{T_2}) = 0$, где WL – тест Вейсфелера-Лемана на изоморфизм двух графов [6].*

3. Случай укорачивания дерева процессов

При корректном завершении процесса (системный вызов exit() и удаление вершин из дерева процессов) информация о нём удаляется из системы, а процессы-потомки переупорядочива-

[1] Такое сохранение должно обеспечить применимость локализованных тестов на изоморфизм

ются к корневому процессу как поддеревья [3]. В докладе обсуждаются примеры ошибочности в случае укорачивания дерева процессов. Приводится вариант предложенного метода для случая укорачивания.

Теорема 2. *Корректная обработка укорачиваний требует не менее* $O(|V|^2)$ *сравнений.*

4. Заключение

В результате исследований можно сделать вывод о необходимости поиска эффективного способа сравнения деревьев процессов в случае укорачивания. Дальнейшие исследования будут посвящены построению таких методов на основе графовых эмбеддингов и графовых ядер, а также экспериментальному сравнению на реальных и синтетических тестах.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Mirkin A., Kuznetsov A., Kolyshkin K. Containers checkpointing and live migration // Proceedings of the In Ottawa Linux Symposium. 2008. V. 2.

2. Ефанов Н. Н., Емельянов П. В. Построение формальной грамматики системных вызовов // М. Информационное обеспечение математических моделей. 2017. С. 83–90.

3. Efanov N. N., Emelyanov P. V. Constructing the formal grammar of system calls // In Proceedings of the 13th Central & Eastern European Software Engineering Conference in Russia (CEE-SECR'17). 2017. Article 12. 5 pages.

4. Cayley A. A theorem on trees.// Collected Mathematical Papers. 1897. V. 13, P. 26–28.

5. Kallmeyer L., Satta G. A polynomial-time parsing algorithm for TT-MCTAG // In Proceedings of the Joint Conference of the 47th Annual Meeting of the ACL and the 4th International Joint Conference on Natural Language Processing of the AFNLP. 2009. V. 2. P. 994–1002.

6. Weisfeiler and A. A. Lehman. A reduction of a graph to a canonical form and an algebra arising during this reduction. Nauchno-Technicheskaya Informatsia, Ser. 2, 9, 1968.

7. N. N. Efanov, 2019, "On semilattice of Linux processes' states Chebyshevskii sbornik, vol. 20, no. 4, pp. 124–136.

8. Ефанов Н.Н. О некоторых комбинаторных свойствах деревьев процессов LINUX. Чебышевский сборник. 2018;19(2):151-162.

9. Cormen, Thomas H.; Leiserson, Charles E.; Rivest, Ronald L.; Stein, Clifford (2001), "Section 22.4: Topological sort Introduction to Algorithms (2nd ed.), MIT Press and McGraw-Hill, pp. 549–552.

УДК 004.421, 512.54, 519.25, 519.65

Вычислительный анализ некоторых аппроксимационных свойств разрешимых групп Баумслага–Солитэра

Е. А. Туманова (Россия, г. Иваново)
Ивановский государственный университет
e-mail: helenfog@bk.ru

Computational analysis of some residual properties of solvable Baumslag–Solitar groups

E. A. Tumanova (Russia, Ivanovo)
Ivanovo State University
e-mail: helenfog@bk.ru

Следуя [1], для каждого ненулевого целого числа k обозначим через G_k группу, которая задается представлением $G_k = \langle a, b;\ a^{-1}ba = b^k\rangle$ и входит в хорошо известное семейство групп Баумслага–Солитэра. Аппроксимируемость группы G_k различными классами конечных групп изучалась в [2, 3, 4, 5]. Известно, что группа G_k финитно аппроксимируема при любом $k \neq 0$ [2, 3] и аппроксимируема конечными p-группами, где p — некоторое простое число, тогда и только тогда, когда p делит $k-1$ [4].

В [5] была рассмотрена аппроксимируемость группы G_k классом $\mathcal{F}_\pi$ всех конечных π-групп, где π — некоторое множество простых чисел. Одним из основных результатов указанной статьи является эффективно проверяемый критерий $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемости группы G_k в случае, когда множество π состоит из двух простых чисел, каждое из которых не делит $k-1$. Кроме того, в ней доказано, что если $|k| > 1$, то для любого простого числа p, не делящего $k-1$, найдется простое число q, не делящее $k-1$ и такое, что группа G_k $\mathcal{F}_{\{p,q\}}$-аппроксимируема (нетрудно проверить, что при $k = \pm 1$ данное утверждение не выполняется).

Результаты статьи [5] оставляют открытым вопрос о количестве двухэлементных множеств простых чисел, удовлетворяющих условиям критерия $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемости группы G_k при заданном k. В настоящей работе этот вопрос исследуется при условии, что $2 \leqslant |k| \leqslant 10000$ и элементы множества π выбираются из первых 50000 простых чисел. Указанные ограничения обусловлены временем, необходимым для перечисления двухэлементных множеств простых чисел и выбора из них тех, для которых справедливы условия критерия (все описанные ниже результаты получены с помощью программ, реализованных автором на языке C++ (GCC) с использованием C RTL и C++ STL).

Для любых $|k| > 1$, $x \geqslant 1$ обозначим через:

$\mathcal{P}(x)$ — множество, составленное из первых x простых чисел;

$\mathcal{S}_k(x)$ — семейство множеств простых чисел $\{p, q\}$, удовлетворяющих условиям критерия $\mathcal{F}_{\{p,q\}}$-аппроксимируемости группы G_k и таких, что $p, q \in \mathcal{P}(x)$;

$f_k(x)$ — мощность множества $\mathcal{S}_k(x)$.

В первую очередь были исследованы величины $\mathfrak{C}(k) = f_k(50000)$ и $\mathfrak{c}(k) = f_k(4)$. Установлено, что значения $\mathfrak{C}(k)$ меняются в достаточно широких пределах. Если рассматривать функцию $\mathfrak{C}$ как случайную величину, то $M(\mathfrak{C}) \approx 2940,57$ и $\sigma(\mathfrak{C}) \approx 280,02$. Анализируя точки, в которых функция $\mathfrak{C}$ принимает самые большие и самые маленькие значения, можно предположить, что величина $\mathfrak{C}(k)$ существенным образом зависит от знака числа k и его разложения на простые множители. Функция $\mathfrak{c}$ соответствует случаю, когда простые числа, составляющие множество π, выбираются из $\mathcal{P}(4) = \{2, 3, 5, 7\}$ и, следовательно, такое множество π может

быть довольно быстро найдено вручную. Установлено, что неравенство $\mathfrak{c}(k) > 0$ справедливо для 10000 из 19998 рассмотренных значений k, причем среди последних положительных и отрицательных практически поровну.

Далее был исследован вопрос о том, как меняется величина $f_k(x)$ в зависимости от количества x рассматриваемых простых чисел при фиксированном k. Установлено, что почти для всех k выполняется приближенное равенство $f_k(x) \approx \alpha_k x^{0,85}$, где коэффициент α_k зависит от k и $0,28 < \alpha_k \leqslant 0,31$. Оценка качества аппроксимации функции $f_k(x)$ осуществлялась путем определения числа, ограничивающего сверху величины

$$\left|1 - \alpha_k x^{0,85} / \tilde{f}_k(x)\right| \quad \left(x \in \mathcal{P}(50000)\right),$$

где

$$\tilde{f}_k(x) = \begin{cases} f_k(x), & \text{если } f_k(x) \neq 0, \\ 1, & \text{если } f_k(x) = 0, \end{cases}$$

по меньшей мере для 95% элементов множества $\mathcal{P}(50000)$. Установлено, что для 19943 из 19998 рассмотренных значений k выполняется соотношение

$$\operatorname{card}\left\{x \in \mathcal{P}(50000) \;\middle|\; \left|1 - \alpha_k x^{0,85} / \tilde{f}_k(x)\right| \leqslant 0,15\right\} \geqslant 50000 * 0,95 = 47500.$$

Из всех произведенных расчетов наибольшую вычислительную сложность имело отыскание элементов множества $\mathcal{S}_k(x)$. Если следовать математической формулировке критерия $\mathcal{F}_{\{p,q\}}$-аппроксимируемости группы G_k из [5], то временная сложность проверки его условий оказывается равной $O\left(\sqrt{\max\{p,q\}}\right)$. В настоящей работе был предложен и реализован алгоритм проверки условий критерия, имеющий сложность порядка $O\left(\log_2 \max\{p,q\}\right)$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Moldavanskii D. I., Sibyakova N. Yu. On the finite images of some one-relator groups // Proc. Amer. Math. Soc. 1995. Vol. 123. P. 2017–2020.

2. Baumslag G., Solitar D. Some two-generator one-relator non-Hopfian groups // Bull. Amer. Math. Soc. 1962. Vol. 68. P. 199–201.

3. Meskin S. Non-residually finite one-relator groups // Trans. Amer. Math. Soc. 1972. Vol. 164. P. 105–114.

4. Молдаванский Д. И. Аппроксимируемость конечными p-группами HNN-расширений // Вестн. Иван. гос. ун-та. 2000. № 3. С. 129–140.

5. Иванова О. А., Молдаванский Д. И. Аппроксимируемость конечными π-группами некоторых групп с одним определяющим соотношением // Науч. тр. Иван. гос. ун-та. Математика. 2008. Т. 6. С. 51–58.

Секция 5. Аналитическая теория чисел

УДК 511.32

Оценка коротких тригонометрических сумм Вейля в малых дугах

А. З. Азамов (Таджикистан, г. Душанбе)
Таджикский национальный университет
e-mail: asliddinkhon@mail.ru
Н. Н. Назрублоев (Таджикистан, г. Душанбе)
Институт математики им. А.Джураева НАН Таджикистана
e-mail: nasrullo_86@bk.ru

Estimation of short exponential Weyl sums in minor arcs

A. Z. Azamov (Tajikistan, Dushanbe)
Tajik National University,
e-mail: asliddinkhon@mail.ru
N. N. Nazrubloev (Tajikistan, Dushanbe)
A.Dzhuraev Institute of Mathematics, NAS of Tajikistan
e-mail: nasrullo_86@bk.ru

Согласно теореме Дирихле о приближении действительных чисел рациональными числами, каждое действительное α представимо в виде

$$\alpha = \frac{a}{q} + \lambda, \quad (a,q) = 1, \qquad 1 \leqslant q \leqslant \tau, \qquad |\lambda| \leqslant \frac{1}{q\tau}.$$

Через $\mathfrak{M}(P)$ обозначим те числа α, для которых $q \leqslant P$, через $\mathfrak{m}(P)$ обозначим оставшиеся α. $\mathfrak{M}(P)$ и $\mathfrak{m}(P)$ соответственно называются большими и малыми дугами.

Общеизвестно, что вывод асимптотической формулы в изучения аддитивных задач с почти равными слагаемыми, к которым относятся проблема Варинга и проблема Эстермана, сводится поведение коротких тригонометрических сумм Г.Вейля вида

$$T_k(\alpha; x, y) = \sum_{x-y<n\leq x} e(\alpha n^k),$$

в больших дугах и их оценка в малых дугах. Поведение $T_k(\alpha; x, y)$ в больших дугах последовательно изучено в работах [1] – [6]. В работе [7] для тригонометрической суммы $T_k(\alpha; x, y)$ была доказана, что *если* $x \geqslant x_0 > 0$, $y_0 < y \leqslant 0,01x$, $\tau(h)$ — *функция делителей,* α *– вещественное число,* $\left|\alpha - \frac{a}{q}\right| \leqslant \frac{1}{q^2}$, $(a,q) = 1$, *то справедлива оценка*

$$|T_k(\alpha; x, y)| \leqslant 2y\left(4k!\left(\frac{1}{q} + \frac{1}{y} + \frac{q\ln q}{y^k}\right)\max_{h<y^{k-1}}\tau(h)\right)^{\frac{1}{2^{k-1}}},$$

которая нетривиальна при $q \gg 2^{2k-1}4k!\tau(y^{k-1})$ то есть $q \gg y^{\varepsilon}$. В этой работе получена новая оценка суммы $T_k(\alpha; x, y)$, которая будет нетривиальной при $q \gg (\ln y)^A$, A — абсолютная положительная постоянная.

Теорема 1. *Пусть* $x \geqslant x_0 > 0$, $y_0 < y \leqslant 0{,}01x$, α — *вещественное число,* $\left|\alpha - \frac{a}{q}\right| \leqslant \frac{1}{q^2}$, $(a,q) = 1$, *тогда справедлива оценка*

$$|T_k(\alpha; x, y)| \leqslant 2y \left(2^{2k} 6kk! \left(\frac{1}{q} + \frac{1}{y} + \frac{q \ln q}{y^k}\right) \ln y\right)^{2^{-k}}.$$

Пусть Δ_j означает j — применение разностного оператора, так что для многочлена $f(u)$ степени n

$$\begin{aligned} &\Delta_1(f(u); t) = f(u+t) - f(u), \\ &\Delta_{j+1}(f(u); t_1, \ldots, t_{j+1}) = \Delta_1(\Delta_j(f(u); t_1, \ldots, t_j); t_{j+1}). \end{aligned} \tag{1}$$

Тогда нетрудно убедиться, что

$$\Delta_j(u^k; t_1, \ldots, t_j) = t_1 \ldots t_j p_j(u; t_1, \ldots, t_j),$$

где p_j — многочлен от u степени $k - j$ со старшим коэффициентом $k!/(k-j)!$. При доказательстве теоремы воспользуемся следующей леммой, которая доказана в работе [7].

Лемма 1. *Пусть*

$$T(f(u); x, y) = \sum_{x - y < u \leqslant x} e(f(u)),$$

где $f(u)$ *– произвольный многочлен степени* n. *Тогда при* $j = 1, \ldots, n-1$ *имеет место*

$$|T(f(u); x, y)|^{2^j} \leq (2y)^{2^j - j - 1} \sum_{|h_1| < y} \ldots \sum_{|h_j| < y} T_j, \qquad T_j = \left| \sum_{u \in I_j} e(\Delta_j(f(u); h_1, \ldots, h_j)) \right|,$$

где интервалы $I_j = I_j(x, y; h_1, \ldots, h_j)$ *удовлетворяют соотношениям:*

$$\begin{aligned} &I_1 = I_1(x, y; h_1) = (x - y, x] \cap (x - y - h_1, x - h_1], \\ &I_j = I_j(x, y; h_1, \ldots, h_j) = I_{j-1}(x, y; h_1, \ldots, h_{j-1}) \cap I_{j-1}(x - h_j, y; h_1, \ldots, h_{j-1}), \end{aligned}$$

то есть интервал $I_{j-1}(x - h_j, y; h_1, \ldots, h_{j-1})$ *получается из интервала* $I_{j-1} = I_{j-1}(x, y;$ $h_1, \ldots, h_{j-1})$ *сдвигом на* $-h_j$ *всех интервалов, пересечением которых он является.*

Доказательство теоремы. По лемме 1 при $j = k - 1$ имеем

$$|T_k(\alpha; x, y)|^{2^{k-1}} \leq (2y)^{2^{k-1} - k} \sum_{|h_1| < y} \ldots \sum_{|h_{k-1}| < y} \left| \sum_{u \in I_{k-1}} e(\Delta_{k-1}(\alpha u^k; h_1, \ldots, h_{k-1})) \right|,$$

$$\Delta_{k-1}(\alpha u^k; h_1, \ldots, h_{k-1}) = \alpha k! h_1 h_2 \ldots h_{k-1} \left(u + \frac{1}{2}h_1 + \frac{1}{2}h_2 \ldots + \frac{1}{2}h_{k-1}\right),$$

где интервал $I_{k-1} = I_{k-1}(x, y; h_1, \ldots, h_{k-1})$ удовлетворяет соотношениям

$$\begin{aligned} &I_1 = I_1(x, y; h_1) = (x - y, x] \cap (x - y - h_1, x - h_1], \\ &I_{k-1}(x, y; h_1, \ldots, h_{k-1}) = I_{k-2}(x, y; h_1, \ldots, h_{k-2}) \cap I_{k-2}(x - h_j, y; h_1, \ldots, h_{k-2}). \end{aligned}$$

Таким образом,

$$|T_k(\alpha; x, y)|^{2^{k-1}} \leq (2y)^{2^{k-1} - k} \sum_{|h_1| < y} \ldots \sum_{|h_{k-1}| < y} \left| \sum_{u \in I_{k-1}} e(\alpha k! h_1 h_2 \ldots h_{k-1} u) \right|.$$

В последней сумме члены с $h_1 \cdots h_{k-1} = 0$ дают вклад не более $(k-1)y(2y)^{k-2}$. Поэтому

$$|T_k(\alpha;x,y)|^{2^{k-1}} \leqslant (2y)^{2^{k-1}-k}\left(2^{k-1}S_k(\alpha;x,y) + (k-1)y(2y)^{k-2}\right), \tag{2}$$

$$S_k(\alpha;x,y) = \sum_{1\leqslant h_1<y} \dots \sum_{1\leqslant h_{k-1}<y} \left| \sum_{u\in I_{k-1}} e(\alpha k! h_1 h_2 \dots h_{k-1} u)\right| =$$

$$= \sum_{h=1}^{y^{k-1}} \tau'(h) \left| \sum_{u\in I_{k-1}} e(\alpha k! h u)\right|, \quad \tau'(h) = \sum_{\substack{h=h_1\dots h_{k-1}\\ 1\leqslant h_1,\dots,h_{k-1}<y,}} 1 \leqslant \tau(h).$$

Применим к внутренней сумме в $S_k(\alpha;x,y)$ лемму 4 из [8] (стр. 94), имея в виду, что она является линейной, сплошной, длина которой не превосходит y:

$$S_k(\alpha;x,y) \leqslant \sum_{h=1}^{y^{k-1}} \tau(h) \min\left(y, \frac{1}{2\|\alpha k! h\|}\right).$$

Далее воспользуемся неравенством Коши. Имеем

$$S_k^2(\alpha;x,y) \leqslant \sum_{h=1}^{y^{k-1}} \tau^2(h) \sum_{h=1}^{y^{k-1}} \min\left(y, \frac{1}{2\|\alpha k! h\|}\right)^2 \leqslant k y^k \ln y \sum_{h=1}^{k! y^{k-1}} \min\left(y, \frac{1}{\|\alpha h\|}\right).$$

Далее, воспользовавшись леммой 5 из [8], стр. 94, найдем

$$S_k^2(\alpha;x,y) \leqslant 6ky^k \ln y \left(\frac{k! y^{k-1}}{q} + 1\right)(y + q\ln q) \leqslant 6kk! y^{2k} \ln y \left(\frac{1}{q} + \frac{1}{y} + \frac{1}{y^{k-1}} + \frac{q\ln q}{y^k}\right).$$

Подставляя эту оценку в (2), получим

$$|T_k(\alpha;x,y)|^{2^k} \leqslant 2^{2k}(2y)^{2^k}\left(3kk! \ln y \left(\frac{1}{q} + \frac{1}{y} + \frac{1}{y^{k-1}} + \frac{q\ln q}{y^k}\right) + \frac{(k-1)^2}{8y^2}\right) \leqslant$$

$$\leqslant (2y)^{2^k} 2^{2k} 6kk! \left(\frac{1}{q} + \frac{1}{y} + \frac{q\ln q}{y^k}\right) \ln y.$$

Извлекая корень степени 2^{k-1}, получим утверждение теоремы.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Рахмонов З.Х. Тернарная задача Эстермана с почти равными слагаемыми // Математические заметки. 2003. Т. 74. вып. 4. С. 564 – 572.

2. Рахмонов З.Х., Азамов А.З., Мирзоабдугафуров К.И. Оценка коротких тригонометрических сумм Г.Вейля четвертой степени // Доклады Академии наук Республики Таджикистан. 2010. Т. 53. № 10. С. 737 – 744.

3. Рахмонов З.Х., Озодбекова Н.Б. Оценка коротких тригонометрических сумм Г.Вейля // Доклады Академии наук Республики Таджикистан. 2011. Т. 54. № 4. С. 257 – 264.

4. Рахмонов З.Х. Короткие тригонометрические суммы Г.Вейля // Ученые записки Орловского университета. Серия естественные, технические и медицинские науки. 2013. № 6. часть 2. С. 194 – 203.

5. Рахмонов З.Х. Кубическая задача Эстермана с почти равными слагаемыми // Математические заметки. 2014. Т. 95. вып. 3. С. 445 – 456.

6. Рахмонов З.Х., Назрублоев Н.Н., РахимовА.О. Короткие суммы Г.Вейля и их приложения // Чебышевский сборник. 2015. Т. 16. В. 1(53). С. 232 – 247.

7. Рахмонов З. Х., Азамов А.З., Нарзублоев Н.Н. Оценка коротких тригонометрических сумм Г.Вейля в малых дугах // Доклады Академии наук Республики Таджикистан. 2018. Т. 61. № 7-8. С. 609 – 614.

8. Карацуба А.А. Основы аналитической теории чисел. — 2-ое изд, М.: Наука, 1983.

УДК 511.3

Формула обращения для рядов Дирихле и ее применения

Л. А. Громаковская (Россия, г. Петрозаводск)
Петрозаводский государственный университет
e-mail: gromak_la@mail.ru
Б. М. Широков (Россия, г. Петрозаводск)
e-mail: bmshir@mail.ru

Inversion formula for Dirichlet series and its application

L. A. Gromakovskaya (Russia, Petrozavodsk)
Petrozavodsk State University
e-mail: gromak_la@mail.ru
B. M. Shirokov (Russia, Petrozavodsk)
e-mail: bmshir@mail.ru

Пусть $f(n)$ — арифметическая функция, N — натуральное число, $G(N)$ — группа приведенных вычетов по модулю N, $S(x, r, f)$ — количество значений $f(n)$, для которых $n \leqslant x$ и $f(n) \equiv r \bmod N$, χ — характер Дирихле по модулю N.

Определение 1. *Целочисленная арифметическая функция называется слабо равномерно распределенной (с. р. р.) по модулю N, если*

1) множество $\{n \mid (f(n), N) = 1\}$ бесконечно,

2) для любых r_1 и $r_2 \in G(N)$, выполняется равенство

$$\lim_{x\to\infty} \frac{S(x, r_1, f)}{S(x, r_2, f)} = 1.$$

Для функции $d(n)$, числа делителей n, В. Наркевичем [1] была доказана следующая теорема.

Для того, чтобы функция $d(n)$ была слабо равномерно распределена по модулю N, необходимо и достаточно, чтобы число N принадлежало некоторому определенному множеству натуральных чисел, и для таких N и для любого $r \in G(N)$ при $x \to \infty$ справедлива асимптотика

$$S(x, r, d) \sim Cx^a, \tag{1}$$

с постоянными, не зависящими от r, $C > 0$ и $0 < a \leqslant 1$.

Формула (1) содержит только главную часть асимптотики. Возникает вопрос об оценке остаточного члена. Дело в том, что в основе изучения распределения значений $f(n)$ по классам вычетов по модулю N лежат аналитические свойства производящих рядов Дирихле

$$F(s,\chi)=\sum_n \frac{\chi(f(n))}{n^s}, \quad s=\sigma+it, \tag{2}$$

Обозначим через a его абсциссу абсолютной сходимости. К этим рядам, как правило, применяется тауберова теорема Деланжа, которая и приводит к результату (1). Для ее применения требуется, чтобы функции $F(s,\chi)$ для каждого характера χ были регулярны в полуплоскости $\sigma \geqslant a$ с выброшенной точкой $s=a$.

Но эти функции могут быть аналитически продолжены в некоторую область Ω_a с вырезом $\{\sigma \leqslant a, t=0\}$ для невещественного характера (см. рис. 1), содержащую полуплоскость $\{\sigma \geqslant a\}$, . В таком случае, применяя метод контурного интегрирования, можно расчитывать на более точный результат. Именно это и было предпринято авторами для функции $d^{(2)}(n)$, числа бесквадратных делителей n. Через $d^{(k)}(n)$ — обозначаем число k-свободных делителей n. Число называется k-свободным, если оно не делится на p^k для любого простого числа p. В результате была доказана следующая теорема (см. [2]).

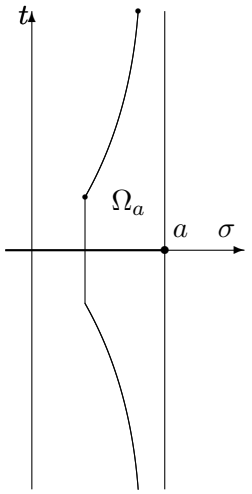


Рис. 1

Теорема 1. *Функция $d^{(2)}(n)$ слабо равномерно распределена по модулю N тогда и только тогда, когда $N=q^l$, q — нечетное простое, и 2 — первообразный корень по модулю N. Для каждого такого N, для любого вычета $r\in G(N)$ и для любого натурального n с некоторым числом β, $0<\beta<1$, справедлива асимптотическая формула*

$$S(x,r,d^{(2)})=\frac{x}{\varphi(N)}+$$
$$+\sum_{j=1}^{n}\frac{x}{\ln^j x}\sum_{\chi^2\neq\chi_0}\Big(C(\chi,r)(\ln x)^{\chi(2)}+ \tag{3}$$
$$+O(x(\ln x)^{\operatorname{Re}\chi(2)-1-n})\Big)+O(xe^{-\beta\sqrt{\ln x}}), \qquad C(\chi,r)\in\mathbb{C}.$$

Метод контурного интегрирования включает применение приближенной формулы Перрона, которая эффективна только тогда, когда абсцисса абсолютной сходимости ряда Дирихле $a\geqslant 1$. Ряды (2) для функции $d^{(2)}(n)$ имеют $a=1$.

Но при попытке идти тем же путем для функций $d^{(k)}(n)$ и $d(n)$ встретились ряды Дирихле с $a<1$. Известная формула обращения в этом случае не дает эффективного результата. Поэтому была получена такая формула для рядов с $a>0$, т. е. доказана следующая теорема.

Теорема 2. *Если $a>0$ и функция $f(n)$ удовлетворяет условиям:*

а) $\displaystyle\sum_n \frac{|f(n)|}{n^a}=O\left(\frac{1}{\sigma-a}\right), \quad \sigma>a;$

б) *существует такое число $\tau>0$, что для любых x и y, $1<x<y$,*

$$\sum_{x<n\leqslant y}|f(n)|=O(y^a-x^a)+O(y^{a-\tau}),$$

то для $T\geqslant 4$ и $\sigma_0>a$ при $x\to\infty$ справедливо равенство

$$\sum_{n\leqslant x} f(n)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma_0-iT}^{\sigma_0+iT}F(s)\frac{x^s}{s}ds+O\left(\frac{x^a\ln T}{\sqrt{T}}\right)+O\left(\frac{x^{\sigma_0}}{\sqrt{T}(\sigma_0-a)}\right)+O(x^{a-\tau}\ln T).$$

Применяя эту теорему обращения, для функций $d^{(k)}(n)$ и $d(n)$ мы получили асимптотические равенства, аналогичные равенству (3). Например, для $d(n)$ доказана следующая теорема.

Теорема 3. *Если $d(n)$ слабо равномерно распределена по модулю N, то существуют такие числа a, $0 < a \leqslant 1$, и $C_N > 0$, зависящие от N, что для любого достачно большого числа x справедливы следующие утверждения:*

а) если модуль N равен 3, 4 или 6, то с некоторым числом β, $0 < \beta < 1/2$, для любого $r \in G(N)$

$$S(x, r, d) = C_N x^a + O(x^a e^{-\beta\sqrt{\ln x}});$$

б) если модуль N не равен ни одному из чисел 3, 4 или 6, то для любого $r \in G(N)$ и любого натурального числа n

$$S(x, r, d) = C_N x^a + \frac{x^a}{\varphi(N)} \sum_{\chi^2 \neq \chi_0} \frac{1}{(\ln x)^{1-\alpha(\chi)}} \left(\sum_{j=0}^{n} \frac{a_j(\chi)}{(\ln x)^j} + O\left(\frac{1}{(\ln x)^{n+2-\operatorname{Re}\alpha(\chi)}} \right) \right),$$

где $|\alpha(\chi)| < 1$, $a_j(\chi)$ — комплексные числа.

Замечание. Число n, стоящее во внутренней сумме в качестве верхнего предела суммирования, от характера χ не зависит и для каждого характера может быть выбрано свое.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Narckiewicz W. *On distribution of values of multiplicative functions in residue classes* // Acta Arithm., 1967, **12** (3), 269 – 279 .

2. Громаковская Л. А., Широков Б. М. *Распределение числа бесквадратных делителей в классах вычетов* // Изв. ВУЗов, Математика, 2020, № 3, с. 3 – 11.

УДК 511.32

Об одном замечании к лемме Э. И. Ковалевской и ее приложении 2[1]

И. Ш. Джаббаров (Азербайджан, г. Гянджа)
Гянджинский государственный университет
e-mail: ilgar_j@rambler.ru
Г. Л. Гасанова (Азербайджан, г. Гянджа)
Гянджинский государственный университет
e-mail: gunay.hasanova 1989@list.ru

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке...

On a note about E. I. Kovalevskaja's lemma and its application

I. Sh. Jabbarov (Azerbaijan, Ganja)
Ganja State University
e-mail: ilgar_j@rambler.ru
G. K. Hasanova (Azerbaijan, Ganja)
Ganja State University
e-mail: gunay.hasanova 1989@list.ru

1. Введение

В 1932 Малер К. ([9]) вводя новую классификацию трансцендентных чисел, высказал гипотезу о S-числах. Справедливость этого утверждения была доказана в 1965 г. Спринджуком. В Г. ([10-11]), разработанным им методом существенных и несущественных областей. Он сформулировал новые гипотезы, обобщающие гипотезу Малера. В настоящее время эта гипотеза является частным случаем общей теоремы, установленной Д. Я. Клейнбоком и Г. А. Маргулисом ([12]). В настоящей работе мы развиваем новый метод доказательства одной гипотезы Спринджука В. Г.

Обозначим через П следующее множество многочленов с целыми коэффициентами, степени которых не превосходят n:

$$\Pi = \left\{ f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \neq 0 | a_i \in Z \right\}.$$

Число

$$h(f) = \max(|a_0|,\ |a_1|, ..., |a_n|)$$

называется высотой многочлена $f(x)$. Если теперь взять произвольное трансцендентное число α, то оно не будет корнем никакого из многочленов из множества П. Возьмем некоторое действительное число $h > 0$. Гипотеза, высказанная Малером утверждает, что неравенство

$$|f(\alpha)| > h^{-n\kappa};\ h = h(f)$$

выполняется для всех многочленов $f(x)$ с высотой $\leqslant h$ для почти всех действительных чисел при $\kappa = 1 + \varepsilon$.

В своей работе [10] Спринджук сформулировал следующее предположение:

Проблема А. пусть $m_1 < m_2 < \cdots < m_n$-попарно различные натуральные числа, ω-трансцендентное число, $v_n(\omega) = v(m_1, m_2, \ldots, m_n)$-точная верхняя грань тех $v > 0$, для которых неравенство

$$|a_0 + a1\omega^{m_1} + a_2\omega^{m_2} + \cdots + a_n\omega^{m_n}| < h^{-v},$$

$$h = max(|a_0|, |a_1|, \ldots, |a_n)|,$$

имеет бесконечное число решений в целых $a_0, a_1, \ldots, a_n$. Верно ли тогда, что для почти всех вещественных ω

$$v_n(\omega) = n(n = 1, 2, \ldots),$$

а для почти всех комплексных ω

$$v_n(\omega) = \frac{n-1}{2}(n = 2, 3, \ldots),$$

независимо от того, каковы числа $m_1, m_2, \ldots, m_n$?

Здесь мы, рассматривая только вещественный случай, докажем эту гипотезу новым методом, используя известный результат из [1] о показателе сходимости проблемы Терри (одномерный неполный случай). Возможность использования результатов о показателе сходимости особого интеграла проблемы Терри для установления экстремальности алгебраических многообразий был высказан в 1993 г. Карацубой А. А. (см. также [5]).

В настоящей статье мы развиваем новый подход к этим вопросам и предлагаем новое доказательство соответствующего утверждения для неполного многочлена, не переходя к равносильной задаче, путьем принципа переноса Хинчина ([3]). Будем следовать работам [5, 7, 8] и выведем наше утверждение из соответствующего утверждения для суммы одних и тех же многочленов, зависящих от разных переменных.

В теории диофантовых приближений в вопросах экстремальности многообразий большую роль играет лемма Ковалевской Э. И. ([6]). В работах [5, 8] дан новый способ доказательства экстемальности многообразий, с использованием леммы Ковалевской Э. И. и теорем о показателе сходимости особых интегралов проблемы Терри. Утверждения о приближении нуля значениями линейных комбинаций компонент многообразия почти всюду является задачей получаемой от задачи об экстремальности путем применения принципа переноса Хинчина. В настоящей статье мы ставим вопрос о не использовании принципа переноса, при этом мы покажем, что для этого дотаточно некоторое видоизменение леммы Ковалевской.

Основным препятствием при прямом применении упомянутой леммы становится присутствие в сумме на правой части утверждения леммы члена с $c_1 = c_2 = \cdots = c_N = 0$. Однако этого можно избегать, если слегка изменить формулировку леммы.

Для этого рассмотрим куб $[-\delta, \delta]^m$. Используя сглаженную характеристическую функцию этого куба, разложим ее в ряд Фурье. При хорошем слаживании (см.[2, стр. 14]) можно получить равенство:

$$1 = (2\delta)^m + \sum_{\bar{c}\neq 0, |c_j|\leq \delta^{-1-\varepsilon'}} g_{\bar{c}} e^{2\pi i(\bar{c},\bar{x})} + \theta/4; |\theta| < 1,$$

для точек из куба $[-\delta+\varepsilon, \delta-\varepsilon]^k$ для произвольно малых $\varepsilon, \varepsilon'$ (здесь $\bar{c} = (c_1, ..., c_k), \bar{x} = (x_1, ..., x_k)$. Поэтому,

$$\mu(E) \leq 2 \sum_{\bar{c}\neq 0, |c_j|\leq \delta^{-1-\varepsilon'}} |g_{\bar{c}}| \left| \int_{[0,1]^m} e^{2\pi i(\bar{c},\bar{f}(\bar{x}))} d\bar{x} \right|.$$

Используя оценки для коэффициентов Фурье мы получаем утверждение леммы Ковалевской с той лишь разницей, что в сумме на правой части отсутствует член с $\bar{c} = 0$. Этого достаточно для установления искомого результата если использовать утверждение из работы [2].

Наше следущее вспомогательное средство -это результат о показателе сходимости особого интеграла проблемы Терри (см. [1, 4]). Число γ называется показателем сходимости несобственного интеграла

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty} \left| \int_0^1 e^{2\pi i(\alpha_n x^{m_n} + \alpha_{n-1} x^{m_{n-1}} \cdots + \alpha_1 x^{m_1})} dx \right|^{2k} d\alpha_n d\alpha_{n-1} \cdots d\alpha_1, \qquad (1)$$

если он сходится при $2k > \gamma$ и расходится при $2k < \gamma$.

Лемма . Если $n < m_n$ то имеет место равенство $\gamma = m_1 + \cdots + m_n$ для интеграла (1).

Доказательство этой леммы дается в [1].

Теорема. Почти для всех трасцендентных чисел выполнено равенство $\omega_n(\alpha) = n$.

В работе [8] доказана теорема о том, что если $\bar{\alpha} = (\alpha_1, ..., \alpha_{2K})$, то $\omega_n(\bar{\alpha}) = n$. Далее, используя оценку (см. [7])

$$\mu_0(q) \geq c\mu(q)q^{-n-\delta/2}$$

с $N = 1$ мы из результата работы [7] выводим утверждение теоремы.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Архипов Г. И., Карацуба А. А., Чубариков В. Н., *Теория кратных тригонометрических сумм.*, М.: Наука, 1987.

2. Карацуба А. А. *Основы аналитической теории чисел*, М.: Наука, 1983.

3. Касселс Д. В. С. *Введение в теорию диофантовых приближений.* М.:ИИЛ, 1961.

4. Джаббаров И. Ш., О показателе сходимости особого интеграла многомерной проблемы Терри, *Чебышевский Сборник*, 14:2 (2013), 74-103.

5. Jabbarov I. Sh., Hasanova G. K. On Mahler Hypothesis., *Proceedings of the Institute of Mathematics and Mechanics, of the National Academy of Sciences of Azerbaijan* т.45, №2, 2019, p. 205-212.

6. Ковалевская Э. И., Совместно экстремальные многообразия., *Мат. заметки*, (1987), т.41, No 1, 3-8.

7. Jabbarov I. Sh., Ismailova L. G. New proof of particular case of one hypothesis of Sprindzhuk V. G. //-Тула: Материалы международной конференции посвященной 100-летию со дня рождения профессоров Б. М. Бредихина, В. И. Нечаева и С. Б. Стечкина, 23-26 сентября 2020 г., стр. 210-213.

8. Hasanova G. K. On polynomial estimations with transcendental numbers //Journal of Contemporary Applied Mathematics, -2021, v. 11, issue 1, p. 44-52.

9. Mahler K. Uber das Mass der Menge aller S-Zahlen.— *Math. Ann.*, 1932, v. 106 pp. 131 — 139.

10. Спринджук В. Г., *Метрическая теория диофантовых приближений.*, М.: Наука, 1977.

11. Спринджук В. Г., Доказательство гипотезы Малера о мере множества S-чисел. *Известия РАН: серия математическая*, 16: 1 (1981), 21–40.

12. Kleinbock D. Y., Margulis G. A. Flows on homogeneous spaces and Diophantine approximation on manifolds , *Ann. Math.*—1998.—Vol. 148.—P. 339—360.

УДК 511.32

Теорема о плотности нулей для индивидуальной L-функции и ее приложения[1]

И. Ш. Джаббаров (Азербайджан, г. Гянджа)
Гянджинский государственный университет
e-mail: ilgar_j@rambler.ru

Theorem on density of zeroes of individual L-function and its appliations

I. Sh. Jabbarov (Azerbaijan, Ganja)
Ganja State University
e-mail: ilgar_j@rambler.ru

Теоремы о плотности нулей L-функций Дирихле играют особую роль во многих вопросах аналитической теории чисел. Пусть Q и q натуральные, T большое положительное число. Для приложений важно получить оценки для величин

$$\sum_{q\leqslant Q}\sum_{\chi}^{*} N(\sigma,T,\chi), \sum_{\chi}^{*} N(\sigma,T,\chi), N(\sigma,T,\chi),$$

где $0<\sigma<1$, а χ примитивный характер по модулю q. Величина $N(\sigma,T,\chi)$ оценивалась Линником Ю. В., Чудаковым Н. Г., Хазельгровом С. Б., Галлахером П. Г. Для приложений в этих оценках основное внимание было уделено тому, чтобы они дали хорошие оценки вблизи прямой $\operatorname{Re} s=1$. Однако для ряда приложений, в том числе в вопросе об асимптотике для средних значений модуля дробных степеней L-функций Дирихле, важно, чтобы эти оценки были согласовано с теоремой Римана -Монгольдта о числе $N(T,\chi)$ при $\operatorname{Re} s\to 1/2$. В настоящих заметках даются формулировки нескольких теорем в этом направлении.

Теорема 1. *Пусть $q\geq 1, T\geq 2, \chi$ -примитивный характер по модулю q. Тогда*

$$N(\sigma,T,\chi)<<(T+\sqrt{qT})^{4(1-\sigma)/(3-2\sigma)}\log^{10}T; 1/2\leqslant\sigma\leqslant 1.$$

Доказательство этой теоремы проводится стандартной плотностной техникой книги [7] при помощи оценки

$$\int_0^T |L(1/2+it,\chi)|^2dt<<(T+\sqrt{qT})\log^2 T.$$

Теорема 2. *Пусть $\varepsilon>0$ произвольное положительное число, $H=q^{2/3+\varepsilon}T^{1/3+\varepsilon}; q\leqslant T^{1/19-2\varepsilon}$. Тогда справедлива формула*

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(t/H)^2}|L(1/2+i(t+T),\chi)|^2dt=\sqrt{\pi}(\varphi(q)/q)H\times$$

$$\times(\log(qT/2\pi)+2\gamma+2\rho(q))+O(H(qT)^{-\varepsilon}),$$

причем

$$\rho(q)=\sum_{p\backslash q}\frac{\log p}{(p-1)},$$

где сумма распространена на простые делители числа q.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке...

Доказательство этой теоремы дается в [5]. На основе результата этой теоремы доказывается следующая теорема.

Теорема 3. *Пусть условия теоремы 2 выполнены. Тогда при любом* $H \leqslant H_0 \leqslant T$ *справедлива оценка*

$$N(\sigma, T, H_0, \chi) << H_0^{4(1-\sigma)/(3-2\sigma)} \log^2 H_0;$$

здесь $N(\sigma, T, H_0, \chi)$ *определяется как число нулей функции* $L(s, \chi)$ *в прямоугольнике* $\sigma \leqslant \operatorname{Re} s \leqslant 1, T - H_0 \leqslant \Im s \leqslant T + H_0$.

В работе [8] получено улучшение оценки теоремы 3. Теоремы типа 1-3 имеют много приложений в разных задачах теории чисел. В настоящей работе мы рассмотрим их приложения к задаче о дробных моментах дзета функции и L-функций Дирихле.

Впервые асимптотические формулы для дзета функции Римана получены в [1] на основе идеи Воронина С. М. Далее, полученные результаты были перенесены им к L-функциям Дирихле ([2]). В работе автора [4] были получены дальнейшие улучшения результата Туганалиева Р. Т., где σ не фиксирован и может приближатся к критической прямой с ростом T, а именно формула для дробного момента получена для $1/2 + \log\log T/\log T \leqslant \sigma < 1$. В работе [3] область, где формула работы [4] справедлива для дробных степеней с показателем $k = 1/n$, была расширена до областей вида $1/2 + \Phi(T)/\log T \leqslant \sigma < 1$, с произвольной слабо растущей к бесконечности положительной функцией $\Phi(T)$. В работе [6] эти вопросы изучены применением оценок для тригонометрических сумм.

В своей кандидатской диссертации автор рассмотрел задачи о получении асимтотической формулы для L-функций Дирихле. С этой целью была получена плотностная оценка теоремы 1, которая была опубликована в материалах конференции молодых ученых в Баку. К сожалению, некоторые результаты автора в этом направлении не были опубликованы, хотя они составляли содержание III главы кандидатской диссертации. Здесь были получены результаты о дробных моментах в коротких промежутках, на основе результатов теорем 2 и 3.

Теорема 4. *При условиях теоремы 2 справедлива асимптотическая формула:*

$$\int_{-H_0}^{H_0} |L(\sigma + i(t+T), \chi)|^{2\lambda} dt = 2C(\sigma, \lambda, q) H_0 +$$

$$+ O(\Delta(H_0^{1-(2\sigma-1)/(3-2\sigma)(1-2\lambda(1-\sigma))} + H_0^{1-(2\sigma-1)/(2(3-2\sigma))})),$$

где $\sigma > 1/2$,

$$C(\sigma, \lambda, q) = \sum_{n=1,(n,q)=1}^{\infty} \tau_\lambda^2(n) n^{-2\sigma};$$

при этом

$$\log \Delta = c_0 \log T (\log\log\log T)^2 (\log\log T)^{-1},$$

а c_0*-некоторая постоянная.*

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Турганалиев Р. Т. Асимптотическая формула для средних значений дробной степени дзета функции Римана //Труды МИАН СССР, 1981, т.158, 203–226.

2. Турганалиев Р. Т. Асимптотическая формула для средних значений дробной степени дзета функции Римана // Изв. АНКазахской ССР, сер. физ.-мат. 1983, №1, 59-63.

3. Gritsenko S. A., Kurtova L. N. Asymptotic formula for the fractional moments of some Dirichlet series//Chebishevskii sbornik, 2013, vol. 14, issue 1, 18-33.

4. Dzhabbarov I. Sh. Fractional moments of the *zeta* -function. // Matematicheskie zametki, 1985. vol. 38. N4. p. 481-493.

5. Dzhabbarov I. Sh. The mean values of Diriclet L – functions on short intervals of the critical line// Proc. Acad. Sci. Azerb.SSR. phis. – tech. sci. ser., 1988, 1.

6. Архипова Л. Г., Чубариков В. Н. Замечание о теореме о среднем значении модуля L-функций Дирихле в критической полосе //Чебышевский сборник, т. 22, №1, 67-75.

7. Монтгомери Г. Мультипликативная теория чисел //Москва: Мир, 1974, 160 с.

8. Watt N. On the squared modulus of a Dirichlet L-functions over a short segments of the critical line // Acta arithmetica, 111.4(2004).

УДК 517

Об аналоге задачи Эминяна для системы счисления Фибоначчи

А. А. Жукова (Россия, г. Владимир)
Российская академия народного хозяйства и государственной службы при Президенте Российской Федерации, Владимирский филиал
e-mail: georg967@mail.ru
А. В. Шутов (Россия, г. Владимир)
Владимирский государственный университет имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых
e-mail: a1981@mail.ru

An analogue of Eminian's problem for the Fibonacci number system

A. A. Zhukova (Russia, Vladimir)
Russian Academy of National Economy and Public Administration under the President of Russian Federation, Vladimir branch
e-mail: georg967@mail.ru
A. V. Shutov (Russia, Vladimir)
Vladimir State University named after Alexander and Nicholay Stoletovs
e-mail: a1981@mail.ru

Основной текст тезисов.

Рассмотрим последовательность чисел Фибоначчи $\{F_i\}$: $F_0 = F_1 = 1$, $F_{i+1} = F_i + F_{i-1}$ и напомним, что любое натуральное число n имеет представление Цеккендорфа [3]

$$n = \sum_{i=1}^{lf(n)} f_i F_i,$$

где $f_i \in \{0,1\}$, $f_i f_{i+1} = 0$, $lf(n) = \min\{k : F_{k+1} > n\}$. Очевидно, что $lf(n) = O(\log n)$.

Определим множества

$$\mathbb{F}_0 = \{n : n \in \mathbb{N}, \sum_{i=1}^{lf(n)} f_i \equiv 0 \pmod 2\},$$

$$\mathbb{F}_1 = \mathbb{N} \setminus \mathbb{F}_0,$$

то есть множества натуральных чисел с четной и нечетной суммой цифр представления в системе счисления Фибоначчи.

Положим

$$\varepsilon(n) = \begin{cases} 1, & n \in \mathbb{F}_0, \\ -1, & n \in \mathbb{F}_1. \end{cases}$$

Очевидно, что

$$\varepsilon(n) = (-1)^{\sum\limits_{i=1}^{lf(n)} f_i}.$$

Рассмотрим множество

$$N_{\varepsilon_1,\varepsilon_2}(X) = \sharp\{n < X : \varepsilon(n) = \varepsilon_1, \varepsilon(n+1) = \varepsilon_2\},$$

где ε_1 и ε_2 могут принимать значения, равные -1 или 1.

В работе [2] найдена следующая асимптотическая формула для $N_{\varepsilon_1,\varepsilon_2}(X)$.

Теорема 1. *Если $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$, то*

$$N_{\varepsilon_1,\varepsilon_2}(X) = \frac{\sqrt{5}}{10} X + O(\ln X).$$

Если $\varepsilon_1 \neq \varepsilon_2$, то

$$N_{\varepsilon_1,\varepsilon_2}(X) = \frac{5-\sqrt{5}}{10} X + O(\ln X).$$

Доказательство данной теормы основывалось на представлении $N_{\varepsilon_1,\varepsilon_2}(X)$ в виде двух сумм $\sum\limits_{n<X} \varepsilon(n)$ и $S_1(X) = \sum\limits_{n<X} \varepsilon(n)\varepsilon(n+1)$. В свою очередь асимптотическая формула для $S_1(X)$ получена с помощью сведения ее к сумме $S_1^*(k) = S_1(F_k)$ и нахождению явного реккурентного соотношения для сумм $S_1^*(k)$.

Еще одно доказательство этой теоремы было получено в [5]. Это доказательство основывается на доказанной в [4] теореме о геометризации системы счисления Фибоначчи.

Положим

$$N_{l,\varepsilon_1,\varepsilon_2}(X) = \sharp\{n < X : \varepsilon(n) = \varepsilon_1, \varepsilon(n+l) = \varepsilon_2\},$$

где ε_1 и ε_2 могут принимать значения, равные -1 или 1, l - фиксированное натуральное число.

Основным результатом работы является следующая теорема:

Теорема 2. *Справедлива асимптотическая формула*

$$N_{l,\varepsilon_1,\varepsilon_2}(X) = c_{l,\varepsilon_1,\varepsilon_2} X + O(\ln X),$$

где постоянная $c_{l,\varepsilon_1,\varepsilon_2}$ эффективно вычислима и отлична от $1/4$.

Получение асимптотической формулы состоит из следующих шагов:

1. Сведение $N_{l,\varepsilon_1,\varepsilon_2}(X)$ к суммам вида $\sum\limits_{n<X}\varepsilon(n)$ и $S(X)=\sum\limits_{n<X}\varepsilon(n)\varepsilon(n+l)$.

2. Оценка для $\sum\limits_{n<X}\varepsilon(n)$ получена ранее в работах [1] и [2].

3. Нахождение оценки $S(X)$ начнается с получения рекуррентного соотношения для $S^*(k)=S(F_k)$, которое имеет вид $S^*(k+1)=S^*(k)+S^*(k-1)+\chi_{4,l}(k)$, где $\chi_{4,l}(k)$ – периодическая функция с периодом, равным 4.

4. Последнее уравнение является неоднородным, поэтому его общее решение находится как сумма общего решения однородного $\overline{S^*}(k)$ и частного решения неоднородного $\widetilde{S^*}(k)$, причем $\widetilde{S^*}(k)$ – это периодическая функция с периодом 4.

5. Общее решение неоднородного уравнения имеет вид $\overline{S^*}(k)=C_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k+C_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k$.

6. Затем доказывается, что $C_1\neq 0$, и записывается оценка для $S^*(k)$ как $C_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k+O(1)$.

7. Представляя $S(X)$ как сумму значений $S^*(k_j)+O(\ln X)$, находится асимптотическая формула для $S(X)=C_1\frac{5-\sqrt{5}}{2}X+O(\ln X)$, и получается утверждение теоремы.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Drmota M., Gajdosik J. The Parity of the Sum-of-Digits-Function of Generalized Zeckendorf Representations // Fibonacci Quarterly. 1998. Vol. 36, №1. P. 3-19.

2. Shutov A. On sum of digits of the Zeckendorf representations of two consecutive numbers // Fibonacci Quarterly. 2020. Vol. 58, №3. P. 203-207.

3. Zeckendorf E. Representation des nombres naturels par une soome de nombres de Fibonacci ou de nombres de Lucas // Bull. Soc. Roy. Sci. Liege. 1972. Vol. 41. P. 179-182.

4. Давлетярова Е. П., Жукова А. А., Шутов А. В. Геометризация системы счисления Фибоначчи и ее приложения к теории чисел // Алгебра и анализ. 2013. Т. 25, Вып. 6. С. 1-23.

5. Шутов А.В. Об одной сумме, связанной с системой счисления Фибоначчи // Дальневосточный математический журнал. 2020. Т. 20, №2. С. 271-275.

УДК 519.644.7+511.9

Отклонение сеток Коробова

А. А. Илларионов (Россия, г. Хабаровск)
Хабаровское отделение Института прикладной математики ДВО РАН
e-mail: illar_a@list.ru

The discrepancy of the Korobov lattice points

A.A. Illarionov (Russia, Khabarovsk)
Institute of Applied Mathematics, Khabarovsk Division, FEB RAS
e-mail: illar_a@list.ru

Напомним, что отклонение $D(X)$ конечной последовательности $X \subset [0,1)^s$ от равномерного распределения определяется формулой

$$D(X) = \sup_{\Pi} \left(\frac{\#(X \cap \Pi)}{\#X} - \operatorname{meas} \Pi \right),$$

где точная верхняя грань берется по всем прямоугольным параллелепипедам Π из $[0,1)^s$ со сторонами параллельными координатным плоскостям. Здесь и далее $\#X$ — количество элементов конечного множества X.

Пусть $N \in \mathbb{N}$ и $a = (a_1, \ldots, a_s) \in \mathbb{Z}^s$. Большой интерес, как с теоретической так и с практической точек зрения, представляют последовательности (сетки) $K_N(a)$, состоящие из N точек вида

$$x^{(k)} = \left(\left\{ \frac{a_1 k}{N} \right\}, \ldots, \left\{ \frac{a_s k}{N} \right\} \right), \quad k = \overline{1, N}.$$

Они были предложены независимо Коробовым [1] и Главкой [2] в качестве узлов многомерных квадратурных формул. Рассмотрим вопрос о наименьшем (из возможных) отклонении такой сетки от равномерного распределения.

Если $s = 1$ и нод $(a_1, N) = 1$, то

$$K_N(a_1) = \left\{ \frac{1}{N}, \frac{2}{N}, \ldots, \frac{N-1}{N} \right\}.$$

В этом случае $D(K_N(a_1)) = 1/N$. В многомерном случае ($s \geqslant 2$) ситуация становится принципиально сложнее.

Коробов [3] для простого N и Нидеррайтер [4] для произвольного натурального $N > 1$ доказали оценку

$$\mathcal{D}_s(N) \equiv \min_{a \in \mathbb{Z}_N^s} D(K_N(a)) \underset{s}{\ll} \frac{\ln^s N}{N}.$$

Она была улучшена Ларчером [5] при $s = 2$ и Быковским [6] при любом $s \geqslant 2$ в виде

$$\mathcal{D}_s(N) \underset{s}{\ll} \frac{\ln^{s-1} N}{N} \ln \ln N. \tag{1}$$

Есть основания полагать, что $\mathcal{D}_s(N) \underset{s}{\gg} (\ln N)^{s-1}/N$. При $s = 2$ это вытекает из теоремы Шмидта (см. [7]).

Для любого $x \in \mathbb{Z}^s$ определим $H(x) = \prod_{i=1}^s \max\{1, |x_i|\}$. Пусть

$$q_N(a) = \min \left\{ H(u) : \ u \in \mathbb{Z}^s \setminus \{0\}, \ a_1 u_1 + \ldots + a_s u_s \equiv 0 \pmod N \right\}.$$

Параметр $q_N(a)$, введенный Бахваловым [8] и независимо от него Главкой [2], характеризует равномерную распределенность узлов сетки $K_N(a)$. С точки зрения вычислительной математики целесообразнее всего для заданного N выбирать параметры $a_1, \ldots, a_s$ с как можно большим значением $q_N(a)$. Пусть

$$Q(N, s) = \max_{a \in \mathbb{Z}_N^s} q_N(a), \quad \mathbb{Z}_N = \{0, 1, \ldots, N-1\}.$$

Согласно теореме Минковского о линейных формах $q_N(a) \leqslant N/2$. Поэтому $Q(N, s) \leqslant N/2$. Это единственная известная верхняя оценка величины $Q(N, s)$. Пусть нод $(a_1, N) = 1$ и $a_1/N = [b_0; b_1, \ldots, b_k]$ — разложение числа a_1/N в непрерывную (цепную) дробь. Тогда

$$q_N(a_1, 1) \asymp N \left(\max_{1 \leqslant i \leqslant k} b_i \right)^{-1}. \tag{2}$$

Коробов, Бахвалов и многие другие математики неоднократно высказывали предположение о том, что *для любого $N \in \mathbb{N}$ найдется целое a, взаимно простое с N такое, что в разложении числа a/N в непрерывную дробь, все неполные частные ограничены некоторой абсолютной постоянной.* Это предположение широко известно под названием *гипотезы Зарембы.* Комьютерные расчеты подтверждают гипотезу Зарембы. Согласно (2) из гипотезы Зарембы следует, что $Q(N,2) \asymp N$. На основании известных результатов численных расчетов и некоторых эвристических соображений можно предположить, что при больших N

$$Q(N,s) \approx \frac{N}{\ln^{s-2} N}.$$

Это предположение можно рассматривать, как многомерный аналог гипотезы Зарембы. Однако, несмотря на значительный интерес, наилучшая на сегодняшний момент нижняя оценка имеет вид

$$Q(N,s) \underset{s}{\gg} \frac{N}{\ln^{s-1} N} \qquad (\text{при } N > 1). \tag{3}$$

Для простого N она доказана в [8, 2], а для составного — в [6, доказательство теоремы 2]).

Основные результаты настоящей работы заключаются в следующем.

Теорема 1. *Пусть $s \geqslant 3$, N — простое, λ — вещественное, причем $2 \leqslant \lambda \leqslant (\ln N)^{(s-1)/s}$. Тогда*

$$\frac{1}{N^s} \cdot \# \left\{ a \in \mathbb{Z}_N^s : \ D(K_N(a)) \geqslant \lambda \frac{2^s}{(s-2)!} \frac{\ln^{s-1} N}{N} \ln\ln N \right\} \underset{s}{\ll} \frac{1}{\lambda \ln\ln N}. \tag{4}$$

Выбирая в (4) $\lambda = 2$, получаем, что относительная доля s-мерных сеток Коробова, состоящих из N узлов и имеющих отклонение

$$D(K_N(a)) \geqslant \frac{2^{s+1}}{(s-2)!} \frac{\ln^{s-1} N}{N} \ln\ln N,$$

не больше, чем $O_s((\ln\ln N)^{-1})$.

Доказательство теоремы опирается на полученную в [6] оценку отклонения сеток Коробова через относительные минимумы решеток.

Отметим, что используя оценку Быковского и неравенство Маркова нетрудно получить такой результат: *если $s \geqslant 2$, N — простое, λ — вещественное, причем $1 \leqslant \lambda < N \ln^{1-s} N$, то*

$$\frac{1}{N^s} \cdot \# \left\{ a \in \mathbb{Z}_N^s : \quad D(K_N(a)) \geqslant \lambda \frac{\ln^{s-1} N}{N} \ln\ln N \right\} \underset{s}{\ll} \frac{1}{\lambda} + \frac{\ln\lambda}{\lambda \ln\ln N}. \tag{5}$$

Эта оценка доказывается значительно проще, чем (4). Однако неравенство (5) существенно слабее, чем (4) при малых λ.

Второй результат работы связан с распределением параметра Бахвалова $q_N(a)$.

Теорема 2. *Пусть $s \geqslant 3$, N — простое, λ — вещественное, причем $N > 1$, $1 \leqslant \lambda \leqslant \ln^{s-1} N$. Тогда*

$$\frac{1}{N^s} \cdot \# \left\{ a \in \mathbb{Z}_N^s : \ q_N(a) \geqslant \lambda \frac{N}{\ln^{s-1} N} \right\} \underset{s}{\ll} \frac{1}{\lambda}.$$

Нетрудно проверить (см. [8]), что

$$\frac{1}{N^s} \cdot \# \left\{ a \in \mathbb{Z}_N^s : \ q_N(a) \leqslant \frac{N}{\lambda \ln^{s-1} N} \right\} \underset{s}{\ll} \frac{1}{\lambda}.$$

Поэтому имеет место

Следствие 1. *Если выполняются условия теоремы 2, то*

$$\frac{1}{N^s}\cdot\#\left\{a\in\mathbb{Z}_N^s:\ \frac{N}{\lambda\ln^{s-1}N}\leqslant q_N(a)\leqslant\lambda\frac{N}{\ln^{s-1}N}\right\}=1+O_s\left(\frac{1}{\lambda}\right).$$

Отметим, что в настоящей работе условие $s\geqslant 3$ существенно. Из [9] вытекает аналогичный теореме 1 результат при $s=2$. Кроме того, из результатов [10] и оценки (2) вытекает, что

$$\frac{1}{N^2}\cdot\#\left\{a\in\mathbb{Z}_N^2:\ q_N(a)\geqslant\lambda\frac{N}{\ln^{s-1}N}\right\}\underset{s}{\ll}\frac{\ln N}{\lambda}e^{-c_2\lambda},$$

где c_2 — положительная абсолютная постоянная.

Условие простоты параметра N также существенно. Работа по исследованию случая, когда N составное пока не завершена.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Н.М. Коробов. О приближенном вычислении кратных интегралов // Докл. АН СССР. 1959. Т. 124, N 6.
2. E. Hlawka. Zur angenäherten Berechnung mehrfacher Integrale // Monatsh. Math. 1962. V. 66, N 2.
3. Н.М. Коробов. Теоретико-числовые методы в приближенном анализе. М.: МЦНМО, 2004/
4. H. Niederreiter. Existence of good lattice points in the sense of Hlawka // Monatsh. Math. 1978. V. 86, N 3.
5. G. Larcher. On the distribution of sequences connected with good lattice points // Monatsh. Math. 1986. V. 101, N 2.
6. В.А. Быковский. Отклонение сеток Коробова // Изв. РАН. Сер. матем. 2012. Т. 76, N 3.
7. W.M. Schmidt. Irregularities of distribution. VII // Acta Arith. 1972. V. 21. P. 45–50.
8. Н.С. Бахвалов. О приближенном вычислении кратных интегралов // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех. 1959, N 4. С. 3–18
9. М. Г. Рукавишникова. Закон больших чисел для суммы неполных частных рационального числа с фиксированным знаменателем // Матем. заметки. 2011. Т. 90, N 3.
10. Н.Г. Мощевитин. О множествах вида $\mathcal{A}+B$ и конечных цепных дробях // Матем. сб. 2007. V. 198, N 4.

УДК 511.32

О приближении аналитических функций абсолютно сходящимся рядом Дирихле, связанным с периодической дзета-функцией

М. Йасас (Литва, г. Вильнюс)
Математический институт, Вильнюсский университет
e-mail: mindaugas.jasas@mif.stud.vu.lt

On approximation of analytic functions by an absolute convergent Dirichlet series connected with the periodic zeta-function

M. Jasas (Lithuania, Vilnius)
Institute of Mathematics, Vilnius University
e-mail: mindaugas.jasas@mif.stud.vu.lt

The Riemann zeta-function $\zeta(s)$, $s = \sigma + it$,

$$\zeta(s) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^s}, \quad \sigma > 1,$$

has several generalizations. Among them, the Hurwitz zeta-function $\zeta(s, \alpha)$, $0 < \alpha \leq 1$,

$$\zeta(s, \alpha) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(m+\alpha)^s}, \quad \sigma > 1,$$

and the periodic zeta-function. We recall its definition. Let $\mathfrak{a} = \{a_m : m \in \mathbb{N}\}$ be a periodic sequence of complex numbers with minimal period $q \in \mathbb{N}$. Then the periodic zeta-function $\zeta(s; \mathfrak{a})$ is defined, for $\sigma > 1$, by the Dirichlet series

$$\zeta(s; \mathfrak{a}) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_m}{m^s}.$$

The periodicity of the sequence $\mathfrak{a}$ implies the equality

$$\zeta(s; \mathfrak{a}) = \frac{1}{q^s} \sum_{k=1}^{q} a_k \zeta\left(s, \frac{k}{q}\right),$$

therefore, the function $\zeta(s; \mathfrak{a})$, as $\zeta(s)$ and $\zeta(s, \alpha)$, has the analytic continuation to the whole complex plane, except for the point $s = 1$ which is a simple pole with residue

$$a \stackrel{def}{=} \frac{1}{q} \sum_{k=1}^{q} a_k.$$

If $a = 0$, then the function $\zeta(s; \mathfrak{a})$ is entire.

It is well known that the functions $\zeta(s)$, $\zeta(s, \alpha)$ for some classes of the parameter α and $\zeta(s; \mathfrak{a})$ for some classes of the sequences $\mathfrak{a}$ have good approximation properties, i.e., their shifts approximate wide classes of analytic functions. We will focus on the function $\zeta(s; \mathfrak{a})$ with multiplicative sequence $\mathfrak{a}$, i.e., that $a_1 = 1$ and $a_{m_1 m_2} = a_{m_1} a_{m_2}$ for all $(m_1, m_2) = 1$.

We recall a theorem obtained in [1]. Denote by $\mathcal{K}$ the class of compact subsets of the strip $D = \{s \in \mathbb{C} : 1/2 < \sigma < 1\}$ with connected complements, and by $H_0(K)$ with $K \in \mathcal{K}$ the class of continuous non-vanishing functions on K that are analytic in the interior of K. Let meas$A$ stand for the Lebesgue measure of a measurable set $A \subset \mathbb{R}$.

THEOREM 1. *Suppose that the sequence $\mathfrak{a}$ is multiplicative. Let $K \in \mathcal{K}$ and $f(s) \in H_0(K)$. Then, for every $\varepsilon > 0$,*

$$\liminf_{T\to\infty} \frac{1}{T}\mathrm{meas}\left\{\tau \in [0,T] : \sup_{s\in K} |\zeta(s+i\tau;\mathfrak{a}) - f(s)| < \varepsilon\right\} > 0.$$

Theorem 1 is called an universality theorem of the function $\zeta(s;\mathfrak{a})$. Universality of $\zeta(s;\mathfrak{a})$ with a non-multiplicative sequence $\mathfrak{a}$ was studied by B. Bagchi, J. Steuding and J. Kaczorowski.

In the strip D, the function $\zeta(s;\mathfrak{a})$ is defined by analytic continuation, therefore, some problems arise in application of Theorem 1. It is more convenient to approximate the function $f(s)$ by an absolutely convergent Dirichlet series which is close to the function $\zeta(s;\mathfrak{a})$. The aim of this note is to construct such a series.

Let $\theta > 1/2$ be a fixed number, $u > 0$ and, for $m \in \mathbb{N}$,

$$v_u(m) = \exp\left\{-\left(\frac{m}{u}\right)^\theta\right\}.$$

Define the series

$$\zeta_u(s;\mathfrak{a}) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_m v_u(m)}{m^s}.$$

Clearly, $v_u(m) \ll_{\theta,u} m^{-\theta}$. Therefore, the series $\zeta_u(s;\mathfrak{a})$ is absolutely convergent for $\sigma > 1/2$. Moreover, a simple application of the Mellin formula leads to an integral representation

$$\zeta_u(s;\mathfrak{a}) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\theta-i\infty}^{\theta+i\infty} \zeta(s+z;\mathfrak{a}) l_u(z)\frac{\mathrm{d}z}{z}, \tag{1}$$

where

$$l_u(s) = \frac{s}{\theta}\Gamma\left(\frac{s}{\theta}\right)u^s,$$

and $\Gamma(s)$ denotes the Euler gamma-function.

Now, define some probabilistic objects. Denote by $H(D)$ the space of analytic functions on D endowed with the topology of uniform convergence on compacta, and by $\mathcal{B}(\mathbb{X})$ the Borel σ-field of the space $\mathbb{X}$. Let $\mathbb{P}$ be the set of all prime numbers, and

$$\Omega = \prod_{p\in\mathbb{P}} \gamma_p,$$

where $\gamma_p = \{s \in \mathbb{C} : |s| = 1\}$. With the product topology and pointwise multiplication, the torus Ω is a compact topological Abelian group. Therefore on $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega))$, the probability Haar measure m_H can be defined. This gives the probability space $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), m_H)$. Denote by $\omega(p)$, $p \in \mathbb{P}$, the pth component of an element $\omega \in \Omega$, and on the probability space $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), m_H)$, define the $H(D)$-valued random element

$$\zeta(s,\omega;\mathfrak{a}) = \prod_{p\in\mathbb{P}}\left(1 + \sum_{l=1}^{\infty}\frac{a_{p^l}\omega^l(p)}{p^{ls}}\right).$$

Note that the latter infinite product, for almost all $\omega \in \Omega$, is uniformly convergent on compact subsets of the strip D. Then we have the following approximation theorem for the function $\zeta_u(s;\mathfrak{a})$.

THEOREM 2. *Suppose that the sequence $\mathfrak{a}$ is multiplicative, $u_T \to \infty$ and $u_T \ll T^2$ as $T \to \infty$. Let $K \in \mathcal{K}$ and $f(s) \in H_0(K)$. Then the limit*

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\mathrm{meas}\left\{\tau \in [0,T] : \sup_{s\in K} |\zeta_{u_T}(s+i\tau;\mathfrak{a}) - f(s)| < \varepsilon\right\}$$
$$= m_H\left\{\omega \in \Omega : \sup_{s\in K} |\zeta(s,\omega;\mathfrak{a}) - f(s)| < \varepsilon\right\} > 0$$

exists for all but at most countably many $\varepsilon > 0$.

Theorem 2 shows that there exists $T_0 = T_0(f, \varepsilon, K, \mathfrak{a}) > 0$ such that, for every $T \geq T_0$, there are infinitely many shifts $\zeta_{u_T}(s + i\tau)$ approximating a given function $f(s)$ uniformly on K with accuracy ε.

Theorem 2 has a discrete analogue. First, we recall a discrete universality theorem for the function $\zeta(s; \mathfrak{a})$. Let $\#A$ denote the cardinality of the set A, and, for $h > 0$,

$$L(\mathbb{P}, h, \pi) = \left\{ (\log p : p \in \mathbb{P}), \frac{2\pi}{h} \right\},$$

where N runs over the set $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$. Then Theorem 2 of [2] with $w(u) = 1$ implies the following result.

THEOREM 3. *Suppose that the sequence $\mathfrak{a}$ is multiplicative, and the set $L(\mathbb{P}, h, \pi)$ is linearly independent over the field of rational numbers $\mathbb{Q}$. Let $K \in \mathcal{K}$ and $f(s) \in H_0(K)$. Then, for every $\varepsilon > 0$,*

$$\liminf_{N \to \infty} \frac{1}{N+1} \# \left\{ 0 \leqslant k \leqslant N : \sup_{s \in K} |\zeta(s + ikh; \mathfrak{a}) - f(s)| < \varepsilon \right\} > 0.$$

Moreover, "liminf" can be replaced by "lim" for all but at most countably many $\varepsilon > 0$.

Now we state a discrete version of Theorem 2.

THEOREM 4. *Suppose that the sequence $\mathfrak{a}$ is multiplicative, the set $L(\mathbb{P}, h, \pi)$ is linearly independent over $\mathbb{Q}$ and $u_N \to \infty$, $u_N \ll N^2 \log^A N$ with every $A > 0$ as $N \to \infty$. Let $K \in \mathcal{K}$ and $f(s) \in H_0(K)$. Then the limit*

$$\lim_{N \to \infty} \frac{1}{N+1} \# \left\{ 0 \leqslant k \leqslant N : \sup_{s \in K} |\zeta_{u_N}(s + ikh; \mathfrak{a}) - f(s)| < \varepsilon \right\}$$
$$= m_H \left\{ \omega \in \Omega : \sup_{s \in K} |\zeta(s, \omega; \mathfrak{a}) - f(s)| < \varepsilon \right\} > 0$$

exists for all but at most countably many $\varepsilon > 0$.

For proofs of all above stated theorems, limit theorems on weakly convergent probability measures in the space of analytic functions $H(D)$ are applied. For $A \in \mathcal{B}(H(D))$, define

$$P_T(A) = \frac{1}{T} \mathrm{meas} \{ \tau \in [0, T] : \zeta(s + i\tau; \mathfrak{a}) \in A \}$$

and

$$Q_N = \frac{1}{N+1} \# \{ 0 \leqslant k \leqslant N : \zeta(s + ikh; \mathfrak{a}) \in A \}.$$

Let, for brevity, P_ζ denote the distribution of the random element $\zeta(s, \omega; \mathfrak{a})$. Then we have the following theorems.

THEOREM 5. *Suppose that the sequence $\mathfrak{a}$ is multiplicative. Then P_T converges weakly to P_ζ as $T \to \infty$.*

THEOREM 6. *Suppose that the sequence $\mathfrak{a}$ is multiplicative and the set $L(\mathbb{P}, h, \pi)$ is linearly independent over $\mathbb{Q}$. Then Q_N converges weakly to P_ζ as $N \to \infty$.*

Also, the fact that the support of the measure P_ζ is the set

$$\{ g \in H(D) : g(s) \neq 0 \text{ or } g(s) \equiv 0 \}$$

is used.

However, Theorem 5 and 6 are not sufficient for the proof of Theorems 2 and 4. The crucial role in their proof is played by estimates of the mean between $\zeta(s; \mathfrak{a})$ and $\zeta_u(s; \mathfrak{a})$. The integral representation (1) allows to evaluate the mean distance between $\zeta(s; \mathfrak{a})$ and $\zeta_u(s; \mathfrak{a})$.

We have

Theorem 7. *Suppose that $u_T \to \infty$ and $u_T \ll T^2$ as $T \to \infty$. Then for every compact set $K \subset D$,*

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \sup_{s\in K} |\zeta(s+i\tau;\mathfrak{a}) - \zeta_{u_T}(s+i\tau;\mathfrak{a})| \mathrm{d}\tau = 0.$$

Theorem 8. *Suppose that $u_N \to \infty$ and $u_N \ll N^2 \log^A N$ with any $A > 0$ as $N \to \infty$. Then for every compact set $K \subset D$ and $h > 0$,*

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N+1} \sum_{k=0}^{N} \sup_{s\in K} |\zeta(s+ikh;\mathfrak{a}) - \zeta_{u_N}(s+ikh;\mathfrak{a})| = 0.$$

REFERENCES

1. Лауринчикас А., Шяучюнас Д. Замечания об универсальности периодической дзета-функции // Матем. заметки. 2006. Т. 80, №4. С. 561–568.
2. Macaitienė R., Stoncelis M., Šiaučiūnas D., A weighted discrete universality theorem for periodic zeta-functions. II // in: *Anal. Probab. Methods Number Theory, Proc. of Sixth Intern. Conf., Palanga, Lithunia, 11-17 September, 2016*, Dubickas A., Laurinčikas A., Manstavičius E. and Stepanauskas G. (Eds.). 2017. C. 97-107.

УДК 511.33, 511.75

Квадратичные характеры с неотрицательными частичными суммами

А. Б. Калмынин (Россия, г. Москва)
Международная лаборатория зеркальной симметрии и автоморфных форм, НИУ ВШЭ
e-mail: alkalb1995cd@mail.ru

Quadratic characters with nonnegative partial sums

A. B. Kalmynin (Russia, Moscow)
International Laboratory for Mirror Symmetry and Automorphic Forms, NRU HSE
e-mail: alkalb1995cd@mail.ru

Пусть p — нечетное простое число. Хорошо известно, что существует единственный примитивный квадратичный характер $\chi_p(n)$ периода p, а именно символ Лежандра по модулю p. Распределение нулей соответствующей L-функции оказывается тесно связано со свойствами многочлена Фекете

$$f_p(x) = \sum_{n=1}^{p-1} \chi_p(n) x^n. \tag{1}$$

В частности, известно, что если данный многочлен не имеет нулей в интервале $(0,1)$, то у $L(s,\chi_p)$ нет вещественных нулей. Пример простого условия, гарантирующего отсутствие нулей многочлена Фекете в $(0,1)$ — неотрицательность всех частичных сумм характера χ_p. Обозначим множество простых чисел p, удовлетворяющих данному условию, через $\mathcal{L}^+$. Первые несколько элементов $\mathcal{L}^+$ таковы:

$$\{3, 7, 11, 23, 31, 47, 59, 71, 79, 83, 103, 131, 151, 167, 191, 199, 239, 251 \ldots\} \tag{2}$$

В данном докладе мы обсудим результаты об относительной плотности множества $\mathcal{L}^+$ во множестве простых чисел и их связь с вещественными случайными мультипликативными функциями и их дзета-функциями в окрестности критической прямой.

УДК 517.948

О коэрцитивной оценке и разделимости дифференциального оператора Трикоми

О. Х. Каримов (Таджикистан, г. Душанбе)
Институт математики им. А. Джураева Национальной академии наук Таджикистана
e-mail: karimov_olim72@mail.ru

On the coercive estimate and separability of the Tricomi differential operator

Kh. O. Karimov (Tajikistan, Dushanbe)
A.Dzhuraev Institute of Mathematics, National Academy of Sciences of Tajikistan
e-mail: karimov_olim72@mail.ru

Фундаментальные результаты по теории разделимости дифференциальных операторов принадлежат В.Н.Эверитту и М.Гирцу. Существенный вклад в дальнейшее развитие этой теории внесли К.Х.Бойматов, М.Отелбаев и их ученики (см.[1]-[5] и имеющиеся там ссылки).

В докладе речь идёт о коэрцитивной оценке и разделимости дифференциального оператора Трикоми в гильбертовом пространстве.

Рассмотрим в пространстве $L_2(R^2)$ дифференциальный оператор Трикоми

$$L[u(x,y)] = -\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} - y\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} + V(x,y)u(x,y) = f(x,y), \tag{1}$$

Найдены условия на функцию $V(x,y)$, при выполнении которых уравнение (1) разделяется в пространстве $L_2(R^2)$, и для всех решений $u(x) \in L_2(R^2) \cap W^2_{2,loc}(R^2)$, удовлетворяющих уравнению (1) с правой частью $f(x,y) \in L_2(R^2)$, выполняется следующее коэрцитивное неравенство:

$$\|V(x,y)u(x,y); L_2(R^2)\| + \|\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} + y\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2}; L_2(R^2)\| +$$
$$+ \left\|V^{\frac{1}{2}}(x,y)\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}; L_2(R^2)\right\| + \left\|V^{\frac{1}{2}}(x,y)y^{\frac{1}{2}}\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}; L_2(R^2)\right\| \le M\|f(x,y); L_2(R^2)\|,$$

где положительное число M не зависит от $u(x,y)$, $f(x,y)$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бойматов К.Х. Теоремы разделимости, весовые просранства и их приложения // Труды МИАН СССР, 1984, т.170, с.37-76.
2. Отелбаев М. Коэрцитивные оценки и теоремы разделимости для эллиптических уравнений в R^n // Труды МИАН СССР, 1983, т.161, с.195-217.

3. E. M. E. Zayed, S. A. Omran. Separation of the Tricomi Differential Operator in Hilbert Space with Application to the Existance and Uniqueness Theorem // Int. J. Contemp. Math. Sciences, Vol. 6, 2011, № . 8, 353 - 364.
4. Каримов О.Х. О коэрцитивных свойствах и разделимости нелинейного бигармонического оператора с матричным потенциалом // Уфимский математический журнал, 2017, т.9, № 1, с.55-62.
5. Каримов О.Х. О коэрцитивной разрешимости нелинейного уравнения Лапласа-Бельтрами в гильбертовом пространстве // Чебышевский сборник, 2021, т.22, № 1, с.163-176.

УДК 517.948

Об интеграле Ютилы в проблеме круга (по совместной работе с Д. А. Поповым)[1]

М. А. Королёв (Россия, Москва)
Математический институт им. В. А. Стеклова Российской академии наук
e-mail: hardy_ramanujan@mail.ru, korolevma@mi-ras.ru

On Jutila's integral in the circle problem (joint work with D. A. Popov)

M. A. Korolev (Russia, Moscow)
Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences
e-mail: hardy_ramanujan@mail.ru, korolevma@mi-ras.ru

Для произвольного $x \geqslant 1$ обозначим через $\Delta(x)$ разность

$$\sum_{n \leqslant x} \tau(n) \, - \, x(\log x + 2\gamma - 1),$$

где $\tau(n)$ - количество делителей целого $n \geqslant 1$, а γ - постоянная Эйлера. Помимо классической проблемы делителей Дирихле, которая состоит в доказательстве оценки $\Delta(x) = O\big(x^{1/4+\varepsilon}\big)$ $(x \to +\infty, \varepsilon > 0$ - сколь угодно малое фиксированное число), имеется ряд других нерешённых задач, связанных с поведением функции $\Delta(x)$. В их числе - гипотеза М. Ютилы, согласно которой при $x \to +\infty$ и любом U, $1 \leqslant U \ll \sqrt{x}$, выполняется оценка

$$\Delta(x+U) - \Delta(x) \, \ll \, x^{\varepsilon}\sqrt{U}. \tag{1}$$

Доказательство (1) является, по-видимому, очень трудной задачей: известно, например, что из (1) следует решение проблемы делителей.

В качестве характеристики поведения разности $\Delta(x+U) - \Delta(x)$ «в среднем» Ютила ввёл в [1] интеграл

$$\mathcal{Q}_{\Delta} \, = \, \mathcal{Q}_{\Delta}(X, H; U) \, = \, \int_{X}^{X+H} \big(\Delta(x+U) - \Delta(x)\big)^2 dx, \tag{2}$$

и в случае, когда параметры подчинены условиям $1 \leqslant U \leqslant 0.5\sqrt{X}$, $\sqrt{X} \ll H \leqslant X$, получил для него явную формулу. Ее следствием явилась правильная по порядку двусторонняя оценка

$$\mathcal{Q}_{\Delta} \asymp HU\Big(\log \frac{\sqrt{X}}{U}\Big)^3, \tag{3}$$

[1] Исследование М.А. Королёва выполнено в МЦМУ МИАН при финансовой поддержке Минобрнауки России (соглашение № 075-15-2019-1614).

которая справедлива при дополнительном условии $HU \gg X^{1+\varepsilon}$. Из (3), в частности, следует, что гипотеза Ютилы верна «для почти всех» x.

Пусть, далее, $P(t)$ - остаточный член в проблеме круга, т.е. разность

$$\sum_{n\leqslant t} r(n) \,-\, \pi t,$$

где $r(n)$ - количество представлений n суммою двух квадратов целых чисел. Известно, что поведение функции $P(t)$ имеет ряд общих черт с поведением $\Delta(x)$. В частности, если рассмотреть величину

$$\mathcal{Q}_P \,=\, \mathcal{Q}_P(T;H,U) \,=\, \int_T^{T+H} \big(P(t+U)-P(t)\big)^2 dt,$$

которая является аналогом $\mathcal{Q}_\Delta$, то для неё при $1 \leqslant U \leqslant 0.5\sqrt{T}$, $\sqrt{T} \ll H \leqslant T$ и $HU \gg T^{1+\varepsilon}$ методом Ютилы получается правильная по порядку двусторонняя оценка

$$\mathcal{Q}_P \asymp HU \log \frac{\sqrt{T}}{U}. \tag{4}$$

Определим «корреляционную функцию»

$$\mathcal{K}_P \,=\, \mathcal{K}_P(T;H,U) \,=\, \int_T^{T+H} P(t+U)P(t)dt.$$

Тогда

$$2\mathcal{K}_P(T;H,U) \,=\, I(T+U,H) \,+\, I(T,H) \,-\, \mathcal{Q}_P(T;H,U), \quad \text{где} \quad I(T,H) \,=\, \int_T^{T+H} P^2(t)dt. \tag{5}$$

Можно показать, что в случае $\sqrt{T}(\ln T)^2 = o(H)$, $H = o(T)$ и $T \to +\infty$ выполняется равенство

$$I(T,H) \,=\, \frac{A}{2\pi^2}\, H\sqrt{T}\big(1 \,+\, o(1)\big), \quad A = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{r^2(n)}{n^{3/2}} = 50.1560561426\ldots\,. \tag{6}$$

Из (4)-(6) следует, что в случае $U \geqslant T^{2\varepsilon}$, $U = o(\sqrt{T})$ и $T^{1+\varepsilon}U^{-1} \leqslant H = o(T)$ для корреляционной функции справедлива следующая асимптотическая формула

$$\mathcal{K}_P(T;H,U) \,=\, \frac{A}{2\pi^2}\, H\sqrt{T}\,\big(1 \,+\, o(1)\big)$$

или, что то же,

$$\mathscr{K}_P(T;H,U) \,=\, \frac{2\pi^2}{H\sqrt{T}}\,\mathcal{K}_P(T;H,U) \,=\, A \,+\, o(1).$$

В то же время неравенство Коши наряду с асимптотикой (6) дают:

$$|\mathcal{K}_P(T;H,U)| \,\leqslant\, \sqrt{I(T,H)}\sqrt{I(T+U,H)} \,=\, \frac{A}{2\pi^2} H\sqrt{T}(1+o(1)),$$
$$\text{откуда} \quad -A+o(1) \leqslant \mathscr{K}_P(T;H,U) \leqslant A+o(1) \tag{7}$$

при любых T, H и U с условиями $H, U = o(T)$, $\sqrt{T}(\ln T)^2 = o(H)$. Это означает, что при всех малых U, $T^\varepsilon \ll U = o(\sqrt{T})$ и достаточно больших H корреляционная функция принимает наибольшее возможное значение. Это вполне согласуется с «наивным» пониманием величины

$\mathcal{K}_P$ как «меры независимости» $P(t)$ и $P(t+U)$, рассматриваемых как «случайные величины»: если U мало, то $P(t)$ и $P(t+U)$ «сильно зависимы» и их «корреляция» велика.

В статье [1] отмечено, что в случае $U \gg \sqrt{X}$ величины $\Delta(x+U)$ и $\Delta(x)$ должны вести себя как независимые случайные величины и потому исследование интеграла $\mathcal{Q}_\Delta(X,H;U)$ уже не представляет интереса. Подобное суждение можно было бы вынести и относительно функций $\mathcal{Q}_P$ и $\mathcal{K}_P$.

Однако поведение $\mathcal{Q}_P$ и $\mathcal{K}_P$ в случае больших $U, U \gg \sqrt{T}$, оказывается более сложным, чем это можно было бы ожидать. В частности, помимо «барьера» для U порядка $\sqrt{T}$, при переходе через который в корне меняется поведение $\mathcal{Q}_P$, важную роль начинает играть отношение $\varkappa = HU/T^{3/2}$.

Если такое отношение ограничено снизу положительной постоянной, то корреляционная функция $\mathcal{K}_P$ уже не достигает своего максимального положительного значения (см. приводимую ниже теорему 1). Это отвечает интуитивно ожидаемому эффекту «ослабления зависимости» между $P(t)$ и $P(t+U)$ с ростом U.

В случае «средних» значений $\varkappa$ существуют пары H,U, для которых $\mathcal{K}_P$ максимально близко к верхней границе, а также пары H,U, для которых $\mathcal{K}_P$ максимально близко к предполагаемой неулучшаемой нижней границе (теорема 2).

Наконец, в случае, когда отношение $\varkappa$ очень мало, устанавливаются неулучшаемые верхняя и нижняя границы для $\mathcal{K}_P$ (последняя отлична от указанной в (7)), причем доказывается, что при заданных T и H близость $\mathcal{K}_P$ к верхней и нижней границам, а также близость ее абсолютной величины к нулю имеют место на множествах значений U положительной меры (теоремы 3-5).

Приведем теперь точные формулировки соответствующих утверждений.

Теорема 1. *Пусть $\varepsilon_0 > 0$ - произвольная постоянная, $T \to +\infty$, $H,U = o(T)$, $\sqrt{T}(\log T)^2 = o(H)$, $\sqrt{T} = o(U)$ и пусть $\varkappa = HU/T^{3/2} \geqslant \varepsilon_0$ при $T \geqslant T_0(\varepsilon_0)$. Пусть, далее,*

$$B = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{r^2(n)}{n^2} = 26.847775\ldots .$$

Тогда справедливо неравенство

$$|\mathscr{K}_P(T;H,U)| \leqslant A - \delta + o(1),$$

причём величину δ можно взять равной $A - 4B/(\pi\varepsilon_0)$ в случае $\varepsilon_0 \geqslant 1$, и равной $A(\pi\varepsilon_0)^2/128$ в случае $0 < \varepsilon_0 < 1$.

Теорема 2. *Пусть $\varepsilon_0, \varepsilon_1$ – достаточно малые абсолютные постоянные, $D = D(T)$ – сколь угодно медленно возрастающая при $T \to +\infty$ неограниченная функция, такая, что*

$$\frac{1}{\varepsilon_1\sqrt{\log\log T}} \leqslant \frac{1}{D} \leqslant \varepsilon_0 \quad \textit{при} \quad T \geqslant T_0(\varepsilon_0,\varepsilon_1).$$

Тогда существуют величины H_j, U_j, $j = 1,2$, удовлетворяющие условиям

$$\sqrt{T}(\log T)^3 \leqslant U_j \leqslant \sqrt{T}e^{\sqrt{\log T}}, \quad Te^{-2\sqrt{\log T}} \leqslant H_j \leqslant T(\log T)^{-3}, \quad \frac{1}{D} \leqslant \frac{H_jU_j}{T^{3/2}} \leqslant \varepsilon_0$$

такие, что

$$\mathscr{K}_P(T;H_1,U_1) = A - O\Big(\varepsilon_0 \log^2\frac{1}{\varepsilon_0}\Big), \quad \mathscr{K}_P(T;H_2,U_2) = -\frac{3}{4}A - O\Big(\varepsilon_0 \log^2\frac{1}{\varepsilon_0}\Big).$$

где постоянные в знаках O - абсолютные.

Теорема 3. *Пусть ε – сколь угодно малое фиксированное число, $D = D(T)$ – сколь угодно медленно возрастающая при $T \to +\infty$ неограниченная функция, $H, V = o(T)$, $\sqrt{T} = o(V)$, $\sqrt{T}(\log T)^2 = o(H)$, и пусть при $T \geqslant T_0(\varepsilon)$ выполняются неравенства*

$$\frac{HV}{T^{3/2}} \leqslant \frac{1}{2D}, \quad V \leqslant \frac{T}{8D^2}.$$

Тогда существуют постоянная $c = c(\varepsilon) > 0$ и множество $\mathcal{E} \subset (V, 2V)$ с мерой mes $(\mathcal{E}) > cV$ *такие, что для всякого $U \in \mathcal{E}$ будет выполнено неравенство*

$$|\mathscr{K}_P(T; H, U)| < \varepsilon.$$

Теорема 4. *В условиях теоремы 3 существуют постоянная $c = c(\varepsilon) > 0$ и множества $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2 \subset (V, 2V)$ с мерами* mes $(\mathcal{E}_j) > cV$ *такие, что для всякого $U_j \in \mathcal{E}_j$ будут выполнены неравенства*

$$A - \varepsilon \leqslant \mathscr{K}_P(T; H, U_1) \leqslant A + o(1); \quad -\frac{3}{4}A + o(1) \leqslant \mathscr{K}_P(T; H, U_2) \leqslant -\frac{3}{4}A + \varepsilon.$$

Теорема 5. *Пусть $T \geqslant T_0$, $D = D(T) \leqslant T^{1/6}$ - сколь угодно медленно возрастающая монотонная и неограниченная при $T \to +\infty$ функция, и пусть $H = o(T)$, $\sqrt{T}(\log T)^2 = o(H)$, $U \leqslant T/(4D^2)$, $\sqrt{T} = o(U)$. Тогда справедливы неравенства:*

$$-\frac{3}{4}A + o_D(1) \leqslant \mathscr{K}_P(T; H, U) \leqslant A + o_D(1).$$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. M. Jutila, On the divisor problem for short intervals, *Ann. Univ. Turkuensis*, Ser. A I, **186** (1984), pp. 23–30.

УДК 511

Об асимптотике числа представлений пары целых чисел квадратичной и линейной формами с конгруэнциальным условием

У. М. Пачев (Россия, г. Нальчик)
Кабардино-Балкарский государственный университет
e-mail: urusbi@rambler.ru
Л. А. Халилова (Россия, г. Нальчик)
Кабардино-Балкарский государственный университет
e-mail: Khalilliana@yandex.ru

On the asymptotics of the number of representations by quadratic and linear forms with congruential condition

U. M. Pachev (Russia, Nalchik)
Kabardino-Balkarian State University
e-mail: urusbi@rambler.ru

L. A. Khalilova (Russia, Nalchik)
Kabardino-Balkarian State University
e-mail: Khalilliana@yandex.ru

И. М. Виноградовым [1] впервые круговым методом была решена задача асимптотического приближения числа решений для одного класса диофантовых систем уравнений.

В дальнейшем стали рассматривать системы диофантовых уравнений, содержащие линейные уравнения. Так, например, в [2] для диофантовой системы

$$\begin{cases} q(x_1, \ldots, x_s) = n, \\ l(x_1, \ldots, x_s) = m, \end{cases} \tag{1}$$

где $q(x_1, \ldots, x_s)$ — положительная квадратичная форма, $l(x_1, \ldots, x_s)$ — линейная форма, $s \geqslant 5$ была получена асимптотическая формула с остаточным членом при $N = \Delta\, n - D\, m^2 \to \infty$, здесь $\Delta = \overline{q_{ss}}$ есть алгебраическое дополнение к элементу q_{ss} матрицы $\mathbb{Q}(q_{ij})$ квадратичной формы q; D — её определитель. Интерес к асимптотическому подсчёту числа решений диофантовых систем уравнений обусловлен тем, что как показано в [3] при $s \geqslant 9$ невозможно получить точных формул.

Мы рассматриваем диофантову систему вида (1) с дополнительным конгруэнциальным условием, т. е. находим асимптотику числа решений с остаточным членом для диофантовой системы

$$\begin{cases} f(x_1, \ldots, x_s) = m, \\ l(x_1, \ldots, x_s) = n, \\ (x_1, \ldots, x_s) \equiv (b_1, \ldots, b_s) \pmod{g}. \end{cases} \tag{2}$$

Следующая лемма позволяет свести систему (2) к системе, в которой нет конгруэнциального условия.

Лемма 1. *Если* $f(b_1, \ldots, b_s) \equiv m \pmod{g}$ *и* $l(b_1, \ldots, b_s) \equiv n \pmod{g}$, *то система* (2) *сводится к системе вида*

$$\begin{cases} F(y_1, \ldots, y_s) = m_1, \\ l(y_1, \ldots, y_s) = n_1, \end{cases} \tag{3}$$

где $F(y_1, \ldots, y_s) = g\, f(y_1, \ldots, y_s) + c(y_1, \ldots, y_s)$; $c(y_1, \ldots, y_s) = c_1\, y_1 + \ldots + c_s\, y_s$; $m_1 = \frac{m - f(b_1, \ldots, b_s)}{g}$, $n_1 = \frac{n - l(b_1, \ldots, b_s)}{g}$, $c_i = \sum\limits_{j=1}^{s} a_{ij}\, b_j$.

Для формулировки получаемого асимптотического результата в терминах исходной задачи, относящихся к системе (2) или (3) нужно найти какие-то совместные инварианты рассматриваемой задачи. Примером такого исследования является указанная выше работа А. А. Вальфиш [2].

Лемма 2. *Пусть* НОД$(l_1, \ldots, l_s) = 1$. *Тогда система диофантовых уравнений* (3) *сводится к системе вида*

$$\begin{cases} F'(z_1, \ldots, z_s) = m_1, \\ z_s = n_1, \end{cases} \tag{4}$$

где $F'(z_1, \ldots, z_s) = g\, f'(z_1, \ldots, z_s) + \sum\limits_{i=1}^{s} c'_i\, z_i$ *и имеет место равенство* $\overline{F'}(l'_1, \ldots, l'_s) = \overline{F}(l_1, \ldots, l_s)$, *где* $\overline{F}$ *— алгебраически взаимный многочлену* F.

Лемма 3. *Пусть система* (3) *имеет вид* (4), *т. е.* $l_1 = \ldots = l_{s-1} = 0$, $l_s = 1$. *Тогда каждому целочисленному решению системы* (4) *взаимно однозначно сопоставляется целочисленное решение* $Z'^T = \left(z'_1, \ldots, z'_{s-1}\right)$ *диофантовой задачи*

$$\varphi\left(Z'\right) = \Delta' N',$$

$$Z'^T \equiv -n_1 \Theta'^T \pmod{\Delta'},$$

где $\Delta' = g^{s-1}\Delta$, $N' = \Delta' m_1 - D' n_1^2 = g^{s-1}\left(\Delta m_1 - g D n_1^2\right) = g^{s-1} N$ *где* $N = \Delta m_1 - g D n_1^2$; $\Theta'^T = g^{s-1}(\Delta_1, \ldots, \Delta_{s-1})$.

Леммы 1–3 вместе с понятием особого ряда рассматриваемой задачи приводят к следующей асимптотической формуле для числа решений $r_{g;\, b_1, \ldots, b_s}(f,\, m;\, l,\, n)$ диофантовой системы (2), при этом применяется также результат А. В. Малышева [4, гл. III].

Теорема 1. *Для числа решений диофантовой системы* (2) *имеет место формула*

$$r_{g;\, b_1, \ldots, b_s}(f,\, m;\, l,\, n) = \frac{\pi^{\frac{s-1}{2}}\, g^{s-1}\, N^{\frac{s-3}{2}}}{\left(g^{s-1}\,\Delta\right)^{\frac{s}{2}-1}\,\Gamma\left(\frac{s-1}{2}\right)} \cdot H_{g;\, b_1, \ldots, b_s}(F,\, m_1) + O\left(g^{s-1}\, N^{\frac{s}{4}-\frac{1}{2}+\varepsilon}\right),$$

где Γ *— гамма-функция;* $H_{g;\, b_1, \ldots, b_s}(F,\, m_1) = \sum\limits_{q=1}^{\infty} \left\{ \sum\limits'_{h \bmod Ng} q^{-s}\, S(h\,F,\, q)\, e^{-2\pi i \frac{m_1 h}{q}} \right\}$ *— особый ряд,* $S(h\,F,\, q) = \sum\limits_{x_1, \ldots, x_s = 1}^{q} e^{2\pi i \frac{h\,F(x_1, \ldots, x_s)}{q}}$ *— неоднородная кратная сумма Гаусса.*

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Виноградов И. М. Об одном классе совокупных диофантовых уравнений // Известия АН СССР. VII серия. Отделение физико—математических наук, 1929, № 4, С. 355–376.

2. Воронецкий А. Б., Малышев А. В. Об одновременном представлении пары чисел суммами целых и их квадратов // Тр. МИАН. Т. 142, 1976, С. 122–134.

3. Walfisz A. A. Über die simultane Darstellung zweier ganzer Zahlen durch quadratische und lineare Formen // Acta Arith. 1979. V. XXXV. S. 289–301.

4. Малышев А. В. О представлении целых чисел положительными квадратичными формами // Труды математического ин-та АН СССР. Т. 65, 1962, С. 1–212.

УДК 511

Эргодические теоремы для целых точек на некоторых гиперболоидах в связи с гипотезами для L-функции Дирихле

У. М. Пачев (Россия, г. Нальчик)
Кабардино-Балкарский государственный университет
e-mail: urusbi@rambler.ru
М. Т. Шурдумова (Россия, г. Нальчик)
Кабардино-Балкарский государственный университет
e-mail: milka_shakova@icloud.com

Ergodic theorems for integer points on some hyperboloids in connection with hypothesis for the Dirichlet L-function

U. M. Pachev (Russia, Nalchik)
Kabardino-Balkarian State University
e-mail: urusbi@rambler.ru
M. T. Shurdumova (Russia, Nalchik)
Kabardino-Balkarian State University
e-mail: milka_shakova@icloud.com

Пусть $f = f(x_1, x_2, x_3)$ — целочисленная неопределённая тернарная квадратичная форма рода $G_{[w,2]}$ инвариантов $[w, 2]$, где w — нечётное число. Тернарный род $G_{[w,2]}$ определяется характерами: символ Лежандра

$$\left(\frac{-f}{p}\right) = 1 \text{ для всех простых } p/w. \tag{1}$$

Тогда (см. [1]) имеет место соотношение

$$f(x_1, x_2, x_3) = f_0\left(\sum_{k=1}^{3} c_{1\,k}\, x_k, \sum_{k=1}^{3} c_{2\,k}\, x_k, \sum_{k=1}^{3} c_{3\,k}\, x_k\right), \tag{2}$$

где $f_0 = f_0(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_3 - x_2^2$ — простейшая неопределённая тернарная квадратичная форма; $c_{ij} \in \mathbb{Z}$ $(i, j = 1, 2, 3)$, $\det(c_{ij}) = w$. Основной вопрос, рассматриваемый нами, состоит в изучении распределения целых примитивных точек на гиперболоиде

$$f(x_1, x_2, x_3) = m, \quad m \in \mathbb{Z},\ m \neq 0 \tag{3}$$

как по областям, на его поверхности, так и по классам вычетов по данному модулю.

Такой вопрос в случае простейшего гиперболоида $x_1 x_3 - x_2^2 = m$ при $m \to \infty$ был впервые решён Ю. В. Линником с помощью разработанного им дискретного эргодического метода (см. [2]).

В нашем случае гиперболоида (3) предполагаем, что сравнение

$$f(x_1, x_2, x_3) = m \pmod r, \quad \text{НОД}\,(x_1, x_2, x_3) = 1.$$

разрешимо для любого целого $r \neq 0$.

Эргодический метод Ю. В. Линника основан на построении потока целых точек, лежащих на заданной поверхности второго порядка, при этом используются исследования Б. А. Венкова по теории поворотов кватернионов [3] и её аналоги.

На гиперболоиде (3) можно разными способами построить поток заданной длины $s \gg \log|m|$ целых примитивных точек (см. [4]):

$$(x_1, x_2, x_3) \to \left(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, x_3^{(1)}\right) \to \ldots \to \left(x_1^{(s-1)}, x_2^{(s-1)}, x_3^{(s-1)}\right), \tag{4}$$

на множестве $Z_{f,m}$ всех целых примитивных точек гиперболоида (3), при этом точка (x_1, x_2, x_3) интерпретируется целой вектор—матрицей

$$L = \begin{pmatrix} x_2 & -x_1 \\ x_3 & -x_2 \end{pmatrix}$$

и аналогично для всех остальных целых точек цепочки (4).

Пусть $q > 0$ — нечётное число, взаимно простое с m, причём символ Лежандра

$$\left(\frac{-m}{p}\right) = 1 \text{ для всех простых делителей числа } q. \tag{5}$$

и значит, выполняется сравнение

$$u^2 + m \equiv 0 \pmod{q},$$

позволяющее записать матричное разложение

$$u + L = Q\,U, \text{ где } N(Q) = \det Q = q.$$

Из такого разложения следует, что $L' = Q^{-1}\,L\,Q$ также есть целая примитивная вектор—матрица, причём $N(L') = N(L) = m$. Итерации такого преобразования приводят к потоку вектор—матриц нормы m.

Но условие (5), привнесённое самим эргодическим методом приводит к тому, что остаточный член в эргодической теореме будет зависеть от этого вспомогательного простого числа p (см. [2]).

Для устранения этого недостатка приходится предполагать справедливость, например, следующей гипотезы о нулях L-функции Дирихле (см. [5]).

Гипотеза 1 (H). *В области*

$$|s-1| < \frac{(\log\log|m|)^2\,\log\log\log|m|}{\sqrt{\log|m|}} \tag{6}$$

комплексного переменного s при достаточно больших m нет нулей $L(s,\,\chi)$, где

$$L(s,\,\chi) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\chi(k)}{k^s}, \quad \operatorname{Re} s > 1;$$

χ — вещественный характер Дирихле, имеющий наименьший модуль среди характеров для которых

$$\chi(k) = \left(\frac{-m}{k}\right), \quad \text{НОД}\,(k,\,2\,m) = 1.$$

В предположении справедливости гипотезы (H) имеет место следующая эргодическая теорема, обобщающая соответствующий результат из статьи [6].

Теорема 1 (эргодическая). *Пусть f — квадратичная форма рода $G_{[w,\,2]}$, где w — нечётное число, $m \neq 0$ — целое число и b_1, b_2, b_3 — целые числа, удовлетворяющие условиям:* $\text{НОД}\,(m,\,w\,g\,q) = 1$, $\text{НОД}\,(b_1,\,b_2,\,b_3,\,2) = 1$, $f(b_1,\,b_2,\,b_3) \equiv m \pmod{8\,w\,g}$, $\left(\frac{-m}{q}\right) = 1$. *Пусть $\Lambda_{f,\,m}$ — ограниченная квадрируемая область на поверхности гиперболоида $f(x_1,\,x_2,\,x_3) = m$ с f-гиперболической мерой $\lambda = \lambda(\Lambda_{f,\,m}) > 0$. Рассмотрим поток целых примитивных точек*

$$\left(x_{k\,1}^{(0)},\,x_{k\,2}^{(0)},\,x_{k\,3}^{(0)}\right) \to \left(x_{k\,1}^{(1)},\,x_{k\,2}^{(1)},\,x_{k\,3}^{(1)}\right) \to \ldots \to \left(x_{k\,1}^{(s-1)},\,x_{k\,2}^{(s-1)},\,x_{k\,3}^{(s-1)}\right) \to$$

длины s ($k = 1,\,\ldots,\,r'$). Пусть при $|m| \to \infty$

$$r' \gg \frac{r(m)}{\log^e|m|}, \quad r(m) = \#\,Z_{f,\,m}$$

— число примитивных точек в области приведения на гиперболоиде (3), *где* $e \geqslant 2$ *заданное вещественное число,*

$$\frac{g^2 \log(g+1)}{\lambda} = o(\log|m|), \quad s \gg \log|m|.$$

Тогда цепочки потока можно разбить на две категории:

а) «хорошие» цепочки, обладающие свойством эргодичности: если k *— индекс, отвечающий «хорошей» цепочке, то*

$$\#\left\{j \mid j = 0, 1, \ldots, s-1;\ \left(x_{k1}^{(j)}, x_{k2}^{(j)}, x_{k3}^{(j)}\right) \in \Lambda_{f,m},\ \left(x_{k1}^{(j)}, x_{k2}^{(j)}, x_{k3}^{(j)}\right) \equiv (b_1, b_2, b_3) \pmod g\right\} =$$

$$= \frac{\lambda}{\lambda_0} \frac{1}{\rho(g;\ f,\ m)}\, s \left\{1 + O\left(\frac{g \log(g+1)}{\sqrt{\lambda}} \frac{1}{(\log|m|)^{\frac{1}{4}}}\right)\right\};$$

а) «плохие» цепочки, которых мало; их общее количество

$$\ll \frac{1}{\log^e |m|}\, r';$$

здесь λ_0 *— гиперболическая мера области приведения;* $\rho(g;\ f,\ m)$ *— число решений* (b_1, b_2, b_3) *сравнения* $f(b_1, b_2, b_3) \equiv m \pmod g$*; постоянные, входящие в* O *и в знак* $\ll$ *зависят только от* q, e *и* $\overline{\Lambda}_{f,m} = \frac{1}{\sqrt{|m|}} \Lambda_{f,m}$.

Эргодическая теорема 1 рассмотрена нами сразу для обоих видов гиперболоидов (это оказывается возможным ввиду [7]). В дальнейшем её можно применить к выводу теорем перемешивания и равномерного распределения целых точек на рассматриваемых гиперболоидах.

Распределение целых точек на гиперболоидах специального вида изучена и Е. П. Голубева [8] дисперсионным методом.

Результаты Е. П. Голубевой также являются условными, поскольку они предполагают справедливость некоторой другой гипотезы о нулях L-функции Дирихле.

Но при этом отметим также, что в дальнейшем Дьюк [9] методом модулярных форм получил асимптотическую формулу с безусловным остаточным членом для числа целых точек на простейшем гиперболоиде.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. О распределении целых точек на некоторых двуполостных гиперболоидах // Записки научных семинаров ЛОМИ. 1980. Т. 93. С. 87–141.

2. Линник Ю. В. Эргодические свойства алгебраических полей. Л.: Изд.-во Ленингр. ун-та, 1967.

3. Венков Б. А. Избранные труды «Наука». 1981. 448 с.

4. Малышев А. В. О применении дискретного эргодического метода к аналитической арифметике неопределённых тернарных квадратичных форм // Записки научных семинаров ЛОМИ. 1980. Т. 93. С. 5–24.

5. Малышев А. В., Пачев У. М. Об остаточных членах в эргодических теоремах для целых точек на некоторых двуполостных гиперболоидах // Аналитическая теория чисел. Петрозаводск. Меж. вуз. сб. 1986. С. 46–51.

6. Пачев У. М. Эргодические свойства потоков целых точек на некоторых гиперболоидах в связи с гипотезами для L-функции Дирихле // Чебышевский сб. Т. 17. Вып. 1. С. 171–186.

7. Малышев А. В., Широков Б. М. Новое доказательство ключевой леммы дискретного эргодического метода для вектор—матриц второго порядка // Вестник ЛГУ, 1991. С. 34–40.

8. Голубева Е. П. Асимптотическое распределение целых точек, принадлежащих заданным классам вычетов на гиперболоидах специального вида // Математический сборник. 1984, 123 (165), № 4, С. 510–533.

9. Duke W. Hyperbolic distribution problems and halfinteger weight Maas forms // Invent. math. 1988. V. 92, No. 1. Pp. 78–90.

УДК 511.464

Арифметические свойства элементов прямых произведений p-адических полей, II

А. С. Самсонов (Россия, г. Москва)
Московский педагогический государственный университет
e-mail: dontsmoke@inbox.ru

Arithmetic properties of direct product of p-adic fields elements, II

A. S. Samsonov (Russia, Moscow)
Moscow State Pedagogical University
e-mail: dontsmoke@inbox.ru

Это второй доклад на выбранную тему, первый был сделан на прошлой конференции [1]. Получены существенные новые результаты.

Рассматриваются вопросы трансцендентности и алгебраической независимости элементов прямых произведений p-адических полей, получены обобщения некоторых теорем из работ [2], [3].

Используются следующие обозначения: p — простое число, $\mathbb{Z}_p$ — кольцо целых p-адических чисел, $|x|_p = p^{-ord_p x}$ — p-адическая норма; $\mathbb{Q}_p$ — поле p-адических чисел, это пополнение поля рациональных чисел по p-адической норме; Ω_p, оно же $\mathbb{C}_p$ — пополнение алгебраического замыкания $\mathbb{Q}_p$; $K[x]$ — кольцо многочленов с коэффициентами из кольца K, например $\mathbb{Q}_p[x]$, $K[x_1, \ldots, x_m]$ — кольцо многочленов от m переменных над кольцом K.

Для g-адических чисел используются следующие обозначения: $g = p_1 \ldots p_n$ — произведение различных простых чисел, $\mathbb{Z}_g$ — кольцо целых g-адических чисел, $|x|_g$ — g-адическая псевдонорма; $\mathbb{Q}_g$ — кольцо g-адических чисел, пополнение множества рациональных чисел по g-адической псевдонорме; построено кольцо Ω_g — расширение кольца $\mathbb{Q}_g$, $\Omega_g \cong \Omega_{p_1} \oplus \ldots \oplus \Omega_{p_n}$, и изоморфизм $\varphi: \ \Omega_g \to \Omega_{p_1} \oplus \ldots \oplus \Omega_{p_n}$, $\psi = \varphi^{-1}$.

Для полиадических чисел используются следующие обозначения: все простые числа пронумерованы $p_1 = 2, \ p_2 = 3, \ p_3 = 5, \ldots$; $\widehat{\mathbb{Z}} = \prod\limits_p \mathbb{Z}_p$ — кольцо целых полиадических чисел; $\widehat{\mathbb{Q}} = \prod\limits_p \mathbb{Q}_p$, $\widehat{\Omega} = \prod\limits_p \Omega_p$.

Существенным отличием новых результатов является, например, возможность делать выводы не только для чисел вида $\alpha = \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k g^{r_k}$, где $a_k \in \mathbb{Z}_g$, но и для чисел вида $f(\alpha)$, где $f(z) = \sum\limits_{j=0}^{\infty} c_j z^j \in \mathbb{Z}_g[[z]]$.

Определение 1. *Обозначим* $\mathbb{Z}_g^* := \{\alpha = \psi(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n) \in \mathbb{Z}_g : \forall k \in \{1, \ldots, n\},\ \beta_k \neq 0\}$, $\widehat{\mathbb{Z}}^* := \{\alpha = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n, \ldots) \in \widehat{\mathbb{Z}} : \forall k \in \mathbb{N},\ \beta_k \neq 0\}$.

Хотелось бы ввести обозначение $A\backslash\widehat{0}$, которое бы исключало из множества A, являющегося прямым произведением, все такие элементы, что хотя бы одна из компонент тождественно равна нулю, иными словами, исключить нули и делители нуля. Это обозначение представим в следующем виде.

Определение 2. $\mathbb{Z}_g\backslash\widehat{0} := \mathbb{Z}_g^*$, $\widehat{\mathbb{Z}}\backslash\widehat{0} := \widehat{\mathbb{Z}}^*$, $\mathbb{Q}_g[x]\backslash\widehat{0} := \{G = (P_1, P_2, \ldots, P_n) \in \mathbb{Q}_g[x] : \forall k \in \{1, \ldots, n\},\ P_k \not\equiv 0\}$, $\widehat{\mathbb{Q}}[x]\backslash\widehat{0} := \{G = (P_1, P_2, \ldots, P_n, \ldots) \in \widehat{\mathbb{Q}}[x] : \forall k \in \mathbb{N},\ P_k \not\equiv 0\}$ *и так далее.*

Введем понятие глобального соотношения следующим образом.

Определение 3. *Пусть* $\alpha \in \Omega_g$, $\alpha = \psi(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$. *Будем называть* α *глобально трансцендентным над* $\mathbb{Q}_g$ *элементом* Ω_g, *если для любого* $k \in \{1, \ldots, n\}$ *и любого многочлена* $G = \psi(P_1, P_2, \ldots, P_n) \in \mathbb{Q}_g[x]\backslash\widehat{0}$ *выполняется неравенство* $P_k(\beta_k) \neq 0$.

Определение 4. *Пусть* $\alpha_i \in \Omega_g$, $\alpha_i = \psi(\beta_{i,1}, \beta_{i,2}, \ldots, \beta_{i,n})$, $i = 1, \ldots, m$. *Будем называть* α_i *глобально алгебраически независимыми над* $\mathbb{Q}_g$ *элементами* Ω_g, *если для любого* $k \in \{1, \ldots, n\}$ *и любого многочлена* $G = \psi(P_1, P_2, \ldots, P_n) \in \mathbb{Q}_g[x_1, \ldots, x_m]\backslash\widehat{0}$ *выполняется неравенство* $P_k(\beta_{1,k}, \ldots, \beta_{m,k}) \neq 0$.

Определение 5. *Пусть* $\alpha \in \widehat{\Omega}$, $\alpha = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n, \ldots)$. *Будем называть* α *глобально трансцендентным над* $\widehat{\mathbb{Q}}$ *элементом* $\widehat{\Omega}$, *если для любого* $k \in \mathbb{N}$ *и любого многочлена* $G = (P_1, P_2, \ldots, P_n, \ldots) \in \widehat{\mathbb{Q}}[x]\backslash\widehat{0}$ *выполняется неравенство* $P_k(\beta_k) \neq 0$.

Определение 6. *Пусть* $\alpha_i \in \widehat{\Omega}$, $\alpha_i = (\beta_{i,1}, \beta_{i,2}, \ldots, \beta_{i,n}, \ldots)$, $i = 1, \ldots, m$. *Будем называть* α_i *глобально алгебраически независимыми над* $\widehat{\mathbb{Q}}$ *элементами* $\widehat{\Omega}$, *если для любого* $k \in \mathbb{N}$ *и любого многочлена* $G = (P_1, P_2, \ldots, P_n, \ldots) \in \widehat{\mathbb{Q}}[x_1, \ldots, x_m]\backslash\widehat{0}$ *выполняется неравенство* $P_k(\beta_{1,k}, \ldots, \beta_{m,k}) \neq 0$.

Таким образом, говоря о наличии глобального соотношения, будем подразумевать наличие соответствующего соотношения для каждой компоненты.

Теорема 1. *Пусть* $g = p_1 \ldots p_n$,

$$f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j z^j \in \mathbb{Z}_g[[z]],\ \sum_{j=1}^{\infty} c_j z^j \in \mathbb{Z}_g[[z]]\backslash\widehat{0},$$

$$\alpha_\mu = \sum_{k=1}^{\infty} a_{k,\mu} g^{r_{k,\mu}},\ \alpha_\mu \in \Omega_g,\ a_{k,\mu} \in \mathbb{Z}_g^*,\ \mu = 1, \ldots, m.$$

Пусть

1) для любого $\mu = 1, \ldots, m$ *положительные рациональные числа* $r_{k,\mu}$ *образуют возрастающую и стремящуюся к* $+\infty$ *при* $k \to +\infty$ *последовательность;*

2) для любого $\mu = 1, \ldots, m$ *существует бесконечное множество номеров* k *таких, что число* $r_{k+1,\mu}$ *не является линейной комбинацией с целыми коэффициентами чисел* $1, r_{1,\mu}, \ldots, r_{k,\mu}$ *и чисел* $r_{k',\mu'}$ *при любых* k' *и при* $\mu' \neq \mu$;

3) не существует номеров k, k', μ *таких, что разница* $r_{k,\mu} - r_{k',\mu}$ *является целым числом.*

Тогда элементы $f(\alpha_\mu)$ *представляют собой глобально алгебраически независимые над* $\mathbb{Q}_g$ *элементы* Ω_g.

Теорема 2. *Пусть* $g = (p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots)$,

$$f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j z^j \in \widehat{\mathbb{Z}}[[z]],\ \sum_{j=1}^{\infty} c_j z^j \in \widehat{\mathbb{Z}}[[z]]\backslash\widehat{0},$$

$$\alpha_\mu = \sum_{k=1}^{\infty} a_{k,\mu} g^{r_{k,\mu}},\ \alpha_\mu \in \widehat{\Omega},\ a_{k,\mu} \in \widehat{\mathbb{Z}}^*,\ \mu = 1, \ldots, m.$$

Пусть
1) для любого $\mu = 1, \ldots, m$ *положительные рациональные числа* $r_{k,\mu}$ *образуют возрастающую и стремящуюся к* $+\infty$ *при* $k \to +\infty$ *последовательность;*
2) для любого $\mu = 1, \ldots, m$ *существует бесконечное множество номеров* k *таких, что число* $r_{k+1,\mu}$ *не является линейной комбинацией с целыми коэффициентами чисел* $1, r_{1,\mu}, \ldots, r_{k,\mu}$ *и чисел* $r_{k',\mu'}$ *при любых* k' *и при* $\mu' \neq \mu$;
3) не существует номеров k, k', μ *таких, что разница* $r_{k,\mu} - r_{k',\mu}$ *является целым числом.*

Тогда элементы $f(\alpha_\mu)$ *представляют собой глобально алгебраически независимые над* $\widehat{\mathbb{Q}}$ *элементы* $\widehat{\Omega}$.

Теорема 3. *Пусть* $g = p_1 \ldots p_n$, *функции*

$$f_\lambda(z) = \sum_{j=0}^{\infty} c_{j,\lambda} z^j \in \mathbb{Z}_g[[z]],\ \lambda = 1, \ldots, l,$$

являются глобально алгебраически независимыми над $\mathbb{Q}_g$.

$$\alpha_\mu = \sum_{k=1}^{\infty} a_{k,\mu} g^{r_{k,\mu}},\ \alpha_\mu \in \Omega_g,\ a_{k,\mu} \in \mathbb{Z}_g^*,\ \mu = 1, \ldots, m.$$

Пусть
1) для любого $\mu = 1, \ldots, m$ *положительные рациональные числа* $r_{k,\mu}$ *образуют возрастающую и стремящуюся к* $+\infty$ *при* $k \to +\infty$ *последовательность;*
2) для любого $\mu = 1, \ldots, m$ *существует бесконечное множество номеров* k *таких, что число* $r_{k+1,\mu}$ *не является линейной комбинацией с целыми коэффициентами чисел* $1, r_{1,\mu}, \ldots, r_{k,\mu}$ *и чисел* $r_{k',\mu'}$ *при любых* k' *и при* $\mu' \neq \mu$, $\mu' = 1, \ldots, m$;
3) не существует номеров k, k', μ *таких, что разница* $r_{k,\mu} - r_{k',\mu}$ *является целым числом.*

Тогда элементы $f_\lambda(\alpha_\mu)$ *представляют собой глобально алгебраически независимые над* $\mathbb{Q}_g$ *элементы* Ω_g.

Теорема 4. *Пусть* $g = (p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots)$, *функции*

$$f_\lambda(z) = \sum_{j=0}^{\infty} c_{j,\lambda} z^j \in \widehat{\mathbb{Z}}[[z]],\ \lambda = 1, \ldots, l,$$

являются глобально алгебраически независимыми над $\widehat{\mathbb{Q}}$.

$$\alpha_\mu = \sum_{k=1}^{\infty} a_{k,\mu} g^{r_{k,\mu}},\ \alpha_\mu \in \widehat{\Omega},\ a_{k,\mu} \in \widehat{\mathbb{Z}}^*,\ \mu = 1, \ldots, m.$$

Пусть
1) для любого $\mu = 1, \ldots, m$ *положительные рациональные числа* $r_{k,\mu}$ *образуют возрастающую и стремящуюся к* $+\infty$ *при* $k \to +\infty$ *последовательность;*

2) для любого $\mu = 1, \dots, m$ существует бесконечное множество номеров k таких, что число $r_{k+1,\mu}$ не является линейной комбинацией с целыми коэффициентами чисел $1, r_{1,\mu}, \dots, r_{k,\mu}$ и чисел $r_{k',\mu'}$ при любых k' и при $\mu' \neq \mu$, $\mu' = 1, \dots, m$;
3) не существует номеров k, k', μ таких, что разница $r_{k,\mu} - r_{k',\mu}$ является целым числом.

Тогда элементы $f_\lambda(\alpha_\mu)$ представляют собой глобально алгебраически независимые над $\widehat{\mathbb{Q}}$ элементы $\widehat{\Omega}$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Самсонов А. С., Арифметические свойства элементов прямых произведений p-адических полей [Электронный ресурс], Режим доступа: http://poivs.tsput.ru/conf/international/XVIII/files/Conference2020.pdf.

2. Bundschuh P., Chirskii V. G. On the algebraic independence of elements from $\mathbb{C}_p$ over $\mathbb{Q}_p$, II // ActaArithm. 2004. V. 113, № 4. P. 309-326.

3. Самсонов А. С., Арифметические свойства элементов прямых произведений p-адических полей // Чебышевский сборник. 2020. Том 21, вып. 4. с. 227-242.

УДК 511.32

Об оценках сумм Клоостермана с весами

Н. К. Семёнова (Россия, г. Москва)
Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
e-mail: snkone132@mail.ru

On the estimates of weighted Kloosterman sums

N. K. Semenova (Russia, Moscow)
Lomonosov Moscow State University
e-mail: snkone132@mail.ru

Пусть $m \geqslant 2$, a, b – целые числа, символ $\overline{\nu}$ обозначает обратный вычет к ν по модулю m. Полной суммой Клоостермана называется тригонометрическая сумма вида

$$S(m,a,b) = \sum_{\substack{\nu=1 \\ (\nu,m)=1}}^{m} \exp\Big(2\pi i \frac{a\overline{\nu} + b\nu}{m}\Big). \tag{1}$$

Неулучшаемая оценка полной суммы Клоостермана для случая простого m и $(a,m) = 1$ была получена в 1948 г. А. Вейлем: $|S(m,a,b)| \leqslant 2\sqrt{m}$ (см. [1]). Данную оценку можно обобщить на случай произвольных m, a и b, а именно $|S(m,a,b)| \leqslant \tau(m)\sqrt{m}(a,b,m)^{1/2}$, где $\tau(m)$ – функция делителей, (a,b,m) – наибольший общий делитель чисел a, b и m (см. [2]).

Наряду с оценкой сумм (1) представляют интерес оценки так называемых неполных сумм Клоостермана

$$S(x,m,a,b) = \sum_{\substack{\nu \leqslant x \\ (\nu,m)=1}} \exp\Big(2\pi i \frac{a\overline{\nu} + b\nu}{m}\Big), \tag{2}$$

где $1 < x < m$. В случае $x \leqslant \sqrt{m}$ сумму будем называть короткой. При $x \geqslant m^{1/2+\varepsilon}$ нетривиальная оценка таких сумм следует из упомянутого выше результата А.Вейля.

В начале 1990 гг. А. А. Карацубой был предложен метод, позволяющий получать нетривиальные оценки коротких сумм Клоостермана (см. [3] - [5]). В его основе лежит оценка величины $I_k(X)$ – числа решений сравнения

$$\overline{p}_1 + ... + \overline{p}_k \equiv \overline{p}_{k+1} + ... + \overline{p}_{2k} \pmod{m},$$

где $p_1, \dots p_{2k}$ - простые, $X < p_1, \dots p_{2k} < 2X$, $k(2X)^{2k-1} < m$.

Оценка $I_k(X)$ используется для получения оценки коротких двойных сумм Клоостермана вида

$$W(X,Y) = \sum_{X<q\leqslant X_1} \sum_{Y<p\leqslant Y_1} \exp\Big(2\pi i \frac{a\overline{pq} + bpq}{m}\Big), \tag{3}$$

где $X_1 \leqslant 2X$, $Y_1 \leqslant 2Y$, p, q пробегают простые числа, и для некоторых $k, s \geqslant 2$ величины X, Y, m связаны соотношениями $k(2X)^{2k-1} < m$, $s(2Y)^{2s-1} < m$.

Оценка короткой суммы Клоостермана (2) проводится следующим образом. Слагаемые разбиваются на две суммы. Первая сумма содержит слагаемые, отвечающие числам ν, не имеющим простых делителей из специальных промежутков. Такая сумма оценивается тривиально. Слагаемые из второй суммы группируются так, чтобы оценку каждой из полученных сумм можно было свести к оценке короткой двойной суммы Клоостермана (3).

Метод А. А. Карацубы получил дальнейшее развитие в работах Ж. Бургейна, М. З. Гараева [6] и М. А. Королёва (см. [7] - [10])

Рассмотрим короткую сумму Клоостермана

$$S(x) = \sum_{\substack{\nu\leqslant x \\ (\nu,m)=1}} f(\nu) \exp\Big(2\pi i \frac{a\overline{\nu} + b\nu}{m}\Big) \tag{4}$$

с весом $f(\nu)$, где $f(\nu)$ – некоторая арифметическая функция. Первые оценки для такого рода сумм были получены М. А. Королёвым. Автору удалось уточнить результаты статьи [8], используя идеи и приемы работ [6, 9, 10].

Введем следующие обозначения, необходимые для формулировки основных результатов:

- m – простое число, m_0, m_1, c_0, c_1 – абсолютные постоянные;
- $\mu(\nu)$ – функция Мёбиуса;
- $b(\nu)$ – функция, определенная следующим образом:

$$b(\nu) = \begin{cases} 1, & \text{если } \nu = x^2 + y^2, \quad x, y - \text{целые числа}, \\ 0, & \text{иначе}; \end{cases}$$

- $\tau_r(\nu)$ – многомерная функция делителей, т.е. количество решений уравнения $x_1 \dots x_r = \nu$ в натуральных числах $x_1, \dots, x_r$;
- $f(n)$ – любая из функций $\tau_r(\nu)$, $\mu(\nu)$, $\mu^2(\nu)$, $b(n)$;
- α – параметр, зависящий от выбранной функции $f(\nu)$, $\alpha = r$ для $f(\nu) = \tau_r(\nu)$, $\alpha = \frac{1}{2}$ для $f(\nu) = b(\nu)$, $\alpha = 1$ в случае $f(\nu) = \mu^2(\nu)$ и $f(\nu) = \mu(\nu)$;
- β – параметр, также зависящий от выбранной функции $f(\nu)$, $\beta = 1$ для $f(\nu) = b(\nu)$, $\beta = 0$ в остальных случаях;

- $F(x) = \sum_{\nu \leqslant x} |f(\nu)|$.

Основными результатами являются следующие теоремы.

Теорема 1. *Пусть $m \geqslant m_0$ – достаточно большое простое число, $(a, m) = 1$, и пусть*

$$\exp\left(c_0(\ln m)^{2/3}(\ln\ln m)^{4/3}\right) \leqslant x \leqslant \sqrt{m}.$$

Тогда имеет место оценка

$$\Big|\sum_{\substack{\nu \leqslant x \\ (\nu,m)=1}} f(\nu)\exp\left(2\pi i\frac{a\overline{\nu}}{m}\right)\Big| \ll F(x)\Delta,$$

где

$$\Delta = \left(\frac{\ln m}{(\ln x)^{3/2}}(\ln\ln m)^2\right)^{\alpha}(\ln\ln m)^{\beta},$$

причем постоянная в знаке Виноградова – абсолютная.

Теорема 2. *Пусть $m \geqslant m_1$ – достаточно большое простое число, $(a, m) = 1$, и пусть*

$$\exp\left(c_1(\ln m)^{2/3}(\ln\ln m)^{4/3}\right) \leqslant x \leqslant \sqrt{m}.$$

Тогда

$$\Big|\sum_{\substack{\nu \leqslant x \\ (\nu,m)=1}} f(\nu)\exp\left(2\pi i\frac{a\overline{\nu}+b\nu}{m}\right)\Big| \ll F(x)\Delta,$$

где

$$\Delta = \left(\frac{\sqrt{\ln m}}{(\ln x)^{3/4}}\ln\ln m\right)^{\alpha}(\ln\ln m)^{\beta},$$

причем постоянная в знаке Виноградова – абсолютная.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Weil A. On some exponential sums // Proc. Nat. Acad. Sci. USA. 1948. Vol. 34. P. 204–207.
2. Esterman T. On Kloosterman's sum // Mathematica. 1961. Vol. 8. P. 83-86.
3. Карацуба А. А. Распределение обратных величин в кольце вычетов по заданному модулю // Докл. РАН. 1993. Том 333, № 2. С. 138-139.
4. Карацуба А. А. Дробные доли специального вида функций // Изв. РАН. Сер. матем. 1995. Том 59. № 4. С. 61-81.
5. Карацуба А. А. Аналоги сумм Клоостермана // Изв. РАН. Сер. матем. 1995. Том 59. № 5. С. 93-102.
6. Бургейн Ж., Гараев М. З. Сумма множеств, образованных обратными элементами в полях простого порядка, и полилинейные суммы Клоостермана // Изв. РАН. Сер. матем. 2014. Том 78. № 4. С. 19-72.

7. Королёв М. А. Неполные суммы Клоостермана и их приложения // Изв. РАН. Сер. матем. 2000. Том 64. № 6. С. 41-64.

8. Королёв М. А. Короткие суммы Клоостермана с весами // Матем. заметки. 2010. Том 88. № 3. С. 415-427.

9. Королёв М. А. Обобщенная сумма Клоостермана с простыми числами // Аналитическая и комбинаторная теория чисел, Сборник статей. К 125-летию со дня рождения академика Ивана Матвеевича Виноградова, Тр. МИАН. 2017. Том 296. С. 163-180.

10. Королёв М. А. Новая оценка суммы Клоостермана с простыми числами по составному модулю // Матем. сб. 2018. Том 209. № 5. С. 54-61.

УДК 511.1 + 517.22

Формула Фаа ди Бруно для производных высших порядков от сложной функции вида $F(u(x,y))$[1]

П. Н. Сорокин (Россия, г. Москва)
Научно-исследовательский институт системных исследований Российской академии наук
e-mail: s_p_n_1974@bk.ru

Faa di Bruno's formula for higher order derivatives of a complex function of the form $F(u(x,y))$

P. N. Sorokin (Russia, Moscow)
Scientific Research Institute for System Analyze of the Russian Academy of Science
e-mail: s_p_n_1974@bk.ru

В данной работе рассматривается обобщение известной формулы Фаа Ди Бруно для вычисления производных высших порядков сложной функции [1]:

Теорема 1. *Пусть функции $F(u)$ и $u(x)$ имеют все производные до n-го порядка. Тогда для n-ой производной сложной функции $G(x) = F(u(x))$ имеет место формула:*

$$G^{(n)}(x) = \sum_{k_1+2k_2+3k_3+\ldots=n} F^{(k_1+k_2+k_3+\ldots)}(u) \cdot P_{k_1+k_2+k_3+\ldots},$$

$$P_{k_1+k_2+k_3+\ldots} = \frac{n!}{k_1!k_2!k_3!\ldots}\left(\frac{u^{(1)}(x)}{1!}\right)^{k_1}\left(\frac{u^{(2)}(x)}{2!}\right)^{k_2}\left(\frac{u^{(3)}(x)}{3!}\right)^{k_3}\ldots,$$

где сумирование берется по всем целым неотрицательным числам $k_1, k_2, k_3, \ldots$, которые удовлетворяют диофантову уравнению $k_1 + 2k_2 + 3k_3 + \ldots = n$, а $F^{(m)}$, $u^{(m)}$ — производные m-го порядка для функций $F(u)$, $u(x)$.

[1]Публикация выполнена в рамках государственного задания ФГУ ФНЦ НИИСИ РАН (Проведение фундаментальных научных исследований (47 ГП) по теме № 0580-2021-0007 «Развитие методов математического моделирования распределенных систем и соответствующих методов вычисления», Рег.№ 121031300051-3).

Некоторые варианты формулы Фаа Ди Бруно для сложных функций вида $F(u(x), v(x))$, $F(\overline{u}(x))$, $\overline{u}(x) = (u_1(x), ..., u_s(x))$ можно найти в работах [2], [3].

Сформулируем обобщение формулы Фаа Ди Бруно на случай сложной функции $F(u(x, y))$:

Теорема 2. *Пусть функция $F(u)$ имеет все производные до n-го порядка, а функция $u(x, y)$ имеет все частные производные до n-го порядка. Тогда для n-го дифференциала сложной функции $G(x, y) = F(u(x, y))$ имеет место формула:*

$$d^n G(x,y) = \sum_{\substack{k_1+2k_2+3k_3+\ldots=n \\ k_1,k_2,\ldots,k_m \geq 0}} F^{(k_1+k_2+k_3+\ldots)}(u) \cdot P_{k_1+k_2+k_3+\ldots},$$

$$P_{k_1+k_2+k_3+\ldots} = \frac{n!}{k_1!k_2!k_3!\ldots} \left(\frac{du(x,y)}{1!}\right)^{k_1} \left(\frac{d^2u(x,y)}{2!}\right)^{k_2} \left(\frac{d^3u(x,y)}{3!}\right)^{k_3} \ldots,$$

где $d^m u(x, y)$ — m-ый дифференциал функции $u(x, y)$, а $F^{(m)}(u)$ — производная m-го порядка для функции $F(u)$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Архипов Г. И., Садовничий В. А., Чубариков В. Н. Лекции по математическому анализу. — М.: Дрофа, 2003. 640 с.
2. Roman S. The formula of Faa di Bruno // Amer. Math. Monthly. 87 (1980), no. 10. P. 805–809.
3. Mishkov R. Generalization of the formula of Faa di Bruno for a composite function with vector argument // Internat. J.Math. 2000. 24(7). P. 481–491.

УДК 511.32

О совместной универсальности периодических дзета-функций с мультипликативными коэффициентами

М. Текоре (Литва, г. Вильнюс)
Математический институт, Вильнюсский университет
e-mail: monika.tekore@mif.stud.vu.lt

On joint universality of periodic zeta-functions with multiplicative coefficients

M. Tekorė (Lithuania, Vilnius)
Institute of Mathematics, Vilnius University
e-mail: monika.tekore@mif.stud.vu.lt

By the Vorinin work [4], it is known that the Riemann zeta-function $\zeta(s)$, $s = \sigma + it$, is universal in the sense that its shifts $\zeta(s + i\tau)$, $\tau \in \mathbb{R}$, approximate every non-vanishing analytic function defined in the strip $D = \{s \in \mathbb{C} : 1/2 < \sigma < 1\}$. Also, Voronin obtained the first joint universality theorem [5] proving that a collection of non-vanishing analytic functions on D can be approximated

simultaneously by a collection of shifts of Dirichlet L-functions $L(s+i\tau,\chi_1),\dots,L(s+i\tau,\chi_r)$ with non-equivalent Dirichlet characters $\chi_1,\dots,\chi_r$.

We consider joint universality of periodic zeta-functions with multiplicative coefficients that are a generalization of Dirichlet L-functions. Let $\mathfrak{a}=\{a_m : m\in\mathbb{N}\}$ be a periodic sequence of complex numbers with minimal period $q\in\mathbb{N}$. The periodic zeta-function $\zeta(s;\mathfrak{a})$ is defined, for $\sigma>1$, by the Dirichlet series

$$\zeta(s;\mathfrak{a})=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{a_m}{m^s}.$$

Let $\zeta(s,\alpha)$, $0<\alpha\leqslant 1$, denote the classical Hurwitz zeta-function

$$\zeta(s,\alpha)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(m+\alpha)^s},\quad \sigma>1,$$

which has analytic continuation to the whole complex plane, except for a simple pole at the point $s=1$ with residue 1. In view of periodicity of the sequence $\mathfrak{a}$, the equality

$$\zeta(s;\mathfrak{a})=\frac{1}{q^s}\sum_{l=1}^{q}a_l\zeta\left(s,\frac{l}{q}\right)$$

follows, therefore, the function $\zeta(s;\mathfrak{a})$, as $\zeta(s,\alpha)$, also has analytic continuation to the whole complex plane, except for a possible simple pole at the point $s=1$.

We recall that the sequence $\mathfrak{a}$ is called multiplicative, if $a_{mn}=a_ma_n$ for all coprimes m and n, and $a_1=1$. The universality of the function $\zeta(s;\mathfrak{a})$ with non-multiplicative $\mathfrak{a}$ was obtained in [3], while in the case of a multiplicative sequence $\mathfrak{a}$ was treated in [2].

The aims of this paper are joint universality theorems for periodic zeta-functions with multiplicative coefficients. For $j=1,\dots,r$, let $\mathfrak{a}_j=\{a_{jm} : m\in\mathbb{N}\}$ be a periodic multiplicative sequence of complex numbers with minimal period $q_j\in\mathbb{N}$, q be the least common multiple of the periods $q_1,\dots,q_r$, and $l_1,\dots,l_{r_1}$ ($r_1=\varphi(q)$ is the Euler totient function) be the reduced system modulo q. Define the matrix

$$A=\begin{pmatrix} a_{1l_1} & a_{2l_1} & \dots & a_{rl_1}\\ a_{1l_2} & a_{2l_2} & \dots & a_{rl_2}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{1l_{r_1}} & a_{2l_{r_1}} & \dots & a_{rl_{r_1}}\end{pmatrix}.$$

Moreover, let $\mathcal{K}$ be the class of compact subsets of the strip D with connected complements, and $H_0(K)$ with $K\in\mathcal{K}$ be the class of continuous non-vanishing functions on K that are analytic in the interior of K. Then, in [1], the following statement has been obtained.

THEOREM 1. *Suppose that* $\operatorname{rank}(A)=r$. *For* $j=1,\dots,r$, *let* $K_j\in\mathcal{K}$ *and* $f_j(s)\in H_0(K_j)$. *Then, for every* $\varepsilon>0$,

$$\liminf_{T\to\infty}\frac{1}{T}\operatorname{meas}\left\{\tau\in[0,T] : \sup_{1\leqslant j\leqslant r}\sup_{s\in K_j}|\zeta(s+i\tau;\mathfrak{a}_j)-f_j(s)|<\varepsilon\right\}>0.$$

Here $\operatorname{meas}A$ denotes the Lebesgue measure of a measurable set $A\subset\mathbb{R}$.

We refuse the condition $\operatorname{rank}(A)=r$ in Theorem 1. For this, in place of shifts $\zeta(s+i\tau;\mathfrak{a}_j)$, we use generalized shifts $\zeta(s+i\gamma_j(\tau);\mathfrak{a}_j)$ for some classes of functions $\gamma_j(\tau)$.

Let $T_0>0$, and $U_1(T_0)$ denote the class of real increasing to ∞ continuously differentiable functions $\gamma(\tau)$ having monotonic derivative $\gamma'(\tau)$ on $[T_0,\infty)$ such that

$$\gamma(2\tau)\max_{\tau\leqslant u\leqslant 2\tau}\frac{1}{\gamma'(u)}\ll\tau$$

as $\tau\to\infty$. Then we have the following theorem.

THEOREM 2. *Suppose that $a_1, \dots, a_r$ are real algebraic numbers linearly independent over the field of rational numbers, and $\gamma(\tau) \in U_1(T_0)$. For $j = 1, \dots, r$, let $K_j \in \mathcal{K}$ and $f_j(s) \in H_0(K_j)$. Then, for every $\varepsilon > 0$,*

$$\liminf_{T\to\infty} \frac{1}{T-T_0} \operatorname{meas} \left\{ \tau \in [T_0, T] : \sup_{1\leqslant j\leqslant r} \sup_{s\in K_j} |\zeta(s + ia_j\gamma(\tau); \mathfrak{a}_j) - f_j(s)| < \varepsilon \right\} > 0.$$

Moreover, the limit

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T-T_0} \operatorname{meas} \left\{ \tau \in [T_0, T] : \sup_{1\leqslant j\leqslant r} \sup_{s\in K_j} |\zeta(s + ia_j\gamma(\tau); \mathfrak{a}_j) - f_j(s)| < \varepsilon \right\} > 0$$

exists for all but at most countably many $\varepsilon > 0$.

Define a class $U_r(T_0)$ of collections of real increasing to infinity continuously differentiable functions $\gamma_1(\tau), \dots, \gamma_r(\tau)$ on $[T_0, \infty)$ with derivatives

$$\gamma_j'(\tau) = \hat{\gamma}_j(\tau)(1 + o(1)),$$

where $\hat{\gamma}_1(\tau), \dots, \hat{\gamma}_r(\tau)$ are monotonic and are compared in the sense that, for every subset $J \subset \{1, \dots, r\}$, $\#J \geqslant 2$, there exists $j_0 = j_0(J)$ such that $\hat{\gamma}_j(\tau) = o(\hat{\gamma}_{j_0}(\tau))$ for all $j \in J$, $j \neq j_0$, and

$$\hat{\gamma}_j(2\tau) \max_{\tau\leqslant u\leqslant 2\tau} \frac{1}{\hat{\gamma}_j(u)} \ll \tau, \quad j = 1, \dots, r,$$

as $\tau \to \infty$. Then the following version of Theorem 2 is true.

THEOREM 3. *Suppose that $(\gamma_1(\tau), \dots, \gamma_r(\tau)) \in U_r(T_0)$. For $j = 1, \dots, r$, let $K_j \in \mathcal{K}$ and $f_j(s) \in H_0(K_j)$. Then, for every $\varepsilon > 0$,*

$$\liminf_{T\to\infty} \frac{1}{T-T_0} \operatorname{meas} \left\{ \tau \in [T_0, T] : \sup_{1\leqslant j\leqslant r} \sup_{s\in K_j} |\zeta(s + i\gamma_j(\tau); \mathfrak{a}_j) - f_j(s)| < \varepsilon \right\} > 0.$$

Moreover, the limit

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T-T_0} \operatorname{meas} \left\{ \tau \in [T_0, T] : \sup_{1\leqslant j\leqslant r} \sup_{s\in K_j} |\zeta(s + i\gamma_j(\tau); \mathfrak{a}_j) - f_j(s)| < \varepsilon \right\} > 0$$

exists for all but at most countably many $\varepsilon > 0$.

For example, we may take $a_1 = \sqrt{2}$, $a_2 = \sqrt{3}$, $\dots$, $a_r = \sqrt{p_r}$, where p_r is the rth prime number, and $\gamma(\tau) = \tau \log \tau$ in Theorem 2, and $\gamma_1(\tau) = \tau \log \tau$, $\gamma_2 = \tau^2 \log \tau$, $\dots$, $\gamma_r(\tau) = \tau^r \log \tau$ in Theorem 3, and $T_0 = 2$.

Proofs of Theorems 2 and 3 are probabilistic based on the weak convergence of probability measures in the space of analytic functions.

Denote by $\mathcal{B}(\mathbb{X})$ the Borel σ-field of the space $\mathbb{X}$, and by $H(D)$ the space of analytic functions on D endowed with the topology of uniform convergence on compacta. For $A \in \mathcal{B}(H^r(D))$, define

$$P_T^1(A) = \frac{1}{T-T_0} \operatorname{meas} \left\{ \tau \in [T_0, T] : \underline{\zeta}(s + i\underline{a}\gamma(\tau); \underline{\mathfrak{a}}) \in A \right\},$$

and

$$P_T^r(A) = \frac{1}{T-T_0} \operatorname{meas} \left\{ \tau \in [T_0, T] : \underline{\zeta}(s + i\underline{\gamma}(\tau); \underline{\mathfrak{a}}) \in A \right\},$$

where

$$\underline{\zeta}(s;\underline{\mathfrak{a}}) = (\zeta(s;\mathfrak{a}_1),\dots,\zeta(s;\mathfrak{a}_r))$$

with $\underline{\mathfrak{a}} = (\mathfrak{a}_1,\dots,\mathfrak{a}_r)$, $\underline{a} = (a_1,\dots,a_r)$, and $\underline{\gamma}(\tau) = (\gamma_1(\tau),\dots,\gamma_r(\tau))$. We prove that P_T^1 and P_T^r, as $T\to\infty$, converge weakly to a certain explicitly given probability measure. Denote by $\mathbb{P}$ the set of all prime numbers, and define the set

$$\Omega = \prod_{p\in\mathbb{P}} \gamma_p,$$

where $\gamma_p = \{s\in\mathbb{C} : |s| = 1\}$ for all $p\in\mathbb{P}$. Moreover, let

$$\underline{\Omega}^r = \Omega_1\times\cdots\times\Omega_r,$$

where $\Omega_j = \Omega$ for $j = 1,\dots,r$. Then $\underline{\Omega}^r$ is a compact topological group, therefore, on $(\underline{\Omega}^r, \mathcal{B}(\underline{\Omega}^r))$, the probability Haar measure m_H^r can be defined. This gives the probability space $(\underline{\Omega}^r, \mathcal{B}(\underline{\Omega}^r), m_H^r)$. Denote by $\omega_j(p)$ the pth component of an element $\omega_j\in\Omega_j$, $j = 1,\dots,r$, $p\in\mathbb{P}$, and by $\underline{\omega} = (\omega_1,\dots,\omega_r)$ the elements of $\underline{\Omega}^r$. Now, on the probability space $(\underline{\Omega}^r, \mathcal{B}(\underline{\Omega}^r), m_H^r)$, define the $H^r(D)$-valued random element

$$\underline{\zeta}(s,\underline{\omega};\underline{\mathfrak{a}}) = (\zeta(s,\omega_1;\mathfrak{a}_1),\dots,\zeta(s,\omega_r;\mathfrak{a}_r))\,,$$

where

$$\zeta(s,\omega_j;\mathfrak{a}_j) = \prod_{p\in\mathbb{P}}\left(1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_{jp^k}\omega_j^k(p)}{p^{ks}}\right).$$

Denote by $P_{\underline{\zeta}}$ the distribution of the random element $\underline{\zeta}(s,\underline{\omega};\underline{\mathfrak{a}})$. Then the following statement is valid.

THEOREM 4. *Under hypotheses of Theorems* 2 and 3, P_T^1 and P_T^r converge weakly to the measure $P_{\underline{\zeta}}$ as $T\to\infty$. Moreover, the support of the measure $P_{\underline{\zeta}}$ is the set

$$\left(\{g\in H(D) : g(s)\neq 0 \text{ or } g(s)\equiv 0\}\right)^r.$$

Using Theorem 4 and the Mergelyan theorem on approximation of analytic functions by polynomials, we, by the standard way, obtain the proofs of Theorems 2 and 3.

REFERENCES

1. Лауринчикас А., Мацайтене Р. О совместной универсальности периодических дзета-функций // Матем. заметки. 2009. Т. 85, №1. С. 54–64.

2. Лауринчикас А., Шяучюнас Д. Замечания об универсальности периодической дзета-функции // Матем. заметки. 2006. Т. 80, №4. С. 561–568.

3. Steuding J. On Dirichlet series with periodic coefficients // Ramanujan J. 2002. V. 6, №3. P. 295–306.

4. Воронин С. М., Теорема об "универсальности" дзета-функции Римана // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1975. Т. 39, №3. С. 475–486.

5. Воронин С. М., О функциональной независимости L-функций Дирихле // Acta Arith. 1975. Т. 27. С. 493–503.

УДК 511.325

О нулях производной j-го порядка функции Харди

Ш. А. Хайруллоев (Таджикистан, г. Душанбе)
Таджикский национальный университет
e-mail: shamsullo@rambler.ru

On the zeros of the j-th order derivative of the Hardy function

Sh. A. Khayrulloev (Tajikistan, Dushanbe)
Tajik National University
e-mail: shamsullo@rambler.ru

Функция Харди $Z(t)$ задаётся равенством

$$Z(t) = e^{i\theta(t)}\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right), \quad e^{i\theta(t)} = \pi^{-\frac{it}{2}}\Gamma\left(\frac{1}{4}+\frac{it}{2}\right)\left|\Gamma\left(\frac{1}{4}+\frac{it}{2}\right)\right|^{-1},$$

принимает вещественные значения при вещественных значениях t, и вещественные нули $Z(t)$ являются нулями $\zeta(0.5+it)$, то есть нулями дзета-функции Римана, лежащими на критической прямой. Одной из актуальных нерешенных проблем теории нулей дзета-функции Римана и её обобщения для более общих рядов Дирихле является оценка снизу величины промежутка критической прямой, на котором заведомо лежит нуль функции $Z(t)$. Существует гипотеза [1], что эта величина, а именно длина H промежутка $(T, T+H)$, содержащего нуль функции $Z(t)$, сверху ограничена величиной T^{ε}, где $\varepsilon > 0$ — сколь угодно малое фиксированное число.

Первым результатом о нулях дзета-функции Римана $\zeta(s)$ на критической прямой является теорема Г.Харди [2]. В 1914 г. он доказал, что $\zeta(1/2+it)$ *имеет бесконечно много вещественных нулей.* Затем Харди и Литтлвуд [3] в 1921 г. доказали, что промежуток $(T, T+H)$ при $H \geqslant T^{1/4+\varepsilon}$ содержит нуль нечётного порядка $\zeta(1/2+it)$. Ян Мозер [4] в 1976 г. показал, что это утверждение имеет место при $H \geqslant T^{1/6}\ln^2 T$. В 1981 г. А.А.Карацуба [1] доказал теорему Харди-Литтлвуда уже при $H \geqslant T^{5/32}\ln^2 T$.

А.А.Карацуба, наряду с задачей о соседних нулях функции Харди, рассматривая более общую задачу о соседних нулях функции $Z^{(j)}(t)$, доказал: *пусть j — натуральное число, $T \geqslant T_0(j) > 0$, $c = c(j) > 0$, тогда функция $Z^{(j)}(t)$ содержит нуль нечётного порядка в промежутке $(T, T+H)$, если*

$$H \geqslant cT^{\frac{1}{6j+6}}(\ln T)^{\frac{2}{j+1}}, \tag{1}$$

тем самым он показал, что с увеличением j длина промежутка, на котором заведомо лежит нуль $Z^{(j)}(t)$, уменьшается.

Определение 1. *Если $B \geq 1$, $0 < h \leq B$, $F(u) \in C^{\infty}(B, 2B)$, $A \geq 1$,*

$$AB^{1-r} \ll |F^{(r)}(u)| \ll AB^{1-r},\ r = 1, 2, 3, \ldots,$$

где постоянные под знаком $\ll$ зависят только от r, и имеет место оценка

$$\sum_{B \leq n \leq B+h} e(F(n)) \ll A^{\kappa}B^{\lambda}, \quad 0 \leq \kappa \leq 0.5 \leq \lambda \leq 1,$$

то пара (κ, λ) называется экспоненциальной парой.

Тривиальная оценка показывает, что (0; 1) является экспоненциальной парой. E.Phillips [5] доказал, что если (κ, λ) экспоненциальная пара, то

$$A(\kappa,\lambda) = \left(\frac{\kappa}{2\kappa+2},\ \frac{1}{2}+\frac{\lambda}{2\kappa+2}\right), \quad B(\kappa,\lambda) = \left(\lambda-\frac{1}{2},\ \kappa+\frac{1}{2}\right)$$

также являются экспоненциальными парами.

В работе [6] задача о величине промежутка критической прямой, в котором содержится нуль нечётного порядка функции $Z^{(j)}(t)$, $j \geqslant 1$, сведена к проблеме отыскания экспоненциальных пар для оценки специальных тригонометрических сумм, то есть: *пусть* (κ, λ) *— произвольная экспоненциальная пара,* j *— натуральное число,* $T \geq T_0(j) > 0$, $c = c_0(j) > 0$, *тогда функция* $Z^{(j)}(t)$ *содержит нуль нечётного порядка в промежутке* $(T, T+H)$, *если*

$$H \geqslant cT^{\theta_j(\kappa,\lambda)}(\ln T)^{\frac{2}{j+1}}, \quad \theta_j(\kappa,\lambda) = \frac{\kappa+\lambda-0.5}{2\kappa+4\lambda+2j-1}. \tag{2}$$

Заметим, что теорема А.А.Карацубы, то есть оценка (1), является следствием оценки (2) при

$$(\kappa,\lambda) = \left(\frac{1}{6}, \frac{2}{3}\right).$$

Доклад посвящается новой оценке снизу длины промежутка критической прямой, содержащей нуль нечётного порядка функции $Z^{(j)}(t)$.

Теорема 1. *Пусть* j *— натуральное число,* $T \geqslant T_0(j) > 0$, $c = c(j) > 0$, *тогда функция* $Z^{(j)}(t)$ *содержит нуль нечётного порядка в промежутке* $(T, T+H)$, *если*

$$H \geqslant cT^{\frac{1}{6+6j}-\frac{1}{6(1+j)(19+18j)}}(\ln T)^{\frac{2}{j+1}}.$$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Карацуба А. А. О расстоянии между соседними нулями дзета–функции Римана, лежащими на критической прямой // Труды МИАН. 1981. Том 157, С. 49-63.
2. Hardy G. H. Sur les zeros de la fonction $\zeta(s)$ de Riemann // Compt.Rend. Acad.Sci. 1914. V. 158. Pp. 1012-1014.
3. Hardy G. H., Littlewood J. E. The zeros of Riemann's zeta-function on the critical line // Math.Z. 1921. bd. 10. Pp. 283-317.
4. Мозер Я. Об одной сумме в теории дзета-функции Римана // Acta arith. 1976. № 31. С. 31-43.
5. Graham S. W., Kolesnik G. Vander Corput's Method of Exponential sums // Cambridge university press. 1991. Cambridge, New Vork, Port Chester, Melbourne, Sydney. 117 p.
6. Рахмонов З. Х., Хайруллоев Ш. А. Расстояние между соседними нулями дзета-функции Римана, лежащими на критической прямой // ДАН РТ. 2006. Том 49. № 5. С. 393-400.

УДК 511.325

Оценка сумм значений примитивного характера Дирихле в последовательности сдвинутых чисел, лежащих в арифметических прогрессиях

Д. Дж. Хокиев (Таджикистан, г. Душанбе)
Таджикский национальный университет
e-mail: khdj.91@mail.ru

Estimation of the sums of values of primitive Dirichlet character in a sequence of shifted numbers lying in arithmetic progressions

D. J. Khokiev (Tajikistan, Dushanbe)
Tajik National University
e-mail: khdj.91@mail.ru

И.М.Виноградов [1] своим методом оценок тригонометрических сумм с простыми числами, изучая закон распределения значений неглавного характера на последовательностях сдвинутых простых чисел, доказал: если q — простое нечётное, $(l,q)=1$, $\chi(a)$ – неглавный характер по модулю q, тогда

$$T(\chi)=\sum_{p\leqslant x}\chi(p-l)\ll x^{1+\varepsilon}\left(\sqrt{\frac{1}{q}+\frac{q}{x}}+x^{-\frac{1}{6}}\right). \qquad (1)$$

При $x\gg q^{1+\varepsilon}$ эта оценка нетривиальна, и из неё следует *асимптотическая формула для числа квадратичных вычетов (невычетов)* $\bmod Nq$ *вида* $p-l$, $p\leqslant x$. Затем И.М.Виноградов [2] получил нетривиальную оценку $T(\chi)$ при $x\geqslant q^{0,75+\varepsilon}$, q — простое. Этот результат был неожиданным. Дело в том, что $T(\chi)$ можно записать в виде суммы, по нулям соответствующей L — функции Дирихле; тогда в предположении справедливости расширенной гипотезы Римана для $T(\chi)$ получится нетривиальная оценка, но только при $x\geqslant q^{1+\varepsilon}$. В 1970 г. А.А.Карацуба [3] получил новую оценку $T(\chi)$, нетривиальную уже при $x\geqslant q^{0,5+\varepsilon}$.

В 1986 г. З.Х.Рахмонов [4] обобщил оценку (1) на случай составного модуля и доказал: *пусть D – достаточно большое натуральное число, χ — неглавный характер по модулю D, χ_q – примитивный характер, порожденный характером χ, тогда*

$$T(\chi)\leqslant x\ln^5 x\left(\sqrt{\frac{1}{q}+\frac{q}{x}\tau^2(q_1)}+x^{-\frac{1}{6}}\tau(q_1)\right),\qquad q_1=\prod_{\substack{p\setminus D\\ p\not\setminus q}}p. \qquad (2)$$

Если характер χ совпадает со своим порождающим примитивным характером χ_q, то оценка (2) нетривиальна при $x>q(\ln q)^{13}$. Дж.Б.Фридландер, К.Гонг, И.Е.Шпарлинский [5] для составного q получили нетривиальную оценку $T(\chi_q)$ при $x\geqslant q^{\frac{8}{9}+\varepsilon}$. В [6] для составного q доказана нетривиальная оценка $T(\chi_q)$ при $x\geqslant q^{\frac{5}{6}+\varepsilon}$. А в [7-8] для составного D доказана нетривиальная оценка $T_1(\chi)$ при $x\geqslant q^{\frac{5}{6}+\varepsilon}$, где χ- неглавний характер по составному модулю D.

А при изучении закона распределения значений неглавного характера χ по составном модулю D не являющиеся примитивным на последовательностях сдвинутых простых чисел вида $p-l$, (l,D)=1, возникает задача получения нетривиальной оценки сумм более общего вида

$$S_y(u,\eta,\nu)=\sum_{\substack{u-y<n\leqslant u\\ (n,q)=1,\,n\equiv\eta(\mathrm{mod}\ \nu)}}\chi_q(n-\eta),\qquad (\eta\nu,q)=1,$$

Теорема 1. *Пусть D — достаточно большое натуральное число, χ — неглавный характер по модулю D, χ_q – примитивный характер, порожденный характером χ, q_1 — произведение простых чисел, делящих D, но не делящих числа q, $\nu\backslash q_1$, $(\eta, q) = (\eta, \nu) = (\nu, q) = 1$, $y < u$, $u < q$, тогда*

$$S_y(u, \eta, \nu) = \sum_{\substack{u-y<n\leqslant u \\ (n,q)=1,\, n\equiv\eta(\mathrm{mod}\ \nu)}} \chi_q(n-\eta) \leqslant 2^{\omega(q)}\sqrt{q}\ln q.$$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Виноградов И. М. Распределение квадратичных вычетов и невычетов вида $p + k$ по простому модулю.//Математический сб., 1938, т. 3, № 45, с. 311–320.

2. Виноградов И. М. Новый подход к оценке суммы значений $\chi(p+k)$.// Известия АН СССР, сер. матем., 1952, т. 16, с. 197–210.

3. Карацуба А. А. Суммы характеров с простыми числами//Известия АН СССР, сер. матем., 1970, т. 34, с. 299–321.

4. Рахмонов З. Х. О распределении значений характеров Дирихле и их приложения // Труды Математического института РАН, 1994, т. 207,

5. Фридландер Дж.Б., Гонг К., Шпарлинский И.Е. Суммы значений характеров на сдвинутых простых числах // Матем. заметки, 2010, т. 88, в. 4, с. 605–619.

6. Рахмонов З.Х .Суммы характеров с простыми числами//Чебышевский сборник, 2014, т. 15, в. 2(50), с. 73–100.

7. Рахмонов З. Х., Хокиев Д. Дж. Об оценке суммы характеров с простыми числами // ДАН Республики Таджикистан. 2018. Т. 61. № 1. С. 5 – 11.

8. Хокиев Д. Дж. Оценка короткой суммы значений характеров Дирихле по составном модулю на последовательности сдвинутых чисел // ДАН Республики Таджикистан. 2017. Т. 60. № 1-2. С. 5 – 11.

УДК 511.174

Об одной оценке для сумм произведений мультипликативных и аддитивных функций по числам, простые делители которых лежат в заданных интервалах

У. Чариев (Таджикистан, г. Душанбе)
Таджикский государственный педагогический университет им. С. Айни
e-mail: umidchoriyev@mail.ru

An estimate for the sums of products of multiplicative and additive functions with respect to numbers whose prime divisors lie in given intervals

U. Chariev (Tajikistan, Dushanbe)
Tajik State Pedagogical University named after S. Aini
e-mail: umidchoriyev@mail.ru

В [1] решается задача об асимптотике сумм

$$m_f(X^t) = \sum_{n=n_1\cdots n_k\le X^t} f_1(n_1)\dots f_k(n_k),$$

где n_i-та часть n все простые делители которой заключены в промежутке $(X^{\beta_{i-1}}, X^{\beta_i}], 0 < \beta_1 < \beta_2 < \cdots < \beta_{k-1} < \beta_k = t$, β_i - фиксированы, $i = \overline{1,k}$ (завизимость от $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k$ - не изучалась) и, в частности, доказывается следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть $f_1(n_1)\dots f_k(n_k)$ - мультипликативные функции, удовлетворяющие условиям*

$$\Psi_{f_\nu}(X,Y) = \sum_{p^r\le X; p\le Y} \frac{\Lambda_{f_\nu}(p^r)}{p^r} = \tau_\nu \ln\min(X,Y) + B_\nu + O(\rho(X)+\rho(Y)),$$

$$\Pi_{|f_\nu|}(X) = \prod_{p\le X}\left(1+\sum_{r=1}^{\infty}\frac{|f_\nu(p^r)|}{p^r}\right) = O(\ln^{A_\nu} X).$$

Тогда

$$M_f(X^t) = \sum_{n=n_1\cdots n_k\le X^t} f_1(n_1)\dots f_k(n_k) =$$

$$= M_{f_1}(X^t) + \int_0^t X^{t-u} Z'(t-u) M_{f_1}(X^u)du + O(X^t t^{A_4}\rho(X^{\beta_1})\ln^{A_3} X),$$

где $z(t)$ удовлетворяет уравнению

$$t_1 Z'(t) = \sum_{\nu=1}^{k-1}(\tau_{\nu+1}-\tau_\nu)Z(t-\beta_\nu)$$

с начальным условием $Z(t) = 1$ при $0 \le t_1 \le \beta_1$, $\tau_\nu, A_4, A_3 - const$, $\rho(u)\to 0$ при $n\to\infty$,

$$M_{f_1}(X^t) = \sum_{n\le X^t} f_1(n).$$

В работе [2] изучается сумма вида

$$M(X, Y_1, \dots, Y_{k-1}) = \sum_{n_1\dots n_k\le X} f_1(n_1)\dots f_k(n_k),$$

где $p/n_\nu \Rightarrow Y_{\nu-1} < p \le Y_\nu, (\nu = \overline{1,k})$, $f_\nu(n_\nu)$ - мультипликативные функции удовлетворяющие условием теоремы 1. Для суммы $M(X, Y_1, \dots, Y_{k-1})$ найдена асимптотическая оценка.

В [3] доказана следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть мультипликативные функции* $f_\nu(n), (\nu = \overline{1,k})$ *удовлетворяют условиям теоремы 1 и*

$$\sum_{\substack{p^\alpha \le X \\ p \le Y}} \Lambda_{f_\nu}^{(g)}(p^\alpha) = \tau_\nu^* li(min(X,Y)) + h_\nu(X,Y),$$

где $h(X,Y) = O(X\rho(X) + Y\rho(Y))$, $\Lambda_{f_\nu}^{(g)}(n)$ *- обобщенная функция Мангольдта, определяемая соотношением*

$$f_\nu(n)g(n) = \sum_{d/n} \Lambda_{f_\nu}^{(g)}\left(\frac{n}{d}\right) f_\nu(d),$$

$g(n)$ *- аддитивная функция. Тогда при*

$$f_1(n_1) = \varepsilon(n_1) = \begin{cases} 1, & если \quad n_1 = 1, \\ 0, & если \quad n_1 > 1 \end{cases}$$

имеет место формула

$$M_f^{(g)}(X, Y_1, \dots, Y_{k-1}) = \sum_{\substack{n = n_1 \dots n_k \le X \\ p/n_\nu \Rightarrow Y_{\nu-1} < p \le Y_\nu, (\nu = \overline{1,k})}} f_1(n_1) \dots f_k(n_k) \cdot g(n) =$$

$$= \sum_{\nu=2}^{k} \tau_\nu^* \left[li\left(X^{\frac{1}{t_\nu}}\right) - li\left(X^{\frac{1}{t_{\nu-1}}}\right)\right] +$$

$$+ \sum_{\nu=2}^{k} \tau_\nu^* \int_{\frac{1}{t_\nu}}^{\frac{1}{t_{\nu-1}}} \int_1^{(1-u)t_1} Y_1^\nu \frac{d}{d\nu} Z_{k-1}\left(\nu, \frac{\nu t_2}{t_1}, \dots, \frac{\nu t_{k-1}}{t_1}\right) \cdot \frac{X^u}{u} d\nu du +$$

$$+ O\left(\frac{X\rho(Y_1)}{\ln Y_1} \cdot \frac{t_1^{r_k}}{t_{k-1}} \cdot \ln^\delta t_1\right) + O(Xp(Y_1)t_1^A),$$

где

$$t_\nu = \frac{\ln X}{\ln Y_\nu}, \quad liX = \int_1^X \frac{du}{\ln u},$$

$\tau_\nu, \tau_\nu^*, A = \max ReA_\nu$ *– комплексные числа,*

$$r_k = 1 + \sum_{\nu=2}^{k} |\tau_\nu| \ge \max(A_k + 1, Re\tau_k + 2), \quad A_\nu \ge 0, \quad 0 \le \delta \le 2, \nu = \overline{2,k},$$

а $Z_{k-1}(st_1, \dots, st_{k-1})$ *непрерывное по* s *при* $0 < s \le 1$ *решение уравнения*

$$st_1 Z_{k-1}(st_1, \dots, st_{k-1}) - \int_0^{st_1} Z_{k-1}\left(u, \frac{ut_2}{t_1}, \dots, \frac{ut_{k-1}}{t_1}\right) du -$$

$$- \sum_{\nu=2}^{k} \tau_\nu \int_{t_1\left(s - \frac{1}{t_{\nu-1}}\right)}^{t_1\left(s - \frac{1}{t_\nu}\right)} Z_{k-1}\left(u, \frac{ut_2}{t_1}, \dots, \frac{ut_{k-1}}{t_1}\right) du = 0$$

с начальными условиями

$$Z_{k-1}(t_1, \dots, t_{k-1}) = \begin{cases} Z_{k-2}(t_1, \dots, t_{k-2}), & при \quad k \ge 2, t_{k-1} \le 1, \\ 1, & при \quad 0 < t_1 \le 1, \\ 0, & при \quad t_1 < 0. \end{cases}$$

Целью настоящей работы является получение оценки для $M_f^{(g)}(X, Y_1, \dots, Y_{k-1})$ в общем случае, то есть без условии $f_1(n_1) = \varepsilon(n_1)$.

Доказана следующее теоремы 3 и 4.

Теорема 3. *Пусть для функций $f_\nu(n)$ и $g(n)$ выполняются условия теоремы 2. Тогда*

$$M_f^{(g)}(X, Y_1, \dots, Y_{k-1}) = \sum_{\substack{n=n_1 \dots n_k \le X \\ p/n_\nu \Rightarrow Y_{\nu-1} < p \le Y_\nu, (\nu=\overline{1,k})}} f_1(n_1) \dots f_k(n_k) \cdot \sum_{\substack{p^\alpha \le \frac{X}{n_1 \dots n_k} \\ p \le Y_k}} \Lambda_{f_\nu}^{(g)}(p^\alpha) +$$

$$+ \sum_{\nu=2}^{k} \tau_\nu^* \int_{\frac{1}{t_{\nu-1}}}^{\frac{1}{t_\nu}} M_f(X^{1-u}, Y_1, \dots\dots, Y_k) \frac{X^u du}{u} + O(X\rho(Y_1) \cdot t^A).$$

Теорема 4. *Если $f_\nu(n)$, $\nu = \overline{1,k}$ и $g(n)$ таковы, что выполняются условия теоремы 2, тогда*

$$\sum_{\substack{n=n_1 \dots n_k \le X \\ p/n_\nu \Rightarrow Y_{\nu-1} < p \le Y_\nu, (\nu=\overline{1,k})}} f_1(n_1) \dots f_k(n_k) \cdot \sum_{\substack{p^\alpha \le \frac{X}{n_1 \dots n_k} \\ p \le Y_k}} \Lambda_{f_\nu}^{(g)}(p^\alpha) =$$

$$= \sum_{p^\alpha \le Y_k} \Lambda_{f_\nu}^{(g)}(P^\alpha) \sum_{n \le \frac{X}{p^\alpha}} f(n) + O(X\rho(Y_1) \cdot t_1^A).$$

Таким образом сумма $M_f^{(g)}(X, Y_1, \dots, Y_{k-1})$ выражена через суммы $M_f(X, Y_1, \dots, Y_{k-1})$, которые хорошо изучены в работе [2]. Теперь воспользовавшись асимптотической оценкой для $M_f(X, Y_1, \dots, Y_{k-1})$ из [2], а также результатами работы [4] можно найти асимптотическое разложение или оценку для $M_f^{(g)}(X, Y_1, \dots, Y_{k-1})$ в общем случае.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Левин Б. В., Файнлейб А. С. Применение некоторых интегральных уравнений к вопросам теории чисел // Успехи матем. наук. 1967. Тот 22, вып.3(135). С. 119-199.

2. Чариев У. Сумма мультипликативных функций по числам, простые делители которых лежат в заданных интервалах // Изв. АН ТаджССР. Отд.физ.-мат. и геол.–хим. наук. 1978. 9 стр. библиогр. 3 назв. (Рукопись деп. в ВИНИТИ 16 марта 1978 г., N 918 – 78 Деп.), библ. указатель ВИНИТИ «Депонированные рукописи». 1978. № 8, б/о 175.

3. Чариев У. Асимптотическая оценка сумм произведений мультипликативных и аддитивных функций по числам, протые делители которых «велики» // Докл. АН ТаджССР. 1979. Том 22. № 5. С. 296-298.

4. Левин Б. В., Чариев У. Поведение решений некоторых интегро-разностных уравнений // Докл. АН ТаджССР. 1987. -Том 30. № 5. С. 267-272.

УДК 511.32

Об аналоге задачи Эминяна для разложений по знаменателям подходящих дробей [1]

А. В. Шутов (Россия, г. Владимир)
Владимирский государственный университет имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых
e-mail: a1981@mail.ru

On an analogue of Eminyan problem for the expansions of natural numbers on denominators of continued fractions

A. V. Shutov (Russia, Vladimir)
Vladimir State University named after Alexander and Nicholay Stoletovs
e-mail: a1981@mail.ru

Основной текст тезисов.

Пусть $\{X_i\}$ – некоторая последовательность натуральных чисел, такая, что $X_1 = 1$, $X_{i+1} > X_i$ и $\lim\limits_{i\to\infty} X_i = \infty$. Тогда любое натуральное n допускает жадное разложение по последовательности $\{X_i\}$:

$$n = \sum_{k=1}^{k(n)} x_i(n) X_i \tag{1}$$

с некоторыми целыми неотрицательными $x_i(n)$. Жадность разложения (1) означает, что для любого $k_1 < k(n)$ выполнено неравенство

$$0 \le n - \sum_{i=k_1}^{k(n)} x_i(n) X_i < X_{k_1}.$$

Определим множества

$$\mathbb{N}_0 = \{n : n \in \mathbb{N}, \sum_{i=0}^{k(n)} x_i \equiv 0 \pmod 2\},$$

$$\mathbb{N}_1 = \mathbb{N} \setminus \mathbb{N}_0.$$

Пусть $X_{i,j}(X)$ – число решений уравнения $n - m = 1$, $n, m \le X$, $n \in \mathbb{N}_i$, $m \in \mathbb{N}_j$, $i, j = 0, 1$.

Впервые асимптотики для функций $X_{i,j}(X)$ были найдены Эминяном в работе [1] в частном случае двоичной системы счисления, то есть $X_i = 2^i$.

В [2],[3] аналогичный результат был получен для случае, когда $X_i = F_i$ – i-ое число Фибоначчи.

Пусть α – некоторое иррациональное число и $X_i = Q_i(\alpha)$ – знаменатели подходящих дробей к α. Отметим, что при $\alpha = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ мы получим $Q_i(\alpha) = F_i$.

Теорема 1. *Существуют эффективно вычислимые константы C_{ij} ($C_{00} = C_{11} = -C_{10} = -C_{01}$) такие, что*

$$X_{i,j}(X) = (\frac{1}{4} + C_{ij})X + O(\log X).$$

Значения констант C_{ij} выражаются в терминах разложения α в цепную дробь.

[1] Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект 19-11-00065)

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Эминян К. М. Об одной бинарной задаче // Математические заметки. 1996. Т. 60, Вып. 4. С. 634—637.

2. Shutov A. V. On the Sum of Digits of the Zeckendorf Representations of Two Consecutive Numbers // Fibonacci Quarterly. 2020. V. 58, no. 3. P. 203—207.

3. Шутов А. В. Об одной сумме, связанной с системой счисления Фибоначчи // Дальневосточный математический журнал. 2020. Т. 20, Вып. 2. С. 271—275.

УДК 511.32

О проблеме делителей Карацубы

В. В. Юделевич (Россия, г. Москва)
Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
e-mail: Vitaliiyudelevich@mail.ru

On the Karatsuba Divisor Problem

V. Iudelevich (Russia, Moscow)
Lomonosov Moscow State University
e-mail: Vitaliiyudelevich@mail.ru

В ноябре 2004 года А. А. Карацубой на семинаре «Аналитическая теория чисел и приложения» была поставлена задача изучения суммы

$$\Phi_a(x) = \sum_{p \leqslant x} \frac{1}{\tau(p+a)}, \ x \to +\infty. \tag{1}$$

Здесь $\tau(n)$ – функция делителей, $a \geqslant 1$ – фиксированное целое, а p пробегает подряд идущие простые числа.

Данная задача возникла под влиянием ряда дискуссий А. А. Карацубы и В. И. Арнольда в свете двух классических теоретико-числовых проблем. Первая – так называемая проблема делителей Титчмарша – заключается в вычислении асимптотики при $x \to +\infty$ суммы вида

$$F_a(x) = \sum_{p \leqslant x} \tau(p+a).$$

В 1930 г. Титчмарш [1] доказал оценку

$$\sum_{p \leqslant x} \tau(p-1) = O\left(x\right),$$

а также при условии справедливости гипотезы Римана

$$\sum_{p \leqslant x} \tau(p-1) \sim cx, \quad c = \frac{\zeta(2)\zeta(3)}{\zeta(6)}.$$

Асимптотика для этой суммы была впервые получена без предположения каких-либо гипотез Ю. В. Линником [10] и имела вид

$$\sum_{p\leqslant x}\tau(p-1)=cx+R(x),\quad c=\frac{\zeta(2)\zeta(3)}{\zeta(6)},$$

$$R(x)\ll\frac{x}{(\ln x)^{\alpha}},\quad 0<\alpha<1.$$

В дальнейшем этот результат неоднократно уточнялся целым рядом авторов (см. [6], [7], [8], [9], [11]).

Вторая задача состоит в нахождении асимптотики суммы $T(x)=\sum\limits_{n\leqslant x}\frac{1}{\tau(n)}$. Она восходит к Раманужану [2], который доказал, что

$$T(x)=\frac{x}{\sqrt{\ln x}}\left(a_0+\frac{a_1}{\ln x}+\ldots+\frac{a_n}{(\ln x)^n}+O_n\left(\frac{1}{(\ln x)^{n+1}}\right)\right),$$

где $a_n,\ n\geqslant 0$ – некоторые постоянные, в частности,

$$a_0=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\prod_p\sqrt{p^2-p}\ln\frac{p}{p-1}.$$

Цель настоящей работы состоит в нахождении верхней оценки для суммы $\Phi_a(x)$.

Поскольку

$$\frac{1}{x}\sum_{p\leqslant x}1\asymp\frac{1}{\ln x}$$

и

$$\frac{1}{x}\sum_{n\leqslant x}\frac{1}{\tau(n+a)}\asymp\frac{1}{\sqrt{\ln x}},$$

то естественно предположить, что

$$\frac{1}{x}\Phi_a(x)\asymp\frac{1}{(\ln x)\sqrt{\ln x}}=\frac{1}{(\ln x)^{\frac{3}{2}}}.$$

В нашей работе мы доказываем, что справедливо $\Phi_a(x)\ll_a\frac{x}{(\ln x)^{\frac{3}{2}}}$. Более точно, мы доказываем следующий результат.

Теорема 1. *Пусть $a\geqslant 1$ – целое фиксированное число. Тогда имеет место оценка*

$$\sum_{p\leqslant x}\frac{1}{\tau(p+a)}\leqslant 4K(a)\frac{x}{(\ln x)^{\frac{3}{2}}}+O\left(\frac{x\ln\ln x}{(\ln x)^{\frac{5}{2}}}\right),$$

где

$$K(a)=K\beta(a),$$

$$K=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\prod_p\sqrt{\frac{p}{p-1}}\left(p\ln\frac{p}{p-1}-\frac{1}{p-1}\right),$$

$$\beta(a)=\prod_{p|a}\left(1+\frac{1}{p(p-1)\ln\frac{p}{p-1}-1}\right).$$

Тем самым верхняя оценка из этой теоремы даёт предположительно правильный порядок роста функции $\Phi_a(x)$.

Кратко опишем идейную сторону работы, которая использует метод решета Сельберга. Его суть заключаеся в следующем. Требуется оценить сумму

$$S(\mathcal{A}, z) = \sum_{(n,P(z))=1} a_n,$$

где $\mathcal{A} = (a_n)$ – последовательность неотрицательных вещественных чисел и $P(z) = \prod\limits_{p \leqslant z} p$ – произведение всех простых до z. По основному свойству функции Мёбиуса имеем

$$\sum_{d|n} \mu(d) = \begin{cases} 1, & \text{если } n = 1; \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Таким образом,

$$S(\mathcal{A}, z) = \sum_n a_n \sum_{d|(n,P(z))} \mu(d).$$

Зададимся произвольными вещественными числами ρ_d (здесь $d \leqslant z$, $d|P(z)$) такими, чтобы $\rho_1 = 1$. Тогда $\sum\limits_{d|n} \mu(d) \leqslant \left(\sum_{d|n} \rho_d\right)^2$ для любого $n \geqslant 1$, так что

$$S(\mathcal{A}, z) \leqslant \sum_n a_n \left(\sum_{d|(n,P(z))} \rho_d \right)^2 = \sum_{d_1, d_2 | P(z)} \rho_{d_1} \rho_{d_2} A_{[d_1,d_2]},$$

где

$$A_d = \sum_{n \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, d)} a_n.$$

Далее, пусть $A_d = Xg(d) + r_d$ для рассматриваемых d, функция $g(d)$ мультипликативна, величина X не зависит от d, а величина $r_d = r_d(x)$ «в среднем» мала. Коэффициенты ρ_d выбираются в дальнейшем так, чтобы минимизировать квадратичную форму

$$B = \sum_{d_1,\, d_2 | P_a(z)} \rho_{d_1} \rho_{d_2} g([d_1, d_2]). \tag{2}$$

В нашем случае величина A_d представляется в виде

$$A_d = X_0 g_0(d) + X_1 g_1(d) + \ldots + X_m g_m(d),$$

где $g_k(d)$ – некоторые функции (причём $g_k(d)$ при $k \geqslant 1$ вообще говоря немультипликативны), а величины X_k не зависят от d. Коэффициенты ρ_d при этом строятся только по первой форме (2), соответствующей функции $g = g_0$. При этом наблюдается следующий эффект: эти коэффициенты как бы попутно решают задачи минимизации всех остальных форм, по крайней мере, в смысле порядка роста.

Отметим, что возможность получения асимптотической формулы в проблеме делителей Титчмарша опирается на теорему Бомбьери-Виноградова. В нашей работе мы существенно опираемся на аналог теоремы Бомбьери-Виноградова, полученный М. А. Королёвым (см. [3], Лемма 13).

Отметим, что методы, использованные при оценке суммы $\Phi_a(x)$, могут успешно применяться и к оценке других сумм, родственных $\Phi_a(x)$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. E.C. Titchmarsh, *A divisor problem.* // *Rendiconti Palermo.* (1930) **54**
2. S. Ramanujan, *Some formulae in the analytic theory of numbers.* // *The Messenger of Math.* **45** (1916), pp. 81-84.
3. M. A. Korolev, *On Karatsuba's problem concerning the divisor function.* // Monatsh Math 168 (2012), 403–441.
4. H. Halberstam, H.- E. Richert, *Sieve methods.* // Dover Publications, Inc. Mineola, New York. (2010), 490 p.
5. J. Friedlander, H. Iwaniec, *Opera de Cribro.* // Amer. Math. Soc. Colloquium Publictions. (2010), 530 p.
6. G. Rodriguez, *Sul problema dei divisori di Titchmarsh.*// Boll. Un. Mat. Ital. **3** 20 (1965), 358-366.
7. H. Halberstam, *Footnote to the Titchmarsh-Linnik divisor problem.* // Proc. Amer. Math. Soc. 18 (1967), 187-188.
8. E. Bombieri, J. B. Friedlander, H. Iwaniec, *Primes in arithmetic progressions to large moduli.* Acta Math. 357 (1985), 51-76.
9. É. Fouvry, *Sur le probléme des diviseurs de Titchmarsh.* //J.Reine Angew. Math. 357 (1985), 51-76.
10. Ю. В. Линник, *«Новые варианты и применения дисперсионного метода в бинарных аддитивных задачах»*// Докл. АН СССР, **137**:6 (1961), 1299–1302.
11. S. Drappeau, B. Topacogullari, *Combinatorial identities and Titchmarsh's divisor problem for multiplicative functions.* // Algebra & Number Theory, Mathematical Sciences Publishers (2019), 13-10, pp.2383-2425.
12. Карацуба А. А. 1975, *«Основы аналитической теории чисел».* — Москва: Изд-во «Наука». — 184 с.
13. Воронин С. М., Карацуба А. А. 1994, *«Дзета-функция Римана».* — Москва: «Физматлит». — 376 с.

УДК 511.3

Арифметические свойства рядов некоторых классов в полиадических лиувиллевых точках

Е. Ю. Юденкова (Россия, г. Москва)
Московский педагогический государственный университет
e-mail: yudenkovaey@gmail.com

Arithmetic properties of series of some classes at polyadic Liouvillea points

E. Yu. Yudenkova (Russia, Moscow)
Moscow Pedagogical State University)
e-mail: yudenkovaey@gmail.com

В докладе рассказано о результатах о бесконечной алгебраической и линейной независимости рядов некоторых классов в полиадических лиувиллевых точках, т.е полиадических точках, допускающих сколь угодно высокий порядок приближения натуральными числами.

Секция 6. Диофантовы приближения и теория трансцендентных чисел

УДК 511.9

О константе наилучших совместных диофантовых приближений[1]

Ю. А. Басалов (Россия, г. Тула)
Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого
e-mail: basalov_yurij@mail.ru

On the constant of the best joint Diophantine approximations

Yu. A. Basalov (Russia, Tula)
Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University
e-mail: basalov_yurij@mail.ru

Многие проблемы теории диофантовых приближений исходят из фундаментального утверждения, полученного П. Г. Л. Дирихле (1842).

Теорема 1. *Пусть* $\alpha_{ij}(1 \le i \le n,\ 1 \le j \le m)$ *и* Q *– произвольные действительные числа, причем* $Q > 1$. *Тогда найдутся целые числа* $q_1,\ q_2, \ldots,\ q_m$ *и* $p_1,\ p_2, \ldots,\ p_n$ *такие, что* $1 \le max\,(|q_1|,\ |q_2|, \ldots,\ |q_m|) < Q^{\frac{n}{m}}$ *и*

$$\left| \sum_{j=1}^{m} \alpha_{ij} \cdot q_j - p_i \right| \le \frac{1}{Q}, \qquad (1 \le i \le n).$$

В частном случае для $m = 1$ получится неравенство $\max\limits_{i=\overline{1,n}} q\,|q\alpha_i - p_i|^n < 1$. Можно ли в нем заменить 1 на какое-то меньшее число C? В связи с этим вопросом возникают следующие понятия.

Определение 1. *Точная нижняя грань величины* C *называется константой наилучших диофантовых приближений* $C(\vec{\alpha})$ *для вектора* $\vec{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$.

Определение 2. *Константой наилучших диофантовых приближений* C_n *называется точная верхняя грань числа* $C(\vec{x})$ *по всем векторам* $\vec{x}$ *размерности* n:

$$C_n = \sup_{\vec{x} \in \mathbb{R}^n} C(\vec{x}).$$

Другим направлением развития теоремы 1 является получение оценок для неоднородных линейных форм, квадратичных форм и более сложных конструкций.

П. Л. Чебышевым в 1866 году была получена оценка степени приближения одной неоднородной линейной формы. Для произвольных чисел a, b существует бесконечное количество пар целых чисел x, y таких, что

$$|x - ay - b| < \frac{2}{y}.$$

[1]Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ: (грант 19-41-710004_р_а).

Пусть $\varphi(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2$. Учениками П. Л. Чебышева – А. Н. Коркиным и Е. Н. Золотарёвым было показано, что переменным x, y можно дать такие целые, не равные одновременно нулю, значения, что

$$\varphi(x,y) \le \sqrt{\tfrac{1}{3}\,|\Delta|} \quad \text{для } \Delta < 0,$$
$$\varphi(x,y) \le \sqrt{\tfrac{1}{5}\,|\Delta|} \quad \text{для } \Delta > 0.$$

Если при $\Delta > 0$ исключить квадратичные формы, где $\varphi(x,y) = \sqrt{\frac{1}{5}\,|\Delta|}$, то можно усилить неравенство как

$$\varphi(x,y) \le \sqrt{\frac{1}{8}\,|\Delta|}.$$

А. А. Марков в 1880 выяснил, что подобным образом можно бесконечно продолжать ряд констант $\frac{1}{5}, \frac{1}{8}, \ldots$

Описанные выше результаты имеют непосредственную связь с оценкой C_1.

- можно показать, что $C_1 \ge 1/\sqrt{5}$.
- вместо неравенств для классов квадратичных форм, можно записать неравенства для классов квадратичных иррациональностей, при чем в правых частях будет находится те же константы $\frac{1}{5}, \frac{1}{8}, \ldots$.

В 1927 Ф. Фуртвенглер получил следующее утверждение

Теорема 2. *Пусть $k > 0$ меньше $1/\sqrt{|\Delta|}$, где Δ – это наименьший по модулю дискриминант алгебраического поля степени $n+1$. Тогда, для любых чисел $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ неравенства*

$$q\,|q\alpha_i - p_i|^n < k, \qquad i = \overline{1,n}$$

имеют только конечное количество решений в целых числах $p_1, p_2, \ldots, p_n, q$.

Из этого утверждения непосредственно следует, что

$$C_n \ge 1/\sqrt{|\Delta|}.$$

Вместо минимизации выражения

$$\max_{i=\overline{1,n}} |q\alpha_j - p_i|$$

можно заняться минимизацией выражений $\sum\limits_{i=\overline{1,n}} (q\alpha_j - p_i)^2$ или $\prod\limits_{i=\overline{1,n}} |q\alpha_j - p_i|$. Пусть $\Phi(x_1, \ldots, x_n)$ – лучевая функция от n переменных,

$$D(\Phi, \alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \liminf_{q\to\infty} q\Phi^n(q\alpha_1 - p_1, \ldots, q\alpha_n - p_n)$$

и

$$D(\Phi) = \sup_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n} D(\Phi, \alpha_1, \ldots, \alpha_n),$$

а

$$F(x_0, \ldots, x_n) = \left(|x_0|\Phi^n(x_1 \operatorname{sign} x_0, \ldots, x_n \operatorname{sign} x_0)\right)^{\frac{1}{n+1}}.$$

Г. Дэвенпорт установил, что

$$D(\Phi) = \frac{1}{\Delta\mathbb{F}} = \sup_{\Lambda} \frac{F^{n+1}(\Lambda)}{d(\Lambda)},$$

где точная верхняя грань беретя по всем $(n+1)$-мерным решеткам, а $\mathbb{F}$ это $(n+1)$-мерное звездное тело $\mathbb{F} : F(x_0, \ldots, x_n) < 1$, и $\Delta\mathbb{F}$ его критический определитель.

Положим $\mathbb{F}_n$ – это $(n+1)$-мерное звездное тело

$$\mathbb{F}_n : |x_0| \max_{1 \le i \le n} |x_i|^n < 1. \tag{1}$$

Тогда $C_n = \frac{1}{\Delta(\mathbb{F})}$, где $\Delta(\mathbb{F})$– критический определитель тела (1). Для $n = 1$ это дает $C_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}$. Однако, вычисление критических определителей тел (1) для $n > 1$ проблематично. Поэтому Дж. В. С. Касселс [4] оценил C_n как

$$\Delta(\mathbb{F}_n) \le V_{n,s}/\sqrt{\Delta_{n,s}},$$

где $V_{n,s}$ – объема параллелепипеда с центром в начале координат, находящегося внутри $(n+1)$-мерного звездного тела

$$\mathbb{F}_{n,s} : f_{n,s} = \frac{1}{2^s} \prod_{i=1}^{s} |x_i^2 + x_{s+i}^2| \prod_{i=2s+1}^{n} |x_i| < 1,$$

а $\Delta_{n,s}$ наименьшее абсолютное значение дискриминанта действительного поля степени $n+1$, которое имеет s пар комплексно-сопряженных алгебраических чисел.

Описанные выше результаты сводят задачу оценки константы совместных диофантовых приближений к оценке объема наибольшего параллелепипеда $V_{n,s}$. Оценки для $V_{n,s}$ для размерностей 2, 3 и 4 были получены в работах Дж. В. С. Касселса, Т. Кьюзика, С. Красса [1, 4, 5]. В работе [2] нами было получено оценки для размерности 5 и 6:

$$V_{5,2} \ge \sqrt{\frac{27\left(9+5\sqrt{5}\right)}{88}} \approx 2.48831..., \qquad V_{6,3} \ge \frac{9+5\sqrt{5}}{11} \approx 1.83458....$$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Басалов Ю.А. Об истории оценок константы наилучших совместных диофантовых приближений. // Чебышевский сборник. 2018. Т. 19, вып. 2. С. 388-405.

2. Ю. А. Басалов. Оценка константы наилучших диофантовых приближений для $n = 5$ и $n = 6$ // Чебышевский сборник, 2019, т. 20, вып. 1, с. 66–81.

3. Касселс Дж. В. С. Введение в геометрию чисел: Пер. с англ. — М.: Мир, 1965.

4. Cassels J. W. S. Simultaneous Diophantine approximation // J. London Math. Soc. 30 (1955), p. 119-121.

5. Cusick J. W. Estimates for Diophantine approximation constants // Journal of Number Theory (1980) p. 543-556.

6. Davenport. H. On a theorem of Furtwängler // J. London Math. Soc. 30 (1955). p. 186-195.

УДК 511.42

Метрические теоремы о приближении нуля значениями целочисленных полиномов с малой производной в корне

В. И. Берник (Беларусь, г. Минск)
Институт математики Национальной академии наук Беларуси
e-mail: bernik.vasili@mail.ru
Д. В. Васильев (Беларусь, г. Минск)
Институт математики Национальной академии наук Беларуси
e-mail: vasilyev@im.bas-net.by
Н. И. Калоша (Беларусь, г. Минск)
Институт математики Национальной академии наук Беларуси
e-mail: n.kalosha@gmail.com
А. С. Кудин (Беларусь, г. Минск)
Институт математики Национальной академии наук Беларуси
e-mail: knxd@yandex.ru

Metric theorems on zero approximation by the values of integral polynomials having small derivative at a root

V. I. Bernik (Belarus, Minsk)
Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus
e-mail: bernik.vasili@mail.ru
D. V. Vasilyev (Belarus, Minsk)
Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus
e-mail: vasilyev@im.bas-net.by
N. I. Kalosha (Belarus, Minsk)
Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus
e-mail: n.kalosha@gmail.com
A. S. Kudin (Belarus, Minsk)
Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus
e-mail: knxd@yandex.ru

Из теоремы Минковского о линейных формах [1] следует, что для любого $Q \in \mathbb{N}$, $Q > 1$ и любой точки $x \in (-M, M)$, $M > 0$ — фиксировано, неравенство

$$|P(x)| < c(n, M)Q^{-n}, \tag{1}$$

имеет место для некоторого полинома $P(x)$ степени n и высоты $H(P) \leq Q$. В.Г. Спринджук решил гипотезу Малера [2] и доказал, что если в показателе степени (1) поставить $-n-\varepsilon, \varepsilon > 0$, то новое неравенство не будет выполняться для большинства x из любого интервала $I \subset \mathbb{R}$ при достаточно большом Q. При доказательстве этого факта он дополнительно к неравенству (1) добавил неравенство

$$|P'(x)| < Q^{1-v},\ v > 0, \tag{2}$$

и проанализировал данную систему неравенств при различных значениях v. Однако, явных оценок для меры Лебега множества разрешимости системы им не получено.

Теорема 1. *При $v > \frac{3}{2}$ система неравенств*

$$\begin{cases} |P(x)| < Q^{-n}, \\ |P'(x)| < c(n)Q^{1-v}, \end{cases}$$

имеет решение только для множества $x \in I$ с мерой Лебега, не превосходящей $c(n)Q^{-\frac{1}{4}}$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Касселс, Дж.В.С. Введение в теорию диофантовых приближений / Дж.В.С. Касселс // Москва: Изд-во Иностр. Литер. — 1961. — 213 с.

2. Спринджук, В.Г. Проблема Малера в метрической теории чисел / В.Г. Спринджук // Мн.: Наука и Техника. — 1967. — 184 с.

УДК 511.42

Множества с малыми значениями целочисленных полиномов

Е. В. Засимович (Беларусь, г. Минск)
Институт математики НАН Беларуси
e-mail: elena.guseva.96@yandex.by
И. А. Корлюкова (Беларусь, г. Гродно)
Гродненский государственный университет имени Янки Купалы
e-mail: korlyukova@mail.ru
Н. В. Сакович (Беларусь, г. Могилев)
Могилевский государственный университет имени А. А. Кулешова
e-mail: sakovichnv@tut.by

Sets with small values of integer polynomials

E. V. Zasimovich (Belarus, Minsk)
Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus
e-mail: elena.guseva.96@yandex.by
I. A. Korlyukova (Belarus, Grodno)
Yanka Kupala State University of Grodno
e-mail: korlyukova@mail.ru
N. V. Sakovich (Belarus, Mogilev)
Mogilev State A. A. Kuleshov University
e-mail: sakovichnv@tut.by

В 1932 году К. Малер сформулировал проблему, утверждающую, что для любого $\varepsilon > 0$ неравенство $|P(x)| < H^{-n-\varepsilon}$ имеет бесконечное число решений в целочисленных полиномах степени не более n и высоты H лишь на множестве $x \in \mathbb{R}$ меры нуль. Данная проблема была решена В.Г. Спринджуком в 1964 году [1]. В результате обобщения проблемы Малера в метрической теории диофантовых приближений появилось множество интересных задач и проблем.

В ходе решения проблемы Малера, а также связанных с ней современных проблем метрической теории диофантовых приближений, часто возникает очень тонкая задача оценки меры

Лебега множества $\mathcal{L}_n(Q,w)$ таких $x \in \mathbb{R}$, для которых неравенство $|P(x)| < H(P)^{-w}$, $w > n$, разрешимо в целочисленных полиномах $P(x)$ степени не более n и высоты не более Q. Из доказательства Спринджука непосредственно вытекает, что мера такого множества стремится к нулю при $q \to \infty$. Но необходимы более точные оценки.

Теорема 1. *При $w \geqslant n+1$ справедливо неравенство*

$$\mu\mathcal{L}_n(Q,w) < c_1(n)Q^{-\frac{w-1}{n}}.$$

Данная оценка является наилучшей, так как для полиномов специального вида $P(x) = (ax+b)^n$ нетрудно доказать противоположное неравенство. Метод доказательства существенно зависит от величины производной $P'(x)$ в корне полинома, величины w и приводимости-неприводимости полинома $P(x)$. Для оценки модуля $|x-\alpha_1|$ сверху и снизу берется оценка по одной из производных многочлена, которая в данном диапазоне изменения w оказывается наилучшей.

Данный результат усиливает предыдущие оценки Н.В. Будариной [2] и вносит весомый вклад в метрическую теорию диофантовых приближений, допуская многочисленные применения в современных и актуальных задачах.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Спринджук В. Г. Проблема Малера в метрической теории чисел //Минск: Наука и техника. 1967. 181 с.

2. Budarina N. On the rate of convergence to zero of the measure of extremal sets in metric theory of transcendental numbers // Math. Z. 2019. Vol. 293. P. 809–824.

УДК 511.361

О значениях функции Куммера с иррациональными параметрами

П. Л. Иванков (Россия, г. Москва)
Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана
email: ivankovpl@mail.ru

On the values of the Kummer function with irrational parameters

P. L. Ivankov (Russia, Moscow)
Bauman Moscow State Technical University
email: ivankovpl@mail.ru

Рассмотрим функцию

$$\Phi(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{z^\nu}{\nu!} \prod_{x=0}^{\nu-1} \frac{\alpha+x}{\beta+x}.$$

Арифметические свойства значений таких функций изучались во многих работах; случай иррациональных параметров см. в [1] и [2]. С помощью эффективных конструкций из работ [2] или [3], а также с помощью некоторых дополнительных соображений удаётся доказать линейную независимость значений функций $\Phi(z)$ и $\Phi'(z)$ с параметрами из вещественного квадратичного поля.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Иванков П.Л. *Оценки снизу линейных форм от значений функции Куммера с иррациональным параметром* // Математические заметки. Т. 49, выпуск 2. С. 55-63. (1991)

2. Иванков П.Л. *О линейной независимости значений некоторых функций* //Фундаментальная и прикладная математика. Т. 1 № 1. С. 191–206 (1995).

3. Иванков П.Л. *О значениях некоторых функций, удовлетворяющих однородным дифференциальным уравненям* //Чебышевский сборник. Т. 14, вып. 2 С. 104-112 (2013).

УДК 511.361

О значениях некоторых функций с иррациональными параметрами

П. Л. Иванков (Россия, г. Москва)
Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана
email: ivankovpl@mail.ru

On the values of some functions with irrational parameters

P. L. Ivankov (Russia, Moscow)
Bauman Moscow State Technical University
email: ivankovpl@mail.ru

Рассмотрим функцию

$$K_\lambda(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{z^\nu}{\nu!} \prod_{x=1}^{\nu} \frac{1}{\lambda + x}.$$

Арифметические свойства значений таких функций рассматривались во многих работах; случай иррациональных параметров см. в [1] и [2]. Комбинируя технические приёмы, предложенные в этих работах, а также используя некоторые дополнительные соображения, можно доказать линейную независимость значений функций $K_\lambda(z)$ и $K'_\lambda(z)$ при $\lambda = i\sqrt[4]{2}$ над полем $\mathbb{Q}(i\sqrt[4]{2})$. В работах [1] и [2] аналогичный результат получен для случаев соответственно мнимого кубического и вещественного квадратичного полей.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Иванков П.Л. *О совместных приближениях значений некоторых целых функций числами из кубического поля* // Вестник Московского университета. Математика, механика. Т. 49, № 3. С. 53-56. (1987).

2. Иванков П.Л. *О значениях гипергеометрических функций с параметром из квадратичного поля* //Чебышевский сборник. Т. 20 вып. 2. С. 170–177 (2020).

УДК 511.42

Оценки меры Хаара множеств p-адических чисел, в которых целочисленные полиномы имеют малую норму

М. А. Калугина (Беларусь, г. Минск)
Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники
e-mail: m.kalugina@bsuir.by
М. В. Ламчановская (Беларусь, г. Минск)
Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники
e-mail: lammv@mail.ru
Н. В. Шамукова (Беларусь, г. Минск)
Университет гражданской защиты МЧС Республики Беларусь
e-mail: shamukova_n@mail.ru

Estimates for the Haar measure of the sets of p-adic numbers in which the integer polynomials have small norm

M. A. Kalugina (Belarus, Minsk)
Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics
e-mail: m.kalugina@bsuir.by
M. V. Lamchanovckaya (Belarus, Minsk)
Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics
e-mail: lammv@mail.ru
N. V. Shamukova(Belarus, Minsk)
University of Civil Protection of the Ministry for Emergency Situations of the Republic of Belarus
e-mail: shamukova_n@mail.ru

В середине 60-х годов прошлого века В.Г. Спринджук [1] доказал гипотезу Малера [2] о мере множества действительных и комплексных чисел, а также ее аналог для поля p-адических чисел.

Далее будем использовать следующие обозначения, в которых $p \geqslant 2$ - фиксированное простое число. $\mathbb{Q}_p$ - поле p-адических чисел, $|\omega|_p$ - p-адическая норма $\omega \in \mathbb{Q}_p$, μS - мера Хаара множества $S \subset \mathbb{Q}_p$.

Пусть $L_n(Q, w) \in \mathbb{Q}_p$ и для натурального $Q > 1$ состоит из $\omega \in \mathbb{Q}_p$, для которых неравенство

$$|P(\omega)|_p < Q^{-w} \tag{1}$$

при $w > n+1$ выполняется для $P(\omega) \in \mathbb{Z}[\omega]$, а высота H многочлена P удовлетворяет условию $H = H(P) \leqslant Q$.

Спринджук В.Г. доказал, что $\mu L_n(Q, w) < Q^{-\epsilon_1}$, если $w = n + \epsilon$ и $\epsilon_1(\epsilon) \to 0$ при $\epsilon \to 0$. Приведем более общий результат.

Теорема 1. *При $n + 1 < w < n + 2$ справедливо неравенство*

$$\mu L_n(Q, w) < c(n) Q^{-w-n-1}. \tag{2}$$

Доказательство использует метод Спринджука, одну лемму В.И. Берника [3], классификацию целочисленных полиномов по взаимному расположению корней и отдельно доказанную лемму о разрешимости (1) для приводимых полиномов.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Спринджук В. Г. Проблема Малера в метрической теории чисел. — Минск: Наука и техника, 1967. 182 с.

2. Mahler K. Uber das Mass der Menge aller S-Zahlen. — Mathematishe Annalen. 1932. Vol. 106, no .1, pp. 131-139.

3. Берник В. И. О точном порядке приближения нуля значениями целочисленных многочленов. — Acta Arithmetica. 1989. Т. 53, с. 17-28.

УДК 511.42

Неулучшаемые оценки расстояний действительных чисел до ближайшего корня целочисленного полинома

О. Н. Кемеш (Беларусь, г. Минск)
Белорусский государственный аграрный технический университет
e-mail: oksana.kemesh@tut.by
И. М. Морозова (Беларусь, г. Минск)
Белорусский государственный аграрный технический университет
e-mail: inna.morozova@tut.by
Ж. И. Пантелеева (Беларусь, г. Минск)
Институт математики Национальной академии наук Беларуси
e-mail: janna-85@list.ru

Best estimates for the distances between real numbers and nearest roots of integral polynomials

O. N. Kemesh (Belarus, Minsk)
Belarusian State Agrarian Technical University
e-mail: oksana.kemesh@tut.by
I. M. Morozova (Belarus, Minsk)
Belarusian State Agrarian Technical University
e-mail: inna.morozova@tut.by
Zh. I. Panteleeva (Belarus, Minsk)
Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus
e-mail: janna-85@list.ru

Если $|P(x)| < \varepsilon$, $P(x) \in \mathbb{Z}[x]$ и α_1 - ближайший к x корень $P(x)$, то для величины $|x - \alpha_1|$ известны n оценок сверху.

$$\begin{gathered} |x-\alpha_1| \leqslant n|P(x)||P'(x)|^{-1} \\ |x-\alpha_1| \leqslant 2^{n-1}|P(x)||P'(\alpha_1)|^{-1} \\ |x-\alpha_1| \leqslant 2^n \min_{2\leqslant j\leqslant n} \left|\frac{P(x)}{P'(\alpha_1)}(\alpha_1-\alpha_2)\cdot\ldots\cdot(\alpha_1-\alpha_j)\right|^{1/j} \end{gathered} \tag{1}$$

Вопрос о том, какая из оценок в (1) лучше, решен В. Г. Спринджуком [1] при $j = 1, 2$.

В докладе решается задача нахождения диапазона значений x, для которых при любом $1 \leqslant j \leqslant n$ каждая из оценок в (1) является наилучшей.

Теорема 1. *Пусть $P(x)$ целочисленный многочлен степени не превосходящей n, α_1 - ближайший к x корень, $2 \leqslant j \leqslant n$, $|P(x)| < H^{-w}$, где*

$w > \frac{3(n-1)}{j(j+1)} - \frac{3}{2} + \frac{n}{2}$, *если x — действительное число,*

$w > \frac{3(n-1)}{2j(j+1)} - \frac{5}{4} + \frac{n}{4}$, *если x — комплексное число.*

Тогда при любом j имеем оценки, противоположные (1)

$$|x-\alpha_1| > \begin{cases} c_1 \left|\frac{P(x)}{P'(\alpha_1)}\right|, & \text{если } |x-\alpha_1| \leqslant 2|\alpha_1-\alpha_2| \\ c_2 \left|\frac{P(x)(\alpha_1-\alpha_2)\cdot\ldots\cdot(\alpha_1-\alpha_j)}{P'(\alpha_1)}\right|^{1/j}, & \text{если } |x-\alpha_1| > 2|\alpha_1-\alpha_j|. \end{cases} \tag{2}$$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Спринджук В. Г. Проблема Малера в метрической теории чисел // Минск: Изд-во Наука и техника, 1967. 184 с.

УДК 511.35, 511.48, 511.75

Об алгебраических точках фиксированной степени вблизи поверхностей

Д. В. Коледа (Беларусь, г. Минск)
Институт математики Национальной академии наук Беларуси
e-mail: koledad@rambler.ru

On algebraic points of fixed degree near surfaces

D. V. Koleda (Belarus, Minsk)
Institute of Mathematics of National Academy of Sciences of Belarus
e-mail: koledad@rambler.ru

Введение. В докладе мы рассмотрим совместное распределение сопряжённых алгебраических чисел, т.е. корней целочисленных многочленов, в пространстве. Это распределение естественно описывать в терминах распределения *алгебраических точек* — точек, координаты которых суть сопряжённые алгебраические числа.

Известен ряд результатов (см., например, [2], [3], [4]) о нижних оценках количества алгебраических точек фиксированной степени вблизи гладких поверхностей и кривых. В [1] была получена асимптотика количества алгебраических точек фиксированной степени и ограниченной высоты, лежащих в произвольной области достаточной большой меры с не слишком извилистой границей. Однако класс высотных функций, рассмотренных в [1], ограничен техническим условием сводимости задачи к случайным многочленам с независимыми одинаково распределёнными коэффициентами. Доклад посвящён обобщению основного результата [1] на более широкий класс высотных функций и приложениям этого результата к подсчёту алгебраических точек, лежащих вблизи заданных множеств в евклидовом пространстве.

Основные понятия и соглашения. В докладе степень n алгебраических чисел и точек произвольна, но фиксирована. Кроме того, зафиксированы целые неотрицательные k, l, такие что $1 \leqslant k + 2l \leqslant n$. Верхняя граница Q высот алгебраических точек есть большое положительное число. Асимптотические соотношения и пределы рассматриваются при $Q \to +\infty$.

Комплексная плоскость $\mathbb{C}$ отождествляется с евклидовой плоскостью $\mathbb{R}^2$, в частности, пространство $\mathbb{R}^k \times \mathbb{C}^l$ мы будем отождествлять с $\mathbb{R}^{k+2l}$. Верхняя комплексная полуплоскость обозначена как $\mathbb{C}_+ := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$.

Чтобы в записях избежать путаницы между многочленом, рассматриваемым как функция или формальное выражение, и значением многочлена в точке, формальную переменную будем обозначать символом X.

В докладе под *высотой* многочлена $q(X) = \sum_{j=0}^{n} a_j X^j$ мы понимаем непрерывную функцию $\mathcal{H} : \mathbb{R}^{n+1} \to [0, +\infty)$, удовлетворяющую двум условиям: (а) $\mathcal{H}[q] = 0$ тогда и только тогда, когда q есть тождественный нуль; (б) $\mathcal{H}[\omega q] = |\omega|\mathcal{H}[q]$ для всех вещественных ω. Саму функцию $\mathcal{H}$, как функцию коэффициентов многочлена, мы будем называть *высотной функцией*.

Используемые в литературе другие понятия высоты, как правило, либо непосредственно подходят под определение выше, либо могут быть сведены к нему несложным преобразованием (возведением в степень или антилогарифмированием).

Примерами высот являются *обычная высота* и *мера Малера*, которые для многочлена $q(X) = a_n X^n + \ldots + a_1 X + a_0 = a_n (X - z_1) \ldots (X - z_n)$ определяются соответственно как

$$H[q] := \max_{0 \leqslant i \leqslant n} |a_i|, \qquad M[q] := |a_n| \prod_{j=1}^{n} \max\{1, |z_j|\}.$$

Взяв в роли нормы вектора высотную функцию $\mathcal{H}$, определим $(n+1)$-мерный "единичный $\mathcal{H}$-шар" как

$$\mathbb{B}_{\mathcal{H}} := \left\{ (a_0, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1} : \mathcal{H}\left[\sum_{j=0}^{n} a_j X^j\right] \leqslant 1 \right\}.$$

Далее высотную функцию $\mathcal{H}$ будем считать произвольной, но фиксированной.

Под *минимальным многочленом* алгебраического числа $\alpha \in \mathbb{C}$ будем понимать ненулевой целочисленный многочлен q_α наименьшей степени со взаимно простыми коэффициентами и положительным старшим коэффициентом, такой что $q_\alpha(\alpha) = 0$.

Алгебраической (k,l)-точкой будем называть упорядоченный набор из $(k+l)$ чисел

$$\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \beta_1, \ldots, \beta_l) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{C}_+^l,$$

такой что его вещественные координаты $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ и комплексные координаты $\beta_1, \ldots, \beta_l$ суть различные сопряжённые (по Галуа) алгебраические числа, т.е. числа α_i и β_j имеют общий минимальный многочлен $q_{\boldsymbol{\alpha}}$. *Степень* и *высоту* алгебраической точки определим как степень и высоту минимального многочлена координат точки $\deg(\boldsymbol{\alpha}) := \deg(q_{\boldsymbol{\alpha}})$, $\mathcal{H}[\boldsymbol{\alpha}] := \mathcal{H}[q_{\boldsymbol{\alpha}}]$.

Обозначим через $\mathbb{A}_n(k,l)$ множество всех алгебраических (k,l)-точек степени n (над $\mathbb{Q}$). Для $Q \geqslant 1$ и множества $B \subseteq \mathbb{R}^k \times \mathbb{C}^l$ определим считающую функцию

$$\Phi_{k,l}(Q, B) := \#\big\{\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{A}_n(k,l) \cap B : \mathcal{H}[\boldsymbol{\alpha}] \leqslant Q\big\}.$$

Основные результаты. Если граница ∂B множества B и граница $\partial\mathbb{B}_{\mathcal{H}}$ "единичного шара" $\mathbb{B}_{\mathcal{H}}$ не слишком извилистые, можно оценить не только главный член асимптотики $\Phi_{k,l}(Q, B)$ при $Q \to \infty$, но и погрешность. Например, будем считать, что $\mathcal{H}$ — алгебраическая или липшицева функция коэффициентов $(a_0, \ldots, a_n)$.

Теорема 1. *Пусть $B \subseteq \mathbb{R}^k \times \mathbb{C}_+^l$ — область, чья граница ∂B содержится в конечном объединении липшицевых отображений куба $[0,1]^{k+2l-1}$. Тогда выполняется неравенство*

$$\left| \frac{\Phi_{k,l}(Q, B)}{Q^{n+1}} - \frac{\operatorname{Vol}(\mathbb{B}_{\mathcal{H}})}{2\zeta(n+1)} \int_B \rho_{k,l}(\mathbf{v})\, d\mathbf{v} \right| \leqslant \begin{cases} CQ^{-1} \log Q, & n = 2 \text{ и } l = 0, \\ CQ^{-1}, & \text{иначе}, \end{cases} \tag{1}$$

где $\rho_{k,l} : \mathbb{R}^k \times \mathbb{C}^l \to \mathbb{R}$ *— непрерывная неотрицательная функция (подробнее о ней ниже),* $d\mathbf{v}$ *— элемент объёма в пространстве* $\mathbb{R}^k \times \mathbb{C}^l$*, рассматриваемом как* $\mathbb{R}^{k+2l}$*,* $\zeta(\cdot)$ *— дзета-функция Римана,* $\mathrm{Vol}(\mathbb{B}_{\mathcal{H}})$ *— объём* $(n+1)$*-мерного "единичного шара"* $\mathbb{B}_{\mathcal{H}}$*.*

Положительная постоянная C *в* (1) *зависит только от* n *и от параметров границы* ∂B*: количества соответствующих отображений и их липшицевых постоянных.*

Отметим, что функции $\Phi_{k,l}$ и $\rho_{k,l}$ существенно зависят как от степени n, так и от высотной функции $\mathcal{H}$. Однако поскольку степень n и высотная функция $\mathcal{H}$ зафиксированы, эту зависимость мы не указываем явно.

Функции $\rho_{k,l}$ по своему происхождению являются смешанными корреляционными функциями нулей вещественного случайного многочлена, вектор коэффициентов которого равномерно распределён в "единичном шаре" $\mathbb{B}_{\mathcal{H}}$.

Теорема 2. *Пусть* $1 \leqslant k + 2l \leqslant n$*. Тогда функции* $\rho_{k,l}$ *из теоремы 1 удовлетворяют тождеству*

$$\rho_{k,l}(x_1, \dots, x_k, z_1, \dots, z_l) = 2^l \rho_{k+2l}(x_1, \dots, x_k, z_1, \dots, z_l, z_1^*, \dots, z_l^*),$$

где функцию $\rho_m(z_1, \dots, z_m)$ *при* $1 \leqslant m \leqslant n$ *можно представить в виде*

$$\rho_m(\mathbf{z}) = \frac{1}{\mathrm{Vol}(\mathbb{B}_{\mathcal{H}})} \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant m} |z_i - z_j| \ \times \int\limits_{D_m(\mathbf{z})} \prod_{i=1}^{m} \left| \sum_{j=0}^{n-m} t_j z_i^j \right| dt_0 \dots dt_{n-m},$$

$$D_m(\mathbf{z}) := \left\{ (t_0, \dots, t_{n-m}) \in \mathbb{R}^{n-m+1} : \mathcal{H}\left[\prod_{k=1}^{m} (X - z_k) \sum_{j=0}^{n-m} t_j X^j \right] \leqslant 1 \right\}.$$

В частности, при $m = n$ *имеем*

$$\rho_n(\mathbf{z}) \ = \frac{2}{(n+1)\,\mathrm{Vol}(\mathbb{B}_{\mathcal{H}})} \cdot \left(\prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} |z_i - z_j| \right) \cdot \left(\mathcal{H}\left[\prod_{k=1}^{n} (X - z_k) \right] \right)^{-n-1}.$$

Теорема 1 была доказана в [1] для высот вида $\mathcal{H}[q] = \ell_p[q] := (\sum_{i=0}^{n} |a_i|^p)^{1/p}$, где $p \in (0, +\infty]$. Причина этого ограничения в том, что для таких высот задачу можно свести к случайным многочленам с независимыми коэффициентами. Это ограничение можно снять, дополнив рассуждения [1], и тем самым получить теорему 1 и явные выражения для $\rho_{k,l}$ в случае произвольной высоты $\mathcal{H}$.

Благодаря тому, что постоянная C зависит не от самой границы ∂B, а от конечного набора числовых параметров, характеризующих границу ∂B, оценка (1) остаётся верной и для областей B, которые сами могут зависеть от Q. Это особенно интересно, когда область B стягивается ко множеству нулевой меры при $Q \to \infty$.

Мы рассмотрим два приложения теоремы 1: (а) подсчёт алгебраических точек, удалённых от заданного множества не более чем на некоторое расстояние; (б) подсчёт алгебраических точек, у которых часть координат приближает заданную функцию остальных координат с заданной точностью. Отметим, что верхние и нижние оценки (одинакового порядка, но с различными константами) для задач типа (а) и (б) могут быть получены и другими методами, см., например, [2], [3], [4]. Теорема 1 позволяет получить точную асимптотику.

(а) Алгебраические точки вблизи множеств. Для множества $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^r$ обозначим через $\mathcal{M}(h)$ множество всех точек, удалённых от $\mathcal{M}$ на расстояние не более h, т.е.

$$\mathcal{M}(h) := \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^r : \mathrm{dist}(\mathbf{x}, \mathcal{M}) \leqslant h \}.$$

Для $h = 0$ по определению $\mathcal{M}(0) = \mathcal{M}$.

Теорема 3. *Пусть $1 \leqslant d < k+2l \leqslant n$. Пусть множество $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^k \times \mathbb{C}^l_+$ удовлетворяет условиям:*

- *существует инъективное липшицево отображение $\varphi : [0,1]^{k+2l-d} \to \mathbb{R}^k \times \mathbb{C}^l_+$, такое что $\mathcal{M} = \varphi([0,1]^{k+2l-d})$;*
- *для всякой точки $\mathbf{v} = (x_1, \dots, x_k, z_1, \dots, z_l) \in \mathcal{M}$ выполняются неравенства $x_i \neq x_j$ и $z_i \neq z_j$ при $i \neq j$.*

Тогда для любой постоянной $\gamma \in (0, 1/d)$ при $Q \to \infty$

$$\Phi_{k,l}\Big(Q, \mathcal{M}(Q^{-\gamma})\Big) \;\sim\; Q^{n+1-\gamma d} \cdot \frac{\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2+1)} \cdot \frac{\mathrm{Vol}(\mathbb{B}_{\mathcal{H}})}{2\zeta(n+1)} \int\limits_{\mathcal{M}} \rho_{k,l}(\mathbf{v})\, d\mathbf{v}, \tag{2}$$

где $d\mathbf{v}$ — элемент меры на $\mathcal{M}$, согласованный с элементом объёма в $\mathbb{R}^k \times \mathbb{C}^l$.

Погрешность асимптотики (2) определяется параметрами отображения φ и удалённостью множества $\mathcal{M}$ от множеств

$$\begin{aligned} \mathcal{X}_{ij} &= \{(x_1, \dots, x_k, z_1, \dots, z_l) : x_i = x_j\}, && 1 \leqslant i < j \leqslant k, \\ \mathcal{Z}_{ij} &= \{(x_1, \dots, x_k, z_1, \dots, z_l) : z_i = z_j\}, && 1 \leqslant i < j \leqslant l, \\ \mathcal{Z}'_i &= \{(x_1, \dots, x_k, z_1, \dots, z_l) : \operatorname{Im} z_i = 0\}, && 1 \leqslant i \leqslant l. \end{aligned}$$

(б) Приближение образов алгебраических точек сопряжёнными алгебраическими точками. Для множества $D \subseteq \mathbb{R}^m$ и отображения $f : D \to \mathbb{R}^d$ определим множество $\mathcal{M}_{f,D}$ как график отображения f с областью определения D, т.е.

$$\mathcal{M}_{f,D} := \big\{(x_1, \dots, x_m, f(x_1, \dots, x_m)) \in \mathbb{R}^{m+d} : (x_1, \dots, x_m) \in D\big\},$$

и множество

$$\mathcal{M}_{f,D}(h) := \big\{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbb{R}^{m+d} : |\mathbf{y} - f(\mathbf{x})| \leqslant h\big\}.$$

При $h = 0$ имеем $\mathcal{M}_{f,D}(0) = \mathcal{M}_{f,D}$.

Множество $S \subset \mathbb{R}^m$ будем называть *липшицевым*, если оно содержится в липшицевом отображении компакта $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^{m-1}$, т.е. $S \subseteq \varphi(\mathcal{C})$ для некоторого липшицева отображения $\varphi : \mathcal{C} \to \mathbb{R}^m$.

Теорема 4. *Пусть $m, d \geqslant 1$ и $m + d \leqslant n$. Пусть*

- *$D \subset \mathbb{R}^m$ есть компактная область с липшицевой границей ∂D,*
- *$f : D \to \mathbb{R}^d$ есть липшицево отображение,*
- *для каждой точки $(v_1, \dots, v_{m+d}) = (\mathbf{x}, f(\mathbf{x})) \in \mathcal{M}_{f,D}$ выполняется $v_i \neq v_j$ при $i \neq j$.*

Тогда для прозвольной постоянной $\gamma \in (0, 1/d)$ при $Q \to \infty$

$$\Phi_{m+d,0}\Big(Q, \mathcal{M}_{f,D}(Q^{-\gamma})\Big) \;\sim\; Q^{n+1-\gamma d} \cdot \frac{\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2+1)} \cdot \frac{\mathrm{Vol}(\mathbb{B}_{\mathcal{H}})}{2\zeta(n+1)} \int\limits_{D} \rho_{m+d,0}\Big(\mathbf{x}, f(\mathbf{x})\Big)\, d\mathbf{x}, \tag{3}$$

где $\Gamma(\cdot)$ — гамма-функция Эйлера, $d\mathbf{x} = dx_1 \dots dx_m$ — элемент объёма (меры) в области D.

Погрешность асимптотики (3) определяется параметрами границы ∂D и отображения f, а также отдалённостью множества $\mathcal{M}_{f,D}$ от множеств $\mathcal{V}_{ij} = \{(v_1, \dots, v_{m+d}) : v_i = v_j\}$, где $1 \leqslant i < j \leqslant m + d$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Götze F., Koleda D., Zaporozhets D. Joint distribution of conjugate algebraic numbers: a random polynomial approach // Adv. Math. 2020. Vol. 359, Article 106849. 33 pp.

2. Bernik V. I., Götze F., Gusakova A. G. On the distribution of points with algebraically conjugate coordinates in a neighborhood of smooth curves // Зап. научн. сем. ПОМИ. 2016. Том 448. С. 14–47.

3. Бударина Н. В., Диккинсон Д., Берник В. И. Оценки снизу для количества векторов с алгебраическими координатами вблизи гладких поверхностей // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. 2020. Том 64, № 1. С. 7–12.

4. Pezzoni A., Quantitative non-divergence and lower bounds for points with algebraic coordinates near manifolds [arXiv.org], Режим доступа: https://arxiv.org/abs/2006.10790.

УДК 511.32

Статистические свойства частичных сумм полиадических рядов

В. Ю. Матвеев (Россия, г. Москва)
Московский педагогический государственный университет
e-mail: salomaa@mail.ru
В. Г. Чирский (Россия, г. Москва)
Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, РАНХиГС
e-mail: vgchirskii@yandex.ru

Statistical properties of partial sums of polyadic series

V. Y. Matveev (Russia, Moscow)
Moscow Pedagogical State University
e-mail: salomaa@mail.ru
V. G. Chirskii (Russia, Moscow)
Lomonosov Moscow State University, RANEPA
e-mail:vgchirskii@yandex.ru

Полиадическое число имеет каноническое представление вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n n!, a_n \in \mathbb{Z}, 0 \leq a_n \leq n.$$

Рассматриваемый ряд сходится во всех полях p–адических чисел. В докладе рассказывается об исследованиях статистических свойств цифр конечных сумм таких рядов

$$\sum_{n=1}^{M} a_n n!.$$

УДК 511.36

Арифметические свойства рядов в сходящихся p-адических областях: результаты и проблемы

А. Х. Муньос Васкес (Россия, г. Москва)
Московский педагогический государственный университет, ГБОУ г. Москвы «Школа № 305»
e-mail: m.v.ankhel@yandex.ru

Arithmetic properties of series converging p-adic domains, results and problems.

A. Kh. Munos Vaskes (Russia, Moscow)
Moscow State Pedagogical University, School № 305.
e-mail: m.v.ankhel@yandex.ru

В докладе рассказано об арифметических свойствах F–рядов в малых p–адических точках. Рассмотрены задачи поставленные в работах [3] и [4]. Установлены оценки многочленов и линейных форм обобщающие результаты работ [1], [2]. Рассказывается об открытых проблемах.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Муньос Васкес А. Х. Оценки снизу многочленов и линейных форм от значений F – рядов // Чебышевский сборник. 2020. Том 21, вып. 3. С. 142–165.

2. Муньос Васкес А. Х. Арифметические свойства значений некоторых гипергеометрических F – рядов // Чебышевский сборник. 2021. Том 22, вып. 2.

3. Чирский В. Г. Арифметические свойства обобщённых гипергеометрических F – рядов // Доклады Академии наук. Наука (М.). 2018. Том 483, № 3. С. 257-259.

4. Chirskii V. G. Arithmetic properties of Generalized Hypergeometric F – Series // Russian Journal of Mathematical Physics, Maik Nauka/Interperiodica Publishing (Russian Federation). 2020. Vol. 27, №2, pp. 175-184.

УДК 511.32

О значениях обобщенных гипергеометрических рядов с параметром – трансцендентным числом

В. Г. Чирский (Россия, г. Москва)
Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, РАНХиГС
e-mail: vgchirskii@yandex.ru

On the values of generalized hypergeometric series with the parameter - transcendental number

V. G. Chirskii (Russia, Moscow)
Lomonosov Moscow State University, RANEPA
e-mail:vgchirskii@yandex.ru

В докладе сообщается о ряде недавних работ автора, в которых исследуются значения обобщенных гипергеометрических рядов с параметром – трансцендентным числом. Формулируются результаты, ставятся проблемы.

Секция 7. Дискретная геометрия и геометрия чисел

УДК 517.911

Метрические инварианты гиперповерхностей второго порядка в евклидовом пространстве

Д. Ю. Волков (Россия, г. Санкт-Петербург)
Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения
e-mail: dmitrivolkov@mail.ru
К. В. Галунова (Россия, г. Санкт-Петербург)
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого
e-mail: galounova@gmail.com

Metric invariants of a second-order hypersurface in an Euclidean space

D.Yu. Volkov (Russia, Saint Petersburg)
Saint-Petersburg State University of Aerospace Instrumentation
e-mail: dmitrivolkov@mail.ru
K. V. Galunova (Russia, Saint Petersburg)
Peter the Great St.Petersburg Polytechnic University
e-mail: galounova@gmail.com

Доклад посвящен изучению инвариантов квадратичных гиперповерхностей в вещественном евклидовом пространстве размерности n. Этот набор инвариантов позволяет просто формулировать окончательный результат исследования уравнения , что важно в преподавании этой темы в университетских курсах алгебры и геометрии и задачах компьютерной графики

1. Введение. Одним из частных вопросов общей теории инвариантов является вопрос о метрических инвариантах уравнений поверхностей второго порядка (квадрик) в вещественном евклидовом пространстве размерности n. Эта проблема имеет длинную историю. Б.А. Розенфельд отмечал, что первые инварианты кривых второго порядка открыл Аполлоний Пергский ([6, стр. 618]). Дальнейшие сведения о инвариантах кривых на плоскости можно найти в книгах по классической теории инвариантов [1, 3, 11]. Изучению метрических инвариантов поверхностей в евклидовом пространстве как специального вопроса проективной геометрии отражены в [10, 12]. В литературе на русском языке инварианты кривых и поверхностей в трехмерных пространствах подробно выводятся в фундаментальных курсах аналитической геометрии [4, 5, 6, 9]. Инварианты поверхностей в n мерном пространстве описаны в [6]. За основу изложения вопроса в книгах на русском языке был выбран подход П.С.Моденова (1911 -1971). [4, том 2 стр. 196, 9 стр 290] При исследовании вводились инварианты полной группы движений и семиинварианты (условные инварианты) - инварианты группы вращений. С.Л.Певзнер (1924 -2001) в подробной статье [7] предложил дополнить список инвариантов и указал, как можно обойтись без понятия семиинвариантов [7]. Наше доказательство является новым и более простым, чем доказательство в [7].

2. Инварианты. Основная теорема Поверхностью второго порядка называют множество точек $(x_1, ..., x_n)$, заданных уравнением:

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j + 2 \sum_{i=1}^{n} b_i x_i + c = 0 \qquad (1)$$

В матричной форме уравнение имеет вид

$$X^T AX + 2b^T X + c = 0 \tag{2}$$

Уравнение перехода к другой декартовой системе координат имеет вид

$$X = QX' + h \tag{3}$$

где столбцы $X = (x_1, ..., x_n)^t$, $X' = (x'_1, ..., x'_n)^t$- координаты точки в старой и в новой системах координат, Q-ортогональная матрица порядка $n \times n$, h-вектор столбец координат нового начала координат в старой системе координат. При $Q = E$, E-единичная матрица порядка $n \times n$, преобразование называется параллельным переносом, а при $h = 0$ - поворотом.

Непосредственно доказывается, что при переходе к новой системе координат, уравнение поверхности принимает вид

$$X'^t A' X' + 2b'^t X' + c' = 0 \tag{4}$$

где

$$\begin{aligned} A' &= Q^t AQ \\ b' &= Q^t Ah + Q^t b \\ c' &= h^t Ah + 2b^t h + c \end{aligned} \tag{5}$$

В матричной форме эти формулы можно представить в виде:

$$\begin{pmatrix} A' & b' \\ b'^t & c' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q^t & 0 \\ h^t & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & b \\ b^t & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q & h \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{6}$$

Хорошо известно, что выбрав новую систему координат, можно привести уравнение к простейшему, так называемому, каноническому виду. Напомним основные этапы упрощения уравнения квадрики. Центром симметрии квадрики называется такая точка, что при центральной симметрии относительно этой точки квадрика переходит в себя. Центр симметрии находится из системы

$$Ax_0 + b = 0 \tag{7}$$

Если поверхность имеет хотя бы один центр симметрии, то такая поверхность называется центральной [7, 9]. Уравнение такой поверхности с помощью выбора системы координат может быть приведено к виду

$$\lambda_1 \tau_1^2 + \lambda_2 \tau_2^2 + ... + \lambda_r \tau_r^2 + c = 0 \tag{8}$$

Если поверхность не имеет центра симметрии, то ее называют нецентральной [9] или параболической [7].В этом случае ее простейшее уравнение имеет вид

$$\lambda_1 \tau_1^2 + \lambda_2 \tau_2^2 + ... + \lambda_r \tau_r^2 + 2M\tau_{r+1} = 0 \tag{9}$$

Инвариантом уравнения называют такую функцию коэффициентов уравнения, которая не меняется при переходе к новой системе координат [1, 3, 7, 11]. Для вывод инвариантов рассмотрим следующие величины.

1. Ранги r и q матриц коэффициентов A и расширенной матрицы A^* системы (7) соответственно, где

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ . & . & ... & . \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}, A^* = \begin{pmatrix} a_{11} & ... & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & ... & a_{2n} & b_2 \\ & & & \\ a_{n1} & ... & a_{nn} & b_n \end{pmatrix}$$

2. Собственные числа матрицы A, т.е. корни характеристического многочлена матрицы A

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & ... & a_{2n} \\ . & . & ... & . \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix}$$

3. Коэффициенты многочлена n-й степени

$$\Delta_1(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & ... & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & ... & a_{2n} & b_2 \\ . & . & ... & . & . \\ . & . & ... & . & . \\ . & . & ... & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn}-\lambda & b_n \\ b_1 & b_2 & ... & b_n & c \end{vmatrix}$$

$$\Delta_1(\lambda) = K_0(-\lambda)^n + K_1(-\lambda)^{n-1} + ... + K_{n-1}(-\lambda) + K_n.$$

Рассмотреть инварианты 2 и 3 предложил П.С.Моденов [9], а 1 - С.Л.Певзнер [7]. Легко видеть, что ранги матриц A, A^*сохраняются при заменах координат, т.е ранги являются инвариантами [7]. Отметим, что поверхность центральная (параболическая) тогда и только тогда, когда $r = q($ $r+1 = q$ $)$. Отметим, что ранг r матрицы A равен количеству ненулевых собственных чисел матрицы A. Как хорошо известно, характеристический многочлен матрицы A инвариантен относительно преобразования координат [7, 9]. А многочлен $\Delta_1(\lambda)$ не инвариантен относительно преобразования координат. Он сохраняется при поворотах, но вообще говоря не сохраняется при параллельных переносах. Но некоторые коэффициенты многочлена $\Delta_1(\lambda)$ сохраняются и при параллельных переносах, т.е являются инвариантами уравнения поверхности второго порядка. Рассмотрим подробно свойства многочлена $\Delta_1(\lambda)$.

Обозначим через $B(\lambda)$ матрицу :

$$B(\lambda) = \begin{pmatrix} A-\lambda E & b \\ b^t & c \end{pmatrix}$$

Теорема. (a) Многочлен $\Delta_1(\lambda)$ инвариантен относительно поворотов.

(b) Если ранг матрицы D равен q, то $n-q$ младших коэффициентов многочлена $\Delta_1(\lambda)$ равны нулю: $K_{q+1} = K_{q+2} = ... = K_n = 0$.

(c) Коэффициент K_q инвариантен при переносах.

В заключении мы выразим коэффициенты канонических уравнений поверхности через инварианты.

Рассмотрим случай $q = r$, т.е. центральных поверхностей. В этом случае каноническое и следовательно каноническое уравнение центральной поверхности имеет вид

$$\lambda_1\tau_1^2 + \lambda_2\tau_2^2 + ... + \lambda_r\tau_r^2 + \frac{K_r}{\lambda_1...\lambda_r} = 0$$

Рассмотрим случай $q = r+1$, т.е. параболических поверхностей. В этом случае каноническое и каноническое уравнение параболической поверхности:

$$\lambda_1x_1^2 + \lambda_2x_2^2 + ... + \lambda_rx_r^2 + 2Mx_{r+1} = 0.$$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Винберг Э. Б., Попов В. Л., “Теория инвариантов”, Алгебраическая геометрия – 4, Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. Фундам. направления, 55, ВИНИТИ, М., 1989, 137–309

2. Волков Д. Ю. Метрические инварианты поверхностей второго порядка // «Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования»,32 -40 РГПУ , СПб, 2009 г

3. Гуревич Г. Б. Основы теории алгебраических инвариантов .- М.:Гостехиздат. 1948

4. Делоне Б.Н., Райков Д.А. Аналитическая геометрия,т. 1,2 М.-Л., Гостехиздат., 1948.

5. Моденов П.С.Аналитическая геометрия. - М.: Изд.-во Московского университета, 1969.

6. Розенфельд Б.А. Многомерные пространства,М., Наука,1966.

7. Певзнер С.Л. Инварианты и канонические уравнения гиперповерхности второго порядка в n -мерном пространстве PublicationDe L'INstitut Mathemetique Nouvelle Serie,t. 55(69),75-88,1994.

8. Patrikalakis N. M., Maekawa T. Shape interrogation for computer aided design and manufacturing. – Springer , 2009..

9. Шилов Г.Е.Введение в теорию линейных пространств , М., Гостехиздат., 1956.

10. Casas-Alvero E. Analytic projective geometry. – 2014. Analytic projective geometry. EMS Textbooks in Mathematics. European Mathematical Society (EMS), Zürich, 2014. xvi+620 pp.

11. Olver, Peter J.(1-MN-SM) Classical invariant theory. (English summary) London Mathematical Society Student Texts, 44. Cambridge University Press, Cambridge, 1999. xxii+280 pp. ISBN: 0-521-55821-2

12. Schreier, Otto; Sperner, Emanuel Projective geometry of n dimensions. Vol. 2 of "Introduction to modern algebra and matrix theory” Chelsea Publishing Co., New York 1961 208 pp.

УДК 519.147

Укладки ограниченных плоских областей некоторыми семействами эллипсов

В. В. Волчков (Украина, г. Донецк)
Донецкий национальный университет
e-mail: valeriyvolchkov@gmail.com
Вит. В. Волчков (Украина, г. Донецк)
Донецкий национальный университет
e-mail: volna936@gmail.com

Packings of bounded plane domains by some families of ellipses

V. V. Volchkov (Ukraine, Donetsk)
Donetsk National University
e-mail: valeriyvolchkov@gmail.com
Vit. V. Volchkov (Ukraine, Donetsk)
Donetsk National University
e-mail: volna936@gmail.com

В работе получены нетривиальные оценки плотности укладки ограниченной плоской области семействами эллипсов, определяемые ограничениями на длины их полуосей. Доказательство основано на построении ненулевых функций с нулевыми интегралами по всем эллипсам из указанных семейств.

Во многих задачах раскроя, контейнеризации, кодирования и геометрической теории чисел возникает проблема оценки сверху для величины плотности укладок ограниченных множеств. Укладкой области Ω в вещественном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ называется набор $\mathcal{A}$ компактных подмножеств $\{A_i\}$ в $\mathbb{R}^n$, удовлетворяющий следующим условиям: 1) множества A_i и A_j при $i \neq j$ не имеют общих внутренних точек; 2) $A_i \subset \Omega$ при всех i. Плотность укладки $\mathcal{A}$ определяется формулой

$$\rho(\mathcal{A}, \Omega) = \mu\big(\bigcup_i A_i\big)/\mu(\Omega),$$

где через $\mu(E)$ здесь и далее обозначается n-мерная мера Лебега множества $E \subset \mathbb{R}^n$. Для приложений большой интерес представляет случай, когда все множества A_i являются сдвигами одного фиксированного множества A (см., например, [1] и библиографию к этой работе). В этом случае при $\mu(A) > 0$ имеет место оценка

$$\rho(\mathcal{A}, \Omega) \leqslant \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)} \left[\frac{\mu(\Omega)}{\mu(A)}\right], \tag{1}$$

где квадратные скобки обозначают целую часть находящегося в них числа. Это неравенство получается из очевидного сравнения лебеговских мер объединения $\bigcup_i A_i$ и множества Ω с учетом того, что $\mu(A_i) = \mu(A)$ при любом i. Оценка (1) называется тривиальной. В случае, когда A — шар, задача о плотнейшей возможной укладке является частью восемнадцатой проблемы Гильберта. Имеется много связей подобных задач с теорией чисел, особенно с квадратичными формами и геометрий чисел. Отметим также приложения к задаче кодирования в канале связи — к проектированию систем передачи и хранения информации, т.е. к созданию кодов для канала связи с ограниченной полосой частот при наличии белого гауссовского шума. Теоретические исследования информационных возможностей таких каналов требуют

знания параметров наилучших укладок шаров в $\mathbb{R}^n$ при больших n. Имеются и другие важные приложения: теория поля и суперструны в физике, кристаллы и квазикристаллы в химии.

Некоторые способы получения нетривиальных верхних оценок для величины $\rho(\mathcal{A},\Omega)$ содержатся в работах [2], [3]–[5]. В частности, в работах Б.Д. Котляра [3], [4] для этого использовались функции, имеющие нулевые интегралы по всем множествам из укладки $\mathcal{A}$. Для более общих случаев (например, когда $\mathcal{A}$ содержит не только сдвиги множества A, но и все множества, конгруэнтные A) при построении таких функций возникают большие трудности. По этому поводу имеется многочисленная литература, связанная с известной проблемой Помпейю, не решенной в полном объеме до настоящего времени (см. [2], [5]–[7] и библиографию в этих работах). Более того, известно, что для многих A таких ненулевых функций не существует, если размеры Ω достаточно велики по сравнению с A (см. [5]–[7]). Поэтому до настоящего времени методы, использованные в работах Б.Д. Котляра, были неприменимы для оценки плотности широкого класса укладок $\mathcal{A}$.

В данной работе найден способ построения ненулевых функций с нулевыми интегралами по широкому классу эллипсов (не обязательно конгруэнтных), содержащихся в областях $\Omega \subset B_R$ подходящего размера (здесь и далее B_R — открытый круг в $\mathbb{R}^2$ радиуса R с центром в нуле). В результате получены нетривиальные верхние оценки для плотности укладок множества Ω соответствующими эллипсами. Основным результатом работы является следующая теорема.

Теорема 1. *Для любого $R>0$ существует ненулевая радиальная функция $f \in C^\infty(\overline{B}_R)$, имеющая нулевой интеграл по любому эллипсу с полуосями $a_1 \in [5R/6, R)$ и $a_2 \in (0, R/24]$, лежащему в круге B_R. Если $\mathcal{A}$ — укладка области $\Omega \subset B_R$ такими эллипсами, то для ее плотности имеет место оценка*

$$\rho(\mathcal{A},\Omega) \leqslant 1 - \frac{1}{\mu(\Omega)} \sup_{q\geq 1} \left| \int_\Omega f(x)dx \right|^q \|f\|^{-q}_{L^p(\Omega)}, \tag{2}$$

где, как обычно, $p^{-1}+q^{-1}=1$.

В заключение отметим, что оценка (2) является точной, и равенство в ней достигается, например, для областей Ω, которые являются объединением непересекающихся эллипсов из семейства $\mathcal{A}$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Конвей Дж., Слоэн Н. Упаковки шаров, решетки и группы: в 2-х т. — М.: Мир, 1990. 425 с.

2. Volchkov V. V. Integral Geometry and Convolution Equations. — Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2003. 454 p.

3. Kotlyar B. D. Packing of parallelotopes and some another sets // Sibirsk. Mat. Zh. 1984. V. 25, № 2. P. 222-225.

4. Kotlyar B. D. Densities of packings of bounded sets // Soobsheniya A. N. Gruz. SSR. 1987. V. 126, № 3. P. 469-672.

5. Volchkov V. V., Volchkov Vit. V. Harmonic Analysis of Mean Periodic Functions on Symmetric Spaces and the Heisenberg Group. — London: Springer-Verlag, 2009. 671 p.

6. Volchkov V. V., Volchkov Vit. V. Offbeat Integral Geometry on Symmetric Spaces. — Basel: Birkhäuser, 2013. 592 p.

7. Волчков В. В., Волчков Вит. В. Уравнения свертки на многомерных областях и редуцированной группе Гейзенберга // Матем. сб. 2008. Том 199, № 8. С. 29-60.

УДК 511

Деформированные шары Чебышёва, их критические определители и решётки, диофантовы приближения и упаковки

Н. М. Глазунов (Украина, г. Киев)
Институт кибернетики им. В. М. Глушкова НАНУ
e-mail: glanm@yahoo.com

Deformed Chebyshev balls, their critical determinants and lattices, Diophantine approximations and packings

N. M. Glazunov (Ukraine, г. Kiev)
V. M. Glushkov Institute of Cybernetics NASU
e-mail: glanm@yahoo.com

Строятся деформации двумерной метрики Чебышева. При $n = 2$ многообразие модулей допустимых решеток деформированных отрытых шаров Чебышева является вещественным многообразием, левая граница которого (при достаточно большом $p > 1$) доставляет значения критических определителей таких шаров Чебышева. Вычисляются соответствующие критические решетки. Значения критических определителей применяются для исследования классов диофантовых неравенств. Рассматриваются задачи упаковки деформированных шаров Чебышева. на плоскости и в соответствующие деформированные шары Чебышева большего размера.

Работы и результаты П.Л. Чебышева принадлежат золотому фонду мировой науки. Фундаментальные исследования П.Л. Чебышева распределения простых чисел, диофантовых приближений, задач минимизации [1] были продолжены его учениками и последователями. В частности, самим П.Л. Чебышевым, его учеником Е.И. Золотаревым, Г. Минковским было положено начало нахождению аналитических выражений, решающих соответствующие задачи минимизации. Метрика Чебышева определяется в [2] на вещественной плоскости $\mathbb{R}^2$ как

$$\|x, y\|_\infty = \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\}.$$

и обозначается l_∞. Эта метрика является предельным случаем метрики

$$(|x|^p + |y|^p)^{\frac{1}{p}},\ p > 1, \tag{1}$$

при вещественном p, стремящемся к бесконечности, и продолжается на n– мерные ($n > 2, n$ – натуральное) векторы.

1. Деформированные шары Чебышева

Определение 1. *Метрика (1) определяет центрально-симметричную выпуклую область $D_p(R)$ вида $(|x|^p + |y|^p)^{\frac{1}{p}} < R,\ R > 0$ в плоскости $\mathbb{R}^2$, которую называют открытым p– шаром радиуса R, а все множество таких шаров – открытыми деформированными шарами.*

Далее рассматривается случай $D_p(1) = D_p$, и здесь

$$D_p : |x|^p + |y|^p < 1, p > 1. \tag{2}$$

Пусть $\mathbb{E}^n$ есть n–мерное евклидово пространство над полем вещественных чисел

Определение 2. *Деформированным n–мерным шаром Чебышева называем шар в метрике $\{|x_1|^p + \cdots + |x_n|^p\}^{1/p} \leqslant R, R > 0, n \geqslant 1$ для достаточно большого p.*

2. Критические определители и решетки

Пусть Ψ – подмножество в $\mathbf{E}^n$, Λ есть n – мерная точечная решетка с базисом $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$, (решетка) вида $\Lambda = c_1\mathbf{a}_1 + \cdots + c_n\mathbf{a}_n$ где $c_1, \ldots, c_n$ независимо друг от друга пробегают множество целых чисел. Величину

$$d(\Lambda) = |det(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n)| > 0$$

называют определителем решетки Λ. Здесь $\det(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n)$ есть определитель матрицы, построенной на векторах $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$. Говорят, что n – мерная решетка Λ *допустима* для множества Ψ, или Ψ - допустима, если пересечение Ψ и Λ пусто или состоит из нулевого вектора. Множество, имеющее хотя бы одну допустимую решетку, называют *множеством конечного типа*. Пусть Ψ есть множество конечного типа. Точная нижняя граница определителей всех решеток Λ, допустимых для множества Ψ:

$$\Delta(\Psi) = \inf d(\Lambda) \tag{3}$$

где решетка Λ есть Ψ-допустима, называют *критическим определителем* $\Delta(\Psi)$ *множества* Ψ.

По поводу определений и более подробного описания введенных и используемых ниже понятий см. [3] и ссылки в ней. Введем аналитическую параметризацию допустимых решеток для областей D_p вида (2), которую называем параметризацией Кона-Малышева. Неявно вариант такой параметризации использовал Кон (H. Cohn, см. ссылку в [3]). Положим $\tan\varphi = \tau$, $\tan\psi = -\sigma$. Тогда для точек $\mathbf{a}_1 = (x_1, y_1), \mathbf{a}_2 = (x_2, y_2)$, лежащих на границе области (2), имеют место равенства $\frac{y_1}{x_1} = \tan\varphi = \tau, y_1 = \tau x_1; \frac{y_2}{x_2} = tan\psi = -\sigma, |y_2| = \sigma|x_2|$.

Лемма 1. *Точки $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ образуют базис решетки $\Lambda = \Lambda[\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2]$. Точки $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2, -\mathbf{a}_1, -\mathbf{a}_2, -(\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2)$ лежат на границе области D_p и образуют правильный шестиугольник. Задача (3) нахождения критического определителя сводится к задаче нахождения минимума (инфимум здесь достигается) величины $|det(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)|$ при условиях: 1) $\mathbf{a}_1$ принадлежит границе D_p; 2) $\mathbf{a}_2$ принадлежит границе D_p; 3) $\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2$ принадлежит границе D_p.*

Лемма 2. *Критический определитель области D_p есть решение задачи на условный минимум вида*

$$\Delta(D_p) = \ min(x_1y_2 - x_2y_1),$$
$$x_1{}^p + y_1{}^p = 1, (-x_2)^p + y_2{}^p = 1, (x_1 + x_2)^p + (y_1 + y_2)^p = 1. \tag{4}$$

В выше введенных обозначениях из условий Леммы 1 получаем

Замечание 1.

$$|x_1|^p + |\tau x_1|^p = 1, x_1 = (1 + \tau^p)^{\frac{-1}{p}}, y_1 = \tau(1 + \tau^p)^{\frac{-1}{p}},$$
$$|x_2|^p + |\sigma x_2|^p = 1, x_2 = -(1 + \sigma^p)^{\frac{-1}{p}}, y_2 = \sigma(1 + \sigma^p)^{\frac{-1}{p}}. \tag{5}$$

В терминах переменных Δ, σ, τ, p имеем

Предложение 1. *(H. Cohn). Множество D_p – допустимых решеток, имеющих по 3 пары точек на границе области D_p, параметризуется точками многообразия*

$$\Delta - (\sigma + \tau)(1 + \tau^p)^{\frac{-1}{p}}(1 + \sigma^p)^{\frac{-1}{p}} = 0 \tag{6}$$

С использованием симметрии области D_p относительно координатных осей минимум ищется при движении точки $\mathbf{a}_1$ от точки $\mathbf{a}_1^0 = (1, 0)$ до точки $\mathbf{a}_1^1$, которая взаимно однозначно отвечает точке $\mathbf{a}_2^1 = (-(1/2)^{\frac{1}{p}}, (1/2)^{\frac{1}{p}})$, которая лежит на биссектрисе второго квадранта, а точке $\mathbf{a}_1^0$ отвечает точка $\mathbf{a}_2^0$.

Предложение 2. *(H. Cohn, A.B. Малышев). Критический определитель области D_p есть решение задачи минимизации функции вида $\Delta(\sigma, p) = (\sigma + \tau)(1 + \tau^p)^{\frac{-1}{p}}(1 + \sigma^p)^{\frac{-1}{p}}$ на интервале $1 \leqslant \sigma \leqslant \sigma_p = (2^p - 1)^{\frac{1}{p}}$. Уравнение для вычисления $\tau = \tau(\sigma, p)$ приведено в [3].*

Предложение 3. *Для $p \geqslant 2,58$ критический определитель $\Delta(D_p) = \Delta(1, p) = 4^{\frac{-1}{p}} \frac{1+\tau_p}{1-\tau_p}$, где τ_p вычисляется из уравнения $1 + {\tau_p}^p = 2(1 - \tau_p)^p$, $0 < \tau_p < 1$.*

3. Диофантовы приближения

Рассмотрим диофантово неравенство (диофантово приближение)

$$|\alpha x + \beta y|^p + |\gamma x + \delta y|^p < c, \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0, \tag{7}$$

где $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ - вещественные.

Предложение 4. *В условиях предложения 3 диофантово неравенство (7) разрешимо в целых числах при*

$$c \geqslant \left(4^{\frac{-1}{p}} \frac{1 + \tau_p}{1 - \tau_p}\right)^{\frac{-p}{2}} |det(\alpha\delta - \beta\gamma)|^{\frac{p}{2}}$$

4. Упаковки

Напомним определение упаковки (укладки), как оно появилось и применялось в работах Г. Минковского, Б.Н. Делоне, Ф. Тота, К. Роджерса, и других, применительно к деформированным шарам Чебышева.

Определение 3. *Пусть S есть деформированный шар Чебышева, $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots$ конечная или бесконечная последовательность векторов. Будем называть систему, состоящую из трансляций $S + \mathbf{a}_i$, $i = 1, 2, \ldots$ множества S на векторы последовательности $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots$ упаковкой S, если множества $S + \mathbf{a}_i$ попарно не пересекаются.*

Если упаковка реализуется в $\mathbb{E}^n$ и вектора $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots,$ принадлежат $n-$мерной решетке, то имеем решетчатую упаковку.

Задача 5. *Мы рассматриваем избранные задачи упаковки деформированных шаров Чебышева на плоскости, и в соответствующие деформированные шары Чебышева большего размера.*

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Чебышев П. Л. Избранные труды. — М.: Изд-во Академии Наук СССР, 1955. 926 с.

2. Деза Е., Деза М. М. Глава 19. Расстояния на действительной и цифровой плоскостях. 19.1. Метрики на действительной плоскости // Энциклопедический словарь расстояний. — М.: Наука, 2008. С. 276.

3. Glazunov N. M. On A.V. Malyshev's approach to Minkowski's conjecture concerning the critical determinant of the region $|x|^p+|y|^p < 1$ for $p > 1$ // Чебышевский сборник. 2016. Том 17, № 4. С. 185-193.

УДК 511.32

Моделирование оптимальных сетей с помощью шарнирных механизмов

М. Ю. Житная (Россия, г. Москва)
Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
e-mail: g-ferra@mail.ru

Modeling of optimal networks by means of linkages

M. Y. Zhitnaya (Russia, Moscow)
Lomonosov Moscow State University
e-mail: g-ferra@mail.ru

Работа посвящена построению сетей с заданными углами при вершинах в пространстве $\mathbb{R}^d$, $d \geqslant 2$, с помощью шарнирных механизмов. Шарнирные механизмы — конструкции, которые можно встретить как элемент многих предметов, которые нас окружают. Вот несколько простых примеров: настольные лампы, дверные петли, суставы человека, детали автомобилей. Механизмы, которые будут использованы в данной работе можно представить как идеализированную математическую модель стержней, некоторые пары которых шарнирно скреплены друг с другом, то есть имеют общую точку, вокруг которой могут свободно вращаться. С помощью описанных механизмов будут смоделированы сети с заданными углами при вершинах. Для этого во множестве шарниров механизма выделено подмножество W такое, что для любого положения механизма в пространстве этот набор шарниров будет лежать в вершинах сети с заданными углами и топологией. Одно из приложений этой деятельности — моделирование минимальных параметрических сетей на плоскости, про которые известно, какими должны быть углы при вершинах.

Формализуем понятие шарнирных механизмов. Рассмотрим простой конечный граф $G = (V, E)$, положительную функцию $\ell : E \to \mathbb{R}$ и некоторое отображение $\psi : W \to \mathbb{R}^d$, где W — некоторое подмножество множества вершин V. Тройку $L = (G, \ell, \psi) = \big((V, E), \ell, \psi\big)$ будем называть *шарнирным механизмом в пространстве* $\mathbb{R}^d$. Вершины графа G будем называть *шарнирами*, элементы множества W — *граничными* или *неподвижными шарнирами*, а элементы $V \setminus W$ — *внутренними* или *подвижными шарнирами*. Также множество W неподвижных шарниров будем обозначать через ∂G и называть *границей шарнирного механизма* L, а отображение ψ — граничным отображением. Будем говорить, что *граничный шарнир* w

закреплён в точке $\psi(w)$. Рёбра графа G будем называть *стержнями*, а значение $\ell(e)$, $e \in E$ — *длиной стержня* e.

Рассмотрим шарнирный механизм $L = \big((V,E),\ell,\psi\big)$ и отображение $C : V \to \mathbb{R}^d$. Будем говорить, что C *согласовано с* ψ, если $C|_W = \psi$; отображение C *согласовано с* ℓ, если для любого ребра $uv \in E$ верно, что $|C(u)C(v)| = \ell(uv)$. Отображение C, согласованное с ℓ и ψ, будем называть *конфигурацией*, или *реализацией*, или *положением шарнирного механизма* L *в пространстве* $\mathbb{R}^d$, при этом, будем говорить, что $C(v)$ — *положение шарнира* v. Множество всех положений C шарнирного механизма L образует *конфигурационное пространство* $\mathcal{C}_L$ *механизма* L. Ограничение $\mathcal{C}_L|_v$, где $v \in V$ — шарнир механизма L, назовём *конфигурационным пространством шарнира* v.

Формализуем понятие сети. Рассмотрим граф $G = (V,E)$. Отображение $\Gamma : V \to \mathbb{R}^d$ назовём *сетью типа* G в $\mathbb{R}^d$. Точки $\Gamma(v_i)$, $v_i \in V$ будем называть *вершинами* сети, а $\Gamma(e)$, $e \in E$ — *рёбрами* сети. Любые два смежных ребра сети задают плоский угол, на сторонах которого они лежат, величину этого угла будем называть *углом между рёбрами сети*. Пусть для некоторого множества $E' \subset E^2$ неупорядоченных пар смежных рёбер определена симметричная функция $\overline{\omega} : E' \to \mathbb{R}^+$. Если для любой пары $(e,e') \in E'$ угол между соответствующими рёбрами сети равен значению $\overline{\omega}(e,e')$, то будем говорить, что Γ — *сеть со строго заданной угловой структурой* $\overline{\omega}$, которая *имеет тип* (G,ω). Множество всех сетей типа $(G,\overline{\omega})$ обозначим через $[G,\overline{\omega}]$.

Ослабим требование равенства углов только значениям функции $\overline{\omega}$ и рассмотрим сети, у которых для любой пары $(e,e') \in E'$ угол между соответствующими рёбрами равен значению $\overline{\omega}(e,e')$ или $\pi - \overline{\omega}(e,e')$. Будем называть такую сеть Γ *сетью с релаксированной угловой структурой* $\widetilde{\omega}$ и говорить, что она *имеет тип* $(G,\widetilde{\omega})$. Множество всех сетей типа $(G,\widetilde{\omega})$ обозначим через $[G,\widetilde{\omega}]$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Иванов А. О., Тужилин А. А. *Теория экстремальных сетей.*— Москва—Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003.

2. Melzak Z. A. On the problem of Steiner, Canad. Math. Bull., 1960.

3. Kempe A.B. *How to draw a straight line: a lecture on linkages.* — Macmillan & Co., 1877.

4. Ошемков А.А., Попеленский Ф.Ю., Тужилин А.А., Фоменко А.Т., Шафаревич А.И. *Курс наглядной геометрии и топологии.* — URSS, Леланд Москва, 2014.

УДК 514.8,531.1,531.8

О геометрическом определении шарнирного механизма, теореме Кемпе и перезрелой математике

М. Д. Ковалёв (Россия, г. Москва)
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
e-mail: mdkovalev@mtu-net.ru

On the geometric definition of hinge mechanisms, Kempe's theorem, and overripe mathematics

M. D. Kovalev (Russia, Moscow)
Lomonosov Moscow State University
e-mail: mdkovalev@mtu-net.ru

Геометрическое определение шарнирного механизма

Занимаясь шарнирными механизмами П.Л. Чебышев не ощущал потребности в формализации понятия механизма. Не ощущал её и А.Кемпе, описавший (1876) построение шарнирного механизма для черчения произвольной плоской алгебраической кривой [1]. Давид Гильберт в лекциях по наглядной геометрии так определял шарнирный механизм: "Плоским шарнирным механизмом называется всякая плоская система жестких стержней, частично соединенных между собой или скрепленных с неподвижными точками плоскости, вокруг которых они могут вращаться, так что вся система еще сохраняет подвижность в ее плоскости". Но является ли это математическим определением? Пользуясь этим определением, конечно, можно сказать является ли данная конструкция механизмом. Но можно ли на его основе отличить один механизм от другого? Например, на рисунке 1 изображён один механизм или два? Это не есть математическое определение в современном смысле. Математические определения шарнирного механизма появились лишь в конце прошлого века. Одно из них принадлежит автору (1994) [2, 3], другое было выдвинуто в работах [5, 6] (1998), посвящённых развитию результата Кемпе. Последнее определение настолько общо, что оно даже не различает допускающих непрерывное движение конструкций от неизгибаемых.

Изложу мою формализацию понятия плоского шарнирно-рычажного механизма. Исходным пунктом является то, что в механике чётко разделяются понятия механизма и фермы. Ферма это конструкция, которую нельзя деформировать. Механизм же можно непрерывно переводить из одного его положения в любое другое. На языке геометрии это звучит так: ферма неизгибаема, а конфигурационное пространство механизма связно. Считаем рассматриваемые плоские шарнирно-рычажные конструкции составленными из прямолинейных стержней (рычагов), несущих на концах шарниры. Шарниры могут быть двух видов: свободные и закреплённые в плоскости (стойке). Первые обозначены на рисунке кружочками, вторые — крестиками. Структуру конструкции задаём *шарнирной структурной схемой (ШСС)* — конечным абстрактным связным графом $G(V, E)$ без петель и кратных рёбер, вершины которого отвечают шарнирам, а рёбра — рычагам. Множество V вершин графа распадается на два подмножества: $V = V_1 \sqcup V_2$, где V_1,— отвечает свободным шарнирам, и V_2— отвечает закреплённым шарнирам. Граф $G(V, E)$ удовлетворяет условиям:

1. граф $G(V, E)$ и его подграф на множестве V_1 свободных вершин связны,
2. в $G(V, E)$ нет рёбер, соединяющих вершины из V_2 между собой.

Последнее условие означает, что излишне связывать рычагами закреплённые в стойке шарниры. Первое же условие накладываем для того, чтобы сосредоточиться на изучении одной индивидуальной конструкции. Если оно не выполнено, то конструкция распадается на несколько кинематически не связанных между собой частей, которые можно изучать по отдельности.

Отвлечённые математики в своих определениях [5, 6] не накладывают на граф $G(V, E)$ каких-либо ограничений, за исключением разве лишь отсутствия петель и конечности. В частности, они не требуют связности $G(V, E)$.

Чтобы формализовать принятое в теории механизмов понятие кинематической схемы нам придётся ввести несколько новых дополнительных понятий. Выберем в плоскости декартову прямоугольную систему координат Oxy. *Закрепленной шарнирной схемой (ЗШС)* назовем ШСС, каждой закрепленной вершине $v_i \in V_2$ которой сопоставлена точка $p_i = (x_i, y_i) \in R^2$, — положение закреплённого шарнира в плоскости. Пусть m — число свободных шарниров, r

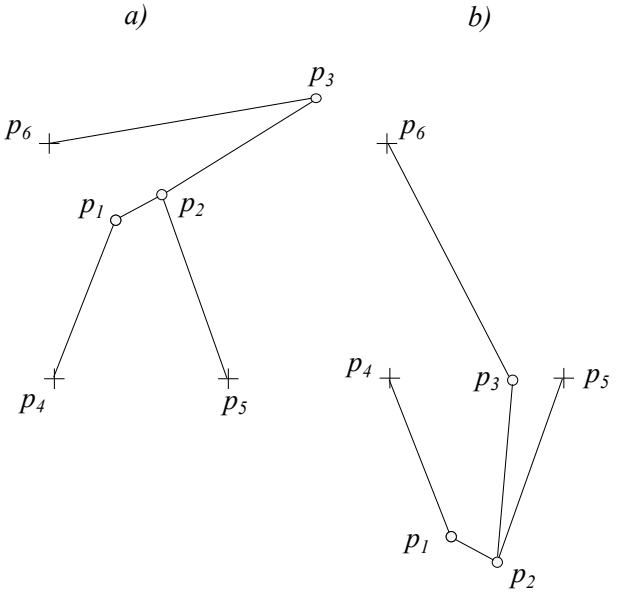


Рис. 1

— число всех рычагов. Бросим свободные шарниры в плоскость, это определит отображение: $F : R^{2m} \to \mathcal{R}^r$, задающееся формулами $d_{ij} = (p_i - p_j)^2, v_i v_j \in E$. Это отображение сопоставляет положениям свободных шарниров квадраты длин рычагов, и называется *рычажным*. Оно играет ключевую роль в геометрии шарнирных конструкций. Точки $\{d_{ij}\} = \mathbf{d} \in \mathcal{R}^r$ назовём *кинематическими шарнирными схемами (КШС). Шарнирником* мы называем точку $\mathbf{p} \in R^{2m}$. Ей отвечает либо шарнирная ферма, либо положение шарнирного механизма. Полный прообраз $F^{-1}(\mathbf{d})$ точки-КШС называем *конфигурационным пространством КШС* $\mathbf{d}$. При таком подходе каждой компоненте связности множества $F^{-1}(\mathbf{d})$ отвечает определённое *шарнирное устройство*. Если компонента связности одноточечна, — то это устройство представляет собой *шарнирную ферму*. В противном случае компонента связности есть множество положительной размерности — *конфигурационное пространство K шарнирного механизма*.

Одной КШС могут отвечать несколько шарнирных устройств как механизмов так и ферм. Но каждое из устройств непрерывно не переводится в другое. Чтобы это сделать необходимо разобрать устройство и пересобрать его по другому. В теории механизмов это явление называют различными сборками шарнирного механизма. На мой взгляд этот термин неудачен, поскольку после пересобирания может получиться и ферма. Приведём соответствующий пример. На рисунке 1 изображены два шарнирных механизма a) и b) с одной и той же кинематической схемой. Механизмы состоят из четырёхзвенника $p_4p_1p_2p_5$, к которому присоединена так называемая двуповодковая группа $p_6p_3p_2$. Если рычаг p_1p_2 достаточно короток, то четырёхзвенники, отличающиеся отражением относительно прямой p_4p_5, нельзя непрерывно перевести один в другой. В терминологии машиноведов речь идёт о двух сборках шарнирного механизма. Однако, уменьшая длины рычагов p_2p_3 и p_3p_6 можно добиться, чтобы сборка b) стала фермой.

Теорема Кемпе

После исследований Чебышева по приближённым прямилам, положившим начало изучению приближений функций на множествах, и открытия точного прямила, наиболее ярким достижением в теории шарнирных механизмов явилась работа 1876 года А.Кемпе [1]. Поскольку в ней не было сформулировано никакой теоремы, то обычно её результат формулировали так.

Теорема 1. *Всякий достаточно малый кусок произвольной плоской алгебраической кривой*

представляет собой множество положений шарнира плоского шарнирного механизма.

Недавно результат Кемпе получил развитие в работах [4, 5, 6]. А именно, были доказаны с применением современной алгебраической геометрии утверждения подобные теореме Кемпе, но относительно конфигурационного пространства механизмов в целом. Также в рассуждениях Кемпе были обнаружены неточности, и высказано мнение [5], что их нельзя исправить методами Кемпе. Я считаю однако, что это мнение обусловлено игнорированием кинематической природы задачи, и нетрадиционным пониманием конфигурационного пространства механизма как множества $F^{-1}(\mathbf{d})$. Решающую роль здесь играет то, как понимать результат Кемпе. Обычно приписывают Кемпе следующее кажущееся наиболее естественным утверждение. Пусть π — проекция пространства R^{2m} на плоскость положений шарнира p_j.

Теорема 2. *Для плоской алгебраической кривой A, и точки $P \in A$ найдутся замкнутый круг $\overline{U}$ с центром в P и КШС с конфигурационным пространством $K \subset R^{2m}$, что $\pi K \cap \overline{U} = A \cap \overline{U}$.*

Недостаточность аргументов Кемпе для доказательства этого утверждения состоит в том, что в точку P могут проектироваться далёкие от начального положения $\mathbf{p}$ точки конфигурационного пространства шарнирного механизма (Рис. 2). То есть, при большом движении механизм попадает в новое положение, в котором шарнир p_j опять оказывается в точке P. Подправляя построения Кемпе элементарными геометрическими средствами можно исключить эту возможность [7], и получить доказательство теоремы 2.

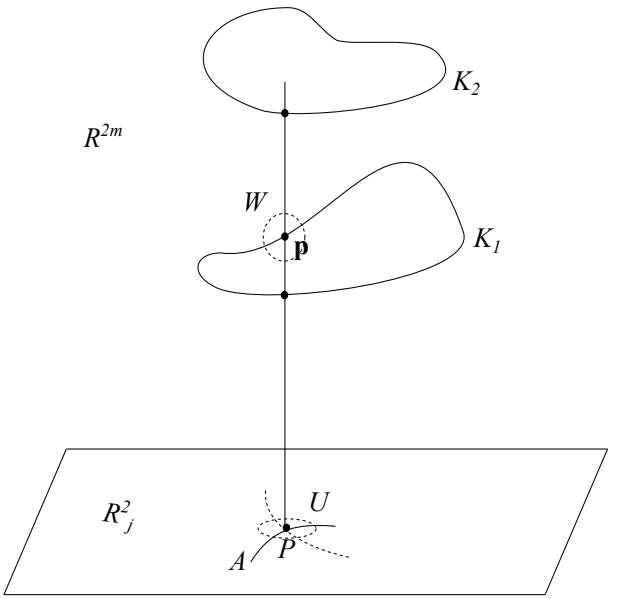


Рис. 2: На рисунке положению P шарнира p_j отвечают два положения шарнирного механизма K_1 и одно положение механизма K_2. Механизм K_1 непрерывно в механизм K_2 не переводится.

Отталкиваясь от кинематического смысла и используя нашу формализацию можно дать [3] следующую точную формулировку сделанного Кемпе, как теоремы "в малом".

Теорема 1' Кемпе. *Для плоской алгебраической кривой A, и точки $P \in A$ найдётся механизм с конфигурационным пространством $K \subset R^{2m}$, и такая круговая окрестность $U \subset R^2$ точки P, а также шаровая окрестность $W \subset R^{2m}$ точки $\mathbf{p} \in K$, $(\pi\mathbf{p} = P)$, что для их замыканий $\pi(K \cap \overline{W}) = A \cap \overline{U}$.*

Замечание о перезрелой математике

Абстрактно-алгебраический подход к теореме Кемпе кроме того, что несёт нечто новое, имеет ещё две стороны. С одной стороны, трёхстраничные рассуждения Кемпе преобразуются в пухлые неудобочитаемые статьи. С другой стороны, появляется нетрадиционное определение

шарнирного механизма, бессмысленное для задачи, рассматривавшейся Кемпе. Здесь напрашивается сравнение с растительной природой. Работы Чебышева и Кемпе подобны созревающему плоду, таящему в себе энергию роста и развития. А заформализованные современные статьи часто напоминают перезрелый плод на пороге распада.

Черты перезрелой математики:

1. Источник задач и вдохновения находится исключительно внутри математики.

2. Стремление к общности, воспринимаемое как самоцель.

3. Математика начинает выступать не как орудие исследования природы, а как некий божок, призванный предписывать ей законы.

4. Написание текста без учёта законов его восприятия. Единственный ориентир — скрупулёзность, определённость понятий. Иной раз мнимая. Бросается в глаза неудобоваримость и заформализованность текста. Дж. Литлвуд называл такой стиль — вдохновлённым дьяволом.

5. Отсутствие стремления донести результаты своей деятельности до непосвящённых в секреты своей математической кухни. Некоторые пишут намеренно непонятно для посторонних. Даже если результаты могут иметь прикладной смысл, они изложены так, что необходим их перевод на более простой язык.

6. Снобизм. Желание считать недозрелую математику недоматематикой или даже нематематикой.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Kempe A. B. On a general method of describing plane curves of the n^{th} degree by Linkwork // Proc. of the London Math. Soc. 1876. V. 7, № 102. p. 213-216.

2. Ковалёв М. Д. Геометрическая теория шарнирных устройств // Известия РАН Серия математическая, 1994, т.58, №1, с.45–70.

3. Ковалёв М. Д. Геометрические вопросы кинематики и статики. М.: Ленанд, URSS, 2019. 256 с.

4. D. Jordan and M. Steiner Configuration Spaces of Mechanical Linkages, // Discrete Comput. Geom. 22 (1999) p. 297– 315.

5. Kapovich M., Millson J. J.Universality theorems for configurations of planar linkages // Topology, v.41 (2002), №6, p. 1051 – 1107.

6. King Henry C.Planar Linkages and Algebraic Sets // arXiv.org:math/9807023 Preprint July 4, 1998, 22 p.

7. Abbott T. Generalizations of Kempe's Universality Theorem // MS Thesis, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, MA, 2008 URL: http://web.mit.edu/tabbott/www/papers/mthesis.pdf

УДК 514.174.5

О числе изоэдральных разбиений плоскости на полимино

А. А. Мокрова (Россия, г. Владимир)
Владимирский государственный университет имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых
e-mail:albina.mokrova@yandex.ru
А. В. Шутов (Россия, г. Владимир)
Владимирский государственный университет имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых
e-mail:a1981@mail.ru

On the number of isohedral tilings of the plane into polyominoes

A. A. Mokrova (Russia, Vladimir)
Vladimir State University named after Alexander and Nicholay Stoletovs
e-mail:albina.mokrova@yandex.ru
A. V. Shutov (Russia, Vladimir)
Vladimir State University named after Alexander and Nicholay Stoletovs
e-mail:a1981@mail.ru

В работе рассматривается задача о числе изоэдральных разбиений плоскости на полимино заданной площади. В работах [1] — [3] Шутова А.В., Коломейкиной Е.В. найдены оценки числа решетчатых разбиений и $p2$-разбиений плоскости на полимино заданной площади. На основе этих результатов авторами получены верхние оценки для числа изоэдральных разбиений на полимино заданной площади.

Полимино представляет собой связную фигуру на плоскости, составленную из конечного числа единичных квадратов, примыкающих друг к другу по сторонам. При этом границу полимино образуют несамопересекающиеся ломаные на квадратной решетке (*self-avoding walks*). Разбиение плоскости, состоящее из конгруэнтных копий фигуры, называется правильным или изоэдральным, при условии, что любую копию можно перевести в любую другую преобразованим симметрии, переводящим все разбиение в себя.

В работе [4] описаны семь типов полимино, которые дают изоэдральные разбиения плоскости. В той же работе получены критерии, при выполнении которых разбиение на полимино будет изоэдральным. Они определяются формой границы полимино, которые в свою очередь задаются словами. Сформулируем критерии с точки зрения геометрии.

Далее будем использовать обозначения X для несамопересекающейся ломаной, задающей часть границы полимино, X' — ломаной, связанной с исходной X параллельным переносом, X_c — центрально-симметричной ломаной, X_{90} — ломаной, которую можно разделить на две половины, каждая из которых эквивалентна другой повернутой на 90°, $f_\Theta(X)$ — отображение переводящее ломаную X в отраженную относительно горизонтальной оси, $f_\Phi(X)$ — отображение переводящее ломаную X в отраженную относительно вертикальной оси.

Теорема 1. *Полимино порождает изоэдральное разбиение тогда и только тогда, когда выполнено одно из семи условий.*
1. Когда его границу можно разбить на шесть частей A, B, C, A', B', C'. Причем, разбиений границы полимино на шесть частей может быть несколько, две части из шести могут быть пустыми.

2. Когда его границу можно разбить на шесть частей A, B_c, A', C_c, D_c, E_c.
3. Когда его границу можно разбить на три части A_{90}, B_{90}, C_c.
4. Когда его границу можно разбить на шесть частей A_c, B, $f_\Theta(B)$, C, $f_\Phi(C)$.
5. Когда его границу можно разбить на шесть частей A, B, C, A', $f_\Theta(B)$, $f_\Phi(C)$.
6. Когда его границу можно разбить на шесть частей A, B_c, C_c, A', D, $f_\Phi(D)$.
7. Когда его границу можно разбить на шесть частей A_c, B, C_c, D, $f_\Theta(B)$, $f_\Phi(D)$.
Причем разным разбиениям границы полимино соответствуют различные изоэдральные разбиения плоскости на полимино.

Будем называть полимино, граница, которого удовлетворяет i-тому условию, полимино i-того типа, $i = 1, 2, \ldots, 7$. Отметим, что полимино первого типа в частности дает решетчатые разбиения, а полимино второго типа — $p2$-разбиения.

Рассмотрим полимино первого типа. Пример разбиения границы такого полимино на части представлен на рисунке 1. Концы ломаных, составляющих границу полимино, здесь для удобства отмечены точками.

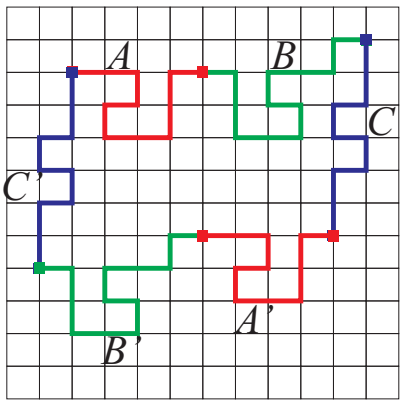


Рис. 1: Пример разбиения границы полимино первого типа.

Пусть $t_1(p)$ — число изоэдральных разбиений плоскости на полимино типа 1 с полупериметром p и

$$p = l_A + l_B + l_C, \tag{1}$$

где A, B, C — несамопересекающиеся ломаные. Тогда $t_1(p)$ не превышает числа троек несамопересекающихся ломанных A, B, C, с условием (1).

Пусть $m(l)$ — число несамопересекающихся ломанных длины l на квадратной решетке (*self-avoding walks*). Существует константа связности квадратной решетки $\omega : \lim_{l\to\infty} \sqrt[l]{m(l)} = \omega \leqslant 2,7$ [5]. Для любого $\varepsilon > 0$ существует $C(\varepsilon) : m(l) \leqslant C(\varepsilon)(\omega+\varepsilon)^l$. Тогда

$$\begin{aligned} t_1(p) &\leqslant \sum_{l_A+l_B+l_C=p} m(l_A)m(l_B)m(l_C) \leqslant \\ &\leqslant \sum_{l_A+l_B+l_C=p} C_1(\varepsilon)(\omega+\varepsilon)^{l_A}(\omega+\varepsilon)^{l_B}(\omega+\varepsilon)^{l_C} = \\ &= C_1(\varepsilon)(\omega+\varepsilon)^p \sum_{l_A+l_B+l_C=p} 1, \end{aligned} \tag{2}$$

где $\sum_{l_A+l_B+l_C=p} 1$ — число решений уравнения (1), оно не превышает $C_2(\varepsilon)p^2$, тогда из (2) имеем

$$t_1(p) \leqslant C_3(\varepsilon)(\omega+\varepsilon)^p p^2. \tag{3}$$

Аналогичные оценки получены для остальных шести случаев. Обобщим их в теорему.

Теорема 2. *Пусть $t_i(p)$ — число изоэдральных разбиений плоскости на полимино типа i с полупериметром p, $i = 1, 2, \ldots, 7$. Если граница полимино удовлетворяет одному из условий теоремы 1, то полимино порождает изоэдральное разбиение плоскости и верхняя оценка числа таких разбиений для каждого типа полимино определяется одним из неравенств*

$$\begin{cases} t_i(p) \leqslant C_4(\varepsilon)(\omega+\varepsilon)^p p^2, \text{ при } i = 1, 3, 4, 5; \\ t_i(p) \leqslant C_5(\varepsilon)(\omega+\varepsilon)^p p^4, \text{ при } i = 2; \\ t_i(p) \leqslant C_6(\varepsilon)(\omega+\varepsilon)^p p^3, \text{ при } i = 6, 7. \end{cases} \tag{4}$$

Таким образом число изоэдральных разбиений плоскости на полимино $t(p)$ с полупериметром p не превосходит $C_7(\varepsilon)(\omega+\varepsilon)^p p^4$.

Перейдем к площади. Доказана следующая теорема.

Теорема 3. *Пусть $T_i(n)$ — число изоэдральных разбиений плоскости на полимино типа i площади n, $i = 1, 2, \ldots, 7$. Верхняя оценка числа таких разбиений для каждого типа полимино определяется одним из неравенств*

$$\begin{cases} T_i(n) \leqslant C_8(\varepsilon)(\omega+\varepsilon)^n n^2, \text{ при } i = 1, 3, 4, 5; \\ T_i(n) \leqslant C_9(\varepsilon)(\omega+\varepsilon)^n n^4, \text{ при } i = 2; \\ T_i(n) \leqslant C_{10}(\varepsilon)(\omega+\varepsilon)^n n^3, \text{ при } i = 6, 7. \end{cases} \tag{5}$$

Число изоэдральных разбиений плоскости на полимино $T(n)$ площади n не превосходит $C_{11}(\varepsilon)(\omega+\varepsilon)^n n^4$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Шутов А.В, Коломейкина Е.В., Оценка числа решетчатых разбиений плоскости на полимино заданной площади // Моделирование и анализ информационных систем. 2013. Т. 20. № 5. С. 148-157.

2. Шутов А.В., Коломейкина Е.В. Оценка числа решетчатых разбиений плоскости на центрально-симметричные полимино заданной площади // Моделирование и анализ информационных систем. 2015. Т. 22. № 2. С. 295-303.

3. Шутов А.В., Коломейкина Е.В. Оценка числа p2-разбиений плоскости на полимино заданной площади // Чебышевский сборник. 2016. Т. 17. № 3. С. 204-214.

4. Langerman S., Winslow A. A Quasilinear-Time Algorithm for Tiling the Plane Isohedrally with a Polyomino // 32nd International Symposium on Computational Geometry (SoCG 2016), volume 51 of Leibniz International Proceedings in Informatics (LIPIcs) — Dagstuhl, Germany, 2016. P. 50:1-50:15

5. Bauerschmidt R., Duminil-Copin H., Goodman J., Slade G. Lectures on selfavoiding walks // Probability and Statistical Physics in Two and More Dimensions. Clay Mathematics Proceedings.2010. № 15. P. 395-476.

УДК 514.112.3, 514.132, 514.133, 514.177

О классификации трехвершинников расширенной гиперболической плоскости по типу полярной оси

Л. Н. Ромакина (Россия, г. Саратов)
Саратовский государственный университет
e-mail: romakinaln@mail.ru

On the classification of trilaterals of an extended hyperbolic plane by polar axis type

L. N. Romakina (Russia, Saratov)
Saratov State University
e-mail: romakinaln@mail.ru

При построении тригонометрии гиперболической плоскости $\widehat{H}$ положительной кривизны, смежной по абсолюту с плоскостью Лобачевского Λ_2 в проективной модели Кэли – Клейна, были введены в рассмотрение полюсы и полярные оси трехвершинников [1]. Обобщая эти понятия, определим полюсы и полярные оси трехвершинников расширенной гиперболической плоскости H^2, состоящей из смежных по абсолютной овальной линии γ компонент Λ_2 и $\widehat{H}$.

Из множества W всех трехвершинников плоскости H^2 выделим подмножество W_0 всех трехвершинников, по крайней мере одна из сторон которых совпадает с полярой противоположной вершины относительно абсолюта. Дальнейшие рассуждения проведем для трехвершинников множества $W^* = W \setminus W_0$.

Точку пересечения стороны трехвершинника множества W^* с полярой противоположной вершины относительно абсолюта назовем *полярной точкой* данной стороны трехвершинника. Согласно теореме 5.3.1 из [1] полярные точки сторон трехвершинника плоскости $\widehat{H}$ лежат на одной прямой. Поскольку доказательство теоремы 5.3.1 проведено для любого трехвершинника плоскости H^2, сформулировать теорему в более общем виде можно следующим образом.

Теорема 1. *Полярные точки сторон трехвершинника плоскости H^2, каждая сторона которого отлична от абсолютной поляры противоположной вершины, коллинеарны.*

Прямую, содержащую полярные точки сторон трехвершинника плоскости H^2, назовем *полярной осью*, а ее полюс относительно абсолюта — *полюсом* данного трехвершинника.

Каждая прямая плоскости H^2 принадлежит одному из трех типов. *Гиперболические* (*эллиптические*) прямые пересекают абсолютную линию γ в двух вещественных (мнимо сопряженных) точках, *параболические* прямые касаются линии γ. Тип прямой плоскости H^2 инвариантен в преобразованиях фундаментальной группы G этой плоскости, состоящей из всех проективных автоморфизмов линии γ. Следовательно, по типу полярной оси можно провести классификацию трехвершинников множества W^*.

Трехвершинник множества W^* назовем *h-полярным*, *p-полярным* или *e-полярным*, если его полярная ось является гиперболической, параболической или соответственно эллиптической прямой. Соответствующие классы трехвершинников обозначим W_h, W_p, W_e. На основании свойств полюсов и поляр относительно овальной линии полюс h-полярного трехвершинника является собственной точкой плоскости $\widehat{H}$, такие точки мы называем гиперболическими, учитывая природу проведенных через них касательных к абсолюту. Полюс e-полярного трехвершинника является эллиптической точкой и лежит в плоскости Лобачевского Λ_2, а полюс p-полярного трехвершинника принадлежит абсолюту.

Мы ставим задачу выявления метрических свойств трехвершинников, обусловленных типом полярной оси. В решении данной задачи необходимо учитывать расположение вершин и сторон трехвершинника по отношению к абсолюту, а информация о наличии и расположении внутренности трехвершинника, принципиально важная, например, в задачах вывода тригонометрических соотношений или измерения площадей (см., например, [1, 2, 3]), утрачивает свою актуальность. Соответственно новым принципам мы проводим классификацию трехвершинников и решаем задачу отдельно для каждого типа трехвершинников в новой классификации, используя канонические реперы плоскости H^2 первого и второго типов (см. [1, §4.1]).

Поиск и доказательство метрических зависимостей, характеризующих на H^2 принадлежность трехвершинника одному из трех классов, определенных типом полярной оси, мы начинаем с собственных треугольников плоскости Лобачевского. Каждый такой треугольник принадлежит множеству W^*, т. е. имеет единственную полярную ось. Значит, множество всех треугольников на Λ_2, в отличие от множества всех треугольников на $\widehat{H}$, можно разбить на три класса по типу полярной оси. В следующей теореме представим две метрические характеристики треугольников каждого класса плоскости Λ_2.

Теорема 2. *Пусть на плоскости Лобачевского радиуса кривизны $i\rho$, $\rho \in \mathbb{R}_+$, величины $\widehat{A}$, $\widehat{B}$, $\widehat{C}$ — меры внутренних углов конечного треугольника ABC, а h_c — длина высоты этого треугольника, проведенной из вершины C. Тогда принадлежность треугольника ABC классу W_h, W_p или W_e равносильна соответственно условию*

$$\operatorname{tg}^2\widehat{A}\operatorname{tg}^2\widehat{B}\operatorname{ch}^2\frac{AB}{\rho} < \operatorname{th}^2\frac{h_c}{\rho}, \quad \operatorname{tg}^2\widehat{A}\operatorname{tg}^2\widehat{B}\operatorname{ch}^2\frac{AB}{\rho} = \operatorname{th}^2\frac{h_c}{\rho}, \quad \operatorname{tg}^2\widehat{A}\operatorname{tg}^2\widehat{B}\operatorname{ch}^2\frac{AB}{\rho} > \operatorname{th}^2\frac{h_c}{\rho},$$

или соответственно условию

$$\Theta\left(\widehat{A},\widehat{B},\widehat{C}\right) < 0, \quad \Theta\left(\widehat{A},\widehat{B},\widehat{C}\right) = 0, \quad \Theta\left(\widehat{A},\widehat{B},\widehat{C}\right) > 0, \quad \textit{где}$$

$$\Theta\left(\widehat{A},\widehat{B},\widehat{C}\right) = \cos^2\widehat{A}\cos^2\widehat{B} + \cos^2\widehat{A}\cos^2\widehat{C} + \cos^2\widehat{B}\cos^2\widehat{C}$$

$$+2\cos\widehat{A}\cos\widehat{B}\cos\widehat{C}\left(\cos^2\widehat{A} + \cos^2\widehat{B} + \cos^2\widehat{C}\right) + 3\cos^2\widehat{A}\cos^2\widehat{B}\cos^2\widehat{C}.$$

Исследование трехвершинников плоскости H^2 с учетом их полюсов и полярных осей позволяет обогатить гиперболическую геометрию новыми объектами. Например, мы исследуем траектории вершины p-полярного трехвершинника плоскости H^2 с двумя фиксированными вершинами и доказываем, в частности, что когда фиксированные вершины A, B принадлежат плоскости Лобачевского Λ_2, исследуемые траектории являются рациональными кривыми четвертого порядка с тремя узловыми точками, две из которых совпадают с точками A, B.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ромакина Л. Н. Геометрия гиперболической плоскости положительной кривизны : в 4 ч. Ч. 1 : Тригонометрия. — Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2013. 244 с.

2. Romakina L. N. The area of a generalized polygon without parabolic edges of a hyperbolic plane of positive curvature // Asian Journal of Mathematics and Computer Research. 2016. Vol 10, № 4. P. 293-310.

3. Romakina L. N. Inequalities of trihedrals on a hyperbolic plane of positive curvature // Beitr Algebra Geom. 2017. Vol 58. P. 723-734.

УДК 51-76

Моделирование плоских полигональных клеточных упаковок: связь между топологической дефектностью структуры, скоростью деления и распределением размера клеток[1]

Д. С. Рошаль (Россия, г. Ростов-на-Дону)
Южный федеральный университет
e-mail: rochal.d@yandex.ru
К. К. Федоренко (Россия, г. Ростов-на-Дону)
Южный федеральный университет
e-mail: kirfedorenko@sfedu.ru
С. Багдигиян (Франция, г. Монтпелье)
Университет Монтпелье
e-mail: stephen.baghdiguian@umontpellier.fr
С. Б. Рошаль (Россия, г. Ростов-на-Дону)
Южный федеральный университет
e-mail: sbroshal@sfedu.ru

Modeling of flat polygonal cell packings: the relationship between topological defectiveness, rate of division, and distribution of cells' sizes

D. S. Roshal (Russia, Rostov-on-Don)
Southern Federal University
e-mail:rochal.d@yandex.ru
K. K. Fedorenko (Russia, Rostov-on-Don)
Southern Federal University
e-mail: kirfedorenko@sfedu.ru
S. Baghdiguian (France, Montpellier)
University of Montpellier
e-mail: stephen.baghdiguian@umontpellier.fr
S. B. Rochal (Russia, Rostov-on-Don)
Southern Federal University
e-mail: sbroshal@sfedu.ru

Топологическим дефектом называется структурная единица, имеющая отличное от 6 число соседей (см. рис. 1). Её топологический заряд равен q=6-s, где s – число соседей у структурной единицы. Суммарный топологический заряд покрытий на поверхности сферы +12 (что вызывает обязательное присутствие топологических дефектов на сфере), на плоскости – 0. Мною в работе [1] были рассмотрены различные топологические дефекты, образующиеся на поверхностях вирусных капсидов, сферических коллоидных кристаллов. Было показано, что в этих объектах основным фактором, индуцирующим топологические дефекты, является кривизна. При рассмотрении сферических эпителиальных непролиферативных (то есть не размножающихся делением) монослоев было показано, что их увеличенная дефектность по сравнению с коллоидными кристаллами объясняется разницей в размерах клеток [2]. А с чем же связана сильная топологическая дефектность как плоских, так и сферических пролиферативных и гиперпролиферативных монослоев?

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 19-32-90134).

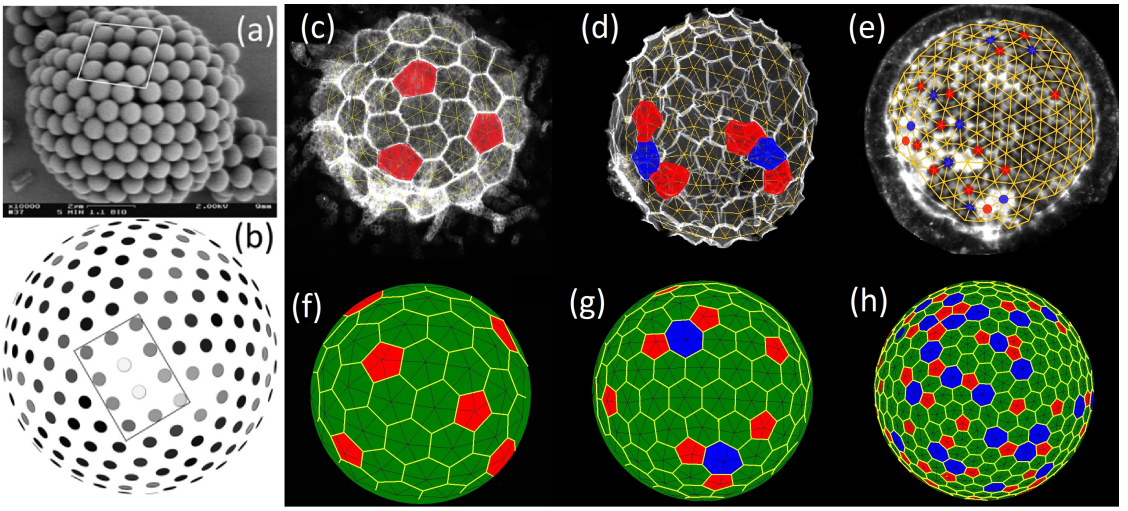


Рис. 1: Топологические дефекты в сферических коллоидных кристаллах (a), сферических эпителиальных монослоях (c-e) и в соответствующих им модельных структурах (b, f-h). На панелях (a-b) показан сложный топологический дефект - область квадратного порядка. На панелях (c-h) простейшие топологические дефекты - 5-угольные и 7-угольные дисклинации показаны красным и синим цветом соответственно. На панелях (d,g) они объединяются в простейшие протяженные топологические дефекты. На панелях (e,h) наблюдается существенное нарушение гексагонального порядка

Недавно была найдена закономерность о том, что относительный процент клеток с четырьмя, пятью, шестью и т.д. соседями практически одинаков в пролиферативном (медленно делящемся) эпителии многих видов растений и животных (см. рис. 2d) [3]. Цель данной работы – проверить нарушает ли гиперпролиферация раковых клеток рассмотренную выше закономерность. В данной работе проводится сравнение топологии монослоев здоровых (HCerEpiC) и поражённых раком (HeLa) клеток шейки матки человека, а также сравнение топологии раковых клеток при нормальных условиях и после одновременного деления, вызванного искусственно.

В ходе исследования было проанализировано более 150 фотографий эпителиальных монослоев HCerEpiC и HeLa (рис. 2), при этом на каждой фотографии было до 2000 клеток.

Для начала рассмотрим подробнее результаты, полученные для монослоев HeLa. Был проведен анализ клеток HeLa, находящихся в двух состояниях: в обычном и синхронизированном, когда одновременное деление всех клеток было воззвано искусственно. Подсчёт количества соседей помог нам выявить заметные отличия распределения клеток эпителиального монослоя по количеству соседей. Основной результат – существенные отличия в количестве клеток, имеющих 6 соседей - 35 процентов у HeLa против 45 процентов у известных в литературе монослоев, что свидетельствует о нарушении топологической инвариантности, выходящем за рамки погрешности. Тот же результат наблюдается и в случае с синхронизированными монослоями. Чем же может быть вызвана увеличенная топологическая дефектность раковых монослоев с геометрической и биологической точки зрения?

Важным геометрическим параметром, который может влиять на дефектность монослоя является разброс размеров клеток. Очевидно, что чем больше различия в размерах клеток, тем дальше клеточный порядок от гексагонального. Мы заметили, что отношение площадей клеток с минимальной и максимальной площадью в монослоев сильно колеблется и может заметно различаться в структурах схожей морфологии. Поэтому клеточную структуру целесообразно характеризовать средней площадью ячеек и полушириной распределения клеток по

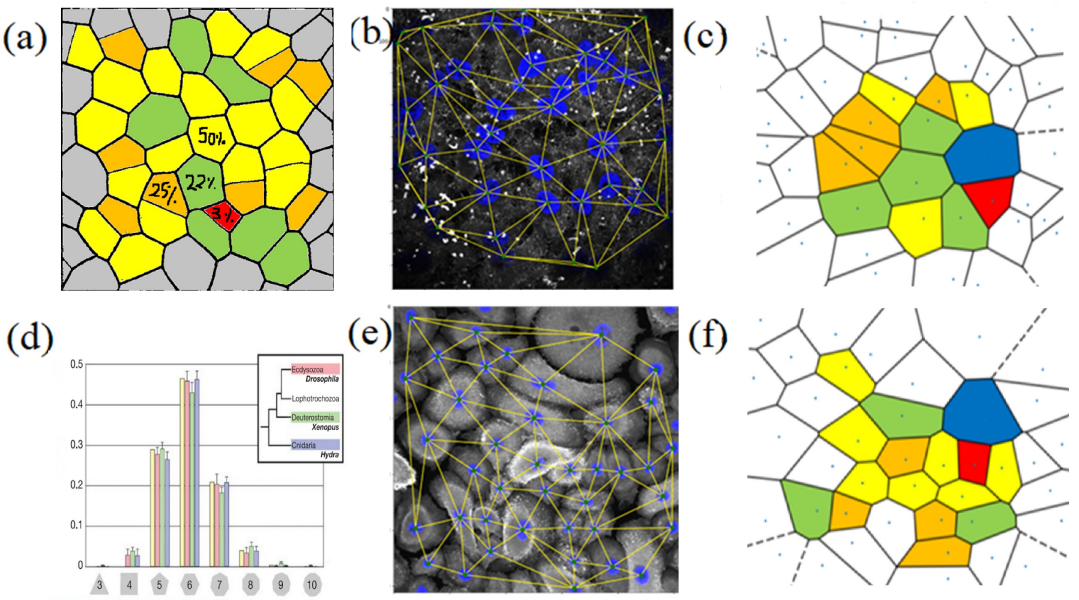


Рис. 2: Анализ топологии плоских эпителиальных монослоев. (a) - Разбиение Вороного для эпителиального монослоя огурца. (b-c) Триангуляция Делоне и разбиение Вороного для монослоя HeLa. (d) Гистограмма распределения клеток по числу их соседей. (e-f) Триангуляция Делоне и разбиение Вороного для монослоя HCerEpiC.

их площади. В случае с несинхронизированными и синхронизированными эпителиями доля 6-тиугольников практически одинакова, но в то же время полуширина заметно отличается. Это говорит о том, что средняя площадь клеток в несинхронизированном эпителии HeLa больше, чем в синхронизированном, так как большинство клеток в последнем принадлежит ко второму поколению, с аналогичным временем, прошедшим после процесса деления.

Чтобы лучше понять, почему в поражённых раком монослоях нарушается топологическая инвариантность была разработана модель, способная как можно точнее описать распределение полигонов на плоскости. Для этого на плоскость бросается случайным образом множество точек с заданным минимальным расстоянием между ними, связано это с тем, что клетка ограничена по размеру. При изменении этого минимального расстояния меняется и распределение полигонов по количеству углов и по их площади. Если подобрать минимальное расстояние таким образом, чтобы распределение полигонов по углам совпадало с HeLa, тогда величина полуширины тоже совпадает с экспериментальными данными, что говорит о случайном распределении клеток в HeLa и полном нарушении топологической инвариантности.

В случае с HCerEpiC наша модель случайной упаковки уже неприменима, так как значению полуширины распределения площадей, наблюдаемому в HCerEpiC, в модели случайных упаковок соответствует существенно более низкий процент шестиугольников, чем наблюдается в HCerEpiC. Это говорит о наличии дополнительного механизма упорядочивания структуры. Этим механизмом является упругое межклеточное взаимодействие. С помощью добавления в модель упругого межклеточного взаимодействия мы можем смоделировать более упорядоченные структуры. Подбирая параметр, характеризующий величину межклеточного взаимодействия можно получить структуру, параметры которой совпадают с экспериментальными данными, что говорит о корректности составленной нами модели. Таким образом, эпителий HCerEpiC более упорядочен, чем HeLa и не может быть описан чистой моделью случайных упаковок. Дополнительное упорядочение HCerEpiC по сравнения с HeLa и моделью случайных упаковок может быть объяснено тем, что из-за медленной скорости деления эпителия внутренние локальные стрессы успевают релаксировать, увеличивая, в среднем, число клеток

с гексагональной координацией.

Перейдем к выводам. Проведено сравнение распределений клеток по числу их соседей и по их площадям в обычных и синхронизированных монослоях HeLa. Показано, что топология HeLa не удовлетворяет закономерности об одинаковости распределения клеток по числу их соседей для многих видов растений и животных. Создана модель случайных упаковок, описывающая как распределение клеток HeLa по числу их соседей, так и по их площадям. Показано, что HCerEpiC более упорядочены, чем HeLa, и чем структуры в модели случайных упаковок Высказано предположение, что релаксация механических стрессов, связанных с делением клеток, вызывает более эффективное упорядочение в эпителии с более низкой скоростью пролиферации. Предложена модель монослоя HCerEpiC, основанная на модели случайных упаковок, и дополнительно учитывающая упорядочение клеток из-за межклеточного взаимодействия.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Roshal D. S., Konevtsova O. V., Myasnikova A. E., Rochal S. B. Assembly of the most topologically regular two-dimensional micro and nanocrystals with spherical, conical, and tubular shapes // Phys. Rev. E. 2016. V. 94. P.052605.

2. Roshal D. S., Azzag K., Le Goff E., Rochal S. B., Baghdiguian S. Crystal-like order and defects in metazoan epithelia with spherical geometry // Scientific Reports. 2020. T. 10. № 3. P. 1-11.

3. Gibson M. C., Patel A. B., Nagpal R., Perrimon. N. The emergence of geometric order in proliferating metazoan epithelia // Nature. 2006. V.442. P. 1038.

УДК 514.172.45

RR-многогранники с тупоугольными ромбическими вершинами

В. И. Субботин (Россия, г. Новочеркасск)
Южно-Российский государственный политехнический университет им. М. И. Платова
e-mail: geometry@mail.ru

RR-polyhedra with obtuse rhombic vertices

V. I. Subbotin (Russia, Novocherkassk)
Platov South-Russian State Polytechnic University
e-mail: geometry@mail.ru

В докладе продолжены исследования автора влияния условий симметрии, в частности— правильности, на строение выпуклых многогранников в E^3, (см., например, [1] – [2]). О роли условий симметрии в теории многогранников, см., например, [3].

Ранее автором рассматривались такие условия симметрии, в которых не предполагалось заранее ни правильности граней многогранника, ни правильности вершинных фигур, (см., например,[1]). Даже такие условия симметрии позволили найти полный список многогранников, удовлетворяющих этим условиям. Причём, этот список может не содержать бесконечных серий многогранников. Удобно назвать такие условия *жёсткими*. Иногда под жёсткими мы

понимаем такие условия, которые позволяют найти весь класс многогранников с точностью до комбинаторной эквивалентности.

Затем были выделены условия, которые включали в себя правильность некоторых граней многогранника; и таким образом, такие условия, оставаясь жёсткими, оказываются связанными с классом многогранников с правильными гранями Джонсона-Залгаллера. А именно, в [1] рассмотрен класс так называемых RR-многогранников и было дано конструктивное доказательство существования двух таких многогранников: оба они имели зеркальные оси вращения и гранные звёзды остроугольных ромбических вершин были разделены между собой поясом правильных граней.

Напомним определение из [1]: замкнутый выпуклый многогранник в E^3 называется RR-многогранником, если у него существует хотя бы одна симметричная ромбическая вершина, а все грани, не входящие в ромбическую звезду вершин, являются правильными.

После перечисления всех RR-многогранников с двумя ромбическими вершинами, разделёнными одним поясом правильных граней в [2], встал вопрос о полноте списка RR-многогранников без ограничений на число ромбических вершин и на условие разделённости этих вершин.

В настоящем докладе доказана следующая

Теорема 1. *Существуют только два RR-многогранника с одной симметричной тупоугольной ромбической вершиной — 13-гранник и 19-гранник.*

Доказательство существования 19-гранника опирается, в частности, на вывод уравнения, решением которого является приближённое значение тупого угла 19-гранника.

После того, как доказана эта теорема, можно утверждать, что полный список RR-многогранников содержит двадцать три многогранника с изолированными и с неизолированными ромбическими вершинами.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Субботин В. И. О двух классах многогранников с ромбическими вершинами // Записки научных семинаров ПОМИ. 2018. Том 476. С. 153-164.

2. Субботин В.И. О полноте списка выпуклых RR-многогранников //Чебышевский сборник. 2020. Т.21, №1. С. 297-309.

3. Coxeter H. S. Regular polytopes. London-NY. 1963.

УДК 514.174

Выпуклые соединения паркетогранников и прототипирование[1]

А. В. Тимофеенко (Россия, г. Красноярск)
Онлайн-школа Тетрика
e-mail: A.V.Timofeenko62@mail.ru

Convex junctions of parquethedrons and prototyping

A. V. Timofeenko (Russia, Krasnoyarsk)
Online School Tetrika
e-mail: A.V.Timofeenko62@mail.ru

Паркетогранники стали изучать более полувека назад при классификации выпуклых многогранников с правильными гранями, см. [1] вместе с публикациями замеченных опечаток [2, 3, 4, 5]. Классификация правильногранников проведена доказательными вычислениями, т. е. целенаправленными вычислениями на ЭВМ, комбинируемыми с аналитическими исследованиями, которые приводят к строгому установлению новых фактов и доказательству теорем, [6]. Нахождение всех выпуклых правильногранников коллективом авторов во главе с В. А. Залгаллером, [1], напоминает хорошо известное решение проблемы четырёх красок, найденное десятилетием позднее.

Определение 1. *Паркетным (r-паркетным) называется выпуклый многоугольник, составленный из конечного и большего единицы числа равноугольных (правильных) многоугольников, [7]. Паркетогранником (r-паркетогранником) назовём выпуклый многогранник, обладающий паркетными (r-паркетными) и быть может равноугольными (правильными) гранями.*

Очевидно, равнорёберные паркетогранники можно классифицировать с точностью до подобия. Три года назад выдвинута гипотеза о существовании только четырёх равнорёберных паркетогранников, не удовлетворяющих дополнительному требованию того, если грань паркетогранника составлена из правильных многоугольников, то каждая её вершина служит и вершиной грани. А если это требование выполнено, то существует ровно 78 таких отличных от правильногранных тел паркетогранников, [8, 9].

Поскольку из 23 типов паркетных многоугольников представитель только какого-нибудь из 10 типов не может быть равносторонним, то паркетогранники, обладающие такими (неравносторонними) гранями, имеет смысл описывать с точностью до комбинаторной эквивалентности. Общая схема решения этой проблемы известна уже около полувека, [7]. Однако пока открыты задачи, записанные на стр. 282 статьи [10] как проблема 20 и следующая

Задача 1. *Каковы все составленные из правильногранных пирамид паркетогранники с такими как у пирамид одинаковыми или вдвое большими рёбрами? Каковы все типы таких паркетогранников?*

Ниже применены обозначения Коксетера конечных групп симметрий трёхмерного пространства. В докладе будут представлены ссылки на их компьютерные модели, построенные на основе порождающих эти группы матриц. Эти модели и построенные с их помощью компьютерные модели многогранников встроены в алгоритм, по которому создано доказательство следующего утверждения.

[1]Работа поддержана Красноярским математическим центром, финансируемым Минобрнауки РФ в рамках мероприятий по созданию и развитию региональных НОМЦ (Соглашение 075-02-2021-1388)

Утверждение 1. *Выпуклый многогранник с рёбрами длины один или два составлен из не более восемнадцати правильногранных пирамид с единичными рёбрами тогда и только тогда, когда он является одним из следующих тел, справа от обозначения каждого из которых указана группа его симметрий:*

$$M_1[3,3],\ M_2[4],\ M_3[5], \tag{1}$$

$$M_1 + M_1[2,3],\ M_1 + M_2[\,],\ M_2 + M_2[3,4],\ M_3 + M_3[2,5], \tag{2}$$

$$^\circ\, S_{2,2} + M_1[2], S_{2,2} + M_2[3],\ ^\circ\, S_{2,2} + M_2[2], \tag{3}$$

$$^\circ\, S_{3,1} + M_2[2],\ ^\circ\, S_{3,1} + M_2[\,], S_{3,2} + M_1[2^+,6], S_{2,2} + S_{2,2}[2^+,2], S_{2,2} + S_{2,2}[2]^+,\ ^\circ\, S_{2,2} + S_{2,2}[2], \tag{4}$$

$$^\circ\, S_{4,1} + M_1[3],\ ^\circ\, S_{4,4} + M_2[\,], \tag{5}$$

$$^\circ\, S_{5,1} + M_1[3,3],\ ^\circ\, S_{5,2} + M_1[\,]^+,\ ^\circ\, S_{5,2} + M_2[2,2],\ ^\circ\, S_{4,4} + S_{2,2}[\,],\ ^\circ\, S_{3,1} + S_{3,1}[2], \tag{6}$$

$$^\circ\, S_{6,2} + M_2[\,],\ ^\circ\, S_{6,4} + M_2[\,],\ ^\circ\, S_{6,5} + M_2[\,], S_{4,6} + S_{3,1}[3],\ ^\circ\, S_{4,6} + S_{3,3}[\,], \tag{7}$$

$$\begin{array}{lll} ^\circ\, S_{7,1} + M_1[2^+,2], & ^\circ\, S_{7,2} + M_1[\,], & ^\circ\, S_{7,3} + M_1[\,], \\ S_{7,4} + M_2[\,], & ^\circ\, S_{6,2} + S_{2,2}[2^+,2], & ^\circ\, S_{6,5} + S_{2,2}[2^+,2^+], \end{array} \tag{8}$$

$$^\circ\, S_{8,4} + M_1[\,],\ ^\circ\, S_{8,4} + M_2[\,],\ ^\circ\, S_{6,4} + S_{3,1}[2^+,4],\ ^\circ\, S_{6,4} + S_{3,3}[4], \tag{9}$$

$$^\circ\, S_{9,1} + M_2[\,]^+,\ ^\circ\, S_{9,2} + M_2[2,3],\ ^\circ\, S_{9,4} + M_2[4],\ ^\circ\, S_{8,4} + S_{2,2}[\,]^+,\ ^\circ\, S_{5,1} + S_{5,1}[2,3], \tag{10}$$

$$^\circ\, S_{10,1} + M_2[\,],\ ^\circ\, S_{10,4} + M_2[\,]^+,\ ^\circ\, S_{10,5} + M_1[3], \tag{11}$$

$$^\circ\, S_{11,2} + M_1[\,]^+,\ ^\circ\, S_{11,3} + M_1[2,3], S_{9,2} + S_{3,1}[2^+,2],\ ^\circ\, S_{9,2} + S_{3,1}[2],\ ^\circ\, S_{9,4} + S_{3,1}[\,], \tag{12}$$

$$^\circ\, S_{12,3} + M_2[\,],^\circ\ S_{12,4} + M_1[\,],^\circ\ S_{10,4} + S_{3,1}[\,], \tag{13}$$

$$\begin{array}{lll} ^\circ\, S_{13,1} + M_1[\,], & ^\circ\, S_{13,1} + M_2[2^+,2], & ^\circ\, S_{13,3} + M_2[\,]^+, \\ ^\circ\, S_{12,3} + S_{2,2}[\,]^+, & S_{7,4} + S_{7,4}[2^+,6], & S_{7,4} + S_{7,4}[3,4], \end{array} \tag{14}$$

$$^\circ\, S_{14,1} + M_2[\,],\ S_{14,5} + M_2[\,],\ S_{14,6} + M_2[4],\ S_{12,4} + S_{3,3}[3,3],^\circ\ S_{12,4} + S_{3,3}[\,], \tag{15}$$

$$\begin{array}{llll} ^\circ\, S_{15,1} + M_1[2^+,2], & ^\circ\, S_{15,2} + M_2[\,], & S_{15,2} + M_2[2]^+, & ^\circ\, S_{15,3} + M_2[2], \\ S_{15,3} + M_2[2,4], & ^\circ\, S_{15,4} + M_1[3], & ^\circ\, S_{15,5} + M_1[\,], & ^\circ\, S_{14,4} + S_{2,2}[2^+,2^+], \\ ^\circ\, S_{13,1} + S_{3,1}[\,], & ^\circ\, S_{12,5} + S_{4,2}[2^+,2], & & \end{array} \tag{16}$$

$$^\circ S_{16,2}+M_2[3],\ ^\circ S_{16,2}+M_2[\,],\ ^\circ S_{16,4}+M_2[2],\ ^\circ S_{16,4}+M_2[3],\ ^\circ S_{16,9}+M_2[\,]^+,\ ^\circ S_{13,3}+S_{4,6}[3], \quad (17)$$

$$^\circ S_{17,3}+M_2[2,4],\ ^\circ S_{17,4}+M_2[2],\ ^\circ S_{9,1}+S_{9,1}[2]. \quad (18)$$

Многогранник $S_{i,j}$ расположен в списке (i) на j-м месте:

$$S_{1,1}=M_1, S_{1,2}=M_2, S_{1,3}=M_3, S_{2,1}=S_{1,1}+M_1, \ldots, S_{18,3}=S_{9,1}+S_{9,1}.$$

Кружком помечены тела с фиктивными вершинами.

Построение «живой» компьютерной модели многогранника основано на алгебраической модели, носитель которой состоит из координатных троек его вершин, множество отношений составлено из упорядоченных наборов этих троек, соответствующих граням. Хотя для реалистичного изображения достаточно приближённых значений координат вершин, будем пользоваться выражениями, точно определяющими координаты каждой вершины в виде рационального числа или элемента расширения поля рациональных чисел. Упорядочив элементы носителя, т.е. обозначив каждую вершину натуральным числом, каждое отношение запишем набором натуральных чисел, который соответствует расположению вершин на грани при обходе её по рёбрам против часовой стрелки, начиная с вершины, имеющей наименьший номер, причём наблюдатель смотрит со внешней стороны грани. Например, многограннику $S_{4,1}$,

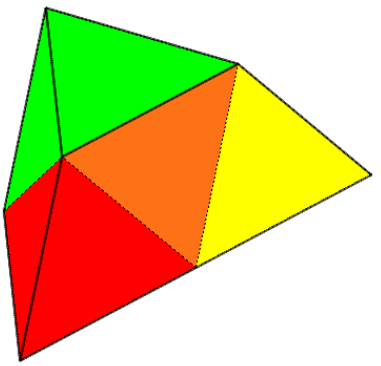


Рис. 1: Соединённый с красным и жёлтым тетраэдрами оранжево-зелёный октаэдр

рис. 1,2, составленному из двух правильных тетраэдров и двух правильногранных пирамид с квадратными основаниями, соответствует алгебраическая модель с носителем

$$v=\left\{[1,a,0],[-1,a,0],\left[\frac{1}{2},\frac{a}{2},b\right],\left[\frac{1}{2},-\frac{a}{2},0\right],\left[-\frac{1}{2},-\frac{a}{2},0\right],\left[-\frac{1}{2},\frac{a}{2},b\right],[0,-a,b]\right\},$$

где $a=\frac{\sqrt{3}}{3}, b=\frac{\sqrt{6}}{3}$ — корни многочлена $9t^4-9t^2+2$, и набором отношений

$$f=\{[1,4,5,2],[1,3,7,4],[4,7,5],[2,5,7,6],[1,2,6,3],[3,6,7]\}.$$

Очевидно, рёбра построенной модели либо единичные, либо вдвое длинее.

Изображённая на рис. 2 модель служит заготовкой для печати на 3D-принтере (прототипирования). Напомним, общий подход к прототипированию заключается в послойной печати или нарезки слоёв, начиная с расположенного на рабочем столе, поверхность которого совмещается с плоскостью xOy. Поэтому печать тела $S_{4,1}$ начинается с его грани-трапеции $[1,4,5,2]$. В системах автоматизированного проектирования существует много вариантов подготовки модели

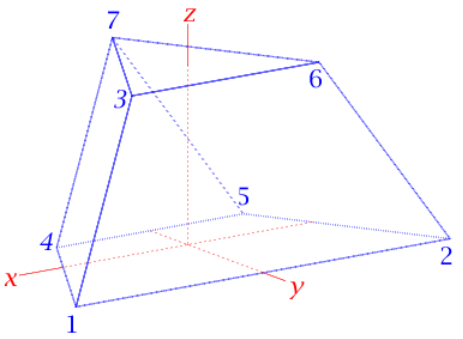


Рис. 2: Соответствующий алгебраической модели тела $S_{4,1}$ граф

многогранника к печати. Все известные автору способы подготовки прототипирования требуют специфической инженерной подготовки каждого многогранника. Чтобы обойти инженерную работу и максимально автоматизировать печать многогранника, опишем и в системе компьютерной алгебры реализуем алгоритм построения из данной алгебраической модели $P = \langle v|f\rangle$ готовой для прототипирования модели, которую будем обозначать Q.

1. Выбираем грань, с которой будет начинаться печать, так, чтобы соблюдался компромисс двух условий: а)площадь грани была максимальной, б)двугранные углы с её смежными гранями были минимальными. Для тела $S_{4,1}$ такой гранью служит трапеция $[1, 4, 5, 2]$.

2. Выбранную грань совмещаем с координатной плоскостью xOy и ось аппликат Oz проводим через центр тяжести многогранника, вычисляемый по формуле

$$\frac{1}{|v|}\sum_{i=1}^{|v|} v_i.$$

   Например, координаты центра тяжести $C = [c_1, c_2, c_3]$ фигуры $S_{4,1}$ равны $\frac{1}{7}\sum_{i=1}^{7} v_i = \left[0, \frac{a}{7}, \frac{3b}{7}\right]$.

3. Находим образ граней тела $S_{4,1}$ при гомотетии $\gamma = \gamma_C^k$ с центром $C = [c_1, c_2, c_3]$ и коэффициентом k по формуле нахождения образа u_i каждой вершины $v_i, i = 1, 2, \ldots, |v|$:

$$u_i = \begin{pmatrix} u_{i,1} \\ u_{i,2} \\ u_{i,3} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 0 & 0 & c_1(1-k) \\ 0 & k & 0 & c_2(1-k) \\ 0 & 0 & k & c_3(1-k) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{i,1} \\ v_{i,2} \\ v_{i,3} \\ 1 \end{pmatrix} = v_i^{\gamma}.$$

4. На печать выводим расположенное между поверхностями моделей P и P^{γ} тело Q. Поскольку в рассматриваемом примере нужная для начала печати грань лежит на плоскости xOy, то коэффициент k выбираем положительным чуть меньше единицы. Конкретное значение k подбираем в зависимости от принтера и материала для печати. Очевидно, чем ближе к единице k, тем тоньше будут стенки материализованной модели. На рис. 3 изображены фундаментальные грани подготовленного к прототипированию многогранника Q.

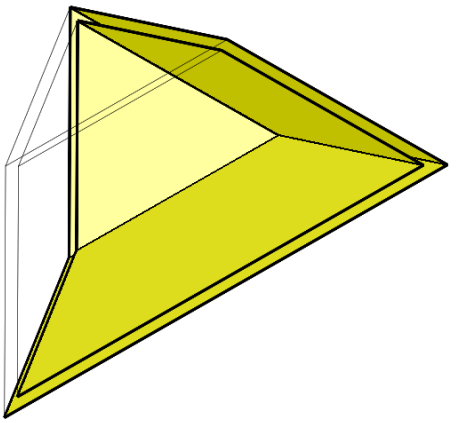


Рис. 3: Рёбра и фундаментальные грани тела, расположенного между поверхностями многогранника $S_{4,1}$ и его образа при гомотетии с коэффициентом $\frac{11}{12}$

Напомним, фундаментальными называются составляющие минимальное множество такие грани, что каждая грань многогранника получается из фундаментальной его симметрией.

Замечание 1. *Материализованные модели паркетогранников служат инструментом доказательства их классификации.*

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Залгаллер В. А. Выпуклые многогранники с правильными гранями // Зап. научн. сем. ЛОМИ. 1967. Том 2, Наука, М.-Л. С. 5-221.

2. Zalgaller V. A. Convex polyhedra with regular faces. Seminars in Mathematics, V. A. Steklov Mathematical Institute, Leningrad, 2. — New York: Consultants Bureau 1969.

3. Иванов Б. А. Многогранники с гранями, сложенными из правильных многоугольников // Укр. геометр. сб. 1971. Вып. 10, Харьков, ХГУ. С. 20-34.

4. Пряхин Ю. А. О выпуклых многогранниках с правильными гранями // Укр. геометр. сб. 1973. Вып. 14, Харьков, ХГУ. С 83-88.

5. Гурин А. М. К истории изучения выпуклых многогранников с правильными гранями // Сиб. электрон. матем. изв. 2010. Том 7, С. 5-23.

6. Бабенко К. И. Основы численного анализа. — Москва-Ижевск: НИЦ Регулярная и хаотическая динамика, 2002. 848 с.

7. Пряхин Ю. А. Выпуклые многогранники, грани которых равноугольны или сложены из равноугольных // Вопросы глобальной геометрии, Зап. научн. сем. ЛОМИ. 1974. Том 45, Изд-во Наука, Ленинград. отд., Л. С. 111-112.

8. Тимофеенко А. В. К перечню выпуклых правильногранников // Современные проблемы математики и механики. VI. Математика. Выпуск 3. К 100-летию со дня рождения Н. В. Ефимова./ Под ред. И. Х. Сабитова и В. Н. Чубарикова. 2011. — М.: Изд-во МГУ. С. 155-170.

9. Tupelo-Schneck R. Convex regular-faced polyhedra with conditional edges [Электронный ресурс], Режим доступа: http://tupelo-schneck.org/polyhedra/

10. Маслова Н. В., Белоусов И. Н., Минигулов Н. А. Открытые проблемы, сформулированные на XII школе-конференции по теории групп, посвященной 85-летию В.А. Белоногова // Тр. ИММ УрО РАН. 2020. Том 26, № 3. С. 275-285.

УДК 515.1

Канторовы множества с многомерными проекциями и их нетипичность[1]

О. Д. Фролкина (Россия, г. Москва)
Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
e-mail: olga-frolkina@yandex.ru

Cantor sets with high-dimensional projections and their exceptionality

O. D. Frolkina (Russia, Moscow)
Lomonosov Moscow State University
e-mail: olga-frolkina@yandex.ru

Л. Антуан привел пример канторова множества на плоскости, все проекции которого такие же, как у правильного шестиугольника [2, **9**, p.272; fig.2, p.273]. К. Борсук построил канторово множество в $\mathbb{R}^N$, проекция которого на любую гиперплоскость содержит $(N-1)$-мерный шар, эквивалентно, имеет размерность $(N-1)$ [4]. Дж. Кобб построил канторово множество в $\mathbb{R}^3$, проекция которого на любую 2-плоскость одномерна [5], и поставил общий вопрос: существует ли, для заданных чисел $N > m > k > 0$, такое канторово множество в $\mathbb{R}^N$, проекция которого на любую m-плоскость имеет размерность k ? (Кратко: (N, m, k)-множество.) Для случаев $k = m - 1$ и $m = N - 1$ такие множества построены в работах [6] и [3], соответственно.

Мы получаем следующие результаты:

✓ Пусть $K \subset \mathbb{R}^N$ — канторово множество, $N \geqslant 2$. Для любого $\varepsilon > 0$ существует такая ε-изотопия $\{h_t\} : \mathbb{R}^N \cong \mathbb{R}^N$, что $h_1(K)$ является $(N, N-1, N-1)$-множеством [7].

✓ Пусть $K \subset \mathbb{R}^N$ — канторово множество, $N \geqslant 2$. Для любого $\varepsilon > 0$ существует такая ε-изотопия $\{h_t\} : \mathbb{R}^N \cong \mathbb{R}^N$, что $h_1(K)$ является $(N, N-1, N-2)$-множеством [7].

✓ Мы строим новую простую серию канторовых множеств в $\mathbb{R}^3$, все проекции которых связны и одномерны. Это самоподобные ожерелья Антуана [1], удовлетворяющие некоторым дополнительным условиям [9].

✓ Канторовы множества с многомерными проекциями являются “исключительными” в следующем смысле. Пусть $\mathcal{C}(\mathbb{R}^N)$ — пространство всех канторовых множеств в $\mathbb{R}^N$, снабженное метрикой Хаусдорфа. Известно, что $\mathcal{C}(\mathbb{R}^N)$ является пространством Бэра. Мы доказываем [8], что имеется такое плотное G_δ-множество $\mathcal{P} \subset \mathcal{C}(\mathbb{R}^N)$, что для всякого $X \in \mathcal{P}$ и всякого ненулевого линейного подпространства $L \subset \mathbb{R}^N$ проекция X на L является канторовым множеством. Более того, типичное канторово множество в $\mathbb{R}^N$ имеет общее положение относительно всех проекций [10]. Это дает ответ на вопрос Кобба [5].

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант 19-01-00169.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Antoine L. Sur l'homéomorphie de deux figures et de leurs voisinages. — Thèses de l'entre-deux-guerres, vol. 28, 1921. http://eudml.org/doc/192716
2. Antoine L. Sur les voisinages de deux figures homéomorphes // Fund. Math. 1924. 5. P. 265–287.
3. Barov S., Dijkstra J.J., van der Meer M. On Cantor sets with shadows of prescribed dimension // Topol. Appl. 2012. 159. P. 2736–2742.
4. Borsuk K. An example of a simple arc in space whose projection in every plane has interior points // Fund. Math. 1947. 34. P. 272–277.
5. Cobb J. Raising dimension under *all* projections // Fund. Math. 1994. 144 (2). P. 119–128.
6. Frolkina O. A Cantor set in with "large" projections // Topol. Appl. 2010. 157 (4). P. 745–751.
7. Frolkina O. Cantor sets with high-dimensional projections // Topol. Appl. 2020. 275. 107020.
8. Frolkina O. All projections of a typical Cantor set are Cantor sets // Topol. Appl. 2020. 281. 107192.
9. Frolkina O. A new simple family of Cantor sets in $\mathbb{R}^3$ all of whose projections are one-dimensional // Topol. Appl. 2021. 288. 107452.
10. Frolkina O. Most Cantor sets in $\mathbb{R}^N$ are in general position with respect to all projections // arXiv:2104.10495

Секция 8. Теоретико-числовой метод в приближенном анализе и теория приближений

УДК 517.5

Константы Никольского–Бернштейна для полиномов на единичной сфере с весом Данкля[1]

Д. В. Горбачев (Россия, г. Тула)
Тульский государственный университет
e-mail: dvgmail@mail.ru
Н. Н. Добровольский (Россия, г. Тула)
Тульский государственный университет
e-mail: nikolai.dobrovolsky@gmail.com

Nikolskii–Bernstein constants for polynomials on the unit sphere with Dunkl weight

D. V. Gorbachev (Russia, Tula)
Tula State University
e-mail: dvgmail@mail.ru
N. N. Dobrovol'skii (Russia, Tula)
Tula State University
e-mail: nikolai.dobrovolsky@gmail.com

Пусть $d \in \mathbb{N}$; v_κ — сужение на единичную сферу $\mathbb{S}^d$ веса Данкля $\prod_{a\in R_+} |\langle a,x\rangle|^{2\kappa(a)}$, $x \in \mathbb{R}^{d+1}$; $\Pi_n^d = \bigoplus_{j=0}^n \mathcal{H}_j^d(v_\kappa)$ — множество сферических полиномов, где $\mathcal{H}_j^d(v_\kappa)$ — подпространства κ-гармоник; $Z_j^\kappa(x,y) = \sum_{i=1}^{h_j(d)} Y_{ji}(x)\overline{Y_{ji}(y)}$ — воспроизводящее ядро подпространства $\mathcal{H}_j^d(v_\kappa)$; $\Delta_{\kappa,0}$ — оператор Бельтрами–Данкля; $(-\Delta_{\kappa,0})^{r/2}\operatorname{proj}_j = (\lambda_{\alpha_\kappa,j})^{r/2}\operatorname{proj}_j$, где $\alpha_\kappa = d_\kappa/2-1$, d_κ — размерность Данкля, $\lambda_{\alpha n} = n(n+2\alpha+1)$ — собственные значения дифференциального оператора Гегенбауэра $D_\alpha = \frac{d^2}{dt^2} + \frac{2\alpha+1}{\operatorname{tg} t}\frac{d}{dt}$; $w_\alpha(t) = (1-t^2)^\alpha$ — вес Гегенбауэра, $R_n^{(\alpha)}(t) = \frac{P_n^{(\alpha,\alpha)}(t)}{P_n^{(\alpha,\alpha)}(1)}$ — нормированные полиномы Гегенбауэра (Якоби).

Введем следующие весовые константы Никольского–Бернштейна в весовых пространствах $L^p_{v_\kappa}(\mathbb{S}^d)$ и $L^p_{w_\alpha}([-1,1])$ соответственно:

$$C_{p,\kappa}(d,n,r) = \sup_{f\in\Pi_n^d\setminus\{0\}} \frac{\|(-\Delta_{\kappa,0})^{r/2} f\|_\infty}{\|f\|_{p,v_\kappa}}, \quad C_{p,\alpha}(n,r) = \sup_{P\in\mathcal{P}_n\setminus\{0\}} \frac{\|(-D_\alpha)^{r/2}P\|_\infty}{\|P\|_{p,w_\alpha}}.$$

Теорема 1. *Пусть* $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $d \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{Z}_+$, $r \geqslant 0$. *Тогда*

$$\max_{x\in\mathbb{S}^d} \sup_g \left|\sum_{j=0}^n (\lambda_{\alpha_\kappa,j})^{r/2}\widehat{g}_j \frac{Z_j^\kappa(x,x)}{h_j(d_\kappa)}\right| \leqslant C_{p,\kappa}(d,n,r) \leqslant \sup_g \left|\sum_{j=0}^n (\lambda_{\alpha_\kappa,j})^{r/2}\widehat{g}_j\right|, \tag{1}$$

где супремумы берутся по всем алгебраическим полиномам $g(t) = \sum_{j=0}^n \widehat{g}_j R_n^{(\alpha)}(t)$ *степени не выше* n, *для которых* $\|g\|_{p,w_{\alpha_\kappa}} = 1$.

[1]Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 18-11-00199, https://rscf.ru/project/18-11-00199/

Как следствие, в безвесовом случае получаем $C_p(d,n,r) = C_{p,d/2-1}(n,r)$, $r \geqslant 0$. Данное равенство является обобщением результатов [1]. Отметим равенство

$$C_{2,\kappa}(d,n,r) = \left(\sum_{j=0}^{n} (\lambda_{\alpha_\kappa,j})^r Z_j^\kappa(x',x')\right)^{1/2},$$

где x' — точка максимума в (1). Доказательство теоремы см. в [2].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Арестов В.В., Дейкалова М.В. Неравенство Никольского для алгебраических многочленов на многомерной евклидовой сфере // Тр. ИММ УрО РАН. 2013. Том 19, № 2. С. 34–47.

2. Горбачев Д.В., Добровольский Н.Н. Константы Никольского–Бернштейна в L^p на сфере с весом Данкля // Чебышевский сборник. 2020. Том 21, № 4. С. 302–307.

УДК 517.956.4, 511.3

Использование теоретико-числовых сеток при решении уравнений с частными производными методом малого параметра

А. И. Денисов (Россия, г. Москва)
Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»
e-mail: den_tspu@mail.ru
И. В. Денисов (Россия, г. Тула)
Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого
e-mail: den_tspu@mail.ru
Н. М. Добровольский (Россия, г. Тула)
Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого
e-mail: dobrovol@tsput.ru
А. В. Родионов (Россия, г. Тула)
Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого
e-mail: rodionovalexandr@mail.ru

Using number-theoretic grids to solve partial differential equations by the small parameter method

A. I. Denisov (Russia, Moscow)
National Research University Higher School of Economics
e-mail: den_tspu@mail.ru
I. V. Denisov (Russia, Tula)
Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University
e-mail: den_tspu@mail.ru
N. M. Dobrovolskiy (Russia, Tula)
Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University
e-mail: dobrovol@tsput.ru
A. V. Rodionov (Russia, Tula)
Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University
e-mail: rodionovalexandr@mail.ru

В прямоугольнике $\Omega := \{(x,y)\,|\,0<x<1,\ 0<y<1\}$ переменных (x,y) рассматривается сингулярно возмущенное эллиптическое уравнение

$$\epsilon^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)=F(u,x,y,\epsilon),\quad (x,y)\in\Omega, \tag{1}$$

с краевыми условиями первого рода

$$u(x,y,\epsilon)=\varphi(x,y),\quad (x,y)\in\partial\Omega, \tag{2}$$

где $\partial\Omega$ – граница прямоугольника Ω, ϵ – малый положительный параметр.

Для построения асимптотического разложения решения задачи (1), (2) используется метод угловых пограничных функций. Асимптотика решения собирается из трех частей:

$$u(x,y,\epsilon)=\bar{u}+\Pi+P, \tag{3}$$

где $\bar{u}$ – регулярная часть, Π – пограничные функции, играющие роль вблизи сторон прямоугольника Ω, а P – угловые пограничные функции, играющие роль вблизи вершин прямоугольника Ω.

В соответствии с (3) функция F заменяется выражением

$$F(u,x,y,\epsilon)=\bar{F}+\Pi F+PF.$$

Регулярная часть асимптотики ищется в виде ряда

$$\bar{u}(x,y,\varepsilon)=\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k\,\bar{u}_k(x,y).$$

Для построения пограничных функций вводятся растянутые переменные

$$\xi=\frac{x}{\varepsilon},\qquad \eta=\frac{y}{\varepsilon},\qquad \xi_*=\frac{a-x}{\varepsilon},\qquad \eta_*=\frac{b-y}{\varepsilon}.$$

В соответствии с числом сторон прямоугольника Ω пограничная функция Π разделяется на четыре типа слагаемых:

$$\Pi=\overset{(1)}{\Pi}+\overset{(2)}{\Pi}+\overset{(3)}{\Pi}+\overset{(4)}{\Pi}.$$

Каждое слагаемое играет роль только вблизи соответствующей стороны прямоугольника Ω. При этом погранфункции ищутся в виде рядов

$$\overset{(1)}{\Pi}(x,\eta,\varepsilon)=\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k\overset{(1)}{\Pi}_k(x,\eta),\qquad \overset{(2)}{\Pi}(\xi,y,\varepsilon)=\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k\overset{(2)}{\Pi}_k(\xi,y),$$

$$\overset{(3)}{\Pi}(x,\eta_*,\varepsilon)=\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k\overset{(3)}{\Pi}_k(x,\eta_*),\qquad \overset{(4)}{\Pi}(\xi_*,y,\varepsilon)=\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k\overset{(4)}{\Pi}_k(\xi_*,y).$$

В соответствии с числом вершин прямоугольника Ω пограничная функция P разделяется на четыре типа слагаемых:

$$P=\overset{(1)}{P}+\overset{(2)}{P}+\overset{(3)}{P}+\overset{(4)}{P}.$$

Каждое слагаемое играет роль только вблизи соответствующей вершины прямоугольника Ω. При этом P – функции ищутся в виде рядов

$$\overset{(1)}{P}(\xi,\eta,\varepsilon)=\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k\overset{(1)}{P}_k(\xi,\eta),\qquad \overset{(2)}{P}(\xi,\eta_*,\varepsilon)=\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k\overset{(2)}{P}_k(\xi,\eta_*),$$

$$\overset{(3)}{P}(\xi_*,\eta_*,\varepsilon)=\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k\overset{(3)}{P}_k(\xi_*,\eta_*),\qquad \overset{(4)}{P}(\xi_*,\eta,\varepsilon)=\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k\overset{(4)}{P}_k(\xi_*,\eta).$$

Основные трудности представляет задача для определения главного члена угловой части асимптотики. Для точки $(0,0)$ задача для $\overset{(1)}{P}_0(\xi,\eta)$ ставится в первой четверти $\mathbb{R}^2_+$ плоскости растянутых переменных (ξ,η) и имеет вид

$$\frac{\partial^2\overset{(1)}{P}_0}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2\overset{(1)}{P}_0}{\partial\eta^2}=F\left(\bar{u}_0+\overset{(1)}{\Pi}_0+\overset{(2)}{\Pi}_0+\overset{(1)}{P}_0,0,0,0\right)-F\left(\bar{u}_0+\overset{(1)}{\Pi}_0,0,0,0\right)-F\left(\bar{u}_0+\overset{(2)}{\Pi}_0,0,0,0\right), \tag{4}$$

$$\overset{(1)}{P}_0(0,\eta)=-\overset{(1)}{\Pi}_0(0,\eta),\quad \overset{(1)}{P}_0(\xi,0)=-\overset{(2)}{\Pi}_0(\xi,0), \tag{5}$$

$$\overset{(1)}{P}_0(\xi,\eta)\to 0\quad\text{при}\quad \xi+\eta\to\infty. \tag{6}$$

Уравнение (4) является нелинейным, в связи с чем возникают трудности с доказательством его разрешимости. При определенных ограничениях на функцию F удается доказать существование решения задачи (4)–(6) (см. [1–5]). Применение численных методов затруднено из-за неограниченности рассматриваемой области. Однако, фактически P-функции имеют смысл только в некоторой окрестности точки $(0,\,0)$. В такой ситуации можно использовать теоретико-числовые сетки для решения этой задачи.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Денисов И.В. Квазилинейные сингулярно возмущенные эллиптические уравнения в прямоугольнике // Журнал вычисл. матем. и матем. физики. – 1995, т.35, №11, сс. 1666-1678. (English transl.: Denisov I.V. Quasilinear singularly perturbed elliptic equations in a rectangle // Computational Mathematics and Mathematical Physics. 1995. V. 35, No. 11. P. 1341–1350.)

2. Денисов И.В. Задача нахождения главного члена угловой части асимптотики решения сингулярно возмущенного эллиптического уравнения с нелинейностью // Журнал вычисл. матем. и матем. физики. – 1999, т.39, №5, сс. 779-791. (English transl.: Denisov I.V. The problem of finding the dominant term of the corner part of the asymptotics of the solution to a singularly perturbed elliptic equation with a nonlinearity // Computational Mathematics and Mathematical Physics. 1999. V. 39, No. 5. P. 747-759.)

3. Денисов И.В. Угловой погранслой в нелинейных сингулярно возмущенных эллиптических уравнениях // Журнал вычисл. матем. и матем. физики. – 2001, т.41, №3, сс. 390-406. (English transl.: Denisov I.V. The corner boundary layer in nonlinear singularly perturbed elliptic equations // Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2001. V. 41, No. 3. P. 362-378.)

4. Денисов И.В. Угловой погранслой в немонотонных сингулярно возмущенных краевых задачах с нелинейностями // Журнал вычисл. матем. и матем. физики. – 2004, т.44, №9, сс. 1674-1692. (English transl.: Denisov I.V. The corner boundary layer in nonmonotone singularly perturbed boundary value problems with nonlinearities // Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2004. V. 44, No. 9. P. 1592-1610.)

5. Денисов И.В. Угловой погранслой в нелинейных сингулярно возмущенных эллиптических задачах // Журнал вычисл. матем. и матем. физики. – 2008, т.48, №1, сс. 62-79. (English transl.: Denisov I.V. Corner boundary layer in nonlinear singularly perturbed elliptic problems // Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2008. V. 48, No. 1. P. 59-75.)

УДК 511.3

Башни полей Дирихле и многомерные квадратурные формулы[1]

Н. Н. Добровольский (Россия, г. Тула)
Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого
e-mail: cheb@tspu.tula.ru, nikolai.dobrovolsky@gmail.com
Н. М. Добровольский (Россия, г. Тула)
Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого
e-mail: dobrovol@tsput.ru

Dirichlet field towers and multidimensional quadrature formulas [1]

N. N. Dobrovol'skii (Russia, Tula)
Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University
e-mail: cheb@tspu.tula.ru, nikolai.dobrovolsky@gmail.com
N. M. Dobrovol'skii (Russia, Tula)
Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University
e-mail: dobrovol@tsput.ru

Термин башня полей Дирихле используется в известной монографии Хуа Ло-Кена и Вань Юаня [13] по теоретико-числовому методу в приближенном анализе. В работах по криптографии [6] используется другой термин мультиквадратичные поля. В обоих случаях речь идёт об алгебраическом расширении поля рациональных чисел $\mathbb{Q}$ с помощью присоединения нескольких квадратичных иррациональностей $\sqrt{d_1},\ldots,\sqrt{d_n}$, где $d_1,\ldots,d_n$ — бесквадратные натуральные числа такие, что $\sqrt{d_k}$ не содержится в алгебраическом расширении $\mathbb{Q}(\sqrt{d_1},\ldots,\sqrt{d_{k-1}})$ $(k=1,\ldots,n)$. Будем для краткости писать $\mathbb{DF}_n$ или $\mathbb{DF}_n(\vec{d})$, где $\vec{d}=(d_1,\ldots,d_n)$. В результате такого расширения получается башня чисто-вещественных алгебраических расширений поля рациональных чисел $\mathbb{Q}$ степени 2^n: $\mathbb{Q}\subset\mathbb{DF}_1\subset\ldots\subset\mathbb{DF}_n$.

Как известно, для приближенного интегрирования функций многих переменных по единичному $s-$мерному кубу $\overline{G}_s=\{\vec{x}\,|\,0\leqslant x_\nu\leqslant 1,\nu=1,2,\ldots,s\}$, $G_s=\{\vec{x}\,|\,0\leqslant x_\nu<1,\nu=1,2,\ldots,s\}$ по методу К. К. Фролова [11], [12] в модификации Н. М. Добровольского ([1] — [5]) для непрерывных периодических функций с периодом равным единице по каждой из переменных x_ν $(\nu=1,2,\ldots,s)$, принадлежащих классу $E_s^\alpha(C)$, который состоит из периодических функций

$$f(\vec{x})=\sum_{m_1,\ldots,m_s=-\infty}^{\infty}C(\vec{m})e^{2\pi i(\vec{m},\vec{x})},\quad |C(\vec{m})|\leqslant\frac{C}{(\overline{m}_1\ldots\overline{m}_s)^\alpha},\quad(\alpha>1)$$

и $\overline{m}=\max(1,|m|)$ для любого вещественного m. Для произвольного вектора $\vec{x}$ его дробной частью называется вектор $\{\vec{x}\}=(\{x_1\},\ldots,\{x_s\})$. Под произвольной решеткой $\Lambda\subset\mathbb{R}^s$ мы будем понимать только полные решетки, то есть $\Lambda=\{m_1\vec{\lambda}_1+\ldots+m_s\vec{\lambda}_s\,|\,m_1,\ldots,m_s\in\mathbb{Z}\}$, где $\vec{\lambda}_1,\ldots,\vec{\lambda}_s$ — система линейно-независимых векторов в $\mathbb{R}^s$. Взаимная решетка $\Lambda^*=\{\vec{x}\,|\,\forall\vec{y}\in\Lambda\ (\vec{x},\vec{y})\in\mathbb{Z}\}$.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ №19-41-710004_р_а
[1]This work was prepared under a grant from the RFBR №19-41-710004_р_а

Определение 1. *Для произвольной решетки Λ обобщенной параллелепипедальной сеткой $M(\Lambda)$ называется множество $M(\Lambda) = \Lambda^* \cap G_s$. Сетка $M_1(\Lambda) = \Lambda^* \cap [-1;1)^s$. Обобщенной параллелепипедальной сеткой II рода $M'(\Lambda)$ называется множество*

$$M'(\Lambda) = \{\vec{x} \,|\, \vec{x} = \{\vec{y}\}, \vec{y} \in M_1(\Lambda)\}.$$

Модификация Н. М. Добровольского метода К. К. Фролова опирается на следующую общую конструкцию (см. [2]).

Определение 2. *Весовой функцией порядка r с константой B называется гладкая функция $\rho(\vec{x})$, удовлетворяющая условиям*

$$\sum_{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_s=-1}^{0} \rho(\vec{x} + (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_s)) = 1 \text{ при } \vec{x} \in G_s,$$

$$\rho(\vec{x}) = 0 \quad \text{при} \quad \vec{x} \notin (-1;1)^s,$$

$$\left| \int_{-1}^{1} \ldots \int_{-1}^{1} \rho(\vec{x}) e^{2\pi i (\vec{\sigma}, \vec{x})} d\vec{x} \right| \leqslant B(\overline{\sigma}_1 \ldots \overline{\sigma}_s)^{-r} \quad \text{для любого} \quad \vec{\sigma} \in \mathbb{R}^s.$$

Определение 3. *Квадратурной формулой с обобщенной параллелепипедальной сеткой II типа и весовой функцией $\rho(\vec{x})$ называется формула вида*

$$\int_0^1 \cdots \int_0^1 f(\vec{x}) d\vec{x} = (\det \Lambda)^{-1} \sum_{\vec{x} \in M'(\Lambda)} \rho_{\vec{x}} f(\vec{x}) - R_{N'(\Lambda)}[f], \tag{1}$$

$$\text{где} \quad \rho_{\vec{x}} = \sum_{\vec{y} \in M_1(\Lambda), \{\vec{y}\} = \vec{x}} \rho(\vec{y}), \quad N'(\Lambda) = |M'(\Lambda)|,$$

$R_{N'(\Lambda)}[f]$ — *погрешность квадратурной формулы.*

Для погрешности квадратурной формулы с обобщенной параллелепипедальной сеткой II рода на классе E_s^α справедлива оценка

$$R_{N'(\Lambda)}[E_s^\alpha(C)] = \sup_{f \in E_s^\alpha(C)} |R_{N'(\Lambda)}[f]| \leqslant CB \cdot c_1(\alpha)^s \zeta_H(\Lambda|\alpha),$$

$$\text{где} \quad c_1(\alpha) = 2^{\alpha+1}\left(3 + \frac{2}{\alpha - 1}\right), \quad \zeta_H(\Lambda|\alpha) = \sum_{\vec{x} \in \Lambda}{}' (\overline{x}_1 \ldots \overline{x}_s)^{-\alpha}.$$

Вектор $\vec{\lambda} = (\lambda^{(1)}, \ldots, \lambda^{(s)})$ называется целым алгебраическим, если многочлен $f_{\vec{\lambda}}(x) = (x - \lambda^{(1)}) \ldots (x - \lambda^{(s)}) \in \mathbb{Z}[x]$. Вектор $\vec{\lambda} = (\lambda^{(1)}, \ldots, \lambda^{(s)})$ — алгебраический, если найдется натуральное число n такое, что вектор $\vec{\lambda}_1 = n\vec{\lambda}$ будет целым алгебраическим вектором. Решётка Λ называется алгебраической, если любой вектор $\lambda \in \Lambda$ будет алгебраическим вектором.

В работе [10] показано, что для любого чисто-вещественного алгебраического поля F_s степени s над полем рациональных чисел $\mathbb{Q}$ множество алгебраических решёток $\mathbb{A}(F_s)$ всюду плотно в метрическом пространстве PR_s. Ясно, что это будет справедливо для полей Дирихле и соответствующей размерности $s = 2^n$.

Отсюда следует, что множество алгебраических сеток всюду плотно в метрическом пространстве обобщенных параллелепипедальных сеток. В настоящее время изучена только гиперболическая дзета-функция растянутой алгебраической решётки, соответствующей кольцу целых алгебраических чисел произвольного чисто-вещественного алгебраического поля F_s

степени s над полем рациональных чисел $\mathbb{Q}$. Вопрос об оптимальном выборе такого поля или выборе других алгебраических решёток и сеток остается открытым.

С точки зрения эффективности задания алгебраических чисто-вещественных полей, поля Дирихле $\mathbb{DF}_n$ не имеют себе равных. Поясним это на примере поля $\mathbb{DF}_2(\sqrt{2},\sqrt{3})$. Его кольцо целых алгебраических чисел $\mathbb{Z}_{\mathbb{DF}_2}$ совпадает со своими сопряженными кольцами и задается простым равенством

$$\mathbb{Z}_{\mathbb{DF}_2}=\{(m+m_1\sqrt{2}+m_2\sqrt{3}+m_3\sqrt{6})|m,m_1,m_2,m_3\in\mathbb{Z}\}.$$

Очевидно, что для целого алгебраического числа $\theta(\vec{m})=\theta^{(1)}(\vec{m})=(m+m_1\sqrt{2}+m_2\sqrt{3}+$ $+m_3\sqrt{6})\in\mathbb{Z}\}$ его алгебраически сопряженные числа $\theta^{(\nu)}(\vec{m})$ $(\nu=2,3,4)$ задаются простыми формулами: $\theta^{(2)}(\vec{m})=(m-m_1\sqrt{2}+m_2\sqrt{3}-\ -m_3\sqrt{6})\in\mathbb{Z}^{(2)}\}$, $\theta^{(3)}(\vec{m})=(m+m_1\sqrt{2}-m_2\sqrt{3}-$ $-m_3\sqrt{6})\in\mathbb{Z}^{(3)}\}$, $\theta^{(4)}(\vec{m})=(m-m_1\sqrt{2}-m_2\sqrt{3}+m_3\sqrt{6})\in\mathbb{Z}^{(2)}\}$. Аналогично описываются и кольца целых алгебраических чисел и для произвольного поля Дирихле $\mathbb{DF}_n$. Отличия содержатся только для чисел $d\equiv 2,3\pmod 4$ и $d\equiv 1\pmod 4$. Подробно эти отличия разобраны в работах [7]–[9] для простейшего поля Дирихле при $n=1$, $s=2$.

В заключении остановимся на проблеме использования полей Дирихле $\mathbb{DF}_n$ для построения квадратурных формул для размерности s из диапазона $2^{n-1}<s\leqslant 2^n$. Первый ответ относится к числу тривиальных. А именно, всякую функцию $f(\vec{x})\in E_s^\alpha$ можно рассматривать как функцию класса $E_s^{2^n}$, поэтому, подставляя её в квадратурную формулу (1) с алгебраической сеткой, соответствующей полю Дирихле $\mathbb{DF}_n$, получим приближенное значение интеграла с погрешностью $O\left(\frac{\ln^{2^n-1}}{N^\alpha}\right)$, что несколько хуже чем наилучший возможной вариант $O\left(\frac{\ln^{s-1}}{N^\alpha}\right)$.

Другой ответ требует дополнительных исследований. Поясним его на примере $s=3$. Мы можем взять решётку $\Lambda_3(\mathbb{DF}_2)$, заданную равенством

$$\Lambda_3(\mathbb{DF}_2)=\{(m+m_1\sqrt{2}+m_2\sqrt{3},m-m_1\sqrt{2}+m_2\sqrt{3},m+m_1\sqrt{2}-m_2\sqrt{3})|m,m_1,m_2\in\mathbb{Z}\}.$$

Для неё получается новая квадратурная формула типа (1), но вопрос о её погрешности остается открытым, так как новая гиперболическая дзета-функция для решётки $\Lambda_3(\mathbb{DF}_2)$, которая задается равенством

$$\zeta_H(t\Lambda_s(\mathbb{DF}_n)|\alpha)=\sum_{\vec{x}\in t\Lambda_s(\mathbb{DF}_n)}{}'(\overline{x}_1\ldots\overline{x}_s)^{-\alpha},$$

ещё не исследована.

Заметим, что решётку аналогичную решётке $\Lambda_3(\mathbb{DF}_2)$ можно выбрать 4 способами, а в общем случае решётку $\Lambda_s(\mathbb{DF}_n)$ можно выбрать $C_{2^n}^s$ способами. И вопрос как это сделать оптимальным образом, тоже остается открытым.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Добровольский Н. М. Гиперболическая дзета функция решёток. / Деп. в ВИНИТИ 24.08.84, N 6090–84.

2. Добровольский Н. М. О квадратурных формулах на классах $E_s^\alpha(c)$ и $H_s^\alpha(c)$. / Деп. в ВИНИТИ 24.08.84, N 6091–84.

3. Добровольский Н. М. Теоретико–числовые сетки и их приложения. / Дис. ... канд. физ.–мат. наук. Тула, 1984.

4. Добровольский Н. М. Теоретико–числовые сетки и их приложения: / Автореф. дис. ... канд. физ.–мат. наук. Москва, 1985.

5. Добровольский Н. М. Теоретико–числовые сетки и их приложения // Теория чисел и ее приложения: Тез. докл. Всесоюз. конф. Тбилиси, 1985. С. 67–70.

6. Е. А. Киршанова, Е. С. Малыгина, С. А. Новоселов, Д. О. Олефиренко. Алгоритм вычисления идеала Штикельбергера для мультиквадратичных полей // ПДМ, 2021, 51, С. 9–30.

7. А. Н. Кормачева. О неполных частных одной цепной дроби // Чебышевский сборник, 2019, т. 20, вып. 1, с. 293–301.

8. А. Н. Кормачева. Приближение квадратичных алгебраических решёток целочисленными решётками // Чебышевский сборник, 2019, т. 20, вып. 2, с. 366–373.

9. А. Н. Кормачева. Приближение квадратичных алгебраических решёток целочисленными решётками — II // Чебышевский сборник, 2020, т. 21, вып. 3, с. 215–222.

10. Е. Н. Смирнова, О. А. Пихтилькова, Н. Н. Добровольский, Н. М. Добровольский Алгебраические решётки в метрическом пространстве решёток // Чебышевский сборник 2017. Т. 18, вып. 4(64). С. 325–337.

11. Фролов К. К. Оценки сверху погрешности квадратурных формул на классах функций // ДАН СССР. 231. 1976. № 4. С. 818 — 821.

12. Фролов К. К. Квадратурные формулы на классах функций. / Дис. ... канд. физ.-мат. наук. М.: ВЦ АН СССР. 1979.

13. Hua Loo Keng, Wang Yuan Applications of Number Theory to Numerical Analysis, – Springer–Verlag Berlin, 1981.

УДК 511.3

Приближение алгебраических решеток целочисленными решетками[1]

Н. Н. Добровольский (Россия, г. Тула)
Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого
e-mail: cheb@tspu.tula.ru, nikolai.dobrovolsky@gmail.com
Н. М. Добровольский (Россия, г. Тула)
Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого
e-mail: dobrovol@tsput.ru

Approximation of algebraic lattices by integer lattices[1]

N. N. Dobrovol'skii (Russia, Tula)
Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University
e-mail: cheb@tspu.tula.ru, nikolai.dobrovolsky@gmail.com
N. M. Dobrovol'skii (Russia, Tula)
Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University
e-mail: dobrovol@tsput.ru

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ №19-41-710004_р_а
[1]This work was prepared under a grant from the RFBR №19-41-710004_р_а

Как хорошо известно (см. [1]–[5]), для метода Фролова необходимо рассматривать решётку $\Lambda(F)$ чисто-вещественного поля F степени s над полем рациональных чисел $\mathbb{Q}$, которая задается с помощью матрицы $M(F)$:

$$M(F) = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \Theta_1 & \dots & \Theta_s \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \Theta_1^{s-1} & \dots & \Theta_s^{s-1} \end{pmatrix},$$

где $f(x) = (x - \Theta_1)\dots(x - \Theta_s) \in \mathbb{Z}[x]$ — неприводимый целочисленный многочлен степени s, порождающий чисто-вещественное поле F.

Рассмотрим совместные приближения второго рода элементов матрицы $M(F)$:

$$d(\vec{\Theta}, Q) = \max_{1\leqslant j\leqslant s,\, 1\leqslant \nu\leqslant s-1} |Q\Theta_j^\nu - P_{j,\nu}|, \quad |Q\Theta_j^\nu - P_{j,\nu}| = \min_{p_{j,\nu}\in\mathbb{Z}} |Q\Theta_j^\nu - p_{j,\nu}|, \quad Q \in \mathbb{N}.$$

Ясно, что алгебраическая решётка решётка $Q\Lambda(F)$ приближается целочисленной решёткой $\Lambda(Q, \vec{P})$, заданной целочисленной матрицей

$$M(Q, \vec{P}) = \begin{pmatrix} Q & \dots & Q \\ P_{1,1} & \dots & P_{s,1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{1,s-1} & \dots & Pa_{s,s-1} \end{pmatrix}.$$

Заметим, что согласно одной общей теореме о свойствах метрики на пространстве решёток, доказанной А. Н. Кормачёвой [3], справедливо равенство расстояний $\rho(Q\Lambda(F), \Lambda(Q, \vec{P})) = \rho(\Lambda(F), \frac{1}{Q}\Lambda(Q, \vec{P}))$.

Если воспользоваться теоремой Дирихле о совместных приближениях, то для $d(\vec{\Theta}, Q)$ имеем оценку $d(\vec{\Theta}, Q) < Q^{-\frac{1}{s(s-1)}}$. Учитывая, что $\Theta_1^\nu + \dots + \Theta_s^\nu \in \mathbb{Z}$ эту оценку можно улучшить до $d(\vec{\Theta}, Q) < (s-1)Q^{-\frac{1}{(s-1)^2}}$.

Ситуация существенно улучшается в случае полей Дирихле $\mathbb{Q}(\sqrt{d_1},\dots,\sqrt{d_n})$ (здесь мы следуем терминологии Хуа Ло-Кена и Вань Юаня [6]). Поясним это на примере поля Дирихле $F = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ степени 4. Вместо матрицы $M(F)$ для задания решётки $\Lambda(F)$ биквадратичного поля F можно использовать матрицу $M_1(F)$:

$$M_1(F) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ \sqrt{3} & -\sqrt{3} & \sqrt{3} & -\sqrt{3} \\ \sqrt{6} & -\sqrt{6} & -\sqrt{6} & \sqrt{6} \end{pmatrix}, \quad \det M_1(F) = -96.$$

Для построения хороших приближений решётки $\Lambda(F)$ необходимо рассмотреть совместные приближения второго рода элементов матрицы $M_1(F)$:

$$d_1(\sqrt{2}, \sqrt{3}, Q) = \max(|Q\sqrt{2} - P_1|, |Q\sqrt{3} - P_2|, |Q\sqrt{6} - P_3|), \quad Q \in \mathbb{N},$$

$$|Q\sqrt{2} - P_1| = \min_{p_1\in\mathbb{Z}} |Q\sqrt{2} - p_1|, \quad |Q\sqrt{3} - P_2| = \min_{p_2\in\mathbb{Z}} |Q\sqrt{3} - p_2|, \quad |Q\sqrt{6} - P_3| = \min_{p_3\in\mathbb{Z}} |Q\sqrt{6} - p_3|.$$

В этом случае теорема Дирихле обеспечивает для $d_1(\sqrt{2}, \sqrt{3}, Q)$ неравенство $d_1(\sqrt{2}, \sqrt{3}, Q) < Q^{-\frac{1}{3}}$ вместо $3Q^{-\frac{1}{9}}$. В общем случае поля Дирихле степени $s = 2^n$ мы вместо $(2^n-1)Q^{-\frac{1}{(2^n-1)^2}}$ получим $Q^{-\frac{1}{2^n-1}}$.

Таким образом, мы имеем веские аргументы для пристального изучения полей Дирихле с точки зрения получения хороших приближений целочисленными решётками и построения соответствующих рациональных обобщённых параллелепипедальных сеток для многомерных квадратурных формул.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Добровольский Н. М. Гиперболическая дзета функция решёток. / Деп. в ВИНИТИ 24.08.84, N 6090–84.

2. Добровольский Н. М. О квадратурных формулах на классах $E_s^\alpha(c)$ и $H_s^\alpha(c)$. / Деп. в ВИНИТИ 24.08.84, N 6091–84.

3. А. Н. Кормачева. Приближение квадратичных алгебраических решёток целочисленными решётками — II // Чебышевский сборник, 2020, т. 21, вып. 3, с. 215–222.

4. Фролов К. К. Оценки сверху погрешности квадратурных формул на классах функций // ДАН СССР. 231. 1976. № 4. С. 818 — 821.

5. Фролов К. К. Квадратурные формулы на классах функций. / Дис. ... канд. физ.-мат. наук. М.: ВЦ АН СССР. 1979.

6. Hua Loo Keng, Wang Yuan Applications of Number Theory to Numerical Analysis, – Springer–Verlag Berlin, 1981.

УДК 511.32

Функция потребления в математической модели экономического роста Рамсея — Касса — Купманса[1]

А. И. Козко (Россия, г. Москва)
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Российская академия народного хозяйства и государственной службы при Президенте Российской Федерации
e-mail: prozerpi@yahoo.co.uk
Л. М. Лужина (Россия, г. Москва)
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Российская академия народного хозяйства и государственной службы при Президенте Российской Федерации
e-mail: lluzhina@gmail.com
А. Ю. Попов (Россия, г. Москва) Россия, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Российская академия народного хозяйства и государственной службы при Президенте Российской Федерации
e-mail: prozerpi@yahoo.co.uk
В. Г. Чирский (Россия, г. Москва)
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Российская академия народного хозяйства и государственной службы при Президенте Российской Федерации
e-mail: vgchirskii@yandex.ru

[1]Работа первого автора выполнена при поддержке РФФИ (проект 19-01-00332-а)

The consumption function in the Ramsey–Kass–Koopmans mathematical model of economic growth

A. I. Kozko (Russia, Moscow)
Lomonosov Moscow State University, The Russian Presidential Academy of National Economy and Public Administration
e-mail: prozerpi@yahoo.co.uk
L. M. Luzhina (Russia, Moscow)
Lomonosov Moscow State University, The Russian Presidential Academy of National Economy and Public Administration
e-mail: lluzhina@gmail.com
A. Yu. Popov (Russia, Moscow)
Lomonosov Moscow State University, The Russian Presidential Academy of National Economy and Public Administration
e-mail: prozerpi@yahoo.co.uk
V. G. Chirskii (Russia, Moscow)
Lomonosov Moscow State University, The Russian Presidential Academy of National Economy and Public Administration
e-mail: vgchirskii@yandex.ru

Доклад посвящен развитию результатов, опубликованных в [1], [2]. Исследуется математическая модель Рамсея-Касса-Купманса экономического роста в случае стационарности функции сбережения.

В модели Рамсея – Касса – Купманса (см. [3] –[5]), применяемой в теории экономического роста, определяющую роль играет система двух дифференциальных уравнений, которой удовлетворяют функции $K(t)$ — капитал в момент времени t и $C(t)$ — потребление в момент времени t:

$$\begin{cases} \dot{K}(t) = aK^{\alpha}(t) - C(t) - x_1 K(t), \\ \dot{C}(t) = \theta^{-1}\alpha a K^{\alpha-1}(t)C(t) - x_2 C(t). \end{cases} \tag{1}$$

В систему входит набор констант $(a, \alpha, \theta, x_1, x_2)$, характеризующих рассматриваемую экономическую структуру.

Первая группа констант a, α, θ определяет производственную функцию Кобба – Дугласа f и функцию полезности U_θ. В качестве функции $f(K)$, выражающей зависимость производства продукции от капитала K, часто берут степенную функцию Кобба – Дугласа $f(K) = aK^{\alpha}$. Отметим также работы с другими производственными функциями, см. [6].

Во всех востребованных на практике моделях показатель степени α в производственной функции Кобба –Дугласа лежит в пределах $0.7 \leqslant \alpha \leqslant 0.97$. Модели со значениями показателя α меньше $2/3$ считаются заведомо неэффективными и не рассматриваются.

Вторая группа констант, линейными комбинациями которых являются $x_1 = x + n + \delta$ и $x_2 = \frac{\delta+\rho}{\theta} + x$, связана с такими характеристиками изучаемой экономической системы (n, x, δ, θ), как темпы прироста населения, развитие уровня технологии, выбывания капитала, а также ставкой временного предпочтения. В дальнейших рассмотрениях существенно, что x_1, x_2 — небольшие положительные числа, как правило, лежащие в пределах от 0.01 до 0.1.

Мы изучаем решения системы уравнений (1) в том важном частном случае, когда величины x_1 и x_2 связаны между собой соотношением $x_2 = \alpha x_1$.

В случае выполнения равенства $x_2 = \alpha x_1$ мы получили решение системы дифференциальных уравнений (1) в квадратурах, хотя решение содержит интегралы от элементарных функций, в общем случае через элементарные функции не выражаемые. В то же время, в

процессе решения системы (1) мы получили, введя функции $v(t) = K(t)e^{x_1 t}$, $w(t) = C(t)e^{x_2 t}$, явную зависимость $v(w)$ через элементарные функции. Анализ этой зависимости позволил обнаружить ограничение на значения функции потребления $C(t)$, выражаемое через начальные условия $K(0) = K_0$, $C(0) = C_0$.

Как правило, в статьях, где рассматривались экономические модели, описываемые системой дифференциальных уравнений (1) с начальными условиями $K(0) = K_0$, $C(0) = C_0$, рассматривались только возрастающие решения системы (1) (как $K(t)$, так и $C(t)$). Необходимым (но недостаточным) условием возрастания $K(t)$ является следующее неравенство между начальными условиями: $C_0 \leqslant f(K_0)$. Мы несколько расширили допустимый класс решений системы (1), не требуя возрастания $K(t)$; мы лишь требуем, чтобы возрастающей являлась функция $v(t) = K(t)e^{x_1 t}$. Очевидно, что неубывание $K(t)$ влечёт за собой возрастание $v(t)$, но не наоборот.

В указанных предположениях нами доказана теорема, содержание которой состоит в том, что если начальное значение C_0 функции потребления $C(t)$ "ненамного"меньше значения производственной функции f от начального капитала K_0, то $C(t)$ не может "значительно"подняться над своим начальным уровнем без того, чтобы нарушилось возрастание $v(t)$ и, как следствие, начала бы снижаться величина капитала $K(t)$.

Из тождества $C(t) = w(t)e^{-x_2 t}$ и теоремы мы получаем оценки на значения функции потребления.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Козко А. И., Лужина Л. М., Попов А. Ю., Чирский В. Г. О задаче Рамсея-Касса-Купманса для потребительского выбора // Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. 2020. Том. 182. С. 39-44.

2. Козко А. И., Лужина Л. М., Попов А. Ю., Чирский В. Г. Ограничения на значения функции потребления в модели экономического роста Рамсея-Касса-Купманса в случае стационарности функции сбережения. Чебышевский сборник. 2021. (готовится к выходу в печать)

3. Ramsey F. P. A mathematical theory of saving // The Economic Journal. December. 1928. P. 543–559.

4. Барро Р. Дж., Сала-и-Мартин Х. Экономический рост // М.: БИНОМ. Лаборатория знаний. 2010.

5. Benassy Jean-Pascal. The Ramsey Model. Macroeconomic Theory. // New York: Oxford University Press. 2011. С. 145–160.

6. Gomez M. A., Economic growth and factor substitution with elastic labor supply // Math. Social Sci. 2018. V. 94. P. 49-57.

УДК 511.9

Совместные приближения квадратичных иррациональностей и квадратурные формулы[1]

А. Н. Кормачева (Швейцария, г. Цюрих)
e-mail: juska789@mail.ru

Joint approximations of quadratic irrationalities and quadrature formulas[1]

A. N. Kormacheva (Switzerland, Zurich)
e-mail: juska789@mail.ru

Пусть β — произвольная вещественная иррациональность и решётка $\Lambda(\beta)$ задана равенством

$$\Lambda(\beta) = \{(n + k\beta, n - k\beta) | n, k \in \mathbb{Z}\}.$$

Решётка $\Lambda(\beta)$ имеет базис $\vec{\lambda}_1 = (1, 1)$, $\vec{\lambda}_2 = (\beta, -\beta)$. Взаимная решётка $\Lambda^*(\beta)$ задается взаимным базисом $\vec{\lambda}_1^* = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $\vec{\lambda}_2^* = \left(\frac{1}{2\beta}, -\frac{1}{2\beta}\right)$.

Через $\frac{P_m}{Q_m}$ обозначим m-ую подходящую дробь к β. Таким образом,

$$\beta = \frac{P_m}{Q_m} + \frac{(-1)^m \theta_m}{Q_m^2}, \quad Q_m\beta = P_m + \frac{(-1)^m \theta_m}{Q_m}, \quad 0 < \theta_m < 1 \quad (m = 0, 1, \ldots). \tag{1}$$

Отсюда следует, что

$$\frac{1}{2Q_m\beta} = \frac{1}{2P_m} - \frac{(-1)^m \theta_m}{(2P_mQ_m + (-1)^m\theta_m)2P_m} \quad (m = 0, 1, \ldots). \tag{2}$$

По аналогии с квадратичным случаем можно рассмотреть две решётки:

$$\Lambda_m(\beta) = \{(Q_m(n + k\beta), Q_m(n - k\beta)) | n, k \in \mathbb{Z}\},$$
$$\Lambda(P_m, Q_m) = \{(Q_m n + kP_m, Q_m n - kP_m) | n, k \in \mathbb{Z}\}.$$

Они имеют взаимные решётки

$$\Lambda_m^*(\beta) = \left\{ \left(\frac{n}{2Q_m} + \frac{k}{2Q_m\beta}, \frac{n}{2Q_m} - \frac{k}{2Q_m\beta} \right) \middle| \, n, k \in \mathbb{Z} \right\},$$
$$\Lambda^*(P_m, Q_m) = \left\{ \left(\frac{n}{2Q_m} + \frac{k}{2P_m}, \frac{n}{2Q_m} - \frac{k}{2P_m} \right) \middle| \, n, k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

С ними связаны сетки, которые используются при построении квадратурных формул, $M_1(\Lambda_m(\beta)) = \Lambda_m^*(\beta) \cap [-1; 1)^s$, $M(\Lambda(P_m, Q_m)) = \Lambda^*(P_m, Q_m) \cap [0; 1)^s$:

[1]Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта №19-41-710004_р_а.

[1]Acknowledgments: The reported study was funded by RFBR, project number 19-41-710004_r_a.

$$M_1(\Lambda_m(\beta)) = \left\{ \left(\frac{n}{2Q_m} + \frac{k}{2Q_m\beta}, \frac{n}{2Q_m} - \frac{k}{2Q_m\beta} \right) \middle| \, k \in A(n), |n| \leqslant 2Q_m - 1 \right\},$$

$$A(n) = \left\{ k \left| \begin{array}{ll} -2P_m < k < 2P_m, & \text{при } n = 0, \\ -2P_m + \frac{P_m n}{Q_m} < k < 2P_m - \frac{P_m n}{Q_m}, & \text{при } n = 1, \dots 2Q_m - 1, \\ -2P_m - \frac{P_m n}{Q_m} < k < 2P_m - \frac{P_m n}{Q_m}, & \text{при } n = -1, \dots -2Q_m + 1; \end{array} \right. \right\},$$

$$M(\Lambda(P_m, Q_m)) = \left\{ \left(\frac{n}{2Q_m} + \frac{k}{2P_m}, \frac{n}{2Q_m} - \frac{k}{2P_m} \right) \middle| \, k \in B(n), 0 \leqslant n \leqslant 2Q_m - 1 \right\},$$

$$B(n) = \left\{ k \left| \begin{array}{ll} k = 0, & \text{при } n = 0, \\ -\frac{P_m n}{Q_m} \leqslant k \leqslant \frac{P_m n}{Q_m}, & \text{при } n = 1, \dots Q_m - 1, \\ -2P_m + \frac{P_m n}{Q_m} < k < 2P_m - \frac{P_m n}{Q_m}, & \text{при } n = Q_m, \dots 2Q_m - 1; \end{array} \right. \right\}$$

Из результатов А. В. Михляевой [7] следует, что сетка $M(\Lambda(P_m, Q_m))$ всегда будет параллелепипедальной сеткой. Качество этой сетки можно рассчитать с помощью быстрого алгоритма из работы [1].

Остановимся на вопросе приближения точек сетки $M_1(\Lambda_m(\beta))$, лежащих в первом квадранте, точками сетки $M(\Lambda(P_m, Q_m))$. Другими словами, речь идёт о совместных приближениях иррациональных чисел $\frac{k}{2Q_m\beta}$ $(k = 1, \dots, 2P_m - 1)$ рациональными числами $\frac{k}{2P_m}$. Для этого определим величину

$$\rho_m(\beta) = \max_{1 \leqslant k \leqslant 2P_m - 1} \left| \frac{k}{2Q_m\beta} - \frac{k}{2P_m} \right|.$$

Теорема 1. *Для любого $m \geqslant 1$ справедливо неравенство*

$$\rho_m(\beta) < \frac{\theta_m}{2P_mQ_m + (-1)^m\theta_m}.$$

Доказательство. Действительно, утверждение теоремы непосредственно следует из равенства (2). □

Анализируя результат теоремы, мы обнаруживаем парадоксальный факт. Наибольшие значения величин θ_m достигается для квадратичных иррациональностей и иррациональностей с ограниченными неполными частными при разложении в цепную дробь. Для этого класса иррациональностей мы получаем правильный порядок убывания погрешности приближенного интегрирования на классе E_2^α. Но погрешность совместного приближения иррациональных чисел, фигурирующих в точках сетки, соответствующими рациональными точками имеет наихудший порядок убывания.

Выражаю свою благодарность научному руководителю профессору Н. М. Добровольскому за постановку задачи, полезное обсуждение и постоянное внимание к работе.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Вронская Г. Т., Добровольский Н. Н. Отклонения плоских сеток. монография / под редакцией Н. М. Добровольского. Тула, 2012.

2. Дэвенпорт Г. Высшая арифметика. — М.: Наука. 1965 г. — 176 с.

3. А. Н. Кормачева. О неполных частных одной цепной дроби // Чебышевский сборник, 2019, т. 20, вып. 1, с. 293–301.

4. А. Н. Кормачева. Приближение квадратичных алгебраических решёток целочисленными решётками // Чебышевский сборник, 2019, т. 20, вып. 2, с. 366–373.

5. А. Н. Кормачева. Приближение квадратичных алгебраических решёток целочисленными решётками — II // Чебышевский сборник, 2020, т. 21, вып. 3, с. 215–222.

6. Михляева А. В. Приближение квадратичных алгебраических решёток и сеток целочисленными решётками и рациональными сетками // Чебышевский сборник, 2018, т. 19, вып. 3. С. 241–256.

7. Михляева А. В. Функция качества для приближения квадратичных алгебраических сеток // Чебышевский сборник, 2019, т. 20, вып. 1. С. 307–312.

8. А. В. Михляева. Функция качества для приближения квадратичных алгебраических сеток — II // Чебышевский сборник, 2020, т. 21, вып. 3, с. 223–231.

9. А. А. Родионов. Гиперболический параметр приближения квадратичных алгебраических решёток целочисленными // Чебышевский сборник, 2020, т. 21, вып. 3. С. 241–249.

УДК 511.3

Пространство рядов Дирихле для многомерных решёток и алгебра рядов Дирихле решёток, повторяющихся умножением

Н. В. Максименко (Россия, г. Оренбург)
Оренбургский государственный университет
e-mail: mnata.09@gmail.com

The space of Dirichlet series to multivariate lattices and the algebra of Dirichlet series of grids, repetitive multiplication

N. V. Maksimenko (Russia, Orenburg)
Orenburg State University
e-mail: mnata.09@gmail.com

Определение 1. *Тригонометрической суммой сетки с весами (M, ρ) для произвольного целочисленного вектора $\vec{m}$ называется выражение*

$$S(\vec{m}, (M, \rho)) = \sum_{\vec{x} \in M} \rho(\vec{x}) e^{2\pi i (\vec{m}, \vec{x})}, \tag{1}$$

а нормированной тригонометрической суммой сетки с весами —

$$S^*(\vec{m}, (M, \rho)) = \frac{1}{|M|} S(\vec{m}, (M, \rho)).$$

Справедлива следующая обобщенная теорема Коробова о погрешности квадратурных формул (см. [2]).[1]

[1]Здесь и далее $\sum'$ означает суммирование по системам $(m_1, \ldots, m_s) \neq (0, \ldots, 0)$.

Теорема 1. *Пусть ряд Фурье функции $f(\vec{x})$ сходится абсолютно, $C(\vec{m})$ — ее коэффициенты Фурье и $S_{M,\vec{\rho}}(\vec{m})$ — тригонометрические суммы сетки с весами, тогда справедливо равенство*

$$R_N[f] = C(\vec{0})\left(\frac{1}{N}S_{M,\vec{\rho}}(\vec{0}) - 1\right) + \frac{1}{N}\sum_{m_1,\ldots,m_s=-\infty}^{\infty}{}' C(\vec{m})S_{M,\vec{\rho}}(\vec{m}) =$$

$$= C(\vec{0})\left(S^*_{M,\vec{\rho}}(\vec{0}) - 1\right) + \sum_{m_1,\ldots,m_s=-\infty}^{\infty}{}' C(\vec{m})S^*_{M,\vec{\rho}}(\vec{m}) \qquad (2)$$

и при $N \to \infty$ погрешность $R_N[f]$ будет стремиться к нулю тогда, и только тогда, когда взвешенные узлы квадратурной формулы равномерно распределены в единичном s-мерном кубе.

В работе [3] дано следующее определение дзета-функции сетки M с весами $\vec{\rho}$.

Определение 2. *Дзета-функцией сетки M с весами $\vec{\rho}$ называется функция $\zeta(\alpha|M,\vec{\rho})$, заданная в правой полуплоскости $\alpha = \sigma + it$ $(\sigma > 1)$ рядом Дирихле*

$$\zeta(\alpha|M,\vec{\rho}) = \sum_{m_1,\ldots,m_s=-\infty}^{\infty}{}' \frac{|S^*_{M,\vec{\rho}}(\vec{m})|}{(\overline{m}_1\ldots\overline{m}_s)^\alpha} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{S^*(M,\vec{\rho},n)}{n^\alpha}, \qquad (3)$$

где

$$S^*(M,\vec{\rho},n) = \sum_{\vec{m}\in N(n)} |S^*_{M,\vec{\rho}}(\vec{m})| \qquad (4)$$

и $N(n)$ — норменная поверхность, заданная равенством $N(n) = \{\vec{m}\in\mathbb{Z}^s | \overline{m}_1\ldots\overline{m}_s = n\}$.

Справедливы две обобщенные теоремы Коробова о погрешности квадратурных формул — это теорема 1 и следующая теорема:

Теорема 2. *Если $f(x_1,\ldots,x_s)\in E^\alpha_s(C)$, то для погрешности квадратурной формулы справедлива оценка*

$$|R_N[f]| \le C\left|\frac{1}{N}S_{M,\vec{\rho}}(\vec{0}) - 1\right| + \frac{C}{N}\sum_{m_1,\ldots,m_s=-\infty}^{\infty}{}' \frac{|S_{M,\vec{\rho}}(\vec{m})|}{(\overline{m}_1\ldots\overline{m}_s)^\alpha} = C\left|S^*_{M,\vec{\rho}}(\vec{0}) - 1\right| + C\cdot\zeta(\alpha|M,\vec{\rho}), \qquad (5)$$

где сумма $S_{M,\vec{\rho}}(\vec{m})$ определена равенством (1). На классе $E^\alpha_s(C)$ эту оценку нельзя улучшить.

Другими словами теорему 2 можно сформулировать так:

Для нормы $\|R_N[f]\|_{E^\alpha_s}$ линейного функционала погрешности приближенного интегрирования по квадратурной формуле (2) справедливо равенство

$$\|R_N[f]\|_{E^\alpha_s} = \left|\frac{1}{N}S_{M,\vec{\rho}}(\vec{0}) - 1\right| + \frac{1}{N}\sum_{m_1,\ldots,m_s=-\infty}^{\infty}{}' \frac{|S_{M,\vec{\rho}}(\vec{m})|}{(\overline{m}_1\ldots\overline{m}_s)^\alpha} = \left|S^*_{M,\vec{\rho}}(\vec{0}) - 1\right| + \zeta(\alpha|M,\vec{\rho}). \qquad (6)$$

Следуя К. И. Бабенко [1] и О. В. Локуциевскому [7], в работе [2] дано следующее определение ненасыщаемого алгоритма приближенного интегрирования на классе $E_s = \bigcup\limits_{\alpha>1} E^\alpha_s$.

Определение 3. *Будем говорить, что периодическая функция $f(\vec{x})$ из класса $E_s = \bigcup\limits_{\alpha>1} E^\alpha_s$ принадлежит конечному показателю $\alpha = \alpha(f(\vec{x}))$, если $f(\vec{x})\in E^\alpha_s$ и $f(\vec{x})\notin E^\beta_s$ для любого $\beta > \alpha$. В противном случае будем говорить, что периодическая функция из класса E_s принадлежит бесконечному показателю.*

Ясно, что бесконечному показателю принадлежит любой конечный тригонометрический полином. Если периодическая функция $f(\vec{x}) \in E_s$ не является конечным тригонометрическим полиномом и принадлежит бесконечному показателю, то она будет бесконечно дифференцируемой функцией.

Определение 4. *Будем говорить, что алгоритм приближенного интегрирования* $< M(j), \vec{\rho}(j), \Delta >$ $(j = 1, 2, \ldots)$ *периодических функций из класса* $E_s = \bigcup\limits_{\alpha>1} E_s^{\alpha}$ *ненасыщаемый типа* (γ, λ), *если для любой периодической функции* $f(\vec{x})$ *конечного показателя* $\alpha = \alpha(f(\vec{x}))$ *и погрешности приближенного интегрирования выполняется равенство*

$$R_{N_j}[f(\vec{x})] = O\left(\frac{\ln^{\gamma} N_j}{N_j^{\lambda \cdot \alpha}}\right). \tag{7}$$

Теорема 3. *Множество* $\mathbb{D}^*(M(Q_{sp}(\Lambda)))_{\mathbb{K}}$ *всех обратимых рядов Дирихле из алгебры* $\mathbb{D}(M(Q_{sp}(\Lambda)))_{\mathbb{K}}$ *является бесконечной абелевой группой, состоящей из рядов, у которых первый коэффициент отличен от нуля.*

Теорема 4. *Множество* $\mathbb{D}(M(Q_{sp}(\Lambda)))_{\mathbb{U}_{\mathbb{K}}}$ *целых рядов Дирихле является мультипликативной группой.*

Теорема 5. *Для любого* $f(\alpha) \in \mathbb{D}(M(Q_{sp}(\Lambda)))_{\mathbb{K}}$ *справедливо равенство*

$$f(\alpha) = f^{(p)}(\alpha)(a(1) + f^*(\alpha) + f(\alpha)f^{**}(\alpha)).$$

Теорема 6. *Для любого* $\vec{m} \in \mathbb{N}^s$ *справедливо равенство*

$$M(Q_{sp}(\Lambda(\vec{m}))) = Q_{sp}(\Lambda(\vec{m})).$$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бабенко К. И. Основы численного анализа. М. : Наука, 1986.

2. Добровольская Л. П., Добровольский Н. М., Симонов А. С. О погрешности приближенного интегрирования по модифицированным сеткам // Чебышевский сб. 2008. — Т. 9, вып. 1 (25). Тула, Из-во ТГПУ им. Л. Н. Толстого. — С. 185–223.

3. Добровольский Н. М., Манохин Е. В., Реброва И. Ю., Рощеня А. Л. О непрерывности дзета-функции сетки с весами // Известия ТулГУ. Сер. Математика. Механика. Информатика. Т. 7, вып. 1. — Тула, 2001. С. 82–86.

4. Н. М. Добровольский, А. Л. Рощеня, "О числе точек решетки в гиперболическом кресте", Матем. заметки, 63:3 (1998). С. 363–369.

5. Добровольский Н. Н., Добровольский М. Н., Добровольский Н. М., Балаба И. Н., Реброва И. Ю. Гипотеза о "заградительном ряде" для дзета-функций моноидов с экспоненциальной последовательностью простых // Чебышевский сб. 2018. — Т. 19, вып. 1. — С. 106–123.

6. Н. Н. Добровольский, М. Н. Добровольский, Н. М. Добровольский, И. Н. Балаба, И. Ю. Реброва. Алгебра рядов Дирихле моноида натуральных чисел // Чебышевский сборник. 2019. Т. 20, вып. 1, С. 180–196

7. О. В. Локуциевский, М. Б. Гавриков Начала численного анализа / М.: ТОО "Янус"1995

8. Максименко Н. В. Пространство рядов Дирихле для многомерных решёток и алгебра рядов Дирихле решёток, повторяющихся умножением // Чебышевский сб. 2020. Т. 21, вып. 1 С. 233–246

9. Чудаков Н. Г. Введение в теорию L-функций Дирихле. — М. – Л.: ОГИЗ, 1947. — 204 с.

УДК 517.5

Оценки алгебраических констант Никольского[1]

И. А. Мартьянов (Россия, г. Тула)
Тульский государственный университет
e-mail: martyanow.ivan@yandex.ru

Estimates of the Nikolskii algebraic constants

I. A. Martyanov (Russia, Tula)
Tula State University
e-mail: martyanow.ivan@yandex.ru

Пусть $\mathcal{P}_n$ — множество алгебраических комплекснозначных полиномов степени не выше n, $\mathcal{E}$ — множество целых функций экспоненциального типа не больше 1. Через

$$M_p(n) = \sup_{P\in\mathcal{P}_n\setminus\{0\}} \frac{\|P\|_\infty}{\|P\|_p}, \quad N_p = \sup_{F\in(\mathcal{E}\cap L^p_{|x|}(\mathbb{R}))\setminus\{0\}} \frac{\|F\|_\infty}{\|F\|_p}$$

обозначаются соответственно алгебраическая константа Никольского в пространстве $L^p([-1,1])$ и константа Никольского в весовом пространстве $L^p_{|x|}(\mathbb{R})$.

Теорема 1. *Для всех $p>0$ справедливы неравенства*

$$n^{2/p}N_p \leqslant M_p(n) \leqslant \Big(n+2\Big\lceil\frac{3/2}{p}\Big\rceil\Big)^{2/p}N_p, \quad \forall\, n\in\mathbb{Z}_+. \tag{1}$$

Отсюда, в частности, вытекает асимптотический результат типа Левина–Любинского $M_p(n)\sim n^{2/p}N_p$, $n\to\infty$, доказанный при $p\geqslant 1$ M.I. Ganzburg.

При $p\geqslant 1$, $n\geqslant 2$ известны оценки [1]

$$\frac{M_p(n)}{n^{2/p}} \leqslant \begin{cases} (p+1)^{1/p} & \text{(a)},\\ \big(\frac{[p]+1}{2^{3/2}}\big)^{2/p} & \text{(b)}. \end{cases}$$

Оценка (a) лучше (b) при всех больших p и хуже при небольших p. Отсюда и из (1) при больших p получаем оценку $N_p\leqslant (p+1)^{1/p}$, точную при $p=\infty$. С помощью границ (1) ее можно уточнить:

$$M_p(1)3^{-2/p} \leqslant N_p \leqslant M_p(1), \quad M_p(1)\sim\Big(\frac{p+1}{(1+\frac{\ln 2p}{2p})(1+\frac{1}{2p})}\Big)^{1/p}, \quad p\to\infty.$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 19-31-90152).

Вычисление константы $M_p(n)$ при $p \geqslant 1$ сводится к решению системы уравнений

$$\sum_{i=0}^{m}(-1)^{m-i}\int_{a_i}^{a_{i+1}}(1-x)x^k(P_m(x))^{p-1}\,dx = 0, \quad k = 0,1,\ldots,m-1, \tag{2}$$

где $P_m(x) = \prod_{i=1}^{m}(x-a_i)$ — единственный экстремальный полином для $M_p(n)$, $-1 = a_0 < a_1 < \ldots < a_m < 1 = a_{m+1}$. Для целых p система (2) будет полиномиальной относительно неизвестных корней a_i и ее можно решить численно методом Ньютона. В таблице для сравнения приведены верхние оценки константы N_p при $p = 1,2,\ldots,8$, полученные на основе (a), (b) и (1) для $m = 3$ (c) (округление до 4 знаков):

(a)	2	1.7321	1.5874	1.4953	1.4310	1.3831	1.3459	1.3161
(b)	0.5	1.0607	1.2599	1.3296	1.3510	1.3526	1.3459	1.3356
(c)	0.3850	0.9428	1.1450	1.2159	1.2391	1.2433	1.2396	1.2324

Получено небольшое усиление известных границ алгебраических констант Никольского. Доказательство результатов приведено в [2].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Milovanović G.V., Mitrinović D.S., Rassias Th.M. Topics in polynomials: Extremal problems, inequalities, zeros. Singapore: World Scientific Publ. Co., 1994.

2. Горбачев Д.В., Мартьянов И.А. Границы полиномиальных констант Никольского в L^p с весом Гегенбауэра // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2020. Том 26, № 4. С. 126–137.

УДК 511.3

Приближение алгебраических решёток и сеток целочисленными решётками и рациональными сетками[1]

А. В. Михляева (Россия, г. Оренбург)
Оренбургский государственный университет
e-mail: white.background.invisible@mail.ru

Approximation of algebraic lattices and nets by integer lattices and rational nets[1]

A. V. Mikhlyaeva (Russia, Orenburg)
Orenburg State University
e-mail: white.background.invisible@mail.ru

Алгебраические решётки и соответствующие алгебраические сетки вошли в науку в 1976 году в работах К. К. Фролова [8], [9]. Главное их достоинство заключается в достижении

[1]Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта №19-41-710004_р_а.

[1]Acknowledgments: The reported study was funded by RFBR, project number 19-41-710004_r_a.

правильного порядка погрешности приближённого интегрирования на классах Коробова [4] и правильного порядка гиперболической дзета-функции решёток [2], [3].

Недостатки квадратурных формул с алгебраическими сетками: во-первых, это квадратурные формулы с весами, причём достаточно сложными, во-вторых, большая величина констант, которые трудно оценить. В результате применение таких квадратурных формул на практике весьма проблематично.

В связи с этим возникает вопрос о приближении алгебраических сеток рациональными. Так как рациональные параллелепипедальные сетки дают квадратурные формулы с равными весами только в случае, если они образованы точками решётки взаимной к целочисленной решётке, то возникает проблема приближения алгебраической решётки целочисленной.

Из теории обобщённых параллелепипедальных сеток и квадратурных формул с этими сетками возникает следующая постановка.

Пусть у нас есть алгебраическая решётка $\Lambda(t,F)=t\Lambda(F)$, где $\Lambda(F)$ - решётка, состоящая из точек $(\Theta^{(1)},...,\Theta^{(s)})$, образующих полный набор алгебраически сопряжённых чисел, и $\Theta=\Theta^{(1)}$ пробегает кольцо целых алгебраических чисел чисто вещественного алгебраического поля F.

Вопрос о приближении алгебраической решётки $\Lambda(t,F)$ целочисленной решёткой $\Lambda(t)$ можно ставить так:

Найти целочисленную решётку $\Lambda(t)$ такую, что расстояние $\rho(\Lambda(t),\Lambda(t,F))$ минимальное для заданного натурального t.

Теория гиперболической дзета-функции решёток показывает, что наиболее важны те решётки Λ, для которых отношение гиперболического параметра решётки $q(\Lambda)$ к $det\Lambda$ наибольшее.

В связи с этим можно дать следующее определение наилучшего приближения алгебраической решётки $\Lambda(t,F)$ целочисленной решёткой $\Lambda(t)$.

Целочисленная решётка $\Lambda(t)$ называется наилучшим приближением алгебраической решётки $\Lambda(t,F)$ с показателем β, если для любого натурального $t_1<t$ выполняется неравенство

$$\frac{q(\Lambda(t))*ln^{(\beta)}det\Lambda(t)}{det\Lambda(t)}>\frac{q(\Lambda(t_1))*ln^{(\beta)}det\Lambda(t_1)}{det\Lambda(t_1)}.$$

Такая постановка является новой и ранее не встречалась в литературе.

Принципиальный вопрос, который связан с такой постановкой, заключается в следующем.

Какое минимальное значение β допустимо в определении наилучшего приближения алгебраической решётки целочисленной?

Если окажется, что $\beta>0$, то это означает, что для наилучших приближений алгебраических решёток имеется аналог теоремы Туэ для приближения алгебраических чисел.

В работе [5] рассматривалось квадратичное поле $F=\mathbb{Q}(\sqrt{p})$, где p — простое число и $p=2$ или $p\equiv 3 \pmod 4$. Для него кольцо целых алгебраических чисел $\mathbb{Z}_F$ имеет вид: $\mathbb{Z}_F=\{n+k\sqrt{p}|n,k\in\mathbb{Z}\}$. В работе [6] эти исследования были продолжены и была найдена форма функции качества $H(M(\Lambda_m(p)))$, которая позволяет её вычислять за $O(\ln N(P_m,Q_m))$ арифметических операций.

В работе [7] был рассмотрен общий случай квадратичного поля $F=\mathbb{Q}(\sqrt{d})$, где дискриминант поля d — произвольное бесквадратное натуральное число больше 1, или как иногда говорят d — радикал.

В работе [1] для величин H_k, заданных равенствами

$$H_k=\frac{9}{Q_k}\sum_{n=0}^{Q_k-1}\left(1-2\frac{n}{Q_k}\right)^2\left(1-2\left\{\frac{P_kn}{Q_k}\right\}\right)^2,$$

доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Справедливо равенство*

$$H_k = 1 + \frac{4}{5Q_k^2}\left(10 + 5k + \sum_{\lambda=1}^{k} q_\lambda^2 - \frac{3(P_k^2 + Q_{k-1}^2)}{Q_k^2} + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{Q_k}\left(2\sum_{\lambda=1}^{k} q_\lambda (Q_\lambda T_{k,\lambda+1} + Q_{\lambda-2} T_{k,\lambda+1} + Q_{\lambda-2} T_{k,\lambda-1}) - 10\sum_{\lambda=1}^{k-1} Q_{\lambda-1} T_{k,\lambda+1}\right)\right).$$

Здесь через $T_{k,\nu}$ обозначены величины $T_{k,\nu} = [q_{\nu+1}, \ldots, q_k]_{(k-\nu)}$.

Выражаю свою благодарность научному руководителю профессору Н. М. Добровольскому за постановку задачи, полезное обсуждение и постоянное внимание к работе.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Вронская Г. Т., Добровольский Н. Н. Отклонения плоских сеток. Монография под редакцией Н. М. Добровольского. — Тула, 2012, 193 с.

2. Добровольская Л. П., Добровольский М. Н., Добровольский Н. М., Добровольский Н. Н. Гиперболические дзета-функции сеток и решёток и вычисление оптимальных коэффициентов // Чебышевский сборник. 2012. Т. 13, № 4(44). С. 4-107.

3. Добровольская Л. П., Добровольский М. Н., Добровольский Н. М., Добровольский Н. Н. Многомерные теоретико-числовые сетки и решётки и алгоритмы поиска оптимальных коэффициентов. - Тула: Изд-во Тул. гос. пед. ун-та им. Л. Н. Толстого, 2012. - 283 с.

4. Коробов Н. М. Теоретико-числовые методы в приближённом анализе (второе издание). - М.: МЦНМО, 2004. 288 с.

5. Михляева А. В. Приближение квадратичных алгебраических решёток и сеток целочисленными решётками и рациональными сетками // Чебышевский сборник. 2018. Т. 19, № 3(67). С. 241–256.

6. Михляева А. В. Функция качества для приближения квадратичных алгебраических сеток // Чебышевский сборник. 2019. Т. 20, № 1(69). С. 305–310.

7. Михляева А. В. Функция качества для приближения квадратичных алгебраических сеток - II // Чебышевский сборник. 2020. Т. 21, № 3(75). С. 223–231.

8. Фролов К. К. Оценки сверху погрешности квадратурных формул на классах функций // ДАН СССР. 1976. Т. 231. № 4, с. 818–821.

9. Фролов К. К. Квадратурные формулы на классах функций // Дис. ... канд. физ.-мат. наук. - М.: ВЦ АН СССР. 1979.

УДК 511.42

О некоторых ограничениях при поиске решений линейного диофантова уравнения[1]

А. С. Подолян (Россия, г. Тула)
Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого
e-mail: alena.balabaeva.93@mail.ru

On some constraints in the search for solutions to the linear Diophantine equation

A. S. Podolyan (Russia, Tula)
Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University
e-mail: alena.balabaeva.93@mail.ru

В работе рассмотрено линейное диофантово уравнение с шестью переменными

$$9k_1 + 5k_2 + 9k_3 + 9k_4 + 10k_5 = 10N + 990. \tag{1}$$

Такое диофантово уравнение возникает при решении одной прикладной задачи машиностроения в области проектирования мерительного инструмента, в частности, наборов плоскопараллельных концевых мер длины [3], [4], [5], [7], [10], [11].

Если рассмотреть однородное диофантово уравнение

$$9k_1 + 5k_2 + 9k_3 + 9k_4 + 10k_5 = 10N, \tag{2}$$

то множеством его решений будет неполная целочисленная решётка Λ в $\mathbb{R}^6$.

Нетрудно видеть, что набор $k_1 = 120$, $k_2 = 18$, $k_3 = 20$, $k_4 = 10$, $k_5 = 10$, $N = 55$ является частным решением неоднородного диофантова уравнения (1). Если положить $\vec{k}_0 = (120, 18, 20, 10, 10)$, $N_0 = 55$, то общим решением уравнения (1) будет сдвинутая решётка

$$\Lambda + (\vec{k}_0, N_0) = \{(\vec{k}, N) | 9k_1 + 5k_2 + 9k_3 + 9k_4 + 10k_5 = 10N + 990\}, \tag{3}$$

где неполная решётка Λ решений однородного диофантова уравнения (2) задана равенством

$$\Lambda = \{(\vec{k}, N) | 9k_1 + 5k_2 + 9k_3 + 9k_4 + 10k_5 = 10N\}. \tag{4}$$

Заметим, что $9 \cdot 1 + (-2) \cdot 5 = -1$, поэтому каждому набору целых чисел (k_3, k_4, k_5, N) соответствует целая точка

$$(9k_3 + 9k_4 + 10k_5 - 10N, -18k_3 - 18k_4 - 20k_5 + 20N, k_3, k_4, k_5, N) \in \Lambda.$$

Так как целая точка $(5k_2, -9k_2, 0, 0, 0, 0) \in \Lambda$, то неполная решётка Λ имеет вид

$$\Lambda = \{(5k_2+9k_3+9k_4+10k_5-10N, -9k_2-18k_3-18k_4-20k_5+20N, k_3, k_4, k_5, N) | k_2, k_3, k_4, k_5, N \in \mathbb{Z}\}$$

и задается базисом из 5 векторов $\vec{\lambda}_1 = (5, -9, 0, 0, 0, 0)$, $\vec{\lambda}_2 = (9, -18, 1, 0, 0, 0)$, $\vec{\lambda}_3 = (9, -18, 0, 1, 0, 0)$, $\vec{\lambda}_4 = (10, -20, 0, 0, 1, 0)$, $\vec{\lambda}_5 = (-10, 20, 0, 0, 0, 1)$.

В приложениях нам требуется найти все натуральные решения, принадлежащие параллелепипеду $\Pi = [100; 200] \times [12; 62] \times [7; 57] \times [2; 52] \times [1; 10] \times [47; 122]$. Этот параллелепипед содержит $K = 101 \cdot 51 \cdot 51 \cdot 51 \cdot 10 \cdot 76 = 10182290760$ целых точек, что затрудняет выполнение

[1]Работа выполнена по гранту РФФИ № 19-41-710004_р_а

полного перебора для нахождения всех точек сдвинутой решётки, принадлежащих данному параллелепипеду.

Так как неполная решётка Λ имеет размерность 5 в шестимерном пространстве, то она задается 5 целочисленными параметрами. Обозначим их через t_1, t_2, t_3, t_4, t. Базис решётки Λ преобразуем, взяв вместо $\vec{\lambda}_2$ вектор $\vec{\lambda}_2' = (-1,0,1,0,0,0)$, и вместо $\vec{\lambda}_3 = (9,-18,0,1,0,0)$ вектор $\vec{\lambda}_3' = (-1,0,0,1,0,0)$. Переходя к новому базису, получим, что общее решение диофантова уравнения (1) имеет вид:

$$\begin{cases} k_1 = 5t_1 - t_2 - t_3 + 10t_4 - 10t + 120 \\ k_2 = -9t_1 - 20t_4 + 20t + 18 \\ k_3 = t_2 + 20 \\ k_4 = t_3 + 10 \\ k_5 = t_4 + 10 \\ N = t + 55 \end{cases} \tag{5}$$

Действительно,

$$\begin{gathered} 9k_1 + 5k_2 + 9k_3 + 9k_4 + 10k_5 = \\ = 9(5t_1 - t_2 - t_3 + 10t_4 - 10t + 120) + 5(-9t_1 - 20t_4 + 20t + 18) + \\ +9(t_2 + 20) + 9(t_3 + 10) + 10(t_4 + 10) = 10(t + 55) + 990 = 10N + 990. \end{gathered}$$

Для определения всех точек сдвинутой неполной решётки Λ, лежащих в параллелепипеде Π, необходимо найти все целочисленные решения системы неравенств

$$\begin{cases} 100 \leqslant k_1 = & 5t_1 - t_2 - t_3 + 10t_4 - 10t + 120 & \leqslant 200 \\ 12 \leqslant k_2 = & -9t_1 - 20t_4 + 20t + 18 & \leqslant 62 \\ 7 \leqslant k_3 = & t_2 + 20 & \leqslant 57 \\ 2 \leqslant k_4 = & t_3 + 10 & \leqslant 52 \\ 1 \leqslant k_5 = & t_4 + 10 & \leqslant 10 \\ 47 \leqslant N = & t + 55 & \leqslant 122 \end{cases} \tag{6}$$

Исключим из системы (6) переменные t_2, t_3, t_4, получим

$$\begin{cases} 100 \leqslant k_1 = & 5t_1 - k_3 - k_4 + 10k_5 - 10N + 600 & \leqslant 200 \\ 12 \leqslant k_2 = & -9t_1 - 20k_5 + 20N - 882 & \leqslant 62 \\ 7 \leqslant & k_3 & \leqslant 57 \\ 2 \leqslant & k_4 & \leqslant 52 \\ 1 \leqslant & k_5 & \leqslant 10 \\ 47 \leqslant & N & \leqslant 122 \end{cases} \tag{7}$$

Из первого и второго неравенств системы (7) получаем для t_1 диапазон изменения

$$\begin{gathered} \max\left(-100 + \frac{k_3 + k_4}{5} - 2k_5 + 2N, \frac{-20k_5 + 20N - 944}{9}\right) \leqslant t_1 \leqslant \\ \leqslant \min\left(-80 + \frac{k_3 + k_4}{5} - 2k_5 + 2N, \frac{-20k_5 + 20N - 894}{9}\right). \end{gathered} \tag{8}$$

Для последующих вычислений сделаем изменения в записи неравенств, которые уменьшат трудоемкость алгоритма:

$$\begin{gathered} -100 - 2k_5 + 2N + \max\left(\frac{k_3 + k_4}{5}, \frac{-2k_5 + 2N + 1}{9} - 5\right) \leqslant t_1 \leqslant \\ \leqslant -80 - 2k_5 + 2N + \min\left(\frac{k_3 + k_4}{5}, \frac{-2k_5 + 2N + 6}{9} - 20\right). \end{gathered} \tag{9}$$

Используя целую часть $[\cdot]$ и функцию потолок $\lceil\cdot\rceil$, определим функции $f_1(k_3,k_4)=\left\lceil\frac{k_3+k_4}{5}\right\rceil$, $f_2(k_3,k_4)=\left[\frac{k_3+k_4}{5}\right]$, $f_3(k_5,N)=\left\lceil\frac{-2k_5+2N+1}{9}\right\rceil$, $f_4(k_5,N)=\left[\frac{-2k_5+2N+6}{9}\right]$. Отсюда следует, что

$$-100-2k_5+2N+\max\left(f_1(k_3,k_4),f_3(k_5,N)-5\right)\leqslant t_1\leqslant$$
$$\leqslant -80-2k_5+2N+\min\left(f_2(k_3,k_4),f_4(k_5,N)-20\right). \qquad (10)$$

Была составлена программа, которая подсчитывает количество точек решения уравнения (1). Сами точки не сохранялись, так как их слишком много: 7822045.

Другой вариант этой программы дает возможность по заданным N, k_5, k_4, k_3 находить все решения с указанными значениями этих переменных.

Заметим,что различных наборов N, k_5, k_4, k_3, принадлежащих параллелепипеду П, ровно 1976760. Анализ работы программы Fot показывает, что только для 369250 наборов из них (18,7% от общего числа) соответствующие точки сдвинутой неполной решётки не принадлежат параллелепипеду П.

В результате работы предложенного алгоритма, реализованного в системе Mathcad, было показано, что из общего количества 10182290760 целых точек, лежащих в заданном параллелепипеде, только 7822045 удовлетворяют заданному диофантову уравнению. Таким образом, полный перебор был сокращён в 1301,7 раза.

В работе [6] рассмотрены некоторые приложения этого диофантова уравнения в технических вопросах, связанных с решением одной прикладной задачи машиностроения в области проектирования мерительного инструмента, в частности, наборов концевых мер длины.

В этой же статье отражён итерационный характер уточнения математической модели указанной прикладной задачи. После первой корректировки модели количество наборов уменьшилось ещё в 193,237 раза, а после второй корректировки модели общее сокращение наборов пригодных для последующей оптимизации стало в 581114,6 раза.

В заключении указаны направления дальнейших исследований и возможное применение идей нейросетей Хопфилда и машинного обучения для реализации отбора оптимальных решений.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. ГОСТ 9038-90. Меры длины концевые плоскопараллельные. Технические условия (с Изменением N 1). УТВЕРЖДЕН И ВВЕДЕН В ДЕЙСТВИЕ Постановлением Государственного комитета СССР по управлению качеством продукции и стандартам от 25.01.90 №86.

2. Г.Г. Малинецкий. Математические основы синергетики. Москва, URSS, 2009.

3. А. А. Муллабаев, А. П. Фот. Оптимизация наборов концевых мер и щупов // ВЕСТНИК ОГУ, 2005. — No 4. — С.152-153.

4. Св.-во гос. рег. прогр. для ЭВМ № 2016611967. Российская Федерация. Программа «Расчет набора концевых мер и его характеристик по универсальной функции и относительной металлоемкости» / А.П.Фот (RU), Р.М.Джалмухамедов (RU); правообладатель – федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Оренбургский государственный университет».– № 2015663252; дата поступления 28.12.2015 г.; дата регистр. в Реестре программ для ЭВМ 15.02.2016 г. – Опубл. 20.03.2016 г.

5. Патент RU №2629686 C1 МПК G01B5/02 (2006.01). Универсальный набор концевых мер /М. Ю. Тарова (РФ), А. П. Фот (РФ); Акционерное общество "Военно-промышленная корпорация "Научно-производственное объединение машиностроения" (RU) — № 2016107665

— Заявлено 02.03.2016 — Решение о выдаче патента от 14.07.2017 — Опубл. 31.08.2017, Бюл. № 2.

6. А. П. Фот, Н. Н. Добровольский, И. Ю. Реброва, Н. М. Добровольский, А. С. Подолян. Об одном линейном диофантовом уравнении и его приложениях // Чебышевский сборник, 2021, т. 22, вып. 2, С. 288–303.

7. Фот, А. П. Об использовании математического моделирования в некоторых задачах машиностроения / А. А. Муллабаев, А. П. Фот, С. И. Павлов // Вестник ОГУ, 2006. — №2. — С. 75–82.

8. B.V.Kryzhanovsky, L.B.Litinskii, A.L.Mikaelian. «Vector-neuron models of associative memory», Proc. of Int. Joint Conference on Neural Networks IJCNN-04, Budapest-2004, pp. 909–1004.

9. B.V.Kryzhanovsky, B.M.Magomedov, A.L.Mikaelian. «A Domain model of neural network», Doklady Mathematics vol.71, pp. 310–314 (2005).

10. TESA Technology:

    https://technobearing.ru/d/877366/d/tesa2014-2015-compressed-206-221.pdf

11. Mitutoyo Corporation:

    https://www.mitutoyo.co.jp/eng/products/gaugeblock/gaugeblock.html

---

УДК 511.3

Тригонометрические суммы сеток алгебраических решеток с бесконечно дифференцируемыми весами[1]

Е. М. Рарова (Россия, г. Тула)
Тульский государственный педагогический университет имени Л. Н. Толстого
e-mail: rarova82@mail.ru

Trigonometric sums of grids of algebraic lattices with infinitely differentiable weights

E. M. Rarova (Russia, Tula)
Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University
e-mail: rarova82@mail.ru

Обозначим единичные $s-$мерные кубы $\overline{G}_s = \{\vec{x}\,|\,0 \leqslant x_\nu \leqslant 1,\ \nu = 1,2,\ldots,s\}$, $G_s = \{\vec{x}\,|\,0 \leqslant \leqslant x_\nu < 1,\ \nu = 1,2,\ldots,s\}$. Для произвольного вектора $\vec{x}$ его дробной частью называется вектор $\{\vec{x}\} = (\{x_1\},\ldots,\{x_s\})$. Отсюда следует, что всегда $\{\vec{x}\} \in G_s$.

Далее везде под произвольной решеткой $\Lambda \subset \mathbb{R}^s$ мы будем понимать только полные решетки, то есть $\Lambda = \{m_1\vec{\lambda}_1 + \ldots + m_s\vec{\lambda}_s = \vec{m}\cdot A\,|\vec{m} = (m_1,\ldots,m_s) \in \mathbb{Z}^s\}$, где $\vec{\lambda}_1 =$

[1]Исследование выполнено по гранту РФФИ №19-41-710004_р_а

$= (\lambda_{11}, \ldots, \lambda_{1s}), \ldots, \vec{\lambda}_s = (\lambda_{s1}, \ldots, \lambda_{ss})$ — система линейно-независимых векторов в $\mathbb{R}^s$, а матрица решётки A задана соотношениями

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \ldots & \lambda_{1s} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_{s1} & \ldots & \lambda_{ss} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{\lambda}_1 \\ \vdots \\ \vec{\lambda}_s \end{pmatrix}.$$

Взаимная решетка $\Lambda^* = \{\vec{x} \,|\, \forall \vec{y} \in \Lambda \ (\vec{x}, \vec{y}) \in \mathbb{Z}\}$. Непосредственно из определения следует равенство $(q\Lambda)^* = \dfrac{1}{q}\Lambda^*$.

Определение 1. *Для произвольной решетки Λ обобщенной параллелепипедальной сеткой $M(\Lambda)$ называется множество $M(\Lambda) = \Lambda^* \cap G_s$. Сетка $M_1(\Lambda) = \Lambda^* \cap [-1; 1)^s$. Обобщенной параллелепипедальной сеткой II рода $M'(\Lambda)$ называется множество $M'(\Lambda) = \{\vec{x} \,|\, \vec{x} = \{\vec{y}\}, \vec{y} \in M_1(\Lambda)\}$.*

Определение 2. *Весовой функцией порядка r с константой B называется гладкая функция $\rho(\vec{x})$, удовлетворяющая условиям*

$$\sum_{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_s = -1}^{0} \rho(\vec{x} + (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_s)) = 1 \ \textit{при} \ \vec{x} \in G_s, \tag{1}$$

$$\rho(\vec{x}) = 0 \quad \textit{при} \quad \vec{x} \notin (-1; 1)^s, \tag{2}$$

$$\left| \int_{-1}^{1} \ldots \int_{-1}^{1} \rho(\vec{x}) e^{2\pi i (\vec{\sigma}, \vec{x})} d\vec{x} \right| \leqslant B(\overline{\sigma}_1 \ldots \overline{\sigma}_s)^{-r} \quad \textit{для любого} \quad \vec{\sigma} \in \mathbb{R}^s. \tag{3}$$

Если выполнены условия (1) и (2), то говорим просто о весовой функции $\rho(\vec{x})$. Простейшим примером весовой функции является функция $\rho_1(\vec{x}) = \rho_1(x_1) \cdot \ldots \cdot \rho_1(x_s)$, где

$$\rho_1(x) = \begin{cases} 1 - |x|, & \text{при } |x| \leqslant 1, \\ 0, & \text{при } |x| > 1. \end{cases}$$

Кроме этого, в работах [1]–[2] была определена бесконечно дифференцируемая функция

$$\rho_\infty(x) = \begin{cases} 1, & \text{при } x = 0, \\ e^{\frac{1}{x-1} e^{-\frac{1}{x}}}, & \text{при } 0 < x < 1, \\ 1 - e^{\frac{1}{x} e^{-\frac{1}{1+x}}}, & \text{при } -1 < x < 0, \\ 0, & \text{при } |x| \geqslant 1. \end{cases}$$

Пусть $\vec{a} = (a_0, a_1, \ldots, a_{s-1})$ — целочисленный вектор такой, что многочлен

$$P_{\vec{a}}(x) = \sum_{\nu=0}^{s-1} a_\nu x^\nu + x^s \tag{4}$$

неприводим над полем рациональных чисел $\mathbb{Q}$ и все корни $\Theta_\nu \, (\nu = 1, \ldots, s)$ многочлена (4) действительные.

Обозначим через $T(\vec{a})$ матрицу степеней алгебраически сопряженных целых алгебраических чисел $\Theta_1, \ldots, \Theta_s$ — корней многочлена $P_{\vec{a}}(x)$:

$$T(\vec{a}) = \begin{pmatrix} 1 & \ldots & 1 \\ \Theta_1 & \ldots & \Theta_s \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \Theta_1^{s-1} & \ldots & \Theta_s^{s-1} \end{pmatrix}, \tag{5}$$

а через $\vec{\Theta} = (\Theta_1, \ldots, \Theta_s)$ — вектор полного набора алгебраически сопряженных чисел — корней многочлена $P_{\vec{a}}(x)$.

Для любого $t > 0$ решётка $\Lambda(t \cdot T(\vec{a}))$ называется алгебраической. Она имеет вид

$$\Lambda(t \cdot T(\vec{a})) = \left\{ \vec{x} = \left(t \sum_{\nu=1}^{s} \Theta_1^{\nu-1} m_\nu, \ldots, t \sum_{\nu=1}^{s} \Theta_s^{\nu-1} m_\nu \right) = t \cdot \vec{m} \cdot T(\vec{a}) \,\middle|\, \vec{m} \in \mathbb{Z}^s \right\}.$$

Таким образом, алгебраическая решётка $\Lambda(t \cdot T(\vec{a}))$ имеет базис $\vec{\lambda}_\nu = t \cdot (\Theta_1^{\nu-1}, \ldots, \Theta_s^{\nu-1})$ ($\nu = 1, \ldots, s$). Нетрудно видеть, что $\Lambda(t \cdot T(\vec{a})) \cap \mathbb{Z}^s = \{t(m, \ldots, m) | m \in \mathbb{Z}\}$.

Совокупность $M \subset G_s$ точек $M_k = (\xi_1(k), \ldots, \xi_s(k)) \qquad (k = 1 \ldots N)$ называется *сеткой* M из N узлов, а сами точки — *узлами квадратурной формулы*. Величины $\rho_k = \rho(M_k)$ называются весами квадратурной формулы. В этой работе будем везде предполагать, что все веса вещественнозначные и являются значениями специальной весовой функции.

В работах [3]–[7] использовалась весовая функция $\rho_r(x)$, определеная равенствами

$$\rho_r(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } |x| \geqslant 1, \\ 1 - (2r-1) C_{2r-2}^{r-1} \sum\limits_{\nu=0}^{r-1} C_{r-1}^{\nu} \dfrac{(-1)^\nu}{r+\nu} x^{r+\nu}, & \text{при } 0 \leqslant x < 1, \\ 1 - (-1)^r (2r-1) C_{2r-2}^{r-1} \sum\limits_{\nu=0}^{r-1} C_{r-1}^{\nu} \dfrac{1}{r+\nu} x^{r+\nu}, & \text{при } -1 < x < 0 \end{cases}, \tag{6}$$

при этом для любого действительного числа σ и интеграла

$$I_r(\sigma) = \int_{-1}^{1} \rho_r(x) e^{2\pi i \sigma x} dx$$

выполняется оценка

$$|I_r(\sigma)| \leqslant \frac{B(r)}{\overline{\sigma}^{r+1}} \tag{7}$$

и функция $\rho_r(x)$ — весовая функция порядка $r+1$ с некоторой константой $B(r)$.

В данной работе используется функция $\rho_\infty(x)$, для которой доказана следующая лемма.

Лемма 1. *Для интеграла*

$$I_\infty(\sigma) = \int_{-1}^{1} \rho_\infty(x) e^{2\pi i \sigma x} dx$$

и для любого $r \geqslant 1$ при подходящем значении константы $B_1(r)$, зависящей только от r, для любого значения σ справедлива оценка

$$|I_\infty(\sigma)| \leqslant \frac{B_1(r)}{\overline{\sigma}^{r+1}}. \tag{8}$$

Для произвольных целых $m_1, \ldots, m_s$ суммы $S_{M,\vec{\rho}}(m_1, \ldots, m_s)$, определённые равенством

$$S_{M,\vec{\rho}}(m_1, \ldots, m_s) = \sum_{k=1}^{N} \rho_k e^{2\pi i [m_1 \xi_1(k) + \ldots + m_s \xi_s(k)]}, \tag{9}$$

называются *тригонометрическими суммами сетки с весами*.

Пусть матрица $T = T(\vec{a})$ и $t > 0$. Рассмотрим алгебраическую сетку $M(t) = M'(t \cdot \Lambda(T))$ из $N'(t \cdot \Lambda(T))$ узлов $\vec{x}_k$ $(k = 1, \ldots, N'(t \cdot \Lambda(T)))$ с весами

$$\rho_k = \rho_{\vec{x}_k} = (\det(t \cdot \Lambda(T)))^{-1} \sum_{\{\vec{y}\}=\vec{x}_k,\, \vec{y} \in M_1(t \cdot \Lambda(T))} \rho_\infty(\vec{y})$$

и её тригонометрическую сумму с весами

$$S_{M(t),\vec{\rho}}(\vec{m}) = (\det(t \cdot \Lambda(T)))^{-1} \sum_{\vec{x} \in M(t)} \left(\sum_{\{\vec{y}\}=\vec{x},\, \vec{y} \in M_1(t \cdot \Lambda(T))} \rho_\infty(\vec{y}) \right) e^{2\pi i (\vec{m}, \vec{x})}.$$

Теорема 1. *Для алгебраической решётки $\Lambda(t \cdot T(\vec{a}))$ и произвольной весовой функции $\rho(\vec{x})$ справедливо равенство*[1]

$$S_{M(t),\vec{\rho}}(\vec{m}) = \delta(\vec{m}) + \sum_{\vec{x} \in \Lambda(t \cdot T(\vec{a}))}{}' \int_{-1}^{1} \ldots \int_{-1}^{1} \rho(\vec{y}) e^{2\pi i (\vec{y}, \vec{m} - \vec{x})} d\vec{y}, \tag{10}$$

где

$$\delta(\vec{m}) = \begin{cases} 1, & \text{при } \vec{m} = \vec{0}; \\ 0, & \text{при } \vec{m} \neq \vec{0},\ \vec{m} \in \mathbb{Z}^s. \end{cases}$$

С помощью леммы 1 доказываются следующие теоремы.

Теорема 2. *Для любого целого $m \neq 0$ и натурального t справедливо равенство*

$$S_{M(t),\vec{\rho}_\infty}(t(m, \ldots, m)) = 1 + O\left(\frac{\ln^{s-1} \det \Lambda(t)}{(\det \Lambda(t))^{r+1}} \right). \tag{11}$$

Для решётки $\Lambda = \Lambda(t \cdot T(\vec{a}))$ определим вектора $\vec{n}_\Lambda(\vec{m}) = (n_1, \ldots, n_s)$ и $\vec{k}_\Lambda(\vec{m})$ из условий $\vec{k}_\Lambda(\vec{m}) \in \Lambda$, $\vec{m} = \vec{n}_\Lambda(\vec{m}) + \vec{k}_\Lambda(\vec{m})$ и произведение $q(\vec{n}_\Lambda(\vec{m})) = \overline{n_1} \cdot \ldots \cdot \overline{n_s}$ минимально. Ясно, что существует константа $C(\Lambda) \geqslant 1$ такая, что для любого вектора $\vec{m}$ имеем $q(\vec{n}_\Lambda(\vec{m})) \leqslant C(\Lambda)$.

Теорема 3. *При $t \to \infty$ для произвольного вектора $\vec{m} \neq \vec{0}$ и $\vec{m} \notin \Lambda$ справедлива асимптотическая формула*

$$S_{M(t),\vec{\rho}_\infty}(\vec{m}) \leqslant B_1(r) \begin{cases} \frac{1}{q(\vec{n}_\Lambda(\vec{m}))^{r+1}} + O\left(\frac{q(\vec{n}_\Lambda(\vec{m}))^{r+1} \ln^{s-1} \det \Lambda(t)}{(\det \Lambda(t))^{r+1}} \right), & \text{при } \vec{k}_\Lambda(\vec{m}) \neq \vec{0}, \\ O\left(\frac{q(\vec{n}_\Lambda(\vec{m}))^{r+1} \ln^{s-1} \det \Lambda(t)}{(\det \Lambda(t))^{r+1}} \right), & \text{при } \vec{k}_\Lambda(\vec{m}) = \vec{0}. \end{cases} \tag{12}$$

Отметим, что отличие теорем 2 и 3 от соответствующих теорем из работы [7] в том, что там веса зависили от r, а в данной работе веса не зависят от r. По-видимому, вместо оценки из этих теорем со степенной правой частью и показателем $r+1$ имеет место оценка с экспоненциальной правой частью.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Добровольский Н. М. О квадратурных формулах на классах $E_s^\alpha(c)$ и $H_s^\alpha(c)$. / Деп. в ВИНИТИ 24.08.84, N 6091–84.

2. Добровольский Н. М. Теоретико–числовые сетки и их приложения. / Дис. ... канд. физ.–мат. наук. Тула, 1984.

[1] Здесь и далее символ $\sum'$ означает, что из области суммирования исключена нулевая точка.

3. Рарова Е. М. Разложение тригонометрической суммы сетки с весами в ряд по точкам решетки // Изв. ТулГУ. Естественные науки. 2014. Вып. 1. Ч. 1. С. 37–49.

4. Рарова Е. М. Тригонометрические суммы сетки с весами для целочисленной решётки // Известия Тульского государственного университета. Естественные науки. 2014. № 3. С. 34-39.

5. Рарова Е. М. Тригонометрические суммы алгебраических сеток // В сборнике: Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы и приложения Материалы XIII Международной конференции, посвященной восьмидесятипятилетию со дня рождения профессора Сергея Сергеевича Рышкова. Тульский государственный педагогичекий университет им. Л.Н. Толстого. 2015. С. 356-359.

6. Е. М. Рарова. О взвешенном числе точек алгебраической сетки // Чебышевский сборник, 2018, т. 19, вып. 1, с. 200–219.

7. Е. М. Рарова, Н. Н. Добровольский, И. Ю. Реброва. Асимптотическая оценка для тригонометрических сумм алгебраических сеток // Чебышевский сборник. 2020. Т. 21, вып. 3, С. 232–240.

УДК 511.32

О методе Коробова — Рябенького решения дифференциальных уравнений в частных производных[1]

А. В. Родионов (Россия, г. Тула)
Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого
e-mail: rodionovalexandr@mail.ru

On the Korobov–Ryabenkiy method for solving partial differential equations

A. V. Rodionov (Russia, Tula)
Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University
e-mail: rodionovalexandr@mail.ru

В 1961 году В. С. Рябенький в работе [1] предложил численный метод решения задачи Коши для следующего класса дифференциальных уравнений с частными производными:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Q\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_s}\right) u(t, \vec{x}), \tag{1}$$

$$0 \leqslant t \leqslant T, \quad -\infty < x_\nu < \infty \quad (\nu = 1, \ldots, s),$$

$$u(0, \vec{x}) = \varphi(\vec{x}), \quad \vec{x} = (x_1, \ldots, x_s), \tag{2}$$

где

$$Q\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_s}\right) = \sum_{j_1=0}^{n_1} \cdots \sum_{j_s=0}^{n_s} a_{j_1,\ldots,j_s} \frac{\partial^{j_1}}{\partial x_1^{j_1}} \cdots \frac{\partial^{j_s}}{\partial x_s^{j_s}} \tag{3}$$

[1]Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 19-41-710004_р_а

— дифференциальный оператор порядка $n(Q) = n_1 + \ldots + n_s$, с максимальным порядком по отдельным переменным, не превосходящим $m(Q) = \max(n_1, \ldots, n_s)$, а $\varphi(\vec{x}) = \varphi(x_1, \ldots, x_s)$ — периодическая с периодом единица по каждому из своих аргументов функция из класса E_s^α $(\alpha > m(Q) + 1)$.[1]

Таким образом,

$$\varphi(x_1, \ldots, x_s) = \sum_{m_1=-\infty}^{\infty} \ldots \sum_{m_s=-\infty}^{\infty} c_{m_1,\ldots,m_s} e^{2\pi i(m_1 x_1 + \ldots + m_s x_s)} \tag{4}$$

и для коэффициентов Фурье выполняется оценка

$$|c_{m_1,\ldots,m_s}| \leqslant \frac{\|\varphi\|_{E_s^\alpha}}{(\overline{m_1} \ldots \overline{m_s})^\alpha}. \tag{5}$$

Величина

$$\|\varphi\|_{E_s^\alpha} = \sup_{m_1,\ldots,m_s} |c_{m_1,\ldots,m_s}(\overline{m_1} \ldots \overline{m_s})^\alpha| < \infty \tag{6}$$

является нормой на пространстве E_s^α, относительно которой оно является несепарабельным банаховым пространством.

В своей работе В. С. Рябенький предложил некоторый общий подход численного решения задачи Коши с использованием произвольных сеток, для которых выполнены специальные условия, и показал, что его конструкция применима для многомерных кубических сеток, которые ещё называют равномерными, и для параллелепипедальных сеток Н. М. Коробова.

В работе [2] Н. М. Коробов рассмотрел решение частной задачи Дирихле с нулевым граничным условием для уравнения Пуассона с правой частью из класса E_s^α:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_s^2} = f(\vec{x}), \tag{7}$$

$$u(\vec{x}), f(\vec{x}) \in E_s^\alpha, \tag{8}$$

$$f(x_1, \ldots, -x_j, \ldots, x_s) = -f(x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_s) \quad (j = 1, \ldots, s),$$

$$u(\vec{x}) = 0 \text{ при } x_1(1 - x_1) \cdot \ldots \cdot x_s(1 - x_s) = 0. \tag{9}$$

Таким образом,

$$u(\vec{x})\,|_{\partial G_s} = 0, \quad G_s = [0; 1)^s.$$

Метод Н. М. Коробова состоял в получении с помощью параллелепипедальных сеток $M_k = \left(\left\{\frac{a_1 k}{N}\right\}, \ldots, \left\{\frac{a_s k}{N}\right\}\right)$ $(k = 0, \ldots, N-1)$ приближенного решения указанной задачи Дирихле на основании точного решения в виде ряда Фурье, которое легко выписать по ряду Фурье периодической функции $f(\vec{x})$. Необходимость приближенного решения обусловлена тем, что, как правило, явного вида ряда Фурье неизвестно, а потому, точное решение имеет только теоретическое значение.

Общая задача Дирихле для дифференциального оператора Q вида (3) выглядит следующим образом

$$Q\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_s}\right) u(\vec{x}) = f(\vec{x}), \tag{10}$$

$$u(\vec{x})\,|_{\partial G_s} = \varphi(\vec{x})\ , \tag{11}$$

$$u(\vec{x}), f(\vec{x}), \varphi(\vec{x}) \in E_s^\alpha. \tag{12}$$

[1] Условие на α гарантирует, что ряд Фурье для образа $Q\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_s}\right)\varphi(\vec{x})$, полученный почленным дифференцированием, равномерно и абсолютно сходится.

Естественно, что в таком виде задача Дирихле не всегда разрешима. Требуются дополнительные необходимые и достаточные условия, связывающие функции $f(\vec{x})$ и $\varphi(\vec{x})$, которые обеспечивают разрешимость задачи Дирихле на некотором классе функций, который будет определен позднее.

Как показано в работе [3] по значениям произвольной функции $f(\vec{x})$ в узлах обобщенной параллелепипедальной сетки $M(\Lambda)$ однозначно определяется тригонометрический многочлен $I_\Lambda f(\vec{x})$, который, с одной стороны, является интерполяционным многочленом для функции $f(\vec{x})$ с узлами в $M(\Lambda)$, а с другой стороны — конечным рядом Фурье по этой обобщенной параллелепипедальной сетке.

В работе приведен вариант обобщения метода В. С. Рябенького — Н. М. Коробова приближенного решения уравнений с частными производными на случай использования произвольных обобщенных параллелепипедальных сеток для целочисленных решеток состоит в следующем.

Пусть $\mathbb{Z}^s \supset \Lambda_1 \supset \Lambda_2 \supset \ldots \supset \Lambda_n \supset \ldots$ — бесконечная последовательность целочисленных решеток в $\mathbb{R}^s$. Ей соответствует бесконечная последовательность обобщенных параллелепипедальных сеток:

$$\{\vec{0}\} = M(\mathbb{Z}^s) \subset M(\Lambda_1) \subset M(\Lambda_2) \subset \ldots \subset M(\Lambda_n) \subset \ldots$$

в единичном кубе $G_s = [0;1)^s$ и бесконечная последовательность конечных множеств целочисленных векторов $\vec{m}$ — минимальных гиперболических полных систем вычетов $M^*(\Lambda)$ фундаментальной решетки $\mathbb{Z}^s$ относительно подрешетки Λ_ν:

$$\{\vec{0}\} = M^*(\mathbb{Z}^s) \subset M^*(\Lambda_1) \subset M^*(\Lambda_2) \subset \ldots \subset M^*(\Lambda_\nu) \subset \ldots.$$

При соответствующих условиях на последовательность решеток для любой периодической функции $f(\vec{x})$ из класса E_s^α $(\alpha > 1)$ для последовательности интерполяционных многочленов $I_{\Lambda_\nu} f(\vec{x})$ будет иметь место достаточно быстрая сходимость

$$\lim_{\nu\to\infty} I_{\Lambda_\nu} f(\vec{x}) = f(\vec{x}).$$

При достаточно естественных ограничениях либо на дифференциальный оператор

$$Q\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_s}\right),$$

либо на начальные условия в задаче Коши последовательность решений $u_\nu(t, \vec{x})$, соответствующих начальным условиям $\varphi_\nu(\vec{x}) = I_{\Lambda_\nu}\varphi(\vec{x})$ будет сходиться к решению $u(t, \vec{x})$. Аналогичная картина будет иметь место для задачи Дирихле и уравнения Пуассона.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Рябенький В. С. Об одном способе получения разностных схем и об использовании теоретикочисловых сеток для решения задачи Коши методом конечных разностей // Тр. матем. ин-та им. В. А. Стеклова. 1961. Т. 60. С. 232 — 237.

2. Коробов, Н. М. Теоретико-числовые методы в приближенном анализе / Н. М. Коробов. — М.: Физматгиз, 1963.

3. Добровольский Н. М., Есаян А. Р., Андреева О. В., Зайцева Н. В. Многомерная теоретико-числовая Фурье интерполяция // Чебышевский сборник, 2004 Т. 5. Вып. 1(9). Тула, Из-во ТГПУ им. Л. Н. Толстого. С. 122 — 143.

УДК 511.3

Метрики на пространстве сдвинутых решеток

Е. Н. Смирнова (Россия, г. Оренбург)
Оренбургский государственный университет
e-mail:helenash@mail.ru

Metrics on the space of shifted lattices

E. N. Smirnova (Russian, Orenburg)
Orenburg State University
e-mail:helenash@mail.ru

Обозначим через CPR_s множество всех сдвинутых решёток $\Lambda + \vec{x}$, где $\Lambda \in PR_s$ — произвольная s – мерная вещественная решётка и $\vec{x} \in R^s$ — произвольный вектор.

Мы далее будем рассматривать только случай $s = 1$, что позволит существенно упростить многие доказательства и сделать изложение более наглядным.

Из свойств решётки непосредственно вытекает, что $\Lambda + (x + y) = \Lambda + x$ для любого $y \in \Lambda$.

Лемма 1. *Если*

$$\Lambda_1 + x_1 = \Lambda_2 + x_2, \tag{1}$$

то $\Lambda_1 = \Lambda_2$ *и* $x_1 - x_2 \in \Lambda_1$.

Дадим следующее определение канонического представления сдвинутой решётки $\Lambda + x$.

Определение 1. *Для произвольной сдвинутой одномерной решётки* $\Lambda + x = \lambda\mathbb{Z} + x$, $\lambda > 0$ *её каноническим представлением называется пара* $\varphi(\Lambda + x) = \left(\ln\lambda, \left\{\frac{x}{\lambda}\right\}\right)$.

Обозначим через $Cy_\infty = \{(\theta_1, \theta_2) | \theta_1 \in \mathbb{R},\ 0 \leqslant \theta_2 < 1\}$ — бесконечный цилиндр (здесь нижняя и верхняя границы бесконечной горизонтальной полосы склеиваются). Таким образом, $Cy_\infty = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}$ и для любой точки $(\theta_1, \theta_2) \in Cy_\infty$ определена единственная сдвинутая решётка

$$\varphi^{-1}(\theta_1, \theta_2) = \Lambda + x = e^{\theta_1}(\mathbb{Z} + \theta_2),$$

заданная своим каноническим представлением.

Другой естественной интерпретацией бесконечного цилиндра Cy_∞ является его представление как декартового произведения: $Cy_\infty = \mathbb{R} \times J_1$.

Нетрудно видеть, что бесконечный цилиндр Cy_∞ гомеоморфен другому бесконечному открытому цилиндру $C_\infty^+ = \{(\theta_1, \theta_2) | \theta_1 > 0,\ 0 \leqslant \theta_2 < 1\}$. Гомеоморфизм $\psi : Cy_\infty \to C_\infty^+$ задается равенством $\psi(\theta_1, \theta_2) = (e^{\theta_1}, \theta_2)$, $\psi^{-1}(\theta_1, \theta_2) = (\ln\theta_1, \theta_2)$.

Наряду с цилиндром Cy_∞ рассмотрим сдвинутый цилиндр

$$C_\infty^* = \left\{ (\theta_1, \theta_2) \,\middle|\, \theta_1 \in \mathbb{R},\ -\frac{1}{2} \leqslant \theta_2 < \frac{1}{2} \right\}.$$

Определение 2. *Для произвольной сдвинутой одномерной решётки* $\Lambda + x = \lambda\mathbb{Z} + x$, $\lambda > 0$ *её абсолютно наименьшим каноническим представлением называется пара*

$$\varphi^*(\Lambda + x) = (\ln\lambda, \theta), \quad \text{где} \quad \theta = \begin{cases} \left\{\frac{x}{\lambda}\right\}, & \text{при } 0 \leqslant \left\{\frac{x}{\lambda}\right\} < \frac{1}{2}, \\ \left\{\frac{x}{\lambda}\right\} - 1, & \text{при } \frac{1}{2} \leqslant \left\{\frac{x}{\lambda}\right\} < 1. \end{cases}$$

Таким образом, $C^*_\infty = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}$ и для любой точки $(\theta_1, \theta_2) \in C^*_\infty$ определена единственная сдвинутая решётка

$$(\varphi^*)^{-1}(\theta_1, \theta_2) = \Lambda + x = e^{\theta_1}(\mathbb{Z} + \theta_2),$$

заданная своим абсолютно наименьшим каноническим представлением.

Мы видим, что функции φ^{-1} и $(\varphi^*)^{-1}$ отличаются только областью определения и для них выполнено соотношение

$$(\varphi^*)^{-1}(\theta_1, \theta_2) = \begin{cases} \varphi^{-1}(\theta_1, \theta_2) & \text{при } 0 \leqslant \theta_2 < \frac{1}{2}, \\ \varphi^{-1}(\theta_1, \theta_2 + 1), & \text{при } -\frac{1}{2} \leqslant \theta_2 < 0. \end{cases}$$

С помощью обыкновенного сдвига на $\mathbb{R}$ и движения m_x на J_1 определим представление произвольной сдвинутой одномерной решётки $\Lambda + y\lambda = \lambda\mathbb{Z} + y\lambda$, $\lambda > 0$, $0 \leqslant y < 1$ с центром в сдвинутой решётке $M + ax = a\mathbb{Z} + xa$.

Определение 3. *Для произвольной сдвинутой одномерной решётки $\Lambda + y\lambda = \lambda\mathbb{Z} + y\lambda$, $\lambda > 0$, $0 \leqslant y < 1$ её представлением с центром в сдвинутой решётке $M + ax = a\mathbb{Z} + xa$ называется пара $\varphi_{M+ax}(\Lambda + y\lambda) = (\ln\lambda - \ln a, \{y - x\})$.*

Нетрудно видеть, что эти два представления связаны равенством

$$\varphi(\Lambda + y\lambda) = (\theta_1, \theta_2), \quad \varphi_{M+ax}(\Lambda + y\lambda) = (\theta_1^*, \theta_2^*), \quad \theta_1^* = \theta_1 - \ln a, \quad \theta_2^* = \{\theta_2 - x\}. \tag{2}$$

Для задания структуры метрического пространства на множестве CPR_1 определим для произвольного $a \neq 0$ вложение $\varphi_a : CPR_1 \to PR_2$ следующим образом.

Пусть $\Lambda \in PR_1$, $\vec{\lambda} = (\lambda)$ — ее базис и $\vec{x} = (x) \in R^1$ — произвольный вектор. Решётку $\varphi_a(\Lambda + x)$ зададим базисом $\vec{\lambda}'_j \quad (j = 1, 2)$, где $\vec{\lambda}'_1 = (\lambda, 0)$, $\quad \vec{\lambda}'_2 = (x, a)$.

Лемма 2. *Решётка $\varphi_a(\Lambda + x)$ определена однозначно и не зависит от выбора базиса $\vec{\lambda}$ или замены вектора x на $x + y$, где $y \in \Lambda$.*

Теперь для любого $a \neq 0$ на пространстве CPR_1 можно задать метрику $\rho_a(\Lambda + x, \Gamma + y)$ с помощью вложения φ_a и метрики $\rho(\cdot, \cdot)$ на пространстве PR_2 равенством

$$\rho_a(\Lambda + x, \Gamma + y) = \rho(\varphi_a(\Lambda + x), \varphi_a(\Gamma + y)). \tag{3}$$

Теорема 1. *Функция $\rho_a(\Lambda + x, \Gamma + y)$ задает метрику на пространстве CPR_1.*

После введения метрики на пространстве сдвинутых решёток сразу возникает вопрос о вычислении расстояния между двумя сдвигами одной и той же решётки.

Лемма 3. *Если решётка $\Lambda \in PR_1$ задана одномерной невырожденной матрицей $A = (a_1) : \Lambda = A \cdot \mathbb{Z}$, то решётка $\varphi_a(\Lambda + x)$ переводится в решётку $\varphi_a(\Lambda + y)$ линейным преобразованием с матрицей*

$$B(x, y, k) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{y - x + ka_1}{a} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

для любого целого $k \in \mathbb{Z}$.

Следствие 1. *Для любой решётки $\Lambda \in PR_1$, заданой одномерной невырожденной матрицей $A = (a_1)$, $a_1 > 0 : \Lambda = A \cdot \mathbb{Z}$, для расстояния между её сдвигами справедливо равенство*

$$\rho_a(\Lambda + x, \Lambda + y) = \ln\left(1 + 2\frac{a_1}{a}\left\|\frac{x - y}{a_1}\right\|\right).$$

Лемма 4. *Если решётки* Λ *и* $\Gamma \in PR_1$ *заданы одномерными невырожденными матрицами* $A = (a_1)$ *и* $B = (b)$, *соответственно:*

$$\Lambda = A \cdot \mathbb{Z}, \quad \Gamma = B \cdot \mathbb{Z},$$

то решётка $\varphi_a(\Lambda + x)$ *переводится в решётку* $\varphi_a(\Gamma + y)$ *линейным преобразованием с матрицей*

$$C(A, B, x, y, k, l) = \begin{pmatrix} ba_1^{-1} & \frac{-b(a_1^{-1}x+k-l)+y}{a} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

для любых целых $k, l \in \mathbb{Z}$.

Лемма 5. *Если решётки* Λ *и* $\Gamma \in PR_1$ *заданы одномерными невырожденными матрицами* $A = (a_1)$ *и* $B = (b)$, *соответственно:*

$$\Lambda = A \cdot \mathbb{Z}, \quad \Gamma = B \cdot \mathbb{Z}$$

и решётка $\varphi_a(\Lambda+x)$ *переводится в решётку* $\varphi_a(\Gamma+y)$ *линейным преобразованием с матрицей* C, *то справедливо равенство*

$$C = C(A, B, x, y, k, l) = \begin{pmatrix} ba_1^{-1} & \frac{-b(a_1^{-1}x+k-l)+y}{a} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Следствие 2. *Для любых одномерных решёток* Λ *и* $\Gamma \in PR_1$, *заданных одномерными невырожденными матрицами* $A = (a_1)$ *и* $B = (b)$, *соответственно:* $\Lambda = A \cdot \mathbb{Z}$, $\Gamma = B \cdot \mathbb{Z}$, *для расстояния между их сдвигами справедливо равенство*

$$\rho_a(\Lambda + x, \Gamma + y) =$$

$$= \ln\left(1 + 2\max\left(\max\left(\left|ba_1^{-1} - 1\right|, \frac{b}{a}\left\|\frac{x}{a_1} - \frac{y}{b}\right\|\right), \max\left(\left|a_1 b^{-1} - 1\right|, \frac{a_1}{a}\left\|\frac{x}{a_1} - \frac{y}{b}\right\|\right)\right)\right).$$

Нетрудно видеть, что формулу для расстояния можно переписать в более компактном виде:

$$\rho_a(\Lambda + x, \Gamma + y) = \ln\left(1 + 2\max\left(\frac{|b - a_1|}{\min(b, a_1)}, \frac{\max(b, a_1)}{a}\left\|\frac{x}{a_1} - \frac{y}{b}\right\|\right)\right).$$

Так как пространство одномерных сдвинутых решёток CPR_1 и бесконечный цилиндр Cy_∞ гомеоморфны, то задание метрики на CPR_1 индуцирует метрику на Cy_∞. Согласно лемме 3 для двух сдвигов решётки Λ, заданных каноническими представлениями $(\theta_1, \theta_2), (\theta_1, \theta_3) \in Cy_\infty$ матрицы $B_1(\varepsilon)$ и $B_2(\varepsilon)$ для любого $\varepsilon \in \mathbb{Z}$:

$$B_1(\varepsilon) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{e^{\theta_1}(\theta_3 - \theta_2 + \varepsilon)}{a} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B_2(\varepsilon) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{e^{\theta_1}(\theta_2 - \theta_3 + \varepsilon)}{a} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

преобразуют решётки

$$\varphi_a(\varphi^{-1}(\theta_1, \theta_2)) = \varphi_a(\Lambda + x) = \varphi_a(e^{\theta_1}(\mathbb{Z} + \theta_2)), \quad \varphi_a(\varphi^{-1}(\theta_1, \theta_3)) = \varphi_a(\Lambda + y) = \varphi_a(e^{\theta_1}(\mathbb{Z} + \theta_3)),$$

друг в друга:

$$B_1(\varepsilon) \cdot \varphi_a(\varphi^{-1}(\theta_1, \theta_2)) = \varphi_a(\varphi^{-1}(\theta_1, \theta_3)), \quad B_2(\varepsilon) \cdot \varphi_a(\varphi^{-1}(\theta_1, \theta_3)) = \varphi_a(\varphi^{-1}(\theta_1, \theta_2)).$$

Действительно, для решёток имеем:

$$\varphi_a(\varphi^{-1}(\theta_1,\theta_2)) = \begin{pmatrix} e^{\theta_1} & e^{\theta_1}\theta_2 \\ 0 & a \end{pmatrix}\cdot\mathbb{Z}^2, \quad \varphi_a(\varphi^{-1}(\theta_1,\theta_3)) = \begin{pmatrix} e^{\theta_1} & e^{\theta_1}\theta_3 \\ 0 & a \end{pmatrix}\cdot\mathbb{Z}^2,$$

поэтому

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{e^{\theta_1}(\theta_3-\theta_2+\varepsilon)}{a} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{\theta_1} & e^{\theta_1}\theta_2 \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\theta_1} & e^{\theta_1}(\theta_3+\varepsilon) \\ 0 & a \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{e^{\theta_1}(\theta_2-\theta_3+\varepsilon))}{a} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{\theta_1} & e^{\theta_1}\theta_3 \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\theta_1} & e^{\theta_1}(\theta_2+\varepsilon) \\ 0 & a \end{pmatrix}.$$

Поэтому

$$\rho_a((\theta_1,\theta_2),(\theta_3,\theta_4)) = \ln\left(1+2\max\left(\frac{|e^{\theta_3}-e^{\theta_1}|}{\min(e^{\theta_3},e^{\theta_1})},\frac{\max(e^{\theta_3},e^{\theta_1})}{a}\,\|\theta_2-\theta_4\|\right)\right)$$

В случае PR_1 для $\Lambda=\lambda\mathbb{Z}, \Gamma=\gamma\mathbb{Z}$ метрика задается простой формулой $\rho(\Lambda,\Gamma)=|\ln(\gamma^{-1}\lambda)|$. Из следствия 2 следует, что $\rho_a(\Lambda,\Gamma)=\ln\left(1+2\frac{|\gamma-\lambda|}{\min(\gamma,\lambda)}\right)$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Добровольский Н. М. Многомерные теоретико-числовые сетки и решетки и их приложения к приближенному анализу // Сб. IV Международная конференция „Современные проблемы теории чисел и ее приложения“ посвященная 180-летию П. Л. Чебышева и 110-летию И. М. Виноградова. Тула, 10—15 сентября, 2001 Актуальные проблемы Ч. I. М. МГУ, 2002. С. 54—80

2. Добровольский Н. М., Рощеня А. Л. О числе точек решётки в гиперболическом кресте // Алгебраические, вероятностные, геометрические, комбинаторные и функциональные методы в теории чисел: Сб.тез. докл. II Междунар. конф. Воронеж, 1995. С. 53.

3. Касселс Дж. В. С. Введение в геометрию чисел. — М.: Мир, 1965. — 420 с.

4. А. Н. Кормачева. Приближение квадратичных алгебраических решёток целочисленными решётками — II // Чебышевский сборник, 2019, т. 21, вып. 3, с. 215–222.

УДК 511.3

Гиперболическая дзета-функция алгебраических решёток

Р. В. Тарабрин (Россия, г. Оренбург)
Оренбургский государственный университет
e-mail: reanmators@rambler.ru
А. Н. Благовисная (Россия, г. Оренбург)
Оренбургский государственный университет
e-mail: matmet@bk.ru

Hyperbolic zeta function of algebraic lattices

R. V. Tarabrin (Russia, Orenburg)
Orenburg State University
e-mail: reanmators@rambler.ru
A. N. Blagovisnaya (Russia, Orenburg)
Orenburg State University
e-mail: matmet@bk.ru

В теоретико-числовом методе приближённого анализа важную роль играют гиперболические дзета-функции решёток.

Определение 1. *Гиперболической дзета-функцией решётки* Λ *называется функция* $\zeta_H(\Lambda|\alpha)$, $\alpha = \sigma + it$, *задаваемая при* $\sigma > 1$ *абсолютно сходящимся рядом*

$$\zeta(\Lambda|\alpha) = {\sum_{\overrightarrow{x}\in\Lambda}}'(\overline{x}_1...\overline{x}_n)^{-\alpha}. \tag{1}$$

Определение 2. *Обощённой гиперболической дзета-функцией решётки* Λ *называется функция* $\zeta_H(\Lambda + \overrightarrow{b}|\alpha)$, $\alpha = \sigma + it$, *задаваемая при* $\sigma > 1$ *абсолютно сходящимся рядом*

$$\zeta(\Lambda + \overrightarrow{b}|\alpha) = {\sum_{\overrightarrow{x}\in\Lambda+\overrightarrow{b}}}'(\overline{x}_1...\overline{x}_n)^{-\alpha}. \tag{2}$$

Впервые понятие гиперболической дзета-функции решёток появилось в работах Н. М. Коробова [9], [10] и Н. С. Бахвалова [1] в 1959 г. для решёток решений линейного сравнения с несколькими переменными. Н. М. Коробов, проводя оценку погрешности приближенного интегрирования по квадратурным формулам с параллелепипедальными сетками для функции $f(\overrightarrow{x}) \in E_s^\alpha$, получил ряд, являющийся гиперболической дзета-функцией решётки $\Lambda(a_1, ..., a_s; N)$ решений линейного сравнения

$$a_1m_1 + ... + a_sm_s \equiv 0(modN) \tag{3}$$

В наиболее общем виде гиперболическая дзета-функцией решётки появилась в работах К. К. Фролова [11], [12].

Сам термин «гиперболическая дзета-функция решётки» введен в 1984 г. Н. М. Добровольским в работах [2]–[4]. С этих работ началось изучение функции $\zeta_H(\Lambda|\alpha)$ в качестве объекта исследования.

Сначала $\zeta_H(\Lambda|\alpha)$ рассматривалась при вещественных $\alpha > 1$ и для целочисленных решёток. К середине 90-х годов логика развития теории гиперболической дзета-функции решёток привела к необходимости исследовать этот объект во всей полуплоскости $\alpha = \sigma + it$, задаваемой при $\sigma > 1$.

Гиперболическая дзета-функция решётки является рядом Дирихле по усеченному нормменному спектру решётки. Поэтому возникает задача об аналитическом продолжении этого класса рядов Дирихле.

В работах [5], [6] вопросы, связанные с аналитическим продолжением, изучались для различных видов решёток: множества всех целочисленных решеток, множества всех рациональных решеток, множества всех решеток с диагональными матрицами. В результате установлено, что для любой целочисленной решетки гиперболическая дзета-функция является регулярной функцией во всей α-плоскости, за исключением точки $\alpha = 1$, в которой она имеет

полюс порядка s. Кроме того, доказано, что для любой рациональной решетки гиперболическая дзета-функция является регулярной аналитической функцией во всей α-плоскости, за исключением точки $\alpha = 1$, в которой она имеет полюс порядка s.

Итак, Н. М. Добровольский, И. Ю. Реброва, А. Л. Рощеня в серии работ показали, что для любой декартовой решётки аналитическое продолжение на всю комплексную плоскость за исключением точки $\alpha = 1$, в которой полюс порядка s, существует. В то же время вопрос о существовании аналитического продолжения для произвольных решёток остается открытым.

Вывод результатов об аналитическом продолжении для произвольной решётки Λ гиперболической дзета-функции $\zeta(\Lambda|\alpha)$ решётки на всю комплексную плоскость существенно опирается на асимптотическую формулу для числа точек произвольной решётки в гиперболическом кресте как функции от параметра гиперболического креста.

Особый интерес представляют асимптотические формулы для гиперболической дзета-функции алгебраической решётки. Алгебраические решётки и соответствующие алгебраические сетки вошли в науку в 1976 году в работах К. К. Фролова. Каждая такая решётка является решёткой, повторяющейся умножением, а её норменный спектр будет моноидом натуральных чисел. В настоящее время получены асимптотические формулы для гиперболической дзета-функции алгебраической решётки, соответствующей кольцу целых алгебраических чисел чисто-вещественного алгебраического поля степени s [7], [8]. Случай произвольной алгебраической подрешётки не рассматривался. Наибольший интерес представляет башня полей Дирихле, которая получается на каждом шаге добавлением новой квадратичной иррациональности. Такая постановка является новой и ранее не встречалась в литературе. Принципиальный вопрос, который связан с такой постановкой, заключается в следующем: «Какие асимптотические формулы справедливы для гиперболической дзета-функции произвольной алгебраической решётки?»

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Bakhvalov N. S. On approximate computation of multiple integrals // Vestnik Moskovskogo universiteta, no. 4. 1959. pp. 3–18.

2. Добровольский Н. М. Гиперболическая дзета функция решёток. / Деп. в ВИНИТИ 24.08.84, N 6090–84.

3. Добровольский Н. М. О квадратурных формулах на классах $E_s^\alpha(c)$ и $H_s^\alpha(c)$ / Деп. в ВИНИТИ 24.08.84, N 6091–84.

4. Добровольский Н. М. Теоретико–числовые сетки и их приложения. / Дис. ... канд. физ.–мат. наук. Тула, 1984.

5. Добровольский Н. М., Рощеня А. Л. Об аналитическом продолжении гиперболической дзета-функции рациональных решёток // Современные проблемы теории чисел и ее приложения: Сб. тез. докл. III Междунар. конф. Тула, 1996. С. 49.

6. Добровольский Н. М., Реброва И. Ю., Рощеня А. Л. Непрерывность гиперболической дзета-функции решеток // Мат. заметки. Т. 63, вып. 4. 1998. С. 522–526.

7. Добровольский Н. Н. О двух асимптотических формулах в теории гиперболической дзета-функции решёток // Чебышевский сб. Т. 19, вып. 3. 2018. С. 109–134.

8. Добровольская Л. П., Добровольский М. Н., Добровольский Н. М., Добровольский Н. Н. Гиперболические дзета-функции сеток и решеток и вычисление оптимальных коэффициентов // Чебышевский сб. Т.13, вып. 4. 2012. С. 4–107.

9. Коробов Н. М. О приближенном вычислении кратных интегралов // ДАН СССР. 1959. Т. 124, № 6. С. 1207–1210.

10. Коробов Н. М. Вычисление кратных интегралов методом оптимальных коэффициентов // Вестн. Моск. ун-та, 1959. № 4. С. 19–25.

11. Фролов К. К. Оценки сверху погрешности квадратурных формул на классах функций // ДАН СССР. 231. 1976. № 4. С. 818 — 821.

12. Фролов К. К. Квадратурные формулы на классах функций. / Дис. ... канд. физ.-мат. наук. М.: ВЦ АН СССР. 1979.

Секция 9. История математики

УДК 51(091)

Роль личности П. Л. Чебышёва и его работ в развитии познавательного интереса школьников при обучении математике

И. Ф. Авдеев (Россия, г. Орел)
Орловский государственный университет им. И. С. Тургенева
e-mail: ivan_avd@mail.ru
Т. К. Авдеева (Россия, г. Орел)
Орловский государственный университет им. И. С. Тургенева
e-mail: ivan_avd@mail.ru

The role of the personality of P. L. Chebyshev and his works in the development of the cognitive interest of schoolchildren in teaching mathematics

I. F. Avdeev (Russia, Orel)
Orel State University named after I. S. Turgenev
e-mail: ivan_avd@mail.ru
T .K. Avdeeva(Russia, Orel)
Orel State University named after I. S. Turgenev
e-mail: ivan_avd@mail.ru

На календаре 2021 года юбилейная дата – 200 лет со дня рождения Пафнутия Львовича Чебышева (14 мая 1821 – 26 ноября 1894), известного русского математика, основателя Петербургской школы теории чисел, члена Ученого комитета народного просвещения (1856 – 1873). Чебышев с одинаковым успехом работал в нескольких научных областях и в каждой из них получал фундаментальные результаты, создавшие ему мировую славу: это теория чисел, теория вероятностей, теория приближения функций, интегральное исчисление, теория механизмов.

Современному обществу третьего тысячелетия нужны неординарные личности, способные ставить и решать неординарные проблемы, готовить их следует еще со школы. Немаловажную роль успеха школьников при обучении математике играет их познавательный интерес к предмету. Эффективным методом развития познавательного интереса, как доказала практика обучения, является использование историко-математического материала. Деятельностный подход в обучении направлен на развитие личности школьника, он вносит в использование этого метода развития познавательного интереса, некоторые коррективы. На наш взгляд, сегодня ученику важно показать не только историю того или иного математического понятия или проблемы, но и состояние этой проблемы сейчас, каковы перспективы ее развития в будущем... Обращаясь к научному творчеству П. Л. Чебышева, заметим, что и оно питалось актуальными проблемами практики: «Наука находит себе верного руководителя в практике». [1, с.100] Поэтому школьники должны знать, если это доступно их пониманию, нерешенные задачи и проблемы, над которыми работают современные математики, ведь, возможно, их решит кто-то из них. Прокомментируем это на конкретном примере.

Одна из основных линий школьного курса математики – числовая, ее изучение начинается в начальной школе и заканчивается в выпускном классе. Как правило, в учебниках математики основной и профильной школы приводятся краткие исторические сведения к отдельным

математическим понятиям и фактам, дополнением к этому издана серия книг «За страницами школьного учебника математики», например, [2], [3] и другие которые служат хорошим подспорьем учителю математики. Школьникам важно показать непрерывное и постоянное развитие математики по схеме: появляется новое понятие, изучаются математические операции над ним, определяется круг задач, решаемых с помощью этого понятия, при этом выделяются проблемы, одни из которых разрешимы, относительно решения для других, на данный момент, ответа нет. Последние, в основном, и служат средством развития математики: развиваются ее новые направления, разрабатывается их математический аппарат, появляются новые задачи и способы их решения, и так по спирали. Важно, чтобы при обучении математике в школе ученик прочувствовал эту схему, и попробовал стать ее соучастником. Богатый материал для этого содержит тема «Простые числа». В учебнике 5 класса на форзаце приведена таблица простых чисел. Что это: подобие таблицы умножения? Или она может быть продолжена? Конечно ли множество простых чисел? Впервые на этот вопрос ответ дал Евклид, а вы можете доказать, что множество простых чисел бесконечно? Вот первый шаг к исследованию, возможно, он начнется с поиска ответа в литературе или в интернете. При этом старшеклассники узнают, что Карл Гаусс (1777 – 1855) впервые обнаружил, что среди натуральных чисел n , где $2637900 < n < 2638000$ нет ни одного простого числа. Как он это обнаружил? Он сумел составить таблицу всех простых чисел, меньших 3000000. Школьники выделяют черты ученого математика – труд, наблюдение, логика, возможно, формулирование гипотезы. А какую гипотезу выдвинули бы Вы? Многие пытались найти ответ на вопрос: «Сколько имеется простых чисел, не превосходящих данного натурального числа n ?» Вот еще одна тема для исследования. Заметьте, мы учим школьников научному поиску, анализу найденных фактов, исследованию полученных методов решения возникших проблем.

Появляется $\pi(n)$ – количество простых чисел не превосходящих числа n. Л. Эйлер (1707 – 1783) доказал, что $\lim_{n\to\infty} \frac{\pi(n)}{n} = 0$. А. Лежандр (1752 – 1823) дал приближенную формулу $\pi(n) \approx \frac{n}{\ln n - 1{,}08366}$. И только в 1824 г. П. Л. Чебышев решил проблему асимптотического распределения простых чисел: $\varphi(x)$ – функция, означающая число простых чисел, меньших x, то $\varphi(x) = \int_2^x \frac{dx}{\lg x}$. Важное значение в теории чисел имеет, так называемый, постулат Бертрана (1822 – 1900): между числами n и $2n$ при $n \geqslant 4$ лежит, по крайней мере, одно простое число. Доказательство этой гипотезы Бертрана, было найдено П. Л. Чебышевым, прочитать его школьники смогут в статье Стечкина С.Б. [4, с.221-222] Школьникам полезно исследовать и критерии простоты, например, критерий Вильсона-Варинга или Валле Винса. На практике они довольно громоздки, может ваши ученики найдут более простой?

Конечно, самое желанное – найти формулу простого числа! Это исследование блестяще, на наш взгляд, провел Ю. В. Матиясевич [5, с.1-15], в статье он выступает как учитель-наставник, предлагает задачи для школьников, формулирует нерешенные на сей день проблемы. Остается только сказать: «Читайте!»

В наш век ИКТ, следует рассмотреть вопрос о поисках простых чисел. Современные компьютеры открыли доступ к простым числам гигантам: математики Хайратвала, Вольтмен, Куровски в 1999 году доказали, что $2^{6972503} - 1$ простое, оно содержит 2098960 знаков.

Мы намеренно умалчивали до сих пор о числах Мерсенна и совершенных числах, их история подробно описана [2], [3], [5] , опишем современное состояние работы с ними. Числа Мерсенна: $M_p = 2^p - 1$, где p - простое. К 2000 году было открыто 38 простых чисел Мерсенна, причем 12 из них без использования ЭВМ. В 1883 г. русский священник Пермской губернии Иван Матвеевич Первушин доказал, что $M_{61} = 2^{61} - 1 = 2305843009213693951$ число простое. Трудно это или нет, судите сами: Лемер для того чтобы установить, что число $2^{257} - 1$ – составное потратил 1 год. В 1952 г. Робинсон пригласил Лемера и решил эту задачу с помощью ЭВМ за 18 секунд, Лемер был рад, что его результат совпал с машинным. Однако, не следует думать, что ЭВМ будут решать наши математические задачи в мгнове-

ние ока: в 2005 году врач-офтальмолог Мартин Новак (Германия) нашел 42-е число Мерсенна $M_{25964951}$(содержит 7816230 знаков), он потратил 6 лет, используя 24 компьютера. В 2016 году найдено $M_{77232917}$(23249425). Продолжать поиски нашим ученикам.

С числами Мерсенна связаны совершенные числа (числа, равные сумме всех своих собственных делителей). Евклид доказал, что если p, $M_p = 2^p - 1$ простые, то число $m_p = M_p \cdot 2^{p-1}$ совершенное.

В I веке до н.э. Никомах Герасский говорил: «Совершенные числа красивы. Но известно, что красивые вещи редки и немногочисленны, безобразные же встречаются в изобилии. Избыточными и недостаточными числами являются почти все числа, в то время как совершенных чисел немного» [6, с.13] .

Совершенное число красиво, тем более если его записать в двоичной системе счисления, $m_p = M_p \cdot 2^{p-1}$ начинается p единицами, после которых следует $p-1$ нулей. Только одно это свойство делает эти числа востребованными в системе шифрования, при обеспечении безопасности передачи данных и в области многих других высоких информационных технологий. Перечислим проблемы, связанные с простыми числами, которые еще не решены:

1. Могут ли быть нечетными совершенные числа? И какой вид они должны иметь?
2. Конечно или бесконечно множество простых чисел Мерсенна?
3. $F_n = 2^{2^n} + 1$, числа Ферма известно только пять таких чисел $(n = 0, 1, 2, 3, 4)$
4. Конечно или бесконечно множество чисел близнецов (простые числа вида $p-1$, $p+1$). Идет поиск чисел близнецов: февраль 2011 г. найдены числа близнецы
   $(3756801695685 \cdot 2^{666669} \pm 1)$

Небольшой объем статьи не позволяет широко раскрыть проблему привлечения к исследовательской деятельности школьников, мы показали лишь фрагмент этой работы. Возникает вопрос: будет эта работа индивидуальной или групповой? Наш опыт показывает, что в школе и на младших курсах вузов – это группы. В городских школах это, как правило, факультативы или элективные курсы. Для сельских школьников такие группы созданы по разным школьным дисциплинам на базе института развития образования, работают они в онлайн режиме. Очно группы собираются в каникулярное время, это, в основном, представление и защиты ученических проектов. В 2019 г. в Орловской области создан лицей «Созвездие Орла», «Кванториум» (передвижной кластер, оснащенный необходимым оборудованием для организации конструкторской и модельной деятельности школьников). Эти заведения направлены на поддержку одаренных детей, проявивших способности к тому или иному виду деятельности. Для студентов 1-2 курсов организуются занятия математикой в рамках дисциплин по выбору. Для старших курсов в ОГУ им. И.С. Тургенева разработан проект : «Мобильная математика: от математической задачи к профессиональному мастерству».

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Чебышев П. Л. Избранные математические труды // М. – Л., 1948.
2. Депман И. Я., Виленкин Н. Я. За страницами школьного учебника математики, для учащихся 5-6 классов.- М.: Просвещение,1989.- 287 с.
3. Шибасов Л. П. За страницами школьного учебника математики: Арифметика. Алгебра. Геометрия. Пособие для учащихся 10-11 классов общеобразовательных учреждений / Н.Я. Виленкин, Л.П. Шибасов, З.Ф. Шибасова.- М. :Просвещение, 2008.- 276 с.

4. Стечкин С. Б. Простое доказательство теоремы Чебышева о простых числах. – Успехи математических наук, 1968, № 5.

5. Матиясевич Ю. В. Формулы для простых чисел. – Квант, 1975, №5.

6. Депман И. Совершенные числа.- Квант, 1991, №5.

УДК 51(091)

Из истории международных математических конгрессов

В. Г. Алябьева (Россия, г. Пермь)
Пермский государственный национальный исследовательский университет
e-mail: vgalyabeva@gmail.com

From the history of international mathematical congresses

V. G. Alyabieva (Russia, Perm)
Perm State National Research University
e-mail: vgalyabeva@gmail.com

По официальной версии первый международный математический конгресс состоялся в Цюрихе в 1897 г. Однако четырьмя годами ранее в США состоялся международный математический конгресс, не получивший порядкового номера.

В 1893 году в Чикаго состоялась Всемирная колумбовская выставка (World's Columbian Exposition), посвящённая 400-летию открытия Америки Христофором Колумбом (1492). Выставка была призвана продемонстрировать экономическую мощь Соединённых Штатов Америки, их способность конкурировать в организации международных выставок с Парижем и Лондоном. В выставке участвовало 24 штата США, 50 иностранных государств и 37 колоний.

Открытие выставки состоялось 1 мая 1893 г. и завершилась 30 октября. За шесть месяцев её посетили 27 миллионов человек.

В рамках всемирной выставки было запланировано проведение многочисленных международных конгрессов, встреч, собраний, которые проводились каждую неделю за время существования Выставки. Для организации этих конгрессов была создана мощная структура, названная Всемирным вспомогательным конгрессом Выставки (the World's Congress Auxiliary (WCX) of the World's Columbian Exposition of 1893).

Вспомогательный Всемирный конгресс Всемирной колумбовской выставки 1893 года состоял из серии встреч, посвященных почти каждой научной и культурной теме, затрагивающей быстро меняющееся общество 1890-х годов. Конгрессы проводились в новом, недавно построенном здании Дворца искусств чикагского Института искусств одновременно с Выставкой с 15 мая по 28 октября 1893 года.

В течение недели, с 21 августа по 26 августа 1893 г., во Дворце искусств состоялись конгрессы по науке и философии, среди них — Международный математический конгресс. Конгресс не получил порядкового номера, но и по истечении времени именовался международным.

Тот факт, что на американской земле решились проводить математический конгресс в 1893 г., представляется удивительным. До 1876 г. ничего, даже отдалённо напоминающее математическое сообщество в Соединённых Штатах, не существовало [1]. Из американских математических достижений можно было бы назвать лишь «Линейные ассоциативные алгебры» Бенджамина Пирса [2], работы Натаниэля Боудича по небесной механике, астрономические

исследования Саймона Ньюкомба и Джорджа Хилла. Существенные преобразования начались с 1876 г. В Балтиморе, штат Мериленд, в 1876 г. был открыт университет Джона Хопкиннса первый университет США, нацеленный на исследовательскую работу. Отделение математики в течение 7 лет возглавлял Д. Д. Сильвестр. За это время 8 человек под руководством Сильвестра защитили докторские диссертации. Благодаря Сильвестру Америка появилась на математической карте мира. После отъезда Сильвестра исследовательский пыл математиков Хопкинса угас. Кресло Сильвестра было предложено Ф.Клейну. Однако Клейн предпочёл Гёттинген, в котором ему предлагали должность. Ещё во времена работы Клейна в Эрлангене, к нему на обучение, на стажировку приезжали американские студенты. Число американских студентов у Клейна значительно возросло в гёттингентский период. Их восхищало умение Клейна вдохновлять на исследовательскую работу, исследовательский дух немецких университетов, который они пытались сохранить по возвращению на родину. В целом, Клейн оказал на развитие американской математики более сильное влияние, нежели Сильвестр.

В 1887 г. в городе Вустер, штат Массачусетс, основан университет Кларка, скорее аспирантура, нежели университет полного цикла. Официальное открытие университета состоялось в октябре 1889 г. В 1892 г. открыт университет в городе Чикаго, также нацеленный на исследовательскую работу. Департамент математики в университете Чикаго возглавил Э.Г. Мур. По предложению Мура для работы в университет Чикаго были приглашены Оскар Больца и Генрих Машке. Благодаря усилиям Мура, Больца, Бляшке, университет Чикаго с 1892 г. по 1908 г. был непревзойдённым университетом США по обучению высшей математики. Под руководством Мура с 1896 г. по 1929 г. 30 человек получили докторские степени.

Если до 1875 г. в США всего 6 специалистов в области математики имели степень доктора наук, то в течение последующих 15 лет 39 американцев получили степени в США и 15 за рубежом.

Таким образом, к моменту проведения математического конгресса в США появилось исследовательское сообщество.

Математический конгресс был организован математическим факультетом недавно открытого (1892) университета Чикаго. Организаторами конгресса были Оскар Больца, Генрих Машке, Элиаким Гастингс Мур из университета Чикаго, и Генри Уайт (Henry Seely White, 1861–1943) из Северо-Западного университета.

Феликс Клейн выступил с докладом «Современное состояние математики». Клейн призывает стремиться достигать результаты совместными усилиями и сотрудничеством.

«Движение в этом направлении было начато во Франции под мощным влиянием Пуанкаре. Для аналогичных целей мы три года назад создали в Германии математическое общество, и я приветствую молодое общество в Нью-Йорке и его *Bulletin* как находящиеся в гармонии с нашими устремлениями. Но наши математики должны идти еще дальше. Они должны создавать международные союзы, и я верю, что нынешний Всемирный конгресс в Чикаго станет шагом в этом направлении» [3, 4].

Президентом математического конгресса избран профессор У. Стори (W.E. Story) из университета Кларка, вице-президентом — профессор Элиаким Мур из университета Чикаго, секретарём — профессор Гарри Тайлер (H W. Tyler) из Массачусетского технологического института. В исполнительный комитет были избраны профессор Феликс Клейн и профессор Генри Уайт. Профессор Клейн был избран почётным президентом Математического конгресса.

В работе математического конгресса приняли участие 45 человек, из них — 41 американских участников и 4 иностранных. Из иностранцев, кроме Клейна, прибыли три участника: Эдуард Штуди (Eduard Study, Ph.D., Германия), Бернард Паладини (Bernard Paladini, Ph.D., Италия), Норберт Герц (Norbert Herz , Ph.D., Австрия, без доклада). В работе математической секции участвовали две женщины: Шарлотта Барнум (Charlotte Barnum) из Нью Хейвена и Мзри Уинстон (Mary Winston) из университета Чикаго. Состав американской делегации по

наличию академических степеней был достаточно неоднородным: из 41 делегата только 23 имели степень доктора философии (Ph.D.), 9 — степень магистра искусств (M.A.).

Тематика заседаний математического конгресса такова:

- *Вторник, 22 августа.* Арифметика, алгебра. (Multiple Algebra)
- *Среда, 23 августа.* Алгебраическая теория кривых. Теория функций действительных переменных.
- *Четверг, 24 августа.* Теория функций комплексного переменного.
- *Пятница, 25 августа.* Теория групп.
- *Суббота, 26 августа.* Геометрия.

Авторам слишком объёмных статей предлагалось сократить их в разумных пределах, удобных для сообщений. В случае отсутствия автора эту работу выполнял делегат, назначенный исполнительным комитетом; если это было невозможно, то на заседании зачитывался только заголовок статьи. С этими необходимыми сокращениями заседание продолжалось обычно до трёх-четырёх часов дня. Всего в течение недели было заслушано 39 докладов, из них 13 принадлежали американским авторам (включая Генриха Машке и Оскара Больца). Из докладчиков на конгрессе присутствовали 11 человек [5].

Франк Коул сообщал в журнале «Science» (Наука): «Конгресс был решительно космополитическим по авторству представленных статей».

Отметим наиболее известных авторов докладов: Шарль Эрмит (*О некоторых фундаментальных положениях теории эллиптических функций*), Давид Гильберт (*О теории алгебраических инвариантов*), Феликс Клейн (*О развитии теории групп в течение последних двадцати лет*), Герман Минковский (*О свойствах целых чисел, которые выявляются при пространственном представлении*), Макс Нётер (*Последовательные и совпадающие элементы алгебраической кривой*), Артур Шёнфлис (*Теория групп и кристаллография*), Эдуард Штуди (*Старые и новые исследования о системе комплексных чисел*) и др. Заметка о результатах русского автора, Ивана Михеевича Первушина (*Относительно арифметических операций с большими числами*), была представлена профессором Казанского университета А.В. Васильевым. Большинство докладов были прочитаны в отсутствие их авторов.

В октябрьском номере журнале *«Bulletin of the New York mathematical society»* за 1893 г. секретарь конгресса Гарри Тайлер опубликовал подробную программу заседаний математического конгресса [6].

В 1896 г. были опубликованы материалы Математического конгресса «Mathematical papers read at the International Mathematical Congress held in connection with the World's Columbian Exposition, Chicago, 1893» [7]. В еженедельном научном междисциплинарном журнале «NATURE» (базирующемся в Лондоне) за 25 июня 1896 г. появилась статья, в которой сообщалось о публикации трудов математического конгресса. Автор статьи отмечает, что на 400 страницах издания содержится 39 статей, большая часть которых принадлежит немецким и американским математикам, несколько статей — математикам из Франции, Италии. Австрии и России, но не представлены английские математики.

В заключении автор статьи утверждает: «Книга является свидетельством постепенного, но уверенного формирования американской математической школы, которая сначала вдохновлялась Кэли и Сильвестром, а теперь находится под влиянием современных немецких методов».

После окончания математического конгресса Феликс Клейн откликнулся на пожелание участников Конгресса провести математический коллоквиум. Коллоквиум состоялся в городе Эванстон (Evanston Colloquium), северном пригороде Чикаго, на базе Северо-Западного университета. В Северо-Западном университете работал в качестве профессора математики один

из первых американских учеников Клейна — Генри Уайт (защитил докторскую диссертацию в 1891 г.). Клейн прочитал 12 лекций (на английском языке), посвящённых современному состоянию математики и много времени посвящал личному общению со слушателями и дискуссиям. Лекции Клейна в Эванстоне были изданы отдельной книгой [8].

Инициатива Ф.Клейна по проведению тематических коллоквиумов была поддержана Американским математическим обществом, в которое в 1894 было реорганизовано Нью-Йоркское математическое общество. Математическое общество постановило проводить коллоквиумы или лекции с интервалом от двух до четырёх лет.

Заключение

Математический конгресс в Чикаго стал значимым национальным и международным событием. В Соединённых Штатах он способствовал дальнейшему развитию математического исследовательского сообщества, увеличению численности членов математического общества, появлению его новых секций. Успех этого мероприятия вдохновил международное математическое сообщество проводить международные математические съезды на регулярной основе.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Parshall K. H,, Rowe D. E. The emergence of the American mathematical research community (1876 1976): J. J. Joseph Sylvester, Felix Klein, and E. H. Moore // History of Mathematics. V.8.1994. 500 p.

2. Peirce B. Linear associative algebras. With notes and addenda by C.S.Peirce, son of the author // American journal of the mathematics. 1881. V.4. P. 97–229.

3. Klein F. Inaugural address // Bulletin of the New York of mathematical society. 1893. V.3. P. 1–3.

4. Klein F. The present state of mathematics // The Monist. 1893, V.4. No.1, P. 1–4.

5. Albers D.J., Alexanderson G.L., Reid C. International mathematical congresses. An illustrated history 1893–1986. Springer-Verlag, 1987.

6. Tyler H. The mathematical congress at Chicago // Bulletin of the New York of mathematical society". 1893. V.3. P. 14–19.

7. Mathematical Papers read at the International Mathematical Congress held in connection with the World's Columbian Exposition, Chicago, 1893. New York: Macmillan and Co.

8. Klein F. The Evanston Colloquium: Lectures on mathematics. New York, Macmillan. 1894. 109 p.

УДК 51(091)

Первая работа П. Л. Чебышёва

П. Н. Антонюк (Россия, г. Москва)
Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
e-mail: pavera@bk.ru

The first work of P. L. Chebyshev

P. N. Antonyuk (Russia, Moscow)
Lomonosov Moscow State University
e-mail: pavera@bk.ru

Первую свою работу «Вычисление корней уравнений» Пафнутий Львович Чебышев написал в 17 лет при переходе с первого на второй курс Московского университета в 1838 году. Позже, на студенческом конкурсе, он получил за эту работу серебряную медаль. В работе впервые рассмотрены быстрые итерационные алгоритмы нахождения корней уравнения (или нулей функции действительного переменного). Эта работа стала известна поздно, после опубликования ее в 1951 году в пятом томе Полного собрания сочинений П. Л. Чебышева.

История метода последовательных приближений, применяемого для решения уравнений, насчитывает два тысячелетия. Последовательность приближений к корню уравнения (изолированный корень кратности один) имеет предел – корень уравнения. Скорость сходимости последовательности определяется просто: количество правильных десятичных знаков приближения после итерации, деленное на количество правильных знаков до итерации, равно скорости сходимости. Конечно, скорость определяется асимптотически, при большом количестве итераций.

До Чебышева были реализованы три скорости: 1, 2 и 3 (линейная сходимость, квадратичная сходимость и кубическая сходимость). Как правило, метод последовательных приближений сходится линейно. Скорость метода Ньютона равна двум. Скорость три впервые появляется в методе друга Ньютона Эдмунда Галлея. Чебышев получил итерационную формулу, дающую алгоритмы, сходящиеся со скоростью, равной любому натуральному числу, то есть сходящиеся с любой сколь угодно большой скоростью. Методы Ньютона и Галлея являются следствиями формулы Чебышева. Можно сказать, что после Чебышева увеличивать скорость сходимости стало невозможно.

Немецкий математик Э. Шрёдер переоткрыл итерационную формулу Чебышева в 1870 году. Американский математик А. С. Хаусхолдер в 1953 году прокомментировал результат Шрёдера и записал формулу Чебышева в другом представлении. Ни Шрёдер, ни Хаусхолдер до конца жизни так и не узнали, что первым итерационную формулу получил Чебышёв. И сегодня, европейские и американские математики, как правило, ссылаются на Хаусхолдера, так как многие из них не знают работу Чебышева. Другая судьба сложилась у полиномов Чебышева, о них пишут и говорят постоянно. С другой стороны, работа Шрёдера для Чебышева осталась неизвестной.

УДК 512.1

Первая научная работа Чебышёва и метод Ньютона

О. О. Барабанов (Россия, г. Ковров)
e-mail: barabanovoo@yandex.ru
Л. П. Барабанова (Россия, г. Ковров)
Ковровская государственная технологическая академия имени В. А. Дегтярева
e-mail: lpbarabanova@yandex.ru

Chebyshev's first scientific work and Newton's method

O. O. Barabanov (Russia, Kovrov)
e-mail: barabanovoo@yandex.ru
L. P. Barabanova (Russia, Kovrov)
The Kovrov State Technological Academy named after V. A. Degtyarev
e-mail: lpbarabanova@yandex.ru

Известно, что первая научная публикация Пафнутия Львовича Чебышева приходится на 1843 год. Однако первая научная работа студента Императорского Московского университета Пафнутия Чебышева была написана и представлена научной публике несколькими годами раньше. Как пишет В.Е. Прудников, "В 1840/41-м учебном году на основании 103-й статьи университетского устава во 2-м отделении философского факультета была предложена тема на медаль: «О числовом решении алгебраических уравнений высших степеней». За сочинение на эту тему золотая медаль присуждена была действительному студенту Антону Смоляку, серебряные — «кандидатам из дворян» Пафнутию Чебышеву и Николаю Горлицыну.

Если учесть, что работу Чебышева можно смело поставить в ряд выдающихся, то присуждение ему серебряной медали вызывает недоумение. Остается предположить, что жюри конкурса не сумело по достоинству оценить ее. Что же до работы А. Смоляка, то последняя, к сожалению, не сохранилась, а ее автор не оставил никаких следов в математике [1]. Такой же оценки результатов конкурса придерживались и ответственные редакторы V тома полного собрания сочинений П.Л. Чебышева: академик С. Н. Бернштейн, Д. Л. Васильков, профессор В. Л. Гончаров, академик В. И. Смирнов, впервые опубликовавшие первую работу П.Л. Чебышева в [2] под названием "Вычисление корней уравнений"[2, p. 7-25].

Работа поражает тремя качествами, неожиданными для 19-летнего студента: совершенной математической техникой (см. об этом комментарий [2, p. 173-176]), уникальным предвиденьем того, что будет нужно в будущем, и стратегичностью замысла. Сначала о предвиденьи. К моменту написания работы сложилась традиция, восходящая к 17 веку, совершения обряда отделения корней. Например, Остроградский в своих лекциях [3] посвящает этому предприятию 7 лекций против 2 лекций о локальных итерационных приемах непосредственного вычисления корня. Чебышев, признавая классификацию Остроградского, деликатно отказывается от обсуждения разделения корней. Теперь оглянемся вокруг. Компьютер сделал численный эксперимент легким, быстрым и увлекательным развлечением. При этом задачи все сложнее и сложнее. В этих условиях НИКТО из уважающих себя исследователей не начинает поиск корней с традиционного их отделения. Только в редких случаях, когда требуется особая надежность автоматики, прибегают к очень дорогому предприятию априорного отделения корней, да и то в сочетании с другими приемами. Конечно, мы держим в уме многомерный метод Ньютона, и мы пока не знаем ни одного содержательного многомерного примера, в котором бы отделение корней можно было бы эффективно провести. Чебышев, как будто это предвидел,

деликатно уклоняясь. Может быть, поэтому он и лишился золотой медали от современников. Зато теперь она — его.

Далее, в первой части своей работы юный стратег пишет: "... исчерпав одним общим приемом все способы как известные, так и возможные, мы сообщаем теории, с одной стороны, полноту, какой не могли бы доставить ей тысячи новых способов, а с другой, единство, которое теперь еще при небольшом числе их потеряно.

Так усовершенствуется теория, и необходимым следствием этого будет удобность ее приложений. Исследование подобного приема составляет цель настоящего рассуждения".

После такого замечательного вступления Чебышев совершенно справедливо обращается к наиболее перспективному методу — методу Ньютона с тем, чтобы его обобщить и укрепить гарантиями точности. При этом он не роняет ни слова о том, что выходит за границы конкурса тем, что его метод и его оценки точности годятся для всех трансверсальных гладких функций, а не только для полиномов. При этом он сам это, почти наверняка, понимает. Тем более, что в библиотеке Императорского Московского Университета есть монография самого Эйлера [4], в главе которой "О применении дифференциального исчисления к решению уравнений"метод Ньютона применяется к произвольным гладким функциям. При подготовке к конкурсу Чебышев не мог эту грандиозную книгу пропустить.

В своей работе Чебышев сначала выполняет обращение тейлоровского ряда и получает следующее опорное разложение (скобки вокруг аргумента α не писались):

$$x = \alpha - \frac{f\alpha}{f'\alpha} - \left(\frac{f\alpha}{f'\alpha}\right)^2 \frac{f''\alpha}{2f'\alpha} - \left(\frac{f\alpha}{f'\alpha}\right)^3 \left[\frac{(f''\alpha)^2}{2(f'\alpha)^2} - \frac{f'''\alpha}{6f'\alpha}\right] -$$

$$- \left(\frac{f\alpha}{f'\alpha}\right)^4 \left[\frac{5(f''\alpha)^3}{8(f'\alpha)^3} - \frac{5f''\alpha f'''\alpha}{12(f'\alpha)^2} + \frac{f^{IV}\alpha}{f'\alpha}\right] - \ldots$$

"Вот общее истинное выражение корня уравнения — начало всех частных способов. Приложения его к десятичным и непрерывным дробям дадут способы Фурье, Лагранжа, высших порядков, ... и множество новых". Тут же Чебышев подтверждает им сказанное примерами.

Останавливая свое опорное разложение на некотором члене, Чебышев оценивает полученное приближение с помощью классического приема Лагранжа. "Этот безукоризненный ход мысли позволяет избегнуть рассмотрения вопроса о сходимости, которое в те времена едва ли можно было предпринять"пишут комментаторы [2, p. 174]. При этом Чебышев получает оценки точности, значительно превосходящие аналогичные у Фурье [5].

Чтобы лучше понять место работы Чебышева, стоит напомнить основные вехи развития метода Ньютона и его применений.

Сначала был прием Герона для корня квадратного. Затем Ньютон предложил последовательную линеаризации алгебраического уравнения [6], обобщив тем самым метод Герона. Современник Ньютона Рафсон придал алгоритму Ньютона форму простой итерации. Однако Ньютон и Рафсон ограничивались только алгебраическими уравнениями.

У Томаса Симпсона [8] и Эйлера [4] уравнения уже только гладкие.

Первые достаточные условия сходимости одномерного метода Ньютона получил Фурье (Fourier; 1768 – 1830) [5].

В отечественной математической литературе первым после Эйлера изложил метод Ньютона Тимофей Федорович Осиповский (1766 – 1832) в разделе "О нахождении корней уравнения через приближение"своего учебника [7] 1802 года, но только для алгебраических уравнений. Любопытно, что Осиповский также получает разложение типа опорного у Чебышева, но разложение неявного вида (как у самого Ньютона) и относительно отклонения. Чебышев вполне мог быть знаком с учебником Осиповского, и тогда это могло бы способствовать его собственному совершенному результату.

Метод Ньютона на системы произвольных уравнений перенес в 1740 году Томас Симпсон [8], значительно опередив время.

Первая теорема с достаточными условиями сходимости многомерного метода Ньютона принадлежит Леониду Витальевичу Канторовичу (1912 – 1986) [9].

Многомерный метод Ньютона, как эффективный частный вариант метода простой итерации, вошёл в классику. Более того, современные компьютерные алгоритмы его постоянно используют, чаще — в удобной для программирования разностной форме (см., например, [10], [11]).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Прудников В. Е. Пафнутий Львович Чебышев (1821 — 1894). — Л.: Наука, 1976.
2. Чебышев П. Л. Полное собрание сочинений в 5 томах. Т. 5. — М., Л.: Изд. Акад. Наук СССР, 1951.
3. Остроградский М. В. Лекции алгебраического и трансцендентного анализа. Первый год / Читан. в Морском кадет. корпусе акад. Остроградским; Сост. корп. кораб. инж. кап. С. Бурачком и лейт. С. Зеленым. — СПб.: Тип. Конрада Вингебера, 1837.
4. Euler L. Institutiones calculi differentialis cum eius usu in analysi finitorum ac doctrina serierum. – St. Petersburg: Academiae Imperialis Scientiarum,1755. 880 pp.
5. Fourier J. B. J. Analyse des équations determinées. Première partie. — Paris: Chez Firmin Didot frères, 1831. 258 p.
6. Newton, De analysi per aequationes numero terminorum infinitas, 1669.
7. Осиповский Т. Ф. Курс математики. Т.I. —- СПб.: Импер. Академия Наук, 1802.
8. Simpson Th. A new Method for the Solution of Equations in Numbers / Essay on several subjects in speculative and mixed mathematics. —- London, 1740. P. 81-86.
9. Канторович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ. –– М.: Наука, 1984.
10. Барабанова Л. П. Алгоритм акустической навигации в плоскослоистой подводной среде // Акустический журнал. 2015. Т. 61. №4. С.529-534.
11. Барабанова Л. П. Новый атмосферный GNSS-метод улучшения точности абсолютного позиционирования // Известия РАН. Теория и системы управления. 2015. №1 С. 137-143.

УДК 51(091)

Об истории теории ветвления и вкладе отечественных математиков[1]

Е. М. Богатов (Россия, г. Старый Оскол, г. Губкин)
Старооскольский технологический институт (филиал) Национального исследовательского технологического университета «МИСиС», Филиал НИТУ «МИСиС» в г. Губкине Белгородской области
e-mail: embogatov@inbox.ru

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект 20-011-00402

On the history of branching theory and the contribution of Russian mathematicians

E. M. Bogatov (Russia, Stary Oskol, Gubkin)
Stary Oskol Technological Institute of National Research University of Science and Technology "MISiS", Branch of National Research University of Science and Technology "MISiS" in Gubkin town
e-mail: embogatov@inbox.ru

1. Фигуры равновесия вращающейся жидкости.

Задача о фигурах равновесия вращающейся массы жидкости относится к небесной механике; её решение позволило бы определить формы планет Солнечной системы. К началу 1880-х гг. имелось два вида решений этой задачи (Маклорена и Якоби), в зависимости от угловой скорости ω вращения массы. Это были двухосные сфероиды Маклорена и трёхосные эллипсоиды Якоби. Указанная задача занимала умы многих математиков, начиная с И.Ньютона.

Известно,что в 1882 г. в одной из бесед А.М. Ляпунова с его научным руководителем П.Л. Чебышевым в поиске темы магистерской диссертации Ляпунову был предложен вопрос об иследовании форм равновесия вращающихся жидкости, отличных от уже имеющихся. Работа над полным ответом на этот вопрос заняла у Ляпунова более 40 лет [1, с. 34-35]. В 1905 г. он, в частности, вывел уравнение следующего вида, ставшее фундаментом всей его теории

$$R(\theta,\psi)H(\theta,\psi)\zeta(\theta,\psi) - \int_S \frac{H'(\theta',\psi')\,\zeta'(\vartheta',\psi')\,d\sigma'}{D(\theta,\psi,\theta',\psi')} = \frac{\Delta}{2}W + C, \tag{1}$$

где $W = \eta\cdot(p+\cos^2\psi + q\sin^2\psi+\zeta)\sin^2\theta + U_2 + U_3 + \ldots$, U_n - однородная интегро-степенная форма относительно функции ζ ; R, H и Δ - заданные функции; D - расстояние между точками эллипсоида $\zeta(\theta,\psi)$ и $\zeta'(\theta',\psi')$; S – поверхность единичной сферы; C – постоянная.

Число решений этого уравнения зависело от количества решений соответствующего ему линейного однородного уравнения, когда в правой части (1) стоит 0.

Параллельно с Ляпуновым задачу поиска новых решений решал А. Пуанкаре. В работе 1885 г. [2] он показал, что различные фигуры равновесия жидкой массы образуют линейные серии; в одной и той же серии эти фигуры зависят от переменного параметра. С каждой такой фигурой Пуанкаре связал бесконечную последовательность коэффициентов, названных им коэффициентами устойчивости (условие устойчивости заключается в положительности этих коэффициентов). При обращении одного из коэффициентов в нуль получается фигура бифуркации [2, с. 377].

2. Результаты Э. Шмидта. Выделение уравнения разветвления.

Несмотря на высокое вычислительное мастерство Ляпунова, его изложение тяжеловесно и воспринимается с трудом даже в наши дни. Заботясь о выполнении множества условий, связанных с решением своей задачи, Ляпунов не старался выработать общую идею, на которой основывалось бы его доказательство. Эту идею в абстрактном виде представил Э. Шмидт [3]. Он рассмотрел задачу о существовании решений уравнения вида

$$u(x) - \int_a^b K(x,s)\,u(s)\,ds = f(x) + \int_a^b K_1(x,s)\,v(s)\,ds - \sum_{m+n\geq 2} U_{mn}\begin{pmatrix} x \\ u,v \\ . \end{pmatrix} \tag{2}$$

В уравнении (2) $x\in(a,b)$;

$U_{mn}\begin{pmatrix} x \\ u,v \end{pmatrix}$ — конечная или бесконечная сумма интегростепенных слагаемых вида

$$\int_a^b \int_a^b K(x,y_1,y_2)u^{\alpha_1}(y_1)v^{\beta_1}(y_1)u^{\alpha_2}(y_2)v^{\beta_2}(y_2)dy_1dy_2.$$

Для исследования разрешимости уравнения (2) «в малом» при малых $v(s)$ Шмидт рассмотрел его, как уравнение с известной правой частью и применил к нему теорию Фредгольма о выражении решений линейного уравнения посредством резольвенты. Представление нелинейной части уравнения (2) в виде ряда (хотя и интегростепенного) позволило применить принцип его обращения, аналогичный принципу фон Коха, разработанного для бесконечных систем уравнений. Итогом явилось представление решения (2) в виде

$$u(x) = \sum_{m+n\geq 1} \xi^m V_n^m \begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix},$$

где $V_n^m\begin{pmatrix} x \\ u,v \end{pmatrix}$ — подлежащая определению интегро-степенная форма степени n по v,
ξ – вещественное число.

Для определения возможных значений ξ получилось уравнение *разветвления* вида

$$\xi = \sum_{m+n\geq 1} \xi^m \int_a^b \varphi_1(s) V_n^m \begin{pmatrix} s \\ v \end{pmatrix} ds, \tag{3}$$

где φ_1 - собственая функция, соответствующая собственному значению $\lambda = 1$ линейного интегрального оператора с ядром $K(x,y)$.

3. Исследования А. Гаммерштейна и Н.Н. Назарова.

Глобальное рассмотрение нелинейных интегральных уравнений, в том числе и на предмет ветвления его решений, требовало привлечения других методов, отличных от методов классического анализа (разложения в ряды). Первым из таких методов явился метод сведения исходной задачи $F(u) = 0$, $u \in E$, к задаче нахождения минимума функционала Φ, ассоциированного с F. К исследованию нелинейных интегральных уравнений этот метод впервые был применён А. Гаммерштейном (1930) [4]. Гаммерштейн продемонстрировал, что для уравнения

$$y(x) = \int_a^b K(x,s)f(s,(y(x))ds \tag{4}$$

конечномерный вариант минимизации приводит к системе с бесконечным числом неизвестных:

$$c_m = \frac{1}{\lambda_m}\int_a^b f\left(x, \sum_{j=1}^{\infty} c_j\varphi_j(x)\right)\varphi_m(x)dx \qquad m = 1,2,\ldots, \tag{5}$$

где $\{\varphi_m\}$ - собственные функции линеаризованной задачи; c_i - коэффициенты в представлении y через их линейную комбинацию.

Гаммерштейн показал, что система (5) имеет, по крайней мере, одно решение, если функция $f(s,y)$ непрерывна по обеим переменным и удовлетворяет определённым ограничениям на рост [4].

В 1940-е гг. уравнения Гаммерштейна стали предметом исследований Н. Н. Назарова, ученика В.А. Стеклова. Предполагая, что нелинейное ядро в уравнении (5) разложимо в ряд в окрестности известного решения, Назаров представил малые решения (5) в виде рядов по

целым или дробным степеням параметра $\mu = \lambda - \lambda_0$. Коэффициенты этих рядов были определены рекуррентно из бесконечной системы уравнений, а их сходимость, как и у Ляпунова и Шмидта, была установлена путём построения мажорант [5].

4. Переход к абстрактным операторам в банаховом пространстве.

С развитием нелинейного функционального анализа оказалось возможным перенести результаты Шмидта на объекты более абстрактной природы. Первые результаты здесь связаны с именем Л. Лихтенштейна [6] (1931). Он представил интегростепенной ряд, стоящий в правой части (2), как функционал, и применил к доказательству разрешимости уравнения (2) метод сжимающих отображений Банаха.

В 1948 г. японский математик Т. Симидзу рассмотрел абастрактный аналог уравнения (2) следующего вида:

$$x + U_1(x) = \lambda y - \sum_{m=2}^{\infty} U_m(x). \tag{6}$$

где $x, y \in E$ (комплексное банахово пространство; $U_m : E \to E$ $m \geq 1$; U_1 - линеен и вполне непрерывен; U_m $(m \geq 2)$ - однородный оператор. Как и Шмидт, Симидзу рассмотрел два случая. Если число -1 не является собственным значением оператора U_1, то оператор $I + U_1$ имеет ограниченный обратный и из (6) следует, что x выражается через y и $U_m(x)$ явным образом.

Если число -1 является p-кратным собственным значением оператора U_1, то используется известная теорема Рисса-Шаудера. На её основе удалось получить уравнение, которому должно удовлетворять решение (6):

$$x = \lambda y - \sum_{m=2}^{\infty} U_m(x) - R\big(\lambda y - \sum_{m=2}^{\infty} U_m(x)\big) + \sum_{j=1}^{p} \xi_j \varphi_j, \tag{7}$$

где R- линейный ограниченный оператор; φ_j - собственные векторы оператора U_1, соответствующие собственному значению $\lambda = -1$.

Применяя к (7) метод последовательных приближений по примеру Лихтенштейна, Симидзу доказал однозначную его разрешимость и представил решение (7) в виде ряда, сходящегося при малых $|\xi_j|$ и $|\lambda|$. Постановка этого ряда в сопряжённое к (6) уравнение дало систему уравнений разветвления относительно величин ξ_j , λ, аналогичную системе уравнений разветвления Ляпунова-Шмидта [7].

5. Использование теоремы о неявной функции и диаграммы Ньютона.

Для простоты будем считать, что 1 является простым собственным значением линейного интегрального оператора с ядром $H_1(x, y)$. Рижский математик А. Стапан рассмотрел (как и Назаров) случай уравнения Гаммерштейна с аналитическим ядром

$$v(x) - \lambda_0 \int_a^b H_1(x, y) v(y))\, dy = \int_a^b \left[\mu (H_0 + H_1 v) + (\mu + \lambda_0)\left(H_2 v^2 + H_3 v^3 + \ldots\right)\right] dy. \tag{8}$$

Он впервые дал полное решение задачи о числе всех малых решений уравнения (8), о виде каждого такого решения и о сходимости получающихся рядов. Для нахождения указанных решений Стапан воспользовался диаграммой Ньютона.

Из исследований Стапана вытекают следующие утверждения для невырожденного случая:

- число всех малых решений уравнения (8) конечно; оно равно длине проекции убывающей части диаграммы Ньютона.

- каждое малое решение (8) представляется в виде ряда по целым или дробным степеням λ, сходящегося в некоторой окрестности $\lambda = 0$, причём показатели указанных степеней эффективно вычисляются при помощи диаграммы Ньютона.

Параллельно со Стапаном метод диаграммы Ньютона (в модификации Дьедонне) стал применять Р. Бартл [9]. Он существенным образом опирался на теорему о неявной функции Хильденбрантда-Грэйвса [10], а также на теорему Хана-Банаха. Он рассмотрел более общий аналог уравнения Шмидта (чем Симидзу):

$$Bx + F(x, y) = 0,$$

где $B : X \to X$ - линейный оператор, $F : (X \times Y) \to X$ - непрерывный по совокупности аргументов, $F(0) = 0$ и получил для этого уравнения "уравнение разветвления в проекциях".

Дальнейшее развитие метода Ляпунова-Шмидта на основе теоремы о неявной функции с помощью многоугольника Ньютона было проведено силами московских математиков В. А. Треногина и М.М. Вайнберга (конец 1950-х -начало 1960-х гг.). В тот же период их воронежский коллега М.А. Красносельский получил значительное число новых результатов качественного характера без перехода к уравнению разветвления.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ляпунов А. М. О форме небесных тел // Известия Академии наук СССР. VII серия. Отд. физико-математических наук. 1930. № 1, С. 25–41.

2. Poincaré H. Sur l'équilibre d'une masse fluide animée d'un mouvement de rotation // Acta Mathematica. 1885. Vol. 7. Iss. 1, P. 259-380.

3. Schmidt E. Zur Theorie der linearen und nichtlinearen Integralgleichungen. III. Teil. // Mathematische Annalen. 1908. Vol. 65. Iss. 3, P. 370-399.

4. Hammerstein A. Nichtlineare Integralgleichungen nebst Anwendungen // Acta Mathematica. 1930. Vol. 54. P. 117–176.

5. Назаров Н. Н. Нелинейные интегральные уравнения типа Гаммерштейна // Труды Среднеазиат. гос. ун-та. Серия V-a, Математика. 1941. Вып. 33, С. 1-79.

6. Lichtenstein L. Vorlesungen über einige Klassen nichtlinearer Integralgleichungen und Integro-Differentialgleichungen nebst Anwendungen. — Berlin: Julius Springer, 1931. 164 p.

7. Shimizu T. Analytic operations and analytic operational equations // Mathematicae Japonicae. 1948. Vol. 1, P. 36-40.

8. Стапан А. Э. Разветвление решений нелинейных интегральных уравнений : Автореферат дис. ... кандидата физ.-мат. наук / Рига : Латв. гос. пед. ин-т, 1951. - 12 с.

9. Bartle R. G. Singular points of functional equations // Transactions of the American Mathematical Society. 1953. Vol. 75, Iss. 2. P. 366-384.

10. Hildebrandt T. H., Graves L. M. Implicit functions and their differentials in general analysis // Transactions of the American Mathematical Society. 1927. Vol. 29, Iss. 1. P. 127-153.

УДК 51

По чебышёвским местам

И. В. Денисов (Россия, г. Тула)
Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого
e-mail: den_tspu@mail.ru

In the Chebyshev places

I. V. Denisov (Russia, Tula)
Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University
e-mail: den_tspu@mail.ru

Основной текст тезисов.

Знакомство с чебышевскими местами нужно начинать с села Спас-Прогнанье (Жуковский район Калужской области). Это родное имение П. Л. Чебышёва и здесь под звонницей храма Преображения Господня в саркофаге покоится его тело. Рядом с храмом находятся могилы родителей.

Оптимальный маршрут от Тулы до села Спас-Прогнанье пролегает по новому Симферопольскому шоссе: нужно объехать Серпухов и повернуть влево на бетонку. После пересечения с Варшавским шоссе, не доезжая до Киевского, свернуть направо. Примерное расстояние 150 км.

Пафнутий Чебышёв родился 4 (16) мая 1821 года в селе Окатово Боровского уезда Калужской губернии (в н. вр. село Акатово Жуковского района Калужской области), записан в метрической книге храма Преображения Господня в селе Спас-Прогнанье.

Первоначальное воспитание и образование получил дома. В 1832 году семья переехала в Москву, чтобы продолжить образование взрослеющих детей.

У самого П. Л. Чебышёва детей не было. В настоящее время есть потомки по линиям братьев и сестер (было четыре брата и четыре сестры). Один из потомков сестры, праправнук Е. Л. Чебышевой, - Н. В. Лопатин подарил мне свою книгу [1] с дарственной надписью. В настоящее время в этой книге содержится наиболее полная история рода Чебышёвых.

П. Л. Чебышёв умер 26 ноября (8 декабря) 1894 года за письменным столом.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лопатин Н.В., Бессонов В.А., Заурдина С.Я. История рода Чебышевых. - Калуга, 2004.

УДК 372.851

О вкладе П. Л. Чебышёва в совершенствование содержания математического образования

Ю. А. Дробышев (Россия, г. Калуга)
Калужский филиал Финансового университета при Правительстве Российской Федерации
e-mail: drobyshev.yury2011@yandex.ru
И. В. Дробышева (Россия, г. Калуга)
Калужский филиал Финансового университета при Правительстве Российской Федерации
e-mail: drobysheva2010@yandex.ru

About the contribution of P. L. Chebyshev to the improvement of the content of mathematical education

Yu. A. Drobyshev (Russia, Kaluga)
Financial University under the Government of the Russian Federation, Kaluga Branch
e-mail: drobyshev.yury2011@yandex.ru
I. V. Drobysheva (Kaluga, Russia)
Financial University under the Government of the Russian Federation, Kaluga Branch
e-mail: drobysheva2010@yandex.ru

1. Введение

Помня о существенном вкладе П. Л. Чебышева в развитие математики, не следует забывать о его роли в совершенствовании системы математического образования в России. Можно выделить три направления, в которых работа П. Л. Чебышева оказала наиболее существенное влияние на российское математическое образование. Это:

- постановка математических курсов в Санкт-Петербургском университете;
- работа в составе математической комиссии Ученого комитета Главного управления училищ Министерства народного просвещения;
- создание знаменитой Петербургской математической школы.

2. Постановка математических курсов в университете

Начиная с 1847-1848 учебного года Пафнутий Львович приступил к чтению лекций, которые он читал до 1882 года. За это время им было разработано содержание лекций по высшей алгебре, теории чисел, сферической тригонометрии, интегральному исчислению, аналитической геометрией, теории эллиптических функций, теории вероятностей, исчислению конечных разностей. Уже в первый год работы его куратор академик В.Я. Буняковский отмечал, насколько ясно и последовательно молодой педагог излагает изучаемый материал, приведя его в систематический порядок, дав новые упрощенные доказательства [2].

П. Л. Чебышевым была задана высокая планка чтения лекций, при этом он, с одной стороны, придерживался строгого доказательства изучаемого материала, а с другой, уделял значительное внимание практической его направленности. Для того, чтобы поддерживать внимание своих слушателей применялись различные приемы, оживляющие лекции и способствующие более лучшему усвоению материала. Один из таких приемов был связан с использованием принципа историзма. При изложении учебного материала рассматривались взгляды различных ученых на изучаемый предмет, проводился их сравнительный анализ и делался вывод о том, как происходило развитие того или иного метода или понятия.

Его лекции по различным разделам математики пользовались большой популярностью. Этому способствовало то, что ученый много внимания уделял усвоению принципиальных вопросов, подготавливая постепенно студентов к их восприятию, при этом по ходу лекции делал различные замечания, которые содействовали более глубокому усвоению материала и раскрывали его развивающий потенциал.

Как было отмечено выше, лекции П. Л. Чебышева были образцом логически обоснованных рассуждений, поэтому к нему на лекции стремились попасть студенты юридического факультета. Они учились у педагога «логичности построения выводов и поразительной доказательности речи».

3. Работа в математической комиссии

С 1856 по 1873 г. П. Л. Чебышев являлся членом математической комиссии Ученого Комитета Главного управления училищ (впоследствии переименованным в Ученый комитет Министерства Народного Просвещения). Ни один вопрос, связанный с преподаванием математики, не решался без него. Работая в комиссии, ученый участвовал в разработке уставов для средних и высших учебных заведений, в составлении и рассмотрения программ по математике, рецензировании учебников для школы и отборе лучших из них. П. Л. Чебышев неоднократно говорил о необходимости защитить школу от плохих учебников, дать школе «доказательные», а не «рецептурные» учебники [1]. Он предлагал существенно расширить содержание обучения математике в гимназиях, включив в него элементы аналитической и начертательной геометрии, математического анализа и сферической тригонометрии. В 1858 г. им был составлен проект программы по математике, который долго обсуждался, изменялся, но так и не был принят.

В 1865 г., говоря об условиях конкурса на лучший учебник, П. Л. Чебышев подчеркивал необходимость ясного изложения учебного материала, не позволяющего неоднозначно понимать его смысл.

При обсуждении проблемы деятельности реальных курсов при уездных училищах в документе, представленном Ученому комитету, П. Л. Чебышев высказал свою точку зрения о том, что их содержание должно быть направлено на побуждение народных масс к любознательности и борьбе с отсталостью и рутиной.

Что касается изучения математики в уездных училищах, то, по глубокому убеждению, ученого, основное внимание следует обращать не только на понимание правил и формул, но и на умение пользоваться ими для практических целей. В объяснении к проекту программы по математике для уездных училищ он указывает на необходимость по возможности больше упражнять учащихся в решении задач на бумаге и в уме, употреблять счеты, решать геометрические задачи на построение и вычисление, соединять изучение геометрии с непосредственным показом в поле приемов землемерия, знание которых особенно важно в жизни.

Особо активно в комиссии обсуждался вопрос о путях развития гимназии. В первую очередь шли споры о том, какие предметы подлежат включению в учебный план и каково должно быть содержание каждого гимназического курса. П. Л. Чебышев выступил со своим обоснованным мнением. Он считал, что преподавание математики в гимназии, кроме подготовки к специальным занятиям физико-математическими науками, преследует цель сообщения сведений, необходимых всякому образованному человеку и обеспечивающих развитие умственных способностей. Последние две задачи должны осуществляться путем изучения арифметики, элементарного курса алгебры и геометрии в тесной связи с практической жизнью.

За 100 лет до реформы А.Н. Колмогорова для более глубокого изучения физико-математических наук и использования их для решения практических задач П. Л. Чебышев предложил в старших классах гимназии изучать элементы высшей математики (функции и их производные, разложение функций в ряды, способ линейного приближения). Так же, как и в высшей школе, он выступал против сообщения сведений по математике без строгих доказательств. В начальных классах, где нельзя провести доказательство, он предлагает использовать объяснения, раскрывающие сущность изучаемого вопроса.

Предложения Чебышева не были приняты, однако шестилетнее их обсуждение оказало влияние на поднятие уровня преподавания математики в гимназиях. В 1873 году предложения Чебышева с некоторыми изменениями и сокращениями были положены в основу программы по математике для реальных училищ.

Стоит также отметить предложения П. Л. Чебышева, направленные на улучшение подготовки учителей. Это вопросы изменения порядка испытаний на звание учителя уездного училища и допуска женщин к занятию должности учителя.

В качестве члена математической комиссии Ученого комитета П. Л. Чебышев рассмотрел свыше 200 книг в той или иной степени, предназначавшихся авторами для школ. В отзывах на рецензируемые учебники он сформулировал три основных требования к содержанию учебников математики: строгость изложения, простота доказательств, последовательность в расположении материала. «Доказательства, лишенные строгости, ничего кроме вреда, принести не могут. Не говоря уже о напрасной потере времени, употребленного на изучение таких доказательств, нестрогие доказательства вредно действуют на умственные способности учеников, приучая их видеть там достаточную причину, где ее нет» [2].

Точку зрения ученого на содержание математического образования и в частности, представленного в учебниках математики, поддерживали многие выдающиеся педагоги-математики того времени. Многие из высказанных П. Л. Чебышевым предложений актуальны и в настоящее время. Часть их них нашли отражение в содержании современного школьного математического образования. В первую очередь, это касается введения элементов высшей математики, практической направленности обучения математике.

Еще одна заслуга П. Л. Чебышева в том, что его деятельность способствовала распространению математических знаний. Ученый большое внимание уделял изданию популярного математического журнала, который мог бы заинтересовать математикой и привлечь к занятию ею широкие круги населения. Цель его издания - воспитание у молодежи интереса и способностей к самостоятельному научному творчеству. Он активно поддерживал создание журнала «Вестник математических наук».

В 1864 году ученый официально выступил в поддержку создания Московского математического общества и первого математического журнала «Математический сборник». При активном содействии П. Л. Чебышева «Математический сборник» был рекомендован Министерством для школьных библиотек в качестве учебного пособия, чем обеспечивалось распространение журнала и укреплялась его материальная база. В нем был раздел, связанный с элементарной математикой, и задачи для решения. Так открывались широкие возможности привлечения молодых гимназистов к занятиям математикой.

Проявляя рвение к процветанию отечественных наук, П. Л. Чебышев уделял значительное внимание поиску одаренных людей, способных сказать новое слово в науке, и помогал им как морально, так и материально. Им была оказана поддержка математику-самоучке И. Первушину, проделавшему титаническую работу по вычислению совершенных чисел, изобретателю самолета А.И. Можайскому и многим другим начинающим исследователям.

В 1856 году под председательством М.В. Остроградского в Главном управлении военно-учебных заведений была создана особая специальная комиссия для рассмотрения составленных тогда руководств для военно-учебных заведений. В комиссию были приглашены наиболее крупные математики того времени, в том числе и П. Л. Чебышев. Работая в этой комиссии Пафнутий Львович оказывал серьезное влияние и на постановку военного образования.

4. Математическая школа

П. Л. Чебышева считают основоположником самостоятельных русских математических школ. Этим русская наука обязана не только гению ученого, но и его изумительному педагогическому таланту.

Он своими беседами, которые проходили каждый четверг в его квартире, а также научными работами наводил учеников на плодотворные темы для собственных изысканий и обращал их внимание на такие вопросы, изучение которых всегда приводило к более или менее ценным результатам. При этом, исходя из способностей учеников, он предлагал им разные темы, наиболее талантливым он не рекомендовал заниматься легкими вопросами, а предлагал пробовать свои силы при решении серьезных проблем, представляющим известные трудности. Благода-

ря таланту умело ставить посильные задачи и бесконечному дару человеческого общения ему удалось создать знаменитую Петербургскую школу математиков, отличительной чертой представителей которой являлась чёткая постановка задач, алгоритмическое, почти инженерное решение с результатом, удобным для использования и продуктивным в отношении дальнейшего исследования. При этом среди большого количества задач, которые он предлагал своим ученикам, огромную важность имели задачи на нахождение наибольших и наименьших величин, в силу того, что они позволяли ответить на главный вопрос - как располагать средствами своими для достижения по возможности большей выгоды.

К этой замечательной школе принадлежат почти все славные имена русских математиков второй половины XIX и начала XX века: А. Н. Коркин, Е. И. Золотарев, А. М. Ляпунов, А. А. Марков, Г. Ф. Вороной, В. А. Стеклов, А. Н. Крылов и многие другие.

Создав такую замечательную плеяду учеников, П. Л. Чебышев опосредованно оказал влияние на российское математическое образование и в XX веке.

5. Заключение

В заключение отметим, что Пафнутий Львович Чебышев определил свои основные научные и методические приоритеты, которым всегда следовал, начиная с первых шагов своей преподавательской деятельности, оказывая при этом существенное влияние на содержание математического образования на разных уровнях: начальном, гимназическом, высшем, педагогическом, военном.

Из рассмотренного выше можно сделать вывод, что в педагогической работе он неизменно руководствовался интересами широкого образования, продвижения в массы научных знаний, развития математической культуры в России. Его педагогическая концепция – не надо осуществлять коренную ломку математического образования, пока на опыте не убедитесь в эффективности новых подходов, строгость в изложении содержания учебников, большое внимание последовательности изложения изучаемых вопросов, практико-ориентированное обучение математике – принесла ощутимые плоды. Об этом говорит квалификация воспитанных им ученых и уровень образования выпускников гимназий и военных учебных заведений тех лет. Тем самым педагогическая деятельность П. Л. Чебышева способствовала качественному математическому образованию как в школе, так и вузе.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Колягин Ю.М., Саввина О.А., Тарасова О.В. Русская школа и математическое образование: Наша гордость и наша боль. Часть 1. От древнейших времен до XX века / Ю.М.Колягин, О.А.Саввина, О.В.Тарасова. – 3 изд. – Орел: ООО Полиграфическая фирма «Картуш», 2007. – 307с.

2. Прудников В.Е. П.Л.Чебышев – ученый и педагог. – 2-е изд. Доп. – М.: Просвещение, 1964. – 271с.

УДК 51(091)

Характерные черты древнеегипетской математики

Е. А. Зайцев (Россия, г. Москва)
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
e-mail: e_zaitsev@mail.ru

The Characteristic Features of Ancient Egyptian Mathematics

E. A. Zaytsev (Russia, Moscow)
Lomonosov Moscow State University
e-mail: e_zaitsev@mail.ru

В 1863 г. шотландский антиквар А.Г. Райнд купил на рынке в египетском Луксоре математический папирус, датируемый серединой XVI до н.э., но восходящий к более древнему источнику (XX–XVIII вв. до н.э.). После смерти Райнда папирус попал в Британский музей, где получил название «Папирус Райнда». В 1877 г. немецким египтологом А. Эйзенлором был опубликован его комментированный перевод. Историки математики быстро оценили уникальность этого источника. Уже через три года М. Кантор в первом томе «Лекций по истории математики» (1880) дал подробное описание его математического содержания. В 1882 г. В.В. Бобынин защитил магистерскую диссертацию «Математика древних египтян по папирусу Ринда» и выпустил книгу под тем же названием [1]. Несмотря на то, что XX в. принес открытие еще несколько математических папирусов, современные специалисты по-прежнему ориентируются, в основном, на папирус Райнда, который является наиболее богатым и репрезентативным источником древнеегипетской математики.

Перевод исторического источника — это всегда интерпретация. Это обстоятельство особенно важно учитывать, когда речь идет о переводе «технического» текста, который требует не только специальных знаний из соответствующей научной дисциплины, но и знакомства с ее историей. Это относится, прежде всего, к источникам древней математики, математическое содержание которых обычно не выходит за рамки математики средней школы. Это обстоятельство рождает соблазн решить проблему интерпретации этих источников посредством простого перевода вычислительных алгоритмов древности на язык современной школьной арифметики. При этом не учитывается тот факт, что сама эта арифметика формировалась в XVII веке под влиянием алгебраического стиля мышления, чуждого древней математике. К сожалению, Эйзенлору при переводе и комментировании папируса Райнда этой опасности избежать не удалось. При восстановлении математического содержания он «подретушировал» использованные в нем вычислительные процедуры при помощи методов современной арифметики. Столь же некритично отнесся к математике папируса Райнда и М. Кантор, опиравшийся на перевод Эйзенлора. Ни тот, ни другой не придали значения техническим деталям, свидетельствующим о принципиальном отличии древних алгоритмов от их современных аналогов.

Первым на ошибочность подхода Кантора к интерпретации папируса Райнда указал французский востоковед и знаток средневековой практической математики Леон Роде (Leon Rodet). Сравнив вычислительные процедуры папируса Райнда с вычислительными алгоритмами, применявшимися в арабской, еврейской и западноевропейской арифметике вплоть до XVII в., Роде пришел к выводу о типологическом сходстве двух математических традиций — древнеегипетской и средневековой. Кроме того, он показал, что приемы решений задач и техника вычислений в этих традициях принципиально отличаются от алгоритмов новоевропейской арифметики. Отсюда последовал вывод о неправомерности использования данных алгоритмов при реконструкции древнеегипетской математики [2].

Свою критику Роде направил против двух «моделей» Кантора, искажавших древнеегипетскую математическую практику. Первую «модель» Кантор использовал для разъяснения общих приемов решения уравнений, вторую — более специальную – для выделения характерных черт архаичной вычислительной техники.

В рамках первой модели, которую можно условно назвать «алгебраической», Кантор полагал, что при решении задач на линейные уравнения египтяне суммировали коэффициенты при неизвестном, а затем делили на эту сумму заданную величину. Иными словами, они производили операцию, эквивалентную вынесению неизвестного за скобки. Роде, проанализировав решения рассмотренных Кантором задач, пришел к другому выводу. С его точки зрения, вместо привычных для нас алгебраических преобразований египтяне использовали прием, известный из средневековой математики, как правило «ложного положения» (regula falsi). В настоящее время специалисты по истории древнеегипетской математики полностью разделяют точку зрения Роде.

Вторую модель Кантора можно условно назвать «арифметической». Кантор полагал, что операции с дробями египтяне осуществляли при помощи приведения дробей к общему знаменателю, т.е. аналогично практике обычной школьной арифметики. Роде, напротив, считал, что эту технику египтяне не использовали. Вместо общего знаменателя они применяли так называемый «экстрактивный блок» (термин принадлежит Роде), который позволял сводить арифметические операции с дробями к действиям с целыми (или почти целыми) числами. С чисто формальной точки зрения, техника экстрактивного блока почти идентична технике общего знаменателя; возможно, поэтому настойчивый призыв Роде к различению этих двух подходов не нашел отклика среди современных исследователей египетской математики. Ниже мы покажем, что использование экстрактивного блока позволяет лучше понять специфику архаичного мышления, для которого характерна неразрывная связь количественных параметров вещи с ее качественными характеристиками

Начнем с правила *ложного положения*. Рассмотрим его применение к решению задачи № 26 — одной из простейших задач папируса Райнда [3, p. 62]. В этой задаче требуется найти количество, которое, будучи сложенным со своей четвертью, дает 15; в современной записи: $x+\frac{1}{4}x=15$. Египетский вычислитель решает эту задачу следующим образом. В качестве ложного положения он берет (исходя из очевидных соображений) число 4, над которым производит действия, предусмотренные условием задачи: $4+\frac{1}{4}\cdot 4=5$. Полученный результат, т.е. 5, сравнивается с числом 15. Очевидно, что ложное положение приводит к числу, которое в 3 раза меньше заданного числа. Опираясь на соображения пропорциональности, вычислитель делает вывод о том, что ложное положение следует скорректировать, увеличив его в 3 раза. В итоге получается ответ: $4\cdot 3=12$. Затем следует проверка решения.

Рассмотрим теперь алгебраическое решение этой задачи. Вначале неизвестную величину x выносят за скобки. Затем суммируют оставшиеся в скобке коэффициенты $1+\frac{1}{4}=1\frac{1}{4}$. И наконец, число 15 делят на $1\frac{1}{4}$. Заметим, что с формальной точки зрения здесь выполняются те же самые операции, что и при использовании правила ложного положения, т.е. 15 делится на 5 и умножается на 4. По этой причине возникает соблазн отождествить правило ложного положения с его алгебраическим аналогом. И хотя формально это возможно, такая практика искажает логику решения, в основе которой лежало представление о наличии пропорциональности между «пробными» значениями неизвестной величины и результатами операций, проводимыми над ними.

Аналогично обстоит дело и с задачей № 24, в которой участвуют дробные числа [3, p. 60–61]. Требуется найти количество, которое, будучи сложено со своей седьмой частью, дает 19. Говоря современным языком, требуется решить линейное уравнение $x+\frac{1}{7}x=19$. Современный школьник найдет это решение, преобразовав выражение в левой части в произведение $x+\frac{1}{7}x=(1+\frac{1}{7})x=\frac{8}{7}x$. Корень уравнения $\frac{8}{7}x=19$ он найдет затем по формуле $x=19:\frac{8}{7}x=16\frac{5}{8}$.

Египетский вычислитель поступает иначе. Он начинает с того, что в качестве ложного положения выбирает число 7. Затем находит $\frac{1}{7}$ часть этого числа, т.е. 1, которую складывает с 7 и получает 8. Исходя из пропорции $8 : 7 = 19 : x$ (в явном виде пропорции в тексте нет), он находит неизвестную величину посредством деления 19 на 8 и умножения на 7. В результате получается ответ $16 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8}$. С формальной точки зрения вычислитель совершает те же самые операции, к которым сводится алгебраическое решение. Однако при этом он опирается на технику работы с пропорциями, а не на алгебраические преобразования. Отметим, что даже в XVII в. многие математики игнорировали алгебраический подход, продолжая работать в традиционной технике пропорций. Так поступал, например, Галилей, а также его ученики – Б. Кавальери и Э. Торричелли.

В заключение рассмотрим задачу № 31 [3, p. 66-67]. В ней речь идет о решении уравнения $x + \frac{2}{3}x + \frac{1}{2}x + \frac{1}{7}x = 33$. Особенность решения состоит в том, что вычислитель выбирает в качестве ложного положения 1, а не число, которое делится на каждый из знаменателей, например, 42 (что позволило бы свести решение к умножению и делению целых чисел). Применяя к 1 действия, предусмотренные условием, он получает результат $1 + \frac{2}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{7}$, который затем использует для составления пропорции $x : 33 = 1 : (1 + \frac{2}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{7})$. Разрешая эту пропорцию, он находит неизвестную величину x. Формально решение состоит в том, что число 33 в правой части исходного уравнения делится на сумму коэффициентов при неизвестном. Однако, на деле, в роли делителя выступает не сумма коэффициентов при неизвестном, а результат применения ряда операций к «ложному положению». Роде специально отмечает этот факт.

Разберем теперь содержательную подоплеку правила ложного положения [4, 5]. Начнем с того, что в рассмотренных нами примерах речь шла о неименованных числах. По этой причине может показаться, что эти примеры носят чисто абстрактный характер. Однако, это не так. Сравнение с задачами, в которых участвуют именованные числа, показывает, что в данном случае вычислитель просто сократил изложение. В папирусе Райнда решения примеров с неименованными числами имеют ту же структуру, что и решения задач, в которых участвуют зерновые меры. Опираясь на это замечание, мы можем следующим образом перефразировать, например, задачу № 26: неизвестный мерный объем и его четверть вместе исчерпывают 15 известных мер зерна; найти величину этого объема, выраженную в этих мерах.

Решение этой задачи при помощи правила ложного положения имеет то преимущество перед алгебраическим подходом, что оно сводится к операциям над качественно однородными количествами. Вначале вычислитель берет в качестве ложного положения 4, т.е. 4 известные меры зерна, и производит над ними последовательность арифметических действий, предписанных условием задачи. По ходу решения возникает ряд чисел 4, 5, 15 и 12, которые являются количествами одного и того же рода — зерновыми мерами. Конкретными становятся и те математические вопросы, которые ставятся по отношению к этим числам. Так, вопрос о нахождении коэффициента пропорциональности оказывается облеченным в форму: во сколько раз 15 мер зерна больше 5 мер зерна? О конкретном характере решений при помощи правила ложного положения свидетельствует и тот факт, что в таких решениях активно используется метод «проб и ошибок», характерный для всякой предметной деятельности (деление числа на число осуществляется в египетской математике путем целенаправленного подбора с использованием операций удвоения и раздвоения чисел). На эту особенность древней математики указывал в своих работах В.В. Бобынин [1].

Обратимся теперь к анализу арифметических операций с дробями, которые египетский вычислитель выполнял при помощи «экстрактивного блока». Аналогичный прием, как показал Роде, систематически использовали вычислители средневековья. В арабской и еврейской традиции существовали специальные термины для обозначения «экстрактивного блока».

Проиллюстрируем технику экстрактивного блока на примере следующей задачи (рамки этой статьи не позволяют разобрать пример из самого папируса Райнда) [5]. Пусть требуется

разделить $\frac{1}{2}$ на $\frac{3}{4}$. В современной арифметике эта операция сводится к перемножению между собой числителей и знаменателей исходных дробей с последующей записью первого произведения $1{\cdot}4 = 4$ в числитель, а второго $2{\cdot}3 = 6$ — в знаменатель. В ответе получается $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$. Действия над числами носят здесь чисто формальный характер. Иначе обстоит дело при решении той же задачи посредством «экстрактивного блока». Вначале строится специальная величина (числовой «блок»), равная произведению знаменателей дробей $2{\cdot}4 = 8$. Этот и есть «экстрактивный блок», который выступает в роли предметного «посредника», позволяющего свести исходную задачу к задаче, в которой соответствующие величины являются однородными. Вычислитель действует так. Сначала он находит $\frac{1}{2}$ от величины «экстрактивного блока», которая равна 4. Затем он определяет $\frac{3}{4}$ от величины «экстрактивного блока и находит, что они равны 6. Таким образом, каждая из дробей, участвующих в операции деления, представлена в виде некоторого количества единичных частей одного и того же «экстрактивного блока», первая дробь — 4-мя, а вторая — 6-ю. Далее следует составление отношения двух целых чисел 4 и 6. Эти числа являются однородными количествами, ибо являются частями одного и того же целого — «экстрактивного блока», состоящего из 8 единиц. Сокращая дробь $\frac{4}{6}$ получаем решение: $\frac{2}{3}$. Резюме: смысл экстрактивного блока состоит в том, что он позволяет свести действие с дробями к действиям с конкретными числами, выражающими количество единиц в этом блоке. Тем самым при помощи экстрактивного блока задача переводится в область предметной конкретики.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бобынин В. В. Математика древних египтян. М., 1882.

2. Rodet L. Les pretendus problemes d'algebre du manuel du calculateur egyptien // Journal asiatique. Vol. 18 (1881). P. 184–232, 390–459.

3. Peet T.E. The Rhind Mathematical Papyrus. London, 1923.

4. Зайцев Е.А. Правило ложного положения для решения арифметических задач// Институт истории естествознания и техники им. С.И. Вавилова РАН. Годичная научная конференция, 2012. М., 2012. С. 319–322.

5. Зайцев Е.А. Генезис представлений о количестве и развитие математического мышления // Э.В. Ильенков и проблемы образования. Материалы XVII Международной конференции «Ильенковские чтения». М., 2015. С. 303–312.

УДК 511.563.6

Отношение порядка. Эпизоды истории

З. А. Кузичева (Россия, г. Москва)
Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
e-mail: zakuzicheva@mail.ru

Partially ordered set. Episodes from history

Z. A. Kuzicheva (Russia, Moscow)
Lomonosov Moscow State University
e-mail: zakuzicheva@mail.ru

В предлагаемом вниманию слушателей сообщении рассматриваются отношения порядка, т.е. отношения, обладающие свойствами рефлексивности, антисимметричности и транзитивности. В зависимости от ситуации, рефлексивность может исключаться, тогда говорят об отношении строгого порядка. Цель работы проследить на конкретных примерах зависимость спецификации отношения порядка и особенностей его использования от предмета исследования или построения. Очевидно, что истоки отношения типа порядка восходят к истокам человеческой культуры. Мы будем рассматривать значительно более поздние периоды.

В качестве раннего примера можно взять использования отношения порядка в традиционной формальной логике. Здесь отношение порядка выступает в облике отношения выводимости, часто выражаемое посредством "следует" или "если ..., то... " . Но интереснее примеры более поздних периодов развития науки, скажем, XIX или XX вв. Поскольку мы уже упомянули логику, рассмотрим отношение порядка в алгебре логики. Мне уже приходилась говорить об этой форме математической логики, созданию которой во многом содействовала объемная трактовка понятий и отношение включения объема одного понятия в объем другого в виде "A" есть часть "B" . Это, по существу теоретико-множественный подход, и на нем остановимся подробнее, но не в связи с алгеброй логики. Выразительные примеры приспособления отношения порядка к особенностям предмета исследования представляет творчество известного немецкого математика Р. Дедекинда (1831–1916). Вначале рассмотрим его работу "Stetigkeit und der rationalen Zahlen" [1]. Как отмечает Дедекинд в Предисловии, работа написана в 1858 г., однако опубликовал он ее лишь в 1872 г.

В этой работе Дедекинд использует множество, в его названии *систему*, R рациональных чисел, подразумевая известными свойства объектов, ее составляющих, а также отношение порядка.

$a = b \longleftrightarrow b = a$. Если $a \neq b\,(a > b)$, то $a - b > 0\,(a > b)$ или $a - b < 0\,(a < b)$. Если $a > b$, то $b < a$.

Затем формулирует аксиомы:

I. Если $a > b$ и $b > c$, то $a > c$.

II. Если a, c два разных числа, то всегда имеется число b, такое что $a < b < c$.

III. Если a данное рациональное число, то система R распадается на два класса A_1 и A_2, содержащих бесконечно много индивидуумов, и если $a_1 \supset A_1$, $a_2 \supset A_2$, то $a_1 < a_2$ [1, §1].

Второй параграф озаглавлен "Сравнение рациональных чисел с точками прямой линии L" . Речь идет именно о *сравнении*, а не введении чисел, как расстояний. Дедекинд отмечает, что до сих пор иррациональные числа вводились в зависимости от расстояний от некоторой фиксированной точки, которой присваивалось значение 0. “Но арифметика не разворачиваться сама в себе, независимо от чуждых ей экстенсивных величин”.

На прямой L Дедекинд рассматривает отношение "правее" ("левее"), и постулирует его свойства:

I. Если p правее q, q правее r, то p правее r (q между p и r).

II. Если $p \neq q$, то между ними всегда имеется бесконечно много точек.

III. Если p определенная точка на L, то все точки L распадаются на два класса P_1 и P_2 которые содержат бесконечно много точек. Если $p_1 \supset P_1$ и $p_2 \supset P_2$, то точка p_1 лежит левее точки p_2.

В следующем, 3-м, параграфе отмечается, что прямая линия L бесконечно богаче точками, чем система R рациональными числами, поскольку имеется бесконечно много точек прямой, которым не соответствует никакое число из R. Таким точкам и соответствуют иррациональные числа.

Четвертый параграф посвящен пополнению системы R иррациональными числами посредством сечений в системе рациональных чисел, образуемых парами классов A_1 и A_2 таких что для любых рациональных чисел a_1, a_2, $a_1 \supset A_1$ и $a_2 \supset A_2$, тогда $a_1 < a_2$, но в классе A_1 нет

наибольшего, а в классе A_2 наименьшего числа. Таким сечениям и соответствуют иррациональные числа. На объединении систем рациональных и иррациональных чисел, т. е. системе вещественных чисел, Дедекинд определяет отношение порядка и арифметические операции.

Но Дедекинд не забывал, что множество рациональных, точнее натуральных чисел, нуждается в обосновании. Эту задачу он выполнил в опубликованной в 1888 г. работе "Was sind und was sollen die Zahlen" [2]. Мы не станем в тезисах подробнее рассматривать содержание этого сочинения, оставляя разбор для презентации. Заметим, лишь, что здесь отношение нестрого порядка выступает в виде отношения "быть частью"для рассматриваемых совокупностей систем вещей и установления соответствия путем выбора подходящей функции.

Известно, однако, что основной областью математического творчества Дедекинда является теория чисел, в частности, теория делимости. В этой области, рассматривая отношение частичного порядка "a делит b" ($b = ac$), он фактически закладывает начала теории решеток, дальнейшее развитие которой относится уже к XX веку.

В дополнение к приведенным эпизодам приведу пример того, как А.А. Марков (младший) видоизменяет отношение порядка "раньше чем", чтобы показать, как из такого отношения порядка можно логически вывести метрику мира.

Каковы же свойства отношения "раньше чем"? Интуитивно ясно, что не может быть x раньше чем x, т. е. этот порядок "строгий". А.А. Марков постулирует следующие аксиомы ($\prec$ – отношение "раньше чем"):

Аксиома I (аксиома асимметрии). *Если* $x \prec y$, *то* y *не* $\prec x$.

Аксиома II (аксиома транзитивности). *Если* $x \prec z$ *и* $z \prec y$, *то* $x \prec y$.

Аксиома III (аксиома конечности). *Цепь между двумя заданными точками не может содержать произвольно большое число звеньев.*

Значит, существует максимальное число звеньев цепей между x и y, являющееся положительной целочисленной функцией пары x, y. А.А. обозначает эту функцию через $\sigma(x, y)$ [3, с. 32].

Аксиома I указывает, что время не может идти вспять, а *цепь* определяется следующим образом. Путь x, y - две мировые точки,

$$(1) \quad z^0, z^1, ..., z^n$$

–некоторая конечная последовательность точек, удовлетворяющих условиям

$$(2) \quad x = z^0 \prec z^1 \prec z^2 \prec ... \prec z^n = y.$$

Тогда, согласно аксиоме II, $x \prec y$. В этом случае последовательность (1) называется *цепью* между x и y. Каждая из ориентированных пар точек $(z^{i-1}, z^i)(i = 1, ..., n)$, удовлетворяющих условию $(z^{i-1} \prec z^i)$ называется *звеном* цепи (1).

Используя вводимые им свойства — "утончение" рассматриваемой цепи и ее "насыщения" — А.А. доказывает, что существует точечная пара u, v, для которой не существует точки w , удовлетворяющей условию $u \prec w \prec v$. Такая пара - своего рода *атом* времени, А. А. называет его *хроном*. Он подчеркивает неоднозначность разложения временного промежутка на *хроны*.

"Здесь особенно следует подчеркнуть существенную разницу между этим временны́м атомизмом и привычным нам атомизмом материи", поясняет А. А. Марков. Фрагмент материи разлагается на атомы *однозначно*, тогда как временной отрезок (x, y) допускает несколько разложений. Хрон, по мнению А.А. Маркова, представляет естественную единицу масштаба времени. Итак *Любое отношение "раньше чем", удовлетворяющее аксиоме конечности, индуцирует таким образом некоторую целочисленную метрику временного интервала* [3, с. 33].

После этих рассуждений А.А. Марков замечает:

"Все эти очень общие и абстрактные идеи получат сейчас свое оправдание на одном примере. Именно, будет показано, что на указанном пути можно построить метрику, похожую на псевдоевклидову метрику ТО" [3, с. 33]. Этот пример мы позволим себе не приводить.

Теперь, кажется, уже можно составить некоторое представление о том, сколь разные формы может принимать и принимало в ходе развития математики и ее приложений, отношение порядка в зависимости от объектов и целей упорядочения.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Dedekind R. Stetigkeit und irrationale Zahlen. — Braunschweig: Vieweg, 1872, 2. Auflage 1892. Перев. с нем. *Дедекинд Р.* Непрерывность и иррациональные числа, 1923.

2. Dedekind R. Was sind und was sollen die Zahlen? — Braunschweig: Vieweg, 1888. Перев. с нем. *Дедекинд Р.* Что такое числа и для чего они служат? Казань, 1905. 79 с.

3. Марков А. А. О выводимости мировой метрики из отношения «раньше чем». Избранные труды. Т. I. М.: Изд-во МЦНМО, 2002. С. 30 - 42.

УДК 51(091)

Из истории кафедры математики и информатики Тульского филиала Финуниверситета

Е. В. Манохин (Россия, г. Тула)
Тульский филиал Финансового университета при Правительстве Российской Федерации
e-mail: emanfinun@mail.ru
Г. В. Кузнецов (Россия, г. Тула)
Тульский филиал Финансового университета при Правительстве Российской Федерации
e-mail: GKuznetsov@fa.ru
С. В. Городничев (Россия, г. Тула)
Тульский филиал Финансового университета при Правительстве Российской Федерации
e-mail: SVGorodnichev@fa.ru
Н. О. Козлова (Россия, г. Тула)
Тульский филиал Финансового университета при Правительстве Российской Федерации
e-mail: 95kno@mail.ru

From chair history mathematics and computer science the Tula branch Financial University

E. V. Manokhin (Russia, Tula)
Financial University under the Government of the Russian Federation, Tula Branch
e-mail: emanfinun@mail.ru
G. V. Kuznetsov (Russia, Tula)

Financial University under the Government of the Russian Federation, Tula Branch
e-mail: GKuznetsov@fa.ru
S. V. Gorodnichev (Russia, Tula)
Financial University under the Government of the Russian Federation, Tula Branch
e-mail: SVGorodnichev@fa.ru
N. O. Kozlova (Russia, Tula)
Financial University under the Government of the Russian Federation, Tula Branch
e-mail: 95kno@mail.ru

1. Из истории Тульского филиала Финуниверситета

Тульский филиал федерального государственного образовательного бюджетного учреждения высшего образования «Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации» был основан в 1958 году как учебно-консультативный пункт (УКП ВЗФЭИ).

Весной 1959 г. в Туле был открыт учебно-консультационный пункт (УКП) Всероссийского заочного финансово-экономического института, что было обусловлено нехваткой высококвалифицированных специалистов - экономистов на предприятиях г. Тулы и области. Первым заведующим Тульского УКП была А.А. Сошникова, которая вместе с небольшим коллективом одолела многие трудности по организации учебного процесса и созданию материальной базы УКП. В этот период УКП выпускал специалистов по специальностям: «Экономика промышленности», «Экономика труда», «Статистика», «Бухгалтерский учет», «Экономика и организация материально-технического снабжения» и т.д.

В июне 1966 г. Тульский УКП был преобразован в филиал ВЗФЭИ, который впоследствии стал Тульским филиалом Финуниверситета. С 1967 года директором филиала становится Б.П. Богданов. С 1975 по 1977 год филиалом руководит выпускник института, доцент кафедры бухгалтерского учета Н.Ф. Бердников. В 1977 году на должность директора пришел опытный организатор и ученый В.И. Малинин. В 90-ые годы в филиале началась подготовка экономистов высшей категории по качественно новым специальностям, в том числе «Финансы и кредит».

В 1997 году руководителем филиала становится доктор философских наук, профессор Ю.А. Северов. С этого момента в развитии филиала в г. Тула началась новая эра: поднявшая его на качественно новую ступень образовательного процесса. В 2000-е годы значительно окрепла и расширилась материально-техническая база института. За счет собственных средств была проведена реконструкция всего здания филиала, что позволило значительно улучшить условия учебно-воспитательного процесса, бытовые условия студентов и преподавателей. За счет реконструкции здания было увеличено число аудиторий в два раза, открыта столовая, гостиничный комплекс для студентов и преподавателей, оборудованы три компьютерных зала.

С апреля 2012 года по сентябрь 2013 года директор стала выпускница филиала 1979 года, кандидат экономических наук, доцент Прасолова Татьяна Николаевна.

30 мая 2012 года в результате реорганизации Всероссийского заочного финансово-экономического института в форме присоединения в качестве структурного подразделения к федеральному государственному образовательному бюджетному учреждению высшего профессионального образования «Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации» на основании распоряжения Правительства Российской Федерации от 22 ноября 2011 г. № 2101-р «О реорганизации федерального образовательного бюджетного учреждения высшего профессионального образования «Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации», приказа Министерства образования и науки Российской Федерации от 12

декабря 2011 г. № 2821 «О реорганизации федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Всероссийский заочный финансово-экономический институт» - филиал был переименован в Тульский филиал федерального государственного образовательного бюджетного учреждения высшего профессионального образования «Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации».

С сентября 2013 г. директором филиала является Кузнецов Геннадий Васильевич, кандидат физико-математических наук, доцент. В 2001 году в филиале были организованы кафедры: «Менеджмент и маркетинг», «Бухгалтерский учет, аудит и статистика», «Финансы и кредит» и «Философия, история и право»,«Математика и информатика».

2. 20 лет кафедре математики и информатики

Кафедра «Математика и информатика» образовалась как самостоятельное подразделение в феврале 2001 года. Первым заведующим кафедрой «Математика и информатика» стал к.ф.-м.н., доцент Шелобаев Сергей Иванович.

До этого времени преподаватели кафедры входили в состав кафедр высшей математики, экономико-математических методов и моделей (ЭММиМ), автоматизированной обработки экономической информации (АОЭИ) Московского отделения ВЗФЭИ.

Важнейшей составляющей в системе фундаментального образования современного экономиста является базовая математическая подготовка. В Тульском филиале в первые годы его образования занятия по дисциплинам кафедры высшей математики проводили почасовики из других вузов г. Тулы или командированные преподаватели головного вуза. С 1965 г. в филиале приступила к работе профессор, к.э.н. Соловьева Евгения Григорьевна. 10 лет она проработала ответственным секретарем приемной комиссии филиала, с 2008 г. была зам. зав. кафедрой по учебно-методической и научной работе.

С 2005 г. по 2010 г. кафедрой руководил к.ф.-м.н., доцент Луценко Алексей Георгиевич, член-корр. Академии информатизации образования (АИО), почетный работник ВПО, автор научных и методических работ о применении современных информационных технологий в процессе обучения математике. В это время на кафедре трудились Юдин Сергей Владимирович - доктор т.н., доцент, член-корр. Академии качества, Арсеньев Юрий Николаевич - доктор т.н., профессор, член Международной академии науки и практики организации производства (МАОП), почетный работник ВПО.

Значительную поддержку кафедре во всех направлениях её деятельности оказывали преподаватели - штатные совместители - д.т.н., доцент Ядыкин Евгений Александрович (ТулГУ); к.ф.-м.н., доцент Ванькой Борис Петрович(ТГПУ им. Л.Н. Толстого). Отметим, что кафедра в процессе своей деятельности сотрудничает с Тульскими вузами, в том числе с ТулГУ и ТГПУ им. Л.Н.Толстого, особенно с кафедрой алгебры, математического анализа и геометрии, заведующий кафедрой д.ф.-м.н., профессор Добровольский Николай Михайлович и математическим факультетом, декан к.ф.-м.н., доцент Реброва Ирина Юрьевна. На кафедре вели занятия преподаватели ТГПУ и кафедры алгебры, математического анализа и геометрии д.ф.-м.н., доцент Добрынина Ирина Васильевна и д.ф.-м.н., профессор Денисов Игорь Васильевич. На кафедре работали также профессор ТулГУ, канд. техн. наук Кочетыгов А.А., профессор д.т.н. Андреев А.И., работает к.ф.-м.н., доцент Соболева Д.В.

Разумеется, наиважнейшей и определяющей составляющей является для нас сотрудничество с кафедрами и департаментами Финансового университета. Большое значение для кафедры имеет сотрудничество и помощь департамента «Бизнес-информатика» под руководством Алтуховой Натальи Фаридовны, с Факультетом информационных технологий и анализа больших данных под руководством декана факультета доктора экономических наук, профессора Соловьева Владимира Игоревича, первым заместителем руководителя департамента анализа

данных и машинного обучения Феклиным Вадимом Геннадьевичем, доцентом, к.э.н. Кремером Наум Шевелевичем. В докторантуре Финуниверситета обучается к.ф.-м.н., доцент кафедры «Математика и информатика» Жуков РоманАлександрович.

С 2000 г. в филиале работает Евсюков Владимир Васильевич, к.т.н., доцент; автор научных и методических работ, учебных пособий. В 2009 г. и 2010 г. на кафедру пришли опытные преподаватели – к.ф.-м.н., доцент Кузнецов Геннадий Васильевичи и к.ф.-м.н., доцент Манохин Евгений Викторович, которые приступили к чтению математических и экономико-математических дисциплин. С 2010 г. по 2013 г. кафедрой руководил к.ф.-м.н., доцент Кузнецов Геннадий Васильевич, член-корр. Академии медико-технических наук, автор научных и методических работ по дифференциальной геометрии и методике преподавания математики в высшей школе. С 2013 года Кузнецов Геннадий Васильевич – директор Тульского филиала Финуниверситета.

В настоящее время кафедрой руководит кандидат физико-математических наук, доцент Манохин Евгений Викторович, зам. зав. кафедрой является к.ф.-м.н., доцент Васина Марина Владимировна. Активное участие в делах кафедры принимает к.т.н., ст.преподаватель Козлова Н.О.

Кафедра «Математика и информатика» обеспечивает учебный процесс для всех направлений филиала в соответствии с перечнем аккредитованных образовательных программ и является выпускающей по направлению 38.03.05 «Бизнес-информатика».

Деятельность кафедры «Математика и информатика» осуществляется в соответствии с Положением о кафедре Финансового университета.

3. Заключение

Сегодня на кафедре и в филиале работает сплоченный коллектив единомышленников, способных решать самые сложные задачи современного этапа развития высшего образования в России. Активно ведется научно-исследовательская работа, проводятся международные конференции, издаются монографии, сборники научных трудов, функционируют научные кружки, осуществляется связь с зарубежными партнерами. Ведется большая воспитательная работа со студентами, развито студенческое самоуправление.

Все это позволяет филиалу и кафедре готовить кадры высшей квалификации, востребованные на рынке труда, с высоким чувством гражданской ответственности. Почти за 60 лет функционирования филиала более 17500 выпускников достойно представляли и представляют филиал в экономике, финансовой сфере, управлении, государственной службе. Достигнутое качество обучения на кафедре в соответствии с выделенными приоритетами развития подкреплено действующей и регулярно обновляемой системой требований к уровню подготовки и квалификации профессорско-преподавательского состава кафедры. Система многоуровневого отбора и оценки представленных претендентами на должности преподавателей учебных программ и курсов, а также методов и технологий обучения, позволяет руководству кафедры быть уверенным в собственной эффективности и конкурентоспособности, а также следованию выбранной миссии на рынке.

УДК 51(091)

О теореме Пуанкаре — Биркгофа[1]

Р. Р. Мухин (Россия, г. Старый Оскол)
Старооскольский технологический институт им. А. А. Угарова (филиал) Национального исследовательского технологического университета «МИСиС»
e-mail: mukhiny@mail.ru

On the Poincaré–Birkhoff theorem

R. R. Mukhin (Russia, Stary Oskol)
Ugarov Stary Oskol Technological Institute of National Research University of Science and Technology «MISiS»
e-mail: mukhiny@mail.ru

В 1912 г., незадолго до смерти, А. Пуанкаре опубликовал свою последнюю незаконченную работу [1], находящаяся в ряду его главных достижений.

Решение дифференциальных уравнений представляет одну из самых важных задач с самого начала создания теории бесконечно малых. Главной областью приложений в первые два столетия являлась небесная механика – проблема n тел. Впервые проблема трех тел была сформулирована И. Ньютоном в его «Началах», изучавшего движение Луны и Земли вокруг Солнца, и он отметил крайнюю трудность задачи. Полученное им решение по лунной вариации очень близко к современным результатам, это один из первых триумфов небесной механики. Результаты Ньютона имеют еще более важное значение – здесь первый общий подход к решению дифференциальных уравнений. Для построения интегральной кривой от исходной точки в этом пространстве находится последующая точка, и вся кривая строится с помощью последовательных малых элементов. Такой метод является очень общим, но его практическая реализация требует огромного объема вычислений. Лишь с появлением ЭВМ метод Ньютона нашел широкое применение. Можно сказать, что все численные методы представляют собой развитие и модернизацию идей Ньютона.

Пуанкаре предложил другой подход к решению дифференциальных уравнений, взяв за основу периодические движения. Идея заключалась в том, что, если такие решения плотно заполняют какую-то область, то с их помощью можно будет изучить свойства множества всех решений. По словам Пуанкаре: «Особая ценность периодических решений заключается в том, что они являются единственной брешью, через которую мы могли бы попытаться проникнуть в область, считавшуюся недоступной [2, С.75]. Периодические решения привлекали пристальное внимание Пуанкаре в течение всей его научной деятельности. Наиболее полное выражение все получило в «Новых методах небесной механики» [1]. Пуанкаре ставит следующую задачу: если правая часть уравнения зависит от некоторого параметра μ и при $\mu = 0$ существуют периодические решения, то при каких условиях существуют решения для малых значений μ [2, Т I, С.75]. Он обнаружил существование бесконечного числа периодических решений вблизи данного решения. С самого начала Пуанкаре столкнулся с двумя существенными ограничениями, сужающих область применимости развиваемых им методов. Во-первых, параметр μ должен быть малым, чтобы разложение решения по этому параметру сходилось. И второе, при изменении μ в каком-либо промежутке $\mu_1 \leq \mu \leq \mu_2$ характер решения может измениться качественным образом [2, Т I, С.75]. Пуанкаре искал способы выйти за пределы указанных ограничений. Это привело его к геометрической теореме.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект 20-011-00402

В поисках периодических решений уравнений небесной механики Пуанкаре помимо трудностей по существу задачи столкнулся с трудностями, обусловленными спецификой уравнений. Постепенно он пришел к выводу, что надо рассмотреть самую простую динамическую задачу, свободную от второстепенных трудностей. Такой задачей является задача о геодезических линиях на поверхности. В этом случае имеются всего две степени свободы и можно выбрать поверхность без особых точек. Геодезический поток представляет собой обобщение математической модели движения материальной точки на гладкой поверхности и не подверженной действию внешних сил. Задачу о геодезических потоках на поверхностях отрицательной кривизны решил Ж. Адамар. Эта работа Адамара примечательна в том отношении, что в ней впервые была обнаружена важнейшая характеристика хаотического движения динамических систем, известная как чувствительная зависимость от начальных условий. Пуанкаре же через несколько лет после Адамара изучал намного более сложную задачу о геодезических потоках на выпуклых поверхностях (1905) [3], поскольку, как он отмечал: «Траектории задачи трех тел сопоставимы не с геодезическими линиями отрицательной кривизны, а, наоборот, с геодезическими линиями на выпуклых поверхностях» [3, С. 735]. Здесь замкнутые геодезические играют туже роль, что периодические решения в проблеме трех тел.

Перейдем к геометрической теореме Пуанкаре [1] (формулировка Биркгофа):

Пусть дано кольцо $0 < a \leq r \leq b$ *в плоскости, определяемой полярными координатами* r, θ *и некоторое взаимно однозначное, непрерывное, сохраняющее площадь преобразование этого кольца в себя и при этом такое, что точки окружности* $r = a$ *передвигаются при этом преобразовании вперед (т.е. в направлении возрастающих* θ*), а точки окружности* $r = b$ *передвигаются назад (в направлении убывающих* θ *). Тогда в кольце будут существовать по меньшей мере две точки, инвариантные при преобразовании* T [4, С. 172].

После пояснений к формулировке теоремы Пуанкаре показал, как ее можно использовать в задачах динамики. Сначала он рассмотрел простейшую задачу с двумя степенями свободы – проблему геодезических линий на выпуклой поверхности. Более важным является применение теоремы для ограниченной проблемы трех тел. Пуанкаре показал, что, если его теорема верна и существует периодическое решение, то существует бесконечно много периодических решений. Мемуар Пуанкаре [1] остался незаконченным, он не дал полного доказательства. Надо заметить, что в то время Пуанкаре уже был тяжело болен. Он успел рассмотреть различные частные случаи, и во всех из них теорема оказалась верной.

Через несколько месяцев после смерти Пуанкаре доказательство его теоремы было дано Дж. Биркгофом [5]. Биркгоф доказал существование одной неподвижной точки, но его аргументация о существование второй оказалась не совсем верной. Эту ошибку Биркгоф исправил позже (1926) [6]. Однако данное доказательство не для всех явилось убедительным и поиски строго доказательства продолжались несколько десятилетий. Оно было дано лишь в 1977 г.[6]

Геометрическая теорема Пуанкаре дала мощные импульсы для развития исследований в нескольких направлениях математики и физики, первую очередь в исследованиях Биркгофа, подытоженные в [4]. Как и у Пуанкаре, периодические движения у Биркгофа составили общую основу подхода к решению уравнений динамики. Биркгоф для случая систем с двумя степенями свободы предложил четыре способа обнаружения периодических движений. Среди них метод минимакса, который дал импульс исследованиям М. Морса по обобщению этого метода на основе глубокого применения принципов топологии. Идея Пуанкаре о необходимости изучения устойчивости вблизи положения равновесия и периодических движений у Биркгофа получила относительное завершение. Развитые методы были применены Биркгофом для решения многочисленных задач динамики. Все эти исследования мотивировали Биркгофа к дальнейшим обобщениям, он вместе с Пуанкаре является основателем теории динамических систем.

Теорема Пуанкаре-Бирхгофа нашла широкое применение в изучении сложного поведения

динамических систем [9]. В интегрируемых гамильтоновых системах с N степенями свободы движение является условно-периодическим с N частотами ω_i и траектории лежат на N-мерном торе. При наложении возмущения система становится неинтегрируемой. Решающее значение здесь имеют резонансы. Для двух степеней свободы с частотами ω_1 и ω_2 резонансы имеют место при условии $l\omega_1 + m\omega_2 = 0$, где l и m – целые числа, т.е. отношение частот (число вращения) $\rho = \omega_1/\omega_2$ является рациональным и движение периодическое. При иррациональном отношении частот имеем квазипериодическое движение, плотно заполняющее поверхность тора. Резонансы являются основной причиной неинтегируемости, что было установлено еще Пуанкаре, и приводят к расходимости рядов теории возмущений. Согласно теории КАМ при наложении возмущения большинство (в смысле меры) нерезонансных торов сохраняется и лишь деформируется, разрушаются только резонансные торы, мера которых $\delta\Gamma(\varepsilon) \to 0$, когда параметр возмущения $\varepsilon \to 0$. В понимании механизма разрушения резонансных торов, в возникновении сложного поведения системы важную роль играет теорема Пуанкаре-Биркгофа. Биркгоф изучил характер неподвижных точек при отображении кольца и показал, что они бывают двух типов, качественно отличных друг от друга [4],[8]. На современном языке это можно представить следующим образом. Рассмотрение динамики системы упрощается при использовании сечения Пуанкаре, когда движение описывается рекуррентными соотношениями с дискретным временем. Для двумерных систем картина становится совершенно наглядной. Теорему Пуанкаре-Биркгофа для данного случая можно сформулировать следующим образом: в возмущенной системе с числом вращения $\rho = \omega_1/\omega_2$ при итерациях отображения в сечении Пуанкаре имеется $2k$ неподвижных точек. Половину из них составляют устойчивые эллиптические точки, другую половину – неустойчивые гиперболические точки (Биркгоф [4],[8]). В окрестности гиперболической точки имеется четыре инвариантных направления (ветви сепаратрисы), два из которых устойчивы и входят в гиперболическую точку, а два неустойчивы и выходят из нее. Пуанкаре показал, что пересечение ветвей сепаратрисы приводит к крайне сложной картине поведения системы [3, T.II, C.339]. Подробное исследование эллиптической точки общего вида провел В.И. Арнольд [10]. Каждая эллиптическая точка окружена инвариантными относительно итераций отображения кривыми. Каждый такой островок в миниатюре воспроизводит всю структуру в целом, имеет место очень сложная и самоподобная картина сосуществования порядка и хаоса.

История теоремы Пуанкаре-Биркгофа далеко не закончена. Очень вероятно, что периодические траектории гамильтоновых систем общего положения всюду плотны, но это еще не доказано. Несмотря на различные обобщения теоремы Пуанкаре-Биркгофа, отсутствует полное доказательство ее многомерного аналога в общем случае. Современная математика в значительной степени развивается в освоении наследия Пуанкаре, и геометрическая теорема составляет ее важнейшую часть.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Пуанкаре А. Об одной геометрической теореме. / Последние работы А. Пуанкаре. — Москва-Ижевск: РХД, 2001. С. 112-150.

2. Пуанкаре А. Новые методы небесной механики / А. Пуанкаре. Избранные труды.— М.: Наука, Т. I . 1971. 772 с.; Т. II. 1972. 998 с.

3. Пуанкаре А. О геодезических линиях на выпуклых поверхностях / А. Пуанкаре. Избранные труды. — М.: Наука, Т. II. 1972. С.735-774.

4. Бирхгоф Дж. Динамические системы. — Ижевск: Изд-во «Удмурт. ун-т», 1999. 408 с.

5. Birkhoff G. D. Proof of Poincare's geometric theorem // Transactions of the American Mathematical Society. 1913. Vol. 14, P. 14-22.

6. Birkhoff G. D. An extension of Poincare's last geometric theorem // Acta Mathematica. 1926. Vol. 47, P. 297-311.

7. Brown M., Neumann W. D. Proof of Poincare-Birkhoff fixed point theorem // Michigan Mathematical Journal. 1977. Vol. 24, P. 21-31.

8. Birkhoff G. D. Nouvelles recherches sur les systems dynamiques // Mem. Pont. Acad. Sci. Novi Lyncaei. 1935. S. 3. Vol.1, P. 85-216.

9. Лоскутов А. Ю. Динамический хаос. Системы классической механики // Успехи физических наук. 2007. Том 177, № 9. С. 989-1015.

10. Арнольд В.И. Об устойчивости положений равновесия гамильтоновой системы обыкновенных дифференциальных уравнений в общем эллиптическом случае // Доклады Академии Наук СССР. 1961. Том 137, № 2. С. 255-257.

УДК 51(091)

Математическое образование П. Л. Чебышёва

С. С. Петрова (Россия, г. Москва)
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
e-mail: spetr33@mail.ru

Mathematical education of P. L. Chebyshev

S. S. Petrova (Russia, Moscow)
Lomonosov Moscow State University
e-mail: spetr33@mail.ru

Первые уроки арифметики Пафнутий Львович получил ещё в детские годы в имении родителей в Окатово у своей двоюродной сестры Авдотьи Квинтиллиановны Сухаревой, обладавшей, судя по всему, педагогическим дарованием. Её портрет он сохранял до конца жизни. Важную роль в его воспитании сыграла также учительница музыки, имени которой история нам не сохранила. Именно ей, по воспоминаниям Д.И. Менделеева [1, с. 58], он был обязан привычке к точности и анализу, хотя музыканта из него она так и не воспитала.

В 1832 году родители перевезли его вместе с братом Павлом в Москву с целью подготовить мальчиков к поступлению в университет. Для этого им было необходимо получить образование в объёме гимназии. Учились они дома – для этого приглашались преподаватели, к выбору которых родители отнеслись очень серьёзно. Так для обучения математике был выбран один из лучших московских педагогов Платон Николаевич Погорельский (1800 – 1852). Выпускник[1] и магистр[2] Московского университета, он внёс значительный вклад в совершенствование системы обучения в средних учебных заведениях Московского учебного округа, в частности,

[1] По окончании в 1819 году Московской губернской гимназии поступил в Московский университет, который окончил в 1822 году с степенью кандидата.

[2] В 1827 получил от университета степень магистра, защитив диссертацию «О способах определять удельный вес» (М., 1826).

в преподавание математики и физики [2, 3][3]. Осуществлённый им перевод «Курса чистой математики» для французских военных школ, переработанный для нужд российских гимназий и изданный в трёх частях – «Арифметика» (1832), «Алгебра» (1833) и «Геометрия» (1834), стал в те времена едва ли не основным учебником в российских гимназиях. П.Л. Чебышев, оказавшись впоследствии членом Учёного комитета Министерства народного просвещения, рекомендовал эти книги Погорельского в качестве учебников для гимназий. Особенно «Алгебру», которую считал лучшим учебником по этому предмету на русском языке. Изложение Погорельского отличалось ясностью, сжатостью и общедоступностью. Самого его современники характеризовали как педагога Божьей милостью, увлечённого своим предметом и умевшего увлечь им своих учеников. Всегда серьёзный, нахмуренный, с отрывистой речью, он отличался исключительной требовательностью и держал учеников в абсолютном повиновении. На юного Чебышева он произвёл неизгладимое впечатление. Именно личность Погорельского и его уроки – в этом сходятся все биографы Чебышева – стали определяющими при выборе им будущих занятий – он будет изучать математику.

В сентябре 1837 года Чебышев начал обучение на математическом отделении Московского университета. Математическое отделение переживало в ту пору небывалый подъём, вызванный прежде всего деятельностью двух профессоров – Н.Д. Брашмана и Н.Е. Зернова, занявших в середине 1830-ых годов кафедры, соответственно, прикладной и чистой математики[4]. Брашман – воспитанник Венского университета и Венского политехнического института, преподававший до этого под началом Н.И. Лобачевского в Казанском университете, был талантливым учёным и выдающимся педагогом [4], ориентировавшимся на стандарты парижской Политехнической школы. Зернов, хотя и вырос в Москве, но был широко образованным математиком, внимательно следившим за новыми идеями западноевропейской научной мысли, в частности, за курсами О. Коши по математическому анализу – учебными руководствами, обозначившими реформу в основаниях этого предмета. И если до прихода Брашмана и Зернова в том, что касается математических наук, Московский университет выглядел глухой провинцией, то их усилиями он преобразился в математический центр европейского уровня [5]. Уместным представляется напомнить здесь слова одного из наиболее талантливых учеников Чебышева Е.И. Золотарёва [6, с. 60 – 61]: «Всякий интересующийся историей развития математики в нашем отечестве, не может остановиться без благодарности на этих двух, богатых заслугами, деятелях Московского университета, уже теперь сошедших в могилу. Оба, известные своими учёными трудами, они ещё более обращают на себя внимание своею педагогической деятельностью. Многочисленные ученики их, сделавшиеся в свою очередь учителями, рассеяны по всей России. Некоторые из них достигли вполне заслуженной славы». Самым успешным из них стал П.Л. Чебышев, на которого сразу обратил своё внимание Брашман, принявший на себя руководство занятиями одарённого студента. Одну из ранних своих работ «Разложение в ряды при помощи непрерывных дробей», написанную в форме письма Брашману и опубликованную в 1866 г. в первом томе *Математического сборника*, он завершил выражением благодарности учителю: «Сказанного мною достаточно, чтобы видеть, как много интереса представляет предмет, на который я был наведён Вашими лекциями и всегда

[3]С 1822 года служил учителем арифметики в московском Благородном пансионе, преподавал в пансионе Вейденгаммера, где среди его учеников мы видим И.С. Тургенева, а также в Московском воспитательном доме и др. учебных заведениях Москвы. С 1836 года – инспектор 1-й Московской гимназии, с 1839 – директор 3-й Московской гимназии и с 1841 под его надзор попали также московские городские и уездные училища. Результатом его деятельности стал подъём уровня начального образования в Москве, что было высоко оценено Министерством Народного Просвещения, распространившего опыт Погорельского на петербургские начальные школы.

[4]Кафедру астрономии в те годы занимал Д.М. Перевощиков (1790 – 1880) – выпускник Казанского университета, автор широко известной в то время «Ручной математической энциклопедии», о которой восторженный отзыв оставил Н.В. Гоголь. С 1855 г. экстраординарный член Петербургской Академии наук (член-корреспондент с 1832 г.).

драгоценными для меня беседами с Вами»[5].

Профессор Брашман оказывал неизменное внимание талантливому ученику и горячо поддержал его в намерении избрать учёную карьеру. В 1843 г. он успешно преодолел магистерские экзамены. В 1843 – 44 гг. в журналах Лиувилля и Крелле появились его первые работы по анализу. Темой же своей магистерской диссертации он избрал теорию вероятностей – предмет, интерес к которому был в значительной степени обусловлен влиянием Брашмана[6]. При его содействии Чебышев стал известен тогдашнему попечителю Московского учебного округа графу С.Г. Строганову, поручившему «отличнейшему кандидату»[7] написать руководство по теории вероятностей для студентов Демидовского лицея в Ярославле. Это руководство «Опыт элементарного анализа теории вероятностей», опубликованное в Москве в 1845 г., и стало его магистерской диссертацией, защита которой успешно прошла летом 1846 г.

Чувство благодарности своим учителям Чебышев хранил до конца жизни. Став самой влиятельной фигурой в российском математическом сообществе, он старался, если это оказывалось возможным, не только оказывать им внимание, но и способствовать их деятельности. Особенно это заметно на примере его взаимоотношений с Брашманом, которому он содействовал и в делах, связанных с организацией Московского математического общества, и, как член Академии наук Франции, в публикации его работ на страницах парижских Comptes Rendus, и в избрании его членом-корреспондентом Санкт-Петербургской Академии наук.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Менделеев Д.И. Записки о народном просвещении в России. – СПб. 1901. 67 с.

2. Прудников В.Е. Русские педагоги-математики XVIII – XIX веков. – М.: Учпедгиз, 1956. 640 с.

3. Бобынин В.В. Погорельский, Платон Николаевич // Русский биографический словарь в 25 томах. М. 1896 – 1918.

4. Лихолетов И. И., Майстров Л. Е. Николай Дмитриевич Брашман. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1971. 82 с.

5. Юшкевич А.П. История математики в России до 1917 года. – М.: Наука. 1968, 592 с.

6. Золотарёв Е.И. Полное собрание сочинений.Т. 2.– Л.: Изд-во АН СССР,1932. 368 с.

---

[5] Математический сборник. Т. 1. !966. С. 296.

[6] Ещё в своей речи «О влиянии математических наук на развитие умственных способностей», произнесённой в июне 1841 г., говоря о необходимости теоретико-вероятностных исследований в России, Брашман сетовал (цит. по [4, с.41], что «до сих пор нет на русском языке ни одного сочинения и перевода не только учёной, но даже элементарной теории вероятностей».

[7] Так он аттестован в университетском дипломе, выданном в 1841 г.

УДК 681.3: 629.7

Подход к оценке отказоустойчивости системы с применением ординарных полумарковских процессов[1]

А. Н. Привалов (Россия, г. Тула)
Тульский государственный педагогический университет им. Л.Н. Толстого
e-mail: privalov.61@mail.ru
В. А. Шаров (Россия, г. Шуя)
Шуйский филиал Ивановского государственного университета
e-mail: vs@aqs.ru
Е. В. Ларкин (Россия, г. Тула)
Тульский государственный университет
e-mail: elarkin@mail.ru

Approach to estimation of system failure-toility using ordinary semi-markov processes

A. N. Privalov (Russia, Tula)
Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University
e-mail: privalov.61@mail.ru
V. A. Sharov (Russia, Shuya)
Ivanovo State University, Shuya Branch
e-mail: vs@aqs.ru
E. V. Larkin (Russia, Tula)
Tula State University
e-mail: elarkin@mail.ru

Проблема надежности [1, 2, 3] является основной при проектировании и эксплуатации сложных вычислительных систем [4, 5]. Повысить надежность вычислительной техники возможно, либо за счет использования при ее проектировании и производстве более надежных, а, следовательно, более дорогих комплектующих, либо с помощью компенсации отказов с помощью специальных системных решений, приводящих к созданию т.н. систем, отказы компонентов которых не приводят к отказу системы в целом [6, 7, 8]. Вследствие того, что общий принцип отказоустойчивости предполагает введение в конструкцию системы дублирования элементов, а введенные для обеспечения отказоустойчивости элементы сами по себе являются источником отказов, инженер проектировщик должен иметь простой и удобный математический аппарат, позволяющий оценить надежность системы в целом на этапе ее проектирования.

Наиболее часто для оценки показателей надежности используется теория Марковских [9, 10, 11], или полумарковских [11, 12] процессов. При этом не делается различия между моделированием смены состояний единственного элемента системы и моделированием смены состояний одного из множества элементов. Ниже предлагается при моделировании разделять модель оценки показателей надежности, на модели, представляемые ординарным Марковским/полумарковским процессом, и модели, представляемые параллельным полумарковским процессом, описывающим «соревнование» элементов системы за отказ. Методики с подобным разделением применяются в инженерной практике недостаточно, что объясняет актуальность предлагаемого подхода.

Рассмотрим вычислительную систему, включающую параллельно функционирующих M элементов. В контексте решения задачи оценки надежности смена состояний m-го элемента рассматривается как переключение из полностью работоспособного состояния в частично

[1]Исследование выполнено при поддержке РФФИ по проекту 19-47-710004 р_а.

работоспособное, или полностью неработоспособное состояние, которое происходит в процессе эксплуатации системы, или переход из неработоспособного состояния в полностью или частично работоспособное состояние, которое происходит в результате ремонтно-восстановительных операций. Потенциальная возможность смены состояний элемента может быть представлена как ординарный полумарковский процесс μ_m [11, 12], множества, включающего 2 элемента как 2-параллельный полумарковский процесс, а последовательность смены состояний системы как «блуждание» по $\boldsymbol{2}$-параллельному полумарковскому процессу [14]. Таким образом,

$$\mu = [\mu_1,\ \mu_2]\,, \tag{1}$$

где

$$\mu_m = \{A_m,\ h_m(t)\}\,, m \in \{1,\ 2\}\,; \tag{2}$$

$$A_m = \left\{a_{0(m)},\ ...,\ a_{j(m)},\ ...,\ a_{J(m)}\right\}; \tag{3}$$

$$h_m(t) = \left[h_{j(m),k(m)}(t)\right] = \left[p_{j(m),k(m)} \cdot f_{j(m),k(m)}(t)\right] = p_m \otimes f_m(t)\,; \tag{4}$$

t - время; A_m - множество состояний; $a_{j(m)}$ - состояния m-го, ординарного полумарковского процесса, $0(m) \leqslant j(m) \leqslant J(m)$; $a_{0(m)}$ - начальное состояние процесса, моделирующее начало эксплуатации m-го элемента, когда он гарантированно находится в работоспособном состоянии; $a_{J(m)}$ - поглощающее состояние полумарковского процесса, являющееся абстрактным аналогом полностью неработоспособного состояния элемента; p_m - $[J(m)+1] \times [J(m)+1]$ стохастическая матрица; $f_m(t)$ - $[J(m)+1] \times [J(m)+1]$ - матрицы невзвешенных плотностей распределения, описывающих временные интервалы пребывания процесса в состояниях множества A_m.

Полумарковская матрица $h_m(t)$ имеет следующие особенности:

элементы нулевого столбца матрицы равны нулю (после начала эксплуатации физический элемент не может вернуться в состояние, в котором он был до начала эксплуатации);

элементы $J(m)$-й строки матрицы равны нулю (полностью отказавший элемент восстановлению не подлежит);

диагональные элементы матрицы равны нулю (после того, как при эксплуатации произошло событие, связанное с отказом или восстановлением элемента, он не может статься в том же состоянии, что и до события);

Для строк с $0(m)$-й по $[J(m)-1]$-ю справедливо следующее выражение:

$$\sum_{k(m)=1(m)}^{J(m)} \int_0^\infty h_{j(m),k(m)}(t)\,dt = 1, 0(m) \leqslant j(m) \leqslant J(m)\,. \tag{5}$$

Для полумарковского процесса μ_m может быть найдена плотность распределения времени достижения поглощающего состояния $a_{J(m)}$ из начального состояния:

$$\tilde{f}_{0(m),J(m)}(t) = L^{-1}\left[I^R_{0(m)} \cdot \sum_{w=1}^{\infty} \left\{L\left[h_m(t)\right]\right\}^w \cdot I^C_{J(m)}\right], \tag{6}$$

гдк $I^R_{0(m)}$ - вектор-строка размером $[J(m)+1]$ $0(m)$-й элемент которого равен единице, а все остальные элементы равны нулю; $I^!_{0(m)}$ - вектор-столбец размером $[J(m)+1]$ у которого $J(m)$-th элемент равен единице, а остальные элементы равны нулю; $L[...]$ и $L^{-1}[...]$ - прямое и обратное преобразование Лапласа, соответственно.

Выражение (6) определяет плотность распределения времени наработки на отказ m-го элемента. Среднее время наработки на отказ и вероятность того, что в течение времени θ произойдет его отказ, равны, соответственно [15]:

$$\tilde{T}_{0(m),J(m)} = \int_0^\infty t \cdot \tilde{f}_{0(m),J(m)}(t)\,dt. \tag{7}$$

$$\tilde{p}_{0(m),J(m)}(\theta) = \int_0^{\theta} \tilde{f}_{0(m),J(m)}(t)\, dt. \quad (8)$$

Таким образом, в результате применения предложенного подхода на основе применения ординарного Марковского/полумарковского процесса были выведены аналитические выражения плотности распределения времени наработки на отказ элемента, среднее время наработки на отказ и вероятность того, что в течение времени некоторого времени произойдет его отказ.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Rousand M. Reliability of Safety-Critical Systems: Theory and Applications, John Wiley & Sons, 2014. 466 p.
2. Sánchez-Silva M., Klutke G.-A. Reliability and Life-Cycle Analysis of Deteriorating Systems. Springer International Publishing. Switzerland. 2016. 355 P.
3. O'Conner P., Kleyner A. Practical Reliability Engineering, Willey and Sons, 2012. 456 p.
4. Landau I.D., Zito G. Digital Control Systems, Design, Identification and Implementation. Springer, 2006. 484 p.
5. Aström J., Wittenmark B., Computer Controlled Systems: Theory and Design. Tsinghua University Press. Prentice Hall, 2002. 557 p..
6. Koren I., Krishna M. Fault Tolerant Systems // Morgan Kaufmann Publishers, San Francisco, CA. 2007. 400 p.
7. Dubrova E. Fault-Tolerant Design. Springer-Verlag New York. Springer Science+Business Media New York. 2013. XV, 185 P.
8. Zhang Y., Jiang J. Bibliographical review on reconfigurable fault-tolerant control systems // Annu. Rev. Control. 2008. Vol. 32, № 2. P. 229–252.
9. Relay Races Along a Pair of Selectable Routes // Larkin E.V., Bogomolov A.V., Privalov A.N., Dobrovolsky N.N. Bulletin of the South Ural State University. Ser. Mathematical Modelling. Programming & Computer Software.. 2018. Vol. 11. No. 1. Pp. 15 - 26.
10. Bielecki T.R., Jakubowski J., Niewęgłowski M. Conditional Markov chains: Properties, construction and structured dependence // Stochastic Processes and their Applications. V. 127, N. 4. 2017. Pp. 1125–1170.
11. Ching W.K., Huang X., Ng M.K., Siu T.K. Markov Chains: Models, Algorithms and Applications / International Series in Operations Research & Management Science. V. 189. Springer Science + Business Media NY, 2013. 241 p.
12. Howard R. A. Dynamic Probabilistic Systems. Vol. 1: Markov Models. Vol. II: Semi-Markov and Decision Processes. Courier Corporation, 2012.
13. Janssen J., Manca R. Applied Semi-Markov processes. Springer US, 2006. 310 p.
14. Larkin, E.V., Ivutin, A.N. «Concurrency» in m-l-parallel semi-markov process. 2017 MATEC Web of Conferences Vol. 108. # UNSP 05003 05003. DOI: 10.1051/matecconf/201710805003.
15. Kobayashi H., Marl B.L., Turin W. Probability, Random Processes and Statistical Analysis: Cambridge University Press. 2012. 812 p.

УДК 681.3: 629.7

Сравнение двух методов оценки отказоустойчивости вычислительных систем с дублированием[1]

А. Н. Привалов (Россия, г. Тула)
Тульский государственный педагогический университет им. Л.Н. Толстого
e-mail: privalov.61@mail.ru
В. А. Шаров (Россия, г. Шуя)
Шуйский филиал Ивановского государственного университета
e-mail: vs@aqs.ru
Е. В. Ларкин (Россия, г. Тула)
Тульский государственный университет
e-mail: elarkin@mail.ru

Comparison of two methods for estimating the failure-to-life of computer systems with duplication

A. N. Privalov (Russia, Tula)
Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University
e-mail: privalov.61@mail.ru
V. A. Sharov (Russia, Shuya)
Ivanovo State University, Shuya Branch
e-mail: vs@aqs.ru
E. V. Larkin (Russia, Tula)
Tula State University
e-mail: elarkin@mail.ru

При расчете показателей надежности вычислительной техники инженер проектировщик должен иметь простой и удобный математический аппарат, позволяющий оценить надежность системы в целом на этапе ее проектирования [1-4].

Предлагается подход на основе применения ординарного Марковского/полумарковского процесса, применение которого позволяет вывести аналитические выражения плотности распределения времени наработки на отказ элемента, среднее время наработки на отказ и вероятность того, что в течение времени некоторого времени произойдет его отказ.

Рассмотрим систему с дублированием элемента. Для оценки времени наработки на отказ с использованием методов классической теории надежности плотность распределения должна быть заменена более грубой моделью, в которой полумарковский процесс заменен на Марковский. Это может быть сделано в соответствии с теоремой Б. Григелиониса о суммировании потоков, согласно которой комбинация непуассоновских потоков событий стремится к пуассоновскому потоку при стремлении количества непуасоновских потоков к бесконечности [5]. Таким образом $\tilde{f}_{0(m),J(m)}(t)$ может быть представлен в виде

$$\tilde{f}_{0(m),J(m)}(t) \cong \hat{f}_{0(m),J(m)}(t) = \frac{1}{\tilde{T}_{0(m),J(m)}} \exp\left(-\frac{t}{\tilde{T}_{0(m),J(m)}}\right). \quad (1)$$

[1]Исследование выполнено при поддержке РФФИ по проекту 19-47-710004 р_а.

Описание времени наработки на отказ единственного элемента (6) заменяется экспоненциальной плотностью распределения (1) [6]. Подобная замена позволяет существенно упростить расчеты параметров надежности системы в целом. Как следует из (1) для оценки плотности распределения времени наработки на отказ достаточно использовать только один параметр, а именно $\tilde{T}_{0(m),J(m)}$. Это может быть сделано с помощью рекурсивной процедуры, описанной в [7].

Пусть отказоустойчивая сборка состоит из двух идентичных элементов, каждый из которых имеет время наработки на отказ, описанный экспоненциальным законом,

$$f(t) = \frac{1}{\tilde{T}} \exp\left(-\frac{t}{\tilde{T}}\right), \tag{2}$$

где $\tilde{T}$ - время наработки на отказ одного элемента.

Структура 2-параллельного полумарковского процесса показана на рис. 1, где штриховыми линиями обозначены эллипсы, моделирующие функциональные состояния системы, а круги, обозначенные сплошными линиями, расположенные внутри эллипсов моделируют структурные состояния. Состояние $a_{0(m)}$ означает m-й работоспособный элемент, состояние $a_{J(m)}$ означает m-th неработоспособный element, $m \in \{1, 2\}$. Анализ «соревнования показывает, что время пребывания в функциональном состоянии с двумя работоспособными элементами определяется плотностью распределения

$$f_{00}(t) = \frac{2}{\tilde{T}} \exp\left(-\frac{2}{\tilde{T}}\right), \tag{3}$$

что означает повышение интенсивности потока отказов вдвое.

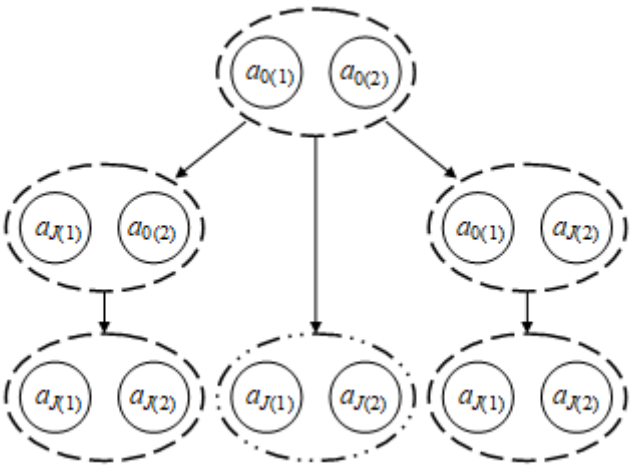


Рис. 1: 2-параллельный полумарковский процесс

После того, как в системе остается один работоспособный элемент, плотность распределения времени наработки на отказ этого элемента определяется зависимостью (2). Таким образом, оценка среднего времени наработки на отказ в системе с дублированием элементов, полученная с использованием метода преобразования полумарковского процесса в Марковский, равна $\frac{3}{2}\tilde{T}$.

Для реализации метода плотность распределения $\tilde{f}_{0(m),J(m)}(t)$ должна быть преобразована в дискретную форму. Для этого область распределения этой функции $t_{\min} \leqslant t \leqslant t_{\max}$должна быть разделена на X интервалов, $0 \leqslant t < \tau_1$, ..., $\tau_{x-1} \leqslant t < \tau_x$, ..., $\tau_{X-1} \leqslant t < \infty$. Ширина интервала равна:

$$\Delta = \frac{\tau_1 - \tau_{X-1}}{X - 2}, \tag{4}$$

где X - количество разрядов гистограммы; τ_1 и τ_{X-1} - правая граница первого интервала и левая граница X-го интервала.

Значения разрядов гистограммы на интервалах равны

$$\pi_{m,x} = \int_{l(x)}^{r(x)} \tilde{f}_{0(m),J(m)}(t)\, dt, \tag{5}$$

где $l(x) \leq t \leq r(z)$ - левая и правая граница интервала;

$$l(x) = \begin{cases} \tau_1 + \Delta(x-2), \text{ when } 2 \leqslant x \leqslant X; \\ 0, \text{ when } x = 1; \end{cases} \tag{6}$$

$$r(x) = \begin{cases} \tau_1 + \Delta(x-1), \text{ when } 1 \leqslant x \leqslant X-1; \\ \infty, \text{ when } x = X. \end{cases} \tag{7}$$

Отсчеты, представляющие интервалы гистограммы, имеют значения

$$\theta_x = \tau_x - \frac{\Delta}{2}; 1 \leqslant x \leqslant X. \tag{8}$$

В дискретной модели каждый разряд гистограммы представляется как взвешенное вырожденное распределение, а сама гистограмма представляется как

$${}^s\tilde{F}_{0(m),J(m)} = \sum_{x=1}^{X} \pi_{m,x} \cdot \delta(t - \theta_x), \tag{9}$$

where $\delta(...)$ - δ-функция Диракаδ; $\pi_{m,x}$ - вес функции Дирака в общем распределении,

$$\sum_{x=1}^{X} \pi_{m,x} = 1. \tag{10}$$

Точность модели определяется количеством отсчетов и при увеличении указанного количества - повышается.

В системе с дублирование элементов возникает «соревнование» за отказ, результат которого определяется плотностью распределения [7]:

$$\varphi_v(t) = \frac{d\left\{1 - \prod_{m=1}^{2}\left[1 - {}^s\tilde{F}_{0(m),J(m)}(t)\right]\right\}}{dt}, \tag{11}$$

where $\tilde{F}_{0(m),J(m)}$ - функция распределения

$${}^s\tilde{F}_{0(m),J(m)}(t) = \int_0^t {}^s\tilde{f}_{0(m),J(m)}(\xi)\, d\xi. \tag{12}$$

Таким образом, разработанный подход позволяет получать более точные оценки параметров надежности отказоустойчивых систем, по сравнению с классическими методами, в которых поток отказов рассматривается как пуассоновский, в связи с чем, рекомендуются к применению в инженерной практике проектирования вычислительных систем.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Rousand M. Reliability of Safety-Critical Systems: Theory and Applications, John Wiley & Sons, 2014. 466 p.
2. Sánchez-Silva M., Klutke G.-A. Reliability and Life-Cycle Analysis of Deteriorating Systems. Springer International Publishing. Switzerland. 2016. 355 P.
3. O'Conner P., Kleyner A. Practical Reliability Engineering, Willey and Sons, 2012. 456 p.
4. Landau I.D., Zito G. Digital Control Systems, Design, Identification and Implementation. Springer, 2006. 484 p.
5. Relay Races Along a Pair of Selectable Routes // Larkin E.V., Bogomolov A.V., Privalov A.N., Dobrovolsky N.N. Bulletin of the South Ural State University. Ser. Mathematical Modelling. Programming & Computer Software.. 2018. Vol. 11. No. 1. Pp. 15 - 26.
6. Bielecki T.R., Jakubowski J., Niewęgłowski M. Conditional Markov chains: Properties, construction and structured dependence // Stochastic Processes and their Applications. V. 127, N. 4. 2017. Pp. 1125–1170.
7. Ching W.K., Huang X., Ng M.K., Siu T.K. Markov Chains: Models, Algorithms and Applications / International Series in Operations Research & Management Science. V. 189. Springer Science + Business Media NY, 2013. 241 p.
8. Howard R. A. Dynamic Probabilistic Systems. Vol. 1: Markov Models. Vol. II: Semi-Markov and Decision Processes. Courier Corporation, 2012.
9. Janssen J., Manca R. Applied Semi-Markov processes. Springer US, 2006. 310 p.

УДК 511.3

П. Л. Чебышёв и отечественные математические школы по теории чисел[1]

И. Ю. Реброва (Россия, г. Тула)
Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого
e-mail: i_rebrova@mail.ru

P. L. Chebyshev and Russian mathematical schools on number theory

I. Yu. Rebrova (Russia, Tula)
Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University
e-mail: i_rebrova@mail.ru

В следующем году исполнится 75 лет со дня выхода замечательной книги Бориса Николаевича Делоне [1], в которой Борис Николаевич, являясь фактически последним представителем Петербургской школы теории чисел, дал исчерпывающее описание первоначальной истории этой первой отечественной математической школы.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ №19-41-710004_р_а

Здесь прослеживается прямая связь поколений: Пафнутий Львович Чебышёв (16.05.1821–26.11.1894) → Александр Николаевич Коркин (19.02.1837–19.08.1908) → Дмитрий Александрович Граве (25.08.1863–19.12.1939) → Борис Николаевич Делоне (15.03.1890–17.07.1980).

Трое ученых оказали исключительное влияние на формирование научных интересов П. Л. Чебышёва. Прежде всего научный руководитель профессор Московского университета Николай Дмитриевич Брашман (25.06.1796–25.05.1866). Затем труды по теории чисел Леонардо Эйлера (15.04.1707–18.09.1783), к изданию которых привлёк П. Л. Чебышёва академик Виктор Яковлевич Буняковский (15.12.1804–12.12.1889). Необходимо отметить, что В. Я. Буняковский плодотворно работал в области теории чисел.

Хотя у П. Л. Чебышёва было всего 10 работ по теории чисел, именно они принесли ему мировую славу и позволили создать первую отечественную математическую школу, которая известна во всём Мире как Петербургская школа теории чисел.

Создание генеалогического древа П. Л. Чебышёва по теории чисел — это непростая, но актуальная задача.

$$\text{П. Л. Чебышёв} \to \begin{cases} \text{А. Н. Коркин} \\ \downarrow \\ \text{Егор Иванович Золотарёв (12.04.1847–19.07.1878)} \\ \text{Андрей Андреевич Марков (14.06.1856–20.07.1922)} \end{cases}. \tag{1}$$

Рассмотрение первого яруса этого древа (1) создает иллюзию, что у П. Л. Чебышёва было только три ученика по теории чисел, но это глубоко ошибочное заключение, так как здесь мы видим только выдающихся учеников, каждый из которых был профессором и двое из них — академиками Петербургской академии наук, и каждый внёс существенный вклад в развитие теории чисел. Заметим, что Егор Иванович Золотарёв был одновременно и учеником П. Л. Чебышёва и А. Н. Коркина. И лишь безвременная кончина в возрасте 31 года не позволила этому блестящему математику стать со временем академиком и иметь достойных учеников.

Почему можно с уверенностью говорить о таком явлении, как Петербургская школа теории чисел. Это непосредственно следует уже из рассмотрения второго и третьего ярусов древа Чебышёва:

$$\text{П. Л. Чебышёв} \to \begin{cases} \text{А. Н. Коркин} \to \text{Д. А. Граве} \to \text{Б. Н. Делоне} \\ \downarrow \\ \text{Е. И. Золотарёв} \\ \text{А. А. Марков} \to \begin{cases} \text{Я. В. Успенский} \to \begin{cases} \text{И. М. Виноградов} \\ \text{Р. О. Кузьмин} \end{cases} \\ \text{Г. Ф. Вороной} \to \text{В. Ф. Серпинский} \end{cases} \end{cases} \tag{2}$$

Интересно отметить, что ученые, входящие в общий ярус генеалогического древа П. Л. Чебышёва, принадлежали, как правило, одному поколению. Действительно, второй ярус: Дмитрий Александрович Граве (25.08.1863–19.12.1939), Георгий Феодосьевич Вороной (28.04.1868–20.11.1908), Яков Викторович Успенский (11.05.1883–27.01.1947); третий ярус: Вацлав Францискович Серпинский (14.03.1882–21.10.1969), Борис Николаевич Делоне (15.03.1890–17.07.1980), Иван Матвеевич Виноградов (14.09.1891–20.03.1983), Родион Осиевич Кузьмин (3.12.1891–24.03.1949).

Не все математики из указанного древа П. Л. Чебышёва были чистыми теоретико-числовиками, или как говорил Ю. В. Линник, арифметиками [3]. Многие из них, как и основатель П. Л. Чебышёв, были разносторонними исследователями, внесшими вклад в различные ветви математики.

Создание Петербургской математической школы оказало существенное влияние на аналогичные процессы в Москве. Это прежде всего касается математической школы Егорова–Лузина. Нас будет интересовать эта научная школа, так как в ней выросли три блестящих

отечественных математика, внёсших существенный вклад в развитие Мировой теории чисел. Это Лев Генрихович Шнирельман (15.01.1905–24.09.1938), Александр Яковлевич Хинчин (19.07.1894–18.11.1959), Александр Осипович Гельфонд (24.10.1906–7.11.1968). Отметим, что А. О. Гельфонд был основателем одной из московских теоретико-числовых школ, которая дала значительные "побеги" исследований в различных областях теории чисел.

30-40-е годы XX столетия можно охарактеризовать как состязание Московской теоретико-числовой школы и Ленинградской. К началу 50-х годов XX столетия лидером Ленинградской теоретико-числовой школы стал академик АН СССР Юрий Владимирович Линник (8.01.1915–30.06.1972), который был учеником Владимира Абрамовича Тартаковского (13.01.1901–9.09.1972). И здесь мы видим, что Ю. В. Линник является продолжателем Петербургской школы теории чисел П. Л. Чебышёва, так как профессор В. А. Тартаковский был учеником Б. Н. Делоне.

Ещё один поразительный факт, который имел место в XX столетии развития теории чисел в СССР связан с личностью академика И. М. Виноградова. Формально у него не было учеников, т. е. тех, кто под его руководством защитил кандидатские диссертации, но фактически все выдающиеся теоретико-числовики в СССР были его учениками, так как развивали его методы, работали под его руководством в Математическом институте им. В. А. Стеклова АН СССР.

В работе [5] Л. Д. Фаддеев и И. А. Лавров дали укрупненный портрет Российских математических школ, но там практически ничего не говорится про теоретико-числовые школы СССР. В работе [3] в обзорной статье Ю. В. Линника дается достаточно много информации о состоянии исследований по теории чисел в СССР до середины 50-х годов XX столетия, но получить информацию об отечественных школах по теории чисел практически невозможно.

Парадокс нынешнего состояния информатизации и цифровизации научных исследований состоит в том, что мы не можем найти ответы на простейшие вопросы:

1. кто защищал докторские диссертации по теории чисел и каков полный список этих диссертаций?

2. кто защищал кандидатские диссертации по теории чисел и каков полный список этих диссертаций?

3. какие научные школы по теории чисел были и имеются в России и СССР, какова их история?

4. каков полный список отечественных исследователей и их работ по теории чисел?

На наш взгляд коллективными усилиями в рамках развития ПОИВС можно решить эту проблему. Необходимость решения этой проблемы очевидна, если мы исходим из принципа *непрерывности интеллектуальной эстафеты*, которая, как показывает анализ истории развития науки, происходит от *учителя к ученику*.

В обзорной статье Ю. В. Линника указано: "В послевоенные годы выросли целые группы арифметиков в разных городах СССР, плодотворно и интенсивно разрабатывающих характерные для них напрвления. Такие группы имеются в Москве, Ленинграде, Саратове, Ташкенте, Тбилиси Вильннюсе и других городах". Фактически Ю. В. Линник указывает, что в эти годы в СССР стали складываться территориальные научные школы по теории чисел.

Таким образом, исходя из древа П. Л. Чебышева, необходимо создать общее генеалогическое древо теории чисел в России, начинающееся от Л. Эйлера и Х. Гольдбаха, в котором можно позиционировать любого отечественного математика, занимающегося теорией чисел, и его работы.

Если такой инструмент будет создан, то это будет дополнительной мотивацией для молодых исследователей, когда они будут знать, что принцип *никто не забыт, ничто не забыто*

соблюдается для отечественной теории чисел. А то, что ряды специалистов по теории чисел должны непрерывно пополняться, очевидно для любого, кто серьезно относится к проблемам информационной безопасности.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Б. Н. Делоне. Петербургская школа теории чисел. — М.-Л.: Изд-во АН СССР, 1947. — 419 с.

2. Математика в СССР за тридцать лет. 1917–1947. / ред.: Курош А. Г., Маркушевич А. И., Рашевский П. К. — М.: ГИТТЛ, 1948. — 1043 с.

3. Математика в СССР за сорок лет 1917–1957 (Том 1). / гл. ред. Курош А. Г. — М.: Физматгиз, 1959. — 1000 с.

4. Математика в СССР за сорок лет 1917–1957 (Том 2). / гл. ред. Курош А. Г. — М.: Физматгиз, 1959. — 821 с.

5. Л. Д. Фаддеев, И. А. Лавров. Российские математические школы // Вестник Российской академии наук. 1999. Том 69 № 5. С.391–397.

УДК 51(091), 51(092)

О неизвестной рукописи И. А. Эйлера по истории математики

Г. И. Синкевич (Россия, г. Санкт-Петербург)
Санкт-Петербургский государственный архитектурно-строительный университет
e-mail: galina.sinkevich@gmail.com

I. A. Euler unknown manuscript on the history of mathematics

G. I. Sinkevich (Russia, Saint-Petersburg)
Saint Petersburg State University of Architecture and Civil Engineering
e-mail: galina.sinkevich@gmail.com

Леонард Эйлер (1707–1783), отец нашего героя, приехал в Санкт-Петербург в 1727 г. из швейцарского города Базеля в незадолго до того созданную Санкт-Петербургскую академию наук. Эйлер зарекомендовал себя значительными научными результатами, со временем заняв позицию ведущего учёного Европы эпохи Просвещения. В 1733 г. Л. Эйлер стал академиком (профессором естествознания) и в том же году женился на своей соотечественнице, Катарине Гзелль. Их первенцем был Иоганн Альбрехт Эйлер (Иван Леонтьевич, 1734–1800).

В 1741 г. Л. Эйлер вместе с семьёй покинул Россию ради работы в Берлинской академии наук. Иоганну Альбрехту было неполных 7 лет. 25 следующих лет семья Эйлера жила в Берлине. Л. Эйлер уделял большое внимание образованию сына. Иоганн Альбрехт учился у частных учителей, затем, возможно, в Гейдельберге. Помимо этого Л. Эйлер, державший пансион для учеников, в том числе и из России, обучал математике наравне с ними и своего старшего сына. В одном из писем Л. Эйлер пишет о своем пансионере Котельникове, старше Иоганна Альбрехта на 10 лет: “Я всегда даю ему уроки в обществе моего Альбрехта, и я

чувствую, что небольшое соперничество не даёт ни одному из них никакого преимущества, так как они примерно равны по силе" ([1], с. 89).

В возрасте 15 лет Иоганн Альбрехт помогал отцу при нивелировании Финов-канала. В 20 лет (5.12.1754) он был избран членом Берлинской академии и назначен инспектором Берлинской обсерватории. В 24 года Иоганн Альбрехт наблюдал и описал комету Галлея.

Л. Эйлер высоко оценил экспериментаторский талант сына, сам занимаясь теоретической частью работы.

В период между 1755 и 1766 годами И.А. Эйлер опубликовал четырнадцать работ в ''Мемуарах" Берлинской академии наук и получил несколько премий, участвуя в конкурсах. В 1762 году он стал почётным членом Мюнхенской академии, но так и не получил звания академика.

В 1760 г. И.А. Эйлер женился на Анне-Шарлотте-Софии фон Гагенмейстер, родственнице Самуэля Формея, секретаря Берлинской академии. Это был счастливый и многодетный брак. После отъезда в Россию И.А. Эйлер долгие годы переписывался с Формеем; его письма служат богатым источником информации о жизни в России. Иоганн Альбрехт с семьёй жил вместе с отцом до самой его смерти.

В 1766 г. большая семья Леонарда Эйлера (18 человек) переехала в Россию.

И.А. Эйлер получил должность профессора физики, а с 1769 г. стал конференц-секретарём Академии. Первые годы пребывания в Петербурге он ещё мог уделять время научной работе, заниматься приборами Физического кабинета. Но после назначения конференц-секретарём все его силы уходили на административную работу: ведение огромной переписки с иностранными учёными, прежде всего с иностранными членами Академии; координация деятельности между отделами академии: библиотекой, типографией, архивом, работой переписчиков и проч.; визиты, связанные с переговорами о делах Академии; переписка с участниками академических научных экспедиций и редактирование их отчётов; проверка знаний учеников Академии; редактирование изданий Академии; составление годовых отчётов, а также написание резюме сочинений. Одновременно он состоял инспектором военных учебных заведений, некоторое время читал лекции по физике в университете, был директором по надзору за учебной работой ("директором наук") в Сухопутном Кадетском корпусе; в придворных кругах ему приходилось выполнять неформальные функции научного советника и собеседника, популярно рассказывающего о научных проблемах; проводить ознакомительные экскурсии по Академии для иностранных гостей.

В XVIII в. нечёткий государственный статус Петербургской Академии наук ставил её в зависимость от придворных и политических интриг, некомпетентного руководства, а зачастую начальственного самодурства и корыстолюбия. В необходимости соблюдать академические интересы и сохранять своё достоинство И.А. Эйлеру помогал унаследованный от отца твёрдый характер: так же, как и отец, он не боялся ставить свои условия сильным мира сего, отстаивать справедливость.

И.А. Эйлер, наравне с секретарями теряющего зрение отца, постоянно помогал ему в научной работе: обычно Л. Эйлер намечал основные идеи исследования, а его помощники развивали эти идеи и выполняли письменную, графическую и вычислительную часть работы. Часто отец и сын проводили вечера в прогулках по саду, обсуждая научные вопросы.

Справочник Поггендорфа ([2] т. 1, с. 704–705) содержит названия около 30 мемуаров И.А. Эйлера, преимущественно по физике, астрономии и приложениям к ним математики, опубликованных в немецких и российских академических изданиях, но этот список не полон. В 1770-е гг. Леонард Эйлер в окружении своих молодых помощников: И. А. Эйлера, Н. Фусса, А. Лекселя и Л.Ю. Крафта обсуждал с ними вопросы астрономии, сферической тригонометрии и теории чисел. Это были домашние семинары, все идеи обсуждались и вырабатывались совместно. Их записи представляют собой последовательность поочередных заметок всех участников [3] и содержат немало гипотез и результатов И.А. Эйлера в области теории чисел.

В 1771 г. И.А. Эйлера избрали иностранным членом Шведской королевской академии наук. В 1786 г. он был пожалован орденом Св. Владимира IV степени, став одним из первых российских учёных, отмеченных государственной наградой.

В Архиве Академии наук в фонде Эйлера среди рукописей И.А. Эйлера нашлась неопубликованная работа по истории геометрии. Эта неопубликованная и не датированная рукопись И.А. Эйлера на немецком языке по истории геометрии[1], возможно, предназначалась для учебника по геометрии, который И.А. Эйлер писал для Сухопутного Шляхетского корпуса. С другой стороны, в изданиях Академии наук публиковалось большое количество статей научно-популярного и историко-научного характера. Интерес публики к чтению такого рода был значителен, академиков часто обязывали читать популярные лекции и писать научно-популярные статьи. Возможно, что рукопись И.А. Эйлера также предназначалась в качестве основы статьи в одно из этих изданий. Она представляет собой 31 тезис, предназначенный для дальнейшего развития. Основываясь на фактах биографии И.А. Эйлера и его ссылкам на некоторые издания, мы с осторожностью предполагаем, что рукопись была написана после 1778 г.

Первая часть рукописи содержит обзор античной истории геометрии, показывающий хорошее знакомство И.А. Эйлера с историко-математической литературой. Помимо традиционных вех истории античной геометрии Эйлер обращает внимание на открытие новых методов решения поставленных задач, и, в частности, на возникновение вопроса о разрешимости и неразрешимости геометрических проблем.

Вторая часть рукописи представляет собой великолепный обзор современного на тот период развития геометрии, включая её прикладные аспекты в астрономии, картографии, геодезии, маркшейдерском деле и фортификации, развитие подсобных математических инструментов, и показывает основательное знакомство И.А. Эйлера с литературой. Он выделяет авторов по педагогическому мастерству в области высшей геометрии, по развитию прикладных методов и по созданию руководств в новых прикладных областях. Мы попытаемся определить, какими источниками пользовался И.А. Эйлер и дать характеристику их авторам.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Мументалер Р. Швейцарские учёные в Санкт-Петербургской академии наук. XVIII век– Санкт-Петербург, Нестор–История, 2009. – 236 с.

2. Poggendorff, J. C. Biographisch-literarisches Handwörterbuch zur Geschichte der exacten Wissenschaften. Leipzig : J. A. Barth. 1863. Columns 704–705.

3. Euler L. Leonhardi Euleri Opera postuma mathematica et physica: anno MDCCCXLIV, Academiae Scientiarum Petropolitanae. 1862. Volume 1. – 627 с.

[1] СПбФАРАН. Ф. 136. Оп. 1-а, Д. 33. 8 л.

УДК 165.23

Диалектика развития математики и ее место в системе знания

А. В. Титов (Россия, г.Москва)
Российский университет транспорта
e-mail: a.v.titov@mail.ru

Dialectics of the development of mathematics and its place in the system of knowledge

A. V. Titov (Russia, Moscow)
Russian University of Transport
e-mail: a.v.titov@mail.ru

Анализ "стихийного"развития математики позволяет предположить наличие определенных закономерностей этого развития, сделать вывод о наличии в нем диалектических и спекулятивных аспектов, что позволяет рассматривать развитие математики как движение по пути преобразования в сторону расширения ее возможностей как науки, в которой органично сочетается описание как внешних форм явлений, так и существа дела.

Философской основой для развития математики как средства формирования разных видов логоса, по мнению автора, может служить диалектический подход к развитию знания, представленный в работах Гегеля и А.Ф.Лосева.

Гегель выделяет три стороны логического: «*Логическое* по своей форме имеет три стороны: а) абстрактную, или рассудочную, б) диалектическую, или отрицательно-разумную, в) спекулятивную, или положительно-разумную. Эти три стороны не составляют трех частей логики, а суть *моменты всякого логически реального*, т.е. всякого понятия или всего истинного вообще. Все они могут быть положены в первом моменте, в моменте *рассудочности*, и благодаря этому могут быть удерживаемы в своей обособленности, но в этом виде они рассматриваются не в их истине.» [1].

В математике и математической (формальной) логике практически повсеместно используется только та форма, которую Гегель охарактеризовал как "рассудочную что отмечается и самим Гегелем.

В этой форме логического используется только два значения истинности: “истина” и “ложь”, как их не понимать. Так же как в теории множеств используется только две возможности для принадлежности элемента к множеству. В то же время в приложениях к описанию сложных систем, в котором используется главным образом атрибутивный подход, при котором объект описывается через систему принадлежащих ему свойств, остро проявляет себя необходимость оценивать степень "явленности"того или иного свойства в объекте. Другими словами адекватность описания сложной системы достигается только при учете того в какой мере присутствует в ней то или иное свойство. И поскольку свойство можно отнести к качественной стороне исследуемого объекта или системы, то такое описание вводит нас в область отношения качества и количества, т.е в область множественности значения истинности или меры истинности., которая в "Науке логики"определяется так: «Мера есть отношение (Relation), но не отношение вообще, а определенное отношение качества и количества друг к другу;» [2].

И это определение может служить основанием необходимости использования при описании сложных систем логик с множественной оценкой истинности.

Для придания системного характера процессу стихийного развития объектов математики как средства описания сложных систем и процессов необходимо наличие некоторой основы

для анализа описательных возможностей при моделировании широкого круга объектов и процессов.

Существенную роль здесь может играть вопрос о степени "явленности"смысла в меоне в различных областях знания. и как отмечает Лосев: "Здесь открывается перед нами целая лестница восходящих по своей осмысленности типов оформления меона, или типов просветвления тьмы бессмыслия. *И все это будет не что иное как разная степень осмысления слова, разная степень словесности как таковой*". [3, с.62]

Лосев вводит понятие предметной энергемы: "*сущность явлена в имени как энергема имени*"[3, с.62]. При этом возможны различные уровни энергемы. Анализ этих уровней и их взаимосвязи в единой иерархической системе энергем и есть один из возможных путей к осмыслению выразительных возможностей математики как форме знания, относящейся к определенному уровню энергемы, - т.е. того какие сущности (объекты) и в какой степени полноты могут быть описаны средствами математики, а так же того, какие существуют, и существуют ли, возможности развития этих средств.

В "Философии имени А.Ф.Лосев выделяет пять уровней эйдетической предметности (энергем):

Эйдос, в созерцательно- (феноменолого)-статистическом аспекте есть:

1. Схема - схематический слой эйдоса или множество в смысле Кантора, он есть составленность целого из частей. Идея охватывающего части целого выходит за пределы частей. «Это - *совокупность идеально -математических характеристик предмета.*» [3,110]
2. Топос - момент качественной определенности эйдоса или качественная заполненность схемы, морфный или топологический момент;
3. Эйдос в узком смысле - или момент категориальной определенности эйдоса;
4. Символ - воплощенность эйдоса в инобытии, смысловая вобранность инобытия в эйдос, что обуславливает его апофатичность;
5. Миф - интнллигентно модифицированный миф. [3,113-114]
6. В диалектико-динамическом аспекте:
7. Генологический момент;
8. Эйдетический в узком смысле;
9. Генетический;
10. Меонально – сущностный или гилетический;

Символический. [3,с.161]

В этом выделении уровней эйдоса математике отводится место схемы в жизни эйдоса. Однако, А.Ф.Лосев предвидел развитие математики в сторону "освоения"более глубоких уровней эйдоса: «Морфе, или топос, отличается от схемы тем, что она принимает во внимание и *качество*, *топос* частей, слагающихся в целое....Если к этому прибавить еще и качественное содержание каждого элемента или части, то получилось бы новое и более богатое учение о схеме, и недалеко то будущее, которое даст такую науку как необходимую часть науки о множествах или его применений к другим областям». [3, с.201]

Математика как понятие, являясь продуктом саморефлексии духа, сама в процессе саморазвития составляет свой конечный продукт, то есть понятие математики составляет конечный результат развития математики. Предмет же математики следует определить, так как

рассматривать ее как науку о числах в привычном понимании этого слова уже нельзя. В частности, объектом математического знания стали структуры или, следуя выражению И.Р. Шафаревича, числоподобные структуры. В этом определении остается все же элемент противопоставления новых объектов математики (структур) числу.

В то же время, при разработке математических моделей сложных объектов, приходится учитывать одновременное наличие в них противоположных свойств, т.е. использовать законы противоречия и исключенного третьего и иной, чем она записана в классической логике форме, которую можно обозначить как вероятностная или, в более широкой формулировке, возможностная. И в области приложений такие средства созданы, это, в частности, теория нечетких множеств или как ее часто формулируют "теория возможностей". Однако не во всем она согласуется с принципами, принятыми в классической математики.

В то же время обобщенная форма разработанного во второй половине 20-века нестандартного анализа позволяет, используя принятое в математической логике понятие оценки и рассматривая оценку как пучок из категории формул в категорию мер оценки, можно получать различные виды неклассической логики. Наличие двух видов дополнения в решетках общего вида позволяет получить формальную логику с возможностной формой законов исключенного третьего и отрицания [4].

Язык теории категорий может служить примером возможности обобщения в нем языков теории множеств и теории структур.

Например, мономорфной в теории категорий называют стрелку a→b, которая сократима слева , т.е. такую, что if f∘g=f∘h то g=h.

В теории множеств этому соответствует инъективное отображение. Но это понятие охватывает также ***отношение порядка***, которое представляется стрелкой a→b, если a<b (т.е.отношение в языке теории структур заменяется стрелкой в языке теории категорий), и операции, например над натуральными числами: m+n=m+p ⇒ n=p. Здесь натуральное число на языке теории категорий есть стрелка, а композиция – операция сложения чисел.

Уже из этих примеров видно, что понятие стрелки в теории категорий охватывает такие понятия как отображение в теории множеств (и не только), отношения, числа, а более широко –элемента алгебраической структуры и, вероятно. многое другое, что еще не описано языками различных разделов математики. А если это так, то это позволяет надеяться на то, что потенциал теории категорий позволит расширить рамки моделирования на объекты и процессы, которые пока не могут моделироваться с достаточной степенью адекватности на языках других разделов математики.

Используя понятие «оценка», как отображения из множества формул в множество мер истинности, для анализа типов логического исчисления, можно проследить как количественные изменения значений истинности и сопоставляемая им мера определяют качественный тип логики, зафиксированный в системе аксиом логического исчисления.

А.В.Любецкий [5] приводит специальный вид оценки применительно к задачам нестандартного анализа.

Оценка определяется так: «Оцениванием (оценкой) в данном языке для фиксированной решетки X называется сопоставление каждой формуле φ элемента из X, обозначаемого $\|\varphi_k\|_X$ или короче $\|\varphi_k\|$, причем логические связки языка моделируются операциями в решетке X. Последнее означает, что $\|\varphi\wedge\psi\| = \|\varphi\| \wedge\|\psi\|$, $\|\varphi\vee\psi\| = \|\varphi\| \vee\|\psi\|$, $\|\varphi\to\psi\| = \|\varphi\| \to\|\psi\|$, $\|\varphi\| = \|\varphi\|$» [1].

Такой вид оценки позволяет отношения между функциями в обобщенной форме, заменять отношения между исследуемыми объектами (формулами, функциями и т.д.) отношениями между отдельными «элементами» некоторой решетки с учетом введенной на ней меры.

Метод обобщенного нестандартного анализа позволяет рассматривать взаимосвязь между различными типами логики на основе исследования взаимосвязи порождающих их структур,

на которых принимает значение оценка [4].

Структура, на которой принимает значение оценка формул формального языка и отношения эквивалентности на ней определяют не только тип логики, но и правила вывода, соответствующие типу логики.

В частности, в [4] показано, что такой подход позволяет обобщить правило modus ponens, определяя значение истинности на элементах фильтра общего вида.

Таким образом, modus ponens:$\|\varphi k\|=1$, $\|\varphi k \Rightarrow \varphi k1\|=1$ влечет $\|\varphi k1\|=1$ (1), есть частный случай правила $\|\varphi k\| \in j$, $\|\varphi k \Rightarrow \varphi k1\| \in j$ влечет $\|\varphi k1\| \in j$, (2) где j – фильтр на алгебре оценок. В modus ponens j=1. Но (2) свойство импликативной решетки. Таким образом, modus ponens в форме(2) является правилом вывода для всех логик со значениями на импликативных решетках (псевдобулевых алгебрах). Если фильтр является максимальным, то сохраняется общепринятая формулировка правила(1).

Дальнейшее развитие подходов к формированию неклассических типов формальной логики может быть связано с использованием теории категорий.

При этом подходе различные типы логики определяется структурой, на которой принимает значение оценка.

При таком подходе «логики» как вид исследования структур представляют собой семейство функторов из категорий, соответствующих формальным теориям в категории структур, на которых принимает значение оценка. Иными словами в категорном подходе оценка есть функтор, из категорий, соответствующих формальным теориям в категории структур, на которых принимает значение оценка, при этом оценка рассматривается как функтор, сохраняющий дополнительную структуру. Вид логики будет определяться типом функтора, возможно, минимальные логики-«образующие» будут представлять собой семейство, определяемое семейством баз, предбаз, образующих и т.д. структур значений оценки. Нельзя исключать и того, что сюда войдут функторы как гладкие отображения многообразий, поскольку в обиход уже введен термин «локальная истинность», в частности в теории категорий рассматривается язык PL, в который включена новая связка ∇ и если α формула этого языка, то формула $\nabla\alpha$ читается «локально имеет место, что α» [6].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Г. В. Ф. Гегель. Энциклопедия философских наук, т.1, Наука логики -М.: Мысль, 1974, -452 с.

2. Г. В. Ф. Гегель. Наука логики. СПб, «Наука», 1997,- 799 с.

3. А. Ф. Лосев. Философия имени.- М.: Издательство Московского университета , 1990, -269 с.

4. А. В. Титов. Использование нефинитных методов в семантическом подходе к исследованию типов формальной логики//Ученые записки Крымского федерального университета им. В.И. Вернадского. Серия: Философия, Культурология, Политология, Социология. Т.2(68), №4 – Симферополь.: Крымский федеральный университет им В.И.Вернадского, 2016. сс. 143 –156 [ISSN 1606-3715]

5. В. А. Любецкий. Оценки и пучки. О некоторых вопросах нестандартного анализа // УМН, том 44, выпуск 4(269). - С. 99-153.

6. Р.Гольдблатт. Топосы. Категорный анализ логики.-М: Мир, 1983, -468 с.

УДК 511.32

П. Л. Чебышёв о работе И. И. Рахманинова по теории водяных колес

В. Н. Чиненова (Россия, г. Москва)
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
v.chinenova@yandex.ru

P. L. Chebyshev on the work of I. I. Rachmaninov on the theory of water wheels

V. N. Chinenova (Russia, Moscow)
Lomonosov Moscow State University
v.chinenova@yandex.ru

Отзыв П. Л. Чебышева о магистерской работе по механике И.И. Рахманинова «Теория вертикальных водяных колес» [1] представляет особый интерес, так как в нем ярко выявлена точка зрения Чебышева о важности связи теории с практикой. Эту точку зрения он не раз подчеркивал в своих работах и выступлениях. Интересно заметить, что П.Л. Чебышев и И.И. Рахманинов были учениками профессора механики Московского университета - Н.Д. Брашмана (1796-1866), уделявший большое внимание проблемам прикладной (практической) механики, которые можно было разрешить методами теоретической механики и математики [2]. Пафнутий Львович Чебышев (1821-1894) окончил Московский университет в 1841г. После защиты магистерской диссертации он в 1845г. переехал в Петербургский университет, где протекала его педагогическая и научная деятельность. Иван Иванович Рахманинов (1826-1897), окончил физико-математический факультет Московского университета в 1848г. со степенью кандидата, в 1852 г. в том же университете защитил диссертацию на степень магистра математических наук «Теория вертикальных водяных колес», удостоенную поощрительной Демидовской премии и почетного отзыва Академии наук. Эта работа была напечатана в том же году [3]. Об этом сочинении Рахманинова дал очень лестный (положительный) отзыв П.Л. Чебышев. Наряду с важными теоретическими результатами особо отметил практический интерес этой работы. «Сочинение г. Рахманинова имеет тем более интереса, что он, не ограничиваясь одними теоретическими выводами, обращает полное внимание на те правила устройства колес, которые выведены были из наблюдений. От такого сближения теории с практикой сочинение г. Рахманинова очень много выигрывает» [1, с. 291]. В сочинении рассмотрено множество частных вопросов, которые представляются при определении элементов колес различного устройства и при различных обстоятельствах, они изложены Рахманиновым с надлежащей отчетливостью. В этой работе «мы находим исследование таких предметов относительно устройства колес, которые были совершенно недоступны для прежней теории, единственно известной у нас, но которые имеют большую важность в практике» [1, с.291]. Рахманинов исследовал вопросы приложения теоретических разработок в области гидродинамики к расчету водяных колес для малых падений. Отмечая, что анализом действия гидравлических колес занимались во Франции Бордо, Навье, Понселе и другие, а также в основном немецкие ученые, в особенности Редтенбахер, Чебышев говорит о том, что предмет далеко не исследован в надлежащей полноте и точности, необходимой для практики. Недостаточность теорий гидравлических колес легко объясняется теми трудностями, которые встречаются при определении законов их движения. Если рассматривать воду в ее вытекании на колесо, как бесконечно тонкую струю, если предполагать, что все ее частицы с одинаковой скоростью достигают колеса, где до момента выливания имеют скорости, общие с самим колесом, и, наконец, пренебречь вредными

сопротивлениями, то, по примеру французских ученых, легко составить уравнения движения колеса. Но эти уравнения не имеют надлежащей точности, и результаты, из них выводимые, непосредственно к практике приложены быть не могут. Если из этих уравнений получаются формулы для количества работы наливных колес довольно близкие к истине, то подобные формулы для других колес значительно разнятся с наблюдениями. Эти формулы употребляются не иначе, как с помощью, так называемых практических коэффициентов. Самое употребление этих коэффициентов показывает, что те обстоятельства, которыми пренебрегают при рассматривании движения водяных колес, имеют значительное влияние на количество работы и, следовательно, по крайней мере, до известной степени должны быть принимаемы в расчет. «Недостаточность теории водяных колес, о которой мы говорим, еще поразительнее обнаруживается при определении наивыгоднейших размеров их различных частей и других обстоятельств, условливающих maximum их работы. Причина этого понятна: здесь приходится брать производную выражения количества работы, а при этом, как известно, члены, имеющие большую величину, могут обращаться даже в нуль, а члены малые — получать значительную величину. Поэтому не удивительно, что таким образом находят даже нули и бесконечности на место величин конечных: подобные выводы не могут иметь никакого приложения в практике. Чтобы дать правила для наивыгоднейшего употребления воды как двигателя, необходимо было подвергнуть гидравлические колеса анализу более точному, анализу, в котором было бы обращено внимание на все обстоятельства, изменяющие количество работы приметно для практики» [1, с. 291]. Чебышев отмечает, что в этом сочинении дан подробный анализ тех условий, при которых водяное колесо доставляет наибольшую работу, и в этом отношении теоретические выводы свои Рахманинов сравнивает с правилами устройства колес, найденными из наблюдений. Таким же образом полезно было бы сравнить с наблюдениями теоретические выводы относительно самого количества работы. Следует иметь в виду, что неверности формул, незначительные при определении величины работы, могут оказывать значительное влияние при определении условий maximum этой работы; и обратно, неверности, которые в последнем случае почти незаметны, могут ясно обнаружиться при определении величины работы. С другой стороны, необходимо показать, сколько в обыкновенных обстоятельствах можно ожидать полезной работы от колеса того или другого устройства; такая характеристика колес весьма важна для самой практики. Также при определении условий наибольшей работы не следует ограничиваться рассмотрением одной так называемой полной работы; вредные сопротивления, зависящие от размера колеса, должны быть исключены из этой работы, как это учитывается Рахманиновым при исследовании некоторых колес. Рассмотрев общий характер манускрипта Рахманинова, Чебышев рассмотрел отдельно содержание каждой главы. Глава I. Теория пошвенного колеса с прямыми лопатками. Выведенные автором уравнения он прикладывает также к определению наивыгоднейших размеров колеса, и теоретические выводы сличает с правилами практиков. Глава II. Теория пошвенного колеса с кривыми лопатками, изобретенного Понселе. В этой главе автор рассматривает условия, при которых вода падает на лопатку без удара и оставляет ее без скорости, сравнивает это с практическими правилами устройства колеса Понсле, определяет полезную работу его и кончает определением размеров вновь «устрояемого» колеса. Глава III. Теория колес, окруженных желобом. Глава IV. Теория колес, окруженных желобом и получающих воду выше средней их точки. Все колеса, составляющие предмет этих глав, рассмотрены подробно в отношении обстоятельств, имеющих значительное влияние на количество работы, и с теоретическими выводами сравнены практические правила построения этих колес. Глава V. Теория колес с ящиками, получающих воду из резервуара посредством шлюзного отверстия и не окруженных желобом. В сочинении Рахманинова, пишет Чебышев, дано исследование таких предметов относительно устройства колес, которые были совершенно недоступны для прежней теории, единственно известной у нас, но которые имеют большую важность в практике. Достоинством работы Рахманинова

являются более точные формулы, в которых обращено внимание на увеличение веса колеса вместе с уменьшением его скорости; из условий, которые должны удовлетвориться при входе воды в колесо, и из этих формул видно, что действительно, уменьшая скорость воды далее известного предела, уменьшают полезную работу колеса.

В заключении Чебышев пишет: «Из сделанного нами обзора этого сочинения видно, что оно заключает в себе подробный анализ всего наиболее существенного относительно увеличения полезной работы воды в колесах вертикальных, колесах, наиболее употребительных. До сих пор ни по одной части практической механики мы не имеем сочинения, в котором бы предмет был исследован с такой подробностью и отчетливостью, в котором бы показаны были теоретические начала для определения главных элементов машины. Чтобы представить в таком виде теорию вертикальных водяных колес, автор воспользовался всем, что наилучшего сделано в ней различными учеными, сличил со многими наблюдениями их теоретические выводы и в некоторых местах дополнил их собственными. Такой труд о предмете, особенно важном для практики, с недостатками, весьма ограниченными, по мнению нашему [Чебышева – В.Ч.], достоин награды второстепенной Демидовской премией» [1, с. 294].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Чебышев П. Л. Разбор сочинение г. Рахманинова под заглавием «Теория вертикальных водяных колес», «Теория вертикальных водяных колес», Москва, 1852, составленный профессором С.-Петербургского университета П. Чебышевым // Полное собрание сочинений П. Л. Чебышева. – М.-Л.: АН СССР. 1951. Т. V. С. 289-294.

2. Тюлина И. А. Развитие механики в Московском университете в XVIII и XIX веках // Историко-математические исследования. - М.: ГИТТЛ. 1955. Вып. VIII. С. 489-536.

3. Рахманинов И. И. Теория вертикальных водяных колес – М.: Университетская типография. 1852.

Секция 10. Алгебраическая теория чисел

УДК 511.2

О равенстве $A^x + B^y = C^z$ в натуральных числах

В. В. Агафонцев (Россия, г. Псков)
email: fon-valery-ag@yandex.ru

About equality $A^x + B^y = C^z$ in natural numbers

V. V. Agafontsev (Russia, Pskov)
email: fon-valery-ag@yandex.ru

Представим возможный подход к исследованию равенства $A^x + B^y = C^z$, где A, B, C, x, y, $z \in \mathbb{N}$, построенный на последовательности утверждений, в которые входят:

1) Лемма 1. *Число C^z, где C и $z \in \mathbb{N}$, в позиционной C-ричной нумерации представимо равенством $C^z = (10\ldots0)_C$, в правой части которого* содержится ***точно z*** *нулей.*

2) Лемма 2. Доказывает необходимое и достаточное условие выполнения равенства $P+Q = C^z$, в котором P, Q, C - суть любые ненулевые натуральные взаимно простые числа, $z \in \mathbb{N} \geq 2$. Лемма 2 имеет следствие, рассматривающее случаи выполнимости равенства $a_0 + b_0 + \sum_{i=1}^{z-1}(a_i + b_i) \cdot C^i = C^z$, в котором числа $a_0, b_0, C, z \in \mathbb{N}$; $a_i, b_i \in \mathbb{N}_0 \leq C-1$; $z \geq 2$ представляют равенства $P = A^x = a_0 + \sum_{i=1}^{z-1} a_i \cdot C^i$ и $Q = B^y = b_0 + \sum_{i=1}^{z-1} b_i \cdot C^i$, где $A, B, x, y \in \mathbb{N}$, $x \geq 1, y \geq 1$.

Здесь и далее символом $\mathbb{N}$ обозначены натуральные, то есть положительные целые числа *без нуля*. Символом $\mathbb{N}_0$ обозначены натуральные числа *с нулём*.

3) Теорема 1. Доказывает невыполнимость равенства $a_0 + b_0 + \sum_{i=1}^{z-1}(a_i + b_i) \cdot C^i = C^z$ для любых наборов чисел $a_0, b_0, C, z \in \mathbb{N}$; $a_i, b_i \in \mathbb{N}_0 \leq C-1$, с которыми выполнялись бы равенства $a_0 + \sum_{i=1}^{z-1} a_i \cdot C^i = A^x$ и $b_0 + \sum_{i=1}^{z-1} b_i \cdot C^i = B^y$ при условиях: $A, B, C, x, y, z \in \mathbb{N}$; $(A, B, C) = 1$; $x > 2, y > 2, z > 2$.

4) Теорема 2. *Равенство $A^x + B^y = C^z$, в котором $A, B, C, x, y, z \in \mathbb{N}$, при $x > 2, y > 2, z > 2$* ***не выполнимо*** *для любых натуральных чисел $(A, B, C) = 1$.*

5) Теорема 3. *Равенство $A^x + B^y = C^z$, в котором $A, B, C, x, y, z \in \mathbb{N}$, при $x > 2, y > 2, z > 2$* ***выполнимо*** *для составных натуральных чисел A, B, C, имеющих общий делитель.*

6) Утверждение. *Равенство $A^x + B^y = C^z$, в котором $A, B, C, x, y, z \in \mathbb{N}$, при $x > 2, y > 2, z > 2$, выполнимо* ***только*** *для составных натуральных чисел A, B, C, имеющих общий делитель.*

Отметим, что лемма 2 является расширенным вариантом леммы "ABC", описанной в работах [1]– [4]. Теоремы 1, 2 и 3 представлены в работе [5]. В отличие от теорем 2 и 3, изложенных достаточно репрезентативно, доказательство теоремы 1 требует дополнительного уточнения в соответствии с леммой 2 и её следствием. Сделаем такое уточнение; предварительно обратимся к доказательству леммы 2 и её следствия.

Лемма 2. *Необходимое и достаточное условие выполнения равенства $P + Q = C^z$, в котором P, Q, C - суть любые ненулевые натуральные взаимно простые числа, $z \in \mathbb{N} \geq 2$, представимо триадой равенств:* $P = a_0 + \sum_{i=1}^{z-1} a_i \cdot C^i$; $Q = b_0 + \sum_{i=1}^{z-1} b_i \cdot C^i$; $C = a_0 + b_0 = a_i + b_i + 1$, *где* $i \in [1; z-1]$; $a_i, b_i \in \mathbb{N}_0 \leq C-1$; $a_0, b_0 \in \mathbb{N}$.

Доказательство.

Запишем правую и левую части равенства

$$P + Q = C^z \tag{1}$$

в позиционной C-ричной нумерации. Получим:

$$(P)_C + (Q)_C = (10\ldots0)_C, \tag{2}$$

где число нулей в правой части равенства (2) в соответствии с леммой 1 равно $\mathbf{z}$.

Из равенства (2) следует *необходимое* условие его выполнения. Такое условие заключается в том, что:

I. C-ричная запись каждого из чисел P и Q в равенстве (2) должна содержать не более, чем $\mathbf{z}$ C-ричных разрядов. Действительно, правая часть равенства (2) представляет собой *наименьшее* целое C-ричное число, содержащее $\mathbf{(z+1)}$ разрядов, старший, $\mathbf{(z+1)}$-й, из которых имеет *наименьшее* ненулевое значение. Поэтому, если хотя бы одно из чисел P или Q будет представляться $\mathbf{(z+1)}$ C-ричными разрядами, то это сделает равенство (2) ***невыполнимым***, так как левая часть равенства (2) будет заведомо больше его правой части. Следовательно, числа P и Q в их C-ричной записи представимы не более, чем z С-ричными разрядами:

$$(P)_C = (a_{z-1}a_{z-2}\ldots a_1a_0)_C; \qquad (Q)_C = (b_{z-1}b_{z-2}\ldots b_1b_0)_C \tag{3}$$

Учитывая позиционность C-ричной нумерации, числа P и Q в их количественном эквиваленте представимы так:

$$P = a_0 + \sum_{i=1}^{z-1} a_i \cdot C^i; \qquad Q = b_0 + \sum_{i=1}^{z-1} b_i \cdot C^i \tag{4}$$

Здесь $a_i, b_i \in \mathbb{N}_0 \leq C-1$; $a_0, b_0 \in \mathbb{N}$. По условию $(P, Q, C) = 1$, следовательно, $a_0 \neq 0$ и $b_0 \neq 0$.

II. В соответствии с равенством (2) поразрядные суммы C-ричных записей правой части равенств (3) должны удовлетворять таким соотношениям:

$$(a_0)_C + (b_0)_C = (10)_C; \qquad (a_i)_C + (b_i)_C + 1 = (10)_C, \quad \text{где } i \in [1; z-1]. \tag{5}$$

Переходя к количественному эквиваленту равенств (5), получим:

$$C = a_0 + b_0 = a_i + b_i + 1, \quad \text{где } i \in [1; z-1] \tag{6}$$

Выполнение равенств (4), (6) является не только необходимым, но и *достаточным* условием выполнения равенства (1). Действительно, если предположить, что равенства (4), (6) выполняются и сложить левые и правые части равенств (4) соответственно, а также учесть равенства (6), то получим равенство (1).

Примечание: доказать необходимость выполнения равенств (6) можно, руководствуясь ещё такими рассуждениями. Подставим в равенство (1) выражения для P и Q из равенств (4); учтём тождество

$$C + \sum_{i=1}^{z-1}(C-1) \cdot C^i = C^z \tag{7}$$

Получим:

$$a_0 + b_0 + \sum_{i=1}^{z-1}(a_i + b_i) \cdot C^i = C + \sum_{i=1}^{z-1}(C-1) \cdot C^i \tag{8}$$

Очевидно, что это равенство выполнимо при

$$C = a_0 + b_0 = a_i + b_i + 1, \qquad \text{где } i \in [1; z-1]. \tag{9}$$

Лемма 2 доказана.

Следствие. *Равенство* $a_0 + b_0 + \sum_{i=1}^{z-1}(a_i + b_i) \cdot C^i = C^z$, *в котором* $a_0, b_0, C, z \in \mathbb{N}$; $a_i, b_i \in \mathbb{N}_0 \leq C - 1$; $z \geq 2$, *является* ***общим*** *для любых степеней ненулевых натуральных взаимно простых чисел* A^x и B^y, *удовлетворяющих равенству* $A^x + B^y = C^z$, *где* $A, B, x, y \in \mathbb{N}$, $x \geq 1$, $y \geq 1$.

Доказательство.

Равенство

$$a_0 + b_0 + \sum_{i=1}^{z-1}(a_i + b_i) \cdot C^i = C^z, \tag{10}$$

состоит из величин $a_0 + \sum_{i=1}^{z-1} a_i \cdot C^i$ и $b_0 + \sum_{i=1}^{z-1} b_i \cdot C^i$, представляющих в соответствии с равенствами (4) *любые* ненулевые натуральные взаимно простые числа P и Q, удовлетворяющие равенству $P + Q = C^z$. Так как числа P и Q - суть *любые* ненулевые натуральные взаимно простые числа, то они могут быть и *любыми степенями* ненулевых натуральных взаимно простых чисел (например: $P = A^x$ и $Q = B^y$, где $A, B, x, y \in \mathbb{N}$; $x \geq 1, y \geq 1$), удовлетворяющих равенству $A^x + B^y = C^z$. Следовательно, равенство (10) является ***общим*** *для любых степеней* ненулевых натуральных взаимно простых чисел A^x и B^y, удовлетворяющих равенству $A^x + B^y = C^z$, где $A, B, x, y \in \mathbb{N}$, $x \geq 1$, $y \geq 1$, что и требовалось доказать.

Равенство (10) в зависимости от степеней ненулевых натуральных взаимно простых чисел может быть выполнимым и невыполнимым.

На двух примерах убедимся в выполнимости равенства (10).

Пример 1. Рассмотрим равенства $5^4 + 6^3 = 29^2$, $2^7 + 17^3 = 71^2$. Запишем эти равенства в 29-ричной ($C = 29$) и в 71-ричной ($C = 71$) позиционных нумерациях соответственно. Получим:

$$(5^4)_{29} + (6^3)_{29} = (100)_{29}; \qquad (2^7)_{71} + (17^3)_{71} = (100)_{71}$$

$(5^4)_{29} = (21 - 16)_{29}$; $(6^3)_{29} = (7 - 13)_{29}$. Обозначим значения разрядов, начиная с младшего: $a_0 = 16$, $a_1 = 21$ и $b_0 = 13$, $b_1 = 7$.

$(2^7)_{71} = (1 - 57)_{71}$; $(17^3)_{71} = (69 - 14)_{71}$. Обозначим значения разрядов, начиная с младшего: $a_0 = 57$, $a_1 = 1$ и $b_0 = 14$, $b_1 = 69$.

Очевидно, что равенство (10), представимое в этих случаях как $a_0 + b_0 + (a_1 + b_1) \cdot C = C^2$, является ***общим*** *для степеней* ненулевых натуральных взаимно простых чисел $A^x = 5^4$, $B^y = 6^3$, $C = 29$ и $A^x = 2^7$, $B^y = 17^3$, $C = 71$, удовлетворяющих равенству $A^x + B^y = C^2$.

Пример 2. Рассмотрим равенства $7^3 + 13^2 = 8^3$, $3^5 + 10^2 = 7^3$. Запишем эти равенства в 8-ричной ($C = 8$) и в 7-ричной ($C = 7$) позиционных нумерациях соответственно. Получим:

$$(7^3)_8 + (13^2)_8 = (1000)_8; \qquad (3^5)_7 + (10^2)_7 = (1000)_7$$

$(7^3)_8 = (5 - 2 - 7)_8$; $(13^2)_8 = (2 - 5 - 1)_8$. Обозначим значения разрядов, начиная с младшего: $a_0 = 7$, $a_1 = 2$, $a_2 = 5$ и $b_0 = 1$, $b_1 = 5$, $b_2 = 2$.

$(3^5)_7 = (4 - 6 - 5)_7$; $(10^2)_7 = (2 - 0 - 2)_7$. Обозначим значения разрядов, начиная с младшего: $a_0 = 5$, $a_1 = 6$, $a_2 = 4$ и $b_0 = 2$, $b_1 = 0$, $b_2 = 2$.

Очевидно, что равенство (10), представимое в этих случаях как $a_0 + b_0 + \sum_{i=1}^{2}(a_i + b_i) \cdot C^i = C^3$, является ***общим*** *для степеней* ненулевых натуральных взаимно простых чисел $A^x = 7^3$, $B^y = 13^2$, $C = 8$ и $A^x = 3^5$, $B^y = 10^2$, $C = 7$, удовлетворяющих равенству $A^x + B^y = C^3$.

Рассмотрим случаи невыполнимости равенства (10).

Теорема 1. *Равенство* $a_0 + b_0 + \sum_{i=1}^{z-1}(a_i + b_i) \cdot C^i = C^z$ ***не выполнимо*** *для любых наборов чисел* $a_0, b_0, C, z \in \mathbb{N}$; $a_i, b_i \in \mathbb{N}_0 \leq C - 1$, *с которыми выполнялись бы равенства* $a_0 + \sum_{i=1}^{z-1} a_i \cdot C^i = A^x$ *и* $b_0 + \sum_{i=1}^{z-1} b_i \cdot C^i = B^y$ *при условиях*: $A, B, C, x, y, z \in \mathbb{N}$; $(A, B, C) = 1$; $x > 2, y > 2, z > 2$.

Доказательство.

От обратного! А именно: предположим выполнимость равенства (10) для некоторых наборов чисел $a_0, b_0, C, z \in \mathbb{N}$; $a_i, b_i \in \mathbb{N}_0 \leq C-1$, с которыми выполнялись бы равенства $a_0 + \sum_{i=1}^{z-1} a_i \cdot C^i = A^x$ и $b_0 + \sum_{i=1}^{z-1} b_i \cdot C^i = B^y$ при условиях: $A, B, C, x, y, z \in \mathbb{N}$; $(A, B, C) = 1$; $x > 2, y > 2, z > 2$. Тогда в соответствии с заданными условиями и следствием леммы 2 равенство (10) является ***общим*** *для любых степеней* ненулевых натуральных взаимно простых чисел A^x и B^y, удовлетворяющих равенству $A^x + B^y = C^z$, где $A, B, x, y \in \mathbb{N}$, $x > 2$, $y > 2$. Из этого следует, что равенство (10) является ***общим*** как для равенства $A^x + B^y = C^z$, в котором $A, B, C, x, y, z \in \mathbb{N}$; $(A, B, C) = 1$; $x > 2, y > 2, z > 2$, так и для *гипотетического* равенства

$$A^z + B^z = C^z, \tag{11}$$

в котором $A, B, C, z \in \mathbb{N}$; $(A, B, C) = 1$; $z > 2$. Следовательно, достаточно доказать невыполнимость равенства (10) при заданных условиях для ***любого*** из равенств $A^x + B^y = C^z$ или $A^z + B^z = C^z$.

Далее доказательство выполняется для равенства $A^z + B^z = C^z$ так, как изложено в работе [5].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Агафонцев В. В. Лемма «ABC» в исследовании диофантовых равенств // Международная конференция «Н.И. Лобачевский и математическое образование в России».: Тезисы докладов. Международная конференция (Казань, 18-22 октября 2017 г.) —Казань, 2017. Т.2, С. 12-18.

2. Агафонцев В. В. Лемма «ABC» и Последняя теорема Ферма // III Международная конференция «Современные проблемы физико-математических наук (СПФМН-2017)».: Тезисы докладов. Международная конференция (Орёл, 23-26 ноября 2017 г.) — Орёл, 2017. С. 113 -119. [Электронный ресурс–https://elibrary.ru/item.asp?id=35260995].

3. Агафонцев В. В. Позиционные нумерации в диофантовых равенствах // IV Всероссийская конференция с международным участием «Современные проблемы физико-математических наук (СПФМН-2018)».: Тезисы докладов, часть I. Всероссийская конференция с международным участием (Орёл, 22-25 ноября 2018 г.) — Орёл, 2018. С. 93-100.

4. Агафонцев В. В. От позиционных систем счисления к диофантовым равенствам // Инновации в науке: научный журнал —№8(84).—Новосибирск, Изд. АНС «СибАК», 2018. С. 12-17. [Электронный ресурс–https://sibac.info/journal/innovation/84].

5. Агафонцев В. В. О возможном подходе к доказательству гипотезы Била //XVI Международная конференция «Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы и приложения», посвящённая 80-летию со дня рождения профессора Мишеля Деза.: Тезисы докладов. Международная конференция (Тула, 13-18 мая 2019 г.) — Тула, 2019. С. 223-227. [Электронный ресурс–https://poivs.tsput.ru/conf/international/XIII/down/Conference2015.pdf]

Секция 11. Арифметическая и алгебраическая геометрии

УДК 512.772

О топологии взаимных расположений M-кубики и M-квинтики[1]

И. М. Борисов (Россия, г. Нижний Новгород)
Высшая школа экономики
e-mail: i.m.borisov@mail.ru

About topology of mutual arrangements of M-cubic and M-quintic

I. M. Borisov (Russia, Nizhny Novgorod)
High School of Economics
e-mail: i.m.borisov@mail.ru

1. Введение

В настоящее время классификация вещественных алгебраических кривых степени 8, распадающихся в произведение двух неособых кривых-сомножителей, только начинается. В данной работе рассматривается построение взаимных расположений кривой степени 3 (кубики) и кривой степени 5 (квинтики) при следующих условиях:

- квинтика и кубика являются M-кривыми;
- квинтика и кубика пересекаются без касаний в максимальном по теореме Безу количестве общих точек в вещественной проективной плоскости $\mathbb{R}P^2$;
- все 15 точек пересечения лежат на нечётной ветви квинтики и нечётной ветки кубики.

Для построения кривых указанного класса используется метод кусочного конструирования О.Я. Виро[1] (подробности см. в [1] – [4]).

2. Метод Виро

2.1. Кусочное конструирование неособых кривых

Рассмотрим на координатной плоскости $\mathbb{R}^2$ треугольник T_m с вершинами $(0, m)$, $(0, 0)$, $(m, 0)$.

Определение 1. *Триангуляция τ_m треугольника T_m называется примитивной триангуляцией, если вершины треугольников триангуляции имеют целочисленные координаты и площадь каждого треугольника равна $\frac{1}{2}$.*

[1]Работа выполнена при поддержке Лаборатории топологических методов в динамике НИУ ВШЭ, грант Министерства науки и высшего образования РФ соглашение № 075-15-2019-1931

[1]В оригинале у О.Я. Виро используется термин patchworking.

Точки с целочисленными координатами будем называть целыми точками.

Зададим функцию $\sigma : T_m \to \{+1, -1\}$, которую определим в целых точках треугольника T_m, $\sigma : (i, j) \mapsto \sigma_{i,j}$, то есть каждой вершине триангуляции поставим в соответствие знак плюс или минус.

Будем считать, что существует выпуклая кусочно-линейная функция $V : T_m \to R$, которая линейна на каждом треугольнике триангуляции τ_m и нелинейна на объединении любых двух треугольников. Триангуляцию, на которой задана такая функция V, будем называть выпуклой.

Определение 2. *Набор (m, τ_m, V, σ), где τ_m – примитивная триангуляция, называется начальными данными.*

Рассмотрим отображение $S_{\varepsilon,\delta} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ такое, что $(x, y) \mapsto (\varepsilon x, \delta y)$, где $\varepsilon, \delta \in \{+1, -1\}$. Обозначим $T_*(m) = T_m \cup S_{-1,1}(T_m) \cup S_{-1,-1}(T_m) \cup S_{1,-1}(T_m)$ квадрат, представляющий собой объединение исходного треугольника и его образов при отображении $S_{\varepsilon,\delta}$. Обозначим через $\tau_*(m)$ триангуляцию квадрата $T_*(m)$, полученную при симметриях $S_{\varepsilon,\delta}$ триангуляции треугольника T_m.

Функцию σ доопределим в квадрате $T_*(m)$ по формуле:

$$\sigma_{i,j} = \begin{cases} (-1)^{|i|}\sigma_{-i,j}, & i < 0, j \geqslant 0, \\ (-1)^{|j|}\sigma_{i,-j}, & i \geqslant 0, j < 0, \\ (-1)^{|i|+|j|}\sigma_{-i,-j}, & i < 0, j < 0. \end{cases}$$

Если треугольник триангуляции $\tau_*(m)$ имеет вершины разных знаков, проведём в нём среднюю линию, разделяющую вершины с разными знаками, и обозначим объединение средних линий треугольников триангуляции квадрата $T_*(m)$ через L.

Обозначим через $T^*(m)$ квадрат $T_*(m)$ с отождествлёнными диаметрально противоположными точками его границы. Множество $T^*(m)$ гомеоморфно вещественной проективной плоскости. Пусть $\overline{L}$ – образ кусочно-линейной кривой L в $T^*(m)$ при описанном отождествлении, (m, τ_m, V, σ) – набор начальных данных.

Определим однопараметрическое семейство многочленов

$$b(x, y, t) = \sum_{\substack{0 \leqslant i+j \leqslant n \\ i \geqslant 0,\ j \geqslant 0}} \sigma_{i,j} t^{V_{i,j}} x^i y^j = b_t(x, y) \tag{1}$$

и семейство однородных многочленов $B_t(x_0, x_1, x_2) = x_0^m b_t(x_1/x_0, x_2/x_0)$.

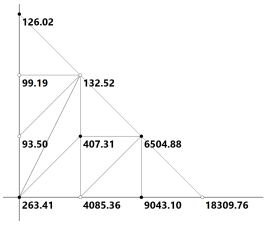
Теорема 1 (Виро [1]). *Пусть (m, τ_m, V, σ) – заданный набор начальных данных, $b_t(x, y)$ и $B_t(x_0, x_1, x_2)$ – неоднородные и однородные многочлены, полученные по этим начальным данным, L и $\overline{L}$ – кусочно-линейные кривые в $T_*(m)$ и $T^*(m)$ соответственно.*

Тогда существует $t_0 > 0$, такое, что для любого $t \in (0, t_0]$ уравнение $b_t(x, y) = 0$ определяет в плоскости $\mathbb{R}^2$ кривую c_t такую, что пара $(\mathbb{R}^2, c_t)$ гомеоморфна паре $(T_*(m), L)$, а уравнение $B_t(x_0, x_1, x_2) = 0$ определяет в вещественной проективной плоскости кривую C_t такую, что пара $(\mathbb{R}P^2, C_t)$ гомеоморфна паре $(T^*(m), \overline{L})$.

2.2. Кусочное конструирование распадающихся кривых

Пусть заданы два набора начальных данных $(m_1, \tau_{m_1}, V^1, \sigma^1)$ и $(m_2, \tau_{m_2}, V^2, \sigma^2)$, положим $m = m_1 + m_2$.

Примитивным смешанным разбиением μ_m треугольника T_m назовём его разбиение на параллелограммы площади 1 и треугольники площади $\frac{1}{2}$ с целыми вершинами. Определим на множестве целых точек треугольника T_m функцию V следующим образом:



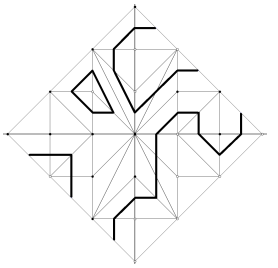
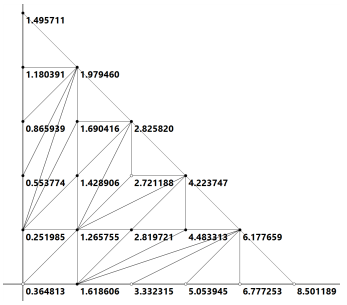


Рис. 1: M-кривая степени 3 и отвечающие ей начальные данные.



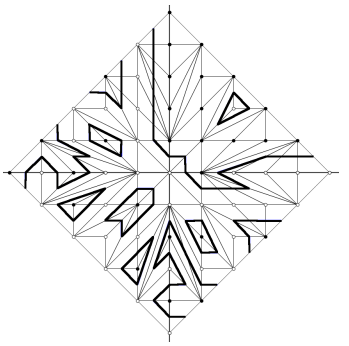


Рис. 2: M-кривая степени 5 и отвечающие ей начальные данные.

$$V_{i,j} = \min_{\substack{i_1+i_2=i \\ j_1+j_2=j}} (V^1_{i_1,j_1} + V^2_{i_2,j_2}). \tag{2}$$

Если есть несколько пар (i_1, j_1), (i_2, j_2), на которых достигается минимум, то нужно изменить значения функции V^1 или V^2 в начальных данных так, чтобы минимум достигался только на одной паре точек. Теперь можем определить значение функции σ в вершинах разбиения так:

$$\sigma_{i,j} = \sigma^1_{i_1,j_1} \cdot \sigma^2_{i_2,j_2}.$$

Также необходимо определить на треугольнике T_m выпуклую кусочно-линейную функцию V, принимающую в целых точках из T_m значения, определённые формулой (2). Для этого будем использовать алгоритм из [2].

Аналогично случаю построения неособой кривой с помощью симметрий получим разбиение $\mu_*(m)$ квадрата $T_*(m)$ и распространим на этот квадрат функцию σ.

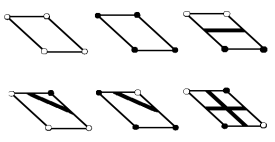


Рис. 3: Правила построения отрезков в параллелограммах.

В треугольниках разбиения, как и ранее, проведём средние линии, отделяя вершины разных знаков. В параллелограммах отделим вершины с разными знаками по правилам, указанным на рис. 3.

Через L и $\overline{L}$ обозначим объединение отрезков, проведённых в треугольниках и параллелограммах, в квадрате $T_*(m)$ и множестве $T^*(m)$ соответственно.

Теорема 2 (Штурмфельс [5]). *Пусть* $(m_1, \tau_{m_1}, V^1, \sigma^1)$ *и* $(m_2, \tau_{m_2}, V^2, \sigma^2)$ *– наборы начальных данных, которые задают неоднородные и однородные многочлены* b^1_t, B^1_t *и* b^2_t, B^2_t, $m = m_1 + m_2$, L *и* $\overline{L}$ *– кусочно-линейные кривые в* $T_*(m)$ *и* $T^*(m)$ *соответственно, полученные в процессе кусочного конструирования, описанного выше.*

Тогда существует $t_0 > 0$ *такое, что для любого* $t \in (0, t_0]$

1. *Уравнение* $b_t = b_t^1 \cdot b_t^2 = 0$ *определяет в плоскости* $\mathbb{R}^2$ *распадающуюся кривую* $c_m(b_t) = c_{m_1}(b_t^1) \cdot c_{m_2}(b_t^2)$ *такую, что пара* $(\mathbb{R}^2, c_m(b_t))$ *гомеоморфна паре* $(T_*(m), L)$;

2. *Уравнение* $B_t = B_t^1 \cdot B_t^2 = 0$ *определяет в вещественной проективной плоскости распадающуюся кривую* $C_m(B_t) = C_{m_1}(B_t^1) \cdot C_{m_2}(B_t^2)$ *такую, что пара* $(\mathbb{R}P^2, C_m(B_t))$ *гомеоморфна паре* $(T^*(m), \overline{L})$.

Для автоматизации и ускорения процесса кусочного конструирования была написана компьютерная программа, которая позволяет по начальным данным получить примитивное смешанное разбиение и рисунок кусочно-линейной кривой, которая ему соответствует.

С помощью этой программы получена, например, распадающаяся кривая степени 8 на рис.4. Начальные данные для кривых-сомножителей изображены на рис. 1 и рис. 2.

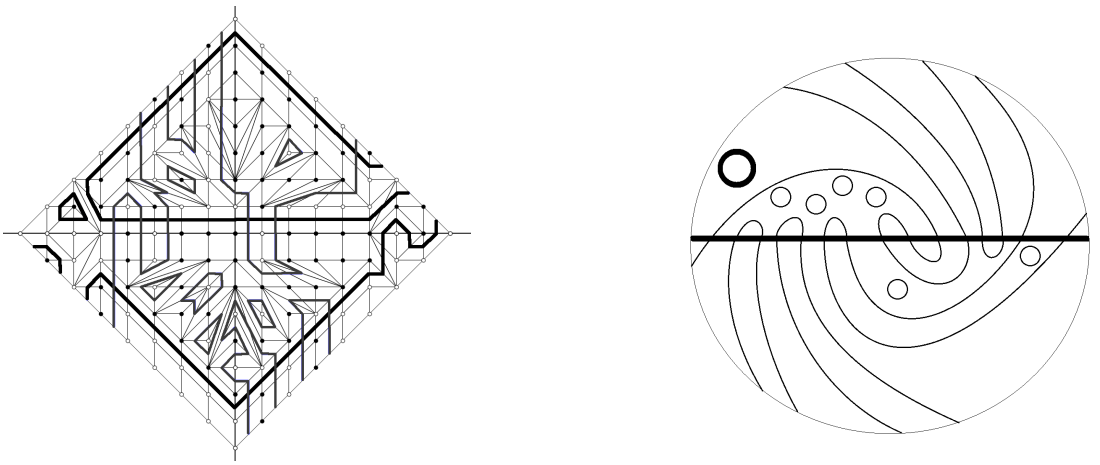


Рис. 4: Результат кусочного конструирования распадающейся кривой степени 8 и гладкая модель построенной распадающейся кривой.

Таким способом были получены 29 распадающихся кривые степени 8.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Viro O. Ya. Patchworking real algebraic varieties // U.U.D.M. Report, Uppsala Univ., 1994, V.42.

2. Гущин М.А., Коробейников А.Н., Полотовский Г.М. Построение взаимных расположений кубики и квартики методом кусочного конструирования // Записки научных семинаров ПОМИ, 2000, Т. 267, С. 119 - 132.

3. Гущин М.А. Построения некоторых расположений коники и M-квинтики с одной точкой на бесконечности // Вестник ННГУ, сер. мат., 2004, №1(2). С. 43 - 52.

4. Виро О.Я. Склеивание алгебраических гиперповерхностей и построения кривых // Тезисы Ленинградской Международной Топологической Конференции, Ленинград: 1982. С. 149-197.

5. Sturmfels B. Viro's theorem for complete intersection // Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, 1994, V. 21. P. 377 - 386.

УДК 511.32

О взаимных расположениях двух неособых кривых степени 4

Н. Д. Пучкова (Россия, г. Нижний Новгород)
Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского
e-mail: nataha1910@mail.ru

On the dispositions of two non-singular curves of degree 4

N. D. Puchkova (Russia, Nizhny Novgorod)
National Research Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod
e-mail: nataha1910@mail.ru

В работе рассматривается задача топологической классификации кривых степени 8, распадающихся в произведение двух кривых степени 4.

1. Постановка задачи

Задача топологической классификации неособых плоских вещественных алгебраических кривых сформулирована в первой части 16-й проблемы Гильберта. На данный момент известна классификация неособых кривых до седьмой степени включительно.

В данной работе исследуется взаимное расположение в вещественной проективной плоскости двух кривых степени 4 при некоторых условиях максимальности и общего положения. Именно, предполагается, что:
1. Эти две кривые являются M-кривыми.
2. Все точки пересечения этих кривых лежат на одном овале одной кривой и на одном овале другой кривой.
3. Точек пересечения максимальное число, т. е. $4 \cdot 4 = 16$.
4. Точки пересечения попарно различны.

2. Тип пересечения ветвей «змея, обвивающаяся вокруг овала»

Введем тип пересечения ветвей, который назовём «змея, обвивающаяся вокруг овала» (рассмотрением пересечений этого типа ограничимся ввиду большого числа всех подлежащих исследованию взаимных расположений пересекающихся ветвей).

Пусть имеем овал и пересекающуюся с ним в 8 точках незамкнутую дугу без самопересечений, которую будем называть образующей дугой. Рассмотрим границу ε-окрестности этой дуги с таким малым ε, что эта граница пересекает овал в 16 попарно различных точках. Эту граница, которую будем называть "змеёй", будет овалом второй кривой, а такое взаимное расположение двух овалов – пересечением ветвей типа «змея, обвивающаяся вокруг овала».

В введённом типе пересечения ветвей "змею" будем считать овалом первой кривой (кривой с номером 1), а овал, вокруг которого она обвивается, – овалом второй кривой (кривой с номером 2). Оставшиеся три овала кривой номер 1 и три овала кривой номер 2, на которых нет точек пересечения, называются свободными. Так как рассматриваем M–кривые четвёртой степени, то овалы с одним номером лежат вне друг друга.

Занумеруем на овале кривой с номером 2 подряд 8 точек – точек пересечения овала со "змеёй". Тогда можно рассматривать перестановки 8-го порядка и тем самым перебирать все возможные взаимные расположения рассматриваемого типа.

Будем рассматривать только такие расположения, что
1) объединение пересекающихся овалов лежит в конечной части аффинной плоскости (т.е. не пересекает граничную окружность модели проективной плоскости);
2) дуга, соединяющая первые две точки пересечения, соответствующие первым двум числам из перестановки, лежит внутри овала с номером 2;
3) хотя бы один конец образующей дуги лежит в неориентируемой компоненте дополнения к модели кривой.

Нетрудно заметить, что для каждого расположения, отвечающего перестановке со вторым элементом 2, найдётся симметричное расположение, которому отвечает перестановка со вторым элементом 8. Применяя аналогичные рассуждения, приходим к выводу, что достаточно рассмотреть только перестановки со вторым элементом, значение которого $\leqslant 5$, см. рис. 1.

Если двум перестановкам соответствуют гомеоморфные расположения кривых, то оставим из них ту, которая встречается раньше в лексикографическом порядке.

Сначала с помощью устранения точек пересечения докажем, что расположения, отвечающие некоторым перестановкам, не могут быть реализованы кривой степени 8: если при некотором устранении точек пересечения (такие устранения независимы в силу теоремы Брюзотти – см., например, [1]) получаем неособую кривую с таким расположением ветвей, которое не может быть реализовано неособой кривой степени 8 в силу известных фактов о топологии таких кривых, то и исходное расположение нереализуемо кривой степени 8. Например, кривая рис. 3, получаемая устранением точек пересечения на рис.2, имеет гнездо веса 3 и гнездо веса 2, поэтому расположение рис. 2 не может быть реализовано кривой степени 8.

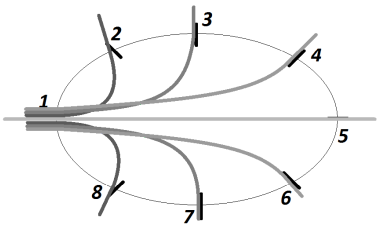


Рис. 1

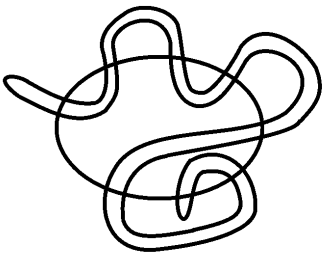


Рис. 2

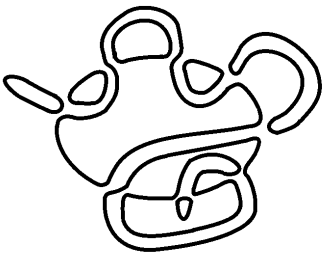


Рис. 3

После применения описанного приёма для дальнейшего исследования остаётся следующая 21 перестановка:

1. $(1,2,3,4,5,6,7,8)$
2. $(1,2,3,4,5,6,8,7)$
3. $(1,2,3,4,5,8,7,6)$
4. $(1,2,3,4,6,7,8,5)$
5. $(1,2,3,4,7,6,5,8)$
6. $(1,2,3,4,8,7,6,5)$
7. $(1,2,3,6,5,4,7,8)$
8. $(1,2,3,6,5,4,8,7)$
9. $(1,2,3,6,7,8,5,4)$
10. $(1,2,3,8,7,4,5,6)$
11. $(1,2,4,5,6,7,8,3)$
12. $(1,2,5,6,7,4,3,8)$
13. $(1,2,6,5,4,7,8,3)$
14. $(1,2,6,7,8,5,4,3)$
15. $(1,2,7,6,5,4,3,8)$
16. $(1,2,8,7,6,5,4,3)$
17. $(1,4,3,2,6,7,8,5)$
18. $(1,4,3,2,7,6,5,8)$
19. $(1,4,3,2,8,7,6,5)$
20. $(1,4,5,6,7,8,2,3)$
21. $(1,4,5,8,7,6,2,3)$

Для каждой из этих перестановок перечисляются допустимые известными фактами о топологии неособых кривых степени 8 распределения шести свободных овалов между компонентами дополнения к пересекающимся овалам. Для каждой перестановки имеются около 100 таких попарно различных допустимых распределений.

Затем к расположениям из полученного списка топологических моделей взаимных расположений двух кривых степени 4 применялся метод Оревкова [2], основанный на сопоставлении изучаемому расположению косы. Для получения этих кос надо исследовать расположе-

ние изучаемой кривой относительно пучка прямых, удовлетворяющего некоторым условиям максимальности пересечения с кривой. Для того, чтобы изучаемое нами расположение двух кривых было реализуемо кривой степени 8, должны выполнятся некоторые необходимые условия на полученные косы из 8 нитей. Оревков предложил проверять выполнение неравенства Мурасуги-Тристрама (см. [2] стр. 796) и условия Фокса-Милнора (см. [2] стр. 784-785). Проверка этих условий проводилась мною с помощью программы М. Гущина для проверки выполнения неравенства Мурасуги-Тристрама и программы И. Борисова для проверки выполнения условия Фокса-Милнора.

Для расположений, отвечающих перестановкам 1, 3, 9, 10 и 14, найти пучки прямых с нужными свойствами не удалось. Для остальных перестановок рассмотренными методами не удалось запретить 4 расположения для перестановки с номером 2 (см. рис. 4 – 7), 4 расположения для перестановки с номером 15 (см. рис. 8 – 11) и ещё 4 расположений для перестановок под номером 5 (см. рис. 12), 7 (см. рис. 13), 12 (см. рис. 14) и 18 (см. рис. 15); остальные расположения удалось запретить.

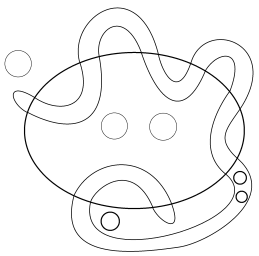


Рис. 4

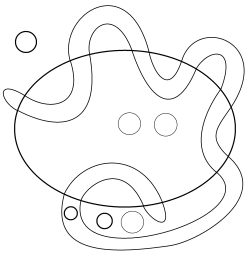


Рис. 5

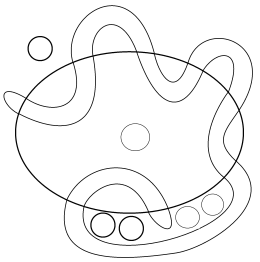


Рис. 6

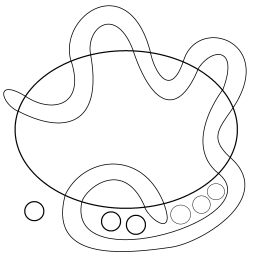


Рис. 7

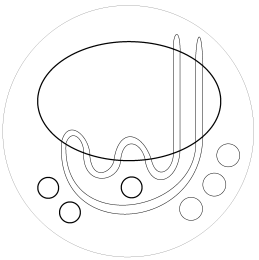


Рис. 8

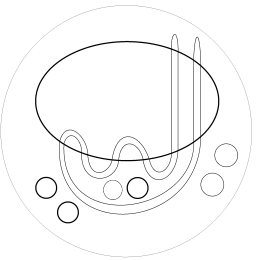


Рис. 9

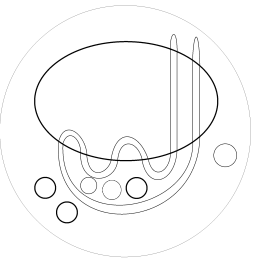


Рис. 10

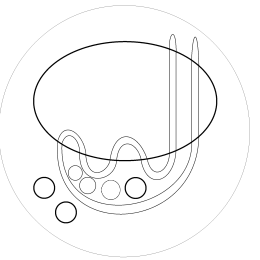


Рис. 11

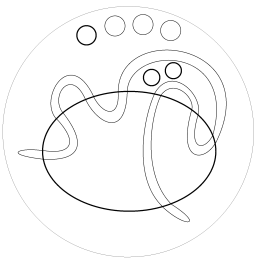


Рис. 12

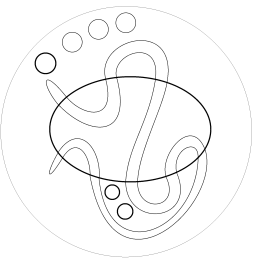


Рис. 13

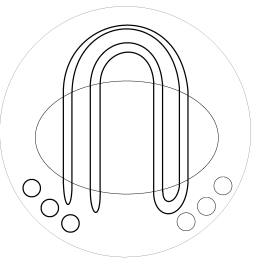


Рис. 14

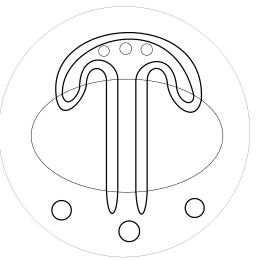


Рис. 15

3. Построения

Из незапрещённых расположений 10 удалось реализовать кривыми степени 8 с помощью удвоения кривой степени 2 в расположениях кривых степени 2 и степени 4, построенных Д. Гильбертом и Г.М. Полотовским (см. [3]). Покажем пример такой реализации. Расположение рис. 16, где кривая степени 4 нарисована более жирной линией, построено Гильбертом. Проведем 2 прямые l_1 и l_2, см. рис. 17. Рассмотрим кривую степени 2, которая определяется уравнением $\widetilde{C_2} = C_2 + \varepsilon l_1 l_2 = 0$. Для достаточно малого ε она будет лежать близко к исходной кривой C_2 и пересекать ее в точках r_1, r_2, r_3, r_4 (видно из уравнения). Получим расположение кривых как на рис. 18.

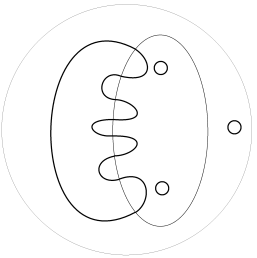


Рис. 16

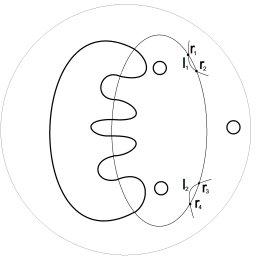


Рис. 17

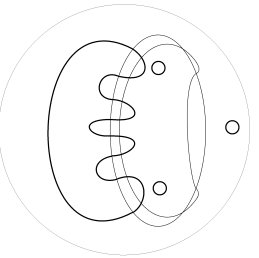


Рис. 18

Теперь с помощью малых изменений коэффициентов мы можем добиться возмущения простых двойных точек кривой $C_2 \cdot \tilde{C}_2 = 0$, как на рис. 19. Уравнение возмущённой кривой можно записать следующим образом: $\widetilde{C_4} = C_2 \cdot \widetilde{C_2} + \varepsilon_1 D_4 = 0$ для достаточно малого ε_1, где D_4 – некоторая кривая степени 4 без действительных точек.

Итак, мы получили взаимное расположение двух кривых степени 4. Если мы изобразим овал, выделенный более жирно, выпуклым, то получим рис. 20. Это пересечение двух кривых степени 4. Из рисунка видно, что оно отвечает перестановке с номером 1: (1,2,3,4,5,6,7,8).

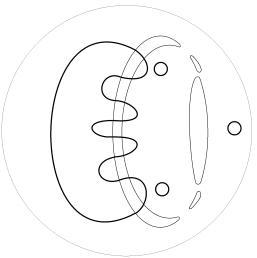


Рис. 19

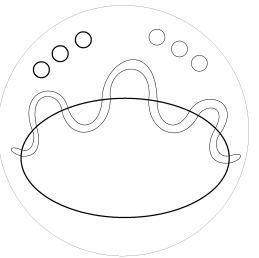


Рис. 20

Аналогично построены незапрещенные расположения для рис. 12, рис. 13, рис. 14, рис. 8 и рис. 15. Вопрос о реализуемости семи расположений рис. 4 – 7, рис. 8 – 11 остаётся открытым.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гудков Д. А. Топология вещественных проективных алгебраических многообразий // УМН. 1974. Том 29. №4(178). С. 3–79.

2. Orevkov S. Yu. Link theory and oval arrangements of real algebraic curves // Topology. 1999. Том 38. Vol.4. P. 779—810.

3. Полотовский Г. М. Каталог М-распадающихся кривых 6-го порядка // Докл. АН СССР. 1977. Том 236. Вып. 3. С.548–551.

Секция 12. Многомасштабное математическое моделирование в физике

УДК 511.32

Статистическая модель микропластичности в пористых металлических композитах

И. К. Архипов (Россия, г. Тула)
Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого
e-mail: iarh@list.ru
В. И. Абрамова (Россия, г. Тула)
Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого
e-mail: abramova_vi@mail.ru
А. Е. Гвоздев (Россия, г. Тула)
Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого
e-mail: gwozdew.alexandr2013@yandex.ru

Statistical model of microplasticity in porous metal composites

I. K. Arkhipov (Russia, Tula)
Tula State Lev Tolstoy pedagogical University
e-mail: iarh@list.ru
V. I. Abramova (Russia, Tula)
Tula State Lev Tolstoy pedagogical University
e-mail: abramova_vi@mail.ru
A. E. Gvozdev (Russia, Tula)
Tula State Lev Tolstoy pedagogical University
e-mail: gwozdew.alexandr2013@yandex.ru

Основной текст тезисов.

На основе статистической модели функционалов, заданных на случайных процессах и полях построена статистическая модель для определения концентрации микропластических зон, возникающих в окрестностях пор в металлических пористых композитах. Эта концентрация определяется из вероятности превышения интенсивности местных напряжений около поры над пределом текучести материала матрицы. Предполагается стационарность и нормальность этого случайного процесса. Таким образом, пористый композит содержит три компонента: поры, микропластические зоны и монолитную матрицу. В результате получены уравнения эффективной кривой нагружения, разгрузки, вычислена зависимость остаточной деформации от пористости. Установлен факт разносопротивляемости композита при растяжении и сжатии, а также влияние этой разносопротивляемости на концентрацию микропластических зон с учетом микропластичности определен эффективный предел текучести всего композита.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Архипов И. К., Абрамова В. И., Губанов О. М., Гвоздев А. Е., Кутепов С. Н. Эффективные характеристики вязкоупругости металлических полимерных композитов // Технология металлов. 2020. № 10. С. 14-18.

2. Архипов И. К., Абрамова В. И., Гвоздев А. Е., Кузовлева О. В. Математическое моделирование свойств упругости в механике композиционных материалов // Чебышевский сборник. 2020. Том 21. Впуск 3. С. 262-271.

3. Архипов И. К., Абрамова В. И., Гвоздев А. Е., Колмаков А. Г., Панин А. В. Моделирование микропластичности пористых металлических материалов // Деформация и разрушение материалов. 2021. № 1. С. 29-33.

4. Архипов И. К., Абрамова В. И., Гвоздев А. Е., Кузовлева О. В. Математический вариационный метод определения эффективного предела текучести двухкомпонентных композиционных материалов // Чебышевский сборник. 2021. Т. 22. Вып. 1. С. 370-377.

УДК 37.01

О компьютерном моделировании автоколебательных процессов в системах с одной степенью свободы

Ю. В. Бобылев (Россия, г. Тула)
Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого
e-mail: bobylev.yu@mail.ru
А. И. Грибков (Россия, г. Тула)
Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого
e-mail: ks7a@yandex.ru
Р. В. Романов (Россия, г. Тула)
Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого
e-mail: rom_rom_vas@mail.ru

On computer simulations of auto-storage processes in systems with one degree of freedom

Yu. V. Bobylev (Russia, г. Tula)
Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University
e-mail: bobylev.yu@mail.ru
A. I. Gribkov (Russia, г. Tula)
Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University
e-mail: ks7a@yandex.ru
R. V. Romanov (Russia, г. Tula)
Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University
e-mail: rom_rom_vas@mail.ru

Автоколебания отличаются от остальных колебательных процессов тем, что для поддержания стационарного режима в таких системах не требуется (в отличие от вынужденных колебаний) периодических воздействий извне [1]. Устройства и системы, в которых возникают такие колебания, называются автоколебательными системами. Поскольку во всякой реальной системе при стационарном колебательном процессе энергия переходит в тепло или передается другим телам, то каждая автоколебательная система должна иметь источник энергии, который покрывал бы ее расход. Обычно источник энергии устроен так, что он дает постоянное во времени воздействие. Простейшую автоколебательную систему можно представить себе состоящей из двух основных элементов: основной колебательной системы, которая в изолированном

виде способна совершать затухающие собственные колебания, и звено обратной связи, связывающее основную колебательную систему с источником постоянной энергии [2]. При этом колебания в основной системе так влияют на источник энергии, что он дает переменную силу, действующую через обратную связь на основную систему. Подобная организация автоколебательной системы обуславливает то, что любая такая система принципиально должна быть нелинейной, вследствие чего математически автоколебательные процессы описываются нелинейными дифференциальными уравнениями, что, в свою очередь, существенно усложняет их строгий теоретический анализ.

Особенно сильно проявляются эти трудности в педвузах, где изучение нелинейных дифференциальных уравнений в рамках читаемых курсов высшей математики практически не предусмотрено. Вместе с тем с автоколебательными системами приходится весьма часто встречаться в жизни, например, типичными примерами автоколебательных процессов и автоколебательных систем являются часовые механизмы, колебания скрипичной струны при равномерном движении смычка, генераторы электрических, световых, звуковых колебаний и т.д. Такое широкое распространение автоколебаний в природе и технике обусловливает потребность более глубокого знакомства с ними студентов педвузов - будущих учителей физики, что было бы им весьма полезным, позволило бы повысить их профессиональный уровень.

Выходом из сложившейся ситуации является изучение автоколебательных процессов в соответствующем спецкурсе, в нашем вузе эта дисциплина называется «Компьютерный эксперимент в физике». В рамках лабораторных работ, выполняемом в этом спецкурсе, проводится численное интегрирование различных нелинейных дифференциальных уравнений, описывающих автоколебательные процессы, построение графиков их решений, (как временные зависимости, так и изображение процессов на фазовых плоскостях), определение характеристик установившихся автоколебаний, и их сравнение с результатами, получаемыми с помощью приближенных методов решения нелинейных дифференциальных уравнений. Некоторые примеры подобного компьютерного анализа автоколебательных процессов мы и рассмотрим в настоящей работе.

В качестве первого примера рассмотрим следующую задачу из [3]:

Методом малого параметра определить амплитуду A и период автоколебаний T, возникающих в системе, движение которой определяется уравнением

$$\ddot{x} + k^2 x = \mu\{(\alpha^2 - x^2)\dot{x} - \gamma x^3\} \tag{1}$$

Это известное уравнение ван дер Поля–Дуффинга [4], являющееся обобщением уравнения ван дер Поля путём учёта дополнительной кубической нелинейности. С физической точки зрения это отвечает учету эффекта неизохронности малых колебаний, то есть зависимости их периода от амплитуды. Не останавливаясь на аналитическом решении уравнения (1), приведём сразу ответ

$$A = 2\alpha, \quad T = \frac{2\pi}{k}\left(1 - \frac{3\mu\gamma\alpha^2}{2k^2}\right). \tag{2}$$

Для удобства сравнения аналитических и численных результатов выберем следующие значения параметров:

$$\mu = 0,1, \quad k = 1, \quad \alpha = 1, \quad \gamma = 1, \tag{3}$$

и проинтегрируем уравнение (1) при начальных условиях

$$x_{01} = 0,5; \quad \dot{x}_{01} = 0; \quad x_{02} = 4; \quad \dot{x}_{02} = 0 \tag{4}$$

Результаты расчётов представлены на Рис.1, где приведены графики зависимости от времени амплитуды колебаний $x = x(t)$ для двух начальных значений (4) (Рис.1а и Рис.1б). На Рис.1в эти два случая иллюстрируются на фазовой плоскости переменных $(x, \dot{x})$

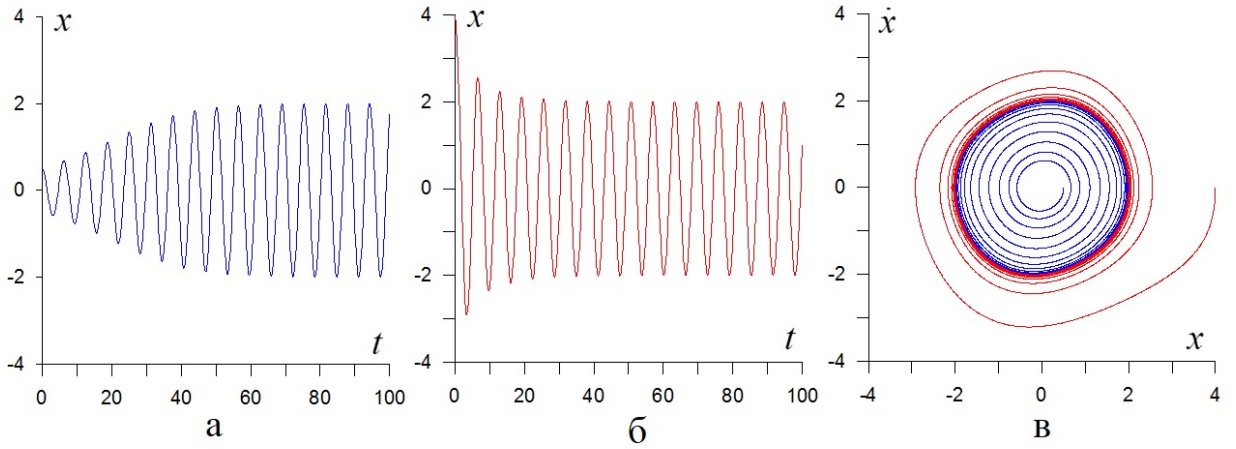


Рис. 1: Результаты численного интегрирования уравнения (1): временная динамика двух решений $x = x(t)$ для различных начальных условий (4) (Рис.1а и Рис.1б) и их фазовые траектории на плоскости переменных $(x, \dot{x})$ (Рис.1в)

Из этоого рисунка хорошо видно, что амплитуда установившихся автоколебаний равна $A = 2$, что следует и из аналитических решений (2), с учётом (3). Кроме того, период колебаний, рассчитанный по формуле (2) равен $T = 5,34$, , что достаточно хорошо подтверждается сравнением с графиками Рис.1, а именно, интервал времени между двумя последними минимумами на Рис.1а равен 77,893-72,363=5,53.

Данный пример иллюстрирует, что при решении подобных задач с последующей проверкой аналитических результатов численным моделированием, студент не только знакомится с приближенными методами решения нелинейных дифференциальных уравнений, но и наглядно убеждается в высокой эффективности этих методов (в определенной области параметров рассматриваемой задачи).

В качестве следующего примера рассмотрим ещё одно обобщение уравнения ван дер Поля. А именно, во многих практических приложениях используются уравнения ван дер Поля, содержащие различного вида нелинейности до кубической включительно. Вместе с тем возможны более сложные ситуации, когда в уравнение входят полиномы пятой степени, как относительно координат, так и относительно скоростей. В свою очередь, это делает возможным существование нескольких предельных циклов. Анализ таких уравнений более сложен и требует значительного времени, поэтому нами на занятиях анализируется только их численное решение. Для примера рассмотрим следующее уравнение:

$$\ddot{x} + x = \mu\{-1 + \alpha(1 + \beta_1 x + \beta_2 x^2 + \beta_3 x^3 - x^4)\}\dot{x}, \tag{5}$$

получаемое в теории лампового генератора при аппроксимации характеристики лампы полиномом пятой степени [4]. Результаты интегрирования (5) при значениях параметров

$$\mu = 0,1, \quad \alpha = 0,81 \quad \beta_1 = 1, \quad \beta_2 = 2, \quad \beta_3 = 1, \tag{6}$$

и начальных условиях

$$x_{01} = 0,3; \quad \dot{x}_{01} = 0; \quad x_{02} = 0,9; \quad \dot{x}_{02} = 0; \quad x_{03} = 2,5; \quad \dot{x}_{03} = 0 \tag{7}$$

представлены на Рис.2 и Рис.3

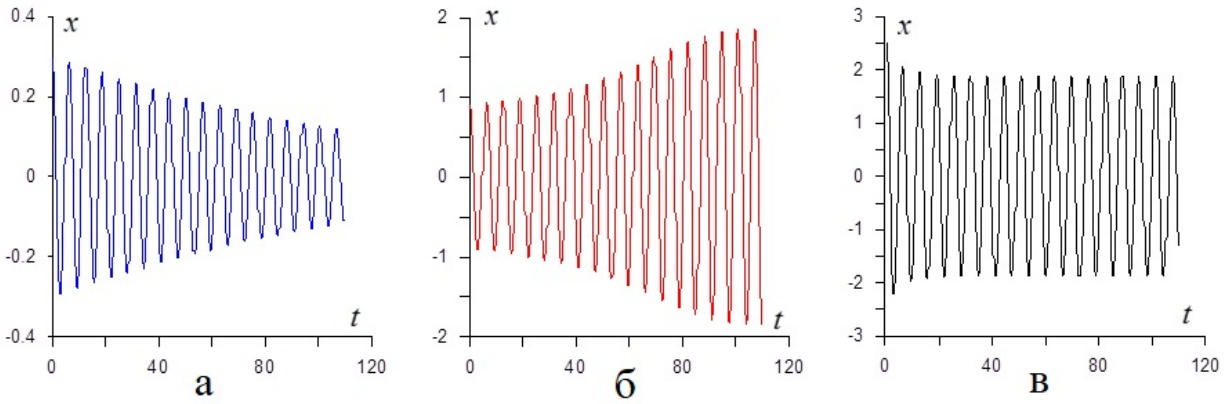


Рис. 2: Результаты численного интегрирования уравнения (5): временная динамика трёх решений $x = x(t)$ для различных начальных условий (7)

Параметры (6) были подобраны таким образом, чтобы система имела устойчивый фокус в начале координат и два предельных цикла [4]. Из этих рисунков видно, что внешний предельный цикл является устойчивым – к нему приближаются две фазовые траектории – красная изнутри, начинаясь в точке $(x_{02}, \dot{x}_{02})$ на фазовой плоскости Рис.3 и черная снаружи. начинаясь на Рис.3 в точке $(x_{03}, \dot{x}_{03})$. Временная динамика этих фазовых траекторий приведена на Рис.2б и Рис.2в, соответственно. Второй предельный цикл - внутренний неустойчив, он располагается между началами красной и синей фазовых траекторий – внутреннее белое кольцо на Рис.3, и от него данные траектории удаляются: красная - к внешнему предельному циклу, а синяя - к началу координат. При этом приближение синей фазовой траектории, исходящей из точки $(x_{01}, \dot{x}_{01})$ к устойчивому фокусу, расположенному в начале координат, достаточно медленное и происходит в гораздо меньшем масштабе, в сравнении с размерами внешнего предельного цикла, поэтому на фазовой плоскости Рис.3 все эти траектории сливаются в одно сплошное синее кольцо, охватывающее начало координат. Тем не менее, о том, что из себя представляет данная фазовая траектория можно судить по Рис.2а, на котором представлена её временная динамика.

Заметим, что в силу указанной выше разно масштабности областей локализации фазовых кривых, получить более эффектное изображение эволюции рассматриваемой системы на фазовой плоскости с помощью более удачного выбора параметров и начальных условий, вообще говоря, достаточно проблематично.

В заключение отметим, что описанное в работе сочетание наглядных результатов компьютерного мо-делирования, приближённых аналитических методов и соответствующего обсуждения физических особенностей автоколебаний, оказывается достаточно эффективным для более успешного изучения данных колебательных процессов студентами физико - математических специальностей педагогического вуза.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Стрелков С. П. Введение в теорию колебаний. — М.: Наука, 1964. 440с.

2. Мигулин В. В., Медведев В. И, Мустель Е. Р., Парыгин В. Н Основы теории колебаний. — М.: Наука, 1978. 392с.

3. Мещерский В. И. Сборник задач по теоретической механике. — М.: Наука, 1978. 480с.

4. Андронов А. А., Витт А. А. Хайкин С. Э. Теория колебаний. — М.: Физматгиз, 1959. 916с.

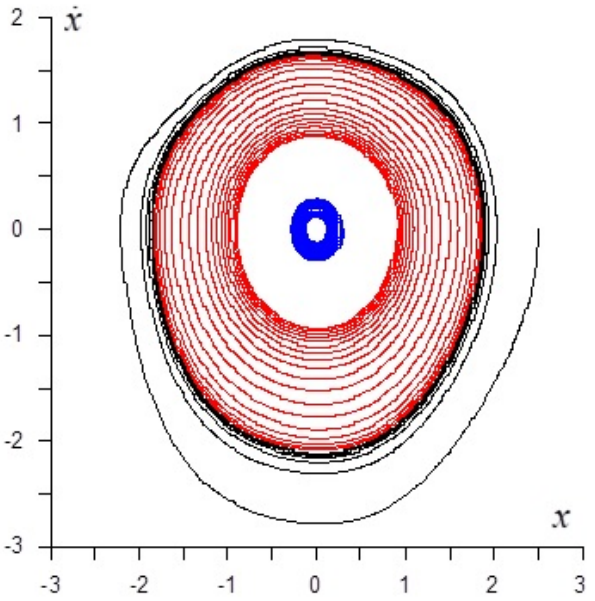


Рис. 3: Фазовые траектории трёх решений уравнения (1) для различных начальных условий (7)

УДК 537.87

Моделирование процесса возбуждения электромагнитных колебаний в открытом вакуумном резонаторе

Ю. В. Бобылев (Россия, г. Тула)
Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого
e-mail: bobylev.yu@mail.ru
В. А. Панин (Россия, г. Тула)
Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого
e-mail: panin@tspu.tula.ru

Simulation of electromagnetic oscillation in an open vacuum resonator

Yu. V. Bobylev (Russia, г. Tula)
Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University
e-mail:bobylev.yu@mail.ru
V. A. Panin (Russia, г. Tula)
Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University
e-mail:panin@tspu.tula.ru

Введение

Основной трудностью в задачах высокочастотной электродинамики в случае возбуждения колебаний в открытом резонаторе нестационарным внешним источником, является правильная постановка граничных условий излучения на открытом торце данного резонатора. Заметим, что в случае стационарного гармонического источника подобные задачи хорошо изучены и подробно описаны в литературе [1]. Существенное усложнение при замене стационарного гармонического источника на нестационарный, обусловлено тем, что известные условия излучения [1, 2] разрабатывались для решения уравнений, описывающих установившийся колебательный процесс, и поэтому непосредственно в качестве граничных условий излучения в нестационарных задачах их использовать не представляется возможным. Одним из возможных путей решения данной проблемы является постановка на открытом торце резонатора так называемых парциальных граничных условий. Впервые эти условия были сформулированы, а в дальнейшем обобщены в работах [3, 4]. Достоинством данных условий является то, что они являются весьма общими и позволяют рассматривать произвольные нестационарные электромагнитные явления. Однако практическая реализация парциальных условий излучения при численных расчётах сталкивается со значительными математическими сложностями, поэтому апробация этих условий проводится на относительно простых модельных задачах. Так, в работе [5] рассматривалась задача о возбуждении электромагнитных колебаний открытого вакуумного резонатора внешним источником, включающимся в момент времени и моделируемым бесконечно-тонким гармонически осциллирующим заряженным плоским слоем, расположенным в начале координат. В настоящей работе для тестирования парциальных условий излучения мы будем использовать более общую модель внешнего источника - элементарный диполь, расположенный в начале координат, соответствующий бесконечно-тонкому кольцу определённого радиуса.

Постановка задачи и результаты численного моделирования.

Рассмотрим систему [5], основной частью которой является резонатор - металлический цилиндрический волновод радиуса R и длиной L с идеально проводящими стенками. Область $z \geqslant L$ моделирует излучающий рупор, состыкованныйс резонатором, который представляет собой продолжение того же волновода. При этом сечение волновода $z = L$ является открытой границей, через которую осуществляется вывод излучения и на которой ставятся парциальные условия излучения. Не останавливаясь далее на подробностях вывода уравнений, описывающих динамику процессов, происходящих в рассматриваемой системе (см. [5]), отметим лишь, что в отличие от [5], плотность внешнего источника $j_{zd}(t, z, r)$ будет теперь определяться выражением

$$j_{zd}(t, z, r) = j_{d0}\delta(r - r_d)\delta(z)\vartheta(t)sin(\omega t). \tag{1}$$

Здесь $\vartheta(t)$ - ступенчатая функция Хевисайда, δ - функция Дирака. Ясно, что данная формула описывает синусоидальный источник, включаемый в момент времени $t = 0$, плотность тока которого соответствует бесконечно-тонкому кольцу радиуса r_d, расположенному в начале координат.

Дальнейшее решение данной задачи сводится к интегрированию уравнений Максвелла, описывающей аксиально-симметричные возбуждения волн E – типа, записанных для коэффициентов $E_z^{(n)}$, $E_r^{(n)}$, $B_\varphi^{(n)}$ разложения компонент электромагнитного поля по собственным функциям цилиндрического волновода (функциям Бесселя нулевого и первого порядка). Данные уравнения дополняются соответствующими начальными и граничными условиями [5].

Результатами интегрирования является вычисление всех компонент электромагнитного поля и расчёт потока энергии на выходе системы, а также спектрального состава поля излучения определяемого для каждой моды по формулам

$$E_r^{(n)}(\Omega) = \int_0^\tau E_r^{(n)}(\tau', L) exp(i\Omega\tau')d\tau', (n = 1, 2....), \quad (2)$$

являющимся, фактически, образами Фурье функций $E_r^{(n)}(\tau, L)$. Здесь для удобства введена новая переменная $\tau = ct$, имеющая такую же, как и координата z размерность длины. Для последующего анализа результатов численного интегрирования, приведём ещё получаемое из исходной системы уравнений Максвелла, дисперсионное уравнение $k_{\perp n}^2 + k_z^2 - \widetilde{\omega}^2 = 0$, в котором $k_{\perp n} = \mu_{0n}/R(n = 1, 2, ...)$ где μ_{0n} - корни уравнения $J_0(x) = 0$, k_z - продольное волновое число, а $\widetilde{\omega} = \omega/c$ - частота, имеющая размерность волнового числа. Из приведённого дисперсионного уравнения видно, что частота отсечки $\widetilde{\omega}_{0n}$ для n-ой поперечной моды в наших обозначениях равна $\widetilde{\omega}_{0n} = k_{\perp n}$, а продольное волновое число

$$k_z = \sqrt{\widetilde{\omega}^2 - k_{\perp n}^2} \quad (3)$$

Для определённости во всех дальнейших расчётах примем длину резонатора $L = 10$см, а его радиус $R = 1.8$см.

На Рис.1 изображены спектральные характеристики $| E_r^{(n)}(\Omega) |$ первых четырёх поперечных мод (n=1;...;4). Из этого рисунка видно, что на частоте внешнего источника $\widetilde{\omega}$ =5 возбуждены первые три поперечные моды, причём наиболее интенсивно возбуждается вторая мода, а третья, условие существования которой в виде бегущей волны находится “на грани”, имеет уже частоту, несколько отличную от частоты вынуждающей силы.

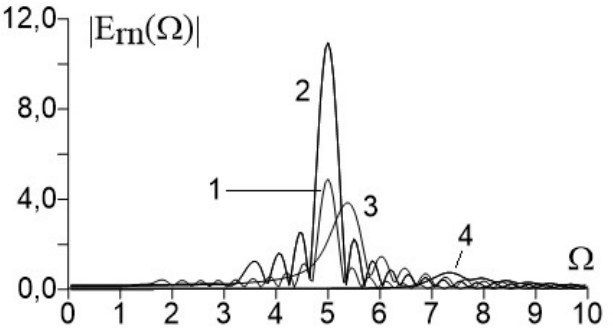


Рис. 1: Спектральные характеристики $| E_r^{(n)}(\Omega) |$ первых четырёх поперечных мод (n=1;...;4) поля излучения при возбуждении колебаний элементарным диполем (1) при $\widetilde{\omega}$ =5.

Этот вывод подтверждается также Рис.2, где представлены зависимости (n=1;...;4) от координаты z для момента времени $\tau = 30$. Из этого рисунка видно, что первая и вторая поперечные моды имеют волновую природу с характерным продольным масштабом, который можно приближённо оценить следующим образом. Для первой моды: $\Lambda_1 = 2\pi/k_z \approx 2\pi/\widetilde{\omega} \approx 1,3$; для второй моды: $\Lambda_2 = 2\pi/\sqrt{\widetilde{\omega}^2 - k_{\perp 2}^2} \approx 1,6$. Четвёртая мода практически не возбуждается, третья мода уже утратила задаваемую частотой диполя периодичность, и незначительно, но убывает по амплитуде. Таким образом, эта мода, хоть и оказалась в данный момент времени самой большой по амплитуде, бегущей волной фактически не является.

На Рис.3 приведены зависимости первых четырёх поперечных мод (n=1;...;4) от поперечной координаты r при z=L для момента времени $\tau = 30$. Видно, что наиболее интенсивной,

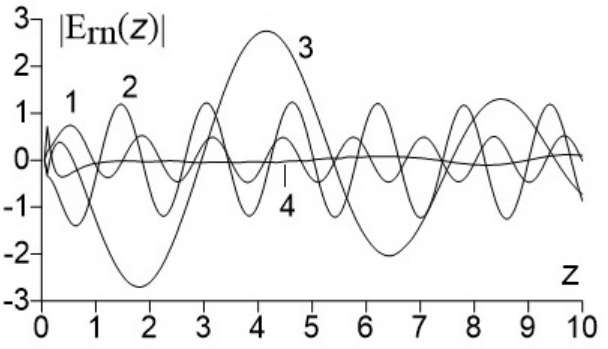


Рис. 2: Зависимости первых четырёх поперечных мод $E_r^{(n)}$ (n=1;...;4) от продольной координаты z для момента времени $\tau = 30$ при возбуждении колебаний элементарным диполем (1) при $\widetilde{\omega}$ =5.

как и на Рис.1 оказывается вторая мода, дающая, очевидно, наибольший вклад в суммарный поток энергии, излучаемой через правый торец волновода.

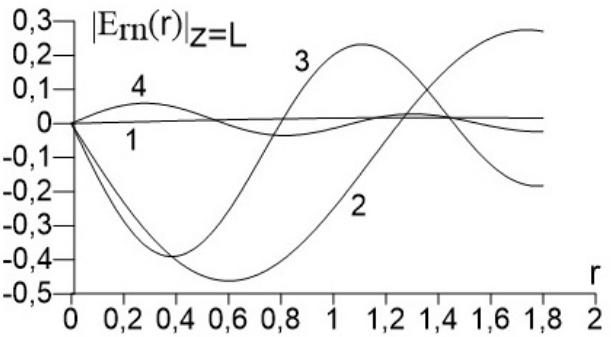


Рис. 3: Зависимости первых четырёх поперечных мод $E_r^{(n)}(L)$ (n=1;...;4) от поперечной координаты r в момент времени $\tau = 30$ при возбуждении колебаний элементарным диполем (1) при $\widetilde{\omega}$ =5.

Из приведённого анализа результатов расчётов следует, что в случае возбуждения колебаний в вакуумном волноводе диполем (1), использование при численном моделировании парциальных граничных условий излучения также, как и в случае, описанном в [5], верно отражает динамику рассматриваемых электродинамических процессов и поэтому применение этих условий является перспективным для изучения переходных процессов в более сложных электродинамических системах.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1977. 636 с.

2. Владимиров В. С. Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1976. 528 с.

3. Кузелев М. В., Майков А. Р., Поезд А. Д., Рухадзе А. А., Свешников А. Г., Якунин С. А. Статья в журнале //ДАН СССР, 1988. Том 300, № 5. С.1112-1115.

4. Бобылёв Ю. В., Кузелев М. В., Рухадзе А. А., Свешников А. Г. Статья в журнале // Физика плазмы. 1999. Том 25, № 7. С. 615-620.

5. Панин В. А., Бобылёв Ю. В. Материалы конференции // XVIII Международная конференция "Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы, приложения и проблемы истории посвящённая столетию со дня рождения профессоров Б. М. Бредихина, В. И. Нечаева и С. Б. Стечкина.: тезисы докладов международной конференции (Тула, 23-26 сентября 2020г.) — Тула, 2020. С.441-445.

УДК 537.87

Численное моделирование возбуждения электромагнитных колебаний открытого плазменного резонатора

Ю. В. Бобылев (Россия, г. Тула)
Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого
e-mail: bobylev.yu@mail.ru
Т. Г. Мещерякова (Россия, г. Тула)
Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого
e-mail: tatyanka.parshkova@mail.ru
В. А. Панин (Россия, г. Тула)
Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого
e-mail: panin@tspu.tula.ru

Numerical simulation of the stimulation of electromagnetic vibrations of an open plasma resonator

Yu. V. Bobylev (Russia, г. Tula)
Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University
e-mail:bobylev.yu@mail.ru
T. G. Meshcheryakova (Russia, г. Tula)
Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University
e-mail:tatyanka.parshkova@mail.ru
V. A. Panin (Russia, г. Tula)
Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University
e-mail:panin@tspu.tula.ru

Введение

Одной из важных задач теоретической плазменной СВЧ электроники является изучение процессов излучения и распространения электромагнитных волн в различных устройствах. Данная задача включает в себя проблему корректной постановки нестационарной задачи о возбуждении открытого резонатора некоторым нестационарным внешним источником. Такого рода задачи в случае стационарного гармонического внешнего источника достаточно подробно исследованы, и их описа-ние содержится даже в некоторых учебных пособиях [1]. Если же внешний источник нестационарен, то задача существенно усложняется, при этом основной трудностью является корректная постановка граничных условий излучения на открытом

торце резонатора, из которого происходит излучение электромагнитных волн в окружающее пространство. Эта трудность обусловлена тем, что известные ранее условия излучения [1, 2] разрабатывались для решения стационарного уравнения Гельмгольца, описывающего установившийся колебательный процесс, и, поэтому непосредственно в качестве граничных условий излучения для полной нестационарной системы уравнений Максвелла-Власова использованы быть не могут. Ситуация ещё более усложняется, если полость резонатора заполнена некоторой диспергирующей средой, в частности, плазмой. Решением данной проблемы может являться использование на открытом торце резонатора так называемых парциальных граничных условий [3, 4], позволяющих рассматривать произвольные нестационарные электромагнитные явления. Исследованию практического применения этих условий к конкретной электродинамической системе и проводится в настоящей работе.

Постановка задачи и вывод основных уравнений

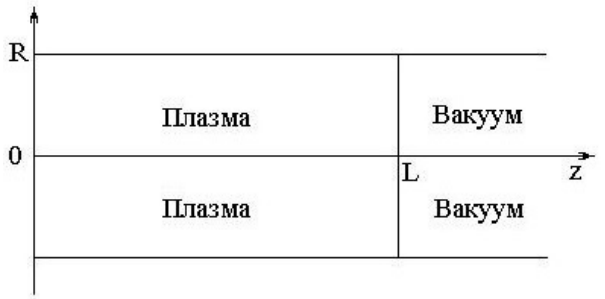


Рис. 1: Схемотическое изображение рассматриваемой эдектродинамической системы

Рассмотрим следующую систему, интенсивно исследуемую в настоящее время в прикладных целях. Схематически эта система изображена на Рис.1. Основной её частью системы является металлический цилиндрический волновод радиуса R с идеально проводящими стенками. Участок волновода $0 \leqslant z < L$ заполнен поперечно однородной плазмой. Вдоль оси волновода наложено сильное магнитное поле, полностью замагничивающее электроны плазмы. В продольном направлении (вдоль оси $0z$) плазма является неоднородной. Область $z \geqslant L$ моделирует излучающий рупор, состыкованный с резонатором. В простейшем случае рупором является продолжение того же волновода, но только вакуумного. При этом граница $z = L$ является открытой границей, через которую и осуществляется вывод излучения. Именно на этой границе и ставятся парциальные условия. Плазму будем рассматривать в линейном приближении. Исходим из следующей системы уравнений [4]:

$$\begin{gathered} \frac{\partial E_r}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial r} = -\frac{1}{c}\frac{\partial B_\varphi}{\partial t}, \qquad \frac{\partial B_\varphi}{\partial z} = -\frac{1}{c}\frac{\partial E_r}{\partial t}, \\ \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial (r)}(rB_\varphi) = \frac{1}{c}\frac{\partial E_z}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}(j_{zp} + j_{zd}), \qquad \frac{\partial j_{zp}}{\partial t} = \frac{\omega_p^2(z)}{4\pi}E_z \end{gathered} \tag{1}$$

описывающей аксиально-симметричные возбуждения волн E – типа, создаваемые некоторым внешним источником $j_{zd}(t, z, r)$. В (1) $\omega_p(z)$ - ленгмюровская частота электронов плазмы, а $j_{zp}(t, z, r)$. - продольная составляющая плотности тока, наведённого в плазме. Выберем в качестве функции, описывающей плотность тока внешнего источника:

$$j_{zd}(t, z, r) = j_{d0} J_0(\frac{\mu_{01}}{R} r)\delta(z)\vartheta(t)sin(\omega t). \tag{2}$$

Эта формула соответствует бесконечно-тонкому гармонически осциллирующему заряженному плоскому слою, расположенному в начале координат, поперечная плотность которого определяется функцией Бесселя $J_0(\frac{\mu_0}{R}r)$, где μ_{01} - первый корень уравнения $J_0(x) = 0$. Также в формуле (2) обозначено: $\vartheta(t)$ - ступенчатая функция Хевисайда, δ - функция Дирака.

Представим компоненты поля в виде:

$$E_z(t,r,z)=\sum_{n=1}^{\infty}E_z^{(n)}J_0(k_{\perp n}r),\quad E_r(t,r,z)=\sum_{n=1}^{\infty}E_r^{(n)}J_1(k_{\perp n}r),$$
$$B_\varphi(t,r,z)=\sum_{n=1}^{\infty}B_\varphi^{(n)}J_0(k_{\perp n}r),\quad j_{zp}(t,z,r)=\sum_{n=1}^{\infty}j_{zp}^{(n)}J_0(k_{\perp n}r). \tag{3}$$

Здесь J_0 и J_1 - функции Бесселя нулевого и первого порядка, соответственно; $k_{\perp n}=\frac{\mu_{0n}}{R}$ (n=0, 1, ...) , где μ_{0n} - корни уравнения $J_0(x)=0$.

Чтобы получить уравнения для коэффициентов $E_z^{(n)}$, $E_r^{(n)}$, $B_\varphi^{(n)}$, $j_{zp}^{(n)}$ подставим разложения (3) в уравнения (1) и, учитывая ортогональность функций Бесселя, будем иметь:

$$\frac{\partial E_r^{(n)}}{\partial z}+k_{\perp n}E_z^{(n)}=-\frac{\partial B_\varphi^{(n)}}{\partial\tau},\quad \frac{\partial B_\varphi^{(n)}}{\partial z}=-\frac{\partial E_r^{(n)}}{\partial\tau},$$
$$\frac{\partial E_r^{(n)}}{\partial\tau}=k_{\perp n}B_\varphi^{(n)}-J_{zp}^{(n)}-J_d^{(n)},\quad \frac{\partial J_{zp}^{(n)}}{\partial t}=\widetilde{\omega}_p^2(z)E_z^{(n)}. \tag{4}$$

Здесь обозначено $\tau=ct$, $\widetilde{\omega}=\omega/c$,

$$\tau=ct,\quad \widetilde{\omega}(z)=\frac{\omega_p(z)}{c},\ \widetilde{\omega}=\frac{\omega}{c},\ J_{zp}^{(n)}=\frac{4\pi}{c}j_{zp}^{(n)},\ J_d^{(n)}=\begin{cases}\frac{4\pi}{c}j_{d0}\delta(z)\vartheta(t)sin(\widetilde{\omega}\tau); & n=1\\ 0; & n=2,3,...\end{cases} \tag{5}$$

Как видно из этих обозначений, новая переменная τ имеет, как и координата z размерность длины, а частоты $\widetilde{\omega}_p$ и $\widetilde{\omega}$ - размерность волнового числа . Система уравнений (4) дополняется начальными и граничным условиями:

$$E_r^{(n)}|_{\tau=0}=B_\varphi^{(n)}|_{\tau=0}=E_z^{(n)}|_{\tau=0}=J_{zp}^{(n)}|_{\tau=0}=0,\quad E_r^{(n)}|_{z=0}=0 \tag{6}$$

а также условием излучения при $z=L$ на правом конце системы. Так как при $z=L$ $\omega_p(L)=0$, то уравнения (4) содержат только компоненты поля, то есть являются однородными. Используя преобразование Лапласа, решение (4) для данного случая можно записать в виде [4]:

$$\frac{\partial E_r^{(n)}}{\partial\tau}=-\frac{\partial E_r^{(n)}}{\partial z}+k_{\perp n}\int_0^{\tau}J_1(k_{\perp n}(\tau-\tau'))\frac{\partial E_r^{(n)}}{\partial z}d\tau', \tag{7}$$

где J_1 функция Бесселя первого порядка. Эти соотношения, следуя [4], мы и рассматриваем как нестационарные парциальные граничные условия излучения, записанные в точке $z=L$ - левой границы излучающего устройства. Как видно, это условие является достаточно сложным интегро-дифференциальным уравнением, и поэтому численная его реализация не совсем проста.

Из результатов расчётов проанализируем подробней спектральный состав поля излучения, определив его на выходе системы для каждой моды функциями

$$E_r^{(n)}(\Omega)=\int_0^{\tau}E_r^{(n)}(\tau',L)exp(i\Omega\tau')d\tau',(n=1,2....), \tag{8}$$

являющимся, фактически, образами Фурье функций $E_r^{(n)}(\tau,L)$.

Результаты численного моделирования

Для определённости во всех дальнейших расчётах положим $L = 10$см., $R = 1,8$см. Рассмотрим решение уравнений (4) при $\widetilde{\omega}_p(z) = \widetilde{\omega}_{p0} f(z)$, где $\widetilde{\omega}_{p0} = const$. Причём, будем считать, что плазма однородно заполняет волновод, то есть её плотность везде const, и, только вблизи границы системы $z = L$ уменьшается до нуля не скачкообразно, а по более гладкому закону, в соответствие с функцией $f(z)$, вид которой приведён на Рис.2.

Зададим частоту внешнего источника $\widetilde{\omega}$ =20, а $\widetilde{\omega}_{p0}$=10 (что соответствует $\omega_{p0} = 30 \cdot 10^{10}$ c^{-1}). На Рис.3 приведена спектральная характеристика поля излучения $\left|E_r^{(1)}(\Omega)\right|$. Из этого рисунка видно, что в системе наиболее интенсивно возбуждаются колебания на частоте внешнего источника $\widetilde{\omega}$ =20. Кроме того, возбуждаются две частоты, близкие к $\widetilde{\omega}_{p0}$. Это является следствием того, что в системе теперь имеются уже три характерные частоты - $\widetilde{\omega}$, $\widetilde{\omega}_{p0}$, и минимальная частота отсечки $\widetilde{\omega}_{01} = k_{\perp 1} = \mu_{01}/R \approx 1,33$. Поэтому, по сравнению со случаем вакуумного волновода [5], где возбуждались колебания на частоте вынуждающей силы $\widetilde{\omega}$ и вблизи частоты отсечки $\widetilde{\omega}_{01}$, на Рис.3 видно, что теперь возбуждаются колебания и на частотах, близких к $\widetilde{\omega}_{p0} - \widetilde{\omega}_{01}$ и $\widetilde{\omega}_{p0} + \widetilde{\omega}_{01}$. Наличие в спектре этих двух частот обусловлено поперечной неоднородностью системы - $k_{\perp 1} = \mu_{01}/R > 0$ Если же $R \to \infty$, то $k_{\perp 1} \to 0$ и колебания будут возбуждаться на частотах $\widetilde{\omega}$ и $\widetilde{\omega}_{p0}$, что подтверждается Рис.4, где в отличие от Рис.3 при расчётах радиус волновода увеличен в 10 раз и равен R=18см.

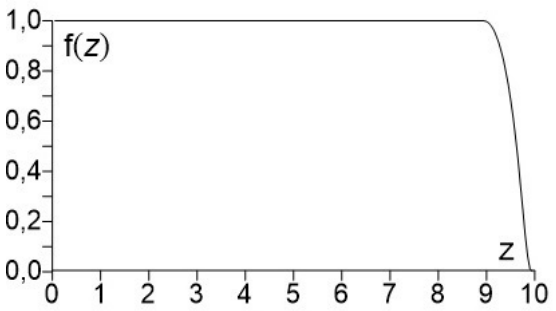


Рис. 2: Вид функции, определяющей зависимость плотности плазмы от продольной координаты z.

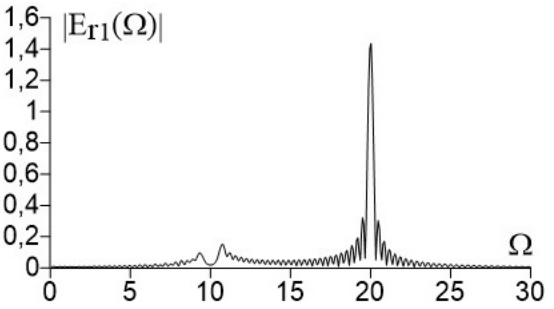


Рис. 3: Спектральная характеристика $\left|E_r^{(1)}(\Omega)\right|$ первой поперечной моды поля излучения при $\widetilde{\omega}_{p0}$=10 и $\widetilde{\omega}$ =20.

На Рис.5 представлен случай равенства плазменной частоты и частоты внешнего источника $\widetilde{\omega} = \widetilde{\omega}_{p0}$=20. Из этого рисунка видно, что доминирующими в спектре являются частоты, близкие к $\widetilde{\omega}_{p0} - \widetilde{\omega}_{01}$ и $\widetilde{\omega}_{p0} + \widetilde{\omega}_{01}$, а излучение на частоте вынуждающей силы весьма незначительно, что также выражает общие закономерности происходящих в системе процессов.

Из проведённого анализа процесса возбуждения электромагнитных полей диполем в плазменном волноводе можно сделать следующий вывод о том, что использование при численном моделировании парциальных граничных условий излучения верно отражает динамику рассматриваемых электродинамических процессов и является перспективным для изучения переходных процессов в более сложных электродинамических системах с плазменным и иным заполнением, независимо от природы причины, приводящей к возникновению колебаний.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1977. 636 с.

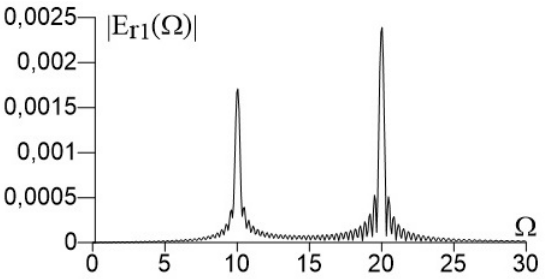


Рис. 4: Спектральная характеристика $\left|E_r^{(1)}(\Omega)\right|$ первой поперечной моды поля излучения при $\widetilde{\omega}_{p0}$=10 и $\widetilde{\omega}$ =20, R=18см.

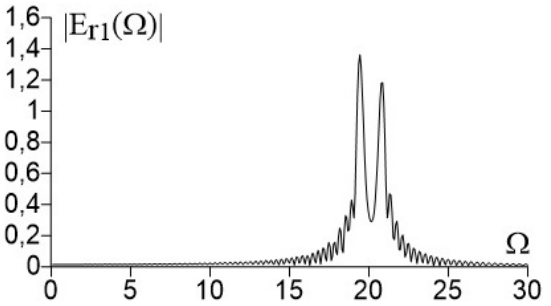


Рис. 5: Спектральная характеристика $\left|E_r^{(1)}(\Omega)\right|$ первой поперечной моды поля излучения при $\widetilde{\omega} = \widetilde{\omega}_{p0}$=20

2. Владимиров В. С. Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1976. 528 с.

3. Майков А. Р., Свешников А. Г., Якунин С. А. Статья в журнале // ЖВМ и МФ. 1985. Том 25, № 6. С. 883-894.

4. Бобылёв Ю. В., Кузелев М. В., Рухадзе А. А., Свешников А. Г. Статья в журнале // Физика плазмы. 1999. Том 25, № 7. С. 615-620.

5. Панин В. А., Бобылёв Ю. В. Материалы конференции // XVIII Международная конференция "Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы, приложения и проблемы истории посвящённая столетию со дня рождения профессоров Б. М. Бредихина, В. И. Нечаева и С. Б. Стечкина.: тезисы докладов международной конференции (Тула, 23-26 сентября 2020г.) — Тула, 2020. С.441-445.

УДК 539.4

О роли статистической обработки в оценке результатов коррозионно-механических испытаний

С. Н. Кутепов (Россия, г. Тула)
Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого
e-mail: kutepov.sergei@mail.ru
А. Е. Гвоздев (Россия, г. Тула)
Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого
e-mail: gwozdew.alexandr2013@yandex.ru
О. В. Кузовлева (Россия, г. Москва)
Российский государственный университет правосудия
e-mail: kusovleva@yandex.ru
Д. С. Клементьев (Россия, г. Тула)
Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого
e-mail: gwozdew.alexandr2013@yandex.ru

On the role of statistical processing in evaluating the results of corrosion-mechanical tests

S. N. Kutepov (Russia, Tula)
Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University
e-mail: kutepov.sergei@mail.ru
A. E. Gvozdev (Russia, Tula)
Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University
e-mail: gwozdew.alexandr2013@yandex.ru
O. V. Kuzovleva (Russia, Moscow)
Russian State University of Justice
e-mail: kusovleva@yandex.ru
D. S. Klementyev (Russia, Tula)
Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University
e-mail: gwozdew.alexandr2013@yandex.ru

Основной текст тезисов.

Проведение испытаний по определению длительной коррозионной прочности различных марок арматурных сталей [1, 2, 3] в средах, вызывающих наводороживание, позволило обнаружить немонотонное изменение стойкости при уменьшении величины растягивающих напряжений. Точки на кривых были получены по средним значениям стойкости при испытании 4-6 образцов на каждый уровень напряжения.

Для проверки и уточнения немонотонной зависимости $\sigma_Э - \tau_P$ были проведены испытания на большем числе образцов. При определении числа образцов (n) исходили из того, чтобы принятый объем испытания обеспечил оценку среднего значения (a) и среднего квадратичного отклонения (σ) величины стойкости (x) с заданной степенью точности и надежности [4]:

$$n_a = \frac{\gamma^2}{\triangle\, a^2} \times \left(Z_{1-\frac{\alpha}{2}} + Z_{1-\beta}\right)^2, \tag{1}$$

где γ — коэффициент вариации величины x; $\triangle\, a$ — предельная относительная ошибка (допуск) при определении среднего значения; α — вероятность ошибки 1-го рода; β — вероятность ошибки 2-го рода.

Значения ошибок принимаем $\alpha = 0,1$ и $\beta = 0,5$. Определяем значения $Z_{0,095} = 1,28$; $Z_{0,975} = 1,96$; $\triangle\, a = 0,03$; $\gamma = 0,04$. Тогда на основании формулы (1):

$$n_a = \frac{0,04^2}{0,03^2} \times (1,28 + 1,96)^2 \approx 18,7; \quad \text{принимаем } n = 20.$$

Проводим испытание серий образцов по 20 штук для уровней напряжения $\sigma_Э = (0,8 \ldots 0,2)\sigma_B$. Результаты стойкости, измеряемые временем до разрушения, располагаем в вариационный ряд в порядке возрастания и сводим в таблицы 1 и 2.

Результаты статистической обработки экспериментальных данных, приведенных в таблицах 1 и 2, сводим в таблицы 3 и 4. Указанные в таблицах 3 и 4 величины вычисляются по следующим формулам [4]:

$$x = lgt; \quad \overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i; \quad S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} x_i(x_i - \overline{x})^2; \tag{2}$$

$$\overline{x} - \frac{S}{\sqrt{n}} t_{\alpha n} < a_{0,9} < \overline{x} + \frac{S}{\sqrt{n}} t_{\alpha n}; \tag{3}$$

$$S_{Z_1}\sqrt{\frac{n-1}{n}} < \sigma^2_{0,9} < S_{Z_2}\sqrt{\frac{n-1}{n}}, \tag{4}$$

где $a_{0,9}$ и $\sigma^2_{0,9}$ — границы 90% доверительных интервалов для математического ожидания и дисперсии логарифма долговечности; Z_1 и Z_2 — коэффициенты, зависящие от уровня доверительной вероятности числа степени свободы $R = n-1$; $t_{\alpha k}$ — критерий Стьюдента для уровня значимости $\alpha(\alpha - 0,1)$ и числа степени свободы $R = n - 1$.

Определяя доверительный интервал для среднего значения логарифма долговечности и квадратичного отклонения при $P = 1 - \alpha = 0,9$; $n = 20$ по таблицам приведенным в [5], выбираем значение $Z_1 = 0,794; Z_2 = 1,37; t_{\alpha k} = 1,73$.

Таблица 1: Вариационные ряды времени в минутах до разрушения натурных образцов арматурной стали 20ГС2 ∅10 мм

№ образца	Уровень растягивающих напряжений $\sigma_Э/\sigma_B$							P, %
	0,8	0,7	0,6	0,5	0,4	0,3	0,2	
1	28	35	60	78	100	120	210	2,5
2	28	39	63	79	120	130	230	7,5
3	30	39	65	80	125	142	260	12,5
4	30	40	68	80	125	157	280	17,5
5	31	40	70	85	127	160	330	22,5
6	32	41	72	85	127	168	340	27,5
7	32	44	78	90	137	180	343	32,5
8	34	46	80	90	140	200	376	37,5
9	35	46	85	95	150	210	380	42,5
10	35	48	90	97	165	210	400	47,5
11	36	52	90	100	170	235	420	52,5
12	36	55	94	110	187	240	458	57,5
13	37	60	97	120	198	244	500	62,5
14	37	62	99	122	200	250	518	67,5
15	38	65	100	125	210	258	540	72,5
16	38	67	100	125	212	260	562	77,5
17	38	68	104	128	220	265	600	82,5
18	39	73	115	130	229	280	630	87,5
19	40	77	128	135	240	298	700	92,5
20	40	83	135	135	245	310	940	97,5

Таблица 2: Вариационные ряды времени в минутах до разрушения натурных образцов арматурной стали Ст5 ∅12 мм

№ образца	Уровень растягивающих напряжений $\sigma_Э/\sigma_B$							P, %
	0,8	0,7	0,6	0,5	0,4	0,3	0,2	
1	15	22	35	27	50	65	80	2,5
2	15	27	36	30	56	70	83	7,5
3	17	29	38	34	65	78	92	12,5
4	18	31	43	36	66	82	120	17,5
5	18	35	45	42	71	94	150	22,5
6	19	35	46	45	71	104	170	27,5
7	20	37	47	48	76	126	184	32,5
8	21	38	47	50	77	132	190	37,5
9	22	40	47	52	80	140	191	42,5
10	22	42	50	54	82	142	210	47,5
11	23	43	50	56	90	142	212	52,5
12	23	43	51	57	98	150	216	57,5
13	23	44	52	59	98	154	230	62,5
14	23	46	53	60	99	156	246	67,5
15	24	48	55	63	102	156	280	72,5
16	26	49	57	64	104	170	330	77,5
17	27	51	65	69	126	180	360	82,5
18	28	51	68	73	130	200	400	87,5
19	29	52	72	76	150	250	450	92,5
20	30	60	78	80	160	270	580	97,5

Таблица 3: Результаты статистической обработки результатов для стали 20ГС2

Характеристики долговечности	Уровень растягивающих напряжений $\sigma_Э/\sigma_B$						
	0,8	0,7	0,6	0,5	0,4	0,3	0,2
lgt	1,538	1,718	1,942	2,010	2,219	2,318	2,623
S^2	0,0025	0,0129	0,0101	0,0077	0,0139	0,0150	0,0281
$a_{0,9}$	1,5186 — 1,5570	1,6926 — 1,7436	1,9031 — 1,9809	1,9760 — 2,0442	2,1731 — 2,2645	2,2710 — 2,3658	2,5580 — 2,6881
$\sigma^2_{0,9}$	0,0017 — 0,0032	0,0097 — 0,0168	0,0076 — 0,0131	0,058 — 0,0100	0,0105 — 0,0182	0,0113 — 0,195	0,0214 — 0,0368

Таблица 4: Результаты статистической обработки результатов для стали Ст5

Характеристики долговечности	Уровень растягивающих напряжений $\sigma_Э/\sigma_B$						
	0,8	0,7	0,6	0,5	0,4	0,3	0,2
lgt	1,337	1,602	1,707	1,712	1,946	2,125	2,317
S^2	0,0078	0,0118	0,0087	0,0177	0,0184	0,0292	0,0551
$a_{0,9}$	1,303 — 1,371	1,560 — 1,644	1,671 — 1,743	1,661 — 1,763	1,894 — 1,998	2,059 — 2,191	2,226 — 2,408

$\sigma^2_{0,9}$	0,0059 — 0,0101	0,0089 — 0,0154	0,0066 — 0,0113	0,0133 — 0,0230	0,0139 — 0,0239	0,0220 — 0,0379	0,0416 — 0,0718

Результаты испытаний на длительную коррозионную прочность представлены графически в виде кривых распределения времени до разрушения в логарифмических координатах [4]. По оси абсцисс — значения логарифма времени до разрушения образцов, а по оси ординат — величина вероятности разрушения образцов, вычисленная по формуле:

$$W(x) = \frac{i - 0,5}{n}, \tag{5}$$

где $W(x)$ — накопленная частота или эмпирическая функция распределения; i — номер образца в вариационном ряду; n — число образцов.

На кривых длительной коррозионной прочности [6], построенных по кривым распределения логарифма долговечности, наблюдали переломы, характеризующие немонотонное изменение стойкости на кривых длительной коррозионной прочности, свидетельствующие о том, что при различных уровнях растягивающих напряжений процессы охрупчивания и нарушения сплошности под воздействием водорода и элементов коррозионной среды протекают по различным механизмам.

При высоких уровнях напряжения ($\sigma_Э = 0,8\sigma_B$) образцы, подвергающиеся наводороживанию, разрушаются в соответствии с механизмом Гриффитса. Процесс разрушения происходит за счет быстрого развития субмикротрещин в поверхностном объеме металла и на поверхности испытываемых образцов. Образование таких субмикротрещин подтверждает релаксацию локальных внутренних микронапряжений и падение модуля упругости, а также изменение механических свойств в этом интервале времени. Увеличение повреждаемости образцов за счет возрастания суммарных растягивающих напряжений выражается в образовании дефектов структуры, способствующих ускорению диффузии водорода к ловушкам [6].

Возрастание величины микронапряжений в вершине микротрещины приводит к микропластифицированию металла в локальном объеме, вызываемому хемосорбцией водорода, что способствует ее быстрому распространению. Повышение дефектности структуры активно способствует объединению микротрещин в магистральные трещины и лавинообразному разрушению оставшегося сечения. Полученные результаты хорошо согласуются с предложенными авторами работ [7, 8] механизмами водородного растрескивания.

По мере снижения уровня приложенных напряжений коррозионная стойкость возрастает. Уровня действующих напряжений недостаточно для раскрытия имеющихся трещин Гриффитса, но в то же время обеспечивается образование такого количества микродефектов по всему объему образца, в которых равномерно распределяется проникающий водород. Для достижения критических напряжений требуется большее время. Увеличение инкубационного периода приводит к росту стойкости. Резкое снижение стойкости, наблюдаемое при напряжениях $0,5\sigma_B$, вероятно, связано с меньшим размером структурных дефектов кристаллической решетки, а также с тем, что количество адсорбированного водорода превышает их емкость. В этой связи время достижения критической концентрации водорода, необходимой для зарождения и развития трещин резко сокращается. При этом могут развиваться значительные давления, приводящие к зарождению микротрещин, а иногда даже видимый отрыв (скалывание) поверхности объемов металла, вызываемый коллекторами, расположенными вблизи внешней поверхности образца. В результате весь приповерхностный слой образца оказывается пораженным микропорами и сеткой микротрещин [6].

При меньших напряжениях снижается вероятность протекания рассматриваемых процессов. Имеющиеся случаи проявления малой стойкости при напряжениях $0,3\sigma_B$ свидетельству-

ют о том, что в образце (чаще на поверхности или в приповерхностном слое) имеются единичные дефекты больших размеров, которые приводят к зарождению микротрещины при достижении высокого уровня локальных напряжений под действием водорода. Быстрое достижение критической концентрации в зоне зарождения микротрещины связано с изменением соотношения скоростей граничной и объемной диффузии, обусловленное низким уровнем растягивающих напряжений. Водороду энергетически выгоднее диффундировать по границам зерен и дефектным областям решетки (типа микропор и дислокационных скоплений), что и приводит к их насыщению в первую очередь. Поэтому микротрещины распространяются в основном по границам зерен, где ранее образуются микропоры, разделенные узкими перемычками. Таким образом, хрупкое разрушение арматурных сталей при испытании на длительную прочность в водородсодержащих средах при различном уровне напряжений может происходить различными путями, что и отражается на видах изломов. При микроскопических исследованиях обнаруживается повышенная дефектность поверхностных слоев металлических образцов и наличие смешанного типа разрушения (транскристаллитного и интеркристаллитного).

Таким образом, установлено, что увеличение уровня приложенных растягивающих напряжений приводит к сокращению инкубационного периода развития микротрещин при водородном растрескивании.

Показано, что зарождение и развитие трещин при этом происходит преимущественно в объеме образца в местах локализации растягивающих напряжений на дефектных участках структуры и субструктуры.

Полученные результаты могут быть использованы при создании ресурсосберегающих процессов обработки материалов [9]-[14].

Работа выполнена по проекту №11.6682.2017/8.9.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Влияние режимов термической обработки на стойкость высокопрочной арматурной стали к водородному растрескиванию / Н. Н. Сергеев, А. Н. Сергеев, С. Н. Кутепов, А. Е. Гвоздев, Е. В. Агеев // Известия Юго-Западного государственного университета. Серия: Техника и технологии. 2017. Т. 7. № 4 (25). С. 6–20.

2. Исследование сравнительной стойкости арматурных сталей в процессе ускоренных лабораторных испытаний на водородное растрескивание / Н. Н. Сергеев, А. Н. Сергеев, С. Н. Кутепов, А. Е. Гвоздев, Е. В. Агеев, Д. С. Клементьев // Известия Юго-Западного государственного университета. Серия: Техника и технологии. 2018. Т. 8. № 1 (26). С. 38–48.

3. Влияние технологических режимов упрочнения арматурного проката для композиционных железобетонных конструкций на чувствительность к коррозионно-механическому разрушению / Н. Н. Сергеев, В. В. Извольский, А. Н. Сергеев, С. Н. Кутепов, А. Е. Гвоздев, О. В. Пантюхин // Известия Тульского государственного университета. Технические науки. 2019. № 3. С. 558–568.

4. Степнов М. Н. Статистическая обработка результатов механических испытаний: Справочник. М.: Машиностроение, 1985. 232 с.

5. Смирнов Н. В., Дунин-Барковский И. В. Курс теории вероятностей и математической статистики для технических приложений. М.: Наука, 1969. 512 с.

6. Влияние уровня растягивающих напряжений на длительную прочность арматурных сталей в водородсодержащих средах / Н. Н. Сергеев, А. Н. Сергеев, А. Е. Гвоздев, И. В. Тихонова, С. Н. Кутепов, Е. В. Агеев // Известия Юго-Западного государственного университета. Серия: Техника и технологии. 2018. Т. 8. № 2 (27). С. 6–19.

7. Lynch S. P. Chapter 2: Hydrogen embrittlement (HE) phenomena and mecha-nisms // Stress Corrosion Cracking. Woodhead Publishing Limited, 2011. P. 90–130.

8. Осташ О. П., Витвицкий В. И. Двойственность действия водорода на механическое поведение стали и структурная оптимизация ее водородоустойчивости // Физико-химическая механика материалов. 2011. Ч. 47. Вып. 4. С. 5–19.

9. Сергеев Н. Н., Сергеев А. Н. Механические свойства и внутреннее трение высокопрочных сталей в коррозионных средах: монография. Тула: Изд-во ТулГУ, 2018. 430 с.

10. Влияние масштабного фактора и состояния поверхности на чувствительность стали 20ГС2 к водородному растрескиванию / Н. Н. Сергеев, В. В. Извольский, А. Н. Сергеев, С. Н. Кутепов, А. Е. Гвоздев, Е. В. Агеева, Д. С. Клементьев, О. В. Кругляков // Известия Юго-Западного государствен-ного университета. 2019. № 23(5). С. 8–22.

11. Математическое планирование и моделирование процессов поведения металлических систем в экстремальных условиях и состояниях / А. Н. Сергеев, С. Н. Кутепов, О. В. Кузовлева, А. Е. Гвоздев, Д. С. Клементьев // Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы, приложения и проблемы истории: Материалы XVIII Международной конференции, посвящённой со дня рождения профессоров Б. М. Бредихина, В. И. Нечаева и С. Б. Стечкина. Тула: ТГПУ им. Л. Н. Толстого, 2020. С. 385-388.

12. Разработка прогрессивных технологий получения и обработки металлов, сплавов, порошковых и композиционных наноматериалов: монография / М. Х. Шоршоров, А. Е. Гвоздев, В. И. Золотухин, А. Н. Сергеев, А. А. Калинин, А. Д. Бреки, Н. Н. Сергеев, О. В. Кузовлева, Н. Е. Стариков, Д. В. Малий. Тула: Издательство ТулГУ, 2016. 235 с.

13. Гвоздев А. Е. Экстремальные эффекты прочности и пластичности в металлических высоколегированных слитковых и порошковых системах: монография. 2-е изд., исправ. и доп. Тула: Издательство ТулГУ, 2019. 477 с.

14. Малоотходные технологии получения инструмента из горячекатаных, по-рошковых и литых заготовок быстрорежущих сталей: монография / А. Е. Гвоздев, Н. Н. Сергеев, Н. Е. Стариков, С. В. Сапожников, С. Н. Кутепов, А. В. Маляров, А. А. Калинин. под ред. Н. Н. Сергеева. 2-е изд., исправ. и доп. Тула: Изд-во ТулГУ, 2019. 282 с.

УДК 538.931

Применение модели случайных блужданий для изучения начальной стадии спинодального распада

Д. М. Левин (Россия, г. Тула)
Тульский государственный университет
e-mail: danlevin48@gmail.com
Ю. Н. Колмаков (Россия, г. Тула)
Тульский государственный университет
e-mail: ynkolmakov@yandex.ru

Application of the random walk model to study the initial stage of spinodal decomposition

D. M. Levin (Russia, Tula)
Tula State University
e-mail: danlevin48@gmail.com
Yu. N. Kolmakov (Russia, Tula)
Tula State University
e-mail: ynkolmakov@yandex.ru

Современные представления о процессах беззародышевого расслоения метастабильных твердых растворов по механизму спинодального распада основаны на использовании диффузионных уравнений, в которых движущей силой диффузии является изменение химических потенциалов компонентов твердого раствора с учетом вклада поверхностной энергии на границах растущих кластеров. Фактически это означает, что растущие кластеры рассматриваются как концентрационные микрообъемы, изначально имеющие поверхность раздела. Это соображение вызывает определенное сомнение, так как начальный этап распада связан с диффузионным ростом локальных областей концентрационной неоднородности, которые возникают в результате термодинамической флуктуации концентрации и имеют решетку, изоморфную матричной. Кроме того, усредненный характер рассмотрения перераспределения атомов при спинодальном распаде, описываемый термодинамическими потенциалами, не учитывает атомистический характер диффузии при образовании и росте кластеров, который можно представить как марковский процесс случайных блужданий отдельных атомов.

Особое значение приобретает учет микроскопической картины атомных скачков в случае, когда масштабы перемещения атомов сопоставимы с размерами области флуктуации концентрации, что можно определить как диффузионный процесс с короткими диффузионными траекториями. При определенных условиях марковский процесс, соответствующий коротким диффузионным траекториям, может привести к росту появившейся концентрационной аномалии даже без учета вклада поверхностной энергии [1]. Целью данной работы является изучение начальных стадий образования и роста атомных кластеров, формирующихся при спинодальном распаде метастабильных твердых растворов, на основе представлений об атомной диффузии как марковском процессе случайных блужданий одиночных атомов.

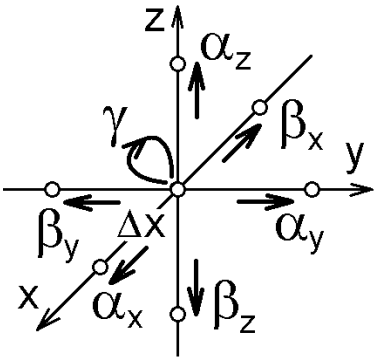


Рис. 1: Вероятности прыжков по узлам решетки

Дискретный марковский процесс случайных блужданий частицы задается вероятностями α_i , β_i перескока частицы в один из соседних узлов решетки в одном из возможных направлений, как показано на рис. 1 (рассматриваем простую кубическую решетку с периодом $\Delta x = a$). Такой скачок из узла с координатами x, y, z происходит за элементарный промежуток времени Δt. С вероятностью $\gamma = 1 - \sum_i (\alpha_i + \beta_i)$, $i = x$, y, z, частица остается в исходном положении. Процесс каждого перескока случаен и является марковской цепью, описываемой уравнением Колмогорова-Чепмена [2]

$$\begin{aligned}\pi(\vec{r}, t\,|\vec{r}_0, t_0) = \textstyle\sum_i \alpha_i (\vec{r} - a\cdot\vec{e}_i, t - \Delta t)\cdot\pi(\vec{r} - a\cdot\vec{e}_i, t - \Delta t\,|\vec{r}_0, t_0) + \\ + \textstyle\sum_i \beta_i (\vec{r} + a\cdot\vec{e}_i, t - \Delta t)\cdot\pi(\vec{r} + a\cdot\vec{e}_i, t - \Delta t\,|\vec{r}_0, t_0) + \gamma(\vec{r}, t - \Delta t)\cdot\pi(\vec{r}, t - \Delta t\,|\vec{r}_0, t_0)\,,\end{aligned} \tag{1}$$

где $\pi(\vec{r}, t\,|\vec{r}_0, t_0)$ −вероятность нахождения частицы в узле с координатами $\vec{r}$ в момент времени t при условии, что в момент t_0 она находилась в узле с координатами $\vec{r}_0$; $\vec{e}_i$−орты, направленные вдоль кристаллографических осей решетки.

Если в простейшем случае плоской диффузии вдоль оси x разложить уравнение (1) в ряд Тейлора с точностью до слагаемых первого порядка малости по $(\Delta x)^2$ и Δt, а затем проинтегрировать по всем начальным положениям частицы $\vec{r}_0$, то получим уравнение Фоккера-Планка для безусловной вероятности $P(\vec{r},t) = \int \pi(\vec{r},t\,|\vec{r}_0,t_0)\,d^3r_0$ нахождения частицы в момент времени t в узле с координатой x, которая пропорциональна концентрации c [2]:

$$\frac{\partial P}{\partial t} = -\frac{\Delta x}{\Delta t}\frac{\partial}{\partial x}(P\alpha - P\beta) + \frac{(\Delta x)^2}{2\Delta t}\frac{\partial^2}{\partial x^2}(P\alpha + P\beta). \tag{2}$$

В общем случае вероятности междоузельного перескока в (1) могут зависеть не только от координат и времени, но и от концентрации $P(\vec{r},t)$, а также от других функций $Q(\vec{r},t)$, описывающих градиент концентрации, поле напряжений или температурное поле в среде. В этом случае в ряд Тейлора надо раскладывать сложные функции: $\alpha_i, \beta_i(\vec{r},t,P(\vec{r},t),Q(\vec{r},t))$. В соответствии с формулами Фаа ди Бруно [3] в случае плоской одномерной диффузии вдоль оси x результат разложения ур-ния (2), записанный с точностью до нескольких первых слагаемых, можно записать как

$$\begin{array}{l}\frac{\partial P}{\partial t} = -\frac{\Delta x}{\Delta t}\cdot\frac{\partial}{\partial x}(BP) + \frac{(\Delta x)^2}{2\Delta t}\cdot\frac{\partial^2}{\partial x^2}(AP) + \frac{\Delta t}{2}\cdot\frac{\partial^2 P}{\partial t^2} + \Delta x\cdot\frac{\partial^2}{\partial x\partial t}(BP) - \\ -\frac{(\Delta t)^2}{6}\cdot\frac{\partial^3 P}{\partial t^3} - \frac{\Delta x\Delta t}{2}\cdot\frac{\partial^3}{\partial x\partial t^2}(BP) - \frac{(\Delta x)^2}{2}\cdot\frac{\partial^3}{\partial t\partial x^2}(AP) - \frac{(\Delta x)^3}{6\Delta t}\cdot\frac{\partial^3}{\partial x^3}(BP) + ...,\end{array} \tag{3}$$

где $A = \alpha + \beta$, $B = \alpha - \beta$.

Первые слагаемые в (3) совпадают с уравнением Фоккера-Планка (2). Вклад остальных слагаемых можно оценить по известным значениям коэффициента диффузии $D = a^2\alpha/\Delta t$, величинам междоузельного расстояния $\Delta x \approx 0,2...0,4 =<$ и времени скачка $\Delta t \approx 10^{-2}...10^{-3}$с. В результате четвертое слагаемое в (3) оказывается сравнимым по величине с третьим, коэффициенты при следующих высших производных значительно меньше и ими можно пренебречь, а уравнение Фоккера-Планка (2) в этом случае примет вид

$$\frac{\partial P}{\partial t} = -\frac{\Delta x}{\Delta t}\frac{\partial}{\partial x}(P\alpha - P\beta) + \frac{(\Delta x)^2}{2\Delta t}\frac{\partial^2}{\partial x^2}(P\alpha + P\beta) + \frac{\Delta t}{2}\frac{\partial^2 P}{\partial t^2}. \tag{4}$$

При α, $\beta = \text{const}$ линейное уравнение (4), встречается при описании стационарного поля температуры в движущейся с постоянной скоростью среде при наличии источников тепла. Появления температурных волн при этом не наблюдается из-за процессов релаксации, вызванных большой величиной коэффициента теплопроводности. Как показывает вид ур-ния (4), ввиду малости коэффициента диффузии D при определенных условиях можно ожидать рост локальных концентрационных неоднородностей, не успевающих релаксировать благодаря малым диффузионным потокам.

Чтобы показать это, проведем численное моделирование решения уравнения (4) с постоянными коэффициентами α, $\beta = \text{const}$. Чтобы избежать трудностей, связанных с разным масштабом изменения переменных $-x_1 \leqslant x \leqslant x_1$; $0 \leqslant t \leqslant t_1$, где $x_1 \approx 1...10 =<$ и $t_1 \approx 10^2...10^3$с – характерный размер и время формирования кластера, делаем замену переменных $x \to x_1\cdot x$; $t \to t_1\cdot y$, переходя к уравнению эллиптического типа в безразмерных координатах $-1 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = D'\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + F'\frac{\partial^2 P}{\partial y^2} - G'\frac{\partial P}{\partial x}, \tag{5}$$

где $D' = \frac{(\Delta x)^2 t_1}{2\Delta t\cdot(x_1)^2}(\alpha+\beta)$, $F' = \frac{\Delta t}{2t_1}$, $G' = \frac{\Delta x\, t_1}{\Delta t\, x_1}(\alpha-\beta)$.

Численное решение уравнения (5) с применением pdepe MatLab осуществляем методом матричной прогонки с использованием девятиточечной неявной разностной схемы, приводя уравнение (5) к матричному виду для сеточных функций P_j^i[4]: ${}_{kj}P_j^{i+1} - R_{kj}P_j^i + Q_{kj}P_j^{i-1} = 0$ с решением $P_j^i = E_{jk}^{i+1}P_k^{i+1} + H_j^{i+1}$, где $E_{jk}^{i+1} = (R - QE^i)_{jl}^{-1}Q_{lk}$; $H_j^{i+1} = (R - QE^i)_{jl}^{-1}Q_{lk}H_k^i$.

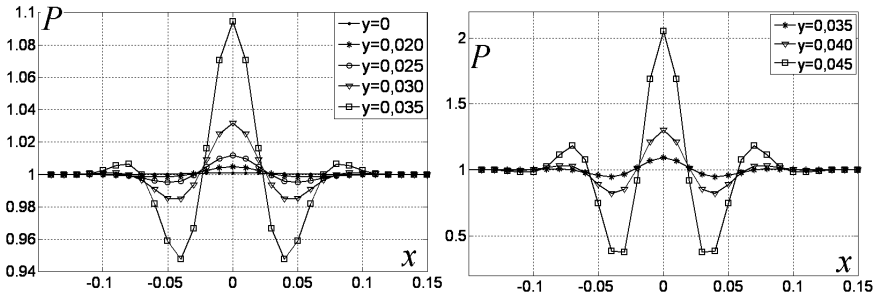


Рис. 3: Рост концентрационных неоднородностей в модели случайных блужданий частиц

Для демонстрации приведем результат численного решения уравнения (3) с очень большим значением $F' = 0,01$, позволяющим рассмотреть это влияние при малых временах процесса. Начальный профиль концентрации задан в момент $y = 0$ в виде гауссова пика функции $P(x)$, величина которой может быть нормирована произвольным образом. Решение параболического уравнения диффузии ($F' = 0$) дает ожидаемое расплывание этого пика вплоть до выравнивания величины P при $y \to \infty$ (рис. 2).

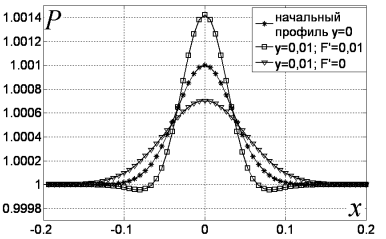


Рис. 2: Ранние стадии изменения концентрационного пика гауссовой формы для обычной ($F' = 0$) и аномальной ($F' = 0,01$) диффузии

Эллиптическое уравнение (5) приводит к другому решению, при котором начинается аномальное быстрое сужение и рост концентрационной флуктуации. Перераспределение примеси в центр флуктуации приводит к появлению вблизи неё концентрационных “ям”, крутые склоны которых стимулируют перенос примеси в стороны и формирование боковых концентрационных пиков (рис. 3). Чем круче концентрационный профиль, тем быстрее идет этот процесс, и в результате формируется квазипериодическая структура, характерная для спинодального распада. Период такой структуры, как видно из рисунков 2 и 3, определяется размером первоначальной концентрационной флуктуации. Ещё раз заметим, что рассмотренной модели такой распад возникает естественным образом как результат учета поправок высшего порядка малости к уравнению Фоккера-Планка, описывающего процесс случайного блуждания частиц. Однако проявляется он только в том случае, когда мал положительный коэффициент диффузии и, соответственно, малы фиковские диффузионные потоки, приводящие к выравниванию концентраций. Вторым условием должна быть большая величина времени Δt эффективного скачка Δt, обусловленная конкретным механизмом перескока, типом кристаллической решетки и конфигурацией расположения вакансий вблизи мигрирующего атома.

Таким образом, из полученных результатов следует, что при определенной концентрационной зависимости вероятности скачков атомов примеси решение полученного диффузионного уравнения предсказывает появление областей восходящей диффузии с потоками частиц, усиливающих концентрационные неоднородности в узких интервалах изменения концентрации. Такое поведение решения свидетельствует о возможности спонтанного образования зародышей новой фазы, вызванного не химическими процессами типа рассмотренных в теории Кана-Хилларда, а проявлением восходящей диффузии.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Levin D.M., Kolmakov Y.N. Diffusion Equations for Early Stages of Solid Solutions Decay Based on the Markovian Theory of Random Walk // Defect and Diffusion Forum. 2018. Vol.

383, pp. 74-80. DOI: https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/DDF.383.74

2. Тихонов В.И., Миронов М.А. Марковские процессы. — М.: Советское радио, 1977. 488 с.

3. Липский В. Комбинаторика для программистов. — М.: Мир, 1988. 212 с.

4. Самарский А.А. Введение в теорию разностных схем. — М.: Наука, 1971. 552 с.

УДК 538.9 + 539.5

О фоне внутреннего трения в дисперсионно упрочненном сплаве Ni-Co-Cr-(X)[1]

Д. М. Левин (Россия, г.Тула)
Тульский государственный университет
e-mail: danlevin48@gmail.com
Д. О. Фролов (Россия, г.Тула)
Тульский государственный университет
e-mail: fdolegovich@yandex.ru

About internal friction background in dispersion hardened Ni-Co-Cr-(X) alloy

D. M. Levin (Russia, Tula)
Tula State University
e-mail: danlevin48@gmail.com
D. O. Flolov (Russia, Tula)
Tula State University
e-mail: fdolegovich@yandex.ru

Аннотация

Выполнено исследование высокотемпературного фона внутреннего трения жаропрочного сплава ВЖ171 в неазотированном и (упрочненном) азотированном состояниях. Предложен метод оценки изменения вязкоупругих свойств сплава в результате азотирования, основанный на анализе высокотемпературного фона внутреннего трения. Получены оценки энергии активации фона и температуры перехода из упругого в вязкоупругое состояние. Результаты могут быть использованы при моделировании поведения под нагрузкой изделий из сплава ВЖ171 в широком интервале температур.

Ключевые слова: вязкоупругость, дисперсионное упрочнение, жаропрочность, высокотемпературный фон, внутреннее трение, азотирование, нитриды.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ №18-02-00760 А

Введение

На сегодняшний день для многих исследовательских коллективов в области материаловедения наибольший интерес представляют материалы из группы дисперсионно упрочненных сплавов [1]. Они позволяют работать узлам и элементам конструкций авиационных двигателей в области развития микропластической деформации при температурах $\approx 1200°C$.

Главными факторами, обеспечивающими высокое сопротивление пластической деформации жаропрочных сплавов при высоких температурах, являются энергия активации U_f и высокий температурный порог T_{cr} перехода из упругого в вязкоупругое состояние. К числу основных методов исследования вязкоупругих свойств материалов относятся изучение явлений ползучести, упругого последействия и релаксации напряжений. Определенную перспективу, по нашему мнению, представляет также изучение высокотемпературного фона внутреннего трения (ФВТ) жаропрочных сплавов, формирование которого обеспечивается действием тех же физических механизмов, что и явления вязкоупругости [2].

Цель исследования: изучение высокотемпературного фона внутреннего трения жаропрочного сплава ВЖ171 в неазотированном и азотированном состояниях, сравнение и обобщение активационных параметров процессов, формирующих вязкоупругие свойства.

1. Материалы и методика исследования

Объектом исследования являлся жаропрочный сплав ВЖ171 на основе системы Ni-Co-Cr, дополнительно легированный вольфрамом, молибденом и титаном. Образцы сплава исследовали в исходном состоянии поставки (табл. 1) и после объемного азотирования. Высокотемпературное объемное азотирование проводили при температуре 1200°C в течение 20ч в среде N_2 с последующим гомогенизирующим отжигом при этой же температуре в среде Ar в течение 6ч.

Таблица 1: Элементный состав исследуемого сплава Ni-Co-Cr-(X), масс. %

Имя	Ni	Co	Cr	Ti	W	Mo	Si	C	O
ВЖ171	осн.	29	28	2...3	$\leqslant 2,5$	$\leqslant 2,5$	$\leqslant 0,5$	$\leqslant 0,5$	$< 0{,}1$

Измерения температурных зависимостей внутреннего трения (ТЗВТ) и амплитудных зависимостей внутреннего трения (АЗВТ) проводили в Гц области частот при свободно затухающих крутильных колебаниях образца на обратном крутильном маятнике – релаксаторе с электромагнитной системой деформирования образца кручением и оптической полуавтоматической системой регистрации деформации.

Для измерений ИПХФ РАН г.Черноголовка были предоставлены образцы прямоугольного сечения $1,45 \times 1,45 \times 100$мм. Затем образцы шлифовались до поперечных размеров $a \times b \approx 1,01 \times 1,01$мм. После шлифования и закрепления образцов в зажимах релаксатора для снятия внутренних напряжений проводили вакуумный отжиг по режиму: нагрев до 250°C, выдержка 20 мин. и последующее охлаждение вместе с печью.

В качестве характеристик неупругих свойств использовали логарифмический декремент δ и величину внутреннего трения Q^{-1}, которые при использованном в данной работе методе свободных затухающих колебаний определяли как

$$\delta = \pi Q^{-1} = \frac{1}{n} \ln \frac{A_0}{A_n}, \tag{1}$$

где A_0 и A_n – значения амплитуды начального и n-го колебаний, n – количество колебаний в выбранном интервале амплитуд.

Среднее значение амплитуды деформации сдвига γ в центре длинной стороны сечения образца в диапазоне амплитуд затухающих крутильных колебаний от A_0 до A_n определяли при условии микродеформации $\theta R \ll 1$, а именно

$$\gamma = \theta b \kappa, \tag{2}$$

где θ – относительный угол закручивания образца

$$\theta = \frac{A}{2L\ell} = \frac{A_0 + A_n}{4L\ell}, \tag{3}$$

а поправочный коэффициент κ, учитывающий прямоугольную форму образца, равен [3]

$$\kappa = 1 - \frac{8}{\pi^2}\cosh^{-1}\frac{\pi a}{2b} - \frac{8}{9\pi^2}\cosh^{-1}\frac{3\pi a}{2b}, \tag{4}$$

при этом L – длина светового плеча в оптической системе измерения амплитуд колебаний, 2580мм; ℓ – длина рабочей части исследуемых образцов, $\approx$ 47 мм; R – поперечный размер образца.

2. Экспериментальные данные

2.1. Неазотированное состояние. Исходный материал.

Исследовался образец №7. В амплитудонезависимой области были измерены и обработаны характеристики ВТ в диапазоне температур $20 \ldots 600°$C. Установлено, что высокотемпературный ФВТ описывается уравнением вида

$$Q_f^{-1}(T) = \frac{A}{T^m \omega^n} \exp\left(-\frac{U_f}{kT}\right), \tag{5}$$

в которое кроме температуры T входит и частота измерения ω.

Данные, представленные на рис. 1 позволяют получить оценку значения энергии активации высокотемпературного фона ВТ $U_f = 0,69 \pm 0,01$ эВ. По этим данным также можно приближенно оценить величину энергии активации U_0 физического процесса, ответственного за формирование вязкоупругих свойств вещества в области температур проявления высокотемпературного ФВТ. Она составляет $U_0 = U_f/n = 2,76$ эВ (n=0.25), что находится в хорошем соответствии со значением энергии активации самодиффузии в Ni, где $U_{Ni} = 2,92$ эВ согласно [4].

2.2. Азотированное состояние. Материал упрочнен нитридами Cr_2N и TiN.

Исследовался образец №04. Аналогично в амплитудонезависимой области микродеформаций были измерены и обработаны характеристики ВТ в диапазоне температур $20 \ldots 600°$C. По данным рис. 2 энергия активации высокотемпературного ФВТ азотированного материала составила $U_f = 0,90 \pm 0,01$ эВ. По этим данным возможно приближенно оценить величину энергии активации U_0 физического процесса, ответственного за формирование вязкоупругих свойств вещества в области температур проявления высокотемпературного ФВТ. Она составляет U_0 = 3,6 эВ.

Заключение

Получены экспериментальные данные по фону ВТ для образцов сплава ВЖ171 в исходном состоянии и подвергнутых азотированию. Новые данные совместно с опубликованными

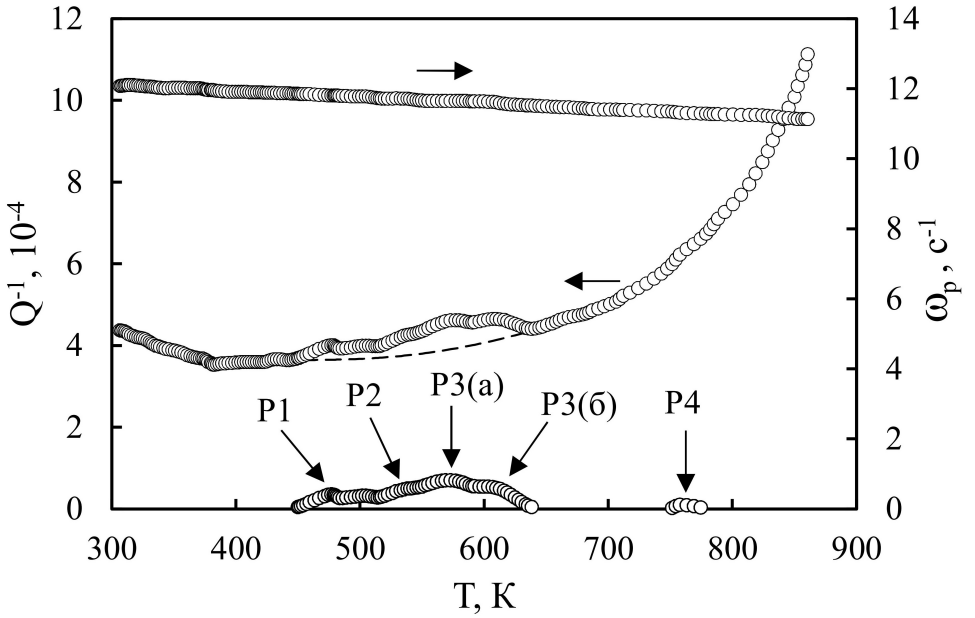


Рис. 1. Температурные зависимости внутреннего трения $Q^{-1}(T)$, фона внутреннего трения Q_F^{-1} (- - -) и резонансной частоты колебаний $\omega(T)$. Стрелки над графиками указывают принадлежность к вертикальным осям координат. Температура перехода в вязкоупругое состояние $T_{cr(1)} = 769$K. Деформация $\gamma_1 \approx 1 \cdot 10^{-4}$

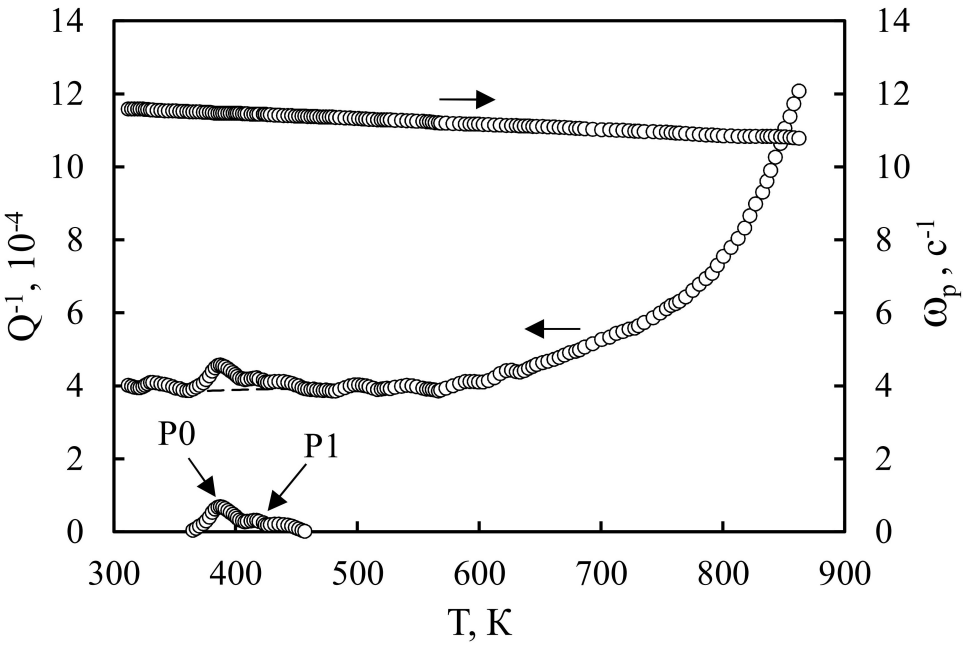


Рис. 2. Температурные зависимости внутреннего трения $Q^{-1}(T)$, фона внутреннего трения Q^{-1} (- - -) и резонансной частоты колебаний $\omega(T)$. Температура перехода $T_{cr(2)} = 800$K. Деформация $\gamma_2 \approx 1 \cdot 10^{-4}$

ранее результатами исследований [5] уточняют характеристики высокотемпературного ФВТ

для сплава на основе матрицы Ni-Co-Cr.

Как следует из таблицы 2, составленной с учетом [5], значения энергии активации U_0 процесса, ответственного за формирование вязкоупругих свойств вещества, находятся в хорошем соответствии со значением энергии активации самодиффузии в Ni: $U_{Ni} = 2,92$ эВ. Это свидетельствует о том, что физические механизмы вязкоупругой релаксации, вероятнее всего, контролируются диффузией вакансий как, в частности, это представлено в моделях B. Escaig и Б.М. Даринского [6].

Результаты показывают, что азотирование сплава приводит к росту температуры перехода из упругого в вязкоупругое состояние от 665 К (для сплава в исходном состоянии) до 780 К (в азотированном).

Таблица 2: Характеристики высокотемпературного ФВТ и механизмов вязкоупругости

Перечень характеристик сплава ВЖ171	Исходное состояние		После азотирования	
Образец, №	2	7	01	04
Первая критическая амплитуда микродеформации, $\gamma_{cr(1)}$	$(3,9 - 4,1)10^{-4}$	-	$(1,2 - 1,3)10^{-4}$	-
Инструментальная составляющая фона, Q_0^{-1}	$2,44 \cdot 10^{-4}$	$3,61 \cdot 10^{-4}$	$2,56 \cdot 10^{-4}$	$3,87 \cdot 10^{-4}$
Нижняя граница области высокотемпературного ФВТ, T_{cr}	560 К	769 К	760 К	800 К
Энергия активации фона внутреннего трения, U_f	$0,63 \pm 0,01$ эВ	$0,69 \pm 0,01$ эВ	$0,59 \pm 0,01$ эВ	$0,90 \pm 0,01$ эВ
Расчетное значение энергии активации вязкоупругих свойств, U_0	2,52 эВ	2,76 эВ	2,36 эВ	3,60 эВ
Среднее значение T_{cr}	665 К		780 К	
Среднее значение U_f	$(0,66 \pm 0,01)$ эВ		$(0,74 \pm 0,01)$ эВ	
Среднее значение U_0	2,64 эВ		2,98 эВ	
Сдвиг энергии активации ΔU_0	$\Delta U_0 = \lvert U_{0BN} - U_{0AN} \rvert = 0,34$ эВ			

3. Благодарности

Авторы выражают глубокую благодарность руководителю проекта „Исследование закономерностей и физических механизмов эволюции структурно-фазового состояния и механических свойств жаропрочных сплавов системы Ni-Co-Cr-(X) при диффузионном обмене атомами внедрения с внешней средой“ проф. Колобову Ю.Р. (ИПХФ РАН, г. Черноголовка) за поддержку и проявленный интерес к этой работе.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ломберг Б.С. Материалы конференции // Всероссийская научно-техническая конференция «Перспективные жаропрочные никелевые деформируемые сплавы и технологии их переработки»: тезисы докладов всероссийской конференции (Москва, 15 ноября 2018г.) – Москва, 2018. С. 149 – 158.

2. Гадалов В.Н., Рыжков Ф.Н., Кореневский Н.А. Внутреннее трение, структура и физико-механические свойства литейных жаропрочных сплавов на никелевой основе. – Москва-Курск: КГТУ, 1996. 215 с.

3. Левин Д.М., Фролов Д.О. К определению эффективного модуля сдвига жаростойкого никелевого сплава системы ni-co-cr-(x) при квазистатическом нагружении // Молодежный вестник ПТИ ТулГУ. 2020. Ч.1. С. 264 – 273.

4. Смитлз К.Дж. Металлы. – М.: Металлургия, 1980. 447 с.

5. Левин Д.М., Фролов Д.О. Материалы конференции // I Международная молодёжная научная конференция «Новые материалы XXI века: разработка, диагностика, использование»: тезисы докладов международной конференции (Москва, 21 – 24 апреля 2020г.) – Москва, 2020. С. 126 – 131.

6. Постников В.С. Внутреннее трение в металлах. – М.: Металлургия, 1974. 352 с.

УДК 511.32

Изменение параметров зеренной структуры при отжиге комплексно-легированной стали

Г. В. Маркова (Россия, г. Тула)
Тульский государственный университет
email: galv.mark@rambler.ru
А. Р. Комарова (Россия, г. Тула)
Тульский государственный университет
email: galv.mark@rambler.ru
О. В. Логунова (Россия, г. Тула)
Тульский государственный университет
email: galv.mark@rambler.ru
А. Д. Маликов (Россия, г. Тула)
Тульский государственный университет
email: galv.mark@rambler.ru

Changes in the parameters of the grain structure during annealing of complex-alloyed steel

G. V. Markova (Russia, Tula)
Tula State University
email: galv.mark@rambler.ru
A. R. Komarova (Russia, Tula)
Tula State University
email: galv.mark@rambler.ru
O. V. Logunova (Russia, Tula)
Tula State University
email: galv.mark@rambler.ru
A. D. Malikov (Russia, Tula)
Tula State University
email: galv.mark@rambler.ru

Физические и механические свойства материалов определяются их структурной организацией и химическим составом. Одной из важнейших структурных характеристик является размер зерна. В соответствии с уравнением Холла-Петча, измельчение зерна приводит к повышению характеристик прочности. Вместе с тем, зернограничное упрочнение – единственный упрочняющий механизм, не вызывающий снижения пластичности и повышения температуры хрупко-вязкого перехода.

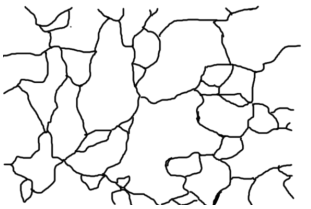
Размер зерна зависит от химического состава стали и способа ее производства, что определяет наследственность и склонность к росту зерна при нагреве. Стали, содержащие алюминий и/или карбидообразующие элементы, как правило, являются наследственно мелкозернистыми.

Малоуглеродистая сталь марки 12Х3ГНМФБА относится к новым высокопрочным комплексно-легированным сталям, обладающим хорошим сочетанием механических и технологических свойств. Целью настоящей работы является изучение характеристик зеренной структуры стали 12Х3ГНМФБА после отжига при разных температурах и определение на этой основе наследственности и склонности стали к росту зерна.

Образцы из стали 12Х3ГНМФБА подвергали нагреву до температур 910 °С, 950 °С, 1000 °С, и 1050 °С, выдерживали в течение 1 часа и охлаждали с печью со средней скоростью 1 °С/мин. Образцы подвергали шлифованию, полированию и травлению для выявления действительного зерна. Металлографические исследования проведены при 1000-кратном увеличении на микроскопе AxioObserver. После отжига сталь приобретает структуру, состоящую из зерен феррита и небольших областей, занятых зернистым перлитом. Из фотографий структуры выделяли фрагменты без включений перлита и обрабатывали их с использованием программы AdobePhotoshop (рис. 1). Средний условный диаметр зерен феррита определяли методом секущих [1]. Объём выборки для каждого образца равен 110 зерен. Погрешность измерения ±0,5 мкм.

С помощью программы Statgraphics строили гистограммы (рис.2) и проводили статистическую обработку полученных массивов данных (табл.1).

а



б

Рис. 1: зерна феррита (x1000), а – 910°C; б – 1050°C

Таблица 1: Результаты статистического анализа измерений

Температура нагрева	910 ^{0}C	950 ^{0}C	1000 ^{0}C	1050 ^{0}C
СКО	3,74	2,96	3,02	6,23
Дисперсия	13,99	8,74	9,11	38,78
Средний усл. диаметр, d_{cp}, мкм	7,17	7,99	8,75	11,95
Размах Δd=d_{max}-d_{min}, мкм	18,5	13,5	17,5	28
К-нт асимметрии	3,08	1,85	4,24	2,44
К-нт эксцесса	1,04	0,57	4,49	0,45

Для строгого определения статистических характеристик выборки необходимо установить вид функции распределения зерен по размерам. Традиционно считается, что распределение зерен по размерам в однофазной структуре описывается нормальным или логнормальным распределением [2]. Статистический анализ экспериментальных данных показал, что для некоторых образцов значения коэффициентов асимметрии и эксцесса оказались больше 2 (табл. 1), что является признаком распределения, отличного от нормального [3]. Авторы [4] рекомендуют использовать γ-распределение, как наиболее соответствующее механизмам формирования поликристаллических структур. Поэтому были проанализированы две конкурирующие нулевые гипотезы:

- распределение зерен по размерам подчиняется нормальному закону;
- размеры зерен описываются γ-распределением.

Для идентификации формы распределения использовали критерий согласия Пирсона (χ^2-критерий). В табл.2 приведены значения статистик, полученных при описании массива данных двумя типами распределения. Проведенная проверка нулевых гипотез показала, что χ^2-критерий всегда меньше для γ-распределения, а уровень значимости всегда больше 0.05, что свидетельствует о хорошем совпадении теоретического и эмпирического распределений.

Статистический анализ позволил определить средний условный диаметр, погрешность, величину дисперсии. Как видно из рисунка 3, средний размер зерна увеличивается при повышении температуры отжига немонотонно.

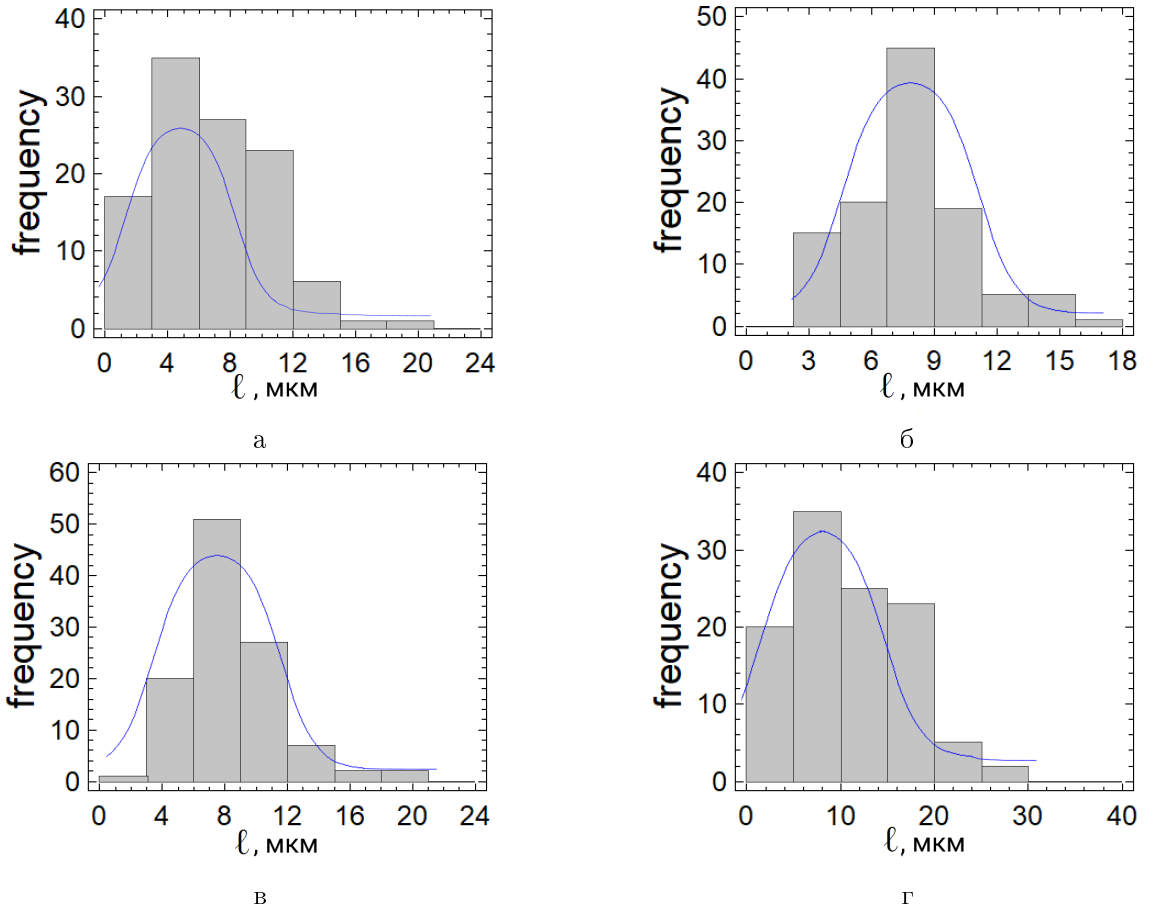


Рис. 2: гистограммы распределения длин хорд после отжига: а – 910°C; б – 950°C; в – 1000°C; г – 1050°C

До 1000 ^{0}C величина d_{cp} слабо возрастает, а при более высокой температуре начинается и более интенсивный рост зерна. В состав стали входят сильные карбидообразователи (ванадий и ниобий), наличие которых должно приводить к образованию специальных карбидов, закрепляющих границы зерен аустенита и препятствующих их росту при нагреве. При нагреве выше 1000 ^{0}C карбиды начинают диссоциировать, границы зерен освобождаются и зерна растут в соответствии со стремлением системы к минимизации поверхностной энергии. Очевидно, что при равновесном охлаждении из более крупнозернистого аустенита возникнут и более крупные зерна феррита. Поэтому размер действительного зерна феррита коррелирует с размером исходного аустенитного зерна.

Процесс растворения специальных карбидов не идет с одинаковой интенсивностью по всему объему. Отдельные зерна, освобождаясь от стопорящего эффекта карбидов, приобретают возможность к более раннему росту. Это подтверждается увеличением размаха Δd и повышением дисперсии (табл.1) при нагреве выше 1000 ^{0}C.

Таблица 2: Значения χ^2- критерия Пирсона для нормального и γ- распределения

Температура нагрева		910 ^{0}C	950 ^{0}C	1000 ^{0}C	1050 ^{0}C
Нормальное распределение	критерий Пирсона χ^2	12,9	18,3	5,2	6,8
	уровень значимости P	0,024	0,002	0,39	0,24
γ-распределение	критерий Пирсона χ^2	9,27	6,65	4,62	6,80
	уровень значимости P	0,09	0,24	0,46	0,23

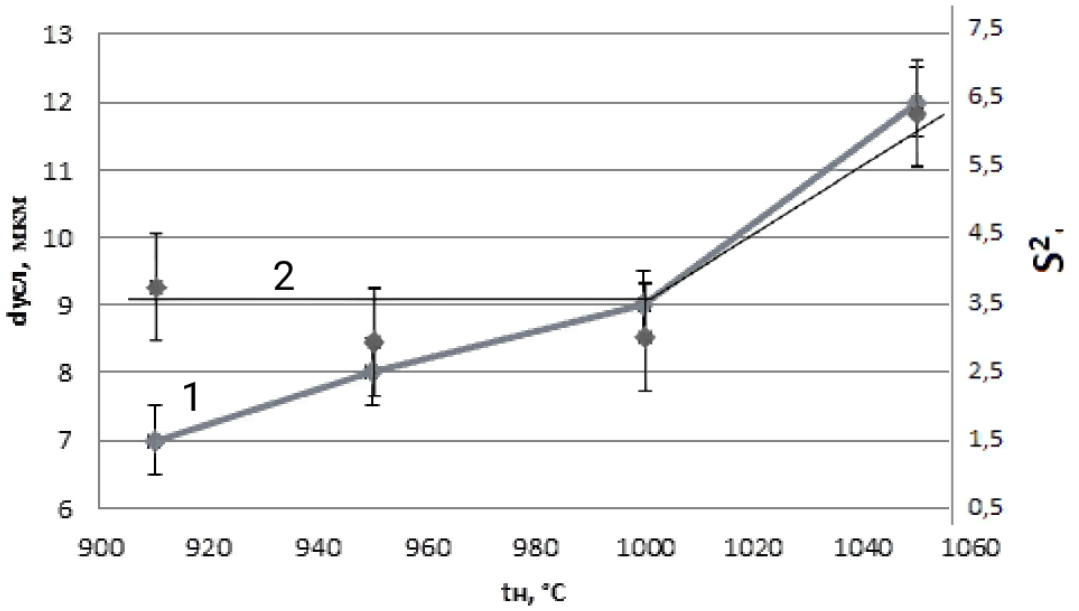


Рис. 3: Зависимость среднего условного диаметра (1) и СКО (2) от температуры нагрева.

Полученные результаты показали, что средний условный размер зерна при нагреве до 1050 ^{0}C соответствует 10 – 11 баллу, т.е. сталь 12Х3ГНМФБА является наследственно мелкозернистой и, следовательно, не чувствительной к перегреву. Это позволит использовать более высокие температуры при термомеханической обработке, обеспечивающие хорошую деформируемость.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. ГОСТ 5639-82 Стали и сплавы. Методы выявления и определения величины зерна.

2. Салтыков С.А. Стереометрическая металлография. – М.:Металлургия. 1970. – 376 с.

3. Новицкий П.В., Зограф И.А. Оценка погрешностей результатов измерения.- Л.: Энергоиздат, 1991.- 304 с

4. Архангельский С.И., Левин Д.М. Статистический анализ параметров и функций распределения по размерам зерен однофазных поликристаллических материалов//Заводская лаборатория. Диагностика материалов. 2020. Т.86. №4, с. 39-45

УДК 620.18

Об оценке разнозернистости однофазных металлических материалов

Ю. Е. Титова (Россия, г. Тула)
Тульский государственный университет
email: fmm@tsu.tula.ru
Е. А. Белых (Россия, г. Тула)
Тульский государственный университет
email: fmm@tsu.tula.ru

On the assessment of the grain size of single-phase metallic materials

U. E. Titova(Russia, Tula)
Tula State University
email: fmm@tsu.tula.ru
E. A. Belykh(Russia, Tula)
Tula State University
email: fmm@tsu.tula.ru

В процессе производства металлических изделий получение однородной структуры является сложной технологической задачей [1]. В металлургической промышленности невозможно полноценно анализировать параметры качества стали без обширной оценки разнозернистости ее структуры, поэтому разработка более совершенных объективных методов оценки и анализа величины зерна и разнозернистости остается сложнейшей задачей количественной металлографии [2, 3].

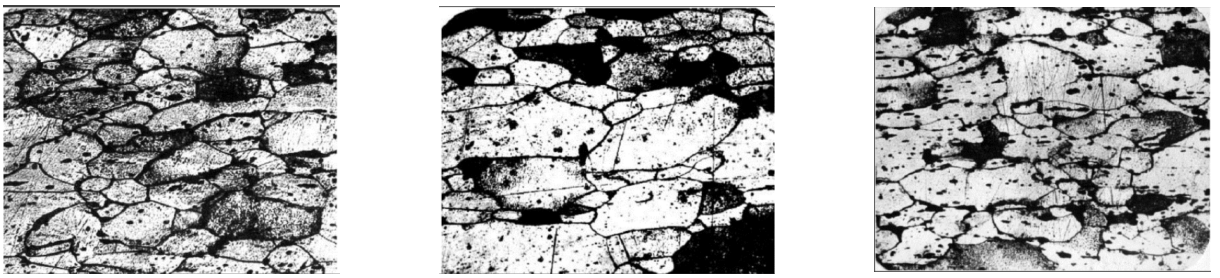
Наиболее распространенными методами оценки величины зерна в международной практике являются стандарт ASTM E 112, а также ГОСТ 5639. Стандарты построены на принципах оценки элементов структуры на плоском срезе методом применения ступенчатых шкал и эталонов (фотообразцов) [4].

Более корректной оценкой разнозернистости является построение кривой распределения зерен по размерам и определение ее числовых характеристик.

В 2017 году был опубликован патент «Способ количественной оценки неоднородности зеренной структуры листовых металлических материалов», (авторы - Е.А. Носова, Н.В. Луконина, М.И. Храмова, патентообладатель – ФГАОУВО « Самарский НИУ им. Ак. С.П. Королева») [5]. Технический результат предлагаемого изобретения заключается в получении однозначного критерия β для оценки неоднородности зеренной структуры. Коэффициент неоднородности рассчитывают как отношение ширины графика вероятности распределения величины зерна на полувысоте к наиболее вероятному размеру зерна, умноженному на максимальную вероятность величины зерна. При этом достигается отсутствие размерности у коэффициента неоднородности и однозначность оценки однородности зеренной структуры. При равной вероятности всех значений величины зерна будет наблюдаться максимальная разнозернистость,

то есть неоднородность величины зерна. В этом случае коэффициент β стремится к бесконечности. Если разнозернистость минимальна или отсутствует, то есть зеренная структура имеет высокую степень однородности, то график плотности вероятности вырождается в вертикальную линию при определенном значении размера зерна. Тогда коэффициент неоднородности β стремится к нулю. Таким образом, чем выше значение коэффициента неоднородности, тем больше степень неоднородности зеренной структуры. Количественный показатель β удобно использовать, например, при выявлении наиболее благоприятных режимов деформационной и термической обработки листовых заготовок, который позволит получить наиболее однородную зеренную структуру.

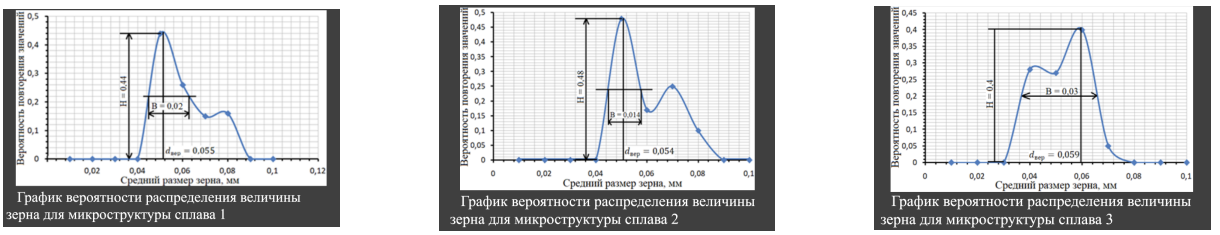
С помощью описываемого способа была проведена оценка степени разнозернистости образцов сплава Fe-C-B (0,03 % C, 0,0010 % B), фотографии микроструктур которого после разных режимов деформационно-термической обработки представлены на рисунке 1.



а б в

Рис. 1: Микроструктуры сплава Fe-C-B после холодного волочения со степенью деформации 43 %: а – образец 1(температура отжига 450 0C), б – образец 2 (температура отжига 550 0C), в – образец 3 (температура отжига 650 0C).

На рисунке 2 представлен результат применения данного метода.



а б в

Рис. 2: Графики вероятности распределения величины зерна в исследуемых образцах

Исследования показали, что наименьшим значением β , а, следовательно, самой высокой однородностью, обладает образец 2. Результат неплохо согласуется с результатом исследований, проведенных на кафедре группой под руководством С.И. Архангельского на этих же образцах, но при другом способе оценки разнозернистости [6].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Новиков, И.И. Теория термической обработки металлов / И.И. Новиков. – 4-е изд., испр. и доп.; – М.: Металлургия, 1986. – 480 с.

2. Горелик, С.С. Рекристаллизация металлов и сплавов: Монография / С.С. Горелик, С.В. Добаткин, Л.М. Капуткина. – 3-е изд., перераб. и доп.; – М.: МИСИС, 2005. – 432 с.

3. Салтыков, С.А. Стереометрическая металлография: Учебное пособие / С.А. Салтыков. – М.: Металлургия, 1976. – 270 с.

4. ГОСТ 5639-82. Стали и сплавы. Методы выявления и определения величины зерна. – Введ. 1983-01-01. – М.: ИПК Изд-во стандартов, 1983. – 16 с.

5. Носова, Е.А. Способ количественной оценки неоднородности зеренной структуры листовых металлических материалов: пат. 2628815 Российская Федерация / Е.А. Носова, М.И. Храмова, Н.В. Селиверстова. – 2016. – Бюл. №24. – 12 с.

6. Родионова, Ю.Е. Влияние микролегирования на протекание рекристаллизационных процессов в холоднодеформированных малоуглеродистых сталях: Дисс. канд. техн. наук: 05.16.01 / Ю.Е. Родионова – Тула, 1999. – 173 с.

УДК 669.537.7:621.357.5

Использование векторных функций для описания НДС в металлических средах с дефектами

А. Н. Чуканов (Россия, г. Тула)
Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого
email: alexchukanov@yandex.ru
В. А. Терешин (Россия, г. Тула).
Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого
email: tereshin.va-tspu@yandex.ru
Е. В. Цой (Россия, г. Тула)
Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого
tereshin.va-tspu@yandex.ru

Using vector functions to describe stress-strain state (SSS) in metal media with defects

A. N. Chukanov (Russia, Tula)
Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University
email: alexchukanov@yandex.ru
V. A. Tereshin (Russia, Tula).
Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University
email: tereshin.va-tspu@yandex.ru
E. V. Tsoi (Russia, Tula)
Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University
tereshin.va-tspu@yandex.ru

Введение. Эволюция пор в сталях в ходе водородной стресс-коррозии контролируется распределением в их окрестности внешних и внутренних напряжений [1,2]. Рост напряжений внутри пор и их релаксация в окружающем объёме определяют состав и давление в поре [3], диктуют направления микротрещин от поверхности и стимулируют обезуглероживание в периферийной зоне пластичности (ЗП) [4,5]. Авторы использовали аналогию поля напряжений у поры и поля скоростей при обтекании твёрдого тела идеальной жидкостью [7-9]. С помощью элементарных функций они разработали алгоритм расчёта компонент тензора напряжений и описание ЗП у пор различной морфологии в металле под нагрузкой. Он позволил формализовать эволюцию ЗП [6]. Алгоритм имел ряд ограничений. **Целью работы** являлось совершенствование разработанного алгоритма [8] расчёта компонент тензора напряжений.

Экспериментальные результаты. При действии на образец с порами растягивающего напряжения сумма проекций сил на поверхности пор на направление нормали равна нулю. Определяли три компоненты тензора напряжений. Граничные условия записали в виде: $\sigma_{xx}n_x + \sigma_{xy}n_y = 0$; $\sigma_{yx}n_x + \sigma_{yy}n_y = 0$, где n_x, n_y - проекции вектора нормали к поверхности поры в точке наблюдения. Приведенные равенства аналогичны условию на поверхности тела, обтекаемого жидкостью $v_x n_x + v_y n_y = 0$. **Длинная цилиндрическая пора.** Рассчитывали компоненты тензора напряжений в нагруженной металлической среде у цилиндрической поры, перпендикулярной нагрузке [7,8]. Получили формулы для σ_{xx} , σ_{xy}: $\sigma_{xx} = 1 + \frac{a^2(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2}$; $\sigma_{xy} = \frac{-2a^2xy}{(x^2+y^2)^2}$. После подстановки σ_{xy} в условие статики $d\sigma_{yx}/dx + d\sigma_{yy}/dy = 0$ и интегрирования по «y» получили выражение для σ_{yy}: $\sigma_{yy} = f(x) + \frac{a^2(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}$. Формулы для σ_{xx} , σ_{xy} удовлетворяли условиям статики и условиям напряжений на поверхности поры ($x\sigma_{xx} + y\sigma_{xy} = 0$; $x\sigma_{yx} + y\sigma_{yy} = 0$). Реализация описанной методики требовала введения функций φ и ψ - аналогов функций потенциала и тока при обтекании жидкостью твёрдого цилиндра [7]. Для цилиндрической поры они имели вид $\varphi = x\left[1 + \frac{a^2}{x^2+y^2}\right]$; $\psi = y\left[1 - \frac{a^2}{x^2+y^2}\right]$. Функции φ и ψ являлись гармоническими ($\Delta\varphi = 0$, $\Delta\psi = 0$), как и сами величины σ_{xx}, σ_{xy} и σ_{yy} (при $f = 1$). Результаты для σ_{xx} ,σ_{xy} сопоставили с расчётом плосконапряжённого состояния около сквозного цилиндрического отверстия в тонкой пластине (решение Кирша) [10]. Выявили хорошее соответствие для точек, близко расположенных к поверхности поры ($x^2 + y^2$ - $a^2 << a^2$). Для точек, удалённых от её, полученные выражения имели ограничения. **Векторные функции.** Для совершенствования [8] и полученных решений ввели понятие вектора $\boldsymbol{S}$ и поля вектора $\boldsymbol{S}$. Компоненты тензора напряжений являлись его проекциями $S_x = \sigma_{xx}$, $S_y = \sigma_{xy}$. Приняли условия $div\ \boldsymbol{S} = 0$ и $rot\ \boldsymbol{S} = 0$. Они привели к выводу о равенстве нулю лапласиана $\boldsymbol{S}$ ($\Delta\ \boldsymbol{S} = 0$). По аналогии с рассуждениями [7,8] использовали функции φ и ψ. Проекции вектора $\boldsymbol{S}$ (S_x, S_y) являлись гармоническими функциями и стремились к нулю при стремлении к бесконечности «x» или «y». Используя их, получили выражение для σ_{xx}: $\sigma_{xx} = 1 + \frac{By}{x^2+y^2} + C\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2\ )^2}$. Подставляя его в условие статики и интегрируя по y относительно σ_{xy}, получили формулу для расчёта σ_{xy}: $\sigma_{xy} = \frac{-Bx}{x^2+y^2} - \frac{2Cxy}{(x^2+y^2)^2}$. Объединив выражение σ_{yx} с вторым условием статики $d\sigma_{yx}/dx + d\sigma_{yy}/dy = 0$ и интегрируя его по y относительно $d\sigma_{yy}/dy$, определили величину σ_{yy}: $\sigma_{yy} = \frac{-By}{x^2+y^2} + C\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} + f(x)$ ($f(x)$ - постоянная интегрирования). После нахождения коэффициентов B, C, D и конкретизации краевых условий функции $f(x)$ формулы для σ_{ik} имели вид: $\sigma_{xx} = 1 + \frac{ay}{a^2+x^2} + a^2\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$; $\sigma_{xy} = \frac{-ax}{a^2+x^2} - \frac{2a^2xy}{(x^2+y^2)^2}$; $\sigma_{yy} = -\frac{2ax}{a^2+x^2} + \frac{ay}{x^2+y^2} + a^2\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$. Эти выражения позволили уточнить результаты расчёта σ_{ik} по сравнению с алгоритмом [8]. **Сферическая пора.** Приведенный выше алгоритм расчёта напряжений у цилиндрической поры подтвердил целесообразность его использования для часто встречающихся в структурах сталей пор. Эти поры представляют трёхмерный случай, хотя для описания требуют только две координаты. Авторы рассмотрели поле напряжений у сферической поры. Для анализа

применили цилиндрическую систему координат (z и ρ). Повторно использовали вектор $\boldsymbol{S}$, проекции которого $S_z = \sigma_{zz}$ и $S_\rho = \sigma_{z\rho}$. Основным уравнением для $\boldsymbol{S}$ было условие статики $d\sigma_{\rho z}/dz + d\sigma_{\rho\rho}/d\rho + \sigma_{\rho\rho}/\rho = 0$. Ротор векторной функции $\boldsymbol{S}$ равен нулю: $dS_z/d\rho = dS_\rho/dz$. Если у векторной функции двух переменных (плоский случай) тождественно равны нулю и дивергенция, и ротор, то равен нулю и лапласиан скалярной функции – проекции вектора $\boldsymbol{S}$. Такие скалярные функции являются гармоническими. В анализируемом трёхмерном случае, когда одна из трёх координат является циклической и не участвует в уравнениях, описание усложнялось. Анализ тождеств, записанных для данного случая, показал, что при равенстве нулю ротора и дивергенции $\boldsymbol{S}(z,\rho)$, функция S_z является гармонической, а функция S_ρ таковой быть не может. Поэтому, записали $\Delta\, S_z = 0$, $\Delta S_\rho \neq 0$. С учётом этого, построение методики вычисления компонент тензора напряжений начали с $\sigma_{zz} = S_z$. При подстановке гармонических функций в уравнение статики и последующего интегрирования по ρ получили выражение для $\sigma_{z\rho}$: $\sigma_{z\rho} = -\frac{3Dz\rho}{(z^2+\rho^2)^{5/2}}$. На основе $\sigma_{z\rho}$ уточнили формулу σ_{zz}. В итоге выражения для σ_{zz} и $\sigma_{z\rho}$ имели вид $\sigma_{zz} = 1 + \frac{a^3}{2}\frac{\rho^2-2z^2}{(z^2+\rho^2)^{5/2}}$; $\sigma_{z\rho} = -\frac{3a^3}{2}\frac{z\rho}{(z^2+\rho^2)^{5/2}}$. $\sigma_{\rho\rho}$ определили, интегрируя по ρ уравнение $\rho\sigma_{\rho\rho} = \int \int 3D\rho^2\frac{\rho^2-4z^2}{(z^2+\rho^2)^{7/2}}d\rho + f(z)$, полученное подстановкой $\sigma_{z\rho}$ в условие статики. Для диапазона малых z ($z < a/2$) действовало выражение $\sigma_{\rho\rho} = \frac{3a}{4\rho}\left[1 - \frac{a^2}{\rho^2}\right] + \frac{45}{16}\frac{a^3z^2}{\rho^5}$. Для диапазона $z > a/2$, работало $\sigma_{\rho\rho} = \frac{1{,}44a}{\rho} - \frac{2a^3\rho^2}{(\rho^2+z^2)^{\frac{5}{2}}} - \frac{a^3\rho^4}{2z^2(\rho^2+z^2)^{5/2}}$. Область точек наблюдения между симметричными прямыми $\rho = z$, с точками $\sigma_{zz} = 1$, представляла область повышенных напряжений. Анализ характерных точек у поверхности пор ($\sigma_{zz} = 1$, $\sigma_{\rho\rho} = -\sigma_{z\rho} = \sigma_{zz} = \frac{3}{4}$) выявил зону с очень высокой интенсивностью σ_i напряжений [11,12]. σ_i считали равной второму инварианту девиатора напряжений и определяли комбинацией σ_{ik} $\sigma_i = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[(\sigma_{zz}-\sigma_{\rho\rho})^2 + \sigma_{\rho\rho}^2 + \sigma_{zz}^2 + 6\sigma_{z\rho}^2\right]^{1/2}$. Края указанной зоны у поверхности поры расположены за линиями $\rho = z$. В рассмотренных точках интенсивность σ_i определили равной 1,5. В этой области возможен переход материала в состояние пластичности и формирование ЗП. Область точек между линиями $\rho = z$ по обе стороны от оси $0z$ является областью пониженных значений интенсивности напряжений. Особенно низкие значения σ_i выявили у точки A в области площадью $\approx a^2/4$. **Линзообразная пора.** Разработку методики продолжили для поры в форме симметричной сферической линзы. Вдоль главной оси симметрии поры действовало внешнее напряжение $\boldsymbol{\sigma}_{\text{н}}$. Применили алгоритм, аналогичный решению для сферической поры. Для сферической линзы рассмотрели поле вектора $\boldsymbol{S}$ с проекциями $S_z = \sigma_{zz}$ и $S_\rho = \sigma_{z\rho}$. Линии вектора $\boldsymbol{S}$ (силовые линии) не должны пересекаться - дивергенция вектора равна нулю. Поверхность линзы описывали уравнением $(L + z)^2 + \rho^2 = a^2$ (где $a = (d^2 + h^2)/2h$). Для точек её поверхности постулировали условия $(L + z)\sigma_{zz} + \rho\sigma_{z\rho} = 0$; $(L + z)\sigma_{\rho z} + \rho\sigma_{\rho\rho} = 0$. Их следствием являлось не равенство нулю величины $rot\boldsymbol{S}$ около поверхности. Поле напряжений по характеристикам близко к полю, у воображаемой сферической поры радиусом d, охватывающей линзу. Для него приняли равенство нулю ротора вектора $\boldsymbol{S}$ и его лапласиана S_z. В точках же, близких к поверхности поры и оси $0z$, ротор вектора $\boldsymbol{S}$ отличен от нуля. С учётом этого поле напряжений соответствовало полю воображаемой сферической поры «a», включающей линзу как часть себя. Условия на поверхности линзы близки к постулированным (исключая «вырожденную» линзу, $d << L$). Выяснили, что в окружающем пору пространстве, сложно разработать единый алгоритм решения. Для разных частей пространства разработали два типа решений с разными исходными уравнениями. Установили особенности точек поля напряжений у кромки линзы. Выяснили особенности функции ψ поля вектора $\boldsymbol{S}$. Силовая линия – это геометрическое место точек, где $\psi = \text{const}$. $S_z = d\psi/d\rho^2$. В случае сферической поры радиусом «a» функция ψ имела вид $\psi = \rho^2\left[1 - \frac{a^3}{(z^2+\rho^2)^{3\backslash 2}}\right]$. Определили расстояние ρ_m от центра линзы до точки пересечения силовой линии с плоскостью $z = 0$. Оценили уменьшение

${\rho_1}^2$ при изменении формы поры от сферы (d) к линзе (d и h). Для силовой линии с параметром b_1, проходящей около сферы «a», с центром на расстоянии L от центра линзы, уравнение для ψ записали как $b_1^2 = \rho_1^2\left[1-\frac{a^3}{\left(L^2+\rho_1^2\right)^{3/2}}\right]$. Величина ${\rho_m}^2$ являлась решением системы трёх уравнений а) $b^2=\rho_1^2-\frac{d^3}{\rho_1}$; б) $b\,{}_1^2=\rho_1^2\left[1-\frac{a^3}{\left(L^2+\rho_1^2\right)^{\frac{3}{2}}}\right]$; в) $b_1^2=\rho_m^2-\frac{d^3}{\rho_m}$. Для производной $d{\rho_m}^2/db^2$ записали неявное выражение $\frac{d\rho_m^2}{db^2}=\frac{d\rho_m^2}{db_1^2}\frac{db_1^2}{d\rho_1^2}\frac{d\rho_1^2}{db^2}=\frac{1+\frac{a^3\left(\rho_1^2-2L^2\right)}{2\left(\rho_1^2+L^2\right)^{5/2}}}{\left(1+\frac{d^3}{2\rho_m^3}\right)\left(1+\frac{d^3}{2\rho_1^3}\right)}$. С учётом его определили значение σ_{zz} в точках $z=0$, $\rho>d$. Выявили отличительную особенность поля напряжений около поры в форме двояковыпуклой сферической линзы. В точках у кромки линзы главный элемент тензора напряжений σ_{zz} в a^2/d^2 раз больше значения, соответствующего сферической поре ($a=d$) [11]. Это учли при выводе выражения для $S_z=\sigma_{zz}$. С учётом сказанного о $rot\boldsymbol{S}$, в точках у кромки линзы (где $\sigma_{zz}=S_z$ особенно велико), функцию $S_z(z,\rho)$ считали гармонической. В выражение для σ_{zz} включили две простые гармонические функции и записали выражение для σ_{zz}: $\sigma_{zz}=1+B_1\frac{1}{(z^2+\rho^2)^{1/2}}+D_1\frac{\rho^2-2z^2}{(z^2+\rho^2)^{5/2}}$. После определения $d\sigma_{zz}/dz$, умножения на $-\rho$, интегрирования по ρ получили формулу частного решения σ_{zz} для случая $z^2<<\rho^2$): $\sigma_{z\rho}=-\frac{B_1 z}{\rho(z^2+\rho^2)^{1/2}}-\frac{3D_1 z\rho}{(z^2+\rho^2)^{5/2}}$. Функциям $\sigma_{zz}(z,\rho)$ и $\sigma_{z\rho}(z,\rho)$ соответствовала функция ψ вида: $\psi=\int\sigma_{zz}d\rho^2=\rho^2+2B_1\left(\sqrt{\rho^2+z^2}-z\right)-\frac{2D_1\rho^2}{(z^2+\rho^2)^{3/2}}$. Далее, определяя выражения и уточняя поведение силовых линий (обычной и нулевой), получили окончательный вид выражений для σ_{ik}: $\sigma_{zz}=1+\frac{d^3}{2}\frac{\rho^2-2d^2z^2/h^2}{(\rho^2+d^2z^2/h^2)^{5/2}}$; $\sigma_{z\rho}=-\frac{3d^5}{2h^2}\frac{z\rho}{(\rho^2+d^2z^2/h^2)^{5/2}}$.

Переходная функция. Для расчёта компонент поля напряжений около поры в форме сферической линзы получили две группы формул I и II. Формулы группы I применяли к точкам наблюдения, расположенным у кромки линзы. Формулы группы II применяли к точкам, достаточно удалённым от кромки линзы. Вклад решений I и II в окончательные выражения для σ_{zz} и $\sigma_{z\rho}$ учитывали введением **переходной функции** $\eta(z)$, которая при $z=0$ равна 1 и с ростом z монотонно уменьшается. Функцию $\eta(z)$ использовали при формулировке соотношения между функциями ψ_I и ψ_{II}: $\psi=\psi_I(1-\eta)+\psi_{II}\,\eta$. Далее, используя $\sigma_{zz}=d\psi/d\rho^2$, получили $\sigma_{zz}=\eta(\sigma_{zz})_I+(1-\eta)(\sigma_{zz})_{II}$. Для выражения $\sigma_{z\rho}$, применяли соотношение $\left(\frac{\sigma_{z\rho}}{\sigma_{zz}}\right)_I\eta+\left(\frac{\sigma_{z\rho}}{\sigma_{zz}}\right)_{II}(1-\eta)=\frac{\sigma_{z\rho}}{\sigma_{zz}}$, имевшее смысл тангенса угла между касательной к силовой линии и осью $0z$. На основании этого разработали уравнения: $\left(\frac{\sigma_{z\rho}}{\sigma_{zz}}\right)_I\eta+\left(\frac{\sigma_{z\rho}}{\sigma_{zz}}\right)_{II}(1-\eta)=\frac{\sigma_{z\rho}}{\sigma_{zz}}$; $\sigma_{z\rho}=[\eta(\sigma_{zz})_I+(1-\eta)(\sigma_{zz})_{II}]\left[\eta\left(\frac{\sigma_{z\rho}}{\sigma_{zz}}\right)_I+(1-\eta)\left(\frac{\sigma_{z\rho}}{\sigma_{zz}}\right)_{II}\right]$; $\eta=\left(\frac{h-z}{h+z}\right)^2$. Для расчёта величины $\sigma_{\rho\rho}$ использовали частные решения. Для очень малых z ($z<<h$) получили выражение: $\sigma_{\rho\rho}=\frac{B_1}{\rho}ln\frac{\rho}{d}+\frac{3D_1}{2\rho}\frac{\rho^2-a^2}{a^2\rho^2}+\frac{3B_1z^2}{4\rho^3}+\frac{15D_1z^2}{4\rho^5}$. **Выводы.** Показана сложность обобщенного описания поля напряжений у пор различной морфологии. Разрыв непрерывности в точках кромки поры-линзы требовал отдельно рассмотреть несколько областей около неё. При получении решения для σ_{zz} и $\sigma_{z\rho}$ выявили фактор a^2/d^2. Сравнение решений σ_{zz} для поры-сферы и поры-линзы показало, что $(d^2+h^2)^2/4d^2h^2$ успешно работает для линзы. В случае поры-линзы зона высокой интенсивности напряжений перпендикулярна к оси и заметно больше, чем в случае поры-сферы.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Sergeev N.N., Chukanov A.N., Baranov V.P., Yakovenko A.A. Development of Damage and Decarburization of High-Strength Low-Alloy Steels Under Hydrogen Embrittlement // Metal

Science and Heat Treatment. – 2015. - vol.57.- № 1-2.- P. 63-68.

2. Чуканов А.Н., Сергеев Н.Н., Терешин В.А., Ростовцев Р.Н., Яковенко А.А., Леонтьев И.М. Термодинамическое обоснование «метанового» механизма деструкции упрочненных конструкционных сталей при электролитическом наводороживании под напряжением // Деформация и разрушение материалов. 2015. № 10. С. 32-39.

3. Чуканов А.Н. Морфология объёмных зон пластичности у газонаполненных пор в литых и порошковых сталях в условиях стресс-коррозии / А.Н. Чуканов, В.А. Терешин, А.Е. Гвоздев, С.Н. Кутепов, А.Н. Сергеев, Е.В. Агеев, А.А. Яковенко // Известия Юго-Западного государственного университета. - 2019; вып. 23(5). - С. 35-52.

4. Sergeyev N.N., Tereshin V.A., Chukanov A.N., Kolmakov A.G., Yakovenko A.A., Sergeyev A.N., Leontyev I.M., Khonelidze D.M., and Gvozdev A.E. Formation of Plastic Zones near Spherical Cavity in Hardened Low-Carbon Steels under Conditions of Hydrogen Stress Corrosion // Inorganic Materials: Applied Research, 2018, Vol. 9, No. 4, pp. 663-669.

5. Чуканов А.Н., Терешин В.А., Гвоздев А.Е., Сергеев А.Н., Яковенко А.А., Хонелидзе Д.М., Широкий И.Ф. Моделирование зон пластичности у газонаполненных пор в литых и порошковых сталях в условиях стресс-коррозии // Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки. - 2018. - Т. 23. - № 122. - С. 314-319.

6. Чуканов А.Н., Терешин В.А., Гвоздев А.Е., Шатульский А.А., Навоев А.П., Сергеев А.Н., Яковенко А.А., Кутепов С.Н., Цой Е.В. Эволюция зон пластичности в окрестности пор в сталях в условиях стресс-коррозии // Заготовительные производства в машиностроении.- 2020. - Т. 18. - №3.- С. 130-136.

7. Чуканов А.Н., Терешин В.А., Цой Е.В. Математическое моделирование напряженно-деформированного состояния в металлических средах на основе концепции силовых линий // Чебышёвский сборник. - 2020. - Т. 21. - Вып. 4(76). - С. 376 - 389.

8. Чуканов А.Н., Терешин В.А. Силовые линии и алгоритм моделирований напряженно-деформированного состояния материала // «Современные проблемы и направления развития металловедения и термической обработки металлов и сплавов», посвящ. 150-летию со дня рожд. академика А.А. Байкова: Сб. научн. статей Межд. научно-техн. конф. (18.09.2020 г.)/ редкол.: Е.В. Агеев (отв. ред.) [и др.]; Юго-Зап. гос. ун-т. Курск: Юго-Зап. гос. ун-т, 2020. - 271 с. - С. 241-244.

9. Чуканов А.Н., Терёшин В.А. Моделирование напряженно-деформированного состояния материала на основе концепции силовых линий // Матер. межд. конф. «Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы, приложения и проблемы истории», посвящ. столетию со дня рожд. проф. Б.М. Бредихина, В.И. Нечаева и С.Б. Стечкина». - 23-26.09.20.-Тула, ТГПУ им. Л.Н. Толстого, 2020.- С. 459-463.

10. Савин Г.Н. Распределение напряжений около отверстий. Киев: Наук. Думка, 1968. - 887 с.

11. Броек Д. Основы механики разрушения. - Пер. англ. – М.: Высшая школа, 1980.-368с.

Чебышёвские чтения

ПРОГРАММА
V Всероссийской научной конференции
школьников и студентов
«Чебышёвские чтения»
22 мая 2021 г.

ПЛЕНАРНОЕ ЗАСЕДАНИЕ

10.00-10.10 Торжественное открытие конференции

Председатель пленарного заседания — *Реброва Ирина Юрьевна* — доцент, кандидат физико-математических наук, декан факультета математики, физики и информатики ТГПУ им. Л. Н. Толстого.

Доклады:

10.10-10.50 Чубариков Владимир Николаевич. Теория чисел и теория функций. (МГУ имени М. В. Ломоносова, Москва)

10.50-11.30 Тимофеенко Алексей Викторович. От платоновых тел к паркетогранникам через символьное программирование и прототипирование (Онлайн школа Тетрика, Красноярск)

11.30-12.10 Дробышев Юрий Александрович, Дробышева Ирина Васильевна Пафнутий Львович Чебышёв – человек на все времена (Калужский филиал Финансового университета при Правительстве РФ, Калуга)

СЕКЦИОННОЕ ЗАСЕДАНИЕ

Руководитель — *Добровольский Николай Михайлович* — профессор, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой алгебры, математического анализа и геометрии

Доклады:

12.20-12.35 Земзеров Денис. Путь к успеху. Интересные факты из жизни великих математиков (ГПОУ ТО "ДПК г. Донской)

12.35-12.50 Яшунин Кирилл. История развития механики (ГПОУ ТО "АМТ г. Алексин)

13.05-13.20 Синицын Александр. Искусственный интеллект: разработка (МБОУ-Лицей № 2 им. Б.А. Слободскова, г. Тула)

13.20-13.35 Федорова Кира. Арифметическая и геометрическая прогрессии в жизни (МБОУ ЦО №32, г. Тула)

13.35-13.45 Перерыв

ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНОЕ ЗАСЕДАНИЕ

13.45-14.00 Подведение итогов работы конференции.

УДК 372.851

О вкладе П. Л. Чебышёва в развитие математики и математического образования

Ю. А. Дробышев (Россия, г. Калуга)
Калужский филиал Финансового университета при Правительстве Российской Федерации
e-mail: drobyshev.yury2011@yandex.ru
И. В. Дробышева (Россия, г. Калуга)
Калужский филиал Финансового университета при Правительстве Российской Федерации
e-mail: drobysheva2010@yandex.ru

On the contribution of Chebyshev in the development of mathematics and mathematical education

Yu. A. Drobyshev (Russia, Kaluga)
Financial University under the Government of the Russian Federation, Kaluga Branch
e-mail: drobyshev.yury2011@yandex.ru
I. V. Drobysheva (Kaluga, Russia)
Financial University under the Government of the Russian Federation, Kaluga Branch
e-mail: drobysheva2010@yandex.ru

1. Ввведение

Пафнутий Львович Чебышев появился на свет 4 (16) мая 1821 г. в небольшом селе Окатово, входившем в то время в состав Боровского уезда, располагавшемся на севере Калужской губернии. В метрической книге Спаса-на-Прогнаньи Боровского уезда Калужской губернии записано: «4 мая 1821 г. сельца Окатово у помещика корнета Льва Павловича Чебышева родился сын Пафнутий. Крещен 16 мая...» [5 Прудников В.Е. Пафнутий Львович Чебышев. - Л.: Наука, 1976. - 270с.].

Отцом будущего учёного был Лев Павлович Чебышев (1789–1861) — представитель дворянского рода, выходец из Тульской губернии.

Л.П. Чебышев «служил сначала регистратором в Тульском губернском правлении, затем в 1812 г. в чине корнета Тульского 1-го конно-казачьего полка участвовал в сражениях с армией Наполеона» [6, С. 14].

Мать Аграфена Ивановна также происходила из дворянского рода, она была весьма набожной женщиной. В 20 км от Окатово находился Боровский Пафнутьев монастырь, обитель, чтимая местными жителями. Ее Аграфена Ивановна после рождения старшей дочери Елизаветы часто посещала и просила Бога о даровании ей сына.

В Боровском монастыре пребывали мощи преподобного Пафнутия Боровского, день памяти которого приходился на 14 мая, т.е. почти совпадал с днем рождения первого сына Чебышевых, поэтому и было решено назвать новорожденного в честь святого.

Крестили младенца в церкви Спаса-Преображения села Спас-на-Прогнаньи. Восприемниками (крёстными родителями) мальчика стали подполковник Ф.И. Митрофанов и Е.А. Зыкова.

В семье Чебышевых было девять детей. Мать старалась воспитывать их в благочестии и строгости. Она же занималась начальным образованием Пафнутия, обучала его грамоте и чтению. Мальчик с особым увлечением читал церковные книги, знал наизусть многие молитвы, родители порой поражались его памяти. Арифметике и французскому языку мальчика обучала двоюродная сестра (по отцовской линии) Авдотья Квинтилионовна Сухарева. По воспоминаниям очевидцев, портрет сестры Пафнутий Львович «с большой любовью хранил у себя до конца своей жизни» [1, С. 9].

Первой его книгой из библиотеки отца было «Житие Пафнутия Боровского». Возможно, знакомство с подвигами великого святого привело к тому, что он пожелал подражать ему во всем, и это наложило отпечаток на его характер: стремление уединяться, жить скромно, иногда самоотреченно; помогать щедро и безвозмездно родственникам, студентам, учителям, инженерам, сиротам, монастырской братии.

Всю свою жизнь Пафнутий Львович следовал законам Божьим. Памятуя закон Божий, который говорит: «Почитай отца твоего и мать твою, чтобы продлились дни твои на земле, которую Господь, Бог твой, дает тебе», сильно любя и уважая своих родителей, он в начале 1880-х годов на месте снесенного старого родительского дома поставил оригинальный памят-

ник – массивную гранитную глыбу с надписью «Здесь у Льва Павловича и Агрофены Ивановны Чебышевых родилось пятеро сыновей и четыре дочери» [4]. Этот уникальный памятник сохранился до наших дней.

2. Становление личности

В 1832 г. семья Чебышевых перебралась в Москву, где у них был собственный дом. Родители решили подготовить взрослеющих сыновей Пафнутия и Павла к поступлению в Московский университет. Они не стали устраивать своих детей в какой-нибудь пансион, что было весьма модно в те годы, а предпочли обучение на дому. Для преподавания математики и физики был приглашен Платон Николаевич Погорельский (1800-1852) — один из лучших учителей Москвы, выпускник университета Златоглавой.

Латинскому языку Пафнутия Львовича обучал А.Т. Тарасенков — в то время студент медицинского факультета Московского университета, ставший впоследствии мужем старшей сестры Елизаветы.

«17 июня 1837 года, в возрасте 16 лет, Пафнутий Львович Чебышев подал прошение о зачислении его в число студентов университета по второму отделению философского факультета» [1, С. 13].

В сентябре 1837 г. П.Л. Чебышев был зачислен своекоштным студентом на четырехлетний срок обучения, так в то время называли студентов

Во время учебы он проявил себя одаренным студентом и обратил на себя внимание преподавателя курсов прикладной математики и механики профессора Николая Дмитриевича Брашмана, который стал руководить его занятиями. П.Л. Чебышев сохранил благодарную память о Брашмане и впоследствии поддерживал с ним деловые отношения.

В студенческие годы Пафнутий Львович активно занимался и самоподготовкой, например, он самостоятельно изучил материал лекций М.В. Остроградского по алгебраическому и трансцендентному анализу.

По университетскому уставу, действовавшему в те годы, студентам выпускного курса полагалось написать собственное сочинение в соответствии с выбранной специальностью. В 1840-1841 учебном году П.Л. Чебышев представил оригинальное сочинение на тему «Вычисление корней уравнений». Совет университета счел труд Пафнутия Львовича достойным серебряной медали.

Проблему решения уравнения автор исследования разделил на две самостоятельные задачи: отделение корней и собственно решение, т.е. отыскание числовых значений корней.

В 1841 г. закончилась студенческая жизнь П.Л. Чебышева, он сменил свой студенческий вицмундир на гражданскую одежду, выйдя из университета кандидатом, такую степень присваивали выпускникам университета, имевшим средний балл не ниже 4.5 по основным предметам.

Вследствие голода 1841 года, его родители вернулись в Окатово, и семья не имела больше возможности оказывать материальную поддержку старшему сыну. Сначала он решил открыть в родительском московском доме частный пансион, пробовал даже обучать математике постояльцев, но быстро отказался от этой затеи, разочаровавшись в непонятливости учеников.

Несмотря на то, что Пафнутий Львович еще не состоял на «статской» службе и испытывал материальные затруднения, он безвозмездно исполнял должность секретаря попечительства о бедных Пречистенской части г. Москвы (1841–1846), оказывая им посильную помощь [3, С. 26-37]. О людях московских трущоб будущий академик узнаёт не по рассказам Достоевского и Гиляровского. Бескорыстие молодого Чебышева в отношении городской бедноты стало притчей. Видимо, именно с этих пор известна знаменитая чебышевская фраза, ставшая впоследствии афоризмом: «Честь дороже прибытка» [4, С. 448-452]. Здесь, как и у святого, давшего ему имя, проявилась его главная добродетель — милосердие.

Спустя некоторое время П.Л. Чебышев, следуя совету Н.Д. Брашмана, решил получить ученую степень магистра в alma mater.

19 марта 1843 г. он подал в Совет Московского университета прошение о допущении к испытаниям на степень магистра математических наук.

После получения допуска ему предстояло сначала подробно и основательно в устной форме ответить на два вопроса, выбрав их с помощью жребия из тайного списка, а затем письменно раскрыть сущность двух вопросов, предложенных экзаменаторами.

23 сентября 1843 г. прошло устное испытание П.Л. Чебышева по фундаментальной и прикладной математике, а 29 октября 1843 г. письменное.

За свои ответы он получил отметки «удовлетворительно» и «весьма удовлетворительно». Вторая соответствует современной оценке «отлично».

В качестве магистерской диссертации в 1845 г. П.Л. Чебышев представил сочинение «Опыт элементарного анализа теории вероятностей». В своё время Н.Д. Брашман, опекавший молодого и перспективного ученого, познакомил его с графом С.Г. Строгановым (1794–1882) — попечителем Московского учебного округа, а тот поручил Пафнутию Львовичу написать элементарный курс теории вероятностей, предназначавшийся в качестве учебного руководства для камерального факультета Демидовского лицея г. Ярославля.

Защита магистерской диссертации состоялась 8 июня 1846 г. Оппонентами были назначены Н.Д. Брашман и Н.Е. Зёрнов.

3. Петербургский университет

В 1847 г. П.Л. Чебышев переехал в столицу. Он поселился в старом доме на Васильевском острове, располагавшемся на углу Кадетской линии и Среднего проспекта.

Право чтения лекций в университете П.Л. Чебышев получил после прочтения 8 (20) мая 1847 г. им пробной лекции (pro veria legendi) на тему «Об интегрировании с помощью логарифмов».

Вопрос об интегрировании функций, содержащих радикалы второй степени, был основным на этой лекции. Оппонентом выступил В.Я. Буняковский. Второе отделение философского факультета признало исследование П.Л. Чебышева вполне заслуживающим внимания

математиков «по трудности излагаемого в нем предмета и по тонким аналитическим соображениям, собственно принадлежащим автору».

«Успешная защита П.Л. Чебышевым этого исследования дала возможность декану 2-го отделения философского факультета Э.Х. Ленцу (1804–1865) выступить в Совете университета с предложением поручить магистру Чебышеву чтение высшей алгебры на 2-м курсе и теории чисел на 4-м курсе» [6, С. 69].

В ноябре 1847 г. Пафнутий Львович был избран адъюнктом университета и получил наравне с другими профессорами 5 лекций в неделю, что сильно поправило его материальное положение.

В 1848-1849 уч. году помимо высшей алгебры и теории чисел П.Л. Чебышеву было поручено чтение сферической тригонометрии, а также аналитической геометрии и интегрального исчисления.

Защита докторской диссертации «Теория сравнений» П.Л. Чебышевым состоялась 15 (27) мая 1849 г. в Петербургском университете. Оппонентами выступили профессора В.Я. Буняковский, С.С. Куторга, А.Н. Савич и О.И. Сомов. После защиты П.Л. Чебышев удостоился присвоения ученой степени доктора математики и астрономии. Так как работа «Теория срав-

нений» отличалась высоким научным уровнем и обладала рядом методических достоинств, решением Академии наук в том же 1849 г. её автору была присуждена половинная Демидовская премия.

В 1850 г. Пафнутий Львович (в возрасте 29 лет) получил должность экстраординарного профессора Петербургского университета.

В 1851 г. вышла в свет его небольшая работа «О кройке одежды», в которой он исследовал вопрос о специальных сетях координатных линий на поверхности. Эти сети, называемые теперь чебышёвскими, характеризуются следующим свойством: в каждом криволинейном четырехугольнике, образованном отрезками координатных линий, противоположные стороны имеют равные длины. Название доклада и статьи было оправдано тем, что нити куска ткани, натянутой на поверхность, образуют на ней чебышёвскую сеть. Эта работа ученого породила целое направление в математике, связанное с неизменностью масштаба на границе области при наилучшей её картографической проекции. Данное исследование продолжил Д.А. Граве (1863–1939) — ученик П.Л. Чебышева, создатель крупной русской алгебраической школы.

С 1852 по 1856 гг. Пафнутий Львович преподавал практическую механику в Александровском лицее.

Следует признать, что служебная и научная карьера П.Л. Чебышева была успешной. В 1853 г. его избрали адъюнктом Императорской Академии наук, в 1855 г. он стал членом Артиллерийского отделения Военно-ученого комитета, с 1856 по 1873 гг. был членом Ученого комитета Министерства народного просвещения (МНП) и в том же 1856 г. получил статус экстраординарного академика, в 1859 г. — ординарного академика Петербургской академии наук. В 1860 г. получил должность ординарного профессора Петербургского университета. С 1860 г. по 1868 г. был членом попечительского совета Петербургского учебного округа.

Помимо теории чисел, Пафнутий Львович получил значимые результаты, обогатившие мировую математическую науку в теории вероятностей и теории приближенного представления функций. Неслучайно в 1874 г. его избрали иностранным членом Парижской академии наук.

4. Чебышев и российское математическое образование

Начиная с 1847-1848 учебного года Пафнутий Львович приступил к чтению лекций, которые он читал до 1882 года. За это время им было разработано содержание лекций по высшей алгебре, теории чисел, сферической тригонометрии, интегральному исчислению, аналитической геометрией, теории эллиптических функций, теории вероятностей, исчислению конечных разностей. Уже в первый год работы его куратор академик В.Я. Буняковский отмечал, насколько ясно и последовательно молодой педагог излагает изучаемый материал, приведя его в систематический порядок, дав новые упрощенные доказательства [22. Прудников В.Е. П.Л.Чебышев – ученый и педагог. – 2-е изд. Доп. – М.: Просвещение, 1964. – 271с.

П.Л. Чебышевым была задана высокая планка чтения лекций, при этом он, с одной стороны, придерживался строгого доказательства изучаемого материала, а с другой, уделял значительное внимание практической его направленности. Для того, чтобы поддерживать внимание своих слушателей применялись различные приемы, оживляющие лекции и способствующие более лучшему усвоению материала. Один из таких приемов был связан с использованием принципа историзма. При изложении учебного материала рассматривались взгляды различных ученых на изучаемый предмет, проводился их сравнительный анализ и делался вывод о том, как происходило развитие того или иного метода или понятия.

Его лекции по различным разделам математики пользовались большой популярностью. Этому способствовало то, что ученый много внимания уделял усвоению принципиальных вопросов, подготавливая постепенно студентов к их восприятию, при этом по ходу лекции делал различные замечания, которые содействовали более глубокому усвоению материала и раскры-

вали его развивающий потенциал.

Как было отмечено выше, лекции П.Л. Чебышева были образцом логически обоснованных рассуждений, поэтому к нему на лекции стремились попасть студенты юридического факультета. Они учились у педагога «логичности построения выводов и поразительной доказательности речи».

С 1856 по 1873 г. П.Л. Чебышев являлся членом математической комиссии Ученого Комитета Главного управления училищ (впоследствии переименованным в Ученый комитет Министерства Народного Просвещения). Ни один вопрос, связанный с преподаванием математики, не решался без него. Работая в комиссии, ученый участвовал в разработке уставов для средних и высших учебных заведений, в составлении и рассмотрения программ по математике, рецензировании учебников для школы и отборе лучших из них. П.Л. Чебышев неоднократно говорил о необходимости защитить школу от плохих учебников, дать школе «доказательные», а не «рецептурные» учебники [1]. Он предлагал существенно расширить содержание обучения математике в гимназиях, включив в него элементы аналитической и начертательной геометрии, математического анализа и сферической тригонометрии. В 1858 г. им был составлен проект программы по математике, который долго обсуждался, изменялся, но так и не был принят.

В 1865 г., говоря об условиях конкурса на лучший учебник, П.Л. Чебышев подчеркивал необходимость ясного изложения учебного материала, не позволяющего неоднозначно понимать его смысл.

При обсуждении проблемы деятельности реальных курсов при уездных училищах в документе, представленном Ученому комитету, П.Л. Чебышев высказал свою точку зрения о том, что их содержание должно быть направлено на побуждение народных масс к любознательности и борьбе с отсталостью и рутиной.

Что касается изучения математики в уездных училищах, то, по глубокому убеждению, ученого, основное внимание следует обращать не только на понимание правил и формул, но и на умение пользоваться ими для практических целей. В объяснении к проекту программы по математике для уездных училищ он указывает на необходимость по возможности больше упражнять учащихся в решении задач на бумаге и в уме, употреблять счеты, решать геометрические задачи на построение и вычисление, соединять изучение геометрии с непосредственным показом в поле приемов землемерия, знание которых особенно важно в жизни.

Особо активно в комиссии обсуждался вопрос о путях развития гимназии. В первую очередь шли споры о том, какие предметы подлежат включению в учебный план и каково должно быть содержание каждого гимназического курса. П.Л. Чебышев выступил со своим обоснованным мнением. Он считал, что преподавание математики в гимназии, кроме подготовки к специальным занятиям физико-математическими науками, преследует цель сообщения сведений, необходимых всякому образованному человеку и обеспечивающих развитие умственных способностей. Последние две задачи должны осуществляться путем изучения арифметики, элементарного курса алгебры и геометрии в тесной связи с практической жизнью.

За 100 лет до реформы А.Н. Колмогорова для более глубокого изучения физико-математических наук и использования их для решения практических задач П.Л. Чебышев предложил в старших классах гимназии изучать элементы высшей математики (функции и их производные, разложение функций в ряды, способ линейного приближения). Так же, как и в высшей школе, он выступал против сообщения сведений по математике без строгих доказательств. В начальных классах, где нельзя провести доказательство, он предлагает использовать объяснения, раскрывающие сущность изучаемого вопроса.

Предложения Чебышева не были приняты, однако шестилетнее их обсуждение оказало влияние на поднятие уровня преподавания математики в гимназиях. В 1873 году предложения Чебышева с некоторыми изменениями и сокращениями были положены в основу программы

по математике для реальных училищ. Стоит также отметить предложения П.Л. Чебышева, направленные на улучшение подготовки учителей. Это вопросы изменения порядка испытаний на звание учителя уездного училища и допуска женщин к занятию должности учителя.

В качестве члена математической комиссии Ученого комитета П.Л. Чебышев рассмотрел свыше 200 книг в той или иной степени, предназначавшихся авторами для школ. В отзывах на рецензируемые учебники он сформулировал три основных требования к содержанию учебников математики: строгость изложения, простота доказательств, последовательность в расположении материала. «Доказательства, лишенные строгости, ничего кроме вреда, принести не могут. Не говоря уже о напрасной потере времени, употребленного на изучение таких доказательств, нестрогие доказательства вредно действуют на умственные способности учеников, приучая их видеть там достаточную причину, где ее нет» [2].

Точку зрения ученого на содержание математического образования и в частности, представленного в учебниках математики, поддерживали многие выдающиеся педагоги-математики того времени. Многие из высказанных П.Л. Чебышевым предложений актуальны и в настоящее время. Часть их них нашли отражение в содержании современного школьного математического образования. В первую очередь, это касается введения элементов высшей математики, практической направленности обучения математике.

Еще одна заслуга П.Л. Чебышева в том, что его деятельность способствовала распространению математических знаний. Ученый большое внимание уделял изданию популярного математического журнала, который мог бы заинтересовать математикой и привлечь к занятию ею широкие круги населения. Цель его издания - воспитание у молодежи интереса и способностей к самостоятельному научному творчеству. Он активно поддерживал создание журнала «Вестник математических наук».

В 1864 году ученый официально выступил в поддержку создания Московского математического общества, а начиная с 1856 года принял активное участие в работе специальной комиссия Главного управления военно-учебных заведений, которая занималась рецензированием составленных тогда руководств для военно-учебных заведений. Работая в этой комиссии Пафнутий Львович оказывал серьезное влияние и на постановку военного образования.

Проявляя рвение к процветанию отечественных наук, П.Л. Чебышев уделял значительное внимание поиску одаренных людей, способных сказать новое слово в науке, и помогал им как морально, так и материально. Им была оказана поддержка математику-самоучке И. Первушину, проделавшему титаническую работу по вычислению совершенных чисел, изобретателю самолета А.И. Можайскому и многим другим начинающим исследователям.

В 1856 году под председательством М.В. Остроградского в Главном управлении военно-учебных заведений была создана особая специальная комиссия для рассмотрения составленных тогда руководств для военно-учебных заведений. В комиссию были приглашены наиболее крупные математики того времени, в том числе и П.Л. Чебышев. Работая в этой комиссии Пафнутий Львович оказывал серьезное влияние и на постановку военного образования.

5. Петербургская математическая школа

П.Л. Чебышева считают основоположником самостоятельных русских математических школ. Этим русская наука обязана не только гению ученого, но его изумительному педагогическому таланту, отзывчивости и добролюбию.

Пережив тяжелые времена в своей студенческой жизни, П.Л.Чебышев понимал, как важно помочь талантливым людям в трудную минуту. Так закладывались традиции знаменитой Петербургской математической школы, создателем которой он был.

Он своими беседами, которые проходили каждый четверг в его квартире, а также научными работами наводил учеников на плодотворные темы для собственных изысканий и обращал

их внимание на такие вопросы, изучение которых всегда приводило к более или менее ценным результатам. При этом, исходя из способностей учеников, он предлагал им разные темы, наиболее талантливым он не рекомендовал заниматься легкими вопросами, а предлагал пробовать свои силы при решении серьезных проблем, представляющим известные трудности. Благодаря таланту умело ставить посильные задачи и бесконечному дару человеческого общения ему удалось создать знаменитую Петербургскую школу математиков, отличительной чертой представителей которой являлась чёткая постановка задач, алгоритмическое, почти инженерное решение с результатом, удобным для использования и продуктивным в отношении дальнейшего исследования. При этом среди большого количества задач, которые он предлагал своим ученикам, огромную важность имели задачи на нахождение наибольших и наименьших величин, в силу того, что они позволяли ответить на главный вопрос - как располагать средствами своими для достижения по возможности большей выгоды.

К этой замечательной школе принадлежат почти все славные имена русских математиков второй половины XIX и начала XX века: А. Н. Коркин, Е. И. Золотарев, А. М. Ляпунов, А. А. Марков, Г. Ф. Вороной, В. А. Стеклов, А. Н. Крылов и многие другие.

Создав такую замечательную плеяду учеников, П.Л. Чебышев оказал влияние, как на развитие математики в России, так и на совершенствование математического образования.

6. Прикладная направленность исследования П.Л. Чебышева

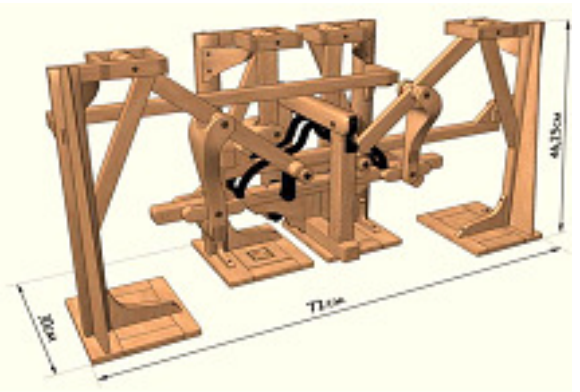
Круг научных интересов Пафнутия Львовича Чебышева не ограничивался математикой. Важной чертой его научного творчества был необыкновенный интерес к практике и технике. Следует признать, что наиболее существенных математических результатов Чебышев получил, занимаясь решением различных прикладных задач, связанных с теорией механизмов.

Он занимался конструированием разного рода механизмов, астрономией и проблемами управления полетом снарядов, выпущенных из артиллерийского орудия. Ему принадлежат изобретения арифмометра, сортировальной машины, самотканого кресла, центробежного регулятора. Всего им было создано более 40 механизмов и 80 их модификаций, которые экспонировались в России и за рубежом. При этом многие приборы он изготовил на собственные средства, в том числе собственноручно. Некоторые из них сохранились до наших дней. Их можно увидеть в школьном музее П.Л. Чебышева, организованном в д. Машково, Боровского района Калужской области, в коллекциях музеев России, Франции и Великобритании.

Московское техническое училище, которое выбрало Чебышева своим почетным членом, несколько раз выставляло паровые машины с его механизмом на выставках за границей, в Вене, Филадельфии и Париже, а также и в России, причем изобретения эти, всегда обращали

на себя внимание европейских ученых. За свои изобретения – Пафнутий Львович получил медали различного достоинства от организаторов международных выставок.

Уважение европейских ученых к научным заслугам Пафнутия Львовича выразилось также в том, что на научном конгрессе в Париже, состоявшемся в 1878 году, он был избран почетным председателем двух секций: математической и механической. На заседаниях секций им было сделано несколько сообщений, касающихся теории вероятностей, теории чисел, практической механики и нового приложения математического анализа к предмету, который казался недоступным для строго научных исследований, а именно к кройке платья.



Хотелось бы обратить внимание на два из его изобретений – стопоходящую машину и арифмометр. Первую он придумал в процессе создания механизма преобразующего вращательное движение в прямолинейное. Это позволило ему создать вариант стопоходящей машины, имитирующей движение животного при ходьбе. В настоящее время, на этом изобретении основано движение роботов, шагающих экскаваторов, различных космических аппаратов. Кроме того, на основе стопоходящей машины созданы в настоящее время тренажеры помогающие людям с ограниченными возможностями.

В XIX веке использовались счетные машины с прерывным изменением цифр. П.Л.Чебышев занялся исследованием вопроса о создании принципа работы арифмометра непрерывного действия. Он предложил при непрерывной передачи, чтобы колесо высшего разряда постепенно поворачивалось на одно деление, пока колеса младшего разряда совершает полный оборот. Созданные на этом принципе модели не получили в свое время широкого распространения. Причина этого возможно кроется в том, что Пафнутия Львовича, в первую очередь, интересовала возможность практической реализации придуманного им принципа работы. Его идеи были использованы значительно позже, когда стали создавать электрические счетные машины.

7. Заключение

П.Л. Чебышев отличался скромным образом жизни и любовью к уединению. При этом двери его дома на Васильевском острове. как об этом отмечали выше, были открыты для тех, кто желал получить квалифицированную консультацию, совет, а иногда и материальную поддержку. Все они уходя уносили с собой новые мысли и поощрения в дальнейшей работе.

Ограничивая себя в расходах на быт, он не жалел средств на помощь нуждающимся. Поддерживал материально своих братьев и сестер. Считал своим долгом помочь нуждающимся студентам не только советом, но и делом. Известно, что он добился «стипендии талантливому студенту Л.И. Липкину, изобретателю инверсора; выхлопотал денежное пособие в 300 рублей — одесскому чиновнику способному в математике молодому человеку И. Козлову; оказал денежную помощь учителю минской гимназии А.К. Жбиковскому для выпуска учебника по арифметике для уездных училищ; проявлял заботу о лицах, склонных к научному творчеству (о Ляпунове и др.). Совместно со своими сестрами П.Л. Чебышев в барских домах в Москве предоставлял жилье студентам и устраивал для них благотворительные обеды» [2, С. 224].

На средства П.Л. Чебышева была построена звонница на каменной колокольне церкви Спаса-Преображения в селе Спас-на-Прогнаньи и устроен придел в честь его небесного покровителя – прп. Пафнутия Боровского.

За свою многолетнюю и добросовестную работу на ниве науки и просвещения П.Л. Чебышев получил несколько орденов, в том числе французский орден Почетного легиона. При этом он никогда не упоминал о них, не отмечал ни одной даты своей творческой жизни и всячески препятствовал, когда кто-либо пытался организовать торжество. Служение людям, науке, государству было для него делом всей жизни.

Напряженная умственная работа не способствовала тому, чтобы П.Л. Чебышев обрел семью, он так и остался холостяком.

В конце ноября 1894 г. П.Л. Чебышев на ногах перенес грипп. Ученый скончался 26 ноября (8 декабря) 1894 г. от остановки сердца. Похоронили академика в семейном склепе, устроенном под колокольней церкви Спаса-Преображения в селе Спас-на-Прогнаньи, находящейся сейчас близко к Обнинску — первому наукограду России.

Память об ученом бережно передается из поколения в поколение. Именем П.Л. Чебышева названы теоремы, неравенства, механизмы. В Калуге и Туле проходят конференции, посвященные ученому. В его честь в Туле выходит математический журнал «Чебышевский сборник». Механизмы, изобретенные П.Л. Чебышевым, входят в коллекции музеев России, Франции и Великобритании.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гуров С.П., Хромиенков Н.А., Чебышева К.В. П.Л. Чебышев: Пособие для учащихся. М.: Просвещение, 1979. 111 с. (Люди науки).

2. Дробышев Ю.А., Дробышева *И.В.* Н.И. Лобачевский и П.Л. Чебышев: служение отечеству и долгу // Н.И. Лобачевский и математическое образование в России. Материалы Международного форума по математическому образованию, посвященного 225-летию Н.И. Лобачевского (XXXVI Межд. науч. семинар преподавателей математики и информатики унив. и пед. вузов, VII Международная научно-практическая конференция). Казань, 2017. С. 91-96.

3. Лебедев С.Л. Человек я насквозь русский: Пафнутий Львович Чебышев // История: приложение к газете «Первое сентября» 16-31 августа (№16). С. 26-37.

4. Никифоровский В.А. Пафнутий Чебышев — человек, математик, педагог//Вестник Российской Академии наук. 1995. № 5. С. 448-452

5. Полякова Т.С. История математического образования в России. М.: Изд-во Московского ун-та, 2002. 624 с.

6. Прудников В.Е. Пафнутий Львович Чебышев 1821-1894. Л.: Наука, 1976. 284 с.

7. Прудников В.Е. П.Л. Чебышев и Московский университет 40-х годов XIX века // Историко-математические исследования, 1948. Вып. 1. С. 184-216.

УДК 512.772

Числа и функции

Х. М. Салиба (г. Бейрут, Ливан)
Университет Нотр-Дам-Луэз
e-mail: qwe123@rocketmail.com
В. Н. Чубариков (г. Москва)
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
e-mail: chubarik2009@live.ru

Numbers and functions

H. M. Saliba (Beirut, Lebanon)
Notre Dame University-Louaize
e-mail: qwe123@rocketmail.com
V. N. Chubarikov (Moscow)
Lomonosov Moscow State University
e-mail: chubarik2009@live.ru

Содержание

1. Действительные числа
2. Элементарные функции
3. Метод математической индукции. Бином Ньютона и неравенство Бернулли

Введение

16 мая 2021 г. исполнилось 200 лет со дня рождения знаменитого ученого, выдающегося выпускника Московского университета, стоявшего у истоков создания отечественной математической школы и издания математических журналов и отечественных учебников по математике, — Пафнутия Львовича Чебышева. Он сделал общим достоянием свои научные результаты самой совершенной формы, относящиеся к теории простых чисел, к теории многочленов наименее уклоняющихся от нуля на заданном отрезке, нашел строгое доказательство закона больших чисел в теории вероятностей, решил ряд важных прикладных задач. П.Л.Чебышев дал способы мыслить по-новому, в своих лекциях он продемонстрировал, что великие научные истины просты и легко усваиваются по мере сил каждого, желающего овладеть ими.

Чрезвычайно ярко и близко по духу к плодотворной научной деятельности Чебышёва выразил отношение к науке русский философ И.А.Ильин. “Наука... учит человека самостоятельному мышлению, предметному опыту и твердому знанию своих пределов; она приучает

человека к ответственной осторожности и скромности в суждении. Именно в этом состоит научная культура.

Настоящая академия говорит человеку: “смотри сам и думай сам!” И этим она воспитывает его к свободе, а не к умственному рабству.

Дедукция делает выводы из готовой мысли. Настоящая наука начинается с индукции, т.е. с непредвзятого свободного наблюдения явлений, природы и людей. От такого наблюдения, подкрепленного экспериментом, свободно организуемым опытом, мысль осторожно восходит к обобщению и пытается выговорить законы материальной и душевно-духовной природы.

Настоящая наука углубляется интуицией, т.е. живым созерцанием, которое, во-первых, вчувствуется в глубину единичного явления и, во-вторых, пытается верно вообразить и восстановить целое, распавшееся во время исследования на детали. Интуиция должна насыщать собою индукцию, тогда возникнет настоящее исследование. Без интуиции индукция начинает смотреть поверху и упускает главное — тайну индивидуальной жизни, она впадает в мертвое детализирование, распыляет все, охотно уравнивает неравное, не видит “леса из-за деревьев,” т.е. мира и Бога из-за мировой пыли.”

После этих мыслей перейдем к теме сегодняшней лекции.

§1. Действительные числа

Действительные числа необходимы для того, чтобы выразить результаты конкретных измерений, совершения арифметических операций над ними и исследования численных характеристик явлений и законов природы. Обычно начинают с некоторого счета изучаемых объектов, для чего служат натуральные числа. Они составляют предмет арифметики.

Натуральные и целые числа.

Пусть $\mathbf{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ обозначает множество натуральных чисел.

Приведем без доказательств некоторые утверждения арифметики.

Основная теорема арифметики. Каждое натуральное число, большее 1, единственным образом разлагается в произведение простых чисел с точностью до порядка сомножителей.

Деление натуральных чисел с остатком: $a = bq + r, 0 \le r < b$. Индукция по a. Если $a < b$, то $q = 0, r = a$. Если $a \ge b$, то $a - b < a$, и по предположению индукции $a - b = bq_1 + r_1, 0 \le r_1 < b$. Тогда $a = b(q_1 + 1) + r_1$. Единственность такого представления. От противного.

Алгоритм Евклида для нахождения наибольшего общего делителя двух целых чисел.

Позиционная система счисления.

Теорема 1. *Любое натуральное число m единственным образом представимо в виде*

$$m = a_0 + 10a_1 + \dots + 10^n a_n, 0 \le a_k \le 9, 0 \le k \le n, a_n \ge 1.$$

Док-во. $\exists\,!\ n \in \mathbf{N}$ т.,ч. $10^n \le m < 10^{n+1}$. Положим

$$a_k = \left[\frac{m}{10^k}\right] - 10\left[\frac{m}{10^{k+1}}\right], 0 \le k \le n.$$

Справедливы соотношения

$$-1 = \frac{m}{10^k} - 1 - 10 \cdot \frac{m}{10^{k+1}} < a_k < \frac{m}{10^k} - 10 \cdot \left(\frac{m}{10^{k+1}} - 1\right) = 10,$$

т.е. $0 \le a_k \le 9$, поскольку $b - 1 < [b] \le b$;

$$a_n = \left[\frac{m}{10^n}\right] - 10 \cdot \left[\frac{m}{10^{n+1}}\right] = \left[\frac{m}{10^n}\right] \geq 1,$$

так как $10^n \leq m < 10^{n+1}$, $\left[\frac{m}{10^{n+1}}\right] = 0$. Далее имеем

$$\sum_{k=0}^{n} 10^k a_k = \sum_{k=0}^{n} 10^k \left(\left[\frac{m}{10^k}\right] - 10 \cdot \left[\frac{m}{10^{k+1}}\right]\right) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} 10^k \left[\frac{m}{10^k}\right] - \sum_{k=0}^{n} 10^{k+1} \left[\frac{m}{10^{k+1}}\right] =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} 10^k \left[\frac{m}{10^k}\right] - \sum_{k'=1}^{n} 10^{k'} \left[\frac{m}{10^{k'}}\right] = [m] - 10^{n+1} \left[\frac{m}{10^{n+1}}\right] = m.$$

Докажем единственность представления m в указанном виде. От противного. Пусть имеется другое представление

$$m = \sum_{d=0}^{t} 10^d b_d = \sum_{k=0}^{n} 10^k a_k.$$

Имеем

$$0 = m - m = \sum_{r=0}^{s} 10^r c_r, \quad c_r = a_r - b_r, |c_r| \leq 9, \quad c_s \neq 0.$$

$$10^s c_s = -\sum_{r=0}^{s-1} 10^r c_r,$$

следовательно,

$$10^s \leq |c_s| 10^s = \left| -\sum_{r=0}^{s-1} 10^r c_r \right| \leq \sum_{r=0}^{s-1} 9 \cdot 10^r = 10^s - 1 < 10^s.$$

что невозможно.

$\mathbf{Q}$ — множество рациональных чисел $r = \frac{a}{b}, a \in \mathbf{Z}, b \in \mathbf{N}, (a, b) = 1$. Счетное множество. Иррациональные числа, например $\sqrt{2}$.

Действительные числа

Представление чисел в виде бесконечных десятичных дробей.

Свойства действительных чисел.

1. "Замкнутость" относительно арифметических операций.

2. Для любых двух чисел установлено отношение порядка: $a \leq b$, т.е. либо $a < b$, либо $a = b$.

I. $\mathbf{R}$ есть *поле.*

II. $\mathbf{R}$ есть *упорядоченное поле.*

II.1. Если $x \leq y$ и $y \leq z$, то $x \leq z$.

II.2. Либо $x \leq y$, либо $y \leq x$.

II.3. Если $x \leq y$ и $y \leq x$, то $x = y$.

II.4. Если $x \leq y$, то $\forall z$ имеем $x + z \leq y + z$.

II.5. Если $x \leq y$, то $\forall 0 \leq z$ имеем $xz \leq yz$.

III. $\mathbf{R}$ есть *архимедово упорядоченное поле.* $\forall 0 < x, 0 \leq y, \exists n \in \mathbf{N}$, т.,ч. $y \leq nx$.

Докажем следующее утверждение.

Теорема 2. *Для любых действительных чисел* $x, y \in \mathbf{R}$ с условием $x < y$ существует рациональное число $r \in \mathbf{Q}$ такое, что $x < r < y$.

В силу аксиомы Архимеда (свойство III) для положительного действительного числа $y - x > 0$ существует натуральное число n такое, что справедливо неравенство $n(y-x) > 2$, т.е. интервал (nx, ny) имеет длину, превосходящую 2. Следовательно, на этом интервале найдется целое число m такое, что $nx < m < ny$, например, $m = [ny] - 1$. Отсюда находим $x < \frac{m}{n} < y$, что и требовалось доказать.

IV. Для любого непустого ограниченного подмножества $A \subset \mathbf{R}$ существует $l \in \mathbf{R}$ т.,ч. $l = \sup A$:

a) $\forall a \in A$ имеем $a \leq l$;

b) $\forall \varepsilon > 0 \exists a' \in A$ т.,ч. $a' \geq l - \varepsilon$.

Определим функцию $y = |x|$, где абсолютная величина числа $x \in \mathbf{R}$: задана соотношением

$$|x| = \begin{cases} x, x \geq 0; \\ -x, x < 0 \end{cases},$$

т.е. абсолютная величина или модуль действительного числа x — это есть расстояние от нуля до x.

Теорема 3. *Для любых $x, y \in \mathbf{R}$ имеем*

$$|x+y| \leq |x| + |y|, \quad ||x| - |y|| \leq |x-y|, |xy| = |x| \cdot |y|.$$

Если оба числа x, y положительны или отрицательны, то $|x+y| = |x| + |y|$. Пусть, далее, например, $x \leq 0 \leq y$, тогда

$$x + y \leq y \leq |x| + |y|, \quad x + y \geq x \geq x - |y| = -|x| - |y|,$$

т.е. $-(|x| + |y|) \leq x + y \leq |x| + |y|$.

Первое утверждение доказано.

Докажем второе неравенство в утверждении теоремы. Имеем

$$|x| = |y + (x-y)| \leq |y| + |x-y|,$$

$$|y| = |x + (y-x)| \leq |x| + |y-x| = |x| + |x-y|,$$

следовательно,

$$-|x-y| \leq |x| - |y| \leq |x-y|,$$

т.е. $||x| - |y|| \leq |x-y|$.

Определим функцию целая часть числа $y = [x] \in \mathbf{Z}$ следующим образом: $[x] \leq x < [x] + 1$. Тогда $\{x\} = x - [x]$ называется дробной частью числа x. Например,

$$[\pi] = 3, [-\pi] = -4, \{\sqrt{2}\} = \sqrt{2} - 1.$$

Задачи для домашнего задания

1. Пусть $F(x) = \frac{1}{1-x}$. Найти $F(F(x)), F(F(F(x)))$.
2. Пусть $F(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$. Найти $F_n(x) = \underbrace{F(F(\dots F(x)\dots))}_{n}$.
3. Пусть $F(\frac{1}{x}) = x + \sqrt{1+x^2}$. Найти $F(x)$.
4. Пусть $F(\frac{x}{x+1}) = x^2$. Найти $F(x)$.
5. Доказать, что следующие функции являются монотонно возрастающими в следующих промежутках: $f(x) = \sin x, f(x) = \operatorname{tg} x$ при $|x| \leq \frac{\pi}{2}$; $\quad f(x) = 2x + \sin x$ при $x \in \mathbf{R}$.

6. Найти обратную функцию $g(y)$ и ее область определения, если a) $y = x^2$ при $-\infty < x \le 0$; b) $y = \sqrt{1-x^2}$ при $-1 \le x \le 0$; c) $y = \frac{1-x}{1+x}$ при $x \ne 1$.

7. Доказать, что функции $f(x) = \sin x + \sin x\sqrt{2}, f(x) = \sin x^2, f(x) = \operatorname{tg}\sqrt{x}$ не являются периодическими.

8. Построить график квадратного трёхчлена $y = ax^2 + bx + c$, выделяя полный квадрат $y = a(x - x_0)^2 + y_0$, если

$$y = 8x - 2x^2; \quad y = x^2 - 3x + 2; \quad y = \frac{1}{2}x^2 + x + 1.$$

9. Построить графики функций:

$$y = (1 - x^2)(2 + x); \quad y = x(a - x)^2(a + x)^2; \quad y = \frac{1-x}{1+x};$$

$$y = \frac{3x+2}{2x-3}; \quad y = \frac{2x}{1+x^2}.$$

10. Построить эскиз графика функции $y = \frac{x^2-4x+3}{x+1}$, представляя ее в виде $y = kx+b+\frac{c}{x-x_0}$.

11. Построить графики функций:

$$y = \pm\sqrt{-x-2}; \quad y = \pm x\sqrt{x}; \quad y = \pm 0,5\sqrt{100-x^2};$$

$$y = \pm\sqrt{x^2-1}; \quad y = \pm\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \quad y = \pm x\sqrt{\frac{x}{10-x}}.$$

12. Построить график степенной функции:

$$y = x^2, y = x^3, y = x^4, y = \frac{1}{x}, y = \frac{1}{x^2}, y = \frac{1}{x^3};$$

$$y = \sqrt{x^3}, y = x^{1/3}, y = x^{3/4}.$$

Вернемся к представлению действительного числа бесконечной десятичной дробью.

Будем говорить, что число $\alpha > 0$ представляется в виде бесконечной десятичной дроби $\alpha_0, \bar{\alpha}_1 \dots \bar{\alpha}_n \dots$, где $\alpha_0 = [\alpha], 0 \le \bar{\alpha}_k \le 9, k \ge 1$, — целые числа, причем для n-го приближения $s_n(\alpha) = \alpha_0, \bar{\alpha}_1 \dots \bar{\alpha}_n$ числа α справедливо неравенство

$$0 \le \alpha - s_n(\alpha) < 10^{-n}.$$

Теорема 4. *Для любого действительного числа $\alpha > 0$ существует единственное представление в виде бесконечной дроби.*

Сначала установим существование искомого представления. Положим

$$\alpha_0 = [\alpha], \bar{\alpha}_n = [10^n\alpha] - 10 \cdot [10^{n-1}\alpha], n \ge 1.$$

В силу неравенства $b - 1 < [b] \le b$ при $n \ge 1$ имеем

$$-1 = (10^n\alpha - 1) - 10^n\alpha < \bar{\alpha}_n < 10^n - 10 \cdot (10^{n-1}\alpha - 1) = 10,$$

т.е. $0 \le \bar{\alpha}_n \le 9$. Покажем, что $A_n(\alpha) = \alpha_0, \bar{\alpha}_1 \dots \bar{\alpha}_n$ является округлением числа α с недостатком с точностью до n знаков. Имеем

$$A_n = \alpha_0 + \sum_{k=1}^{n} \frac{\bar{\alpha}_k}{10^k} = [\alpha] + \sum_{k=1}^{n} \frac{[10^k\alpha] - 10[10^{k-1}\alpha]}{10^k}$$

$$= [\alpha] + \sum_{k=1}^{n} \frac{[10^k\alpha]}{10^k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{[10^{k-1}\alpha]}{10^{k-1}} = \frac{[10^n\alpha]}{10^n}.$$

Отсюда находим

$$\alpha - 10^{-n} = \frac{10^n\alpha - 1}{10^n} < A_n \le \frac{10^n\alpha}{10^n} = \alpha,$$

т.е. $\alpha - 10^{-n} < A_n \le \alpha$, тем самым A_n является округлением числа α с недостатком до n-го знака.

Теперь установим единственность представления числа α в виде бесконечной десятичной дроби. Рассуждаем от противного. Предположим, что имеется два различных представления числа α :

$$\alpha = \alpha_0, \bar{\alpha}_1 \dots \bar{\alpha}_n \cdots = \beta_0, \bar{\beta}_1 \dots \bar{\beta}_n \dots.$$

Это означает, что при некотором n имеет место неравенство

$$A_n = \alpha_0, \bar{\alpha}_1 \dots \bar{\alpha}_n \ne B_n = \beta_0, \bar{\beta}_1 \dots \bar{\beta}_n.$$

Отсюда находим, что $10^n A_n$ и $10^n B_n$ — целые числа. Кроме того, числа A_n и B_n представляют собой округления с недостатком числа α до n-го знака. Следовательно,

$$0 \le \alpha - A_n < 10^{-n}, \quad 0 \le \alpha - B_n < 10^{-n},$$

$$0 \le 10^n(\alpha - A_n) < 1, \quad 0 \le 10^n(\alpha - B_n) < 1.$$

Из двух последних неравенств получим, что целое число $10^n(A_n - B_n)$ удовлетворяет неравенствам $-1 < 10^n(A_n - B_n) < 1$, т.е. $A_n = B_n$. Это противоречит сделанному выше предположению. Теорема доказана полностью.

В завершение этой темы дадим способ последовательного вычисления десятичных знаков при выполнении операций сложения и умножения положительных действительных чисел. Пусть $a + b = c, ab = d$. Тогда

$$c = \sup_n (s_n(a) + s_n(b)), \quad d = \sup_n (s_n(a)s_n(b)).$$

Доказательство этого утверждения основано на предыдущей теореме и прямых вычислениях для проверки свойств I-IV множества $\mathbf{R}$.

§2. Элементарные функции

Степенная функция с целым и рациональным показателями.

Начнем изучение степенной функции $y = x^m$ при $x \ge 0$ и натуральном m. Имеем

$$y = x^m = \underbrace{x \dots x}_{m}$$

является возрастающей функцией при $x \ge 0$. В самом деле, при $x_1 > x_2$ находим

$$x_1^m > x_1^{m-1}x_2 > x_1^{m-2}x_2^2 > \cdots > x_1x_2^{m-1} > x_2^m.$$

Следовательно, существует обратная функция $x = g(y)$, которая также возрастает при возрастании аргумента. Для нее используется обозначение: $g(y) = \sqrt[m]{y}$ и она называется операцией извлечения корня m-ой степени из y.

Докажем, что **операции извлечения корня и возведения в степень перестановочны.** Действительно, пусть $y = \sqrt[m]{x}, z = \sqrt[m]{x^n}$. Тогда

$$y^m = x, y^{mn} = x^n, z^m = x^n.$$

Отсюда получим

$$(y^n)^m = z^m, y^n = z, (\sqrt[m]{x})^n = \sqrt[m]{x^n}.$$

Теперь для выражения числа z можно использовать обозначение: $z = x^{n/m}$ и $z^{-1} = x^{-n/m}$.

Произведение степеней рациональных показателей r_1 и r_2 фиксированного числа $x > 0$ равно показателю $r = r_1 + r_2$ степени того же числа x. Пусть $r_1 = a_1/b_1, r_2 = a_2/b_2$, причем a_1, a_2 — целые числа, b_1, b_2 — натуральные числа. Положим $y = x^{1/(b_1 b_2)}$. Имеем

$$x^{r_1} x^{r_2} = y^{a_1 b_2} y^{a_2 b_1} = y^{a_1 b_2 + a_2 b_1} = x^{(a_1 b_2 + a_2 b_1)/(b_1 b_2)} = x^{r_1 + r_2}.$$

Утверждение доказано.

Рациональная степень r_1 фиксированного положительного числа x в рациональной степени r_2 равна степени того же числа с показателем $r = r_1 r_2$.

Аналогично находим

$$(x^{r_1})^{r_2} = (y^{a_1 b_2})^{a_2/b_2} = y^{a_1 a_2} = x^{(a_1 a_2)/(b_1 b_2)} = x^{r_1 r_2}.$$

Пусть $x > 1$. Тогда при возрастании степени r значение x^r возрастает. При $r_1 > r_2$ имеем

$$y = x^{1/(b_1 b_2)} > 1, a_1 b_2 > a_2 b_1, y^{a_1 b_2} > y^{a_2 b_1}, x^{r_1} > x^{r_2}.$$

Задачи для домашнего задания

1. Найти общую формулу, задаваемую равенствами

$$a) 1^2 = 0 + 1, 2^2 = 1 + 3, 3^2 = 3 + 6, 4^2 = 6 + 10, \ldots$$

$$b) 1 = 1^3, 3 + 5 = 2^3, 7 + 9 + 11 = 3^3, 13 + 15 + 17 + 19 = 4^3, \ldots$$

2. Показать, что высшая степень 2, содержащаяся в 1000! есть 2^{994}.

3. Показать, что 1000! оканчивается на 249 нулей

4. Найти высшую степень 72, содержащуюся в 1000!.

5. Пусть $n = rs, r, s$ — натуральные числа. Тогда $n!$ делится на $(r!)^s$ и на $(s!)^r$

6. Любое натуральное число представимо в алгебраической суммы различных степеней числа 3 с подходящим выбором знаков "+" и "-".

7. Доказать, что многочлен $(x-a)^2(x-b)^2 + 1$ с целыми a и b нельзя разложить в произведение двух многочленов с целыми коэффициентами.

8. Пусть многочлен $ax^2 + bx + c, a > 0$, с действительными коэффициентами не имеет действительных корней. Тогда существуют действительные числа A, B, C, D, такие, что он представим в виде $(Ax + B)^2 + (Cx + D)^2$.

9. Найти целые числа a, при которых многочлен $(x-a)(x-10) + 1$ разлагается в произведение $(x+b)(x+c)$ с целыми b и c.

10. Доказать, что корни многочлена

$$nx^n - 1 - x - x^2 - \cdots - x^{n-1}$$

по абсолютной величине не превосходят единицы.

11. Доказать, что при всех действительных значениях x многочлен

$$x^{12} - x^9 + x^4 - x + 1$$

положителен.

12. Пусть многочлен $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n, a_0 \neq 0$, при всех действительных значениях x положителен. Тогда он представляется в виде суммы квадратов двух многочленов (обобщение задачи 8).

Определим **показательную функцию $y = 2^x$ при всех действительных значениях** x. Разобьем построения на несколько шагов.

1. Для всех рациональных значений r выше была определена функция $y = 2^r$.

2. Для любого рационального $0 < r < 1$ докажем неравенство $2^r < 1 + r$. Пусть сначала $r = 1/b, b \geq 2$. Тогда по биному Ньютона имеем

$$\left(1 + \frac{1}{b}\right)^b = \sum_{k=0}^{b} \binom{b}{k} b^{-k} > 2, 2^{1/b} < 1 + \frac{1}{b}.$$

Индукция по параметру b. При $b = 2, a = 1$ и $b = a = 2$ утверждение доказано. Предположим, что утверждение верно при $b = k, a < k$, т.е.

$$2^{a/k} < 1 + \frac{a}{k}.$$

Докажем его при $b = k + 1$. Надо доказать, что

$$2^{a/(k+1)} < 1 + \frac{a}{k+1}, 2^a < \left(1 + \frac{a}{k+1}\right)^{k+1}.$$

В силу предположения индукции имеем

$$2^a < \left(1 + \frac{a}{k}\right)^k.$$

Поэтому достаточно доказать, что

$$\left(1 + \frac{a}{k}\right)^k < \left(1 + \frac{a}{k+1}\right)^{k+1}.$$

Выполняя цепочку эквивалентных преобразований, находим

$$\left(1 + \frac{a}{k+1}\right)^{k+1} \left(1 + \frac{a}{k}\right)^{-k} = \left(\frac{(a+k+1)k}{(k+1)(a+k)}\right)^k \left(1 + \frac{a}{k+1}\right) = A.$$

Далее воспользуемся неравенством Бернулли. Получим

$$\left(\frac{(a+k+1)k}{(k+1)(a+k)}\right)^k = \left(1 - \frac{a}{(k+1)(a+k)}\right)^k > 1 - \frac{ak}{(k+1)(a+k)}.$$

Следовательно,

$$A > \left(1 - \frac{ak}{(k+1)(a+k)}\right)\left(1 + \frac{a}{k+1}\right) = 1 + \frac{a}{(k+1)(a+k)} > 1,$$

что и требовалось доказать.

3. Пусть теперь α — иррациональное число. Обозначим M_1 множество всех чисел вида $2^{r_1}, r_1 < \alpha, r_1 \in \mathbf{Q}$, и M_2 — множество всех чисел вида $2^{r_2}, r_2 > \alpha, r_2 \in \mathbf{Q}$. Для любых $r_1 < \alpha < r_2$ имеем $2^{r_1} < 2^{r_2}$. Следо вательно, непустое числовое множество M_1 ограничено сверху. Поэтому существует $\sup M_1 = \gamma_1 \in \mathbf{R}$ (свойство IV действительных чисел). Аналогично, существует $\inf M_2 = \gamma_2 \in \mathbf{R}$, причем $\gamma_1 \leq \gamma_2$.

4. Покажем, что $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma$. Из определения точной верхней грани имеем, что $\gamma_1 \le 2^{r_2}$.

5. Возьмем любые рациональные числа r_1, r_2 (они существуют) с условием

$$[\alpha] < r_1 < \alpha < r_2 < [\alpha] + 1.$$

Отсюда находим

$$2^{r_1} \le \gamma_1 \le \gamma_2 < 2^{[\alpha]+1}.$$

Используя неравенство (п.2), получим

$$0 \le \gamma_2 - \gamma_1 \le 2^{r_2} - 2^{r_1} = 2^{r_1}(2^{r_2 - r_1} - 1) \le 2^{[\alpha]+1}(r_2 - r_1).$$

Так как число $\gamma_2 - \gamma_1$ — фиксировано, число $r_2 - r_1 > 0$ может быть сделано как угодно малым (например, в качестве r_1 и r_2 можно выбрать любые округления числа α с избытком и недостатком), то имеем $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma$. Эту величину γ возьмем в качестве 2^α, т.е. по определению положим $\gamma = 2^\alpha$. Тем самым определена функция $y = 2^x$ определена для всех действительных x.

6. Покажем, что эта функция является **возрастающей и удовлетворяет функциональному уравнению вида**

$$2^{x_1} 2^{x_2} = 2^{x_1 + x_2}.$$

Пусть $x_1 < x_2$. Тогда существует рациональное r такое, что $x_1 < r < x_2$. По доказанному получим $2^{x_1} < 2^r < 2^{x_2}$. Это доказывает свойство монотонности функции 2^x.

Пусть $x = x_1 + x_2$. Тогда существуют рациональные числа r_1, r_2 такие, что $r_1 \le x \le r_2$. Представим числа r_1 и r_2 в виде

$$r_1 = r_1' + r_1'', r_2 = r_2' + r_2'',$$

где $r_1' \le x_1, r_1'' \le x_2$ и $r_2' \ge x_1, r_2'' \ge x_2$.

Отсюда находим

$$2^{r_1} = 2^{r_1' + r_1''} \le 2^{x_1} 2^{x_2} \le 2^{r_2'} 2^{r_2''} = 2^{r_2}, 2^{r_1} \le 2^x \le 2^{r_2}.$$

Таким образом имеем неравенство

$$|2^x - 2^{x_1} 2^{x_2}| \le 2^{r_2} - 2^{r_1}.$$

Поскольку $2^x - 2^{x_1} 2^{x_2}$ — фиксированное числа, а разность

$$0 \le 2^{r_2} - 2^{r_1} = 2^{r_1}(2^{r_2 - r_1} - 1) \le 2^{[x]+1}(r_2 - r_1)$$

можно сделать как угодно малой, получим равенство

$$2^x = 2^{x_1 + x_2} = 2^{x_1} 2^{x_2}.$$

Тем самым функциональное уравнение для функции $y = 2^x$ доказано.

Задачи для домашнего задания

1. Пусть r — рациональное число, $a, b > 0$. Тогда $a^r b^r = (ab)^r, a^r / b^r = (a/b)^r$.

2. Пусть $2^{x_1} = 2^{x_2}$. Тогда $x_1 = x_2$.

3. Показать, что 2^x неограниченно возрастает при неограниченном возрастании показателя x.

4.Доказать, что при $a > 0$ уравнение $2^x = a$ имеет единственное решение.

5. Решить уравнение $2^{2x-1}+2^{x+3}=256$.

6. Решить уравнение $4^x-2^{x+\frac{1}{2}}=2^{x+\frac{7}{2}}-2^{2x-3}$.

7. Решить уравнение $2^{x+1}+2^{1-x}=5$.

8. Найти все значения параметра a, при которых уравнение $2^{\sqrt{ax}}=4^{\frac{x+1}{2}}$ имеет единственное решение.

9. Решить неравенство $\frac{2}{2^x-6}>\frac{1}{1-2^{x-1}}$.

10. Доказать, что для любого натурального n число $11^{n+2}+12^{2n+1}$ делится на 133.

11. Доказать при $n\geq 2$ неравенство $\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}>\sqrt{n}$.

12. Доказать при $n\geq 2$ неравенство $\binom{2n}{n}<\frac{4^n}{n+1}$.

Логарифмическая функция.

Итак, возрастающая функция $f(x)=2^x$ отображает действительную ось $\mathbf{R}=(-\infty,+\infty)$ на луч $\mathbf{R}_+=(0,+\infty)$. Следовательно, существует обратная функция $g(x)$ такая, что $f(g(x))\equiv x$, определенная на луче $\mathbf{R}_+$ и отображающая его на всю числовую ось $\mathbf{R}$. Эта функция $g(x)$ называется **логарифмом по основанию 2 от переменной** x обозначается так: $g(x)=\log_2 x$. Она является возрастающей на луче $\mathbf{R}_+$, и согласно определению удовлетворяет тождеству $2^{\log_2 x}\equiv x$. Отсюда при $x>0, y>0$ имеем соотношения

$$2^{\log_2(xy)}=xy=2^{\log_2 x}2^{\log_2 y}=2^{\log_2 x+\log_2 y}.$$

Таким образом установлено основное тождество функции $\log_2 x$: при $x>0, y>0$ имеем

$$\log_2(xy)=\log_2 x+\log_2 y.$$

Степенная функция с произвольным показателем.

При $x>0$ и произвольном действительном числе рассмотрим функцию $f(x)=x^\alpha$. Ее определение и свойства при рациональном показателе α найдены раньше. При иррациональном α и $x>0$ определим эту функцию равенством

$$x^\alpha=2^{\alpha\log_2 x.}$$

Тогда ее свойства, выведенные для рационального показателя следуют из свойств показательной функции 2^x и логарифмической функции $\log_2 x$.

Переход к другому основанию показательной и логарифмической функций.

По определению, при $a>0, a\neq 1$, имеем

$$a^x=2^{x\log_2 a}.$$

Отсюда находим

$$a^{\log_2 x/\log_2 a}=2^{\log_2 x}=x=a^{\log_a x}.$$

Используя монотонность функции a^x, получим

$$\log_a x=\frac{\log_2 x}{\log_2 a}, \log_a a=1, \log_a 1=0,$$

и вообще, при $a,b,c>0, a,c\neq 1$, имеем

$$\log_a b=\frac{\log_c b}{\log_c a},$$

поскольку

$$c^{\log_c b}=b=a^{\log_a b}=c^{\log_a b\log_c a}.$$

Таким образом **логарифмом числа** $x > 0$ **по основанию** $a > 0, a \neq 1$, **называется показатель степени, в которую надо возвести число** a, **чтобы получить** x. Другими словами,

$$x = a^{\log_a x}.$$

При любом фиксированном числе $a > 0, a \neq 1$, из монотонности функции $y = f(x) = a^x$ (при $0 < a < 1$ функция $y = a^x$ убывает, а при $a > 1$ она возрастает) находим, что обратная функция $y = g(x) = \log_a x$ будет убывающей при $0 < a < 1$ и возрастающей при $a > 1$.

При решении задач применяется следующее соображение. *Пусть* $a > 0, a \neq 1$, — *любое фиксированное число. Тогда при* $x > 0, y > 0$, *для того чтобы выполнялось неравенство*

$$\log_a x - \log_a y \geq 0$$

необходимо и достаточно, чтобы имело место неравенство

$$(a-1)(x-y) \geq 0.$$

В самом деле, при $a > 1$ функция $\log_a x$ возрастает, следовательно, неравенство $\log_a x - \log_a y \geq 0$ эквивалентно неравенству $(a-1)(x-y) \geq 0$. Аналогично при $0 < a < 1$ функция $\log_a x$ убывает, и неравенство $\log_a x - \log_a y \geq 0$ эквивалентно тому же неравенству $(a-1)(x-y) \geq 0$.

Отсюда имеем, что при $a > 0, a \neq 1$ неравенство

$$\frac{\log_a x - \log_a y}{\log_a z - \log_a u} \geq 0$$

эквивалентно

$$\frac{x-y}{z-u} \geq 0.$$

Пример. Решить неравенство:

$$\left(1 - \frac{x}{2}\right) \log_{(13-3\cdot 2^x)} 4 \leq 1.$$

Имеем

$$\frac{2-x}{\log_2 (13 - 3 \cdot 2^x)} \leq 1.$$

Далее, с помощью эквивалентных преобразований получим

$$\frac{\log_2 2^{2-x} - \log_2 (13 - 3 \cdot 2^x)}{\log_2 (13 - 3 \cdot 2^x) - \log_2 1} \leq 0,$$

$$\frac{2^{2-x} - \log_2 (13 - 3 \cdot 2^x)}{13 - 3 \cdot 2^x - 1} \leq 0.$$

При $x \leq \log_2 \left(\frac{13}{3}\right)$ и $x \neq 2$ из последнего неравенства после замены переменной $2^x = t$ находим

$$\begin{cases} \frac{4}{t} - 13 + 3t \leq 0, \\ t > 2, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} \frac{4}{t} - 13 + 3t \geq 0, \\ t < 2. \end{cases}$$

Решая системы неравенств, получим $2 < x < \log_2 \frac{13}{3}$ и $x \leq \log_2 \frac{1}{3}$.

Задачи для самостоятельной работы.

1. Найти x, если a) $\log_8 x = 2/3$, b) $\log_{32} x = -0,2$. (Отв. a)$x = 4$, b)$x = 1/2$.)
2. Пусть $a, b > 0, a, b \neq 1$. Тогда $\log_a b \cdot \log_b a = 1$.
3. Решить уравнение: $\left(\frac{3}{4}\right)^{x-1} \sqrt[x]{\frac{4}{3}} = \frac{9}{16}$.
4. Решить уравнение: $3^{x+3} - 3^{x-1} = 80$. (Отв. $\{1\}$.)
5. Решить уравнение: $5^{2x} - 23 \cdot 5^x - 50 = 0$. (Отв. $\{2\}$.)
6. Решить уравнение: $2^{x+3} - 3^{x^2-2} = 3^{x^2+1} - 2^{x-1}$.
7. Решить уравнение: $x^{\lg x} = 100x$.
8. Доказать, что
$$\log_{a_1 a_2 \ldots a_n} x = \frac{1}{\frac{1}{\log_{a_1} x} + \frac{1}{\log_{a_2} x} + \cdots + \frac{1}{\log_{a_n} x}}.$$
9. Пусть $a^2 + b^2 = 7ab, a > 0, b > 0$. Тогда
$$\lg \frac{a+b}{3} = \frac{1}{2}(\lg a + \lg b).$$
10. Доказать, что
$$a^{\frac{\log_b (\log_b a)}{\log_b a}} = \log_b a.$$
11. Доказать,что $\log_2 3 > \log_3 4$.
12. Доказать,что $\log_{n-1} n > \log_n (n+1), n \geq 3$.

Тригонометрические и обратные тригонометрические функции.

Рассмотрим на плоскости xOy окружность радиуса 1 с центром в начале координат $O = O(0,0)$. Пусть $M = M(x,y)$ — текущая точка с координатами (x,y) на этой окружности $x^2 + y^2 = 1$. Обозначим φ угол $\angle AOM$, где $A = A(1,0)$ $0 \leq \varphi < 2\pi$. Как известно из геометрии, измеряется длиной дуги окружности AM, равной φ радианам (безразмерная величина). По определению полагают
$$y = \sin\varphi, x = \cos\varphi.$$
Далее определяем $\sin(-\varphi) = -sin\varphi, \cos(-\varphi) = \cos\varphi$, соответственно как нечетную и четную функции, а угол, равный $-\varphi$, представляет собой вращение вектора OM от положения OA “по часовой стрелке” в положение $OM(x,-y)$. Наконец, по периодичности с периодом 2π определяем функции синус и косинус для любого действительного числа φ :
$$\sin(\varphi + 2\pi) = \sin\varphi, \cos(\varphi + 2\pi) = \cos\varphi.$$
Из этих определений находим
$$\sin\varphi = \cos\frac{(\pi}{2} - \varphi)$$
Из геометрических соображений имеем, что при $\varphi \in \mathbf{R}$ справедливо неравенство $|\sin\varphi| \leq |\varphi|$.

Отсюда при всех φ, для которых знаменатель не обращается в нуль определяем функции тангенс и котангенс:
$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}, \operatorname{ctg}\varphi = \frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}.$$
Таким образом в декартовой системе координат xOy функции
$$y = \sin x, y = \cos x, y = tgx, y = ctgx,$$
(нарисовать эскизы графиков этих функций).

Функция $y = \sin x$ является возрастающей при $|x| \leq \pi/2$ и принимает значения от -1 до 1. Следовательно, при $|y| \leq 1$ определена обратная возрастающая функция $x = \arcsin y$, принимающая значения x от $-\pi/2$ до $\pi/2$, т.е. $-\pi/2 \leq \arcsin y \leq \pi/2$ (график функции).

Определим убывающую функцию $x = \arccos y$, обратную к функции $y = \cos x$ на отрезке ее убывания $0 \leq x \leq \pi$. Функция $x = \arccos y$ определена при $|y| \leq 1$, а принимает значения от 0 до π, в частности, $\arccos(-1) = \pi, \arccos 1 = 0, 0 \leq \arccos y \leq \pi$. (график функции).

При $|x| < \pi/2$ функция $y = \operatorname{tg} x$ — возрастает и принимает значения на всей числовой оси. Следовательно, на всей числовой оси определена обратная возрастающая функция $x = \operatorname{arctg} y$, принимающая значения $|\operatorname{arctg} y| < \pi/2$ (график функции).

Наконец, на всей числовой оси определена убывающая функция $y = \operatorname{arcctg} x$, принимающая значения от 0 до π (график функции).

Задачи для самостоятельной работы.

1. Доказать, что

$$a) \sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}; b) \cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4};$$

$$c) \sin\frac{\pi}{10} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}; d) \cos\frac{\pi}{10} = \frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}.$$

2. При $0 \leq x \leq \pi/2$ имеем $\cos(\sin x) > \sin(cosx)$.
3. При $0 \leq x \leq \pi/2$ имеем $\frac{\pi}{2}x \leq \sin x \leq x$.
4. При $|x| \leq 1$ имеем $\arcsin(-x) = -\arcsin x; \arccos(-x) = \pi - \arccos x$.
5. При $|x| \leq 1$ имеем

$$\sin(\arcsin x) = x; \cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2};$$

$$\sin(\arccos x) = \sqrt{1-x^2}.$$

6. $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}; \operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2}$.
7. Пусть $xy < 1$. Тогда

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y = \operatorname{arctg}\frac{x+y}{1-xy}.$$

8. $2\operatorname{arctg} 2 - \operatorname{arctg}\frac{3}{4} = \frac{\pi}{2}$.
9. $4\operatorname{arctg}\frac{1}{5} - \operatorname{arctg}\frac{1}{239} = \frac{\pi}{4}$.
10.

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg}\frac{1}{x} = \begin{cases} \pi/2, & \text{если} \quad x > 0, \\ -\pi/2, & \text{если} \quad x < 0. \end{cases}$$

11. При $0 \leq x \leq 1$ имеем

$$2\arcsin x = \arccos(1-2x^2); \quad 2\arccos x = \arccos(2x^2-1).$$

12. Найти:

$$\arcsin\frac{1}{2}, \arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}, \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right), \arccos\frac{\sqrt{2}}{2}, \arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right);$$

$$\arcsin(\sin 5), \arccos(\cos 10), \operatorname{arctg}\{\operatorname{tg}(-8)\}.$$

Уравнение И.Кеплера в задаче двух тел.

При любом $y \in \mathbf{R}$ существует единственная функция $x = x(y)$, удовлетворяющая уравнению Кеплера

$$x - \varepsilon \sin x = y,$$

где $0 < \varepsilon < 1$ — постоянная (эксцентриситет эллиптической орбиты в задаче И.Кеплера).

Покажем, что при $x \in \mathbf{R}$ функция $y = y(x)$, определяемая уравнением $y = y(x) = x - \varepsilon \sin x$ является возрастающей. Действительно, пусть $x_1 > x_2, y_1 = y(x_1), y_2 = y(x_2)$. Тогда имеем

$$y_1 - y_2 = x_1 - x_2 - \varepsilon(\sin x_1 - \sin x_2) =$$

$$= x_1 - x_2 - 2\varepsilon \sin \frac{x_1 - x_2}{2} \cos \frac{x_1 + x_2}{2},$$

$$\left| 2\varepsilon \sin \frac{x_1 - x_2}{2} \cos \frac{x_1 + x_2}{2} \right| \le 2\varepsilon \left| \frac{x_1 - x_2}{2} \right| = \varepsilon(x_1 - x_2),$$

$$y_1 - y_2 \ge (1 - \varepsilon)(x_1 - x_2) > 0.$$

Следовательно, для любого $y \in \mathbf{R}$ существует единственная обратная функция $x = x(y)$, что и является решением уравнения Кеплера.

Задачи для домашнего задания

1. При $a = 2,5, b = 20$ вычислить число

$$A = \frac{\sqrt[4]{a}}{\sqrt[12]{b^7}} \frac{\left(a^{-1/2}\sqrt[3]{b}\right)^{1/3}}{\sqrt[4]{ab^{-1}}} \left(\frac{a^{-3/8}}{b^{-2/3}}\right)^{4/3}.$$

Отв. $A = 4$.

2. Вычислить число 2^α с точностью до $0,1$, если $\alpha = 1,624121121112\ldots$. Указание. Имеем $2^{1,6} < 2^\alpha < 2^{1,625}$, т.е. $2^{8/5} < 2^\alpha < 2^{13/5}$. Отв. $3,03 < 2^\alpha < 3,09$.

3. Найти A, если

$$\log A = \frac{2}{3}\log(a+b) - \frac{1}{3}\log(a-b) + \frac{2}{3}\log a - \frac{1}{3}\log b.$$

Отв. $A = \sqrt[3]{\frac{a^2(a+b)^2}{b(a-b)}}$.

4. Найти A, если

$$\log_a A = \log_a c + b.$$

Отв. $A = ca^b$.

Логарифмы чисел по основанию 10 называются *десятичными*. Для упрощения записи вместо знака log используется знак lg. Целая часть $[\lg x]$ называется его характеристикой, а дробная часть $\{\lg x\} = \lg x - [\lg x]$ — его мантиссой.

5. Найти характеристику логарифма $\lg 279,8, \lg 0,0045$. Отв. $[\lg 279,8] = 2, [\lg 0,0045] = -3$.

6. Характеристика логарифма числа, большего единицы, на единицу меньше числа цифр в целой части числа, т.е. если $10^{n-1} \le a < 10^n$, то $[\lg a] = n - 1$.

7. Характеристика логарифма числа, меньшего единицы, содержит столько отрицательных единиц, сколько нулей в десятичной записи этого числа до первой цифры, отличной от нуля, с учетом нуля целых, т.е. если $a = \underbrace{0,0\ldots0}_{n} b\ldots, b \ne 0$, то $[\lg a] = -n$.

8. Вычислить $\lg 2$ с точностью до двух десятичных знаков после запятой. Отв. $\lg 2 = 0,30103\ldots$.

9. Решить уравнение $4^x = 2^{\frac{x+1}{x}}$. Отв. $x_1 = 1, x_2 = -1/2$.

10. Решить уравнение $\lg(2x^2 + 21x + 9) - \lg(2x + 1) = 1$. Отв. $x = 1/2$.

11. Решить уравнение $x^{\lg x - 1} = 100$. Отв. $x_1 = 1/10, x_2 = 100$.

12. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ — любая геометрическая прогрессия с положительными членами и $b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$ — любая возрастающая арифметическая прогрессия. Тогда существует такое положительное число α, что справедливы соотношения

$$b_1 - \log_\alpha a_1 = b_2 - \log_\alpha a_2 = \cdots = b_n - \log_\alpha a_n = \ldots.$$

Отв. $\alpha = q^{1/d}$, где $q > 0$ — знаменатель геометрической прогрессии, $d > 0$ — разность арифметической прогрессии.

§3. Метод математической индукции.Бином Ньютона и неравенство Бернулли

Для обоснования метода математической индукции будем использовать следующее свойство натуральных чисел: *в любом непустом подмножестве множества натуральных чисел существует наименьшее число.*

Убедимся в том, что данное свойство действительно имеет место. Для этого возьмем какой-нибудь его элемент (это можно сделать, так как данное подмножество не пусто). Если окажется, что выбранный элемент минимален, то свойство доказано. В противном случае число натуральных чисел, меньших данного числа, конечно. Рассматривая их последовательно, мы найдем требуемый минимальный элемент.

Метод математической индукции состоит в следующем: для справедливости любого утверждения, высказанного для всех натуральных чисел $n \geqslant 1$, достаточно:

1) доказать это утверждение для $n = 1$;

2) предположить его справедливость при $n = k$ и $k \geqslant 1$;

3) основываясь на утверждении 1) и предположении, доказать, что оно верно при $n = k+1$.

Действительно, отсюда следует, что высказанное утверждение верно для всех натуральных n. Допустим противное. Тогда множество тех n, для которых утверждение неверно, содержит наименьший элемент m. Число $m \neq 1$, поскольку утверждение верно для $n = 1$. Число m не может быть больше 1, так как в этом случае утверждение верно для $m - 1$ и в силу п.3 оно справедливо и для m, что противоречит выбору числа m.

Замечание. *Методом математической индукции можно доказывать утверждения, справедливые и при $n \geqslant m$, где $m \geqslant 1$. В ходе доказательства надо заменить первый шаг: доказать утверждение при $n = m$, а все остальное оставить, как и прежде, при необходимости использовать то, что $n \geqslant m$.*

Рассмотрим формулу бинома Ньютона. Определим величину $n! = n(n-1)\ldots 2 \cdot 1$, $0! = 1$ ($n!$ читается: эн-факториал). В частности, имеем $0! = 1$, $1! = 1$, $2! = 2 \cdot 1 = 2$, $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ и т. д.

Теорема 1. *Имеет место равенство* (*формула бинома Ньютона*)

$$(1 + x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + \ldots + C_n^k x^k + \ldots + C_n^n x^n.$$

Коротко эту формулу можно записать так:

$$(1 + x)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k,$$

где $C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ — биномиальный коэффициент.

▷ Воспользуемся методом математической индукции.

1. При $n = 1$ формула верна: $1 + x = 1 + x$, поскольку

$$\binom{1}{0} = \binom{1}{1} = 1.$$

2. Пусть формула бинома Ньютона справедлива при $n = t$, $t \geqslant 1$.

3. Докажем, что она верна при $n = t + 1$. Сначала докажем вспомогательное утверждение о биномиальном коэффициенте: при $0 \leqslant k \leqslant n - 1$ имеем

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}.$$

Действительно,

$$\frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} =$$

$$= \frac{n!}{k!(n-k-1)!}\left(\frac{1}{n-k} + \frac{1}{k+1}\right) = \binom{n+1}{k+1}.$$

Далее имеем

$$(1+x)^{t+1} = (1+x)^t(1+x) =$$

$$= \binom{t}{0} + \binom{t}{1}x + \ldots + \binom{t}{t}x^t + \binom{t}{0}x + \ldots + \binom{t}{t-1}x^t + \binom{t}{t}x^{t+1} =$$

$$= \binom{t+1}{0} + \binom{t+1}{1}x + \ldots + \binom{t+1}{t}x^t + \binom{t+1}{t+1}x^{t+1}.\triangleleft$$

Замечание. *Аналогично доказывается и формула для полинома Ньютона от s неизвестных вида*

$$(x + y + \ldots + z)^n = \sum_{k_1+\ldots+k_s=n} \frac{n!}{k_1! \ldots k_s!} x^{k_1} y^{k_2} \ldots z^{k_s},$$

где $k_1, \ldots, k_s$ — целые неотрицательные числа.

При изложении теории предела последовательности нам потребуется приводимое далее неравенство Бернулли.

Теорема 2. *При $x > -1$, $x \neq 0$ и при целом $n \geqslant 2$ справедливо неравенство* (*неравенство Бернулли*)

$$(1+x)^n > 1 + xn.$$

$\triangleright$ Доказательство проведем по индукции. Сначала убедимся, что при $n = 2$ оно верно. Действительно,

$$(1+x)^2 = 1 + 2x + x^2 > 1 + 2x.$$

Предположим, что для номера $n = k$ оказалось, что утверждение справедливо:

$$(1+x)^k > 1 + kx,$$

где $k \geqslant 2$. Докажем его при $n = k + 1$. Имеем

$$(1+x)^{k+1} = (1+x)^k(1+x) > (1+kx)(1+x) =$$

$$= 1 + (k+1)x + kx^2 > 1 + (k+1)x.\triangleleft$$

Отметим, что метод математической индукции допускает многочисленные, иногда неожиданные, модификации. В качестве примера приведем доказательство одной теоремы из книги известного норвежского математика Т. Нагелля.

Под методом **мультипликативной индукции** будем понимать доказательство, которое проводится по следующей схеме.

1. Опытным или каким-либо другим путем выдвигается гипотеза о том, что для каждого номера $n(>1)$ выполнено свойство E.

2. Проверяется, что свойством E обладают все простые числа p.

3. Предполагается, что некоторое натуральное число m обладает свойством E.

4. Исходя из предположения индукции доказывается, что числа вида mp тоже обладают этим свойством.

5. Отсюда по теореме об однозначности разложения на простые сомножители натуральных чисел, больших единицы, вытекает, что свойством E обладают все натуральные числа, и тем самым установлена справедливость гипотезы из пункта 1.

▷ Докажем методом мультипликативной индукции свойство мультипликативности функции Мёбиуса, определяемой на множестве натуральных чисел следующим образом:

$$\mu(n)=\begin{cases}1, & \text{если } n=1,\\ 0, & \text{если } p^2 \text{ делит } n,\\ (-1)^r, & \text{если } n=p_1\dots p_r,\ p_k\neq p_l,\ k\neq l,\ 1\leqslant k,\ l\leqslant r.\end{cases}$$

Будем говорить, что функция $f(n)$ натурального аргумента является *мультипликативной*, если для любых взаимно простых чисел m и n справедливо равенство $f(mn)=f(m)f(n)$.

Достаточно доказать утверждение о мультипликативности функции Мёбиуса только для чисел m и n, не делящихся на квадрат простого числа, т. е. it бесквадратных чисел. Зафиксируем произвольное m. Покажем, что утверждение имеет место для $n=p$, где p — произвольное простое число. Действительно, так как $(m,p)=1$, то $\mu(mp)=(-1)^{r+1}$, если $m=p_1\dots p_r$ и $p_1,\dots,p_r$ — различные простые числа. Следовательно, $\mu(mp)=\mu(m)\mu(p)$.

Пусть утверждение верно для $n=k$. Докажем его для $n=kp$, где p — произвольное простое число. Так как n — бесквадратное число, то $(k,p)=1$. По условию $(m,n)=1$, поэтому $(mk,p)=1$.

Тогда согласно утверждению для простых чисел и предположению индукции имеем цепочку равенств

$$\mu(mn)=\mu(mkp)=\mu(mk)\mu(p)=$$

$$=\mu(m)\mu(k)\mu(p)=\mu(m)\mu(kp)=\mu(m)\mu(n).\triangleleft$$

Заметим, что функция Мёбиуса возникает во многих областях математики, играя важную роль при изучении ее дискретных объектов.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Чебышёв П. Л. Избранные труды. — М.-Л.: Изд-во АН СССР, 1955, 926 с.

2. Научное наследие П. Л. Чебышёва. Выпуск первый. Математика. — М.-Л.: Изд-во АН СССР, 1945, 174 с.

3. Чебышёв П. Л. Теория вероятностей. — М.-Л.: Изд-во АН СССР, 1936, 253с.

4. Чебышёв П. Л. Высшая алгебра. — М.-Л.: Изд-во АН СССР, 1936, 197 с.

5. Виноградов И. М. Основы теории чисел, 9-е изд., М.: Наука, 1983, 144 с.

6. Бермант А. Ф., Люстерник Л. А. Тригонометрия. — М.: Гос. изд-во физ.-матем. лит., 1958, 180 с.

7. Борель Э. Тригонометрия. — М.: Тип. Т-ва И.Д.Сытина, 1909, 236 с.

8. Фаддеев Д. К., Соминский И. С. Алгебра. — М.: Наука, Гл. ред. физ.-матем. лит., 1966, 528 с.

9. Никольский С. М. Алгебра и начала математического анализа. 10-11 классы: пособие для учащихся общеобразовательных учреждений. — М.: Изд-во "Просвещение", 2010, 350 с.

10. Архипов Г. И., Садовничий В. А., Чубариков В. Н. Лекции по математическому анализу. Учеб. для вузов. — М.: Дрофа, 2004, 640 с.

УДК 514.174

От платоновых тел к паркетогранникам через символьное программирование и прототипирование[1]

А. В. Тимофеенко (Россия, г. Красноярск)
Онлайн-школа Тетрика
e-mail: A.V.Timofeenko62@mail.ru

From Platonic solids to parquethedrons through symbolic programming and prototyping

A. V. Timofeenko (Russia, Krasnoyarsk)
Online School Tetrika
e-mail: A.V.Timofeenko62@mail.ru

Поскольку опубликованы видеозаписи докладов автора на секции «Дискретная геометрия» (18 мая 2021 г.) и на Чебышёвских чтениях (22 мая 2021 г.), то он видит свою задачу в том, чтобы дополнить расположенным ниже текстом те моменты своих выступлений, которые, во-первых, остались недостаточно понятыми при устном изложении и, во-вторых, облегчают переход к продолжению отражённых в докладах исследований групп и паркетогранников. Необходимые определения и формулировки используемых результатов можно найти в работе автора «Выпуклые соединения паркетогранников и прототипирование» настоящих Материалов и в статье [1].

Автор является прямым научным потомком П. Л. Чебышёва согласно следующей генеалогической ветке.
Пафнутий Львович ЧЕБЫШЁВ (1821–1894)
Александр Николаевич КОРКИН (1837–1908)
Дмитрий Александрович ГРАВЕ (1863–1939)
Отто Юльевич ШМИДТ (1891–1956), Б. Н. ДЕЛОНЕ (1890-1980)
Сергей Николаевич ЧЕРНИКОВ (1912–1987)
Владимир Петрович ШУНКОВ (1932–2011)

Может показаться искусственной связка О. Ю. Шмидт – С. Н. Черников. По словам Н. С. Черникова (1955–2018) его отец обратился к О. Ю. Шмидту в конце 1930 годов будучи уже сложившимся специалистом по математическому анализу. Развивая теоретико-групповые исследования семинара О.Ю.Шмидта, он представил ему как редактору «Математического

[1]Работа поддержана Красноярским математическим центром, финансируемым Минобрнауки РФ в рамках мероприятий по созданию и развитию региональных НОМЦ (Соглашение 075-02-2021-1388).

сборника» свои работы о группах с условиями конечности. Они стали фундаментом алгебраической школы С. Н. Черникова, самым сильным представителем которой он называл моего научного руководителя В. П. Шункова. Владимир Петрович вспоминал, что он стал увлекаться алгеброй с подачи своего школьного учителя, обратившим, в частности, его внимание на исследования Эвариста ГАЛУА (1811–1832), даты жизни которого симметричны датам В. П. Шункова. Связь с учеником Д. А. Граве Борисом Николаевичем Делоне осуществлена более 10 лет назад с его сотрудником Н. П. Долбилиным.

1. О задачах теории паркетогранников

Напомним, с 1974 г. известны все типы паркетных многоугольников: кроме правильных k-угольников, $k = 3, 4, 6, 12$, существует ровно 19 типов. Как показал М. Н. Алексеев (2018), каждый из десяти типов, представители которых изображены на рис. 1, не может быть представлен равносторонним паркетным многоугольником. С точностью до подобия известны все

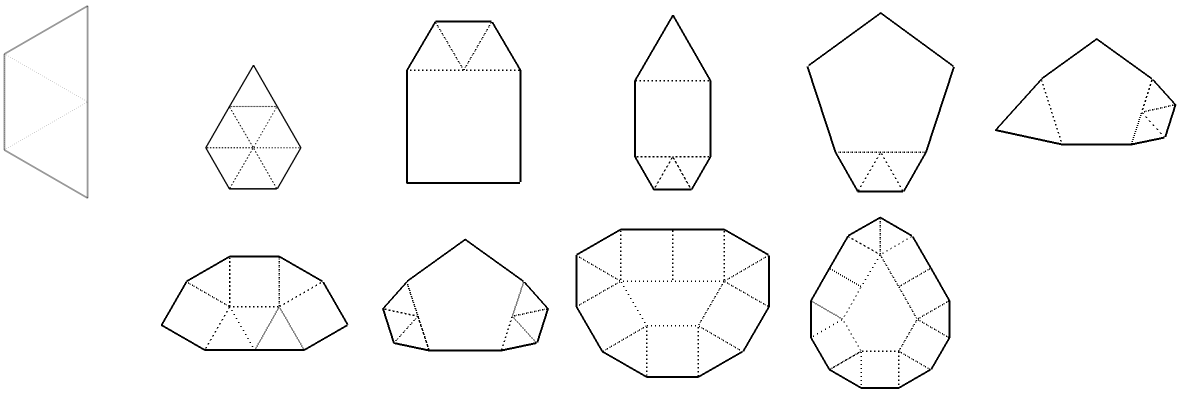


Рис. 1: Представители типов $4c, 5a, 6c, 7a, 7d, 8a, 8b, 9a, 10a, 11a$

паркетогранники без условных вершин. Кроме правильных, они могут обладать только изображёнными на рис. 2 гранями. Оставшиеся четыре типа тоже могут быть представлены равносторонними многоугольниками, рис. 3. Но каждый представитель такого типа обладает

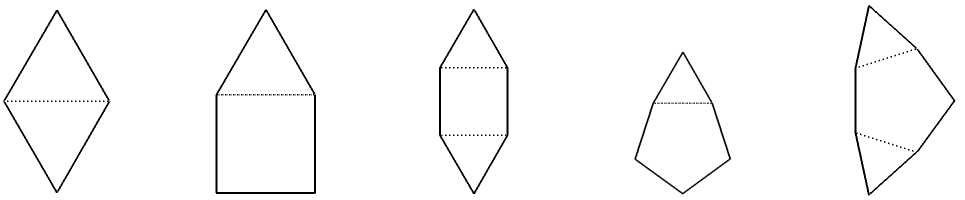


Рис. 2: Равносторонние паркетные многоугольники без фиктивных вершин

условной вершиной. Три года назад бы выдвинута гипотеза о существовании с точностью до подобия только одного равнорёберного паркетогранника, обладающего гранью какого-нибудь из последних четырёх перечисленных типов. Такой паркетогранник есть призма с боковыми квадратными гранями и паркетными многоугольниками в основаниях.

Учитывая, что каждый паркетный многоугольник может быть представлен либо равносторонним многоугольником, либо многоугольником, любые две стороны которого равны или одна вдвое короче другой, то естественной выглядит следующая

Задача 1. *Каковы с точностью до подобия все паркетогранники с равными, либо вдвое отличающимися длиной рёбрами?*

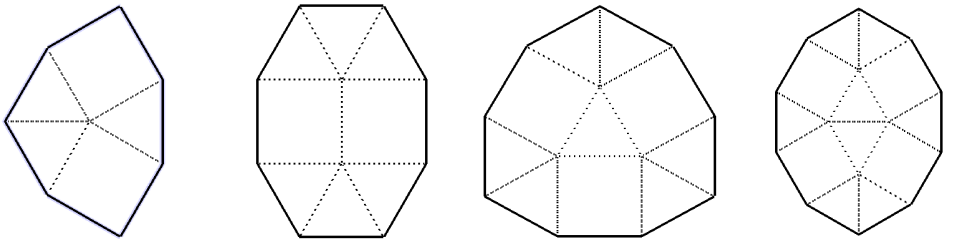


Рис. 3: Равносторонние паркетные многоугольники с условными вершинами

Эту задачу нетрудно будет решить после того, как падёт проблема классификации типов паркетогранников. С другой стороны, к штурму этой проблемы можно идти через решение только что сформулированной задачи. Проложим такой маршрут с помощью Утверждения 1 из секционного доклада автора. Но прежде для удобства читателя опишем использованные в этом утверждении обозначения Коксетера групп симметрий многогранников.

2. Конечные группы симметрий

Правее обозначения группы расположено ниже название и в большинстве случаев описан многогранник такой группой симметрий или поворотов обладающий. «Живые» модели этих многогранников и их строение можно найти в работе [2] по указанным в ней ссылкам на электронные Атласы. В частности, см. электронный атлас [3] паркетогранников $P_{k,i}$ с условными рёбрами. Завершается описание каждой группы именем файла[1] с её компьютерной моделью для системы компьютерной алгебры GAP, [4]. Группа:

$[n]^+$ циклическая порядка n поворотов неправильногранной правильной пирамиды с n-угольным основанием или симметрий такой пирамиды с продлёнными в одном направлении на одинаковое расстояние рёбрами основания, $c_n.txt$,

$[2]^+$ порядка два симметрий дважды наращенного трёхскатного прямого бикупола $P_{4,12}$,

$[\,]^+$ единичная;

$[2,n]^+$ поворотов диэдра порядка $2n$ или двойной правильной неправильногранной пирамиды с n-угольным основанием, $d_n.txt$;

$[3,3]^+$ поворотов тетраэдра, $tetr.txt$;

$[3,4]^+$ симметрий архимедова тела $[3,3,3,3,4]$ плосконосый куб M_{26}, $cube.txt$;

$[3,5]^+$ симметрий архимедова тела $[3,3,3,3,5]$ плосконосый додекаэдр M_{27}, $icos.txt$;

$[n]$ диэдральная симметрий неправильногранной правильной пирамиды с n-угольным основанием, $2c_n.txt$,

$[\,]$ порядка два симметрий наращенной 4-угольной пирамиды $P_{2,22}$ (скошенной 3-угольной призмы);

$[2^+,2n^+]$, расширяющая при нечётных n группу $[n]^+$ отражением от точки, $2.c_n.txt$,

$[2^+,2^+]$ порядка 2 отражения от точки или симметрий параллелепипеда без прямоугольных граней и с различными рёбрами в каждой вершине;

$[2,n^+]$, расширяющая группу $[n]^+$ поворотов отражением от плоскости, перпендикулярной оси поворотов, $d1cn.txt$;

$[3,3]$ симметрий тетраэдра, $tetr_2.txt$;

$[3,4]$ симметрий куба, $cube_2.txt$;

$[3^+,4]$, расширяющая отражением от точки группу поворотов тетраэдра, $2.tetr.txt$;

$[3,5]$ симметрий икосаэдра, $icos_2.txt$;

$[2,n]$ симметрий двойной правильной неправильногранной пирамиды с n-угольным основанием, $d_1d_n.txt$,

$[2,2]$ симметрий прямой ромбической призмы, $P_{2,2}$;

[1] https://mfd.sk/2hJvlwfWi0n0jy6dQQpG004k

$[2^+, 2n]$ симметрий антипризмы A_n порядка $4n$ при $n > 3$, $d_2n.txt$,

$[2^+, 6]$ симметрий дважды наращенного октаэдра $P_{4,11}$ с шестью ромбическими гранями,

$[2^+, 4]$ симметрий C-антипризмы CA_2;

$[2, 2]^+$ Клейна четверная поворотов прямой ромбической призмы $P_{2,2}$, $4_Klein.txt$;

$[2^+, 2] = [2, 2^+]$ Клейна четверная с вращательной симметрией или симметрий скошенного куба $P_{4,30}$, $K4.txt$;

$[2]$ Клейна четверная отражений или симметрий клинокороны $P_{1,28} = M_{22}$.

Компьютерная GAP-модель группы симметрий создана на основе порождающих её матриц. Система компьютерной алгебры позволяет найти её точное представление генетическим кодом. Например,

$$[n]^+ = Aut^+ Pir_n = \left\langle \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle \cong \langle a \,|\, a^n \rangle, \alpha = \frac{2\pi}{n}.$$

3. Соединения правильногранных пирамид

Вернёмся к Утверждению 1 секционного доклада автора о соединениях не более 18 правильногранных пирамид. Во время лекции на Чебышёвских чтениях был обещан приз тому, кто первым направит на электронный адрес автора полный список составленных из 19 правильногранных пирамид паркетогранников с такими как у пирамид или вдвое большими рёбрами. Технология построения всех k-составных паркетогранников, $k \leqslant 14$, на основе известных всех составленных из менее k правильногранных пирамид паркетогранников, описана в несвободной от пропусков соединений работе [5]. В этой публикации названы и другие участники исследования. Совместно с А. А. Черепухиной найдены все 16-составные паркетогранники, [6].

К решению задачи по усовершенствованию алгоритма построения составленных из правильногранных пирамид паркетогранников авторы работы [7] пришли через поиск разбиений составленного из 64 правильногранных пирамид архимедова тела $[4, 6, 6]$ усечённый октаэдр M_{16} с единичными рёбрами. Максимальное число соединяемых в паркетогранник пирамид, причём рёбра паркетогранника вдвое длиннее рёбер пирамид, равно 512.

Маршрут, о котором написано в конце п.1, состоит в поиске равнотипных многогранников Утверждения 1. При ослаблении ограничений на длины рёбер соединяемых тел количество разнотипных многогранников будет расти, но останется ограниченным.

4. Материализованные модели паркетогранников

При любом уровне вычислительной техники всегда найдётся задача, решение которой доказательными вычислениями будет упираться в нехватку ресурсов времени и памяти. Обойти это препятствие удаётся несколькими способами: сворачиваемостью применяемых формул, заменой полного перебора локальным и другими. Геометрическое моделирование, визуализация находятся в этом ряду. Применение прототипирования ставит на поток этот процесс. Поскольку прототипирование занимает несколько часов – 3D-принтер включается обычно на ночь, – то не утратило значение и моделирование многогранника из картона путём изготовления его развёртки, рис. 4. Наибольшая скорость изготовления материализованной модели при минимальной квалификации достигается при создании рёберных моделей[2].

О корректности применения материализованных моделей и компьютерной графики в доказательстве Утверждения 1 говорит опубликованная в работе [7] таблица значений двугранных углов паркетогранников, составленных из правильногранных пирамид. Ждут своего изготовления материализованные модели B-антипризм и C-антипризм, т.е. бесконечные серии парке-

[2]Видеозапись мастер-класса 29 апреля 2017 г. в итерактивном музее науки Ньютон-Парк (https://newton-park.net/): https://drive.google.com/file/d/0BzgLGQhB_6ueY2o4cmV1LWozaWs/view?usp=sharing https://drive.google.com/file/d/0BzgLGQhB_6ueZmtGS2pSQTBoZjg/view?usp=sharing

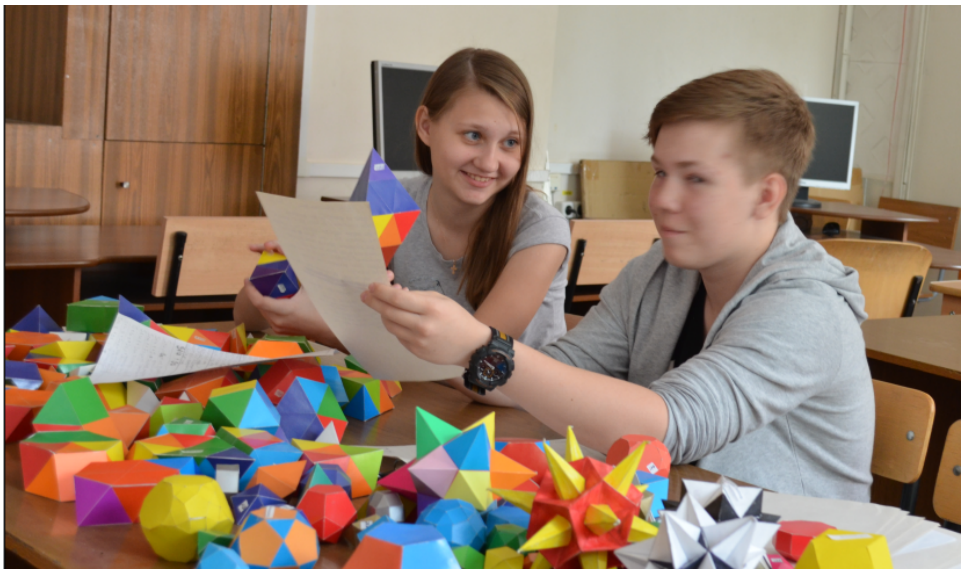


Рис. 4: Учащиеся МБОУ №149 г.Красноярска (ныне второкурсники ИМиФИ СФУ) А. Якушева и Е. Полтанов со своими моделями. Фото Е. С. Окладниковой

тогранников, отличных от правильногранных тел. Компьютерные модели C-антипризм CA_n с одинаковыми основаниями созданы на базе алгебраической модели следующей теоремы.

Теорема 1. *Для каждого $n = 3, 4, \ldots$ множество вершин тела CA_n с рёбрами длин 1 и 2 совпадает с орбитой точки*

$$\begin{pmatrix} R\left(2\cos\frac{3\pi}{2n}+\cos\frac{5\pi}{2n}\right) \\ R\left(2\sin\frac{3\pi}{2n}+\sin\frac{5\pi}{2n}\right) \\ \frac{\sqrt{3-4R^2\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right)^2}}{4} \end{pmatrix}, R=\frac{1}{2\sin\frac{\pi}{n}},$$

при действии группы $[2^+, 2n]$, порождённой

$$\textit{поворотами}\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos\frac{2\pi}{n} & \sin\frac{2\pi}{n} & 0 \\ -\sin\frac{2\pi}{n} & \cos\frac{2\pi}{n} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\textit{и вращательной симметрией}\ \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{n} & \sin\frac{\pi}{n} & 0 \\ -\sin\frac{\pi}{n} & \cos\frac{\pi}{n} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

5. Публикации в журнале «Квант»

Знакомство с темой настоящей работы можно начать с изучения научно-популярных статей [8, 9, 10].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Карпова Е. С., Тимофеенко А. В. О разбиениях усечённого икосаэдра на паркетогранники // Чебышевский сб.2018. Том 19, №2. С. 447–476.

2. Тимофеенко А. В. К перечню выпуклых правильногранников // Современные проблемы математики и механики. VI. Математика. Выпуск 3. К 100-летию со дня рождения Н. В. Ефимова./ Под ред. И. Х. Сабитова и В. Н. Чубарикова. 2011. — М.: Изд-во МГУ. С. 155-170.

3. Tupelo-Schneck R. Convex regular-faced polyhedra with conditional edges [Электронный ресурс], Режим доступа: http://tupelo-schneck.org/polyhedra/

4. Коновалов А. Б. Система компьютерной алгебры GAP 4.7 [Электронный ресурс], Режим доступа: http://www.gap-system.org/ukrgap/gapbook/manual.pdf

5. Полтанов Е. В., Судак Д. Н., Тимофеенко А. В., Якушева А. В. О выпуклых соединениях правильногранных пирамид // Proceedings of the 47th International Youth School-conference «Modern Problems in Mathematics and its Applications», Yekaterinburg, Russia, 02-Feb-2016, P. 148—158. [Электронный ресурс], Режим доступа: http://ceur-ws.org/Vol-1662/top3.pdf

6. Тимофеенко А. В., Судак Д. Н., Черепухина А. А. Составленные не более, чем из 16 правильногранных пирамид выпуклые тела с такими как у пирамид или вдвое большими рёбрами, Международная школа-семинар «Современная геометрия и её приложения». Международная научная конференция «Современная геометрия и её приложения»: сборник трудов. – Казань: Изд-во Казан. Ун-та, 2017. С. 140—142. Режим доступа: https://kpfu.ru/portal/docs/F_1549733697/GEOMETRY2017_finish.pdf

7. Окладникова Е. С., Тимофеенко А. В. Составленные из правильногранных пирамид паркетогранники как содержательная основа исследовательской работы старшеклассников // Информационные технологии в математике и математическом образовании: Материалы VII Всероссийской научно-методической конференции с международным участием. Красноярск, 14–15 ноября 2018 г. [Электронный ресурс] / отв. ред. В.Р. Майер. С. 151–160. http://elib.kspu.ru/document/32581

8. Матиясевич Ю. В. Модели многогранников// Квант. 1978. № 1. С. 8–17. Режим доступа: http://kvant.ras.ru/1978/01/modeli_mnogogrannikov.htm

9. Кузнецов С. Замощения сферы и архимедовы многогранники// Квант. 2018. № 11. С. 9,32–33.

10. Кузнецов С. Еще раз о полуправильных многогранниках// Квант. 2019. № 3. С. 29–31. Режим доступа: https://doi.org/10.4213/kvant20190304

СОДЕРЖАНИЕ

Пленарные доклады 3

В. Н. Чубариков. О новых методах П. Л. Чебышёва в математике и образовании 3

С. С. Демидов. П. Л. Чебышёв – учёный, учитель и деятель науки 11

Н. Н. Добровольский. Дзета-функция моноидов натуральных чисел и смежные вопросы 16

В. И. Иванов. Задача Чебышёва о моментах неотрицательных многочленов 21

С. В. Конягин. Об иррегулярности конечных последовательностей 26

А. Ю. Ольшанский. Groups with quadratic Dehn function 26

Д. В. Осипов. Ряды Лорана над кольцами и многомерный символ Конту-Каррера 27

В. П. Платонов, М. М. Петрунин. О периодичности непрерывных дробей квадратичных иррациональностей для кубических многочленов над числовыми полями 28

З. Х. Рахмонов. Короткие тригонометрические суммы с простыми числами в большие дуги 32

А. Л. Семенов, С. Ф. Сопрунов. Теория определимости сегодня 35

Секция 1. Группы 40

В. Н. Безверхний, Н. Б. Безверхняя. О когерентности групп 40

В. Н. Безверхний. О сопряженности слов в группах Артина с треугольной структурой .. 43

Н. Б. Безверхняя. О гиперболичности некоторых HNN-расширений свободных групп 46

И. В. Добрынина, А. С. Угаров. О степенной сопряженности слов в обобщенных древесных структурах групп Артина 49

С. С. Икаев, В. А. Койбаев. Элементарные группы и замкнутые элементарные сети над полем нулевой характеристики 53

К. В. Кислакова, С. В. Путилов. О конечных группах с заданными подгруппами равной мощности 55

М. Н. Коновалова, В. С. Монахов, И. Л. Сохор. О строго 2-максимальных подгруппах конечных групп 55

А. П. Кривошапко, С. В. Путилов. О конечных группах с нильпотентными или простыми максимальными кофакторами 57

С. П. Максаков. Брауэровы решетки ω-веерных формаций конечных групп 58

Д. Г. Новикова, С. В. Путилов. О подгруппах конечной группы, близких по мощности к самой группе 60

М. М. Сорокина, А. А. Горепекина. Об $\bar{\omega}$-веерных формациях конечных групп 61

А. А. Фомин. Два класса абелевых групп, определяемых классом конечных абелевых групп 64

Секция 2. Полугруппы и универсальные алгебры 65

А. Я. Канель-Белов. Проблемы Шпехтового типа для универсальных алгебр 65

В. К. Карташов, А. В. Карташова. Об абстрактной характеризации решеток квазимногообразий унаров 67

А. Л. Расстригин. О решетках формаций унарных алгебр 69

С. В. Сыроватская. Унары с периодической полугруппой эндоморфизмов 70

В. Л. Усольцев. Об эндоморфно простых и конгруэнц-эндоморфно устойчивых алгебрах с одним оператором 72

Н. А. Щучкин. Преобразования слов в заданном алфавите 75

Секция 3. Кольца и модули 78

И. М. Зильберборд. Обобщенно полукоммутативные подкольца матричных колец 78

М. Н. Зонов, Е. А. Тимошенко. О E-кольцах 79

Е. И. Компанцева. Абсолютные идеалы групп без кручения конечного ранга 82

О. В. Кравцова. Метод регулярного множества построения конечных квазиполей 85

О. В. Маркова. О длине коммутативных групповых алгебр в модулярном случае 87

А. В. Михалев, Е. Е. Ширшова. Интерполяционные псевдоупорядоченные кольца 89

К. М. Туленбаев. Нетеровость и центральные элементы алгебр, близких к алгебрам Новикова 93

Секция 4. Прикладная и компьютерная алгебры, криптография и дискретная математика 97

Н. Ф. Алексиадис. О рациональных A-функциях с рациональными коэффициентами 97

В. В. Биткина, А. К. Гутнова, А. А. Махнев. Дистанционно регулярные графы с массивами пересечений $\{7, 6, 6; 1, 1, 2\}$ и $\{42, 30, 2; 1, 10, 36\}$ не существуют 101

А. В. Галатенко, А. Е. Панкратьев, В. М. Староверов. Об одном алгоритме проверки существования нетривиальных n-подквазигрупп 104

А. В. Галатенко, В. А. Носов, А. Е. Панкратьев, В. М. Староверов. Об одном критерии правильности семейства функций 107

А. В. Галатенко, А. Е. Панкратьев, В. М. Староверов. Эффективность проверки полиномиальной полноты n-квазигрупп 111

С. Б. Гашков, А. Б. Фролов. Быстрое извлечение квадратных и кубических корней и решение уравнений степени не выше четвертой в некоторых башнях конечных полей 115

Е. И. Деза. К вопросу о перечислении деревьев 117

Э. Л. Иноземцев, К. В. Веденёв. Строение конечной групповой алгебры группы Гейзенберга и приложения к теории кодирования 119

Е. А. Курганов. Аппаратная реализация сбалансированных S-блоков 121

В. А. Кузовихина. Критерий существования скрытых каналов в модели невлияния 126

Ф. М. Малышев. k-конфигурации 129

В. Ю. Матвеев, В. Г. Чирский. Статистические свойства частичных сумм полиадических рядов 133

Б. Мханна. Ориентированные метрические конструкции на графах 134

О. А. Пихтилькова, Е. В. Мещерина, А. Н. Благовисная. О генераторах последовательностей матриц над конечным полем 135

И. А. Склонин, Н. Н. Ефанов. Проблемы вычислительно эффективного сравнения деревьев процессов локализованными тестами графовых изоморфизмов 137

Е. А. Туманова. Вычислительный анализ некоторых аппроксимационных свойств разрешимых групп Баумслага–Солитэра 141

Секция 5. Аналитическая теория чисел 143

А. З. Азамов, Н. Н. Назрублоев. Оценка коротких тригонометрических сумм Вейля в малых дугах 143

Л. А. Громаковская, Б. М. Широков. Формула обращения для рядов Дирихле и ее применения 146

И. Ш. Джаббаров, Г. Л. Гасанова. Об одном замечании к лемме Э. И. Ковалевской и ее приложении 2 148

И. Ш. Джаббаров. Теорема о плотности нулей для индивидуальной L-функции и ее приложения 152

А. А. Жукова, А. В. Шутов. Об аналоге задачи Эминяна для системы счисления Фибоначчи 154

А. А. Илларионов. Отклонение сеток Коробова 156

М. Йасас. О приближении аналитических функций абсолютно сходящимся рядом Дирихле, связанным с периодической дзета-функцией 160

А. Б. Калмынин. Квадратичные характеры с неотрицательными частичными суммами 163

О. Х. Каримов. О коэрцитивной оценке и разделимости дифференциального оператора Трикоми 164

М. А. Королёв. Об интеграле Ютилы в проблеме круга (по совместной работе с Д. А. Поповым) 165

У. М. Пачев, Л. А. Халилова. Об асимптотике числа представлений пары целых чисел квадратичной и линейной формами с конгруэнциальным условием 168

У. М. Пачев, М. Т. Шурдумова. Эргодические теоремы для целых точек на некоторых гиперболоидах в связи с гипотезами для L-функции Дирихле 170

А. С. Самсонов. Арифметические свойства элементов прямых произведений p-адических полей, II 174

Н. К. Семёнова. Об оценках сумм Клоостермана с весами 177

П. Н. Сорокин. Формула Фаа ди Бруно для производных высших порядков от сложной функции вида $F(u(x, y))$ 180

М. Текоре. О совместной универсальности периодических дзета-функций с мультипликативными коэффициентами 181

Ш. А. Хайруллоев. О нулях производной j-го порядка функции Харди 185

Д. Дж. Хокиев. Оценка сумм значений примитивного характера Дирихле в последовательности сдвинутых чисел, лежащих в арифметических прогрессиях 187

У. Чариев. Об одной оценке для сумм произведений мультипликативных и аддитивных функций по числам, простые делители которых лежат в заданных интервалах 188

А. В. Шутов. Об аналоге задачи Эминяна для разложений по знаменателям подходящих дробей 192

В. В. Юделевич. О проблеме делителей Карацубы 193

Е. Ю. Юденкова. Арифметические свойства рядов некоторых классов в полиадических лиувиллевых точках 196

Секция 6. Диофантовы приближения и теория трансцендентных чисел 198

Ю. А. Басалов. О константе наилучших совместных диофантовых приближений 198

В. И. Берник, Д. В. Васильев, Н. И. Калоша, А. С. Кудин. Метрические теоремы о приближении нуля значениями целочисленных полиномов с малой производной в корне 201

Е. В. Засимович, И. А. Корлюкова, Н. В. Сакович. Множества с малыми значениями целочисленных полиномов 202

П. Л. Иванков. О значениях функции Куммера с иррациональными параметрами 203

П. Л. Иванков. О значениях некоторых функций с иррациональными параметрами 204

М. А. Калугина, М. В. Ламчановская, Н. В. Шамукова. Оценки меры Хаара множеств p-адических чисел, в которых целочисленные полиномы имеют малую норму 205

О. Н. Кемеш, И. М. Морозова, Ж. И. Пантелеева. Неулучшаемые оценки расстояний действительных чисел до ближайшего корня целочисленного полинома 206

Д. В. Коледа. Об алгебраических точках фиксированной степени вблизи поверхностей . 207

В. Ю. Матвеев, В. Г. Чирский. Статистические свойства частичных сумм полиадических рядов 211

А. Х. Муньос Васкес. Арифметические свойства рядов в сходящихся p-адических областях: результаты и проблемы 212

В. Г. Чирский. О значениях обобщенных гипергеометрических рядов с параметром – трансцендентным числом 213

Секция 7. Дискретная геометрия и геометрия чисел 214

Д. Ю. Волков, К. В. Галунова. Метрические инварианты гиперповерхностей второго порядка в евклидовом пространстве 214

В. В. Волчков, Вит. В. Волчков. Укладки ограниченных плоских областей некоторыми семействами эллипсов 218

Н. М. Глазунов. Деформированные шары Чебышёва, их критические определители и решетки, диофантовы приближения и упаковки 220

М. Ю. Житная. Моделирование оптимальных сетей с помощью шарнирных механизмов 223

М. Д. Ковалёв. О геометрическом определении шарнирного механизма, теореме Кемпе и перезрелой математике 224

А. А. Мокрова, А. В. Шутов. О числе изоэдральных разбиений плоскости на полимино 229

Л. Н. Ромакина. О классификации трехвершинников расширенной гиперболической плоскости по типу полярной оси 232

Д. С. Рошаль, К. К. Федоренко, С. Багдигиян, С. Б. Рошаль. Моделирование плоских полигональных клеточных упаковок: связь между топологической дефектностью структуры, скоростью деления и распределением размера клеток 234

В. И. Субботин. RR-многогранники с тупоугольными ромбическими вершинами 237

А. В. Тимофеенко. Выпуклые соединения паркетогранников и прототипирование 239

О. Д. Фролкина. Канторовы множества с многомерными проекциями и их нетипичность 244

Секция 8. Теоретико-числовой метод в приближенном анализе и теория приближений 246

Д. В. Горбачев, Н. Н. Добровольский. Константы Никольского–Бернштейна для полиномов на единичной сфере с весом Данкля 246

А. И. Денисов, И. В. Денисов, Н. М. Добровольский, А. В. Родионов. Использование теоретико-числовых сеток при решении уравнений с частными производными методом малого параметра 247

Н. Н. Добровольский, Н. М. Добровольский. Башни полей Дирихле и многомерные квадратурные формулы 250

Н. Н. Добровольский, Н. М. Добровольский. Приближение алгебраических решеток целочисленными решетками 253

А. И. Козко, Л. М. Лужина, А. Ю. Попов, В. Г. Чирский. Функция потребления в математической модели экономического роста Рамсея — Касса — Купманса 255

А. Н. Кормачева. Совместные приближения квадратичных иррациональностей и квадратурные формулы 258

Н. В. Максименко. Пространство рядов Дирихле для многомерных решёток и алгебра рядов Дирихле решёток, повторяющихся умножением 260

И. А. Мартьянов. Оценки алгебраических констант Никольского 263

А. В. Михляева. Приближение алгебраических решёток и сеток целочисленными решётками и рациональными сетками 264

А. С. Подолян. О некоторых ограничениях при поиске решений линейного диофантова уравнения 267

Е. М. Рарова. Тригонометрические суммы сеток алгебраических решеток с бесконечно дифференцируемыми весами 270

А. В. Родионов. О методе Коробова — Рябенького решения дифференциальных уравнений в частных производных 274

Е. Н. Смирнова. Метрики на пространстве сдвинутых решеток 277

Р. В. Тарабрин, А. Н. Благовисная. Гиперболическая дзета-функция алгебраических решёток 280

Секция 9. История математики 284

И. Ф. Авдеев, Т. К. Авдеева. Роль личности П. Л. Чебышёва и его работ в развитии познавательного интереса школьников при обучении математике 284

В. Г. Алябьева. Из истории международных математических конгрессов 287

П. Н. Антонюк. Первая работа П. Л. Чебышёва 291

О. О. Барабанов, Л. П. Барабанова. Первая научная работа Чебышёва и метод Ньютона 292

Е. М. Богатов. Об истории теории ветвления и вкладе отечественных математиков 294

И. В. Денисов. По чебышёвским местам 299

Ю. А. Дробышев, И. В. Дробышева. О вкладе П. Л. Чебышёва в совершенствование содержания математического образования 299

Е. А. Зайцев. Характерные черты древнеегипетской математики 304

З. А. Кузичева. Отношение порядка. Эпизоды истории 307

Е. В. Манохин, Г. В. Кузнецов, С. В. Городничев, Н. О. Козлова. Из истории кафедры математики и информатики Тульского филиала Финуниверситета 310

Р. Р. Мухин. О теореме Пуанкаре — Биркгофа 314

С. С. Петрова. Математическое образование П. Л. Чебышёва 317

А. Н. Привалов, В. А. Шаров, Е. В. Ларкин. Подход к оценке отказоустойчивости системы с применением ординарных полумарковских процессов 320

А. Н. Привалов, В. А. Шаров, Е. В. Ларкин. Сравнение двух методов оценки отказоустойчивости вычислительных систем с дублированием 323

И. Ю. Реброва. П. Л. Чебышёв и отечественные математические школы по теории чисел 326

Г. И. Синкевич. О неизвестной рукописи И. А. Эйлера по истории математики 329

А. В. Титов. Диалектика развития математики и ее место в системе знания 332

В. Н. Чиненова. П. Л. Чебышёв о работе И. И. Рахманинова по теории водяных колес . 336

Секция 10. Алгебраическая теория чисел 339

В. В. Агафонцев. О равенстве $A^x + B^y = C^z$ в натуральных числах 339

Секция 11. Арифметическая и алгебраическая геометрии 343

И. М. Борисов. О топологии взаимных расположений M-кубики и M-квинтики 343

Н. Д. Пучкова. О взаимных расположениях двух неособых кривых степени 4 347

Секция 12. Многомасштабное математическое моделирование в физике 352

И. К. Архипов, В. И. Абрамова, А. Е. Гвоздев. Статистическая модель микропластичности в пористых металлических композитах 352

Ю. В. Бобылев, А. И. Грибков, Р. В. Романов. О компьютерном моделировании автоколебательных процессов в системах с одной степенью свободы 353

Ю. В. Бобылев, В. А. Панин. Моделирование процесса возбуждения электромагнитных колебаний в открытом вакуумном резонаторе. 357

Ю. В. Бобылев, Т. Г. Мещерякова, В. А. Панин. Численное моделирование возбуждения электромагнитных колебаний открытого плазменного резонатора 361

С. Н. Кутепов, А. Е. Гвоздев, О. В. Кузовлева, Д. С. Клементьев. О роли статистической обработки в оценке результатов коррозионно-механических испытаний 365

Д. М. Левин, Ю. Н. Колмаков. Применение модели случайных блужданий для изучения начальной стадии спинодального распада 371

Д. М. Левин, Д. О. Фролов. О фоне внутреннего трения в дисперсионно упрочненном сплаве Ni-Co-Cr-(X) 375

Г. В. Маркова, А. Р. Комарова, О. В. Логунова, А. Д. Маликов. Изменение параметров зеренной структуры при отжиге комплексно-легированной стали 380

Ю. Е. Титова, Е. А. Белых. Об оценке разнозернистости однофазных металлических материалов 385

А. Н. Чуканов, В. А. Терешин, Е. В. Цой. Использование векторных функций для описания НДС в металлических средах с дефектами 387

Чебышёвские чтения 392

Ю. А. Дробышев, И. В. Дробышева. О вкладе П. Л. Чебышёва в развитие математики и математического образования 393

Х. М. Салиба, В. Н. Чубариков. Числа и функции 404

А. В. Тимофеенко. От платоновых тел к паркетогранникам через символьное программирование и прототипирование 421

Научное издание

АЛГЕБРА, ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ, ДИСКРЕТНАЯ ГЕОМЕТРИЯ И МНОГОМАСШТАБНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ: СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ, ПРИЛОЖЕНИЯ И ПРОБЛЕМЫ ИСТОРИИ

Материалы XIX Международной конференции, посвящённой 200-летию со дня рождения академика П. Л. Чебышёва

Оригинал-макет подготовлен А. В. Родионовым.
Технический редактор – И. Е. Агапова.
Художественный редактор – Е. А. Свиридова.

Подписано в печать 18.08.2021. Формат 60×90/8.
Бумага офсетная. Печать трафаретная. Усл. печ. л. 54,5.
Тираж 200 экз. (1-й завод – 35 экз.). Заказ 21/007. «С» 1881.

Тульский государственный педагогический
университет им. Л. Н. Толстого. 300026, Тула, просп. Ленина, 125.

Отпечатано в ТГПУ им. Л. Н. Толстого.
300026, Тула, просп. Ленина, 125.