БИБЛИОТЕКА
ЧЕБЫШЁВСКОГО
СБОРНИКА

Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы, приложения и проблемы истории

Материалы XVI Международной конференции, посвященной 80-летию со дня рождения профессора Мишеля Деза

Библиотека Чебышевского сборника

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Российская академия наук
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
Математический институт им. В. А. Стеклова РАН
Институт истории естествознания и техники им. С. И. Вавилова РАН
Московский педагогический государственный университет
Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого
Тульский государственный университет

АЛГЕБРА, ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ И ДИСКРЕТНАЯ ГЕОМЕТРИЯ: СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ, ПРИЛОЖЕНИЯ И ПРОБЛЕМЫ ИСТОРИИ

Материалы XVI Международной конференции, посвященной 80-летию со дня рождения профессора Мишеля Деза

Тула,
13–18 мая 2019 г.

Тула
ТГПУ им. Л. Н. Толстого
2019

ББК 22.132
УДК 511.6
А45

Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы,
А45 приложения и проблемы истории: Материалы XVI Междунар. конф., посвященной 80-летию со дня рождения профессора Мишеля Деза.– Тула: Тул. гос. пед. ун-т им. Л. Н. Толстого, 2019. – 418 с.

ISBN 978-5-6042449-8-2

ББК 22.132
УДК 511.6

Конференция проводится при финансовой поддержке РФФИ,
проект № 19-01-20049

ISBN 978-5-6042429-8-2

Выдающийся советский и французский математик,
доктор физико-математических наук, профессор
Мишель Деза
(27 апреля 1939 – 23 ноября 2016)

.

Пленарные доклады

Unitary t-designs and unitary t-groups

Eiichi Bannai (Japan, Fukuoka)
Kyushu University
e-mail: bannai@math.kyushu-u.ac.jp

Unitary t-designs are finite subsets of the unitary group $U(d)$ that approximate $U(d)$ properly, in a similar sense as spherical t-designs are finite subsets that approximate the real unit sphere S^{d-1} properly. A unitary t-design is called a unitary t-group if it is a subgroup of $U(d)$. First, we give a brief survey on the study of unitary t-designs that was started in physics (quantum information theory). In physics, some unitary 3-groups have been known, but no unitary 4-groups were unknown for $d \geqslant 3$ (and the non-existence of unitary 4-groups has only been conjectured). The main purpose of this talk is to point out that the answer was already essentially known in a disguised form in the deep group theoretical work of Guralnick–Tiep: Decompositions of small tensor powers and Larsen's conjecture, Represent. Theory 9 (2005), 138–208. Namely, Guralnick–Tiep gave the complete classification of unitary t-designs for all $t \geqslant 2$ for $d \geqslant 5$. This was pointed out by Bannai–Navarro–Rizo–Tiep, arXiv:1810.02507, just recently. We also treated the remaining cases of $d = 2$, 3 and 4 completely.

Finally we discuss some unitary $t + 1$-designs which are obtained as the orbits of the action of $G \times G$ on $U(d)$ for certain unitary t-groups G in $U(d)$. For example, this makes it possible to construct (numerically) some exact unitary 4-designs in $U(4)$ explicitly from the unitary 3-group $Sp(4, 3)$ in $U(4)$. The last part of my talk is based on the ongoing joint work with Mikio Nakahara, Da Zhao and Yan Zhu.

———————————————————————————

УДК 512.552

Градуированные тела и модули над ними [1]

И. Н. Балаба (Россия, г. Тула)
Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого
e-mail:ibalaba@mail.ru
А. В. Михалёв (Россия, г. Москва)
Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
,

Graded division rings and modules over them

I. N. Balaba (Russian, Tula)
Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University
e-mail:ibalaba@mail.ru
A V. Mikhalev (Russian, Moscow)
Lomonosov Moscow State University

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ №19-41-710004_р_а

В теории градуированных колец значительную роль играют градуированные тела, то есть градуированные кольца, каждый ненулевой однородный элемент которых является обратимым. Все рассматриваемые кольца предполагаются ассоциативными с единицей, градуированные мультипликативной группой G с единицей e.

Легко проверить, что если $D = \bigoplus_{g\in G} D_g$ является G-градуированным телом, то:

- D_e – тело;
- носитель $G^{'} = \mathrm{Supp}D = \{g \in G \mid D_g \neq 0\}$ тела D – подгруппа группы G
- D – сильно $G^{'}$ – градуированное кольцо, более точно $D = D_e * G^{'}$ – скрещенное произведение тела D_e и группы $G^{'}$ [1].

Несмотря на то, что градуированные тела не являются телами в обычном смысле, они сами и градуированные модули над ними обладают свойствами, аналогичными свойствам тел и линейных пространств над телами.

Градуированный D-модуль V называется *gr-свободным*, если он обладает базисом, состоящим из однородным элементов, то есть $V \cong \bigoplus_{j\in J} D(\sigma_j)$, где $\{\sigma_j, j \in J\}$ – семейство элементов группы G. Заметим, что gr-свободный D-модуль является свободным D-модулем, в то же время свободный градуированный модуль может не быть gr-свободным.

Теорема 1. *Градуированное кольцо D является градуированным телом в том и только том случае, если каждый правый (левый) градуированный D-модуль является gr-свободным.*

Градуированный модуль V над градуированным телом D будем называть *градуированным векторным пространством.* Все однородные базисы V имеют одинаковую мощность. Хорошо известно, что если V конечно порожденный градуированный правый модуль с базисом состоящим из однородных $v_1, v_2, ..., v_n$, $v_i \in V_{g_i^{-1}}$ $(i = 1, \ldots, n)$, то его градуированное кольцо эндоморфизмов $\mathrm{END}_D(V)$ изоморфно кольцу матриц $M_n(D)(g_1, \ldots, g_n)$, все матричные единицы которого являются однородными элементами. Такие градуировки на матричных кольцах называются *хорошими.*

В [2] была изучена решетка градуированных подпространств градуированного векторного пространства и построены [2, теорема 2.3.]:

1. изоморфизм между решеткой градуированных подпространств V и решеткой правых градуированных аннуляторных идеалов градуированного кольца эндоморфизмов

$$A = \mathrm{END}_D(V);$$

2. антиизоморфизм между решеткой градуированных подпространств V и решеткой левых градуированных аннуляторных идеалов кольца A;

3 антиизоморфизм между решеткой правых градуированных аннуляторных идеалов и решеткой левых градуированных аннуляторных идеалов кольца A.

Градуированным центром $Z_{gr}(D)$ тела D назовем максимальное градуированное подкольцо центра $Z(D)$, оно порождено однородными центральными элементами кольца D. Ясно, что $Z_{gr}(D)$ является градуированным полем.

Теорема 2. *Пусть D – градуированныое тело, Z – его градуированный центр и F – максимальное градуированное подполе в D. Тогда $D \bigotimes_Z F$ является gr-плотным кольцом в градуированном кольце $\mathrm{END}_F(D)$ линейных преобразований тела D, рассматриваемого как градуированное векторное пространство над F.*

Если тело D конечномерно над своим градуированным центром Z, то $D \bigotimes_Z F$ изоморфно кольцу матриц $M_n(F)(g_1, \ldots, g_n)$ над градуированным полем F, снабженному хорошей градуировкой.

При изучении колец операторов линейных пространств и колец эндоморфизмов модулей одним из центральных вопросов является описание их изоморфизмов. Описание изоморфизмов колец линейных преобразований линейных пространств над телами приведено в монографии Р. Бэра [3]. Важность модульного подхода при характеризации абелевых групп была подчеркнута в монографии И. Капланского [4].

В [2, теорема 3.1] было установлено, что изоморфизмы градуированных колец линейных преобразований векторных пространств индуцируются специального вида полулинейными преобразованиями векторных пространств.

В качестве следствия получим.

Теорема 3. *Пусть A – gr-простое gr-артиново кольцо. Тогда A изоморфно кольцу матриц с хорошей градуировкой над некоторым градуированным телом D. Если при этом $A \cong M_n(D)(g_1, \ldots, g_n) \cong M_m(E)(h_1, \ldots, h_n)$ для градуированных тел D и E, то $n = m$ и существуют $\sigma \in G$ и изоморфизм колец $\beta : D \to E$, такие что $\beta(D_g) = E_{\sigma^{-1}g\sigma}$.*

Отметим, что авторами была рассмотрена и более общая ситуация. Получены критерии, решающие вопрос о том, когда изоморфизм градуированных колец изоморфизмов строгих gr-образующих, индуцируется gr-образующим, градуированной эквивалентностью Мориты или полулинейным преобразованием [5].

Пусть F – градуированное поле и A – градуированная алгебра над F. Алгебру A назовем *центральной*, если все ее центральные однородные элементы лежат в F.

Теорема 4. *Пусть F – градуированное поле и A – градуированная конечномерная центральная gr-простая алгебра над F. Тогда существует градуированное тело D, являющееся конечномерной центральной gr-простой F-алгеброй, такое что алгебра A изоморфна алгебре матриц с хорошей градуировкой над телом D.*

Отметим, что в [6] дана полная классификация с точностью до эквивалентности конечномерных градуированных алгебр с делением над полем действительных чисел, градуированных конечной абелевой группой.

Наряду с описанием изоморфизмов колец эндоморфизмов модулей значительный интерес представляет описание их антиизоморфизмов. Из более общих результатов авторов, описывающих критерии индуцируемости градуированных колец эндоморфизмов строгих gr-образующих градуированной антиэквивалентностью Мориты или градуированным антиполулинейным преобразованием [7], установлено, что каждый антиизоморфизм градуированных колец линейных преобразований индуцируется специального вида анти-полулинейным преобразованием векторных пространств.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Dade E. C. Group-graded rings and modules // Math. Z. 1980 Vol. 174, no 2. P. 241–262.

2. Балаба И. Н. Изоморфизмы градуированных колец линейных преобразований градуированных векторных пространств // Чебышевский сборник. 2005. Том 6, № 4(16). С. 6–23.

3. Бэр Р. Линейная алгебра и проективная геометрия. — М.: Изд-во иностр. лит., 1955. 400 с.

4. Kaplansky I. Infinite abelian groups. — The University of Michigan, 1954.

5. Балаба И.Н., Михалёв А.В. Изоморфизмы градуированных колец эндо- морфизмов градуированных модулей, близких к свободным // Фундамент. и прикл. матем. 2007. Том 13, № 5. С. 3–18.

6. Bahturin Y., Zaicev M. Simple graded division algebras over the field of real numbers // Linear Algebra and its Applications. 2016. Том 490. P. 102–123.

7. Балаба И.Н., Михалёв А.В. Антиизоморфизмы градуированных колец эндоморфизмов градуированных модулей, близких к свободным // Фундамент. и прикл. матем. 2008. Том 14, № 7. С. 23–36.

УДК 514.9

О проблеме равенства слов в группах Артина[1]

В. Н. Безверхний В.Н. (Россия, г. Москва)
Академия гражданской защиты МЧС России
e-mail: vnbezv@rambler.ru

On problem equality words in the Artin groups

V. N. Bezverkhnii, (Russia, Moscow)
Academy of Civil Defence EMERCOM of Russia
e-mail: vnbezv@rambler.ru

Истоки проблемы равенства слов в группах Артина восходят к работе Э. Артина 1925 г., определившего копредставление группы кос β_{n+1}, и доказавшего разрешимость проблемы равенства слов в группе β_{n+1}.

Группа Артина задается конечной системой образующих: $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ и системой определяющих соотношений:

$< \sigma_i\sigma_j >^{m_{ij}} = < \sigma_j\sigma_i >^{m_{ji}}$, где $< \sigma_i\sigma_j >^{m_{ij}} = \sigma_i\sigma_j\sigma_i \ldots$ – слово из чередующихся образующих σ_i, σ_j длины m_ij, m_ij – элемент симметрической матрицы Коксетера $M = \{m_{ij} | i, j \in \overline{1, n}\}$, $m_{ij} \in \{2, 3, 4, \ldots, \infty\}$, $m_{ij} = 1$ для любого $i = \overline{1, n}$, $m_{ij} = \infty$, означает, что соотношение с образующими σ_i, σ_j отсутсвует.

Группа Артина имеет копредставление:

$$G = < \sigma_1, \ldots, \sigma_n; < \sigma_i\sigma_j >^{m_{ij}} = < \sigma_j\sigma_i >^{m_{ji}}, i, j \in \overline{1, n} > \tag{1}$$

Поставим в соответствии группе G конечный граф Γ, каждой вершине v_i которого ставится в соответствие образующий v_i, а ребру, соединяющему вершины v_i, v_j – элемент $m_{ij} \in M$, причем, если вершины v_i, v_j не соединены ребром, то паре $\sigma_i\sigma_j$ соответствует $m_{ij} = \infty$.

Такой граф называется графом Коксетера, а группа Артина, соответствующая ему, имеет копредставление (1) и обозначается G_Γ. С каждой группой Артина G_Γ связана группа Коксетера $\overline{G}_\Gamma$, имеющая копредставление:

$$\overline{G}_\Gamma = < \sigma_1, \ldots, \sigma_n; < \sigma_i\sigma_j >^{m_{ij}} = < \sigma_j\sigma_i >^{m_{ji}}, \sigma_i^2 = 1, i, j \in \overline{1, n} > \tag{2}$$

Если группа $\overline{G}_\Gamma$ конечна, то группа G_Γ называется группой Артина конечного типа. Данному классу групп принадлежат группы кос β_{n+1}, в которых в 1969 г. Гарсайдом Ф.А. была решена проблема сопряженности слов [1]. Брискорном Э. и Сайто К. была доказана разрешимость проблем равенства и сопряженности слов в группах Артина конечного типа [2] .

Шупп П. и Аппель К. определили широкие классы групп Артина большого типа ($m_{ij} \geq 3$) и групп экстрабольшого типа ($m_{ij} > 3$).

[1]Исследование выполнено по гранту РФФИ №19-41-710002_р_а

Для групп Артина экстрабольшого типа, используя диаграмный метод, ими была решена проблема равенства и сопряженности слов [5]. В работах [6], [7] авторами независимо были решены проблемы равенства и сопряженности слов в группах Артина большого типа. В [4] введено понятие групп Артина с древесной структурой.

Группа Артина называется группой с древесной структурой, если граф Коксетера Γ, соответствующий данной группе, является дерево-графом. Элементы матрицы Коксетера $M = (m_{ij}|i,j \in \overline{1,n})$, $m_{ij} \in \{2,3,\ldots,\infty\}$.

Теорема 1. *Теорема 1. [8] . В группах Артина с древесной структурой разрешимы проблемы равенства и сопряженности слов.*

Группа Артина называется группой Артина с m-угольной структурой, если ее граф Γ состоит из m-угольников с элементами матрицы Коксетера m_{ij}, принадлежащими множеству $\{2,3,\ldots,\infty\}$.

Теорема 2. *Теорема 2. Пусть G_Γ группа Артина с m-угольной структурой, $m > 3$, тогда в группе G_Γ разрешимы проблемы равенства и сопряженности слов.*

Целью данной работы является решение проблемы равенства слов в конечнопорожденной группе Артина.

Пусть G_Γ – группа Артина, заданная копредставлением (1), Γ – граф Коксетера, соответствующий группе $G_\Gamma, \{\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_n\}$ – образующие группы G_Γ. Пусть $\Gamma_0, \Gamma_0 \subset \Gamma$, максимальный дерево-граф, $\partial\Gamma_0$ – дополнение Γ_0 в Γ, $\partial\Gamma_0$ – замкнутое множество, через X_0 обозначим множество образующих $G_{\Gamma_0} : X_0 = \{\sigma_{01},\sigma_{02},\ldots,\sigma_{0n}\}$, где $\sigma_{0i} = \sigma_i,\ i \in \overline{1,n}$, $relG_{\Gamma_0}$ – система определяющих соотношений группы G_{Γ_0} и:

$$G_{\Gamma_0} =< X_0; relG_{\Gamma_0} > \tag{3}$$

копредставления группы G_{Γ_0}. Обозначим $\overline{X}_0$, $\overline{X}_0 = \{\overline{\sigma}_{oi}, 1 \leq k_0 \leq i \leq n_0 \leq n\}$ – множество образующих группы $G_{\partial\Gamma_0}$, $\overline{\overline{X}} = \{\sigma_{oi}, 1 \leq k_0 \leq i \leq n_0 \leq n\}$, $\overline{\overline{X}}_0 \subseteq X_0$, $relG_{\partial\Gamma_0} = G_\Gamma \setminus G_{\Gamma_0}$, и копредставление группы $G_{\partial\Gamma_0}$ будет иметь вид:

$$G_{\partial\Gamma_0} =< \overline{X}_0; relG_{\partial\Gamma_0} > \tag{4}$$

Используя преобразования Тице, можно преобразовать копредставление группы G_Γ к следующему виду:

$$G_\Gamma =< \sigma_{01},\ \ldots,\ \sigma_{0n},\ \overline{\sigma}_{0k_0},\ \ldots,\ \sigma_{0n_0};\ relG_{\Gamma_0},\ relG_{\partial\Gamma_0},\ \sigma_{0i} = \overline{\sigma}_{0i},\ 1 \leq k_0 \leq i \leq n_0 \leq n > \tag{5}$$

В дальнейшем будем использовать следующее копредставление группы G_Γ:

$$G_\Gamma =< G_{\Gamma_0} * G_{\partial\Gamma_0}; relG_{\Gamma_0}, relG_{\partial\Gamma_0}, \sigma_{0k_0} = \overline{\sigma}_{0k_0}, \ldots, \sigma_{0n_0} = \overline{\sigma}_{0n_0} > \tag{6}$$

Теорема 3. *Теорема 3. В группе Артина с древесной структурой разрешима проблема вхождения.*

Теорема 4. *Теорема 4. (основная теорема). Если в группе $G_{\partial\Gamma_0}$ разрешима проблема равенства слов и существует алгоритм, позволяющий для любого слова $\overline{w} \in G_{\partial\Gamma_0}$ и любого образующего $\overline{\sigma}_{oj}$, $1 \leq k_0 \leq j \leq n_0 \leq n$, группы $G_{\partial\Gamma_0}$ установить, принадлежит ли $\overline{w}$ циклической подгруппе $< \overline{\sigma}_{oj} >$, то в группе G_Γ разрешима проблема равенства слов.*

Теорема 5. *Теорема 5. В группе $G_{\partial\Gamma_0}$ разрешима проблема равенства слов и для любого $\overline{w} \in G_{\partial\Gamma_0}$ можно эффективно установить, принадлежит ли $\overline{w}$ циклической подгруппе, порожденной образующим $\overline{\sigma}_{oj} \in \overline{X}_0$, $k_0 \leq j \leq n_0$.*

При доказательстве непосредственно используются теорема 4 и разложение группы $G_{\partial\Gamma_0}$ в конечную последовательность групп Артина с древесной структурой

Теорема 6. *Теорема 6. В конечнопорожденной группе Артина разрешима проблема равенства слов.*

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Garsid F.A. The braid group and other groups // Quart, Math Oxford. ser(2), 1969 v.20, p 235-254.
2. Брискорн Э., Сайто К. Группы Артина и группы Коксетера // Математика. 1974 г. т 18, №6, с. 56-79.
3. Безверхний В.Н. Неразрешимость проблемы вхождения в группах Артина конечного типа // Сиб. Мат. жур. TXXVI. №5, 1985, с. 27-42.
4. Безверхний В.Н. О группах Артина, Коксетера с древесной структурой // V Международная конференция "Алгебра и теория чисел. Современные проблемы и их приложения."Тезисы докладов. Тула, 2003, с. 33-34.
5. Appel K.J., Schupp P.E. Artin group and Infinite Coxeter groups // Invent Math. 1984, p. 50-78.
6. Appel K.J. On Artin groups and Coxeter groups of large type. // Contempor. Math. 1984, p. 50-78.
7. Безверхний В.Н. Решение проблемы сопряженности слов в группах Артина и Коксетера большого типа. // Алгоритмические проблемы. Теории групп и полугрупп. Межвуз. сб. науч. тр. Тула. 1986, с. 26-61
8. Безверхний В.Н., Карпова О.Ю. Проблема равенства и сопряженности в группах Артина с древесной структурой // Извес. Тульс. гос. универ., серия Математика, Механика, Информатика. 2006 г. Т. 12 вып. 1, с. 67-82.

УДК 514.172.45+514.132+519.17

Выпуклые многогранники, фуллерены и геометрия Лобачевского[1]

В. М. Бухштабер (Россия, г. Москва)
МИАН имени В. А. Стеклова и МГУ имени М. В. Ломоносова
e-mail: buchstab@mi-ras.ru

Convex polytopes, fullerenes and Lobachevsky geometry

V. M. Buchstaber (Russia, Moscow)
Steklov Mathematical Institute and Lomonosov Moscow State University
e-mail: buchstab@mi-ras.ru

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, гранты 17-01-00671-а и 18-51-50005-Яф-а

Первая часть доклада посвящена классическим и современным результатам математики, которые оказались в центре внимания физиков и химиков в связи с Нобелевской премией по химии 1996 г. (Р. Кёрл (R. F. Kurl), Х. Крото (H. Kroto), Р. Смолли (R. E. Smalley)) «за открытие фуллеренов». Лауреты синтезировали молекулу C_{60}, состоящую из 60 атомов углерода, которая комбинаторно представляет собой усечённый икосаэдр (см. рис. 1). Они назвали её *бакминстерфуллереном* в честь архитектора и философа Р. Бакминстера Фуллера.

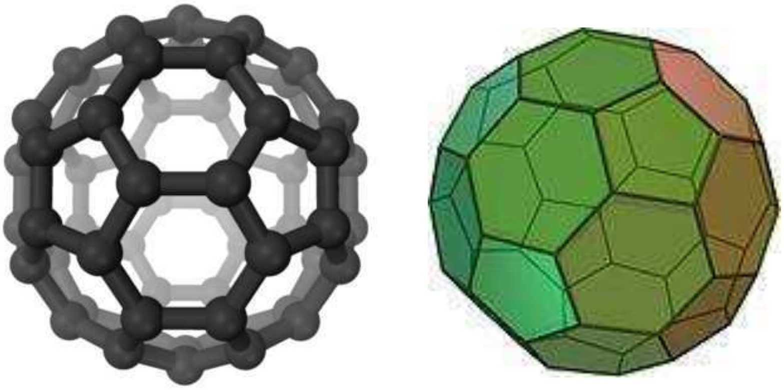


Рис. 1: Слева – бакминстерфуллерен C_{60}, справа – усечённый икосаэдр (архимедово тело).

Благодаря фуллеренам ряд областей математики и математической физики обогатились фундаментальными проблемами и результатами. Были открыты глубокие связи между областями математики, которые ещё совсем недавно казались далёкими друг от друга.

Вторая часть доклада посвящена разделам математической теории фуллеренов, которые относятся к комбинаторике многогранников и геометрии Лобачевского.

Математическим фуллереном мы называем комбинаторный простой выпуклый трёхмерный многогранник, у которого все грани являются пятиугольниками или шестиугольниками. Каждый фуллерен содержит ровно 12 пятиугольников, а число шестиугольников может быть любым, кроме единицы. Единственный фуллерен без шестиугольников – додекаэдр (платоново тело). Единственный фуллерен с двумя шестиугольниками мы называем 6-*бочкой* (рис. 2). Естественным обобщением фуллеренов являются *n-диск-фуллерены*, то есть простые многогранники, у которых все грани, кроме n-угольника, являются пятиугольниками или шестиугольниками. Таким многогранникам посвящена статья М. Деза, М. Дютура Сикирича, М. И. Штогрина [1].

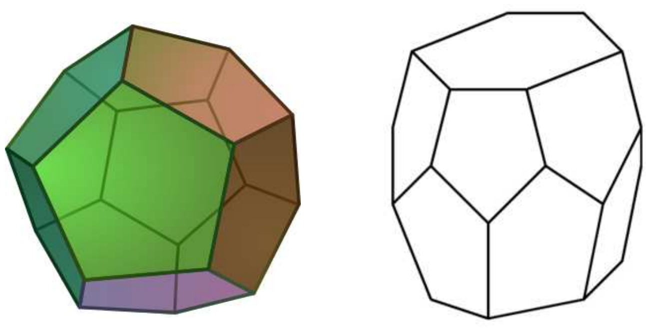


Рис. 2: Слева – додекаэдр, справа – фуллерен 6-бочка.

В центре внимания первой части доклада будет следующий результат.

Имеется однопараметрическое семейство фуллеренов, поверхность которых получается из двух половинок додекаэдра вставкой k поясов, каждый их которых состоит из 5 шестиугольников. Такие фуллерены называются $(5,0)$-*нанотрубками.*

Теорема 1 ([2] В. М. Бухштабер, Н. Ю. Ероховец, 2017). *Любой фуллерен, отличный от додекаэдра и* $(5,0)$*-нанотрубок, получается из* 6*-бочки при помощи срезок пар смежных рёбер граней, у которых не меньше* 6 *сторон, так что промежуточные многогранники являются фуллеренами или* 7*-диск-фуллеренами, у которых семиугольник граничит с некоторым пятиугольником.*

Обратим внимание, что известный алгоритм перечисления комбинаторных типов фуллеренов [3] использует счётный набор операций, каждая из которых переводит фуллерен в фуллерен с большим числом шестиугольников. Достоинство нашего результата заключается в том, что за счёт минимального расширения класса многогранников, допустимых на промежуточных шагах, для построения фуллеренов достаточно использовать только 4 операции. Конечные наборы операций, допускающие также 4-диск-фуллерены и достаточные для построения любого фуллерена из додекаэдра, приведены в нашей работе [4].

В центре внимания второй части доклада будут выпуклые многогранники, которые реализуются в трёхмерном пространстве Лобачевского в виде ограниченных выпуклых многогранников с прямыми двугранными углами. Такие многогранники мы называем *многогранниками А. В. Погорелова.* Из результатов А. В. Погорелова [5] (1967) и Е. М. Андреева [6] (1970) следует, что этот класс многогранников характеризуется тем, что они отличны от тетраэдра и не имеют 3- и 4-поясов, где k*-поясом* называется циклическая последовательность граней, в которой смежными являются последовательные грани и только они и никакие три грани не имеют общей вершины. Реализация многогранника Погорелова в пространстве Лобачевского определена однозначно с точностью до изометрии и задаёт замощение этого пространства копиями многогранника. Простейшим примером многогранника Погорелова является k-бочка, $k \geqslant 5$, то есть многогранник, поверхность которого склеен из двух частей, каждая из которых состоит из k-угольника, окружённого поясом пятиугольников. Из результатов Т. Дошлича [7, 8] (1998, 2003) по теории графов следует, что любой фуллерен является многогранником Погорелова.

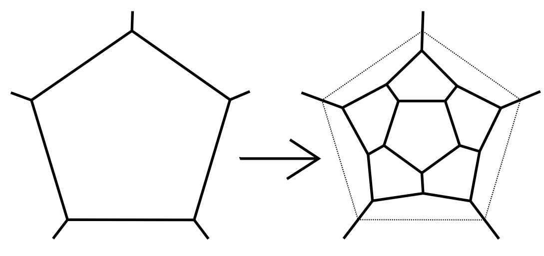


Рис. 3: Связная сумма с додекаэром.

Теорема 2 ([2] В. М. Бухштабер, Н. Ю. Ероховец, 2017). *Трёхмерный многогранник является многогранником Погорелова тогда и только тогда, когда он либо является k-бочкой, $k \geqslant 5$, либо получается из додекаэдра или* 6*-бочки при помощи последовательности операций связной суммы с додекаэдром (рис. 3) и срезки пары смежных рёбер, лежащих в грани по крайней мере с* 6 *сторонами.*

Наш результат является усилением результатов Д. Барнетта [9, 10] (1974,1977), Дж. Батлер [11] (1974) и Т. Иноe [12] (2008). Новым является тот факт, что достаточно использовать срезки только двух смежных рёбер, а не некоторого числа последовательных рёбер грани, а также то, что в качестве начального множества многогранников можно выбрать только додекаэдр и 6-бочку, а не все k-бочки.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Деза М., Дютур Сикирич М., Штогрин М. И. Фуллерены и диск-фуллерены// УМН. 2013. Том 68, № 4(412). С. 69-128.
2. Бухштабер В. М., Ероховец Н. Ю. Конструкции семейств трехмерных многогранников, характеристические фрагменты фуллеренов и многогранники Погорелова// Изв. РАН. Сер. матем. 2017. Том 81, № 5. С. 15-91.
3. Brinkmann G., Goedgebeur J., McKay B. D. The Generation of Fullerenes// J. Chem. Inf. Model. 2012. V. 52, P. 2910-2918.
4. Buchstaber V. M., Erokhovets N. Yu., Finite sets of operations sufficient to construct any fullerene from C_{20}// Structural Chemistry, 28:1 (2017), 225–234.
5. Погорелов А. В. О правильном разбиении пространства Лобачевского// Матем. заметки. 1967. Т. 1, № 1. С. 3–8.
6. Андреев Е. М. О выпуклых многогранниках в пространствах Лобачевского// Матем. сб. 1970. Том 81 (123), № 3. С. 445–478.
7. Dǒslić T. On lower bounds of number of perfect matchings in fullerene graphs// J. Math. Chem. 1998. V. 24, N 4. P. 359–364.
8. Dǒslić T. Cyclical edge-connectivity of fullerene graphs and $(k, 6)$-cages// J. Math. Chem. 2003. V. 33, N 2. P. 103–112.
9. Barnette D. On generation of planar graphs// Discrete Mathematics. 1974. V. 7, № 3-4. P. 199–208.
10. Barnette D. Generating the c^*-5-connected graphs// Israel Journal of Mathematics. 1977. V. 28, N 1-2. P. 151–160.
11. Butler, J.W. A generation procedure for the simple 3-polytopes with cyclically 5-connected graphs// Canad. J. Math. 1974, V. XXVI, N 3. P. 686-708.
12. Inoue T. Organizing volumes of right-angled hyperbolic polyhedra// Algebr. Geom. Topol. 2008. V. 8, № 3. P. 1523-1565.

The Local Theory for Delone and t-bonded Sets

Mikhail Bouniaev (USA, Rio Grande Valley)
University of Texas Rio Grande Valley
e-mail: mikhail.bouniaev@utrgv.edu

Introduction. The overarching goal of this paper is to review main results of the local theory and discuss a potential extension of local theory, that focuses mostly on regular Delone sets and tiling to t-bonded sets, graphs, orthogonal nets, etc., and determine an agenda for research in this area. The main goal of the local theory for crystals is to find the correct statements rigorously explaining why and how the crystalline structure follows from the pair-wise identity of local arrangements around each atom. Before the 70s, there were no rigorously proved mathematical statements until B. Delone, R.Galiulin, and Delone's students N. Dolbilin and M. Stogrin developed a mathematically sound local theory of crystals (see for instance,[1]).

Definition 1. *(Delone Set) Let $\mathbb{R}^d$ be Euclidean space, r and R some positive numbers. A set $X \subset \mathbb{R}^d$, is called a (r, R)* Delone set *if: (i) any open ball of radius r has at most one point from X (r-condition, uniformly discrete set);(ii) any closed ball of radius R has at least one point from X (R-condition).*

Some theorems from the classical local theory for Delone sets have been generalized ([2], [3],[4])for a wider class of sets that we call t-bonded sets.

Definition 2. *(t-bonded Set) We call a uniformly discrete set $X \subset \mathbb{R}^d$ a* t-bonded set, *where t is a positive number, if for any two points x and $x' \in X$ there is a finite sequence $x = x_0, x_1, \ldots, x_m = x'$ of points from X such that $|x_{i-1}x_i| \leq t$, $i \in [1, m]$. The sequence $x = x_0, x_1, \ldots, x_m = x'$, for which $|x_{i-1}x_i| \leq t$, is called a* t-chain *and denoted by $[x, x']$.Each pair of points x, x' from X with $|xx'| \leq t$ will be called a* t-bond.

Statement 1. Any (r, R) Delone set $X \subset \mathbb{R}^d$ is $2R$-bonded set.

Review of a large variety of proven theorems/facts related to Delone sets, prompted us to extend the concept of the local theory by including statements where a “local” premise allows to make a “global” conclusion.

Local Theorems for Delone Sets; t-bonded Sets. The statements of the local theory require some definitions, we will provide here only the basic ones, all definitions related to local theory may be found in [5],[6].

Definition 3. *(Multi-regular m-Systems) A t-bonded set $X \subset \mathbb{R}^d$ (Delone Set) is a* multi-regular *t-bonded system (multi-regular system or crystal) if there is a finite set $X_0 = \{x_1, ..., x_m\}$ such that $X = \bigcup_{i=1}^{m} \mathrm{Sym(X)} \cdot x_i$. If $m = 1$ a system is called a regular system.*

Definition 4. *(Cluster Equivalence) Given a set X in $\mathbb{R}^d$, $\rho > 0$, and two points $x \in X$ and $x' \in X$, we say that the ρ-cluster $C_x(\rho)$ is* equivalent *to the ρ-cluster $C_{x'}(\rho)$, if there is a space isometry g of $\mathbb{R}^d$, such that $g(x) = x'$ and $g(C_x(\rho)) = C_{x'}(\rho)$.*

Definition 5. *(Cluster Counting Function) For a t-bonded (Delone) set X of finite type the number of equivalence classes of ρ-clusters in X is a function of ρ which is called the* cluster counting function *and denoted by $N(\rho)$.*

Statement 2. *(see, e.g., [6]) If X is a Delone set with $N(2R) < \infty$, then for all $\rho > 0$ the cluster counting function $N(\rho) < \infty$.*

Below are the criteria for multi-regular t-bonded systems and crystals.

Theorem 1. *(Local Criterion for multi-regular t-bonded and Delone Systems) A t-bonded (Delone) set $X \subset \mathbb{R}^d$ is an multi-regular t-bonded system (Crystal) if and only if there is some $\rho_0 > 0$ such that two conditions hold: 1) $N(\rho_0) = N(\rho_0 + t) = m$; ($N(\rho_0) = N(\rho_0 + 2R) = m$); 2) $S_x(\rho_0) = S_x(\rho_0 + t), \forall x \in X$ ($S_x(\rho_0) = S_x(\rho_0 + 2R), \forall x \in X$.)*

A major problem in the local theory is to find the radius of regularity for Delone sets as a function of d for any $\mathbb{R}^d$.

The next recently proved theorem [7] establishes a lower bound for the radius of regularity.

Theorem 2. *(Lower Bound for Radius of Regularity) Suppose R is a fixed positive number. For any $\varepsilon > 0$, there exists a non-regular d-dimensional $(r; R)$-system such that $N(2dR - \varepsilon) = 1$ and X is not a regular set.*

Atomic structures of many crystals are centrally symmetric. New important results related to this case of centrally symmetric structures have been recently proven by N. Dolbilin and A. Magazinov [8].

As far as centrally symmetric sets are concerned, one of the challenges is to prove for t-bonded sets similar theorems that have been proved for Delone sets.

$10R$ and $6t$ are the best known upper bounds for Delone sets and t-bonded sets correspondingly for the radius that guarantee global regularity from regularity of clusters of radius $10R$ and $6t$ correspondingly.

The challenging tasks in the the local theory are to find the radii of regularity for Delone sets and t-bonded sets in $\mathbb{R}^3$.

Local Theorems for Tiling. One of the models of matter's structure is a tiling of 3-space.

Definition 6. *A face-to-face tiling T is called isohedral if its symmetry group G operates on tiles from T transitively.*

A theory similar for the local theory for Delone sets has also been developed for tiling. Function $N(k)$ (where k is a natural number), that plays a role similar to that of $N(\rho)$, can be introduced for tiling. A condition similar to $S_x(\rho_0) = S_x(\rho_0 + t)$ can be introduced for tiling in terms of function $M(k)$, which is an order of the group of symmetries of some k-dependant "surrounding" of tile P.

Theorem 3. *(Local Criterion for Isohedral Tiling) The tiling T is isohedral if and only if there exists $k_0 \in \mathbb{N}$ such that the following two conditions hold: (1)$N(k_0+1) = 1$; (2)$M(k_0) = M(k_0+1)$.*

Local Theorems for Graphs. Many chemists and crystallographers promote a combinatorial approach to modeling matter's structure as graphs, where vertices represent atoms/moleculars and edges represent chemical bonds. In this respect we would like to mention work of L. Danzer and N.Dolbilin ([9]), as well as recent research of Dr. I. Baburin from the Technological University of Dresden, who has been working on the following problems.

$1B-\Gamma$: Given a finite graph Δ, under which conditions can it be uniquely extended to a vertex-transitive graph Γ with a polynomial growth such that the "neighbourhoods" of all its vertices are isomorphic to Δ.

$2B-\Gamma$: Given a vertex-transitive graph Γ with polynomial growth, how to find its finite subgraph that "determines" the structure of Γ.

Orthogonal Networks, Strucrural Automata, and Local Problems.
Recent research of cristallographers, who use a combinatorial model for crystals are also closely related to local problems or/and the need to prove some local theorems. First of all, we mean research related to modeling crystal growth through cellular automata **CA**, deterministic finite automation **DFA**, and structural automata **SA**. In this discussion we will follow S. Krivovichev's findings ([10]).

For modeling crystal growth and studying complexity of crystals V. Shevchenko, S. Krovovichev, and A. Mackay, [11] suggested using **SA**. In this model all states correspond to vertices in a graph (orthogonal net) with a certain configuration of adjacent edges. Symbols of $\mathbf{v} \in \mathbf{\Sigma}$ (or letters in the language) are vectors (directed edges) of standard orthonormal basis and of their opposite vectors $\underline{\mathbf{v}}$. A transition occurs from state q_i to g_j by moving (adding a vector from Σ) from one vertex to an adjacent vertex. Any state from Q may be initial, and any state from Q is an accepting state. The simplest example of this construction is a primitive cubic net **pcu**.

Pcu can be represented as $\mathbb{Z}^3$, where all nods are connected by unit vectors, i.e., for every nod there are six orthogonal edges connecting this nod with adjacent ones. Combining orthogonal nets (subgraphs of **pcu**) with **SA** is a very productive technique to study graphs of crystals, however, in crystallographic literature it is used mostly to study particular chemical elements.

For instance S. Krivovichev [10] discussed an example of the tetrahedral layer in the structure of RUB-15 and its orthogonal representation. The orthogonal network contains three different vertex configurations, graph of RUB-15 can be embedded into **pcu**, and the image can be generated by structural automata with three states. In this particular example it is sufficient to start with one vertex and applying transition rules generate the entire orthogonal net that represents RUB-15. From this example several local problems arise. (1) How to determine the size of a orthogonal subnetwork and **SA′s** states for a given network that allow to generate the entire network.(2) Not any periodic graph can be embedded to **pcu**. A major problem is to find sufficient conditions for the graph's embedding. From the practical point of view these conditions should be local conditions, and the proof should be constructive.

Local Problems and Fuctionnals on Triagnulations. N. Dolbilin, H. Edelsbrunner, A. Glazyrin, and O. Musin came across local problems in the paper " Fuctionals on Triangulations of Delaunay Sets" (2014) .

Meyer Sets and Quasicrystals. A Delone set $X \subset \mathbb{R}^n$ is called a Meyer set if $X - X$ is a Delone set. Meyer sets play an important role in the theory of quasicrystals. The challenge is to find the local conditions equivalent to the definition of the Meyer set.

Acknowledgements. We would like to express our deepest gratitude for Dr. N. Dolbilin who has read this abstract and made several valuable suggestions, and for his immense contribution into the area under discussion. We also appreciate Dr. I. Baburin's remarks and Dr. S. Krivovichev's work that inspired some of the themes in the discussion above.

Below is shorten list of references.

REFERENCES

1. B.N. Delone, N.P. Dolbilin, M.I. Stogrin, R.V. Galiuilin, A local criterion for regularity of a system of points, *Soviet Math. Dokl.*, 1976, 17, 319-322.

2. N.P. Dolbilin, On Local Properties for Discrete Regular Systems, *Soviet Math. Dokl.* 1976, v.230, N.3, 516-519.

3. M. Bouniaev, N. Dolbilin, Regular and Multi-regular t-bonded Systems, *Journal of Information Processing*, Japan, 2017; Vol.21, No.6, 735-740.

4. N. Dolbilin, M. Bouniaev, Regular t-bonded systems in $\mathbb{Z}^3$, *European Journal of Combinatorics*, 2018, 1-13.

5. M. Bouniaev, N. Dolbilin, The local theory for regular systems in the context of t-bonded sets, *Symmetry*, Switzerland, 2018, 159, 10:5, 1-17.

6. N. Dolbilin, Identity and Global Symmetry, In Discrete Geometry and Symmetry, *Springer Proceedings in Mathematics and Statistics*, Springer Int.Pub. 2018.

7. I. Baburin, M. Bouniaev, N. Dolbilin, N. Erochovets, A. Garber, S. Krivovichev, and E. Schulte, On the Origin of Crystallinity: a Lower Bound for the Regularity Radius of Delone Sets, *Acta Crystallographica*, 2018, A74, 616-629.

8. N.P. Dolbilin, A.N. Magazinov, The Uniqueness Theorem for Locally Antipodal Delone Sets, *Modern Problems of Mathematics, Mechanics and Mathematical Physics, II, Steklov Institute Proc.*2016, 294, MAIK, M., 215-221.

9. L. Danzer, N. Dolbilin, Delone graphs; some species and local rules, 1997, *The mathematics of long-range aperiodic order (Waterloo, ON, 1995), NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C Math. Phys. Sci.* 85-114.

10. S. Krivovichev, On the algorithmic complexity of crystals, *Mineralogical Magazine*, 2014, Vol 78(2), 415-435.

11. V.Ya Shevchenko, S.V. Krivovichev, and A. Mackay, 2010, Cellular automata and local order in the structural chmistry of the lovozerite group minerals, *Glass Physics and Chemistry*, 36, 1-9.

———————————————————————————————

УДК 511+512

Базис Шафаревича формальных модулей групп Любина–Тейта и Хонды

С. В. Востоков (Россия, Санкт-Петербург)
Санкт-Петербургский государственный университет
e-mail: sergei.vostokov@gmail.com
Р. П. Востокова (Россия, Санкт-Петербург)
Санкт-Петербургский государственный университет
e-mail: rvostokova@yandex.ru

Shafarevich Basis of the formal modules of the Lubin–Tate and Honda groups

S. V. Vostokov (Russia, Saint-Petersburg)
St. Petersburg state University
e-mail: sergei.vostokov@gmail.com
R. P. Vostokova (Russia, Saint-Petersburg)
St. Petersburg state University
e-mail: rvostokova@yandex.ru

В докладе излагается теория базиса Шафаревича, которая была создана в 1950 году для получения результатов в направлении Явного закона взаимности в локальных полях.

Для нужд арифметической геометрии и изучения как явного спаривания обобщённого символа Гильберта, настала необходимость такого же типа формальных модулях, построенных на максимальных идеалах колец целых локальных полей. Это нужно также для исследования эллиптических кривых.

Самыми важными типами формальных групп являются группы Любина-Тейта и группы Хонды. Именно для такого типа групп мы и получаем аналог базиса Шафаревича на формальных модулях.

———————————————————————————————

УДК 511.9

$L-$функций, кратные дзета значения, и приложения

Н. М. Глазунов (Украина, г. Киев)
Национальный Авиационный Университет
e-mail: glanm@yahoo.com

$L-$functions, multiple zeta values and applications

N. M. Glazunov (Ukraine, Kiev)
National Aviation University
e-mail: glanm@yahoo.com

Основной текст тезисов.

Сообщение посвящено памяти профессора Мишеля Деза. Исследуются формальные аспекты и $p-$адические аспекты коммутативных групп и $L-$функций. В работах И. М. Виноградова и авторов [1, 2, 3] (а также в литературе к этим работам) сформулированы и доказаны теорема о среднем и ее обобщения, и даны приложения к теории дзета-функции Римана, к проблеме Гольдбаха, и другим. Круговой метод Харди-Литтлвуда и теорема о среднем применяются также к выводу оценок числа решений рациональных форм [4, 5] . Здесь возникает задача нахождения плотностей $p-$адических решений.

В рамках метода Харди-Литтлвуда, метода Виноградова, их обобщений, а также и независимо, развиваются и находят приложения $p-$адические аспекты методов. В сообщении мы кратко представляем элементы одного из таких аспектов, связанного с коммутативными формальными группами и формальными $L-$функциями.

В работе [8] Т. Хонда сопоставил одномерным формальным группам над кольцом целых рациональных числе формальные $L-$функций. Пусть F есть коммутативный формальный групповой закон от n переменных над коммутативным кольцом R с единицей. В случае $n = 1$, согласно результату Лазара, имеется только один $1-$росток вида $x + y + \alpha xy$. Автором [9] перечислены все $1-$ростки двумерных коммутативных формальных групповых законов над коммутативным кольцом R с единицей. В сообщении будут приведены соответствующие формальные $L-$функции и даны их приложения.

При наличии времени будет представлена мотивная интерпретация результатов, аналог гипотезы Сато-Тейта для сумм Клостермана и её приложения, и элементы в этом контексте программы Ленглендса.

Автор признателен В. Н. Чубарикову за внимание и полезные обсуждения.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Виноградов И. М. Особые варианты метода тригонометрических сумм. — М.: Наука, 1976, 119 с.

2. Архипов Г. И., Карацуба А. А., Чубариков В. Н. Теория кратных тригонометрических сумм. — М.: Наука, 1987, 368 с.

3. Постников А. Г. Избранные труды. — М.: Физматлит, 2006, 512 с.

4. Heath-Brown D. R. A New Form of the Circle Method, and its Application to Quadratic Forms // Journal für die reine und angewandte Mathematik. 1996. Vol. 481. P.149-206

5. Deshouillers J. M. Study of rational cubic forms via the circle method // Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux. 1990. Vol. 2, № 2. P. 431-450.

6. Hironaka, Y. Local Zeta functions on Hermitian forms and its application to local densities // Number Theory. 1998. Vol. 71. P. 40–64.

7. Sankaran S. Improper intersections of Kudla-Rapoport divisors and Eisenstein series // J. Inst. Math. Jussieu. 2017. Vol. 16, № 5. P. 899 – 945.

8. Honda T. Formal groups and zeta-functions // Osaka Journal of Mathematics. 1968. Vol. 5, № 2. P.199-213.

9. Глазунов Н. М. Экстремальные формы и жесткость в арифметической геометрии и динамике // Чебышевский сборник. 2015. Том 16, № 3. С. 124-146.

10. Глазунов Н. М., Научная статья в сети Интернет [Электронный ресурс], Режим доступа: http://arxiv.org/abs/1901.01957.

УДК 517.5

Весовые неравенства для потенциала Данкля–Рисса[1]

Д. В. Горбачев (Россия, Тула)
Тульский государственный университет
e-mail: dvgmail@mail.ru
В. И. Иванов (Россия, Тула)
Тульский государственный университет
e-mail: ivaleryi@mail.ru

Weight inequalities for the potential of Dunkl–Rissa

D. V. Gorbachev (Russia, Tula)
Tula state University
e-mail: dvgmail@mail.ru
V. I. Ivanov (Russia, Tula)
Tula state University
e-mail: ivaleryi@mail.ru

Пусть $\mathbb{R}^d$ — действительное d-мерное евклидово пространство со скалярным произведением (x,y) и нормой $|x| = \sqrt{(x,x)}$, $d\mu(x) = (2\pi)^{-d/2}\,dx$ — нормированная мера Лебега на $\mathbb{R}^d$, $L^p(\mathbb{R}^d)$, $1 \le p < \infty$, — пространства Лебега с нормой $\|f\|_p = \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f|^p\,d\mu\right)^{1/p} < \infty$, $C_b(\mathbb{R}^d)$ — пространство непрерывных ограниченных функций, $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ — пространство Шварца, $\mathcal{F}(f)(y) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)e^{-i(x,y)}\,d\mu(x)$ — преобразование Фурье и Δ — оператор Лапласа.

Потенциал Рисса или дробный интеграл I_α определяется как интегральный оператор

$$I_\alpha f(x) = (\gamma_\alpha)^{-1}\int_{\mathbb{R}^d} f(y)|x-y|^{\alpha-d}\,d\mu(y) = (\gamma_\alpha)^{-1}\int_{\mathbb{R}^d} \tau^{-y}f(x)|y|^{\alpha-d}\,d\mu(y),$$

где $0<\alpha<d$, $\gamma_\alpha = 2^{\alpha-d/2}\Gamma(\alpha/2)/\Gamma((d-\alpha)/2)$, и $\tau^y f(x) = f(x+y)$ — оператор сдвига.

Этот оператор впервые исследовал О. Фростман [1]. Многие важные его свойства были доказаны М. Риссом [2]. Формулы для преобразований Фурье $\mathcal{F}(I_\alpha f) = |\cdot|^{-\alpha}\mathcal{F}(f)$, $\mathcal{F}((-\Delta)^{\alpha/2}f) = |\cdot|^{\alpha}\mathcal{F}(f)$, указывают, что потенциал Рисса является обратным оператором для дробной степени оператора Лапласа.

Весовая (L^p, L^q)-ограниченность потенциала Рисса записывается в виде неравенства Стейна–Вейса

$$\big\||x|^{-\gamma}I_\alpha f(x)\big\|_q \le \mathbf{c}(\alpha,\beta,\gamma,p,q,d)\big\||x|^{\beta}f(x)\big\|_p \qquad (1)$$

с константой $\mathbf{c}(\alpha,\beta,\gamma,p,q,d)$ и $1<p\leqslant q<\infty$.

[1]Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 18-11-00199).

Условия конечности константы $\mathbf{c}(\alpha,\beta,\gamma,p,q,d)$ хорошо известны.

Теорема 1. *Пусть* $d\in\mathbb{N}$, $1<p\leqslant q<\infty$, $\gamma<\frac{d}{q}$, $\beta<\frac{d}{p'}$, $0<\alpha<d$, *и* $\alpha-\gamma-\beta=d(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})$. *Константа* $\mathbf{c}(\alpha,\beta,\gamma,p,q,d)$ *в неравенстве* (1) *конечна, если* $p=q$ *или* $p<q$ *и* $\alpha\geqslant d(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})$.

Теорема 1 была доказана Г.Х. Харди и Дж.И. Литлвудом для $d=1$, С. Соболевым для $d>1$ и $\gamma=\beta=0$, Е.М. Стейном и Г. Вейсом в общем случае.

Неравенство Стейна–Вейса (1) в эквивалентной форме может быть записано в виде неравенства Харди–Реллиха–Соболева

$$\big\||x|^{-\gamma}f(x)\big\|_q\leqslant\mathbf{c}(\alpha,\beta,\gamma,p,q,d)\big\||x|^{\beta}(-\Delta)^{\alpha/2}f(x)\big\|_p.$$

Одним из важных обобщений преобразования Фурье $\mathcal{F}$ является преобразование Данкля $\mathcal{F}_k$ (см. [3, 4]). Аналог потенциала Рисса для преобразования Данкля, исследуемый в статье, и называемый нами D-потенциалом Рисса, определили С. Тангавелу и Ю. Шу [5].

Пусть $R\subset\mathbb{R}^d\setminus\{0\}$ — система корней, R_+ — положительная подсистема R, $G(R)\subset O(d)$ — группа отражений, образованная отражениями $\{\sigma_a\colon a\in R\}$, где σ_a — отражение относительно гиперплоскости $(a,x)=0$, $k\colon R\to\mathbb{R}_+$ — функция кратности, инвариантная относительно группы G, $v_k(x)=\prod_{a\in R_+}|(a,x)|^{2k(a)}$, $\quad d\mu_k(x)=c_kv_k(x)dx$ — вес и мера Данкля, где $c_k^{-1}=\int_{\mathbb{R}^d}e^{-|x|^2/2}v_k(x)\,dx$ — интеграл Макдональда–Мета–Сельберга, $L^p(\mathbb{R}^d,d\mu_k)$, $1\le p<\infty$, — пространства Лебега с нормой $\|f\|_{p,d\mu_k}=\Big(\int_{\mathbb{R}^d}|f|^p\,d\mu_k\Big)^{1/p}<\infty$,

$$T_jf(x)=D_jf(x)+\sum_{a\in R_+}k(a)(a,e_j)\,\frac{f(x)-f(\sigma_ax)}{(a,x)},\quad j=1,\dots,d,$$

—дифференциально-разностные операторы Данкля и $\Delta_k=\sum_{j=1}^dT_j^2$ — лапласиан Данкля.

Ядро Данкля $E_k(x,y)$ является единственным решением системы

$$T_jf(x)=y_jf(x),\quad j=1,\dots,d,\qquad f(0)=1.$$

Функция $e_k(x,y)=E_k(x,iy)$ играет роль обобщенной экспоненты. Ее свойства подобны свойствам классической экспоненты $e^{i(x,y)}$. Многие из них вытекают из представления Реслер $e_k(x,y)=\int_{\mathbb{R}^d}e^{i(\xi,y)}\,d\mu_x^k(\xi)$, где μ_x^k — вероятностная мера Бореля с носителем в выпуклой оболочке G-орбиты x в $\mathbb{R}^d$. В частности, $|e_k(x,y)|\le1$ и $\operatorname{supp}\mu_x^k\subset B_{|x|}$, где B_r — евклидов шар радиуса r с центром в нуле.

Для $f\in L^1(\mathbb{R}^d,d\mu_k)$ преобразование Данкля определяется равенством

$$\mathcal{F}_k(f)(y)=\int_{\mathbb{R}^d}f(x)\overline{e_k(x,y)}\,d\mu_k(x).$$

Если $k\equiv0$, то $\mathcal{F}_0$ совпадает с преобразованием Фурье $\mathcal{F}$. Преобразование Данкля является изометрией в $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ и $L^2(\mathbb{R}^d,d\mu_k)$. Равенство Планшереля имеет вид $\|f\|_{2,d\mu_k}=\|\mathcal{F}_k(f)\|_{2,d\mu_k}$.

М. Реслер определила оператор обобщенного сдвига τ^y, $y\in\mathbb{R}^d$, на пространстве $L^2(\mathbb{R}^d,d\mu_k)$ равенством $\mathcal{F}_k(\tau^yf)(z)=e_k(y,z)\mathcal{F}_k(f)(z)$ или

$$\tau^yf(x)=\int_{\mathbb{R}^d}e_k(y,z)e_k(x,z)\mathcal{F}_k(f)(z)\,d\mu_k(z).\tag{2}$$

Он действует из $L^2(\mathbb{R}^d,d\mu_k)$ в $L^2(\mathbb{R}^d,d\mu_k)$ и $\|\tau^y\|_{2\to2}=1$.

Если $k\equiv0$, то $\tau^yf(x)=f(x+y)$. Если $f\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, то $\tau^yf(x)\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)\times\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ и равенство (2) справедливо поточечно. К. Тримеш распространил τ^y на $C^\infty(\mathbb{R}^d)$. Например, $\tau^y1=1$. В общем случае, τ^y не является положительным оператором и вопрос о его L_p-ограниченности остается открытым.

С. Тангавелу и Ю. Шу [5] определили D-потенциал Рисса на $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ как интегральный оператор

$$I_\alpha^k f(x) = (\gamma_\alpha^k)^{-1} \int_{\mathbb{R}^d} \tau^{-y} f(x)|y|^{\alpha-d_k}\, d\mu_k(y), \tag{3}$$

где $0<\alpha<d_k$, $\gamma_\alpha^k = 2^{\alpha-d_k/2}\Gamma(\alpha/2)/\Gamma((d_k-\alpha)/2)$, $d_k = 2\lambda_k+2$ и $\lambda_k = d/2-1+\sum_{a\in R_+}k(a)$. Как и для потенциала Рисса для него справедливо равенство $\mathcal{F}_k(I_\alpha^k f) = |\cdot|^{-\alpha}\mathcal{F}_k(f)$.

Потенциал Рисса — положительный оператор. Из определения (3) положительность D-потенциала Рисса не вытекает. Нам удалось показать, что D-потенциал Рисса также является положительным оператором, записав его с помощью положительного оператора обобщенного сдвига.

Пусть $\mathbb{R}_+ = [0,\infty)$, $\mathbb{S}^{d-1} = \{x\in\mathbb{R}^d\colon |x|=1\}$ — евклидова сфера, $x = rx'$, $r=|x|\in\mathbb{R}_+$, $x'\in\mathbb{S}^{d-1}$, $\lambda\ge -1/2$, $b_\lambda^{-1} = 2^\lambda\Gamma(\lambda+1)$, $d\nu_\lambda(r) = b_\lambda r^{2\lambda+1}\,dr$ — мера на $\mathbb{R}_+$, $d\sigma_k(x') = a_k v_k(x')\,dx'$ — вероятностная мера на $\mathbb{S}^{d-1}$. Отметим, что $d\mu_k(x) = d\nu_{\lambda_k}(r)\,d\sigma_k(x')$.

В [6] на пространстве Шварца нами определен положительный оператор обобщенного сдвига равенством

$$T^t f(x) = \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \tau^{ty'} f(x)\,d\sigma_k(y') = \int_{\mathbb{R}^d} j_{\lambda_k}(t|z|)e_k(x,z)\mathcal{F}_k(f)(z)\,d\mu_k(z).$$

Его положительность вытекает из представления Реслер

$$T^t f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(z)\,d\sigma_{x,t}^k(z),$$

где $\sigma_{x,t}^k$ — вероятностная мера Бореля с носителем

$$\operatorname{supp}\sigma_{x,t}^k \subset \bigcup_{g\in G}\{z\in\mathbb{R}^d\colon |z-gx|\le t\}.$$

В частности, $T^t 1 = 1$. Если $f\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, $1\le p\le\infty$, то $\|T^t f\|_{p,d\mu_k} \le \|f\|_{p,d\mu_k}$ и оператор T^t может быть продолжен на пространства $L^p(\mathbb{R}^d, d\mu_k)$ при $1\leqslant p<\infty$ и пространство $C_b(\mathbb{R}^d)$ при $p=\infty$ с сохранением нормы.

D-потенциал Рисса может быть записан следующим образом

$$I_\alpha^k f(x) = (\gamma_\alpha^k)^{-1}\int_0^\infty T^t f(x) t^{\alpha-d_k}\,d\nu_{\lambda_k}(t). \tag{4}$$

Из представления (4) и L_p-ограниченности оператора T^t вытекает положительность (4) на всех функциях из L_p, на которых он определен. Поэтому при исследовании весовой (L_p, L_q)-ограниченности D-потенциала Рисса можно ограничиться неотрицательными функциями.

Неравенство Стейна–Вейса для D-потенциала Рисса примет вид

$$\big\||x|^{-\gamma} I_\alpha^k f(x)\big\|_{q,d\mu_k} \le \mathbf{c}_k(\alpha,\beta,\gamma,p,q,d)\big\||x|^\beta f(x)\big\|_{p,d\mu_k}, \quad f\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^d), \tag{5}$$

с константой $\mathbf{c}_k(\alpha,\beta,\gamma,p,q,d)$ и $1<p\leqslant q<\infty$.

В [7] нами доказан полный аналог теоремы 1.

Теорема 2. *Пусть* $d\in\mathbb{N}$, k *— произвольная функция кратности,* $1<p\leqslant q<\infty$, $\gamma<\frac{d_k}{q}$, $\beta<\frac{d_k}{p'}$, $0<\alpha<d_k$, *и* $\alpha-\gamma-\beta = d_k(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})$. *Константа* $\mathbf{c}_k(\alpha,\beta,\gamma,p,q,d)$ *в неравенстве* (5) *конечна, если* $p=q$ *или* $p<q$ *и* $\alpha\geqslant d_k(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})$.

На конференции "Follow-up Approximation Theory and Function Spaces" в Centre de Recerca Matemàtica (CRM, Barcelona, 2017) М.Л. Гольдман поставил вопрос об условиях (L_p, L_q)-ограниченности D-потенциала Рисса с кусочно-степенными весами. Настоящий доклад посвящена ответу на этот вопрос.

Пусть $B_1 = \{x \in \mathbb{R}^d\colon\ |x| \leqslant 1\}$, $B_1^c = \mathbb{R}^d \setminus B_1$, $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2)$, $\beta = (\beta_1, \beta_2)$,

$$u_{-\gamma}(x) = |x|^{-\gamma_1}\chi_{B_1}(x) + |x|^{-\gamma_2}\chi_{B_1^c}(x), \quad u_\beta(x) = |x|^{\beta_1}\chi_{B_1}(x) + |x|^{\beta_2}\chi_{B_1^c}(x)$$

— кусочно-степенные весовые функции, где $\chi_E(x)$ — характеристическая функция множества $E \subset \mathbb{R}^d$. Рассмотрим неравенство

$$\big\|u_{-\gamma}(x)I_\alpha^k f(x)\big\|_{q,d\mu_k} \le \mathbf{c}_k(\alpha,\beta,\gamma,p,q,d)\big\|u_\beta(x)f(x)\big\|_{p,d\mu_k} \tag{6}$$

с константой $\mathbf{c}_k(\alpha,\beta,\gamma,p,q,d)$ и $1 < p \le q < \infty$.

Мы доказываем следующее утверждение.

Теорема 3. *Пусть* $d \in \mathbb{N}$, k *— произвольная функция кратности,* $1 < p \leqslant q < \infty$, $0 < \alpha < d_k$. *Константа* $\mathbf{c}_k(\alpha,\beta,\gamma,p,q,d)$ *в неравенстве* (6) *конечна при* $p = q$ *или при* $p < q$ *и* $\alpha \geqslant d_k\Big(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\Big)$ *тогда и только тогда, когда*

$$\begin{gathered}\gamma_1 < \frac{d_k}{q}, \quad \beta_1 < \frac{d_k}{p'}, \quad \alpha - \gamma_2 < \frac{d_k}{q'}, \quad \alpha - \beta_2 < \frac{d_k}{p},\\ \gamma_1 + \beta_1 \leqslant \alpha - d_k\Big(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\Big) \leqslant \gamma_2 + \beta_2.\end{gathered} \tag{7}$$

Для доказательства теоремы 3 мы устанавливаем неравенства типа Харди для операторов Харди и Беллмана в лебеговых пространствах с весом Данкля и кусочно-степенными весами, имеющие самостоятельный интерес.

Если в теореме 3 положим $\gamma_1 = \gamma_2$, $\beta_1 = \beta_2$, то получим условия (L_p, L_q)-ограниченности в теореме 2.

В общем случае в теореме 3 при $p < q$ нам не известна необходимость условия $\alpha \geqslant d_k\Big(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\Big)$. Необходимость этого условия нам удалось доказать только при $k \equiv 0$.

Теорема 4. *Пусть* $d \in \mathbb{N}$, $k \equiv 0$, $1 < p \leqslant q < \infty$, $0 < \alpha < d$. *Константа* $\mathbf{c}_0(\alpha,\beta,\gamma,p,q,d)$ *конечна в неравенстве* (6) *тогда и только тогда, когда* $\alpha \geqslant d\Big(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\Big)$ *и выполнены условия* (7), *в которых* $d_k = d$.

Таким образом, теорема 4 обобщает теорему 1 и показывает, что все условия на параметры в ней являются необходимыми. Для радиальных функций условие $\alpha \geqslant d_k\Big(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\Big)$ при $p < q$ можно ослабить.

Теорема 5. *Пусть* $d \in \mathbb{N}$, k *— произвольная функция кратности,* $1 < p < q < \infty$, $0 < \alpha < d_k$. *Константа* $\mathbf{c}_k(\alpha,\beta,\gamma,p,q,d)$ *в неравенстве* (6) *конечна на подпространстве радиальных функций тогда и только тогда, когда выполнены условия* (7) и $\alpha \geqslant \frac{1}{p} - \frac{1}{q}$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Frostman O. Potentiel d'equilibre et capacite des ensembles avec quelques applications a la theorie des fonctions. These. Communic. Semin. Math. de l'Univ. de Lund., 1935. Vol. 3.

2. Riesz M. L'integrale de Riemann-Liouville et le probleme de Cauchy // Acta Math. 1949. Vol. 81, № 1. P. 1–222.

3. Dunkl C. F. Hankel transforms associated to finite reflections groups // Contemp. Math. 1992. Vol. 138. P. 123–138.

4. Rösler M. Dunkl operators. Theory and applications, in Orthogonal Polynomials and Special Functions. Lecture Notes in Math. Springer-Verlag, 2003. Vol. 1817. P. 93–135.

5. Thangavelu S., Xu Y. Riesz transform and Riesz potentials for Dunkl transform // J. Comput. Appl. Math. 2007. Vol. 199. P. 181–195.

6. Gorbachev D. V., Ivanov V. I., Tikhonov S. Yu. Positive L_p-bounded Dunkl-type generalized translation operator and its applications // Constr. Approx. 2018. P. 1–51. doi.org/10.1007/s00365-018-9435-5

7. Gorbachev D. V., Ivanov V. I., Tikhonov S. Yu. Riesz potential and maximal function for Dunkl transform. Preprint CRM, Barcelona, 2018. № 1238. P. 1–28.

———————————————————————————

УДК 511.9

Кое-что о Мишеле Деза

В. П. Гришухин (Россия, Москва)
Центральный экономико-математический институт РАН
e-mail: vgrishukhin@mail.ru

Something about Michel Deza

V. P. Grishukhin (Russia, Moscow)
Central economics and mathematics institute RAS
e-mail: vgrishukhin@mail.ru

М. Деза окончил МГУ, кажется, в 1963 году и поступил работать в ЦЭМИ, где я работаю сейчас. Но я поступил в ЦЭМИ в 1968 году. Еще будучи студентом МГУ Михаил Ефимович Тылкин поменял свою фамилию на Деза. Он очень рано женился, и вскоре у него родилась дочь, которая, по моему, до сих пор живет в Москве.

В 70-х годах Деза развелся, женился на француженке и вскоре эмигрировал во Францию, и стал Мишелем Мари Деза. Там у него родились два сына. Один из них, Антуан Деза, стал математиком. У меня с ним и Мишелем есть совместная статья [8]. В те времена эмигрантам был запрещен въезд в СССР. И только в начале перестройки, в 1989г., Деза впервые смог вернуться в Москву. В этот год он выступил на семинаре А. Кельманса по дискретной математики в институте проблем управления (ИПУ). Деза рассказал о проблеме конуса разрезных метрик (кратко, разрезного конуса).

В своей, еще студенческой работе [1], М. Деза поставил вопрос о нахождении условий, при которых метрика на конечном множестве вложима в единичный куб. Он привел некоторые неравенства, которые необходимы для вложимости. Он назвал их *неравенствами f-угольника*, так как они обобщают неравенства треугольника, которые превращают расстояние в метрику. Неравенства f-угольника являются частным случаем следующих *гиперметрических* неравенств. Пусть $d_{ij} = d_{ji}$ есть расстояние между точками i и j конечного множества $N = \{1, 2, ..., n\}$. Тогда гиперметрческие неравенства имеют вид

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} b_i b_j d_{ij} \leqslant 0,$$

где b_i для всех $i \in N$ суть такие целые числа, что $\sum_{i \in N} b_i = 1$. В случае неравенства f-угольника, целые числа b_i принимают значения 0, 1 и -1 и только f из них отличны от нуля. Согласно их опреледению, гиперметрики на n-элементном множестве, удовлетворяющие все гиперметрические неравенства, заполняют *гиперметрический конус* Hyp_n.

Когда Деза приехал в Москву, было уже известно, что метрики, вложимые в единичный куб, суть разрезные метрики, которые заполняют *разрезный конус* Cut_n. Разрезный конус порождается своими крайними лучами $\delta(S)$ для всех подмножеств $S \subset N$, где $\delta_{ij}(S) = 1$, если $|\{ij\} \cap S| = 1$, и $\delta_{ij}(S) = 0$ в противном случае.

Проблема, о которой рассказал Деза на семинаре, состоит в нахождении фасет разрезного конуса Cut_n, т.е. в нахождении граней коразмерности 1. В те годы в дискретной математике, в частности в целочисленном программировании, модна была тема нахождение фасет многогранника по известным его вершинам (или конуса по его крайним лучам), и двойственная задача, эквивалентная прямой – нахождение вершин по фасетному описанию многогранника (или крайних лучей исходя из фасет конуса).

Деза конкретно интересовался списком фасет 7-ми мерного разрезного конуса Cut_7. Он знал некоторые типы фасет этого конуса. По счастливой случайности, я тоже интересовался этой проблемой. Я написал соответствующую программу и имел некоторый список типов фасет 7-ми мерного разрезного конуса. В дальнейшем я доказал, что этот список полон, см. [3]. В то время это была не простая задача. Счетные машины размещались в больших машинных залах, были низко скоростные и с малой памятью по сравнению с современными компьютерами.

В моем списке оказался тип фасет, не известный Деза. Это очень заинтересовало Деза. С этого момента началась наша совместная работа. Одним из первых результатов было описание группы симметрий разрезного многогранника, см. [4].

Следующей совместной работой было доказательство полиэдральности гиперметрического конуса. К этому времени был уже известен результат П. Ассуада. Он доказал, что всякая гиперметрика представим квадратом евклидовых расстояний между вершинами некоторого *многогранника Делоне*. Многогранник Делоне (в те времена называемый L-многогранником) есть ячейка разбиения Делоне, определяемого некоторой точечной решеткой. Это разбиение двойственно хорошо известному разбиению Вороного той-же решетки. Используя этот факт, доказанный П. Ассуадом, мы вскоре доказали многогранность конуса гиперметрик, см. [5], [6]. Очень странно, что сам Ассуад не доказал полиэдральность. Вероятно, он не заметил, что существует конечное число аффинных типов многогранников Делоне данной размерности. Именно отсюда вытекает конечности числа граней конуса гиперметрик. Все результаты по теории гипрметрик собраны в книге [9].

В дальнейшем совместная работа с Деза была связана с гиперметриками, многогранниками Делоне и Вроного. Например, в [7] изучаются графы, метрика кратчайшего пути которых является гиперметрикой. Для меня особенно важна статья [10] 2004г, посвященная знаменитой гипотезе Г. Ф. Вороного о параллелоэдрах. Всего совместно с М. Деза мной опубликовано 33 работы и среди них одна книга [11].

В последние годы М. Деза опубликовал совместно с Еленой Деза несколько энциклопедий о расстояниях многочисленных родов.

Когда я познакомился с Деза, он вместе с Иво Розенбергом и Лас Вернасом был редактором журнала European Journal of Combinatorics. Это, в частности, говорит о его организаторских способностях. У него была хорошая память и он много просматривал научной литературы. И, если он где-то находил привлекательную идею, то собирал команду и развивал эту идею. Поэтому у него так много совместных работ.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Тылкин М. Е. О геометрии Хэмминга единичных кубов // Доклады АН СССР. 1960. Том. 134 № 5. С. 1037–1040.

2. Тылкин М. Е. О реализуемости расстояний в единичных кубах // Проблемы кибернетики. 1962. Том. 7. С. 31–42.

3. Grishukhin V. P. All facets of the cut cone $\mathbf{C}_n$ for $n = 7$ are known // Europ. J. Combinatorics. 1990. Vol. 11. P. 115–117.

4. Deza M., Grishukhin V., Lauren M. The symmetries of the cut polytope and of some relatives // Applied Geometry and Disgrete Mathematics – The Victor Klee Festschrift. DIMACS Ser. in Discrete Math. and Theoretical Comput. Science. 1991. Vol.4. P. 205–220.

5. Deza M., Grishukhin V., Lauren M. Extreme hypermetrics and L-polytopes // Sets, Graphs and Numbers, Colloquia Mathematica Societatis János Bolyai. 1992. Vol. 60. P. 157–209.

6. Deza M., Grishukhin V., Lauren M. The hypermetric cone is polyhedral // Combinatorica. 1993. Vol. 13. P. 397–411.

7. Deza M., Grishukhin V. Hypermetric graphs // Quart.J.Math.(2). 1993. Vol. 44. P. 399–433.

8. Deza A., Deza M., Grishukhin V. P. Fullerenes and coordinations polyhedra versus half-cubes embedding // Discrete Mathematics. 1998. Vol. 192. P. 41–80.

9. Deza M. M., Lauren M. Geometry of Cuts and Metrics, Berlin: Springer-Verlag, 1997. 587 p. Перевод: Деза М. М., Лоран М. Геометрия разрезов и метрик. М.:Изд-во МЦНМО, 2001. 736 с.

10. Deza M., Grishukhin V., Properties of parallelotopes equivalent to Voronoi's conjecture // Europ. J. Combinatorics. 2004 Vol. 25 P. 517–533.

11. Деза М., Гришухин В. П., Штогрин М. И., Изометрические полиэдральные подграфы в гиперкубах и кубических решетках, М.: МЦНМО, 2008, 192 с.

УДК 51(091)

Г. М. Фихтенгольц и преподавание математического анализа в России в первой половине XX века

С. С. Демидов (Россия, г. Москва)
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
e-mail: serd42@mail.ru
С. С. Петрова (Россия, г. Москва)
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
e-mail: spetr33@mail.ru

G. M. Fikhtengolts and teaching of mathematical analysis in Russia in the first half of the twentieth century

S. S. Demidov (Russia, Moscow)
M. V. Lomonosov Moscow State University
e-mail: serd42@mail.ru
S. S. Petrova (Russia, Moscow)
M. V. Lomonosov Moscow State University
e-mail: spetr33@mail.ru

Для математического анализа вторая половина XIX-го века прошла под знаком реформы его оснований, осуществлённой К. Вейерштрассом.

Период конца XIX-го — начала XX-го столетий отмечен появлением трактатов Э. Пикара (1891—1893), Э. Гурса (1902—1903), Ш.-Ж. де ла Валле-Пуссена (1903—1906) (мы выделяем здесь руководства, оказавшиеся наиболее популярными в тогдашней России), в которых эта реформа нашла своё зримое выражение. Началась перестройка курсов дифференциального и интегрального исчисления в университетах Европы.

В этом вопросе Россия не оказалась в первых рядах. Известно, что лидер петербургских математиков, один из отцов современной теории вероятностей А. А. Марков относился к нововведениям Вейерштрасса более чем прохладно и в своих лекциях по анализу упрямо продолжал излагать теорему Ампера – утверждение о том, что всякая непрерывная функция дифференцируема всюду кроме может быть конечного множества точек области своего определения. В Москве царствовал Н. В. Бугаев, в лекциях которого по исчислению вейерштрассовский дух также не ночевал. И хотя наиболее чуткие к новым веяниям профессора (вроде петербуржца К. А. Поссе, казанского математика А. В. Васильева или одессита С. О. Шатуновского) начали вводить вейерштрассовские идеи в свои курсы по анализу, процесс перестройки продвигался медленно.

Реальный поворот в осуществлении перестройки курса анализа был обозначен переводами на русский язык упомянутых трактатов Гурса и Валле-Пуссена. Курс Гурса начали переводить в Москве. Первый том в переводе А. И. Некрасова под редакцией Б. К. Млодзеевского увидел свет в 1911 г. Петербуржцы начали переводить Валле-Пуссена. Первый том в переводе Я. Д. Тамаркина и Г. М. Фихтенгольца, осуществлённом под редакцией В. А. Стеклова, появился в 1922 г. Правда, последующих томов пришлось ждать долго – до 1933 г. Вмешались трагические события истории – Первая мировая, революция и гражданская война. Большое распространение получил учебник А. Дженокки с дополнениями и разъяснениями Дж. Пеано, который переводился дважды – в 1903 Н. С. Синеоковым и в 1922 упомянутым Поссе.

Таким образом к началу третьего десятилетия XX века профессора, читавшие курс анализа в отечественных университетах, могли рекомендовать своим студентам пособия, проникнутые духом вейерштрассовских реформ.

В первом десятилетии XX века зародилась Московская школа теории функций Д. Ф. Егорова – Н. Н. Лузина, выдвинувшая Москву в число важнейших математических центров Европы. А в 30-е годы на основании этой школы, а также Петербургской-Ленинградской школы началось формирование Советской математической школы, выросшей во второй половине века в одну из ведущих мировых школ.

Разумеется, такой процесс подразумевал наличие хорошо выстроенной системы подготовки кадров, могущих обеспечить её успешное функционирование. Такую систему нужно было ещё создать – старая система, созданная в Российской империи к началу Первой мировой войны, находилась в состоянии разрухи. Нужно было заново выстраивать эффективно работающую школу – среднюю и высшую. Разработка учебных программ, а также учебных пособий для такой школы в 30-е годы стала одной из насущных задач государственного строительства. Над её решением работали ведущие математики страны, в том числе В. И. Смирнов, А. Я. Хинчин, А. Н. Колмогоров, С. Л. Соболев, И. М. Гельфанд.

Математический анализ стал доминантой программы подготовки студентов-математиков. Над курсом анализа напряжённо работали ведущие математики страны. Ядро этой группы составили математики, так или иначе связанные с теорией функций действительного переменного – именно там в ту пору формировалась высокая культура теоретико-функциональных исследований, необходимая для разработчиков курсов математического анализа, реализующих вейерштрассовские стандарты.

Назовем лишь некоторые из наиболее успешных учебников по анализу, созданных в 20е–40е годы. Это и вышедший первым изданием в 1924–1947 годах знаменитый курс высшей математики В. И. Смирнова, центральное место в котором занимал анализ, это и книги Н. Н. Лузина по дифференциальному и интегральному исчислению, это двухтомный курс В. В. Немыцкого, М. И. Слудской и А. Н. Черкасова (первое издание 1940–1941 гг.), это и курс А. Я. Хинчина, первое издание которого увидело свет в 1953 году. Одной из самых ярких в этом ряду стала фигура профессора Ленинградского университета Григория Михайловича Фихтенгольца (1888–1959) – автора ставших классическими руководств по дифференциальному и интегральному исчислению.

Окончив в 1911 г. Императорский Новороссийский университет в Одессе, где его учителем был С. О. Шатуновский, он работал в издательстве «Mathesis», где познакомился с петербургским математиком К. А. Поссе, автором известных руководств по математическому анализу. В 1913–14 гг. в этом издательстве вышли два тома «Элементарного учебника алгебраического анализа и исчисления бесконечно малых» Э. Чезаро, перевод которого под редакцией Поссе осуществил Фихтенгольц. Судя по всему, именно по совету Поссе он в 1913 г. переехал в Санкт-Петербург, где начал преподавательскую деятельность в Императорском электротехническом институте Александра III. В 1913–1917 гг. увидел свет цикл его работ по теории функций действительного переменного – теории интегралов, зависящих от параметра, ставших содержанием его магистерской диссертации, защищённой в 1918 г. В том же году он начал работать в Петроградском (впоследствии Ленинградском) университете, а с начала 20-х гг. также и во 2-м педагогическом институте, позднее вошедшем в состав Педагогического института им. А. И. Герцена.

Основные его труды относятся к теории функций действительного переменного и функциональному анализу. На протяжении многих лет вместе с Л. В. Канторовичем он вёл в университете семинар по функциональному анализу. Среди его учеников – Л. В. Канторович, И. П. Натансон, а также С. Л. Соболев, Д. К. Фаддеев, С. А. Христианович.

Всю свою жизнь Фихтенгольц преподавал математический анализ. О его переводах руководств Чезаро и Валле-Пуссена мы уже говорили. В 1926 г. он выпустил руководство «Математика для техников», в 1931–33 гг. – двухтомник «Математика для инженеров». Многие годы в его голове зрел замысел фундаментального трактата по исчислению. В 1939 году он приступил к его воплощению: в издательстве Ленинградского университета вышла первая часть «Математического анализа». Однако разразившаяся вскоре война нарушила его планы. И лишь после войны он продолжил их реализацию: в 1947–49 гг. свет увидели три тома его фундаментального курса дифференциального и интегрального исчисления.

Изложение в трёхтомнике отличает систематичность и строгость, а также ясность и простота. Оно сопровождается подробным разбором многочисленных примеров и решением специально подобранных задач, помогающим понять излагаемый теоретический материал. По жанру рассматриваемый трёхтомник продолжает скорее традицию французских traités по дифференциальному и интегральному исчислению. Однако, созданный в рамках иной математической культуры и предназначенный прежде всего для нужд тогдашнего советского читателя, он по своему характеру во многом от них отличается.

Одной из целей, которые ставил перед собой автор, было дать по возможности полное изложение основных вопросов исчисления в их взаимосвязях с другими разделами математики, а также с различными приложениями. Так, в приводимых примерах рассматриваются, например, контактные преобразования, метод наименьших квадратов, задачи интерполяции, неравенства Коши, Гёльдера, Минковского, Иенсена, расходящиеся и асимптотические ряды. Для расширения кругозора читателя автор даёт, например, набросок, посвящённый теории обыкновенных дифференциальных уравнений, а также знакомит с проблемами уравнений математической физики, с основами векторного анализа. Коротко и с блеском излагает теорию расходящихся и асимптотических рядов.

Замечательную особенность изложения составляет погружение излагаемого материала в исторический контекст. Это достигалось делаемыми автором по ходу изложения замечаниями. Например, сформулировав в первом томе теорему Ролля, автор замечает: «В действительности Ролль высказал это утверждение лишь для многочленов». Или, сформулировав теорему Ферма, тут же оговаривается: «Это утверждение, разумеется, воспроизводит лишь сущность того приёма, который применял Ферма для разыскания наибольших и наименьших значений функции (Ферма не располагал понятием производной)». Введя понятие якобиана, автор замечает: «Этот определитель называется обычно функциональным определителем Якоби или якобианом системы (1) – по имени немецкого математика Якоби (C. G. J. Jacobi), впервые изучившего его свойства и применения». И добавляет: «В науку якобианы были введены одновременно с Якоби М. В. Остроградским».

Подобный историзм изложения становился в советской школе 30-х – 40-х годов непременной чертой подачи учебного материала. Впрочем, особую роль исторический контекст развития математических идей приобрёл у Фихтенгольца в том варианте, который писался как учебник по курсу анализа для студентов – в двухтомнике "Основы математического анализа".

Это руководство было задумано, как нам сообщает автор в предисловии, «как учебник анализа для первого и второго курса математических отделений университетов; в соответствии с этим и книга делится на два тома. При составлении её был широко использован мой трёхтомный «Курс дифференциального и интегрального исчисления», но содержащийся в нём материал подвергся сокращению и переработке в целях приближения книги к официальной программе по математическому анализу ...». Главную свою задачу он видел «в систематическом и – по возможности – строгом изложении основ математического анализа».

Учебник не предлагал упражнений, выполнение которых должно помочь читателю проверить уровень освоения им пройденного материала (предполагается, что для этой цели в русской учебной литературе имеются специальные сборники задач), но сопровождался многочисленными детально разобранными примерами, позволяющими помочь ему в уяснении теоретического материала и подготовить его «к сознательной работе над упражнениями».

Исторические справки и даже целые исторический разделы, сопровождающие у Фихтенгольца изложение математического анализа, чрезвычайно информативны. Они свидетельствуют о превосходном знании автором современной историко-математической литературы. В то же самое время они отражают общую для всей советской учебной литературы тенденцию рассматривать предлагаемый учащемуся материал в широком историческом контексте.

Учебники по анализу Г. М. Фихтенгольца стали выдающимся событием в истории советской математической школы. Переведённые на многие языки они послужили (и продолжают служить и по сей день – на это указывает продолжение их постоянных переизданий) введением в премудрости анализа для многих поколений учащихся во всём мире.

———————————————————————————

УДК 514.15+514.17+514.8+548.1

О кристалличности $2R$-изометрических множеств Делоне: новые результаты и открытые проблемы

Н. П. Долбилин (Россия, г. Москва)

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН
e-mail: dolbilin@mi-ras.ru

On Crystallinity of $2R$-isometric Delone Sets: New Results and Open Problems

Nikolay Dolbilin (Russia, Moscow)
Steklov Mathematical Institute
e-mail: dolbilin@mi-ras.ru

We call a Delone set $X \subset \mathbf{R}^d$ a $2R$-*isometric* if for all points x of X their $2R$-clusters $C_x(2R)$ ($C_x(2R) := \{y \in X : |xy| \leq 2R\}$) are pairwise congruent, i.e. for any two points x and $x' \in X$ there is an Euclidean isometry g such that $g(x) = x'$ and $g(C_x(2R)) = C_{x'}(2R)$.

For last few years we made significant progress in studies of the $2R$-isometric sets. It was shown that the character of a $2R$-isometric set X significantly depends on the $2R$-cluster group $S_x(2R)$.

First, it was proved that if in X the cluster group $S_x(2R)$ contains the central symmetry about the central point x then the Delone set is a regular system, i.e. a Delone set $X \subset \mathbf{R}^d$ whose symmetry group acts transitively on points of the set. Emphasize that this theorem holds for any dimension d of space and plays an essential role in improving the upper bound for the regularity radius.

Second, for dimension $d = 3$ (the most important case for applications) we investigated a large list of finite groups (mostly richest finite groups) of Euclidean isometries of $\mathbf{R}^3$ which could be potential cluster groups $S_x(2R)$ and showed that for them there are two options:

1) some groups from the list can be realised as a group $S_x(2R)$ in some Delone set $X \subset \mathbf{R}^3$, and in this case we showed that the Delone set is a regular system; moreover the Delone set is determined uniquely by its $2R$-cluster;

2) for other groups from the list it was shown. that there is no Delone $2R$-isometric sets with such groups.

In the talk we will explain why these results are of special interest and discuss some open problems, in particular:

a) a link between the 'local' results in terms of the 'emptiness' radius R and the local conditions in terms of the radius of the coordination sphere which are used in crystallography;

b) a problem on generalisation of Bravais' theorem on that no lattice in $\mathbf{R}^3$ with the 5-fold symmetry.

Cones and polytopes of metrics, hypermetrics, quasimetrics and hemimetrics

Michel Deza (France, Paris)
École Normale Supérieure
Mathieu Dutour Sikirić (Croatia, Zagreb)
Institut Rudjer Bošković
e-mail: mathieu.dutour@gmail.com

I will present the works that I did with Michel on metric cones and related subjects. Given a finite point set $X = \{1, \ldots, n\}$, we can define the cone of metric on this point set X. That is the set of functions $d : X \times X \mapsto \mathbb{R}$ such that

- $d(x,x) = 0$ for all $x \in X$
- $d(x,y) = d(y,x)$ for all $x,y \in X$
- $d(x,y) \le d(x,z) + d(z,y)$ for all $x,y,z \in X$

is a polyhedral cone that we call $\mathrm{MET}(K_n)$. A particular very interesting subset of this cone is the cone of L^1 embeddable metrics, that we call $\mathrm{CUT}(K_n)$. The vertices/facets of those cones are known up to $n = 8$.

The definition of the metric and cut cone can be extended to an arbitrary graph G. The triangle inequalities are replaced by cycle inequalities and non-negative inequalities. In that setting we have $\mathrm{CUT}(G) = \mathrm{MET}(G)$ is and only if G does not have a K_5 minor. This allows to compute the facets of many cut polytope and is a remarkable result.

Another generalization that we consider is to hypermetrics. This generalization is relevant to geometry of numbers and Delaunay polytopes and we computed their dual description up to $n = 8$. We also present the construction of hypermetric polytopes.

One natural generalization of metric is to consider the cone of quasimetrics defined as functions $d : X \times X \mapsto \mathbb{R}$ such that

- $d(x,x) = 0$ for all $x \in X$,
- $d(x,y) \le d(x,z) + d(z,y)$ for all $x,y,z \in X$.

In that setting we define a notion of metric polytope of a graph that we call $\mathrm{QMET}(G)$ and we give an explicit set of inequalities describing it that generalizes the one for $\mathrm{MET}(G)$. We define the notion of oriented metrics that are weightable and an oriented version of the cuts.

Another generalization is to consider the notion of metrics on more than 2 points, i.e. hemimetrics. In that setting the equivalent of the triangle inequality would be the inequality over a simplex. However, it turns out that this definition is not workable since it does not allow to define the hemimetrics on a simplicial complex. We give another set of inequalities that allow a neat generalization to the case of an arbitrary complex.

—————————————————————————

Antipodal covers

Aleksandar Jurišić (Slovenia, Ljubljana)
Laboratory for Cryptography and Computer Security
Faculty of Computer and Information Science
University of Ljubljana, Ljubljana, Slovenia
e-mail: aj@fri.uni-lj.si

Intuitively, a graph is *distance-regular* if a grouping of vertices, corresponding to their distance from a certain vertex, is so nice that it helps us to calculate all the eigenvalues of the graph. Among such graphs we will study those for which 'being at maximum distance or zero' in an equivalence relation. They are called antipodal graphs and they 'cover' smaller distance-regular graphs. For example, all the 1-skeletons of the Platonic solids are distance-regular and antipodal graphs, and in particular the 3-cube covers the tetrahedron. Most finite objects of sufficient regularity are closely related to certain distance-regular graphs, in particular, antipodal distance-regular graphs give rise, to projective planes, Hadamard matrices and other interesting combinatorial objects. Distance-regular graphs serve as an alternative approach to these objects and allow the use of graph eigenvalues, graph representations, association schemes and the theory of orthogonal polynomials.

We show a new construction of an infinite family of antipodal distance-regular graphs of diameter 3 that are related to finite geometries.

This talk is dedicated to Michel Deza, a dear friend, who encouraged me to diversify my research, a man who was ready to go around the world to do mathematics and meet more mathematicians, but also knew when one needs to go home.

———————————————————————————————

УДК 51(091)

Понятие инерциального движения: истоки, генезис, математическое описание

Е. А. Зайцев (Россия, Москва)
Институт истории естествознания и техники им. С. И. Вавилова РАН
e-mail: e_zaitsev@mail.ru

The concept of inertial movement: origins, genesis, mathematical description

E. A. Zaytsev (Russia, Moscow)
S. I. Vavilov Institute for the History of Science and Technology, RAS
e-mail: e_zaitsev@mail.ru

1. Понятие инерции является основополагающим в классической механике: оно, в частности, обусловливает принципиальную возможность математического описания движений в пространстве. Исторически, именно выделение инерциальной составляющей сложного движения позволило Галилею дать точное количественное описание движения брошенного тела (параболическая траектория).

2. Свойства инерциального движения определены первым законом Ньютона: тело, на которое не действуют силы, сохраняет состояние покоя или равномерного прямолинейного движения. Если первая часть этого закона – о сохранении покоя – не вызывает возражений, то вторая – о сохранении прямолинейного движения – напротив, представляется проблематичной. Повседневный опыт свидетельствует, что в отсутствие движущей силы движение неизбежно прекращается; при этом его траектория зачастую искривляется. Неудивительно, что античность и средневековье не знали принципа инерции в его современном варианте.

3. Несмотря на априорную неочевидность, принцип инерции в современной механике не подвергается сомнению. Основным доводом в его пользу является тот факт, что опирающиеся на него вычисления приводят к правильным практическим результатам. Принцип инерции принадлежит, таким образом, к разряду теоретических гипотез, истинность которых устанавливается a posteriori. Если это так, то возникает вопрос: что побудило творцов новой механики XVII в. ввести этот принцип в качестве непреложного «закона природы»? Ведь весомые аргументы в его пользу появились только в сер. XVIII в., когда, исходя из закона инерции (в сочетании со вторым и третьим законами Ньютона и законом всемирного тяготения), удалось точно рассчитать траектории движения небесных тел.

4. Попытки объяснить феномен научной революции XVII в. делятся на три типа. В рамках позитивистского подхода, настаивающего на кумулятивном характере развития науки, был поставлен под сомнение сам факт научного переворота. В частности, было высказано мнение о

том, что в античности и средневековье существовал аналог понятия инерции (П. Дюэм). Таковым, с точки зрения Дюэма, являлось понятие «импетуса», восходящее к византийскому схоласту Иоанну Филопону (VII в.). В средние века идея движения под действием импетуса получила широкое распространение: ею владели арабские механики, парижский схоласт Жан Буридан и его последователи вплоть до XVI века. В конечном итоге логика развития идеи «импетуса» привела, по Дюэму, к формулировке классического понятия инерции в работах Галилея и Ньютона. Несмотря на то, что Дюэму удалось выделить доклассический «аналог» инерции, в целом его концепция была отвергнута. Дальнейшими исследованиями было установлено, что по ряду параметров импетус средневековья существенно отличался от инерции Нового времени. В частности, движение, вызванное импетусом, обычно считали конечным.

5. В рамках интерналистского подхода, развитого А. Койре, напротив, подчеркивалась мысль о революционном характере становления новой науки в XVII в. Койре полагал, что развитие науки определяется генезисом общемировоззренческих представлений и, поэтому, научный переворот XVII в. следует рассматривать как «реплику» радикального переворота во взглядах на мир в целом. Суть этого переворота он усматривал в отказе от аристотелевской идеи замкнутого иерархически упорядоченного космоса и переходе к представлению об однородной бесконечной Вселенной. Согласно Койре, снятие онтологического различия двух миров, «небесного» и «земного», создало условия для формулировки законов механики как универсально значимых «законов природы». В отношении понятия инерции Койре считал, что его точная формулировка принадлежит Декарту и Ньютону, но не Галилею, у которого этот принцип был сформулирован исключительно по отношению к движению по окружности. В целом, понятие инерции явилось следствием геометризации физического пространства в работах Ньютона. Влияния со стороны техники Койре не признавал.

6. Представители третьего, экстерналистского, подхода, как и Койре, исходили из признания революционного развития науки в XVII веке. Однако, в отличие от последнего, они полагали, что ответ на вопрос о его истоках следует искать в области технической практики. В 30-е гг. XX в. этот подход был развит группой историков (Б.М. Гессен, Х. Гроссман, Э. Цильзель и Р. Мертон). Указанным авторам не удалось, однако, привести убедительных аргументов в пользу тезиса о зависимости научного развития от развития техники. В частности, без ответа остался принципиальный вопрос о технических истоках понятия инерции. Гессен, правда, коротко затронул его, указав на возможную связь идеи инерциального движения с задачей о полете снаряда в практической баллистике. Однако, в дальнейшем эта гипотеза не получила подтверждения: реальные баллистические кривые весьма значительно отличаются от параболической траектории брошенного тела, описанной Галилеем.

7. В настоящее время, когда возможности позитивистского и интерналистского подходов практически исчерпаны, имеет смысл снова обратиться к экстерналистским концепциям, учтя при этом причины прошлых неудач. Задача состоит в том, чтобы, выйдя за рамки высказываний общего характера, обнаружить вполне конкретные явления технической сферы, в которых зарождались предпосылки понятий новой науки. В частности, в отношении принципа инерции необходимо выявить конкретные технические движения, которые могли бы навести на мысль о возможности инерциального движения. Отметим два обстоятельства, на которые в свое время не обратили внимания сторонники экстернализма. Первое состоит в том, что почти все творцы науки Нового времени (включая Декарта и Ньютона) признавали принцип круговой инерции, согласно которому вращение продолжается бесконечно в отсутствие внешних сил. Причем на раннем этапе развития классической механики принцип круговой инерции имел даже более фундаментальное значение, нежели принцип прямолинейной инерции (Галилей). Первое обстоятельство заставляет обратить внимание на второе. А именно, что теоретические представления о круговой инерции рождаются в тот самый момент, когда широкое распространение получают движения-вращения технического характера, обладающие ярко выраженной

инерциальностью. Это – прежде всего, движения-вращения рабочих валов, момент инерции которых увеличивался искусственно применением тяжелых маховых колес. Будучи отдельными элементами машины, создаваемыми исключительно с указанной целью, маховые колеса являлись материальными «носителями» идеи (круговой) инерции. Техника доклассического периода не знала движений, сопровождаемых вращением махового колеса. Впервые они были реализованы только в XV-XVII вв.

8. В состав механизмов маховые колеса включаются целенаправленно для достижения определенного эффекта. В ряде технических процессов необходимо демпфировать неравномерность вращения, вызванную неритмичной работой «машины-двигателя». С этой целью в состав механизмов вводятся специальные элементы, выполняющие функцию регуляторов скорости. В их числе – маховые колеса или грузы, обладающие большим моментом инерции. Особенно часто они применялись в машинах, в которых при помощи кривошипно-шатунного механизма осуществлялось преобразование возвратно-поступательного движения «машины-двигателя» во вращательное движение рабочего вала. Кривошипно-шатунный механизм – это изобретение, которое также стали широко использовать только в XV–XVII вв. Необходимость в маховом колесе вызвана тем, что вращение, создаваемое при помощи кривошипно-шатунного механизма, не может быть само по себе равномерным, но происходит с периодическим ускорением и замедлением. Типичный пример: машина, рабочий вал которой приводится во вращение периодическим нажатием ножной педали. Поскольку педаль при этом движется рывками (в силу возвратно-поступательного характера своего перемещения), вращение вала также является неравномерным. Демпфировать эту неравномерность и призвано маховое колесо [1-3].

9. Таким образом, теоретическое понятие инерциального движения родилось не на пустом месте. В его основе лежат технические движения-вращения, выполняемые при содействии тяжелых маховых колес. Именно они способствовали выработке представления об инерциальных движениях, вначале у практических механиков, воплощавших идею круговой инерции в работу реальных машин, а затем у теоретиков, положивших ее в основу классической механики.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Зайцев Е. А. Всеобщее содержание природы в зеркале развития практической механики // Научные ведомости Белгородского государственного университета. Серия «Философия. Социология. Право». 2017. Вып. 41, 12–19.

2. Зайцев Е. А. У истоков теоретической механики: история превращения технического искусства в научную дисциплину // Институт истории естествознания и техники им. С. И. Вавилова РАН. Годичная научная конференция 2015. Т.1. М., 2015, 132–141.

3. Зайцев Е. А. Идеальное движение // Научный результат. Социальные и гуманитарные исследования. 2016. Т. 2, № 2(8), 34–42.

―――――――――――――――――――――――――――

УДК 514.8,531.1,531.8

Шарнирные механизмы и их конфигурационные пространства

М. Д. Ковалёв (Россия, г. Москва)
Московский Государственный Университет им. М.В. Ломоносова, мехмат
e-mail: mdkovalev@mtu-net.ru

Linkages and their configuration spaces

M. D. Kovalev (Russia, Moscow)
Lomonosov Moscow State University
e-mail: mdkovalev@mtu-net.ru

Плоские шарнирные механизмы

Под шарнирным механизмом я понимаю [1, 2] не то, что ныне понимают [3, 4, 5, 6] чистые математики. Поэтому, придётся начать от корней.

Гильберт [7] дал такое определение: "Плоским шарнирным механизмом называется всякая плоская система жестких стержней, частично соединенных между собой или скрепленных с неподвижными точками плоскости шарнирами, вокруг которых они могут вращаться, так что вся система еще сохраняет подвижность в ее плоскости". Инженеры чётко отделяют конструкции, не допускающие непрерывного движения и называемые ими фермами, от механизмов. Я придерживаюсь того же понимания. Итак, мы считаем наши механизмы составленными из стержней, несущих на своих концах шарниры. Структуру такого механизма задаём графом $G(V,E)$ без петель и кратных рёбер, вершины которого отвечают шарнирам, а рёбра — рычагам (стержням). Граф $G(V,E)$ обладает вершинами двух видов: крестиками мы обозначаем вершины, отвечающие шарнирам, неподвижным в механизме (закреплённым), кружочками — подвижным в механизме (свободным) шарнирам.

На граф $G(V,E)$ шарнирного механизма я, в отличии от авторов работ [3, 4, 5, 6], накладываю ряд естественных условий. А именно: а) $G(V,E)$ связен, б) вершины крестики смежны лишь вершинам кружочкам, в) подграф графа $G(V,E)$ на вершинах кружочках связен, г) условие, вытекающее из подвижности в механизме всех свободных шарниров. Из него следует, например, что каждый кружочек смежен не более чем одному крестику. Граф $G(V,E)$, для которого выполнены все эти условия, я называю *шарнирной структурной схемой* (ШСС) механизма. Условия а), в) выделяют индивидуальный механизм, без них мы получаем несколько механизмов, движущихся независимо один от другого. Условие б) вводится из-за того, что нет нужды задавать расстояния между закреплёнными шарнирами. Условие г) введено, чтобы исключить неподвижные шарниры из числа свободных.

Закреплённой шарнирной схемой (ЗШС) называем ШСС, для которой заданы положения закреплённых шарниров в плоскости. Положения закреплённых шарниров мы считаем попарно несовпадающими. Пусть ЗШС имеет $n \geq 1$ закреплённых и $m \geq 1$ свободных шарниров, и $r \geq 1$ рычагов. Тогда ЗШС отвечают евклидовы пространства параметров: R^{2m} — пространство положений свободных шарниров, и $\mathcal{R}^r$ — пространство квадратов длин рычагов. Пусть p_i — радиус вектор i-го шарнира в плоскости, d_{ij} —- квадрат длины рычага, соединяющего смежные в графе $G(V,E)$ i-й и j-й шарниры. Ключевым для геометрии шарнирных конструкций является так называемое *рычажное отображение*: $F : R^{2m} \to \mathcal{R}^r$, задающееся формулами $d_{ij} = (p_i - p_j)^2,\ \{ij\} \in E$. Это отображение сопоставляет положениям свободных шарниров квадраты длин рычагов, и называется *рычажным* (в англоязычной литературе — "rigidity mapping" или „edge function“[8, 5]). Точку $\mathbf{d} = \{d_{ij}\} \in \mathcal{R}^r$ я называю, придавая вполне определённый смысл термину и понятию кинематической схемы из теории механизмов, *кинематической шарнирной схемой* (КШС), а точку $\mathbf{p} = \{p_i\} \in R^{2m}$ —- *шарнирником.* С инженерной точки зрения шарнирник есть либо определённое положение шарнирного механизма, либо шарнирная ферма. Неодноточечная компонента $K \subset R^{2m}$ связности полного прообраза $F^{-1}(\mathbf{d})$ КШС $\mathbf{d}$ представляет собой множество всех положений или *конфигурационное пространство шарнирного механизма.* Таким образом, я отождествляю *шарнирный механизм* с его связным конфигурационным пространством.

Полный прообраз $F^{-1}(\mathbf{d})$ точки при рычажном отображении я называю *конфигурационным пространством КШС* $\mathbf{d}$. При таком подходе каждой компоненте связности полного прообраза $F^{-1}(\mathbf{d})$ отвечает определённое шарнирное устройство. Если компонента связности одноточечна, — то это устройство представляет собой *шарнирную ферму.*

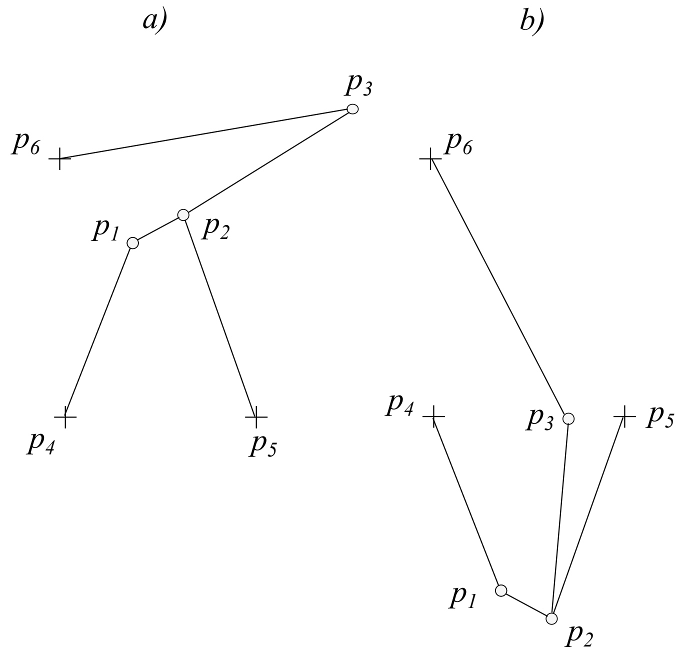


Рис. 4: Два шарнирных устройства, отвечающие одной кинематической схеме.

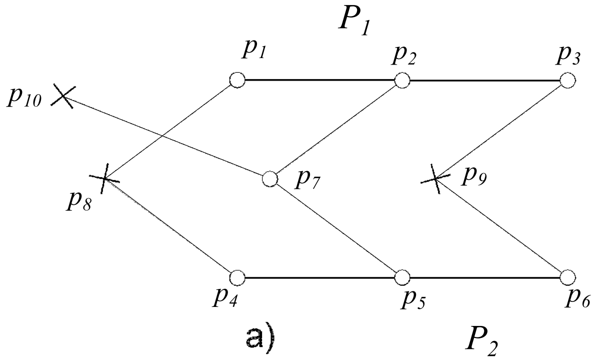
Авторы же работ [3, 4] и вслед за ними другие математики называют конфигурационным пространством шарнирного механизма то, что я называю конфигурационным пространством его КШС, то есть множество $F^{-1}(\mathbf{d})$. С точки зрения математики это естественнее и удобнее, поскольку это множество в отличии от его связной компоненты всегда является алгебраическим множеством. Но такая терминология и такое пренебрежение смыслом слов на мой взгляд запутывают кинематическое существо дела. Приведём пример. На рисунке 4 изображены два шарнирных механизма a) и b) с одной и той же кинематической схемой. Механизмы состоят из четырёхзвенника $p_4p_1p_2p_5$, к которому присоединена двухповодковая группа $p_6p_3p_2$. Если рычаг p_1p_2 достаточно короток, то четырёхзвенники, отличающиеся отражением относительно прямой p_4p_5, нельзя непрерывно перевести один в другой. В терминологии машиноведов речь идёт о двух сборках шарнирного механизма. Однако, уменьшая длины рычагов p_2p_3 и p_3p_6 можно добиться, чтобы сборка b) стала фермой. Это наступит, когда рычаги p_2p_3 и p_3p_6 окажутся на одной прямой, и круг с центром p_6 радиуса равного сумме длин этих рычагов будет иметь лишь одну общую точку с траекторией шарнира p_2 четырёхзвенника, чего можно достичь выбором положения закреплённого шарнира p_6. Сборка же a) при этом останется механизмом.

Разумно ли механизм и ферму называть разными сборками одного шарнирного механизма, как это делают машиноведы? Или называть эту парочку конструкций, непрерывно не переводимых одна в другую, шарнирным механизмом, как это делают абстрактные математики? При нашем подходе здесь речь идёт о двух шарнирных устройствах — механизме и ферме с одной и той же кинематической схемой. Такое понимание шарнирного механизма, кстати, снимает несправедливые обвинения [3] А. Кемпе в существенных пробелах его доказательства теоремы о возможности рисования по частям любой плоской алгебраической кривой с помощью шарнирных механизмов.

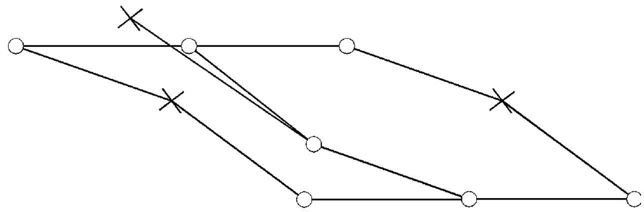
Конфигурационные пространства

Мною построен ряд примеров шарнирных механизмов с необычными свойствами.

Рассмотрим класс $\mathcal{K}_1$ плоских шарнирных механизмов, у которых множество положений каждого из свободных шарниров одномерно. Хотя каждый подвижный шарнир таких механизмов движется с одной степенью свободы, размерность конфигурационного пространства может превосходить единицу. Что показывает пример шарнирного механизма с перемен-



а)



б)

Рис. 5: Механизм с переменным числом степеней свободы. В положении а) — две степени свободы, в положении б) — одна.

ным числом степеней свободы [1]. Этот механизм (Рис.5) содержит 13 рычагов, 7 свободных $p_1, \ldots, p_7$ и 3 закрепленных p_8, p_9, p_{10} шарнира. Он построен из двух одинаковых шарнирных параллелограммов P_1: p_8, p_1, p_3, p_9 и P_2: p_8, p_4, p_6, p_9. Шарниры p_2 и p_5 лежат посередине рычагов p_1p_3 и p_4p_6 соответственно. Этого можно достичь, закрепив их рычагами p_1p_2, p_2p_3 и p_4p_5, p_5p_6. Длины дополнительных рычагов p_2p_7 и p_5p_7 равны длинам боковых рычагов p_1p_8 и p_4p_8 параллелограммов. Длина рычага $p_{10}p_7$ подобрана так, что шарнир p_7 может оказаться посередине отрезка p_8p_9, как и показано на Рис. 5 а). Когда шарнир p_7 находится в указанном положении, параллелограммы P_1 и P_2 можно двигать независимо один от другого с одной степенью свободы каждый, и поэтому число степеней свободы всего механизма в этих положениях равно 2. Если же механизм привести в положение, когда рычаг p_2p_7 ляжет на рычаг $p_{10}p_7$, а рычаг p_7p_5 — на продолжение рычага $p_{10}p_7$, то шарнир p_7 можно будет сдвинуть со своего места. В положениях, когда шарнир p_7 не лежит посередине отрезка p_8p_9 (Рис.5 б)), число степеней свободы механизма равно 1.

В механизме из класса $\mathcal{K}_1$ назовём шарнир p_i *замерающим*, если возможно непрерывное движение механизма, когда шарнир p_i покоится. Переменность числа степеней свободы в нашем примере связана с наличием замерающего шарнира p_7. При движении механизма в разные моменты замерать могут различные совокупности его шарниров.

Теорема 1. *Конфигурационное пространство механизма класса $\mathcal{K}_1$ одномерно в том и только том случае, когда у механизма либо нет замерающих шарниров, либо ни одна из совокупностей замерших шарниров не разбивает множества свободных шарниров на несколько компонент связности.*

Конфигурационное пространство K шарнирного механизма, являясь компонентой связности алгебраического множества, само может не быть алгебраическим множеством. Однако, будем называть K *приводимым* либо *неприводимым*, в зависимости от того приводимо или нет наименьшее алгебраическое множество, содержащее K.

Теорема 2. *Если в механизме класса $\mathcal{K}_1$ имеется замерающий шарнир, то его конфигурационное пространство K приводимо.*

Также будет рассказано о связи неприводимости конфигурационного пространства шарнирного механизма и свойствах его проекций. Будет приведён ряд новых необычных примеров шарнирных механизмов, один из которых — пример механизма класса $\mathcal{K}_1$, имеющего в любом своём положении более одной степени свободы. Будет поставлен ряд вопросов, один из них следующий:

Есть ли в классе $\mathcal{K}_1$ механизмы с постоянным и большим единицы числом степеней свободы?

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ковалёв М.Д. Геометрическая теория шарнирных устройств // Известия РАН Серия математическая, 1994, Т.58, № 1, С.45–70.

2. Ковалёв М.Д. Вопросы геометрии шарнирных устройств и схем // Вестник МГТУ, Серия Машиностроение, 2001, №4, С. 33–51.

3. Kapovich M., Millson J.J. Universality theorems for configurations of planar linkages // Topology. 2002. V.41, № 6, C. 1051 – 1107.

4. King Henry C. Planar Linkages and Algebraic Sets. arXiv.org:math/9807023 Preprint July 4, 1998, 22 P.

5. Demaine, Erik; O'Rourke, Joseph Geometric Folding Algorithms: Linkages, Origami, Polyhedra. — Cambridge University Press, 2007.

6. Ошемков А.А., Попеленский Ф.Ю., Тужилин А.А., Фоменко А.Т., Шафаревич А.И. Курс наглядной геометрии и топологии. — М.: ЛЕНАНД, 2015, 351 С.

7. Гильберт Д., Кон-Фоссен С. Наглядная геометрия. — М.: Наука, 1981, 344 С.

8. Asimov L., Roth B. The rigidity of Graphs. II// Journal of Math. analysis and appl, 1979, V.68, № 1, C. 171–190.

УДК 511.32

О разрешимости в простых числах некоторых сравнений с обратными величинами[1]

М. А. Королев (Россия, Москва)
Математический институт им. В.А. Стеклова Российской Академии наук
Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова
e-mail: korolevma@mi-ras.ru

[1]Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 19-11-00001)

On a solvability of some congruences with reciprocals in prime numbers

M. A. Korolev (Russia, Moscow)
Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences
Lomonosov Moscow State University
e-mail: korolevma@mi-ras.ru

Пусть $q \geqslant 3$ — произвольное целое число, и пусть для целого n, взаимно простого с q, символ $\overline{n}$ обозначает вычет, обратный к n по модулю q, т.е. решение сравнения $n\overline{n} \equiv 1 \pmod{q}$. Тригонометрическая сумма вида

$$S(q;a,b) \;=\; \sum_{\substack{n=1\\(n,q)=1}}^{q} \exp\left(2\pi i\,\frac{a\overline{n}+bn}{q}\right) \tag{1}$$

называется полной суммой Клоостермана по модулю q. Суммы (1) естественным образом возникают при решении ряда задач аналитической теории чисел.

Наряду с (1) рассматриваются суммы более общего вида

$$S(q;a,b;\mathcal{A}) \;=\; \sum_{n\in\mathcal{A}} \exp\left(2\pi i\,\frac{a\overline{n}+bn}{q}\right), \tag{2}$$

также называемые суммами Клоостермана, в которых переменная пробегает некоторое множество $\mathcal{A}$ значений, взаимно простых с модулем q. В случае, когда множество $\mathcal{A}$ целиком содержится в приведённой системе вычетов $\mathbb{Z}_q^*$ по модулю q, и при этом $|\mathcal{A}| < \varphi(q)$, такие суммы называются, в отличие от (1), неполными суммами Клоостермана.

Нетривиальные оценки сумм (2), т.е. неравенства $|S(q;a,b;\mathcal{A})| \leqslant |\mathcal{A}|\Delta$, где $0 < \Delta < 1$, позволяют исследовать распределение величин $a\overline{n}+bn$, $n \in \mathcal{A}$, в кольце вычетов $\mathbb{Z}_q$, разрешимость некоторых сравнений, содержащих величины $\overline{n}$, $n \in \mathcal{A}$, и т.д.

Частным случаем (2) являются суммы Клоостермана с простыми числами, т.е. суммы

$$S_1(q;a,b;N) \;=\; {\sum_{p\leqslant N}}' \exp\left(2\pi i\,\frac{a\overline{p}+bp}{q}\right), \tag{3}$$

где штрих в знаке суммы означает, что $p \nmid q$. Величина N называется длиной суммы S_1. Наибольшую трудность представляет оценка "короткой" суммы S_1, длина которой связана с модулем неравенством $N \leqslant q^{1-c}$, $0 < c < 1$.

Оценкам сумм (3) при различных предположениях относительно q, N, a, b посвящены работы Э. Фуври и П. Мишеля [1], М.З. Гараева [2], Ж. Бургейна [3], Э. Фуври и И.Е. Шпарлинского [4], Р. Бейкера [5], Ж. Бургейна и М.З. Гараева [6] и ряд статей докладчика.

В докладе будет рассказано о новой оценке суммы S_1, справедливой для произвольного модуля $q \geqslant q_0(\varepsilon)$ и любых a, b, взаимно простых с q, при условии, что длина суммы N удовлетворяет неравенствам $q^{3/4+\varepsilon} \leqslant N \leqslant q^{3/2-\varepsilon}$. Особое внимание будет уделено приложениям этой оценки к ряду задач теории сравнений.

В качестве примера будет рассмотрено сравнение вида

$$g(p_1) + g(p_2) + \ldots + g(p_k) \equiv m \pmod{q}, \tag{4}$$

в котором $g(x) = a\overline{x} + bx$, $k \geqslant 3$ - фиксированное целое число, а переменные $p_1, \ldots, p_k$ принимают значения простых чисел "короткого" промежутка $(1, N]$.

Упомянутая выше оценка позволяет получить для числа $I_k(q,N) = I_k(q,N;a,b,m)$ решений (4) выражение вида

$$I_k(q,N) \,=\, \frac{(\pi(N))^k}{q}\,\big(\varkappa_k \,+\, O(\Delta_k)\big), \tag{5}$$

где $\pi(N)$ — количество простых чисел, не превосходящих N, $\Delta_k = \Delta_k(q,N) \to 0$ при $q \to +\infty$, а $\varkappa_k = \varkappa_k(q;a,b,m)$ - некоторая мультипликативная функция параметра q.

Величина $\varkappa_k(q)$ является своеобразным аналогом "особого ряда", возникающего при решении аддитивных задач с помощью кругового метода. Отыскание всех троек $(a,b,m) \pmod q$, при которых формула (5) является асимптотической, является нетривиальной задачей, представляющей и самостоятельный интерес. В частности, можно доказать существование абсолютной постоянной $c_1 > 0$ такой, что для любого модуля q с условием $(q,6) = 1$ неравенство

$$\varkappa_k(q;a,b,m) \,\geqslant\, c_1$$

выполняется равномерно по всем a,b,m и $k \geqslant 7$ (в случае, если верна расширенная гипотеза Римана и при $k \geqslant 5$). В случаях $q = 2^n$, $q = 3^n$, $n \geqslant 1$, можно указать значения k и отвечающие им тройки (a,b,m), для которых $\varkappa_k(q;a,b,m) = 0$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. E. Fouvry, P. Michel. Sur certaines sommes d'exponentielles sur les nombres premiers // Ann. scient. Éc. Norm. Sup. 1998. Vol. 31, № 1. P. 93–130.
2. М. З. Гараев. Оценка сумм Клоостермана с простыми числами и применение // Матем. заметки. 2010. Т. 88, № 3. С. 41–64.
3. J. Bourgain. More on the sum-product phenomenon in prime fields and its applications // Int. J. Number Theory. 2005. Vol. 1, № 1. P. 1–32.
4. E. Fouvry, I. E. Shparlinski. On a ternary quadratic form over primes // Acta Arithmetica. 2011. Vol. 150, № 3. P. 285–314.
5. R. C. Baker. Kloosterman sum with prime variable // Acta Arith. 2012. Vol. 156, № 4. P. 351–372.
6. Ж. Бургейн, М. З. Гараев. Сумма множеств, образованных обратными элементами в полях простого порядка, и полилинейные суммы Клоостермана // Изв. РАН. Сер. матем. 2014. Т. 78, № 4. С. 19–72.

УДК 511.3

Об одном подходе получения плотностных теорем для L-функций Дирихле числовых полей

В. Н. Кузнецов (Россия, г. Саратов)
Саратовский государственный технический университет им. Ю. А. Гагарина
e-mail: kuznetsovvalnik@gmail.com

О. А. Матвеева (Россия, г. Саратов)
Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского
e-mail: olga.matveeva.0@gmail.com

On an approach to obtain density theorems for Dirichlet L-functions of numbers fields

V. N. Kuznetsov (Russia, Saratov)
Saratov state technical University. Yu. A. Gagarin
e-mail: kuznetsovvalnik@gmail.com
O. A. Matveeva (Russia, Saratov)
Saratov state University N. G. Chernyshevsky
e-mail: olga.matveeva.0@gmail.com

Известная теорема Бэклунда (см.[1]) утверждает, что для любого числового характера χ по модулю m для числа нулей L-функции $L(s,\chi)$, лежащих в прямоугольнике $D_T: 0<\sigma<1, |t|\leq T$ имеет место соотношение

$$N(T)=\frac{T\ln T}{\pi}+C(m)T+O(\ln(kT)), \tag{1}$$

где $C(m)\leq \ln 2m$.

Схема доказательства теоремы Бэклунда позволяет получить подобные утверждения для L–функций числовых полей. Существенную роль в этой схеме играет тот факт, что L–функции Дирихле в случае примитивных характеров удовлетворяют функциональному уравнению римановского типа(например [2]).

В данной работе предлагается иной подход получения плотностных теорем для L-функций числовых полей. Этот подход в отличии от схемы Бэклунда позволяет получать плотностные теоремы для рядов Дирихле, которые определяются линейными комбинациями L-функции числовых полей.

Во-первых, учитывая соотношение (1) для числа нулей дзета-функции Дедекинда числовых полей K; лежащих в прямоугольнике D_T, получаем следующее соотношение

$$N(T)=\frac{kT\ln T}{\pi}+O(T), \tag{2}$$

где константа в символе „O“ не превосходят величины $k\ln 2k$, где $k=[K:Q]$

В случае когда K абелево расширение поля Q соотношение (2) следует из разложения $Z_K(s)$ в произведении L-функций с числовыми характерами. (см. [2])

В случае произвольного числового поля K используем тот факт, что в этом случае для любого идеала β поля $K: N(\beta)=N(p)$, где p — идеал максимального абелева подрасширения: $Q\subset K_{ab}\subset K$, над которым лежит идеал β (см.[2]).

Рассмотрим разложение разложение $L(s,x,k)$:

$$L(s,x,k)=\sum_{C_i}x(C_i)\sum_{\pi\in C_i}\frac{1}{N(\pi)^s}, \tag{3}$$

где C_i пробегает группу классов идеалов поля K.

Оценка (2) и разложение (3) позволяют доказать следующее утверждение

Теорема 1. *Для L-функции Дирихле $L(s,\chi,K)$ имеет место представление*

$$L(s,\chi,K)=Q_{l,\chi}(s)\cdot f_0(s),$$

где $Q_{l,x}(s)$ полином степени l, $l\leq m$, где m не зависит от χ; $Q_{l,x}(s)=\sum_{i=1}^{l}\alpha_i n_{i,x}^s$, лежат в критической области и их число при $|t|\leq T$ удовлетворяет оценке

$$N_{f_0}(T)=\frac{kT\ln T}{\pi}+O(T)$$

где $k=[K:a]$, а константа в символе „O“ не превосходит $k\ln 2k$

Как показано в [3] нули полинома $Q_t(s)$ степени l при $|t| \leq T$ лежат в полосе $|\sigma| < H$, и их число удовлетворят оценке

$$H(T) = \frac{2T\ln l}{\pi} + C, \tag{4}$$

где константа C не зависит от T.

В силу (4) и теоремы 1 получим следующий результат.

Теорема 2. *Число нулей L–функции Дирихле $L(s, x, k)$ лежащих в прямоугольнике D_T удовлетворяют оценке*

$$N(T) = \frac{kT\ln T}{\pi} + O(T) \tag{5}$$

где $k = [K : Q]$, а константа в „O“ не превосходит $k\ln 2k + \ln m$, где m определяется числом классов поля K.

Приведенная выше схема получения оценки (5) работает и для рядов Дирихле вида

$$f(s) = \sum_{i=1}^{\nu} \alpha_i L(s, \chi, K) \tag{6}$$

где ν не превосходит порядка группы классов идеалов поля K.

Такие же рассуждения как и при доказательстве теоремы 2 позволяют доказать следующие утверждения.

Теорема 3. *Для числа нулей функции (6),лежащих в прямоугольнике D_T имеет место оценка*

$$N(T) = \frac{kT\ln T}{\pi} + O(T),$$

где $k = [K; Q]$, а константа в символе „O“ не превосходит величины $\nu(k\ln 2k + \ln m)$.

Теорема 4. *Для числа нулей функции $f(s)$, лежащих вне критической плоскасти имеет место оценка*

$$N(T) = O(T),$$

где константа в символе „O“ не превосходит величины $\nu(k\ln 2k + \ln m)$.

Теорема 5. *Для любого $\epsilon > 0$ основная масса нулей функции (6) при $t > 0$ лежит в ϵ–окрестности критической прямой. А именно при любом $T > 0$ и $\left|\sigma - \frac{1}{2}\right| > \epsilon$:*

$$N_\epsilon(T) = O(T),$$

где константа в символе „O“ зависит от ϵ.

Теорема 6. *При условии выполнения расширенной гипотезы Римана все нули L-функций Дирихле числового поля K лежат на критической прямой.*

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Прахар К. Распределение простых чисел. — М.: Мир, 1967.
2. Алгебраическая теория чисел./ Под редакцией Касселса Дж. и Фрелиха А./ — М.: Мир, 1969.
3. Левин Б. Я. Распределение корней целых функций. — М.: Изд-во технико-теоретической литературы, 1956.

On the Hurwitz zeta-function with algebraic irrational parameter

A. Laurinčikas (Lithuania, Vilnius)
Institute of Mathematics, Faculty of Nathematics and Informatics, Vilnius University
e-mail: antanas.laurincikas@mif.vu.lt

УДК 511.32

О дзета-функции Гурвица с алгебраическим иррациональным параметром[1]

А. Лауринчикас (Литва, г. Вильнюс)
Математический институт, Факультет математики и информатики, Вильнюский университет
e-mail: antanas.laurincikas@mif.vu.lt

After the Voronin discovery of the universality for the Riemann zeta-function, it turned out that some other zeta- and L-functions are also universal in the Voronin sense. Among them, the Hurwitz zeta-function $\zeta(s,\alpha)$, $s=\sigma+it$, with parameter α, $0<\alpha\leqslant 1$. The function $\zeta(s,\alpha)$ is defined, for $\sigma>1$, by the Dirichlet series

$$\zeta(s,\alpha)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(m+\alpha)^s},$$

and has a meromorphic continuation to the whole complex plane. The function $\zeta(s,\alpha)$ depends on the parameter α, and its analytic properties, including the universality, are closely related to arithmetic of α.

Let $D=\{s\in\mathbb{C}:1/2<\sigma<1\}$. Denote by $\mathcal{K}$ the class of compact subsets of the strip D with connected complements, and by $H(K)$ with $K\in\mathcal{K}$ the class of continuous functions on K that are analytic in the interior of K. Then the universality of $\zeta(s,\alpha)$ is contained in the following theorem [4].

Theorem 1. *Suppose that the parameter α is transcendental or rational $\neq 1, 1/2$. Let $K\in\mathcal{K}$ and $f(s)\in H(K)$. Then, for every $\varepsilon>0$,*

$$\liminf_{T\to\infty}\frac{1}{T}\text{meas}\left\{\tau\in[0,T]:\sup_{s\in K}|\zeta(s+i\tau,\alpha)-f(s)|<\varepsilon\right\}>0.$$

[1]This research is funded by the European Social Fund according to the activity “Improvement of researchers’ qualification by implementing world-class R&D projects” of Measure No. 09.3.3-LMT-K-712-01-0037.

The universality of $\zeta(s,\alpha)$ in the case of algebraic irrational α is an open problem.

In [2], a certain approximation to the universality of $\zeta(s,\alpha)$ with algebraic irrational α has been obtained. Denote by $H(D)$ the space of analytic functions on D endowed with topology of uniform convergence on compacta.

Theorem 2. *Suppose that the parameter α is algebraic irrational. Then there exists a closed non-empty set $F_\alpha \subset H(D)$ such that if $K \subset D$ is a compact set and $f(s) \in F_\alpha$, then, for every $\varepsilon > 0$,*

$$\liminf_{T\to\infty} \frac{1}{T}\text{meas}\left\{\tau \in [0,T] : \sup_{s\in K} |\zeta(s+i\tau,\alpha) - f(s)| < \varepsilon\right\} > 0.$$

Theorem 2 has the following modiffication [2].

Theorem 3. *Suppose that α is algebraic irrational. Then there exists a closed non-empty set $F_\alpha \subset H(D)$ such that if $K \subset D$ is a compact set and $f(s) \in F_\alpha$, then the limit*

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\text{meas}\left\{\tau \in [0,T] : \sup_{s\in K} |\zeta(s+i\tau,\alpha) - f(s)| < \varepsilon\right\} > 0$$

exists for all but at most countably many $\varepsilon > 0$.

The discrete universality of the function $\zeta(s,\alpha)$ is more complicated. The first result in this direction belongs to Bagchi [1].

Theorem 4. *Suppose that α is a rational number, $\alpha \neq 1$, $\alpha \neq 1/2$. Let $K \in \mathcal{K}$ and $f(s) \in H(K)$. Then, for every $\varepsilon > 0$ and $h > 0$,*

$$\liminf_{N\to\infty} \frac{1}{N+1}\#\left\{0 \leqslant k \leqslant N : \sup_{s\in K} |\zeta(s+ikh,\alpha) - f(s)| < \varepsilon\right\} > 0.$$

The case of transcendental α is more complicated problem, and the known theorems involve some relations between the numbers α and h. For example, the rationality of the number $\exp\{2\pi/h\}$ is required. More general result was considered in [6].

Theorem 5. *Suppose that the set $\{(\log(m+\alpha) : m \in \mathbb{N}_0), 2\pi/h\}$ is linearly independent over the field of rational numbers $\mathbb{Q}$. Let $K \in \mathcal{K}$ and $f(s) \in H(K)$. Then, for every $\varepsilon > 0$,*

$$\liminf_{N\to\infty} \frac{1}{N+1}\#\left\{0 \leqslant k \leqslant N : \sup_{s\in K} |\zeta(s+ikh,\alpha) - f(s)| < \varepsilon\right\} > 0.$$

Theorem 1 also is true [5] for α such that the set $L(\alpha) = \{\log(m+\alpha) : m \in \mathbb{N}_0\}$ is linearly independent over $\mathbb{Q}$. The set $L(\alpha)$ is very important in the theory of the function $\zeta(s,\alpha)$. The Cassels theorem asserts that at least 51 percent of elements of the set $L(\alpha)$ with algebraic irrational α are linearly independent over $\mathbb{Q}$ in the sense of density. Thus, the existence of algebraic irrartional α with linearly independent $L(\alpha)$ over $\mathbb{Q}$ does not contradict the Cassels theorem. However, examples of such α are not known.

Now, we state discrete analogues of Theorems 2 and 3 [7].

Theorem 6. *Suppose that α is an algebraic irrational number, and $h > 0$. Then there exists a non-empty closed set $F_{\alpha,h} \subset H(D)$ such that, for every compact set $K \subset D$, $f(s) \in F_{\alpha,h}$ and $\varepsilon > 0$,*

$$\liminf_{N\to\infty} \frac{1}{N+1}\#\left\{0 \leqslant k \leqslant N : \sup_{s\in K} |\zeta(s+ikh,\alpha) - f(s)| < \varepsilon\right\} > 0.$$

Moreover, for every compact set $K \subset D$ and $f(s) \in F_{\alpha,h}$, the limit

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N+1}\#\left\{0 \leqslant k \leqslant N : \sup_{s\in K} |\zeta(s+ikh,\alpha) - f(s)| < \varepsilon\right\} > 0$$

exists for all but at most countably many $\varepsilon > 0$.

Theorem 6 can be generalized for some compositions $\Phi(\zeta(s,\alpha))$, where $\Phi : H(D) \to H(D)$ is a certain operator.

Theorem 7. *Suppose that α is an algebraic irrational number, $h > 0$ and $\Phi : H(D) \to H(D)$ is a continuous operator. Then there exists a non-empty closed subset $F_{\alpha,h} \subset H(D)$ such that, for every compact set $K \subset D$, $f(s) \in \Phi(F_{\alpha,h})$ and $\varepsilon > 0$,*

$$\liminf_{N\to\infty} \frac{1}{N+1} \# \left\{ 0 \leqslant k \leqslant N : \sup_{s\in K} |\Phi(\zeta(s+ikh,\alpha)) - f(s)| < \varepsilon \right\} > 0.$$

Moreover, for every compact set $K \subset D$ and $f(s) \in \Phi(F_{\alpha,h})$, the limit

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N+1} \# \left\{ 0 \leqslant k \leqslant N : \sup_{s\in K} |\Phi(\zeta(s+ikh,\alpha)) - f(s)| < \varepsilon \right\} > 0$$

exists for all but at most countably many $\varepsilon > 0$.

For Hurwitz zeta-functions, the joint universality also is considered. The most general result was obtained in [5].

Theorem 8. *Suppose that the set $\{\log(m+\alpha_j) : m \in \mathbb{N}_0,\ j = 1,\dots,r\}$ is linearly independent over $\mathbb{Q}$. For $j = 1,\dots,r$, let $K_j \in \mathcal{K}$ and $f_j(s) \in H(K_j)$. Then, for every $\varepsilon > 0$,*

$$\liminf_{T\to\infty} \frac{1}{T} \mathrm{meas} \left\{ \tau \in [0,T] : \sup_{1\leqslant j\leqslant r} \sup_{s\in K_j} |\zeta(s+i\tau,\alpha_j) - f_j(s)| < \varepsilon \right\} > 0.$$

In [3], the following result without using any independence condition is presented.

Theorem 9. *Suppose that α_j, $0 < \alpha_j < 1$, $\alpha_j \neq 1/2$, $j = 1,\dots,r$, are arbitrary numbers. Then there exists a closed non-empty set $F_{\alpha_1,\dots,\alpha_r} \subset H^r(D)$ such that, for every compact sets $K_1,\dots,K_r \subset D$, $(f_1,\dots,f_r) \in F_{\alpha_1,\dots,\alpha_r}$ and $\varepsilon > 0$,*

$$\liminf_{T\to\infty} \frac{1}{T} \mathrm{meas} \left\{ \tau \in [0,T] : \sup_{1\leqslant j\leqslant r} \sup_{s\in K_j} |\zeta(s+i\tau,\alpha_j) - f_j(s)| < \varepsilon \right\} > 0.$$

Moreover, for every compact sets $K_1,\dots,K_r \subset D$ and $(f_1,\dots,f_r) \in F_{\alpha_1,\dots,\alpha_r}$, the limit

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \mathrm{meas} \left\{ \tau \in [0,T] : \sup_{1\leqslant j\leqslant r} \sup_{s\in K_j} |\zeta(s+i\tau,\alpha_j) - f_j(s)| < \varepsilon \right\} > 0$$

exists for all but at most countably many $\varepsilon > 0$.

REFERENCES

1. Bagchi B. The statistical behaviour and and universality properties of the Riemann zeta-function and other allied Dirichlet series. Ph. D. Thesis. Calcutta: Indian Statistical Institute, 1981.

2. Бальчюнас А., Дубицкас А., Лауринчикас А. О дзета-функции Гурвица с алгебраическим иррациональным параметром // Матем. заметки. 2019. Т. 105, №2. С. 179–186.

3. Franckevič V., Laurinčikas A., Šiaučiūnas D. On joint value distribution of Hurwitz zeta-functions // Чебышевский сборник (вручено).

4. Gonek S. M. Analytic properties of zeta and L-functions. Thesis. Ann Arbor: University of Michigan, 1979.

5. Laurinčikas A. On the joint universality of Hurwitz zeta-functions // Šiauliai Math. Semin. 2008. V. 3(11). P. 169–187.

6. Laurinčikas A. A discrete universality theorem for the Hurwitz zeta-function // J. Number Theory. 2014. V. 143. P. 232–247.

7. Laurinčikas A. On the Hurwitz zeta-function with algebraic irrational parameter // Abh. Math. Semin. Univ. Hamburg (submitted).

———————————————————————————

Weighted universality of the Hurwitz zeta-function

A. Laurinčikas (Lithuania, Vilnius)
Institute of Mathematics, Faculty of Mathematics and Informatics, Vilnius University
e-mail: antanas.laurincikas@mif.vu.lt
G. Vadeikis (Lithuania, Vilnius)
Institute of Mathematics, Faculty of Mathematics and Informatics, Vilnius University
e-mail: gediminas.vadeikis@mif.vu.lt

УДК 511.32

Универсальность с весом дзета-функции Гурвица[1]

А. Лауринчикас (Литва, г. Вильнюс)
Математический институт, Факультет математики и информатики, Вильнюский университет
e-mail: antanas.laurincikas@mif.vu.lt
Г. Вадейкис (Литва, г. Вильнюс)
Математический институт, Факультет математики и информатики, Вильнюский университет
e-mail: gediminas.vadeikis@mif.vu.lt

In mathematics, often weighted statements are discussed. They generalize usual statements when the weight function is identically 1. In probability theory, we have weighted limit theorems, in number theory the weighted sieves are used. Analytic number theory considers weighted universality theorems for zeta- and L-functions.

The first weighted universality theorem was obtained for the Riemann zeta-function $\zeta(s)$, $s = \sigma + it$, in [3]. Let $T_0 > 0$ be fixed. Suppose that $w(t)$ is a positive function of bounded variation on $[T_0, \infty)$ such that, for every subinterval $[a, b] \subset [T_0, \infty)$, the variation $V_a^b w$ satisfies the inequality $V_a^b w \leqslant cw(a)$ with a certain constant $c > 0$, and that

$$\lim_{T\to\infty} U(w,T) = \lim_{T\to\infty} \int_{T_0}^{T} w(\tau)\,\mathrm{d}\tau = +\infty.$$

[1]The research of the first author is funded by the European Social Fund according to the activity “Improvement of researchers’ qualification by implementing world-class R&D projects” of Measure No. 09.3.3-LMT-K-712-01-0037.

Denote by $I(A)$ the indicator function of the set A, and $D = \{s \in \mathbb{C} : 1/2 < \sigma < 1\}$. Let $\mathcal{K}$ be the class of compact subsets of the strip D with connected complements, and $H_0(K)$ with $K \in \mathcal{K}$ the class of continuous non-vanishing functions on K that are analytic in the interior of K. Then the following statement is true [3].

Theorem 1. *Let $K \in \mathcal{K}$ and $f(s) \in H_0(K)$. Then, for every $\varepsilon > 0$,*

$$\liminf_{T\to\infty} \frac{1}{U(T,w)} \int_{T_0}^{T} w(\tau) I\left(\left\{\tau \in [0,T] : \sup_{s\in K} |\zeta(s+i\tau) - f(s)| < \varepsilon\right\}\right) \mathrm{d}\tau > 0.$$

We consider the weighted universality for the Hurwitz zeta-function. Let α, $0 < \alpha \leqslant 1$, be a fixed parameter. The Hurwitz zeta-function $\zeta(s,\alpha)$ is defined, for $\sigma > 1$, by the Dirichlet series

$$\zeta(s,\alpha) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(m+\alpha)^s},$$

and has analytic continuation to the whole complex plane, except for a simple pole at the point $s = 1$ with residue 1. Moreover, we have that $\zeta(s,1) = \zeta(s)$, and

$$\zeta(s,1/2) = (2^s - 1)\zeta(s).$$

Thus, the function $\zeta(s,\alpha)$ is a generalization of the Riemann zeta-function.

It is well known that the function $\zeta(s,\alpha)$ for some classes of parameter α is universal in the Voronin sense. Denote by $H(K)$ with $K \in \mathcal{K}$ the class of continuous functions on K that are analytic in the interior of K. Then the universality of $\zeta(s,\alpha)$ is contained in the following theorem [2].

Theorem 2. *Suppose that the parameter α is transcendental or rational $\neq 1, 1/2$. Let $K \in \mathcal{K}$ and $f(s) \in H(K)$. Let $K \in \mathcal{K}$ and $f(s) \in H(K)$. Then, for every $\varepsilon > 0$,*

$$\liminf_{T\to\infty} \frac{1}{T} \mathrm{meas}\left\{\tau \in [0,T] : \sup_{s\in K} |\zeta(s+i\tau,\alpha) - f(s)| < \varepsilon\right\} > 0.$$

The universality of $\zeta(s,\alpha)$ with algebraic irrational α is an open problem.

The weighted universality of $\zeta(s,\alpha)$ was began to study in [1]. Define the set

$$L(\alpha) = \{\log(m+\alpha) : m \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}\}.$$

Theorem 3. *Suppose that the set $L(\alpha)$ is linearly independent over the field of rational numbers $\mathbb{Q}$. Let $K \in \mathcal{K}$ and $f(s) \in H(K)$. Then, for every $\varepsilon > 0$,*

$$\liminf_{T\to\infty} \frac{1}{U(T,w)} \int_{T_0}^{T} w(\tau) I\left(\left\{\tau \in [0,T] : \sup_{s\in K} |\zeta(s+i\tau,\alpha) - f(s)| < \varepsilon\right\}\right) \mathrm{d}\tau > 0.$$

For example, the set $L(\alpha)$ is linearly independent over $\mathbb{Q}$ for transcendental α.

Hurwitz zeta-functions also are jointly universal, i. e., a collection of analytic functions can be approximated by a collections of shifts $\zeta(s+i\tau,\alpha_1), \dots, \zeta(s+i\tau,\alpha_r)$. Define the set

$$L(\alpha_1,\dots,\alpha_r) = \{\log(m+\alpha_j) : m \in \mathbb{N}_0,\ j = 1,\dots,r\}.$$

Then the following statement is known [4].

Theorem 4. *Suppose that the set $L(\alpha_1,\dots,\alpha_r)$ is linearly independent over $\mathbb{Q}$. For $j = 1,\dots,r$, let $K_j \in \mathcal{K}$ and $f_j(s) \in H(K_j)$. Then, for every $\varepsilon > 0$,*

$$\liminf_{T\to\infty} \frac{1}{T} \mathrm{meas}\left\{\tau \in [0,T] : \sup_{1\leqslant j\leqslant r} \sup_{s\in K_j} |\zeta(s+i\tau,\alpha_j) - f_j(s)| < \varepsilon\right\} > 0.$$

For example, the set $L(\alpha_1, \ldots, \alpha_r)$ is linearly independent over $\mathbb{Q}$ for algebraically independent $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$.

Theorem 4 has the following weighted generalization [5].

Theorem 5. *Suppose that the set $L(\alpha_1, \ldots, \alpha_r)$ is linearly independent over $\mathbb{Q}$. For $j = 1, \ldots, r$, let $k_j \in \mathcal{K}$ and $f_j(s) \in H(K_j)$. Then, for every $\varepsilon > 0$,*

$$\liminf_{T\to\infty} \frac{1}{U(T,w)} \int_{T_0}^{T} w(\tau) I\left(\left\{\tau \in [0,T] : \sup_{1\leqslant j\leqslant r} \sup_{s\in K_j} |\zeta(s+i\tau,\alpha_j) - f_j(s)| < \varepsilon\right\}\right) \mathrm{d}\tau > 0.$$

Moreover, the limit

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{U(T,w)} \int_{T_0}^{T} w(\tau) I\left(\left\{\tau \in [0,T] : \sup_{1\leqslant j\leqslant r} \sup_{s\in K_j} |\zeta(s+i\tau,\alpha_j) - f_j(s)| < \varepsilon\right\}\right) \mathrm{d}\tau > 0$$

exists for all but at most countably many $\varepsilon > 0$.

For example, we can take $\alpha_1 = \frac{1}{\pi}, \ldots, \alpha_r = \frac{1}{r\pi}$.

REFERENCES

1. Balčiūnas A., Vadeikis G. A weigthed universality theorem for the Hurwitz zeta-function // Šiauliai Math. Semin. 2017. V. 12(20). P. 5–18.
2. Gonek S. M. Analytic properties of zeta and L-functions. Thesis. Ann Arbor: University of Michigan, 1979.
3. Laurinčikas A. On the universality of the Riemann zeta-function // Lith. Math. J. 1995. V. 35. P. 244–251.
4. Laurinčikas A. On the joint universality of Hurwitz zeta-functions // Šiauliai Math. Semin. 2008. V. 3(11). P. 169–187.
5. Laurinčikas A., Vadeikis G. Joint weighted universality of the Hurwitz zeta-functions // Алгебра и анализ (вручено).

———————————————————————————

УДК 512.73

Classical generators for category of coherent sheaves and the regular locus

Lu Li (China, Norway, Trondheim)
Norwegian University of Science and Technology
e-mail: lu.li.bo1990@gmail.com

We give a necessity and sufficiency condition for a singularity category $\mathbf{D}_{sg}(X)$ of a Noetherian scheme X to have a classical generator. This is due to the openness of the regulor locus $Reg(X)$.

keywords: singularity category; classical generator; regulor locus; Noetherian scheme

———————————————————————————

УДК 512.55+512.545

Направленные подпространства частично упорядоченных линейных пространств над частично упорядоченными телами

А. В. Михалев (Россия, г. Москва)
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
Е. Е. Ширшова (Россия, г. Москва)
Московский педагогический государственный университет
e-mail: shirshova.elena@gmail.com

Convex subspaces of partially ordered vector spaces over partially ordered skew fields

A. V. Mikhalev (Russian, Moscow)
Lomonosov Moscow State University
E. E. Shirshova (Russian, Moscow)
Moscow Pedagogical State University
e-mail: shirshova.elena@gmail.com

Пусть $F =< F,+,\cdot >$ – тело. Напомним, что F называется *частично упорядоченным телом*, если $< F,+,\leqslant >$ – частично упорядоченная группа, удовлетворяющая условию:

если $a \leqslant b$ и $c > 0$ в $< F,+,\leqslant >$, то $ac \leqslant bc$ и $ca \leqslant cb$.

Если группа $< F,+,\leqslant >$ является направленной (линейно упорядоченной), то F называется *направленным (линейно упорядоченным) телом.*

Будем далее считать, что F – частично упорядоченное тело нулевой характеристики с положительной единицей.

В монографиях Бэра [2] и Биркгофа [1] можно найти следующее определение: правое линейное пространство $V_F =< V,+,\{\alpha|\ \alpha \in F\},\leqslant >$ над частично упорядоченным полем F называется *частично упорядоченным линейным пространством*, если $< V,+,\leqslant >$ – частично упорядоченная группа, удовлетворяющая условию:

из $0 \leqslant v$ следует $0 \leqslant v\alpha$ для всех $v \in V$ и $\alpha > 0$ из поля F.

Частично упорядоченное линейное пространство V_F над частично упорядоченным полем F называют *направленным (линейно упорядоченным) пространством*, если группа $< V,+,\leqslant >$ является направленной (линейно упорядоченной) группой. Если группа $< V,+,\leqslant >$ является решеточно упорядоченной, то линейное пространство V_F принято называть векторной решеткой.

Изучение векторных решеток началось с работ Л. В. Канторовича [3] и Риса [5]. Теория векторных решеток играет важную роль в функциональном анализе, в этом ключе различные авторы исследовали свойства действительных функциональных пространств (см. [4]).

В настоящее время начато систематическое исследование свойств частично упорядоченных линейных пространств над различными частично упорядоченными телами.

Линейное подпространство M линейного пространства V_F над частично упорядоченным телом F называется *выпуклым (направленным) подпространством*, если группа $< M,+,\leqslant >$ является выпуклой (направленной) подгруппой группы $< V,+,\leqslant >$.

Теорема 1. *Пусть V_F – частично упорядоченное линейное пространство над направленным телом F, и $0 < u \in V$. Тогда в линейном пространстве V_F существует выпуклое направленное подпространство, положительный конус которого состоит из элементов $v \in V$, удовлетворяющих неравенствам $0 \leqslant v \leqslant u\alpha$ для некоторых $\alpha > 0$ из тела F.*

Напомним, что частично упорядоченная группа G называется *интерполяционной группой*, если для любых элементов $a_1, a_2, b_1, b_2 \in G$ из неравенств $a_1, a_2 \leqslant b_1, b_2$ следует существование элемента $c \in G$, для которого верны неравенства $a_1, a_2 \leqslant c \leqslant b_1, b_2$.

Частично упорядоченное линейное пространство V_F над частично упорядоченным телом F будем называть *интерполяционным линейным пространством, если группа* $< V, +, \leqslant>$ *является интерполяционной группой.*

Теорема 2. *Множество $L = L(V_F)$ всех выпуклых направленных подпространств интерполяционного линейного пространства V_F над частично упорядоченным телом F образует подрешетку в решетке всех подпространств линейного пространства V_F.*

Кроме того: 1) L является полной решеткой сверху;

2) если группа $< V, +, \leqslant>$ является направленной группой, то L – полная дистрибутивная решетка с нулем и единицей, являющаяся брауэровой решеткой.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Биркгоф Г. Теория решеток. – М.: Наука, 1984. 564 с.

2. Бэр Р. Линейная алгебра и проективная геометрия. – М.: ИЛ, 1955. 399 с.

3. Канторович Л. В. Линейные полуупорядоченные пространства. Матем. сб. 1937. Т. 2. С. 121-168.

4. Канторович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ. – М.: Наука, 1977. 568с.

5. Riesz F. Sur la théorie générale des opérations linéaires.// Ann.Math. 1940. V. 41. P. 174-206.

———————————————————————

УДК 511.36

Функции меры иррациональности и диофантовы спектры

Н. Г. Мощевитин (Россия, г. Москва)
МГУ им. М. В. Ломоносова
e-mail: moshchevitin@gmail.com

Functions of irrationality measure and Diophantine spectra

N. G. Moshchevitin (Russia, Moscow)
Moscow State University M. V. Lomonosova
e-mail: moshchevitin@gmail.com

Многие задачи, связанные с диофантовыми приближениями к одному или нескольким числам могут быть сформулированы с помощью функций мер иррациональности. Простейшая функция отвечающая за приближения одного вещественного числа α рациональными числами задается формулой

$$\psi_\alpha(t) = \min_{q \leqslant t} ||q\alpha||.$$

Например, с ее помощью можно определять спектры Лагранжа

$$\mathbb{L} = \{\lambda(\alpha) = \liminf_{t \to \infty} t\psi_\alpha(t)\}$$

и Дирихле

$$\mathbb{D} = \{d(\alpha) = \limsup_{t\to\infty} t\psi_\alpha(t)\},$$

а одной из самых загадочных и удивительных теорем является теорема Кана-Мощевитина об осцилляции разности $\psi_\alpha(t) - \psi_\beta(t)$. Кроме "обычной" функции меры иррациональности $\psi_\alpha(t)$ есть много других похожих функций. В докладе будет рассказано об их свойствах и о некоторых задачах с ними связанных.

———

Groups with quadratic isoperimetric inequality

Alexander Olshanskii (U.S.A., Nashville)
Vanderbilt University
Moscow State University, Russia
e-mail: alexander.olshanskiy@vanderbilt.edu

Given a group G with a finite set of generators A and a finite set of defining relations R, the isoperimetric function (or Dehn function) $d(n)$ is the smallest function $\mathbf{N} \to \mathbf{N}$ with the following property. If a word w in the generators has length at most n and equal 1 in G, then w can be reduced to the empty word by at most $d(n)$ applications of the relations from R. It is easy to see that $d(n)$ is a recursive function (or bounded above by a recursive function) if and only if the group G has decidable word problem. Therefore Dehh function $d(n)$ can be regarded as a measure of the complexity of a finitely presented group.

The first examples of finitely presented groups with decidable word problem and undecidable conjugacy problems were found by P.S. Novikov and W.W. Boone in 50'-s (see [3]), and those examples have exponential Dehn function.

It is well known, that the conjugacy problem is decidable if $\liminf_{n\to\infty} d(n)/n^2 = 0$. With M.V. Sapir, we recently constructed finitely presented groups with quadratic Dehn function and undecidable conjugacy problem. This unimprovable estimate answers E. Rips' question of 1994. I will also mention some earlier helpful and related results of the groups with small Dehn functions [1, 2].

REFERENCES

1. A.Yu. Olshanskii, Groups with polynomially-bounded Dehn functions, Journal of Combinatorial Algebra, 2 (2018), no.4. pp. 311—433.

2. A.Yu. Olshanskii, M.V. Sapir, Groups with small Dehn functions and bipartite chord diagrams, Geometric and Functional Analysis, 16 (2006), 1324–1376.

3. J.Rotman, An introduction to the theory of groups, 3d edition, Allyn and Bacon Inc., Boston, Mass, 1984.

———

УДК 512.57

Конечные алгебры мультиопераций

Н. А. Перязев (Россия, г. Санкт-Петербург)
Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет «ЛЭТИ» им. В. И. Ульянова (Ленина)
e-mail: nikolai.baikal@gmail.com

Finite Algebras of Multioperations

N. A. Peryazev (Russia, Saint-Petersburg)
The First Electrotechnical University ETU «LETI»
e-mail: nikolai.baikal@gmail.com

Исследования алгебр n-местных операций и мультиопераций (многозначных частичных операций) на k-элементных множествах велись с одной стороны при фиксированном n и произвольном k, с другой стороны при произвольном n и фиксированном k.

По первому направлению первоначально изучались алгебры унарных операций и мультиопераций (в этом случае алгебра операций является моноидом преобразований, а алгебра мультиопераций есть алгебра бинарных отношений). Алгебры n-местных операций, по-видимому, впервые рассмотрел К. Менгер [1]. В таких алгебрах выполняется тождество суперассоциативности (сверхассоциативности). В дальнейшем часто алгебры обладающие этим свойством называют алгебрами Менгера. Алгебры n-местных отношений со свойством суперассоциативности изучались В.С. Трохименко (смотри, например, [2]).

Второе направление имеет тесные связи с теорией клонов (алгебры операций без фиксации местности) [3]. Отметим работы А.Г. Пинуса, в которых такие алгебры используются для исследования клонов, например [4]. В работе [6] алгебры n-местных мультиопераций использовались при изучении суперклонов. Изучение алгебр n-местных мультиопераций и их решеток начато в работе [5].

Пусть A — произвольное множество, $B(A)$ — множество всех подмножеств A, n — натуральное число. Отображение f декартовой степени A^n в $B(A)$ называется n-местной мультиоперацией на A. Если при этом все образы одноэлементные, то f называем n-местной операцией. Для множества всех n-местных мультиопераций на A используем обозначение $\mathcal{M}_A^{(n)}$, а для множества всех n-местных операций — $\mathcal{O}_A^{(n)}$. Очевидно выполняется $\mathcal{O}_A^{(n)} \subset \mathcal{M}_A^{(n)}$. Ранг k мультиоперации определим как $k = |A|$.

Определим следующие n-местные мультиоперации так:
пустая мультиоперация $o^n(a_1, \ldots, a_n) = \varnothing$;
мультиоперация проектирования по i аргументу $e_i^n(a_1, \ldots, a_n) = \{a_i\}$.

Определим следующие метаоперации на множестве n-местных мультиопераций:
Суперпозиция мультиопераций $f \in \mathcal{M}_A^{(n)}$ и $f_1, \ldots, f_n \in \mathcal{M}_A^{(n)}$

$$(f * f_1, \ldots, f_n)(a_1, \ldots, a_n) = \bigcup_{b_i \in f_i(a_1, \ldots, a_n)} f(b_1, \ldots, b_n).$$

Разрешимость $f \in \mathcal{M}_A^{(n)}$ по i аргументу, где $i \in \{1, \ldots, n\}$

$$(\mu_i f)(a_1, \ldots, a_n) = \{a \mid a_i \in f(a_1, \ldots, a_{i-1}, a, a_{i+1}, \ldots, a_n)\}.$$

Легко видно, что:

$$b \in (\mu_i f)(a_1, \ldots, a_{i-1}, c, a_{i+1}, \ldots, a_n) \Longleftrightarrow c \in f(a_1, \ldots, a_{i-1}, b, a_{i+1}, \ldots, a_n).$$

Определение 1. *Алгеброй n-местных операций над множеством A при $n \geq 2$ называется любое подмножество $K \subseteq \mathcal{O}_A^{(n)}$, содержащее все n-местные операции проектирования и замкнутое относительно метаоперации суперпозиции.*

Введем обозначение $[K]_n$ для алгебры n-местных операций над A порожденной множеством $K \subseteq \mathcal{O}_A^{(n)}$ и V_k^n для упорядоченного по включению множества всех алгебр n-местных операций ранга k (этот порядок является решеточным).

Определение 2. *Алгеброй n-местных мультиопераций над множеством A при $n \geq 2$ называется любое подмножество $R \subseteq \mathcal{M}_A^{(n)}$, содержащее все n-местные мультиоперации проектирования, пустую n-местную мультиоперацию и замкнутое относительно метаопераций суперпозиции и разрешимости по первому аргументу.*

Введем обозначение $\langle R \rangle_n$ для алгебры n-местных мультиопераций над A порожденной множеством $R \subseteq \mathcal{M}_A^{(n)}$ и W_k^n для упорядоченного по включению множества всех алгебр n-местных мультиопераций ранга k (порядок так же решеточный).

Класс алгебр $\mathcal{P}_n$ определяется в сигнатуре $\Sigma_n = \langle s, \pi, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n, \perp \rangle$, $n \geq 2$, где s и μ являются $(n+1)$-местной и унарной функциональными символами, а остальные нульместными. В этой сигнатуре термально определим следующие символы операций и предикатов:

$\top = s(\pi(\varepsilon_2), \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_1)$;

$\pi_1(x) = \pi(x)$;

$\pi_i(x) = s(\pi(s(x, \varepsilon_i, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_{i-1}, \varepsilon_1, \varepsilon_{i+1}, \dots, \varepsilon_n)), \varepsilon_i, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_{i-1}, \varepsilon_1, \varepsilon_{i+1}, \dots, \varepsilon_n)$ для $i \in \{2, \dots, n\}$;

$x \wedge y = s(s(\varepsilon_1, \pi(\varepsilon_1), \dots, \pi(\varepsilon_n)), x, y, \dots, y)$;

$x \leq y \Longleftrightarrow x \wedge y = x$.

Класс алгебр $\mathcal{P}_n$ задается следующими аксиомами:

1. $x \wedge x = x$;
2. $x \wedge y = y \wedge x$;
3. $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$;
4. $x \wedge \top = x$;
5. $s(s(x, y_1, \dots, y_n), z_1, \dots, z_n) \leq s(x, s(y_1, z_1, \dots, z_n), \dots, s(y_n, z_1, \dots, z_n))$;
6. $s(\varepsilon_i, x_1, \dots, x_n) = s(\top, x_1, \dots, x_1) \wedge \ldots \wedge s(\top, x_{i-1}, \dots, x_{i-1}) \wedge x_i \wedge$ $\wedge\, s(\top, x_{i+1}, \dots, x_{i+1}) \wedge \ldots \wedge s(\top, x_n, \dots, x_n)$ для всех $i \in \{1, \dots, n\}$;
7. $s(x_0, x_1, \dots, x_n) = \perp$ при $x_i = \perp$ хоть для одного $i \in \{0, \dots, n\}$;
8. $\pi(\perp) = \perp$;
9. $\pi_i(\top) = \top$ для всех $i \in \{1, \dots, n\}$;
10. $\pi_i(\varepsilon_i) = \varepsilon_i$ для всех $i \in \{1, \dots, n\}$;
11. $\pi_i(\pi_i(x)) = x$ для всех $i \in \{1, \dots, n\}$;
12. $\pi_i(x \wedge y) = \pi_i(x) \wedge \pi_i(y)$ для всех $i \in \{1, \dots, n\}$;
13. $s(x, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{i-1}, \varepsilon_j, \varepsilon_{i+1}, \dots, \varepsilon_{j-1}, \varepsilon_i, \varepsilon_{j+1}, \dots, \varepsilon_n) = \pi_i(\pi_j(\pi_i(x)))$ для всех $i, j \in \{1, \dots, n\}$ и $i \neq j$;
14. $\pi_j(\varepsilon_i) = s(\top, (\varepsilon_j \wedge \varepsilon_i), \dots, (\varepsilon_j \wedge \varepsilon_i))$ для всех $i, j \in \{1, \dots, n\}$ и $i \neq j$;
15. $s(s(x, y_1, \dots, y_n), \varepsilon_{i_1}, \dots, \varepsilon_{i_n}) = s(x, s(y_1, \varepsilon_{i_1}, \dots, \varepsilon_{i_n}), \dots, s(y_n, \varepsilon_{i_1}, \dots, \varepsilon_{i_n}))$ для всех $i_1, \dots, i_n \in \{1, \dots, n\}$;
16. $\pi_j\Big(s(x_0, x_1, \dots, x_n)\Big) \leq \bigwedge\limits_{i=1}^{n} s\Big(\pi_j(x_i), \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{j-1}, s(\pi_i(x_0), \top, \dots, \top, \underbrace{\varepsilon_j}_{i}, \top, \dots, \top), \varepsilon_{j+1}, \dots, \varepsilon_n\Big)$ для всех $j \in \{1, \dots, n\}$;

17. $s(x_0, \ldots, x_{i-1}, x_i \wedge y_i, x_{i+1}, \ldots, x_n) \leq s(x_0, \ldots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n) \wedge$
$\wedge\, s(x_0, \ldots, x_{i-1}, y_i, x_{i+1}, \ldots, x_n)$ для всех $i \in \{1, \ldots, n\}$.

18. $x \wedge s(y, z_1, \ldots, z_n) \leq s\Big((s(x, s(\pi_1(z_1), \varepsilon_1, \top, \ldots, \top), \ldots, s(\pi_n(z_n), \top, \ldots, \top, \varepsilon_n)) \wedge y),$
$(s(\pi_1(y), x, \top, \ldots, \top) \wedge z_1), \ldots, (s(\pi_n(y), \top, \ldots, \top, x) \wedge z_n)\Big)$.

Сделаем следующие определения в алгебре n-местных мультиопераций: n-местную полную мультиоперацию u^n, бинарную операцию пересечения $(f \cap g)$, а также отношение включения $f \subseteq g$ на мультиоперациях:

$u^n(a_1, \ldots, a_n) = A$, для любых $a_1, \ldots, a_n \in A$;

$(f \cap g)(a_1, \ldots, a_n) = f(a_1, \ldots, a_n) \cap g(a_1, \ldots, a_n)$ для любых $a_1, \ldots, a_n \in A$;

$f \subseteq g \iff f(a_1, \ldots, a_n) \subseteq g(a_1, \ldots, a_n)$, для любых $a_1, \ldots, a_n \in A$.

Достаточно очевидно, что пересечение является коммутативной, ассоциативной и идемпотентной операцией, а включение является частичным порядком, соответствующим этому пересечению, причем o^n выступает в качестве наименьшего элемента, а u^n в качестве наибольшего элемента.

Лемма 1. *Верны следующие равенства:*

1. $u^n = ((\mu_1 e_2^n) * e_1^n, \ldots, e_1^n)$;

2. $(\mu_i f) = \Big(\big(\mu_1(f * e_i^n, e_2^n, \ldots, e_{i-1}^n, e_1^n, e_{i+1}^n, \ldots, e_n^n)\big) * e_i^n, e_2^n, \ldots, e_{i-1}^n, e_1^n, e_{i+1}^n, \ldots, e_n^n\Big)$ *для* $i \in \{2, \ldots, n\}$;

3. $(f \cap g) = \big((e_1^n * (\mu_1 e_1^n), \ldots, (\mu_1 e_n^n)) * f, g, \ldots, g\big)$.

Определим интерпретацию сигнатуры Σ_n в алгебрах n-местных мультиопераций: s — соответствует операция суперпозиции, π — соответствует операция разрешимости по 1-му аргументу, ε_i — соответствует константная операция, определяющая проекцию по i аргументу, $\perp$ — соответствует константная операция определяющая пустую мультиоперацию.

Теорема 1. *Если $\mathcal{R}$ алгебра n-местных мультиопераций, то $\mathcal{R} \in \mathcal{P}_n$.*

Приведем ряд утверждений, которые следуют из аксиом класса $\mathcal{P}_n$ и при выше определенной интерпретации сигнатуры верны во всех алгебрах n-местных мультиопераций.

Теорема 2. *В любой алгебре класса $\mathcal{P}_n$ выполняются утверждения:*

1. $\perp \leq x$;

2. $\pi_i(\perp) = \perp$ *для* $i \in \{1, \ldots, n\}$;

3. $\pi_j(\varepsilon_i) = \pi_i(\varepsilon_j)$ *для* $j, i \in \{1, \ldots, n\}$;

4. $s(x, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) = x$;

5. $\pi_i(\pi_j(\pi_i(x))) = \pi_j(\pi_i(\pi_j(x)))$ *для* $j, i \in \{1, \ldots, n\}$;

6. $x \leq y \Rightarrow \pi_i(x) \leq \pi_i(y)$ *для* $i \in \{1, \ldots, n\}$;

7. $s(x_0 \wedge y_0, x_1, \ldots, x_n) \leq s(x_0, x_1, \ldots, x_n) \wedge s(y_0, x_1, \ldots, x_n)$;

8. $x_i \leq y_i$ *для всех* $i \in \{0, \ldots, n\} \Rightarrow s(x_0, \ldots, x_n) \leq s(y_0, \ldots, y_n)$.

Основным инструментом при исследовании алгебр мультиопераций при фиксированном ранге и произвольной размерности является теория Галуа. Далее следуем [6].

Определим тождество полуперестановочности для $f \in \mathcal{M}_A^{(n)}$ и $g \in \mathcal{M}_A^{(m)}$:

$$(f * (g * e_1^{nm}, \ldots, e_m^{nm}), \ldots, (g * e_{(n-1)m+1}^{nm}, \ldots, e_{nm}^{nm})) \subseteq$$

$$\subseteq (g * (f * e_1^{nm}, e_{m+1}^{nm}, \ldots, e_{(n-1)m+1}^{nm}), \ldots, (f * e_m^{nm}, e_{2m}^{nm}, \ldots, e_{nm}^{nm})).$$

Будем говорить, что f *стабильна относительно* g и g *нормальна относительно* f.

Пусть $g \in \mathcal{M}_A^{(m)}$ и $f \in \mathcal{O}_A^{(n)}$. Тогда

$$S^n(g) = \{f \mid f \in \mathcal{O}_A^{(n)} \text{ и } f \text{ стабильна относительно } g\} \text{ — } n\text{-}\textit{стабилизатор } g;$$

$$N^m(f) = \{g \mid g \in \mathcal{M}_A^{(m)} \text{ и } g \text{ нормальна относительно } f\} \text{ — } m\text{-}\textit{нормализатор } f.$$

Пусть $R \subseteq \mathcal{M}_A^{(m)}$ и $K \subseteq \mathcal{O}_A^{(n)}$. Тогда

$$S^n(R) = \bigcap_{g \in R} S^n(g) \text{ — } n\text{-}\textit{стабилизатор} \text{ множества мультиопераций } R;$$

$$N^m(K) = \bigcap_{f \in K} N^m(f) \text{ — } m\text{-}\textit{нормализатор} \text{ множества операций } K.$$

Теорема 3.
Пара соответствий S^n и N^m определяет связь Галуа между множествами V_k^n и W_k^m.

Рассмотрим подробнее вариант ранга $k = 2$.

Теорема 4.
1) Пара соответствий S^n и N^m при $4 \leq n \leq m+1$ является совершенной в V_2^n связью Галуа.
2) Пара соответствий S^n и N^m при $n \geq m+1$ является совершенной в W_2^m связью Галуа.

Для ранга 2 и $n \geq 4$ верно:

Следствие 1.
1) Для любого множества $K \subseteq \mathcal{O}_A^{(n)}$ выполняется $[K]_n = S^n(N^m(K))$ для $n \leq m+1$.
2) Для любого множества $R \subseteq \mathcal{M}_A^{(m)}$ выполняется $\langle R \rangle_m = N^m(S^n(R))$ для $n \geq m+1$.
3) Упорядоченные множества V_2^n и W_2^{n-1} антиизоморфны.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Menger K. The algebra of functions: past. prresent, future // Rend. Matem. 1961. 20 № 3–4. P. 409–430.

2. Трохименко В. С. О некоторых алгебрах Менгера отношений // Известия высших учебных заведений. Математика. 1978. № 2. С. 87—95.

3. Poschel R, Kaluzhnin L. A. Function and Relaction Algebras. — Berlin, 1979. 259 p.

4. Пинус А. Г. О фрагментах функциональных клонов // Алгебра и логика. 2017. Том 56 № 4. С. 477—485.

5. Перязев Н. А., Шаранхаев И. К. Алгебры мультиопераций // Algebra and Model Theory 11. Collection of hahers. — Novosibirsk: NSTU Publisher, 2007. P. 102–111.

6. Перязев Н. А. Алгебры n-местных операций и мультиопераций // XV Международная конференция «Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы и приложения», посвященная столетию со дня рождения доктора физико-математических наук, профессора Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова Коробова Николая Михайловича.: тезисы докладов. Международная конференция (Тула, 28–31 мая 2018 г.) — Тула, 2018. С. 113–116.

Algebraic codes are good

Patrick Solé (France, Saint-Denis)
University of Paris 8
e-mail: sole@enst.fr

We survey the algebraic structure [3], and asymptotic performance of the self-dual and LCD classes of quasi-cyclic [1], quasi-twisted [2], and dihedral codes over finite fields and finite rings. Of special interest is the case of low index: double circulant codes and four circulant codes [4]. We show that additive cyclic codes are good [5], and give an alternative proof that dihedral codes are good [1].

REFERENCES

1. Adel Alahmadi, Funda Özdemir, Patrick Solé, *On self-dual double circulant codes.* Des. Codes Cryptography **86(6):** (2018), 1257–1265 .
2. Adel Alahmadi, Cem Güneri, Buket Özkaya, Hatoon Shohaib, Patrick Solé, *On self-dual double negacirculant codes*, Discrete Applied Mathematics, **222:** (2017),205–212 .
3. Cem Güneri, Funda Özdemir, Patrick Solé, *On the additive cyclic structure of quasi-cyclic codes.* Discrete Mathematics **341(10):**,(2018), 2735–2741 .
4. Minjia Shi, Hongwei Zhu, Liqin Qian, Patrick Solé, *On Self-Dual Four Circulant Codes*, Int. J. Found. Comput. Sci. **29(7):**, (2018), 1143–1150.
5. Minjia Shi, Rongsheng Wu, Patrick Solé, *Asymptotically Good Additive Cyclic Codes Exist*, IEEE Communications Letters **22(10):** (2018), 1980–1983 .

УДК 511.3

К программе И. М. Виноградова[1]

В. Н. Чубариков (Россия, г. Москва)
МГУ имени М. В. Ломоносова
e-mail: chubarik2009@live.ru

To the program of I. M. Vinogradov

V. N. Chubarikov (Russia, Moscow)
Lomonosov Moscow State University
e-mail: chubarik2009@live.ru

Введение

Настоящую работу автор посвящает светлой памяти профессора Механико-математического факультета Московского университета Геннадия Ивановича Архипова (12.12.1945 – 14.03.2013). Он внёс существенный и принципиальный вклад в развитие программы И. М. Виноградова в 1971 г.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке МГУ имени М. В. Ломоносова, грант ведущих научных школ

Сначала приведем список важнейших научных результатов И. М. Виноградова.

$$\left|\sum_{n\le x}\left(\frac{n}{p}\right)\right| < \sqrt{p}\ln p$$

$$n_p < p^{1/(2\sqrt{e})}\ln^2 p$$

$$p_1+p_2+p_3 = 2N+1$$

$$n < G(n) < 2n(\ln n + O(1))$$

$$\{f(p)\}$$

$$p_1^n+\cdots+p_k^n = N$$

$$\pi(x) = \mathrm{li}(x) + O\left(xe^{-(\ln x)^{0.6}(\ln\ln x)^{-0.2}}\right)$$

§1. Программа И. М. Виноградова

В своей монографии "Метод тригонометрических сумм в теории чисел" (Труды Матем. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР, 1947, т.23) И. М. Виноградов писал, что "одною из важнейших для теории чисел проблем является установление различного рода закономерностей в распределении значений функции $f(x_1,\ldots,x_r)$ от одной или более переменных. При этом рассматриваются лишь те значения функции, которые отвечают целым точкам $(x_1,\ldots,x_r)$ r-мерного пространства, принадлежащим заданной совокупности Ω." Для решения этой проблемы он сформулировал программу исследований, которая включает в себя "три достаточно достаточно большие и весьма важные для теории чисел проблемы".

§2. Проблема 1 И. М. Виноградова

Проблема распределения значений показательной функции

$$f(x_1,\ldots,x_r) = e^{2\pi i F(x_1,\ldots,x_r)},$$

где $F(x_1,\ldots,x_r)$ — вещественная функция.

Наиболее существенным здесь является установление верхней границы модуля суммы

$$S = \sum_{\Omega} e^{2\pi i F(x_1,\ldots,x_r)}.$$

Детальному изучению эти суммы подверглись в случае, когда Ω представляет собой параллелепипед $Q_s \le x < Q_s + P_s, s = 1,2,\ldots,r$, а $F(x_1,\ldots,x_r)$ — многочлен вида

$$F(x_1,\ldots,x_r) = \sum_{t_1=0}^{n_1}\cdots\sum_{t_r=0}^{n_r}\alpha(t_1,\ldots,t_r)x_1^{t_1}\ldots x_r^{t_r},$$

где $\alpha(t_1,\ldots,t_r) \in \mathbf{R}$.

Полные рациональные тригонометрические суммы вида

$$\sum_{x_1=0}^{q-1}\cdots\sum_{x_r=0}^{q-1} e^{2\pi i\frac{\Phi(x_1,\ldots,x_r)}{q}},$$

где

$$\Phi(x_1,\dots,x_r)=\sum_{t_1=0}^{n}\cdots\sum_{t_r=0}^{n}a(t_1,\dots,t_r)x_1^{t_1}\dots x_r^{t_r},a(t_1,\dots,t_r)\in\mathbf{Z}$$

являются наиболее изученными.

К. Ф. Гаусс нашёл величину суммы вида

$$\sum_{x=0}^{q-1}e^{2\pi i\frac{x^2}{q}}=\frac{1+i^{-q}}{1+i^{-1}}\sqrt{q}$$

(сумма Гаусса).

Л. Морделл для простого q, а Л.-К. Хуа для общего случая при $(a_n,\dots,a_1,q)=1$ получили оценку вида

$$S=\sum_{x=0}^{q-1}e^{2\pi i\frac{\Phi(x)}{q}}\ll q^{1-\nu},\nu=\frac{1}{n},$$

где постоянная в знаке $\ll$ зависит только от n.

Для кратных полных рациональных тригонометрических сумм докладчик нашёл оценку

$$\sum_{x_1=0}^{q-1}\cdots\sum_{x_r=0}^{q-1}e^{2\pi i\frac{\Phi(x_1,\dots,x_r)}{q}}\ll q^{r-\nu}(\ln q)^{r-1},$$

где постоянная в знаке $\ll$ зависит только от n,r.

Две последние оценки не могут быть существенно улучшены.

Более трудной задачей является оценка сумм Г. Вейля вида

$$S=\sum_{x=Q}^{Q+P-1}e^{2\pi iF(x)},F(x)=\sum_{m=1}^{n}\alpha_m x^m,\alpha_m\in\mathbf{R},P>1.$$

Оценки таких сумм зависят от приближения коэффициентов многочлена $F(x)$ рациональными дробями. В 1934 г. И. М. Виноградов разработал мощный метод оценок сумм Г. Вейля.

Все точки $(\alpha_n,\dots,\alpha_2,\alpha_1)$ единичного куба $E:0\le\alpha_m<1,m=1,\dots,n$, разбиваются на два класса. К первому классу относятся окрестности точек с “малыми знаменателями”, все остальные точки куба E принадлежат второму классу. Для точек первого класса сумма Г. Вейля асимптотически с большой точностью приближается произведением полной рациональной тригонометрической суммы и тригонометрического интеграла. Для точек второго класса справедлива единообразна оценка

$$S\ll P^{1-\rho},\rho=\frac{\gamma}{n^2\ln n},$$

где $\gamma>0$ — абсолютная постоянная, а константы в знаке $\ll$ зависят только от n.

Удачные варианты метода И. М. Виноградова оценок сумм Г. Вейля были даны ван дер Корпутом (1936 г.), Ю. В. Линником (1942 г.), А. А. Карацубой (1963 г.). В основе оценок сумм лежит теорема И. М. Виноградова о среднем.

Теоремы о среднем для сумм произвольной кратности впервые были доказаны Г. И. Архиповым (1971 г.) (дальнейшее развитие: Г. И. Архипов, А. А. Карацуба и автор.)

Теорема *Пусть $\tau\geqslant 0$ — целое число и $n_1,\dots,n_r$ — натуральные числа. Тогда для $k\geqslant m\tau$ интеграл $J=J(\bar{P};k,\bar{n})$ удовлетворяет неравенству*

$$J=J(\bar{P};k,\bar{n})\leqslant k^{2m\tau}\kappa^{4\kappa^2\Delta(\tau)}2^{8m\kappa\tau}(P_1\dots P_r)^{2k}P^{-\kappa\Delta(\tau)},$$

где $\kappa = n_1\nu_1 + \cdots + n_r\nu_r$, $\gamma\kappa = 1$, $m = (n_1+1)\ldots(n_r+1)$,

$$\Delta(\tau) = 0.5m(1-(1-\gamma)^\tau), \quad P = (P_1^{n_1}\ldots P_r^{n_r})^\gamma.$$

Здесь $\nu_1,\ldots,\nu_r$ *— натуральные числа такие, что*

$$-1 < \frac{\log P_s}{\log P_1} - \nu_s \leqslant 0,\ s = 1,\ldots,r.$$

Отсюда следуют оценки кратных сумм Г. Вейля, подобные оценкам И. М. Виноградова.

Важным и интересным случаем проблемы 1 И. М. Виноградова являются суммы по простым числам с многочленом в экспоненте вида

$$\sum_{p\leq N} e^{2\pi i F(p)},$$

где p пробегает последовательность всех простых чисел.

Нетривиальные оценки таких сумм впервые были получены И. М. Виноградовым; по силе они такие же, как и по сплошному промежутку. Докладчик получил подобные оценки для сумм произвольной кратности

$$\sum_{p_1\leq N_1}\cdots\sum_{p_r\leq N_r} e^{2\pi i F(p_1,\ldots,p_r)},$$

где $p_1,\ldots,p_r$ пробегают простые числа.

§3. Проблема 2 И. М. Виноградова

В этой проблеме изучается распределение значений дробной части $\{F(x_1,\ldots,x_r)\}$ вещественной функции $F(x_1,\ldots,x_r)$, ког да точки $(x_1,\ldots,x_r)$ принадлежат конечному множеству Ω. Сначала рассматривается задача о точности приближения $\Delta = \Delta(F;\Omega;\alpha)$ функцией $\{F(x_1,\ldots,x_r)\}$ к числу α, т.е. вывод неравенства

$$|\{F(x_1,\ldots,x_r)\} - \alpha| \leq \Delta.$$

Часто можно установить равномерность распределения на промежутке $[0,1)$ значений дробной части функции $\{F(x_1,\ldots,x_r)\}$ на множестве Ω. Г. Вейль доказал, что для многочлена $F(x) = \alpha_n x^n + \cdots + \alpha_1 x$, у которого хотя бы один из коэффициентов иррационален, для любых $0 \leq \alpha < \beta \leq 1$ количество $N_P(\alpha,\beta)$ значений дробных частей $\{F(x)\}$, попадающих на промежуток $[\alpha\beta)$, удовлетворяет предельному соотношению

$$\lim_{P\to+\infty}\frac{N_P(\alpha,\beta)}{P} = \beta - \alpha.$$

Особый интерес представляет задача о равномерном распределении последовательности дробных частей значений многочлена $\{F(p)\}$, где p пробегает последовательность простых чисел, и хотя бы один из коэффициентов $F(x)$ является иррациональным числом. В этом случае $\{F(p)\}$ равномерно распределена по модулю единица.

И. М. Виноградов получил более точные результаты для отклонений от равномерного распределения, подобные оценкам тригонометрических сумм от многочленов с простыми числами.

Для дробных частей значений многочленов $\{F(p_1,\ldots,p_r)\}$ подобные результаты получены докладчиком.

Распределение значений интересного класса очень коротких сумм Гаусса и их обобщений исследовали автор и его ученики.

§4. Проблема 3 И. М. Виноградова

Пусть $I(N)$ обозначает число решений диофантова уравнения вида

$$f(x_1, \ldots, x_r) = N,$$

где функция $f(x_1, \ldots, x_r)$ принимает целые значения для наборов $(x_1, \ldots, x_r)$ из $\Omega \in \mathbf{R}$.

Здесь возникает несколько вопросов. Первый из них — о разрешимости уравнения, т.е. о справедливости неравенства $I(N) > 0$; другой вопрос — об установлении асимптотической формулы для $I(N)$; иногда удаётся найти точную формулу для $I(N)$.

Г. Харди ввёл в рассмотрение символ $G(n)$, обозначающий целое число со следующими свойствами:

а) существует целое число $c > 0$ такое, что $\forall N \geq c$ уравнение $x_1^n + \cdots + x_r^n = N$ разрешимо для $r = G(n)$;

б) не существует $c_1 > 0$ такого, что $\forall N \geq c_1$ уравнение $x_1^n + \cdots + x_r^n = N$ разрешимо при $r < G(n)$.

И. М. Виноградов (1958 г.) доказал, что

$$n + 1 \leq G(n) \leq 2n \ln n(1 + o(1)).$$

Система диофантовых уравнений вида

$$\begin{cases} x_1 + \cdots + x_k & = N_1, \\ \ldots \quad \ldots & \quad \ldots \\ x_1^n + \cdots + x_k^n & = N_n, \end{cases}$$

называется *системой Гильберта–Камке* (Г-К). Здесь $N_1, \ldots, N_n$ — натуральные числа, и неизвестные $x_1, \ldots, x_k$ принимают натуральные значения.

Г. И. Архипов (1980) нашёл необходимые арифметические условия разрешимости системы Г-К в следующем виде.

Система линейных уравнений

$$\begin{cases} t_1 \cdot 1 + \cdots + t_n \cdot n & = N_1, \\ \ldots \quad \ldots & \quad \ldots \\ t_1 \cdot 1^n + \cdots + t_n \cdot n^n & = N_n, \end{cases}$$

имеет решение в целых числах $t_1, \ldots, t_n$.

Далее будем рассматривать наборы натуральных чисел $\{N_1, \ldots, N_n\}$, удовлетворяющие условиям

$$N_m = N_1^m(\gamma_m + O(N_1^{-\varepsilon})),$$

где $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ — фиксированные положительные числа и $\varepsilon > 0$ — сколь угодно малая постоянная.

Г. И. Архипов (1980) нашёл также необходимые условия вещественной разрешимости системы Г-К. Они имеют вид.

Пусть набор $\{N_1, \ldots, N_n\}$ *принадлежит* $(\gamma_1, \ldots, \gamma_n, \varepsilon)$*-конусу и пусть существует число* $P_0 = P_0(\gamma_1, \ldots, \gamma_n, \varepsilon)$ *такое, что для любого натурального* $N_1 \geq P_0$ *система уравнений*

$$\begin{cases} x_1 + \cdots + x_k & = \gamma_1, \\ \ldots \quad \ldots & \quad \ldots \\ x_1^n + \cdots + x_k^n & = \gamma_n, \end{cases}$$

имеет решение в вещественных числах $0 \leq x_1, \ldots, x_k \leq 1$ *и матрица Якоби вида*

$$\|r x_s^{r-1}\| \quad (1 \leq r \leq n, 1 \leq s \leq k)$$

решения $(x_1, \ldots, x_k)$ *имеет максимальный ранг.*

Система диофантовых уравнений Г-К разрешима тогда и только тогда, когда выполняются одновременно арифметические условия разрешимости и условия вещественной разрешимости. Пусть $G_1(n)$ обозначает наименьшее число переменных k, для которого эти необходимые и достаточные условия выполняются.

Г. И. Архипов (1980) доказал, что

$$2^n - 1 < G_1(n) \leq 3n^3 2^n - n.$$

Д. А. Митькин (1986) уточнил этот результат

$$G_1(n) \sim 2^n (n \to \infty).$$

Проблема Гильберта – Камке в простых числах была решена докладчиком (1984 г.).

——————————————————————————————

Transformation and unimodality

Yaokun Wu (China, Shanghai)
Shanghai Jiao Tong University
e-mail: ykwu@sjtu.edu.cn

Abstract: Given a matroid lattice L of finite rank n and a semigroup acting on it, we call two elements of L of equal rank equivalent if each of them can be transformed to the other by the semigroup. We propose to look at the sequence $c_0, \ldots, c_n$, where c_i is the number of equivalence classes of rank i in L. Is this sequence unimodal? We analyze some examples related to this question. This is joint work with Yinfeng Zhu.

——————————————————————————————

Секция 1. Группы

УДК 512.54

О проблеме вхождения в группах β_4 [1]

В. Н. Безверхний (Россия, г. Москва)
Академия гражданской защиты МЧС России
e-mail: vnbezv@rambler.ru
Н. Б. Безверхняя (Россия, г. Москва)
Академия гражданской защиты МЧС России
e-mail: vnbezv@rambler.ru

On the problem of occurrence in β_4 groups

V. N. Bezverkhnii (Russia, Moscow)
Academy of Civil Defence EMERCOM of Russia
e-mail: vnbezv@rambler.ru
N. B. Bezverkhnyaya (Russia, Tula)
Academy of Civil Defence EMERCOM of Russia
e-mail: vnbezv@rambler.com

Пусть $S = \{s_1, s_2, \ldots, s_n\}$ — конечное множество и $M = (m_{st})$, $s, t \in S$ — симметрическая матрица Коксетера с индексами из множества S, $m_{st} = m_{ts}$, $m_{st} \in \{2, 3, \ldots, \infty\}$ для всех $s, t \in S$, $s \neq t$ и $m_{ss} = 1$. Свяжем с матрицей Коксетера конечный граф Γ, между вершинами которого и множеством S установлено взаимно однозначное соответствие, причем, если две вершины s, t графа Γ соединены ребром, то данному ребру соответствует элемент $m_{st} \in M$, если вершины s, t не связаны ребром, то данной паре соответствует $m_{st} = \infty$. Данный граф называется графом Коксетера. С графом Γ связана группа Артина G_r с множеством образующих S и системой определяющих соотношений $\langle st\rangle^{m_{st}} = \langle ts\rangle^{m_{ts}}$, при $s \neq t$, $m_{st} \neq \infty$, где $\langle st\rangle^{m_{st}} = sts\ldots$ - слово из чередующихся образующих s, t длины m_{st}. Копредставление группы G будет иметь вид:

$$G_r = \langle s_1, s_2, \ldots, s_n; \langle st\rangle^{m_{st}} = \langle ts\rangle^{m_{ts}}, s, t \in S, m_{st} \neq \infty\rangle \tag{1}$$

Рассмотрим в группе G_r нормальную подгруппу, порожденную образующим $s_i^2 = 1$, $i = \overline{1, n}$, обозначим ее $N = \langle\{s_i^2\}, i = \overline{1, n}\rangle^{G_r}$, фактор-группа которой, $\overline{G}_r = G_r/N$, есть группа Коксетера, соответствующая группе G_r с копредставлением:

$$\overline{G}_r = \langle s_1, s_2, \ldots, s_n; \langle st\rangle^{m_{st}} = \langle ts\rangle^{m_{ts}}, s, t \in S, s \neq t, s_i^2 = 1, i = \overline{1, n}\rangle \tag{2}$$

Если группа $\overline{G}_r$ конечная, то группа Артина называется группой Артина конечного типа. В данном классе групп содержатся группы кос β_{n+1}, определенные Э. Артиным в 1925 г. и доказавшего в них проблему равенства слов.

А. А. Марковым в [1] дано новое доказательство проблемы равенства слов в β_{n+1}. Проблема сопряженности слов в группах β_{n+1} была решена независимо Г. С. Маканиным и Ф. А. Гарсайдом. Э. Брискорном и К. Сайто были решены проблемы равенства и сопряженности слов в группах Артина конечного типа [2].

[1]Исследование выполнено по гранту РФФИ №19-41-710002_р_а

Неприводимыми группами Артина называются группы, множество образующих которых X нельзя разбить на два подмножества X_1 , X_2, таких, что $X_1 \cap X_2 = \varnothing$ и $X = X_1 \cup X_2$, где образующие из одного подмножества коммутируют с образующими другого.

Известно, что это будут группы:

$$
\begin{aligned}
A_n \quad \equiv \quad & \beta_{n+1}, n \geqslant 1, B_n, n \geqslant 2, D_n, n \geqslant 4, \\
& E_6, E_7, E_8, F_4, H_3, H_4, G_2, J_2(p), \qquad p = 5 \text{ или } p \geqslant 7
\end{aligned}
\tag{3}
$$

Всякая группа Артина конечного типа является прямым произведением конечного числа неприводимых групп Артина.

Т. А. Маканиной было доказано, что в группах кос $\beta_{n+1}(A_n)$ при $n > 3$ проблема вхождения неразрешима [3].

Г. С. Маканиным в "Коуровской тетради" была поставлена проблема "выяснить разрешимость проблемы вхождения в группах $\beta_4(A_3)$" [4].

В неприводимых группах Артина конечного типа:

$$
B_n, n \geqslant 4, D_n, n \geqslant 4, F_4, H_4, E_6, E_7, E_8 \tag{4}
$$

было показано, что проблема вхождения неразрешима [5].

Основным результатом данной статьи является исследование проблемы вхождения в группе β_4.

Рассмотрим основные понятия, которые будут использоваться при решении указанной проблемы.

Определение 1. *Будем говорить, что в группе G разрешима проблема вхождения, если существует алгоритм, позволяющий для любого элемента $w \in G$ и любой конечно порожденной подгруппы $H < G$ установить, принадлежит ли w подгруппе H.*

Определение 2. *Будем говорить, что в группе G разрешима проблема пересечения конечно порожденных подгрупп, если существует алгоритм, позволяющий для любых конечно порожденных подгрупп H_1, H_2 из G выписать образующие их пересечения.*

Определение 3. *Будем говорить, что в группе G разрешима проблема пересечения смежных классов двух конечно порожденных подгрупп, если существует алгоритм, позволяющий для любых конечно порожденных подгрупп H_1, H_2 из G и произвольного элемента $w \in G$ установить, пусто или не пусто пересечение $wH_1 \cap H_2$.*

Теорема 1. *[6],[7] Пусть $G = G_1 * G_2$ - свободное произведение групп G_1, G_2, в каждой из которых пересечение конечно порожденных подгрупп есть конечно порожденная подгруппа. Тогда, если:*

(1) существует алгоритм, выписывающий для любых двух конечно порожденных подгрупп группы $G_i, i = 1, 2$, образующие их пересечения;

(2) существует алгоритм, позволяющий для любого $w \in G_i, i = 1, 2$, и любых двух конечно порожденных групп H_1, H_2 из G_i установить, пусто или не пусто множество $wH_1 \cap H_2$;

то в группе G разрешимы проблемы (1) и (2).

Теорема 2. *[8] В группе G, являющейся свободным произведением конечно порожденных свободных групп F_m, F_n, объединенных по циклическим подгруппам*

$$
G = \langle F_m * F_n; w = v \rangle, \qquad w \in F_m, v \in F_n \tag{5}
$$

разрешима проблема вхождения.

Основным понятием, используемым при решении проблемы вхождения в группе β_4, является понятие специального множества слов в свободном произведении групп A_1, A_2 с объединением.

Пусть
$$G = \langle A_1 * A_2; relA_1, relA_2, \phi(U_1) = U_2\rangle \tag{6}$$
свободное произведение групп A_1, A_2, объединенных по изоморфным подгруппам U_1, U_2, где $U_1 < A_1, U_2 < A_2$ с помощью фиксированного конструктивного изоморфизма ϕ.

Известно, что каждый элемент $g \in G$ можно единственным образом представить в виде
$$g = l_{1g}\, l_{2g}\, \ldots\, l_{ng}\, K_g\, r_{ng}\, \ldots\, r_{1g}, \tag{7}$$
где r_{ig}, l_{ig}^{-1} - представители правых смежных классов группы A_1 по U_1 и A_2 по U_2, причем, r_{ig}, r_{i+1g} (аналогично l_ig, l_{i+1g}) принадлежат разным сомножителям группы G, K_g - ядро слова g. Если K_g не принадлежит объединяемой подгруппе, то l_{ng} и r_{ng} принадлежат одному сомножителю группы G; если K_g принадлежит объединяемой подгруппе, то l_{ng} и r_{ng} принадлежат разным сомножителям. В первом случае $l(g) = 2n + 1$ - обозначает слоговую длину g; во втором случае -
$$g = l_{1g}\, \ldots\, l_{ng}\, h\, r_{ng}\, \ldots\, r_{1g}, \tag{8}$$
где $h = K_g$, $l(g) = 2n$. Если в слове (7) $l_{1g} \ldots l_{ng} = (r_{ng} \ldots r_{1g})^{-1}$, то слово
$$g = l_{1g}\, \ldots\, l_{ng}\, K_g\, l_{ng}^{-1}\, \ldots\, l_{1g}^{-1}, \tag{9}$$
называется трансформой. Слова вида (7), (8) называются нетрансформами; причем слово вида (7) нетрансформой нечетной длины, а слово вида (8) - нетрансформой четной длины. Подслово $l_{1g} \ldots l_{ng}$ называется левой половиной, $r_{ng} \ldots r_{1g}$ - правой половиной слов (7), (8).

Рассмотрим конечное множество $W = \{w_i \mid i = \overline{1, n}\}$ слов группы G, каждое из которых приведено к виду (7), (8) или (9).

Определение 4. *Левая (правая) половина слова $w_i = l_{1w_i}\, \ldots\, l_{mw_i}\, K_{w_i}\, r_{mw_i}\, \ldots\, r_{1w_i}$ называется изолированной в множестве W, если не существует слова w_j^{ϵ}, $\epsilon = \pm 1$, из множества $\{W \backslash \{w_i\}\}$, у которого можно выделить $l_{1w_i}\, \ldots\, l_{mw_i}$ ($r_{mw_i}\, \ldots\, r_{1w_i}$) в качестве начального (конечного) подслова.*

Определение 5. *[8]. Назовем конечное множество слов $W = \{w_i \mid i = \overline{1, n}\}$ группы G специальным, если оно удовлетворяет условиям:*

1) левые половины нетрансформ из W изолированы в нем; у нетрансформ четной длины изолированы левая и правая половины;

2) длину нетрансформы $w_i \in W$ нельзя уменьшить, умножая на слова из подгруппы, порожденной множеством $W \backslash \{w_i\}$; длину произвольного слова $w_i \in W$ нельзя уменьшить, умножая на слово v, $l(v) < l(w_i)$, принадлежащее подгруппе $\langle W\rangle$.

3) если $w_0^{\epsilon} = l_{1w_0}\, \ldots\, l_{sw_0}\, K_{w_0}\, r_{sw_0}\, \ldots\, r_{jw_0}\, \ldots\, r_{1w_0}$, $\epsilon = \pm 1$, $j < s$, w_0 нетрансформа из W и подгруппа $B = \langle W\rangle \cap r_{1w_0}^{-1}\, \ldots\, r_{jw_0}^{-1}\, D\, r_{jw_0}\, \ldots\, r_{1w_0}$, где
$$D = \begin{cases} A_1, & \text{если}\, r_{jw_0} \in A_2 \\ A_2, & \text{если}\, r_{jw_0} \in A_1 \end{cases}$$
не является единичной, то $l(w_0\ u\ w_{\alpha}^{-1}) > l(w_0)$ для любого $u \in B$ и любой нетрансформы $w_{\alpha} \in \{W \backslash \{w_0\}\}$, правая половина которой оканчивается подсловом $r_{jw_0}\, \ldots\, r_{1w_0}$;

4) для слов $w_i^{\epsilon}, w_j^{\eta}, \epsilon = \pm 1, \eta = \pm 1$,
$$w_i^{\epsilon} = l_{1w_i}\, \ldots\, l_{sw_i}\, l_{s+1w_i}\, \ldots\, K_{w_i}\, r_{pw_i}\, \ldots\, r_{1w_i},$$
$$w_j^{\eta} = l_{1w_j}\, \ldots\, l_{sw_j}\, l_{s+1w_j}\, \ldots\, l_{mw_j}\, K_{w_j}\, r_{mw_j}\, \ldots\, r_{1w_s},$$

где $w_i, w_j \in W$, $s \leqslant m \leqslant p$, не существует слова $g \neq 1$, слоговой длины $l(g) < 2s$, $g \in \langle W \rangle$, такого, что если $l_{1w_i} \ldots l_{sw_i} \neq l_{1w_j} \ldots l_{sw_j}$, то

$$gw_i = l_{1w_j} \ldots l_{sw_j} \, l'_{s+1w_i} \ldots l'_{pw_i} \, K'_{w_i} \, r_{pw_i} \ldots r_{1w_i}.$$

Пусть $W = \{w_i | i = \overline{1, N}\}$ - специальное множество слов. Разобьем его на подмножества нетрансформ M_0 и множества M_i, $i = 1, k$, трансформ с одинаковыми крыльями, с ядрами содержащихся в одной подгруппе, сопряженной некоторой подгруппе из A_1 или из A_2. Каждое из M_i подмножеств порождает подгруппу, которую для краткости будем обозначать (M_i) вместо обычно принятого $gp(M_i)$, $i = 0, 1, 2, \ldots, k$:

$$(M_i) = r_{1i}^{-1} \ldots r_{si}^{-1} \, A'_i \, r_{si} \ldots r_{1i},$$

здесь A'_i - подгруппа из A_1 или из A_2, порожденная ядрами всех трансформ множества M_i. Подгруппы, порожденные трансформами, упорядочим по длинам их трансформ. Упорядоченный ряд будем обозначать:

$$(M_1) \leqslant (M_2) \leqslant \ldots \leqslant (M_k) \tag{10}$$

Лемма 1. *[8]. Ряд (10) можно преобразовать в ряд*

$$(M'_1) \leqslant (M'_2) \leqslant \ldots \leqslant (M'_k) \tag{11}$$

со следующими свойствами:

1) $qp(M_0, (M_1), \ldots, (M_k)) = qp(M_0, (M'_1), \ldots, (M'_{k'}))$;

2) если подгруппа $(M'_{j'}) = r_{1x}^{-1} \ldots r_{sx}^{-1} \, A'_{j'} \, r_{sx} \ldots r_{1x}$, $1 \leqslant j' \leqslant k'$, ряда (11) содержит трансформу $u = r_{1x}^{-1} \ldots r_{sx}^{-1} \, h \, r_{sx} \ldots r_{1x}$, где h принадлежит объединяемой подгруппе, то среди подгрупп ряда (11) имеется подгруппа

$$(M'_i) = r_{1x}^{-1} \ldots r_{s-1x}^{-1} \, A'_i \, r_{s-1x} \ldots r_{1x},$$

содержащая u;

3) если для некоторой трансформы $u = r_{1x}^{-1} \ldots r_{sx}^{-1} \, K \, r_{sx} \ldots r_{1x}$, принадлежащей подгруппе $(M'_j) = r_{1x}^{-1} \ldots r_{sx}^{-1} \, A'_j \, r_{sx} \ldots r_{1x}$ и нетрансформы $y = l_{1y} \ldots l_{s_1 y} \, K_y \, r_{s_1 y} \ldots r_{1y}$, $s_1 \geqslant s$, (левая половина y изолирована) из множества M_0, выполняется соотношение $l(y^{-1}uy) \leqslant l(y)$, то существует подгруппа (M'_p) ряда (11), содержащая трансформу $y^{-1}uy$;
если $l(yuy^{-1}) < l(y)$, то существует подгруппа (M'_p) ряда (11), содержащая трансформу yuy^{-1};

4) если

$$(M'_j) = r_{1x}^{-1} \ldots r_{s_1x}^{-1} \, A'_j \, r_{s_1x} \ldots r_{1x}$$
$$(M'_q) = r_{1x}^{-1} \ldots r_{s_1x}^{-1} \, r_{s_1+1,y}^{-1} \, A'_q \, r_{s_1+1,y} \, r_{s_1x} \ldots r_{1x}$$

подгруппы ряда (11) и подгруппа (M'_j) содержит трансформу $u = r_{1x}^{-1} \ldots r_{s_1x}^{-1} \, h \, r_{s_1x} \ldots r_{1x}$ либо трансформу $u' = r_{1x}^{-1} \ldots r_{s_1x}^{-1} \, K \, r_{s_1x} \ldots r_{1x}$, где $K = r_{s_1+1,y}^{-1} \, h \, r_{s_1+1,y}$, то подгруппа (M'_q) содержит трансформы u и u'.

5) если $(M'_p) = r_{1x}^{-1} \ldots r_{s_1x}^{-1} \, A'_p \, r_{s_1x} \ldots r_{1x}$ подгруппа ряда (11) и

$$y = l_{1y} \ldots l_{s_2y} \, K \, r_{s_2y} \ldots r_{s_1+1,y} r_{s_1x} \ldots r_{1x},$$

элемент из специального множества $W \cup W^{-1}$, подслово $r_{1x}^{-1} \ldots r_{s_1x}^{-1} \, r_{s_1+1,y}^{-1}$ не является изолированной левой половиной некоторой нетрансформы $w^{\eta}, \eta = \pm 1$, если подгруппа (M'_p), содержит трансформу $r_{1x}^{-1} \ldots r_{s_1x}^{-1} \, h \, r_{s_1x} \ldots r_{1x}$, либо трансформу $r_{1x}^{-1} \ldots r_{s_1}^{-1} \, K \, r_{s_1x} \ldots r_{1x}$, где $K = r_{s_1+1,y}^{-1} \, h \, r_{s_1+1,y}$, то в ряде (11) содержится подгруппа

$$(M'_j) = r_{1x}^{-1} \ldots r_{s_1x}^{-1} \, r_{s_1+1\,y}^{-1} \, A_j \, r_{s_1+1\,y} \ldots r_{1x},$$

содержащая эти трансформы.

Лемма 2. *[8]. Подгруппа (M_0), порожденная нетрансформами специального множества свободна и не содержит трансформ.*

Лемма 3. *[8]. Пусть $w_j = l_{1j}^{-1} \dots l_{kj}^{-1} l_{k+1j} \dots l_{sj} K_j r_{sj} \dots r_{1j}$ слово из специального множества W, где $v_j^{-1} = l_{1j}^{-1} \dots l_{kj}^{-1}$ не изолировано в специальном множестве W, тогда если $v^{-1}Dv \cap qp(M_0, S) \neq E$ (E - единичная подгруппа), где*

$$D = \begin{cases} A_1, & \text{если}\, l_{kj} \in A_2 \\ A_2, & \text{если}\, l_{kj} \in A_1 \end{cases}$$

то существует подгруппа $(M_i) = v_j^{-1} A'_j v_j$, принадлежащая ряду (11); $qp(M_0, S)$ - подгруппа порожденная множеством M_0 и подгруппами (M_i), $i = 1, 2, \dots, k$, ряда (11).

Определение 6. *[8]. Произведение $u_1 u_2 \dots u_k$ назовём словом подгруппы $qp(M_0, S)$ группы G, если: 1. $u_i \neq 1$ для любого $i = 1, 2, \dots, k$;*

2. $u_i \in \{M_0 \cup M_0^{-1}\}$, либо принадлежит некоторой подгруппе ряда (11) для любого $i = 1, 2, \dots, k$;

3. $u_i \neq u_{i+1}^{-1}$ для любого $i = 1, 2, \dots, k-1$;

4. u_i, u_{i+1} не содержатся в одной подгруппе ряда (11) для любого $i = 1, 2, \dots, k-1$;

5. в произведении $u_1 u_2 \dots u_k$ не содержится произведение $u_i u_{i+1} u_{i+2}$, для которого выполняются условия: $u_i = u_{i+2}^{-1}$, $u_i \in \{M_0 \cup M_0^{-1}\}$, $u_{i+1} \in (M_j)$, $u_i u_{i+1} u_{i+2} \in (M_s)$ для любого $i = 1, 2, \dots, k-2$; $(M_j), (M_s)$ - подгруппы ряда (11).

Сомножители u_i назовём u-символами.

Определение 7. *[8]. Будем говорить, что между словами v_1, v_2 группы G имеет место касание первого, второго или третьего рода, если длина произведения $v_1 v_2$ больше, равна или меньше максимальной из длин $l(v_1)$, $l(v_2)$.*

Определение 8. *[8]. Слово $u_1 u_2 \dots u_k$ подгруппы $qp(M_0, S)$ является простым, если $l(u_1 \dots u_k) = max\{l(u_1), \dots, l(u_k)\}$.*

В [8] доказывается, что всякое слово подгруппы $qp(M_0, S)$ может быть представлено в виде произведения простых слов, между которыми имеет место касание 1-го рода, а также, если в слове $u_1 u_2 \dots u_k \in qp(M_0, S)$ выполнить сокращения в группе G, то сокращение не затронет, по крайней мере, левую половину u_1.

Теорема 3. *[8], [9]. Пусть группа $G\langle A_1 * A_2; rel\, A_1, rel\, A_2, \phi(U_i) = U_2\rangle$, свободное произведение групп A_1, A_2, объединенных по изоморфным подгруппам U_1, U_2, где $U_1 < A_1$, $U_2 < A_2$, с помощью фиксированного конструктивного изоморфизма ϕ, $\phi(U_1) = U_2$, $rel\, A_i$ определяющие соотношения A_i, $i = 1, 2$. Тогда, если подгруппа U_i , $i = 1, 2$, обладает свойством максимальности в сомножителе A_i, $i = 1, 2$, и*

1) в сомножителях A_i разрешима проблема вхождения;

2) существует алгоритм, позволяющий для любого слова $w \in A_i$, $i = 1, 2$, и любой конечно порожденной подгруппы $H < A_i$ определить пусто или не пусто пересечение $wH \cap U_i$;

3) существует алгоритм, выписывающий образующие пересечения любой конечно порожденной подгруппы $H < A_i$ с подгруппой U_i; то в группе G разрешима проблема вхождения и существует алгоритм, преобразующий любое конечное множество W группы G в специальное множество, порождающее подгруппу $\langle W\rangle$.

Теорема 4. **Основная теорема.** *В группе*

$$\beta_4 = \langle \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3;\ \sigma_1\sigma_2\sigma_1 = \sigma_2\sigma_1\sigma_2,\ \sigma_2\sigma_3\sigma_2 = \sigma_3\sigma_2\sigma_3,\ \sigma_1\sigma_3 = \sigma_3\sigma_1\rangle \tag{12}$$

разрешима проблема вхождения.

Теорема 5. *В группе*

$$G_1 = \langle \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3;\ \sigma_1\sigma_2\sigma_1 = \sigma_2\sigma_1\sigma_2,\ \sigma_2\sigma_3\sigma_2 = \sigma_3\sigma_2\sigma_3 \rangle \tag{13}$$

разрешима проблема вхождения.

Лемма 4. *В группе Артина $G_{ab} = \langle a, b;\ \langle ab \rangle^{m_{ab}} = \langle ba \rangle^{m_{ba}} \rangle$, где $m_{ab} = 2k+1$ разрешимы:*
1) проблема вхождения;
2) проблема пересечения любой конечно порожденной подгруппы $H < G_{ab}$ с циклической подгруппой $\langle w \rangle < G_{ab}$;
3) существует алгоритм, позволяющий для любого слова $v \in G_{ab}$, любой конечно порожденной подгруппы $H < G_{ab}$ и любой циклической подгруппы $\langle w \rangle < G_{ab}$ установить пусто или не пусто пересечение $vH \cap \langle w \rangle$.

Теорема 6. *В группе*

$$G_0 = \langle \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3,\ \widetilde{\sigma_1}, \widetilde{\sigma_3};\quad \sigma_1\sigma_2\sigma_1 = \sigma_2\sigma_1\sigma_2,\quad \sigma_2\sigma_3\sigma_2 = \sigma_3\sigma_2\sigma_3,\quad \widetilde{\sigma_1}\widetilde{\sigma_3} = \widetilde{\sigma_3}\widetilde{\sigma_1} \rangle \tag{14}$$

разрешима проблема вхождения.

Рассмотрим группу G_0^*, являющуюся HNN-расширением группы G_0 с помощью изоморфных подгрупп $\langle \sigma_3 \rangle, \langle \widetilde{\sigma_3} \rangle$, где группа G_0 имеет копредставление:

$$G_0 = \langle \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3,\ \widetilde{\sigma_1}, \widetilde{\sigma_3};\quad \sigma_1\sigma_2\sigma_1 = \sigma_2\sigma_1\sigma_2,\quad \sigma_2\sigma_3\sigma_2 = \sigma_3\sigma_2\sigma_3,\quad \widetilde{\sigma_1}\widetilde{\sigma_3} = \widetilde{\sigma_3}\widetilde{\sigma_1}\quad \sigma_1 = \widetilde{\sigma_1} \rangle \tag{15}$$

группа G_0^* имеет копредставление

$$G_0^* = \langle G_0, t;\ relG_0, \sigma_3 = t^{-1}\widetilde{\sigma_3}t \rangle \tag{16}$$

Теорема 7. *В группе G_0^* разрешима проблема вхождения.*

Доказательство данной теоремы проводится по той же схеме, что и доказательство теоремы 5, непосредственно используя следующую теорему.

Теорема 8 (12). *. Пусть группа $G^* = \langle G, t;\ relG, t^{-1}U_1t = \phi(U_1) \rangle$ HNN-расширение группы G с помощью ассоциированных подгрупп $U_i,\ i = 1, 2\ U_i < G$, и фиксированного конструктивного изоморфизма $\phi,\ \phi : U_1 \to U_2$. Тогда, если подгруппы U_1, U_2 обладают свойством максимальности и в группе G разрешимы:*
1. проблема вхождения;
2. проблема пересечения произвольной конечной порожденной подгруппы $H,\ H < G$ с каждой из подгрупп $U_i,\ i = 1, 2$;
3. разрешима проблема пересечения произвольного смежного класса vH, где v - произвольный элемент из G, H - произвольная конечно порожденная подгруппа G, с каждой из подгрупп $U_i,\ i = 1, 2$.
Тогда в группе G^* разрешима проблема вхождения.

Из теоремы 5 следует, что в группе G_0 разрешима проблема вхождения.

Теорема 9. *(основная теорема). В группе*

$$\beta_4 = \langle \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3;\ \sigma_1\sigma_2\sigma_1 = \sigma_2\sigma_1\sigma_2,\ \sigma_2\sigma_3\sigma_2 = \sigma_3\sigma_2\sigma_3,\ \sigma_1\sigma_3 = \sigma_3\sigma_1 \rangle \tag{17}$$

разрешима проблема вхождения.

Результаты были доложены на семинаре по теории групп в МГУ им. М.В. Ломоносова под руководством профессора А. Ю. Ольшанского.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Марков А. А. Основы алгебраической теории кос // Тр. МИАН, Москва АН СССР, 1945, т. 6.
2. Брискорн Э., Сайти К. Группы Артина и группы Коксетера // Математика. 1974, т. 18, №6. С. 58–79.
3. Маканина Т. А. Проблема вхождения для групп кос β_{n+1} при $n+1 \geqslant 5$ // Математические заметки, 1981. Т. 29, №1 С. 31–33.
4. Коуровская тетрадь. Нерешенные вопросы теории групп. 13-е изд. Новосибирск 1995 г.
5. Безверхний В. Н. Неразрешимость проблемы вхождения в группах Артина конечного типа // Сиб. мат. жур. TXXVI, №5, 1985, с. 27–42.
6. Безверхний В. Н., Роллов Э. В. О подгруппах свободного произведения групп // Современная алгебра, 1974 т. 1, с. 16–31.
7. Безверхняя И. С. О сопряженности конечных множеств подгрупп в свободном произведении групп // Алгоритмические проблемы теории групп и полугрупп. Межвузовский сборник научных трудов. Тула. 1981 г. С. 102–116.
8. Безверхний В. Н. Решение проблем вхождения для одного класса групп // Вопросы теории групп и полугрупп. Тула. Тульский государственный педагогический институт. 1972, с. 3–86.
9. Безверхний В. Н. Решение проблемы вхождения в некоторые классы групп с одним определяющим соотношением // Алгоритмические проблемы теории групп и полугрупп. Межвузовский сборник научных трудов. Тула, 1986, с. 3–21.
10. Безверхний В. Н. Решение проблем вхождения в классе HNN-групп // Алгоритмические проблемы теории групп и полугрупп. Сборник научных трудов. Межвузовский. Тула, 1981, с. 20–62.

———————————————————————————————

УДК 511.32

Неразложимые p-локальные группы без кручения

С. В. Вершина (Россия, г. Москва)
Московский педагогический государственный университет
e-mail: svetlanavershina@gmail.com

Indecomposable p-local torsion–free groups

S. V. Vershina (Russia, Moscow)
Moscow State Pedagogical University
e-mail: svetlanavershina@gmail.com

Абелева группа без кручения A называется *p–локальной* (p — простое число), если она является модулем над кольцом дискретного нормирования $\mathbb{Z}_p$ — локализации кольца целых чисел $\mathbb{Z}$ относительно простого числа p. Поле K называется *полем расщепления группы* A, если $A \otimes R \cong D \oplus F$, где $R = K \cap \widehat{\mathbb{Z}}_p$, $\widehat{\mathbb{Z}}_p$ — пополнение $\mathbb{Z}_p$ в p–адической топологии, D — делимый R–модуль, F — свободный R–модуль. Кольцо R в этом случае называется *кольцом расщепления группы* A. Кольцо расщепления, не содержащее собственных колец расщепления группы A, называется *минимальным кольцом расщепления группы* A. Поле расщепления называется *минимальным полем расщепления группы* A, если не содержит собственных полей расщепления группы A.

Теорема 1. *Всякая неразложимая p–локальная группа без кручения A с минимальным квадратичным полем расщепления $K = \mathbb{Q}(\pi)$ изоморфна группе $G = \langle a, b \mid a = \pi b\rangle_* \subset \widehat{\mathbb{Z}}_p b$, где π — примитивный элемент расширения $\mathbb{Q}(\pi) = K$.*

Следствие 1. *[1] Всякая сильно неразложимая p–локальная группа без кручения A с минимальным квадратичным полем расщепления $K = \mathbb{Q}(\pi)$ изоморфна группе*

$$G = \langle a, b \mid a = \pi b\rangle_* \subset \widehat{\mathbb{Z}}_p b.$$

Следствие 2. *Всякая неразложимая (сильно неразложимая) p–локальная группа без кручения A с минимальным квадратичным полем расщепления $K = \mathbb{Q}(\pi)$ изоморфна аддитивной группе минимального кольца расщепления $R = K \cap \widehat{\mathbb{Z}}_p$.*

Следствие 3. *Если кольца эндоморфизмов $\mathrm{E}(A)$ и $\mathrm{E}(B)$ неразложимых p–локальных групп без кручения A и B с минимальным квадратичным полем расщепления K изоморфны, то группы A и B также изоморфны.*

Следствие 4. *В классе неразложимых p–локальных групп без кручения с минимальным квадратичным полем расщепления K всякая группа определяется с точностью до изоморфизма минимальным кольцом расщепления.*

Следствие 5. *В классе неразложимых p–локальных групп без кручения с минимальным квадратичным полем расщепления K всякая группа определяется с точностью до изоморфизма аддитивной группой минимального кольца расщепления.*

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Lady E. L. Splitting fields for torsion-free modules over discrete valuation rings, I // Journal of Algebra. — 1977. — Vol. 49(1). — P. 261–275.

On the classification of Abelian and non-Abelian groups of the unit n-arity complex / hypercomplex numbers

G. G. Volkov (Russia, Serpukhov)
RSC KI Peterbourg Nuclear Physics Institute, Gatchina, St-Peterbourg
MOU IIF, Moscow region, Serpukhov,
e-mail: gennadii.volkov@rambler.ru
A. A. Maslikov (Russia, Protvino)
Dubna University, "Protvino"branch
e-mail: masspref@yandex.ru

УДК 511.32

О классификации Абелевых и неабелевых групп единичных n-арити комплексных / гиперкомплексных чисел

Г. Г. Волков (Россия, г. Серпухов)
ФГБУ Петербургский институт ядерной физики, г. Гатчина
МОУ «ИИФ», Московская обл., г. Серпухов
e-mail: gennadii.volkov@rambler.ru
А. А. Масликов (Россия, г. Протвино)
Филиал «Протвино» государственного университета «Дубна», г. Протвино
e-mail: masspref@yandex.ru

During the last 20 years we related a development to the searching for new Riemannian and tensor structures in multidimensional spaces $D \geq 5$ based on the theories of new hyper-numbers, new algebras and new symmetries. We refer to the theory of numbers - theory of reflexive numbers and then to theory of the cyclic C^n- complex numbers[1, 2].

The geometrical nature of Abelian group we could search for in the theory of Abelian $n-ary$ complex numbers. We took the idea of considering $n-ary$ complex numbers in Euclidean R^n-spaces as a tool for finding new symmetries in connection with the Calabi-Yau classification of spaces of any dimension $CY(d)$, $d = complex.dim. = 2p - real.dim.$, which we made on the basis of the $n-ary$ theory of reflexive projective numbers [3, 4, 5]. d-dimensional Calabi-Yau spaces are multi-dimensional generalizations of the $d=1$ one-dimensional torus This classification allowed us to see new n-ary structures in Newtonian polyhedrons for Calabi-Yau spaces $CY(d)$ with the holonomy group $SU(p)$, $d = 3, 4, 5, \ldots$ One of the possible ways to establish a connection between external and internal symmetries is to cover the groups of internal symmetries of groups of external space-time symmetries by groups? So we already know such examples with double covering: $SU(2) \approx S^3/Z_2 \approx SO(3) \approx \mathbb{RP}^3$, $U(1)_{EM}$, $SU(2)$ -spin, $SL(2,C)$ -matter-antimatter, $N^{O\pm} = 3$ with the group $SU(3^{O\pm})$ -color symmetry, $N_g = 3$-number of generations of quark-leptons.

According to the Abelian C_n- cyclic group complexification of the Euclidean $\mathbb{R}^n$ spaces followed to this method we consequently constructed the series-$n = 3, 4, 5, 6; 12$ of the n-dimensional $(n-1)$-parameter Abelian group- hypersurfaces with $n = 2, 3, \ldots$. We determine the Abelian group symmetries for such spaces. The n-ary complex numbers lead to two isomorphic, n-ary "unitary"and "orthogonal Abelian (n-1) -parametric symmetry groups, which could be the basis for describing the invisible light of the universe. The feature of the our approach is the appearance of noncompact Abelian symmetry groups.

The theory of Abelian complex numbers is based on the complexification of the Euclidean $\mathbb{R}^n$-space[5]–[6]

$$z = x_0 q_0 + x_1 q + ... + x_{(n-1)} q^{(n-1)}, \tag{1}$$

using $C_n = q_0, q, ..., q^{(n-1)} : q^n = \pm q_0, q_0 - unit$ - cyclic groups of their n-one-dimensional irreducible representations for conjugation operations

$$\tilde{q} = q^{\{1\}} = jq,\ \tilde{\tilde{q}} = q^{\{2\}} = j^2 q,\ ..., q^{\{n-1\}} = j^{(n-1)} q; \qquad q^{\{n\}} = q; \qquad j = e^{(2\pi i/n)} \tag{2}$$

which allow to determine the norm $||z||^n = z \cdot z^{\{1\}} \cdot \ldots \cdot z^{\{n-1\}}$, which has composite group properties $||z_1 \cdot z_2||^n = ||z_1||^n \cdot ||z_2||^n$, which allows for n-ary complex numbers with a single norm to determine (n -1) - parametric Abelian groups. Following the Abelian C_n-complexification of Euclidean spaces R^n, we successively construct the series of Abelian $(n-1)$ -parameter-invariant hypersurfaces $||z||^n = F_0(x_0, ..., x_{(n-1)}) = 1$ for $n = 3, 4, 5, 6, ..., 12$ (further expansion is obvious) we study the process of, we derive Euler formulas as the basis for the derivation of n-ary-unitary Abelian groups in the $(n \times n)$ -matrix representation. For illustration we present the expressions of algebraic equations for the hypersurfaces defined by the C^n, - cyclic unit numbers only for $n \leq 6$ for both cases, A) $q^n = q_0$, B) $q^n = -q_0$,respectively (these cases can be linked by extended Wick twist):

Generalizations of the n-dimensional trigonometry and the Pythagorean theorems for n-dimensional simplexes in each n-ary case have been got, for example, let see $n = 3$:

$$e^{(q\alpha+q^2\beta)} = c_0(\alpha,\beta)q_0 + s_0(\alpha,\beta)q + t_0(\alpha,\beta)q^2, \tag{3}$$

where $c_0^3 + s_0^3 + t_0^3 - 3c_0 s_0 t_0 = 1$. The two parameter Abelian ternary "unitarity"is:

$$U = e^{(\alpha q+\beta q^2)},\ U^+ = e^{(j\alpha q+j^2\beta)q^2};\ U^{++} = e^{(j^2\alpha q+j\beta)q^2)}: \qquad U\cdot U^+\cdot U^{++} = \hat{1} \tag{4}$$

Or in matrix form

$$U = \begin{pmatrix} a & qb & q^2c \\ cq^2 & a & qb \\ qb & cq^2 & a \end{pmatrix},\ U^+ = \begin{pmatrix} a & jqb & j^2q^2c \\ j^2cq^2 & a & jqb \\ jqb & j^2cq^2 & a \end{pmatrix},\ U^{++} = \begin{pmatrix} a & j^2qb & jq^2c \\ jcq^2 & a & j^2qb \\ j^2qb & jcq^2 & a \end{pmatrix} \tag{5}$$

$$U\cdot U^+\cdot U^{++} = detU = (a^3+b^3+c^3-3abc)\cdot\hat{1} = \hat{1}. \tag{6}$$

Subsequent consideration in $CN^{(n)}$ - n-ary complexified $\mathbf{R}^n$- Euclidean space the ways of the holomorphizm (and polymorphizm) for the functions:

$$F(z,z^{\{1\}},...,z^{\{n-1\}}) = F_0(x_0,...,x_{(n-1)})q_0 + F_1(x_0,...,x_{(n-1)})q + ... + F_{(n-1)}(x_0,...,x_{(n-1)}q^{\{n-1\}} \tag{7}$$

($z^{\{p\}} - p = 1,2,...,(n-1)$ is the number of the conjugation operations of the n-ary complex number z.) allows us to derive n-dimensional wave equations (of the Laplace / Dirac type) for the harmonic functions $F_a(x_0,...,x_{(n-1)})$ and the corresponding n-spinors, invariant relativity of the corresponding $(n-1)$ -parametric Abelian symmetry groups (for example, see the case n=6 $q^6 = q_0$[4]–[7]:

$$\begin{aligned} &\{[(\partial_0^3+\partial_2^3+\partial_4^3-3\partial_0\partial_2\partial_4)-3(\partial_0(\partial_3^2-\partial_1\partial_5)+\partial_2(\partial_5^2-\partial_1\partial_3)+\partial_4(\partial_1^2-\partial_3\partial_5))]^2 \\ - &[(\partial_1^3+\partial_3^3+\partial_5^3-3\partial_1\partial_3\partial_5)-3(\partial_1(\partial_4^2-\partial_0\partial_2)+\partial_3(\partial_0^2-\partial_2\partial_4)+\partial_5(\partial_2^2-\partial_0\partial_4))]^2\}\cdot \\ &\cdot F_a(x_0,\ldots,x_5) = 0 \end{aligned} \tag{8}$$

$a = 0,\ldots,5$ For comarison see at the hypersurface equation for this case $q^6 = q_0$':

$$\begin{aligned} &\{[(x_0^3+x_2^3+x_4^3-3x_0x_2x_4)]-3[x_0(x_3^2-x_1x_5)+x_2(x_5^2-x_1x_3)+x_4(x_1^2-x_3x_5)]\}^2 - \\ &-\{[(x_1^3+x_3^3+x_5^3-3x_1x_3x_5]+3[x_1(x_4^2-x_0x_2)+x_3(x_0^2-x_2x_4)+x_5(x_2^2-x_0x_4)]\}^2 \\ &= \{F_1^3\}^3 - \{F_2^3\}^2 = 1 \end{aligned} \tag{9}$$

The main conclusion of our calculations is that the Abelian properties of the cyclic groups $C_n$lead to the factorization of all the corresponding group $(n-1)$ -dimensional hypersurfaces $(n-1)$ with the definition of the Abelian group $U^{(n-1)}$, and by analyzing $U^{(n-1)}$ - the invariant Laplace differential equations for arity-n harmonic functions $F_i(x_0,...,x_{(n-1)}), i = 0,...,n-1$,, where the harmonic functions are determined through the decomposition of the holomorphic function [1, 4].

We identified and investigated all Abelian symmetries for the cases $(n = 3,...,12)$, which could serve as opportunities to consider Abelian theories of invisible light of the Universe, interacting with some invisible matter- exotic n-spinor "maarkrions". In this view, we naturally extended the constructions of Abelian n-ary complex numbers studied to the construction of the non-Abelian n-ary hyper-complex numbers starting from two introducing hyper-complex numbers producing the (n^2-1) (for $tsu(3)$- 8) generators[1]–[6]:

$$Z = x_0Q_0 + x_1Q_1 + ... + x_{(n^2-1)}Q_{(n^2-1)} : (Q_k)^n = \pm Q_0; k = 1, ..., n^2-1 \tag{10}$$

The Laplace differential equations can be found from the Cauchy-Riemann equations of order deg= n. Following to Dirac procedure one can get from the differential equations for $n-ary$ harmonic functions the linear differential invariant equations for $n-spinors$:

$$\hat{F}(\partial x_0, ..., \partial x_{n-1})\psi = 0, \qquad \psi = \begin{pmatrix} \eta_0 \\ .... \\ \eta_{n-1} \end{pmatrix} \tag{11}$$

As example we give the commutations relations for $tsu(3)$-algebra:

$$[Q_1, Q_2] = (j^2 - j)Q_6;\ [Q_2, Q_3] = (j^2 - j)Q_4;\ [Q_3, Q_1] = (j^2 - j)Q_5 \tag{12}$$

$$\text{etc.: } [Q_k, Q_l] = \pm(j^2 - j)Q_m \text{ and } [Q_1, Q_4] = 0;\ [Q_2, Q_5] = 0;\ [Q_3, Q_6] = 0. \tag{13}$$

The unit ternary-hypercomplex numbers produce the non-Abelian ternary-unitary STU(3)-group Lee. Using the unusual comutations rules we constructed the hypersurface define by the unit ternary

$$z = (x_0q_0 + x_7q + x_8q^2) + (x_1q_0 + x_2q + x_3q^2)q_1 + (x_4q_0 + x_5q + x_6q^2)q_1^2 \tag{14}$$

The 8 imaginary units $\{Q_k|q, q^2, q_1, qq_1, q^2q_1, q_1^2, qq_1^2, q_1^2, q^2|Q_k^3 = q_0,\}$ produce $tsu(3)$. The ternary hypercomplex units $|z \cdot \tilde{z} \cdot \tilde{\tilde{z}}| = 1$ produce the ternary nonAbelian $TSU(3)$ group Lee respectively.

The corresponding $TSU(3)$-invariant hypersurface $|z \cdot \tilde{z} \cdot \tilde{\tilde{z}}| = 1$ takes the following form [5]–[7]:

$$F(x_0, ..., x_8) = |z_0|^3 + |z_1|^3 + |z_2|^3 - (z_0\tilde{z}_1\tilde{\tilde{z}}_2) - (\tilde{z}_0\tilde{\tilde{z}}_1z_2) - (\tilde{\tilde{z}}_0\tilde{z}_1z_2) = 1 \text{ where} \tag{15}$$

$$z_0 = x_0q_0 + x_7q + x_8q^2z_1 = x_1q_0 + x_2q + x_3q^2z_2 = x_4q_0 + x_5q + x_6q^2 \text{ or} \tag{16}$$

$$\begin{aligned} F(x_0, ..., x_8) = {} & x_0^3 + x_7^3 + x_8^3 + x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_4^3 + x_5^3 + x_6^3 - 3x_0x_7x_8 - 3x_1x_2x_3 - 3x_0x_7x_8 \\ & -3x_0(x_1x_4 + x_2x_5 + x_3x_6) - 3x_7(x_1x_5 + x_2x_6 + x_3x_4) - 3x_8(x_1x_6 + x_2x_4 + x_3x_5) = 1 \end{aligned} \tag{17}$$

That is, the result of correctness was the vanishing of all contributions V_k in the decomposition

$$V = F(x_0, x_1, ..., x_8)Q_0 + V_1(x_0, x_1, ..., x_8)Q_1 + ... + V_8(x_0, x_1, ..., x_8)Q_8, \tag{18}$$

that is, out of the possible 729 terms, only 45 terms remained non-zero! Thus, the constructed generators $Q_a; a = 1, ...,$ have more complex than binary quaternions, the commutation relations $Q_aQ_b = j^kQ_bQ_a; j = e^{2\pi i/3}$, where the value of $k = 0, 1, 2$ depends on the choice of the generator subgroup (there are three $\{Q_1, Q_2, Q_3\}$,$\{Q_4, Q_5, Q_6\}$,$\{Q_7, Q_8\}$, and they form the algebra tsu (3). The hypersurface itself is a group manifold defined by the ternary group $TSU(3)$. This group and its algebra are fundamentally different from the Cartan-Lie group of $SU(3)$ and its algebra $su(3)$ defined by the 8 Gell-Mann generators. hand drawing)

The corresponding cubic Maarkri-hypersurface takes in $\mathbb{R}^8$ the following form [7]–[9]:

$$U = \begin{pmatrix} z_0 & qz_1 & q^2z_2 \\ q^2\tilde{z}_2 & \tilde{z}_0 & q\tilde{z}_2 \\ q\tilde{\tilde{z}}_1 & q^2\tilde{\tilde{z}}_2 & \tilde{\tilde{z}}_0 \end{pmatrix}, \tag{19}$$

$$DetU = x_0^3 + x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_4^3 + x_5^3 + x_6^3 + x_7^3 + x_8^3 - 3x_0x_7x_8 - 3x_1x_2x_3 - 3x_4x_5x_6 \quad (20)$$
$$-3x_0(x_1x_4 + x_-2x_5 + x_3x_6) - 3x_7(x_1x_5 + x_2x_6 + x_3x_4) - 3x_8(x_1x_6 + x_2x_4 + x_3x_5) = 1$$

The new commutation rules applied in quantum field theory can lead to the adoration of the Pauli principle, which states the following that could exist in one level the $n = 3, 4, 5$ identical particles.

Using the unusual Maarkri rules of anti-commutation we constructed the norm-division algebra for hyper-ternary complex numbers[8, 9]:

$$\{q_a, q_0 = \hat{1} | q_a^3 = q_0; a = 1, ..., 8\}. \qquad q_aq_b = jq_bq_a, \qquad or \qquad q_aq_b = j^2 \qquad a \neq b \quad (21)$$

Similarly, considering n = 4.5.6, ... ary hyper-complex numbers, one can construct n-ary algebras and n-ary groups with corresponding commutation relations, where $j = e^{(2\pi i/n)}$.

These compositions relations generalize the well-known anticommutation relations between imaginary quaternions $\{e_1, e_2, e_3\}$, the matrix realization of which are the Pauli matrices

$$e_1 = i\sigma_1, e_2 = i\sigma_2, e_3 = -i\sigma_3 : e_\alpha e_\beta = -e_\beta e_\alpha,\ \alpha \neq \beta.$$

An important property of the ternary (n-ary) group $TSU(3)$ in the matrix formalism is the introduction of new concepts of Complex conjugation, Transposition, Hermitian conjugation and Unitarity: $UU^{+}U^{++} = 1$. The next step was connected with the further study of ternary Clifford algebras in their relationship with binary Clifford algebras, which would allow building n-spinors material matter with unusual quantum properties.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. G. Volkov *Ternary "Quaternions"and Ternary $TU(3)$ algebra* arXiv:1006.5627 (2010)

2. G. Volkov, *Hunting for the New Symmetries in Calabi-Yau Jungles*, Int.J. Mod. Phys **A19** (2004) 4835-4860, hep-th/0402042.

3. A.Dubrovskiy and G.Volkov, *Ternary numbers and algebras. Reflexive numbers and Berger graphs* Adv.Appl.CliffordAlgebras17:159-181,2007 archiv:hep-th/0608073, (2006).

4. L. N. Lipatov, M. Rausch de Traunbenberg, G. Volkov, *On the ternary complex analysis and its applications* J. Math. Phys. **49** 013502 (2008)

5. G. Volkov *On the complexifications of the Euclidean R^n spaces and the n-dimensional generalization of Pythagore theorem* arXiv:1006.5630(2010)

6. V. Samoylenko and G.Volkov *The GUT of the light: On the Abelian Complexifications of the Euclidean R^n spaces* arXiv:0912.2037 (2009)

7. Volkov G.G., Maslikov A.A., *Geometry of the Standard Model.* Proc.XXI NPCS, Minsk, 20 (2014). P. 257-264.

8. Smurov S.V .,Volkov G.G., Glotova I.O., Kukin S.N., Muradova A.R., "Mathematical Questions of the Extensions of the Quantum Theories "Izvestija IIF Serpukhov, 4(38). p. 7184.(2015)

9. Volkov G.G., Glotova I.O.„ Kukin S.N., Muradova A.R. "Introduction into Geometry of n-arity complex numbers "Izvestiya IIF Serpukhov, 2(40). p. 75-84.(2016)

———————————————————————————

УДК 512.5

О вложении элементарной сети в промежуток сетей

Н. А. Джусоева (Россия, Владикавказ)
Северо-Осетинский госуниверситет им. К. Л. Хетагурова
e-mail: djusoevanonna@rambler.ru
С. Ю. Итарова (Россия, Владикавказ)
Северо-Осетинский госуниверситет им. К. Л. Хетагурова
e-mail: sitarova1991@gmail.com
В. А. Койбаев (Россия, Владикавказ)
Северо-Осетинский госуниверситет им. К. Л. Хетагурова
e-mail: koibaev-K1@yandex.ru

On the Embedding an elementary net into a gap of nets

N. A. Dzhusoeva (Russia, Vladikavkaz)
North-Ossetian State University
e-mail: djusoevanonna@rambler.ru
S. Y. Itarova (Russia, Vladikavkaz)
North-Ossetian State University
e-mail: sitarova1991@gmail.com
V. A. Koibaev (Russia, Vladikavkaz)
North-Ossetian State University
e-mail: koibaev-K1@yandex.ru

Получено вложение элементарной сети (ковра) аддитивных подгрупп коммутативного кольца в промежуток (полных) сетей (ковров).

Пусть R — произвольное коммутативное кольцо с единицей, n – натуральное число $n \geq 2$. Система $\sigma = (\sigma_{ij})$, $1 \leq i, j \leq n$, аддитивных подгрупп σ_{ij} кольца R называется сетью (ковром) [1] над кольцом R порядка n, если $\sigma_{ir}\sigma_{rj} \subseteq \sigma_{ij}$ при всех значениях индексов i, r, j. Сеть, рассматриваемая без диагонали, называется элементарной сетью (элементарный ковер) [1–2, 3, вопрос 15.46]. Элементарная сеть $\sigma = (\sigma_{ij}), 1 \leq i \neq j \leq n$, называется дополняемой (до полной сети), если для некоторых аддитивных подгрупп (точнее, подколец) σ_{ii} кольца R таблица (с диагональю) $\sigma = (\sigma_{ij}), 1 \leq i, j \leq n$ является (полной) сетью.

Пусть теперь $n \geq 3$, $\sigma = (\sigma_{ij})$ — элементарная сеть над кольцом R порядка n. Рассмотрим набор $\omega = (\omega_{ij})$ аддитивных подгрупп ω_{ij} кольца R, определенных для любых $i \neq j$ следующим образом: $\omega_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \sigma_{ik}\sigma_{kj}$, где, очевидно (так как σ — элементарная сеть), суммирование берется по всем k, отличным от i и j. Набор $\omega = (\omega_{ij})$ аддитивных подгрупп ω_{ij} кольца R является элементарной сетью, которую мы называем элементарной производной сетью. Элементарная сеть ω является дополняемой. Мы предлагаем циклический способ дополнения элементарной сети ω до полной. А именно, положим $\omega_{ii} = \sum_{k \neq s} \sigma_{ik}\sigma_{ks}\sigma_{si}$, где суммирование ведется по всем $1 \leq k \neq s \leq n$ (ясно, что $k \neq i, s \neq i$). Элементарная производная сеть ω, дополненная диагональю является сетью, которая называется производной сетью (для σ).

Для произвольных $i \neq j$ положим

$$\Omega_{ij} = \sigma_{ij} + \sigma_{ij}\gamma_{ij}, \quad \gamma_{ij} = \sum_{m=1}^{\infty} (\sigma_{ji}\sigma_{ij})^m.$$

Таблица $\Omega = (\Omega_{ij})$ является дополняемой элементарной сетью. Дополним элементарную сеть Ω до (полной) сети стандартным способом, положив $\Omega_{ii} = \sum_{k \neq i} \Omega_{ik}\Omega_{ki}$, где суммирование берется по всем k, $k \neq i$. Сеть Ω называется сетью, ассоциированной с элементарной сетевой группой $E(\sigma) = \langle t_{ij}(\sigma_{ij}) : 1 \leq i \neq j \leq n \rangle$ (здесь $t_{ij}(\alpha) = e + \alpha e_{ij}$, $\alpha \in R$ – элементарная трансвекция).

Теорема. Пусть $n \geq 3$. Элементарная сеть σ индуцирует производную сеть $\omega = (\omega_{ij})$ и сеть $\Omega = (\Omega_{ij})$, ассоциированную с элементарной группой $E(\sigma)$, причем $\omega \subseteq \sigma \subseteq \Omega$ и для для любых i, r, j мы имеем включения

$$\omega_{ir}\Omega_{rj} \subseteq \omega_{ij}, \quad \Omega_{ir}\omega_{rj} \subseteq \omega_{ij}.$$

Другими словами, матричное кольцо $M(\omega)$ является двусторонним идеалом матричного кольца $M(\Omega)$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Borevich Z. I. Subgroups of linear groups rich in transvections // Journal of Soviet Mathematics. 1987. Vol. 37, Issue 2. pp. 928-934.

2. Levchuk V.M. A Note to L.Dickson's Theorem // Algebra and Logic. 1983. Vol.22, Issue 4. pp.421-434.

3. The Kourovka notebook : unsolved problems in group theory. Russ. acad. of sciences, Siberian div., Inst. of mathematics. Novosibirsk. 2010. Issue 17 (in Russian).

УДК 512.54

Проблемы степенной и обобщенной сопряженности слов в некоторых конструкциях групп Артина[1]

И. В. Добрынина (Россия, г. Москва)
Академия гражданской защиты МЧС России
e-mail: dobrynirina@yandex.ru
А. С. Угаров (Россия, г. Тула)
Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого
e-mail: ugarandrey@gmail.com

Problems of power and generalized conjugacy of words in some constructions of Artin groups

I. V. Dobrynina (Russia, Moscow)
Academy of Civil Defence EMERCOM of Russia
e-mail: dobrynirina@yandex.ru
A. C. Ugarov (Russia, Tula)
Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University
e-mail: ugarandrey@gmail.com

Пусть $S = \{s_1, s_2, \ldots s_n\}$ — конечное множество слов, и $M = (m_{st}), s, t \in S$ — симметрическая матрица Кокстера с индексами из множества S, такая, что $m_{ss} = 1$ для любого $s \in S, m_{st} = m_{ts} \in \{2, 3, \ldots, \infty\}$ для всех $s, t \in S, s \neq t$.

[1]Исследование выполнено по гранту РФФИ №19-41-710002_р_а

Свяжем с матрицей Кокстера конечный граф Γ, между вершинами которого и множеством S установлено взаимно однозначное соответствие, причем если две вершины s, t графа Γ соединены ребром, то данному ребру соответствует элемент m_{st} из M, если вершины s, t не соединены ребром, то данной паре соответствует $m_{st} = \infty$. Назовем так определенный граф графом Кокстера.

С графом Кокстера Γ связана группа Артина G_Γ со множеством образующих S и системой определяющих соотношений $< st >^{m_{st}} = < ts >^{m_{ts}}$, при $s \neq t$, $m_{st} \neq \infty$, где $< st > = stst \ldots$ — слово из чередующихся образующих s, t длины m_{st}.

Группа Артина G_Γ есть группа Артина экстрабольшого типа, если $\forall s, t \in S, s \neq t, m_{st} \geq 4$.

В. Н. Безверхним был определен класс групп Артина с древесной структурой. Если граф Γ группы Артина G_Γ является дерево-графом, то группа Артина называется группой Артина с древесной структурой. Для групп Артина с древесной структурой элементы матрицы Кокстера $m_{st}, s, t \in S$ принадлежат множеству $\{2, 3, \ldots, \infty\}$.

Пусть G_1 — группа с копредставлением $G_1 = \langle a_1, a_2, \ldots, a_k | \langle a_i a_j \rangle_{ij}^{m} \rangle = \langle a_j a_i \rangle^{m_{ij}} \rangle$, которой соответствует дерево-граф Γ, $m_{ij} \in \{2, 3, \ldots, \infty\}$. Заметим, что если вершины графа Γ не соединены ребром, то данным вершинам соответствует $m = \infty$.

Пусть $G_2 = \langle b_1, \ldots, b_n; \langle b_i b_j \rangle^{m_{ij}} = \langle b_j b_i \rangle^{m_{ji}} \rangle$, где $m_{ij} \geqslant 4$ при $i \neq j$, есть группа Артина экстрабольшого типа.

Рассмотрим группу $G = G_1 *_{a=b} G_2$, являющуюся свободным произведением групп G_1, G_2, объединенных по циклическим подгруппам $\langle a \rangle$ из G_1, $\langle b \rangle$ из G_2, где a, b — образующие соответствующих групп.

Используя диаграммы сопряженности слов над группой $G = G_1 *_{a=b} G_2$, представляющие собой последовательность поддиаграмм, каждая из которых является диаграммой над одним из сомножителей G, объединенных между собой по ребру с меткой из объединяемой подгруппы, в [1] получена следующая

Теорема 1. *В группе $G = G_1 *_{a=b} G_2$ разрешимы проблемы равенства и сопряженности слов.*

Определение 1. *Будем говорить, что в группе G разрешима проблема степенной сопряженности слов, если существует алгоритм, позволяющий для любых слов $w, v \in G$ установить, существуют ли ненулевые целые числа n, m такие, что слова w^n, v^m сопряжены в группе G.*

Теорема 2. *В группе Артина $G = G_1 *_{a=b} G_2$ разрешима проблема степенной сопряженности слов.*

В работах [2], [3] доказана алгоритмическая разрешимость проблемы степенной сопряженности слов в группах G_1, G_2.

Определение 2. *Будем говорить, что в группе G разрешима проблема обобщенной сопряженности слов, если существует алгоритм, позволяющий для любых двух конечных множеств слов $\{w_i\}_{i=\overline{1,n}}$, $\{v_i\}_{i=\overline{1,n}}$ из G установить, существует ли такое $z \in G$, что $\&_{i=1}^{n} (z^{-1} w_i z = v_i)$.*

Теорема 3. *Централизатор конечно порожденной подгруппы H группы Артина*

$$G = G_1 *_{a=b} G_2$$

есть конечно порожденная подгруппа. Существует алгоритм, выписывающий образующие данного централизатора.

Теорема 4. *В группе Артина $G = G_1 *_{a=b} G_2$ разрешима проблема обобщенной сопряженности слов.*

Теорема 5. *Пусть $G = G_1 *_{a=b} G_2$ и $\{w_i\}_{i=\overline{1,m}}$, $\{v_i\}_{i=\overline{1,m}}$ — конечные множества слов из G. Если F — некоторое решение системы $\&_{i=1}^{n}(z^{-1}w_i z = v_i)$, то множество слов $\mathbb{C}_G(H) \cdot F$, где $\mathbb{C}_G(H)$ — централизатор подгруппы H, порожденной словами $\{w_i\}_{i=\overline{1,m}}$, является множеством всех решений системы.*

Теорема 6. *Существует алгоритм, позволяющий для любого конечного множества слов из группы Артина $G = G_1 *_{a=b} G_2$ выписать образующие их нормализатора.*

Алгоритмическая разрешимость проблемы обобщенной сопряженности слов в группах G_1, G_2 следует из [4], [5].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Безверхний В. Н., Угаров А. С. Решение проблемы сопряженности слов в некотором классе групп Артина // XV Международная конференция «Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы и приложения», посвященная столетию со дня рождения доктора физико-математических наук, профессора Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова Коробова Николая Михайловича: тезисы докладов международной конференции (Тула, 28-31 мая 2018 г.) — Тула, 2018. С. 74-75.

2. Безверхний В. Н., Карпова О. Ю. Решение проблемы степенной сопряженности в группах Артина с древесной структурой // Изветия Тульского государственного университета. Естественные науки. 2009. № 3. С. 42-59.

3. Безверхний В. Н., Кузнецова А. Н. Разрешимость прблемы степенной сопряженности слов в группах Артина экстрабольшого типа // Чебышевский сборник. 2008. Т. 9, № 1. С. 50-58.

4. Платонова О. Ю. Решение проблемы обобщенной сопряженности в группах Артина с древесной структурой // Известия Тульского государственного университета. Естественные науки. 2011. № 1. С. 61-72.

5. Безверхний В. Н. Решение проблемы обобщенной сопряженности слов в группах Артина большого типа // Фундаментальная и прикладная матемаматика. 1999. Т. 5, № 1. С. 1-38.

УДК 512.54

О существовании нетривиальных псевдохарактеров для нисходящих HNN-расширений

Д. З. КАГАН (Россия, Москва)
ФГБУ "НЦКТП минтранса России Всероссийская академия внешней торговли (ВАВТ)
e-mail: dmikagan@gmail.com

The existence of non-trivial pseudocharacters for descending HNN-extensions

D. Z. Kagan (Russia, Moscow)
Russia, Scientific Center of Complex Transport Problems of Ministry of Transport of RF (SCCTP), Russian foreign trade academy (RFTA, VAVT)
e-mail: dmikagan@gmail.com

Понятия псевдохарактеров и квазихарактеров введены А.И. Штерном [1] в 1991 году. Исследованиями вопросов о существовании нетривиальных псевдохарактеров на различных типах групп и связанными с ними вопросами занимались такие алгебраисты как Р.И. Григорчук, В.А. Файзиев, В.Г. Бардаков, В.А. Безверхний, И.В. Добрынина.

Определение 1. *Квазихарактером на произвольной группе* G *называется функция* f *из группы* G *в пространство действительных чисел R, для которой* $|f\,(ab) - f\,(a) - f(b)| \leqslant ?$ *для некоторого положительного числа* ϵ *и для любых элементов a,b из группы G.*

Определение 2. *Псевдохарактером на произвольной группе* G *называется функция* f *из группы* G *в R, которая является квазихарактером и для которой выполняются равенства* $f\,(x^n) = n \cdot f(x)$ *при любом целом числе n и элементе x из группы G.*

Нетривиальным называется псевдохарактер, для которого существуют такие элементы *a,b,* что $|f\,(ab) \neq f\,(a) + f(b)|$

В. А. Файзиев [2] доказал существование нетривиальных псевдохарактеров на свободных произведениях нееединичных групп кроме $Z_2{*}Z_2$. Также Файзиевым доказано, что на разрешимых группахвсе псевдохаиректеры – тривиальные. В статьях Р.И. Григорчука [3] и В.Г. Бардакова [4] найдены условия существования нетривиальных псевдохарактеров на свободных произведениях с объединением и HNN-расширениях. В работах автора [5,6] найдены условия существования нетривиальных псевдохарактеров на аномальных произведениях и группах с одним определяющим соотношением и нетривиальным центром.

Для HNN-расширении $G =< G_0, t | tAt^{-1} = B >$ нетривиальные псевдохарактеры существуют если связанные подгруппы A и B отличны от базовой группы G_0. Неопределенным остается вопрос существования нетривиальных псевдохарактеров на нисходящих HNN-расширениях, т.е. когда одна из подгрупп A и B совпадает с базой. В этом случае имеет смысл рассматривать определенные виды копредставлений, когда базой HNN-расширения является свободная группа $F_n,\ n \geqslant 2$.

Теорема 1. *Пусть группа G является HNN-расширением, имеющим копредставление:*

$$G =< t, a_0, a_1, \ldots, a_n\ |ta_0t^{-1} = R_0, ta_1t^{-1} = R_1, \ldots, ta_nt^{-1} = R_n >,$$

где R_i *– некоторые слова в порождающих* a_i *. Пусть для одного из порождающих* a_i *выполняются следующие свойства:* $R_i = {a_i}^c$ *, где c – положительное число и записи всех остальных слов* R_j *при* $j \neq i$ *не содержат* a_i *. Тогда на группе G существует нетривиальный псевдохарактер.*

Можно доказать несколько более общую теорему для случая, когда порождающий a_i переходит в элемент $T_1{a_i}^cT_2$, где a_i не входит в несократимые записи $T_1,\ T_2$ равна 0 и число c – положительное.

Теорема 2. *Пусть группа G является HNN-расширением, имеющим копредставление:*

$$G =< t, a_0, a_1, \ldots, a_n\ |ta_0t^{-1} = R_0, ta_1t^{-1} = R_1, \ldots, ta_nt^{-1} = R_n >,$$

где R_i *– некоторые слова в порождающих* a_i*. Пусть для одного из порождающих* a_i *выполняется:* $R_i = T_1{a_i}^cT_2$*, где c – положительное число и порождающий* a_i *не входит в записи* $T_1,\ T_2$ *равна 0. Пусть также несократимые записи всех остальных* R_j *при* $j \neq i$ *не содержат* a_i*. Тогда на группе G существует нетривиальный псевдохарактер.*

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Штерн А. И. Квазипредставления и псевдопредствления. // Функц. анализ и его прил. 1991. Т. 25, №2. 70–73.

2. Файзиев В. А. Об устойчивости одного функционального уравнения на группах // Успехи мат. наук. 1993. Т. 48, №1. С. 193–194.

3. Григорчук Р. И. Ограниченные когомологии групповых конструкций // Математические заметки, 1996. Т. 59, №4. С. 546–550.

4. Бардаков В. Г. О ширине вербальных подгрупп некоторых свободных конструкций // Алгебра и логика. 1997. Т. 36, №5. С. 494–517.

5. Каган Д. З. Псевдохарактеры на аномальных произведениях локально индикабельных групп. // Фундаментальная и прикладная математика. 2006, Т. 12, выпуск 3, с. 55–64.

6. Каган Д. З. Нетривиальные псевдохарактеры на группах с одним определяющим соотношением и нетривиальным центром // Математические сборник, 2017. Т. 208, №1. С. 80–96.

УДК 512.542

О стоуновых решетках классов Фиттинга

О. В. Камозина (Россия, г. Брянск)
Брянский государственный инженерно-технологический университет
ovkamozina@yandex.ru

On stone lattices of Fitting classes

O. V. Kamozina (Russia, Bryansk)
Bryansk state University of engineering and technology
ovkamozina@yandex.ru

Рассматриваются только конечные группы. Ω обозначает непустой подкласс класса всех конечных простых групп $\mathfrak{I}$; $\Omega' = \mathfrak{I}\backslash\Omega$; $K(G)$ – класс всех простых групп, изоморфных композиционным факторам группы G; (G) – класс всех групп, изоморфных группе G; $\mathfrak{G}_\Omega$ – класс всех конечных Ω-групп, т.е. таких групп G, для которых $K(G) \subseteq \Omega$, причем $1 \in \mathfrak{G}_\Omega$; для $A \in \mathfrak{I}$ полагают $\mathfrak{G}_A = \mathfrak{G}_{(A)}$, $A' = \mathfrak{I}\backslash(A)$, $\mathfrak{D}_\Omega = \times_{A\in\Omega}\mathfrak{G}_A = (B_1 \times B_2 \times ... \times B_n : B_i \in \mathfrak{G}_{A_i}$ для некоторой $A_i \in \Omega$, $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $n \in \mathbb{N})$. Функция $f : \Omega \cup \{\Omega'\} \to \{$классы Фиттинга групп$\}$ принимает одинаковые значения на изоморфных группах из области определения.Через $O^\Omega(G)$ обозначается $\mathfrak{G}_\Omega$-корадикал группы G, $O^{A,A'}(G)$ – $\mathfrak{G}_A\mathfrak{G}_{A'}$-корадикал группы G. Класс Фиттинга $\mathfrak{F} = \Omega KR(f) = (G : O^\Omega(G) \in f(\Omega')$ и $O^{A,A'}(G) \in f(A)$ для любой $A \in \Omega \cap K(G))$ называется Ω-каноническим или, коротко, ΩK-классом Фиттинга с Ω-спутником f. ([1,2])

Пусть $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{N}$ – множество всех натуральных чисел. Произвольный класс Фиттинга считается 0-кратно Ω-каноническим. При $n \geqslant 1$ класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ называется n-кратно Ω-каноническим, если $\mathfrak{F}$ имеет хотя бы один Ω-спутник, все непустые значения которого являются $(n-1)$-кратно Ω-каноническими классами Фиттинга. Класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ называется тотально Ω-каноническим, если $\mathfrak{F}$ является n-кратно Ω-каноническим для всех натуральных n. Пересечение всех n-кратно Ω-канонических классов Фиттинга, содержащих непустой класс групп $\mathfrak{X}$, обозначается $\Omega KR^n(\mathfrak{X})$. ([3,4])

Пусть $\mathfrak{F}$ – произвольный n-кратно Ω-канонический класс Фиттинга. Через $\Omega K^n(\mathfrak{F})$ обозначим решетку всех его n-кратно Ω-канонических подклассов Фиттинга.

Введем необходимые понятия общей теории решеток [5] относительно решетки $\Omega K^n(\mathfrak{F})$.

n-кратно Ω-канонический подкласс Фиттинга $\mathfrak{M}$ класса $\mathfrak{F}$ называется *дополняемым* в решетке $\Omega K^n(\mathfrak{F})$, если существует такой n-кратно Ω-канонический подкласс Фиттинга $\mathfrak{H}$ из $\mathfrak{F}$, что $\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H} = (1)$, $\mathfrak{F} = \Omega KR^n(\mathfrak{M} \cup \mathfrak{H})$. Решетка $\Omega K^n(\mathfrak{F})$ называется *дистрибутивной*, если для любых классов $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{K} \in \Omega K^n(\mathfrak{F})$ выполняется тождество

$$\mathfrak{M} \cap \Omega KR^n(\mathfrak{H} \cup \mathfrak{K}) = \Omega KR^n((\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H}) \cup (\mathfrak{M} \cap \mathfrak{K})).$$

В решетке $\Omega K^n(\mathfrak{F})$ класс $\mathfrak{M}^\circ$ называется *псевдодополнением* класса $\mathfrak{M}$, если $\mathfrak{M}^\circ$ - наибольший элемент в $\Omega K^n(\mathfrak{F})$, для которого $\mathfrak{M} \cap \mathfrak{M}^\circ = (1)$. Решетка $\Omega K^n(\mathfrak{F})$ называется *решеткой с псевдодополнениями*, если каждый ее элемент обладает псевдодополнением. Дистрибутивная решетка с псевдодополнениями, каждый элемент которой удовлетворяет тождеству

$$\Omega KR^n(\mathfrak{M}^\circ \cup (\mathfrak{M}^\circ)^\circ) = \mathfrak{F},$$

называется *стоуновой решеткой*.

Пусть $\mathfrak{F}$ – произвольный тотально Ω-канонический класс Фиттинга. Через $\Omega K^\infty(\mathfrak{F})$ обозначим решетку всех его тотально Ω-канонических подклассов Фиттинга. Понятия общей теории решеток, введенные выше, для решетки $\Omega K^\infty(\mathfrak{F})$ аналогичны.

Теорема 1. *Пусть $\mathfrak{F}$ – n-кратно Ω-канонический класс Фиттинга. Решетка $\Omega K^n(\mathfrak{F})$ является стоуновой тогда и только тогда, когда $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{D}_\Omega$.*

Теорема 2. *Пусть $\mathfrak{F}$ – тотально Ω-канонический класс Фиттинга. Решетка $\Omega K^\infty(\mathfrak{F})$ является стоуновой тогда и только тогда, когда $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{D}_\Omega$.*

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Vedernikov V. A. Maximal satellites of Ω-foliated formations and Fitting classes // Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics. 2001. Suppl. 2. С. 217-233.

2. Vedernikov V. A., Sorokina M. M. Ω-foliated formations and Fitting classes of finite groups // Discrete Mathematics and Applications. 2001. Том 13, № 3, С. 125-144.

3. Скиба А. Н. Алгера формаций. — Минск: Беларуская навука, 1997. 240 с.

4. Сорокина М. М. О минимальных спутниках кратно Ω-расслоенных классов Фиттинга и формаций конечных групп // Брянскому государственному педагогическому университету — 70 лет: сборник научных трудов. — Брянск, 2000. С. 199-203.

5. Биркгоф Г. Теория решеток. — Москва: Наука, 1984. 568 с.

УДК 512.541

Филиальные кольца на прямых произведениях абелевых групп без кручения

Е. И. Компанцева (Россия, г. Москва)
Московский педагогический государственный университет,
Финансовый университет при Правительстве РФ.
e-mail: kompantseva@yandex.ru
Т. К. Ч. Нгуен (Россия, г. Москва)
Московский педагогический государственный университет
e-mail: trangnguyen.ru@gmail.com

Filial rings on direct products of torsion-free abelian groups

E. I. Kompantseva (Russia, Moscow)
Moscow state pedagogical University,
Financial University under the Government of the RF.
e-mail: kompantseva@yandex.ru
T. Q. T. Nguyen (Russia, Moscow)
Moscow state pedagogical University,
e-mail: trangnguyen.ru@gmail.com

Согласно [1], подкольцо A ассоциативного кольца R называется метаидеалом индекса n, если существует такой ряд $A = A_0 \subset A_1 \subset \cdots \subset A_n = R$, что A_i является идеалом A_{i+1} для всех $i = 0, \cdots, n-1$. Ассоциативное кольцо называется филиальным, если любой его метаидеал конечного индекса является идеалом. Филиальные кольца изучались многими алгебраистами (см., например, [2-4] и др.). В связи с этим в [5] введено понятие TI-группы, т.е. такой абелевой группы G, что любое ассоциативное кольцо с аддитивной группой G филиально. В настоящее время TI-группы полностью описаны только в классе периодических абелевых групп [5].

Данная работа посвящена изучению абелевых TI-групп без кручения. Прежде всего получено описание нередуцированных TI-групп без кручения, что сводит проблему исследования таких групп к редуцированному случаю.

Теорема 1. *Нередуцированная абелева группа без кручения является TI-группой тогда и только тогда, когда она изоморфна аддитивной группе рациональных чисел.*

Известно, что класс TI-групп не замкнут относительно взятия прямых сумм и прямых произведений. Например, любая абелева группа без кручения ранга 1 является TI-группой. Однако прямое произведение таких групп не обязано быть TI-группой. В работе описаны TI-группы в классе векторных групп $G = \prod_{i \in I} G_i$, где множество I неизмеримо. Векторной группой называют прямое произведение $\prod_{i \in I} G_i$ абелевых групп без кручения ранга 1, такие группы и кольца на них изучались, например, в [6-9]. Заметим, что для векторной группы $G = \prod_{i \in I} G_i$ в случае неизмеримого множества I набор типов $t(G_i)$ групп G_i $(i \in I)$ является инвариантом группы G [6], поэтому описание TI-групп в теореме 2 не зависит от разложения группы G в прямое произведение групп ранга 1. Напомним, что множество I называется измеримым, если оно допускает счетно аддитивную меру η, принимающую значения 0 и 1, такую, что $\eta(I) = 1$, $\eta(\{x\}) = 0$ для любого $x \in I$. Отметим, что в настоящее время неизвестно даже, противоречит ли аксиомам теории множеств гипотеза о существовании измеримых чисел.

Теорема 2. *Векторная абелева группа $G = \prod_{i \in I} G_i$, где $r(G) > 1$ и I – неизмеримое множество, является TI-группой тогда и только тогда, когда $t(G_i) \cdot t(G_j) \nleq t(G_k)$ для любых $i,\ j,\ k \in I$ (среди которых, возможно, есть совпадающие).*

Утверждение теоремы 2 – наилучший из возможных результатов в том смысле, что для измеримого множества I из того, что $t(G_i) \cdot t(G_j) \nleq t(G_k)$ для любых $i, j, k \in I$, уже не следует, что $G = \prod_{i \in I} G_i$ – TI-группа.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Baer R. Meta ideals. Report conf. linear algebras. June. 1956. // Publ. National Acad. Sci. nat. Res. Counil. 1957. №502. P. 33–52.

2. Ehrlich G. Filial rings // Portugal. Math. 1983-1984. Vol. 42. P. 185-194.

3. Sands A. D. On ideals in over-rings // Publ. Math. Debrecen. 1988. V. 35. P. 273–279.

4. Filipowicz M., Puczylowski E. R. On filial and left filial rings // Publ. Math. Debrecen 2005. Vol. 66. P. 257–267.

5. Andruszkiewicz R., Woronowicz M. On TI-groups // Recent Results in Pure and Applied Math. Podlasie. 2014. P. 33-41.

6. Sasiada E. On the isomorphism of decompositions of torsion-free abelian groups into complete direct sums of groups of rank one // Bull. Acad. Polon. Sci. 1959. Vol. 7. P. 145–149.

7. Мишина А. П. Сепарабельность полных прямых сумм абелевых групп без кручения ранга 1 // Матем. сб. 1962. Vol. 57. C. 375-383.

8. Gardner B. J., Jackett D. R. Rings on certain classes of torsion free abelian groups // Comment. Math. Univ. Carol. 1976. Vol. 17. P. 493-506.

9. Компанцева Е. И. Ассоциативные кольца на векторных группах // Чебышевский сб. 2015. №4(16). С. 188–199.

УДК 512.542

Об $\mathfrak{F}$-гиперцентре конечных групп и его приложениях

В. И. Мурашко (Беларусь, г. Гомель)
Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины
e-mail: mvimath@yandex.ru

On the $\mathfrak{F}$-hypercenter of finite groups and its applications

V. I. Murashka (Belarus, Gomel)
Francisk Skorina Gomel State University
e-mail: mvimath@yandex.ru

Рассматриваются только конечные группы. Используется стандартные терминология и обозначения из [1, 2].

Пусть A — группа автоморфизмов группы G. Л. Калужнин [3] и Ф. Холл [4] показали, что если A стабилизирует некоторую цепь подгрупп группы G, то A нильпотентна. Б. Хупперт [5] и Л. А. Шеметков [6] доказали, что если G имеет A-допустимый ряд подгрупп, в котором предыдущая подгруппа имеет простой индекс в последующей, то A сверхразрешима. Л. А. Шеметков [6] и П. Шмид [7] получили аналоги этих результатов для разрешимо насыщенных формаций. Отметим, что понятие A-$\mathfrak{F}$-гиперцентра группы G играло важную роль в их исследованиях.

Пусть A — группа автоморфмизмов группы G, содержащая все внутренние автоморфизмы, и F — максимальный внутренний локальных экран насыщенной формации $\mathfrak{F}$.

A-композиционный фактор H/K группы G называется A-$\mathfrak{F}$-*центральным*, если

$$A/C_A(H/K) \in F(p)$$

для всех $p \in \pi(H/K)$. *A-$\mathfrak{F}$-гиперцентром G* называется наибольшая подгруппа G, все A-композиционные факторы ниже которой A-$\mathfrak{F}$-центральны. Обозначается $\mathrm{Z}_{\mathfrak{F}}(G,A)$. Данная подгруппа существует по лемме 6.4 [2, с. 387]. Интерес к A-$\mathfrak{F}$-гиперцентру возник в последние годы в связи с рядом работ зарубежных авторов (см., например, [8, 9, 10]).

В последние годы также был построен и активно изучался различными авторами ряд формаций дисперсивных по Оре групп (см., например [11, 12, 13]). Главным результатом доклада является:

Теорема 1. *Пусть $\mathfrak{F}$ — наследственная насыщенная формация, F — её максимальный внутренний локальный экран и N — дисперсивная по Оре A-допустимая подгруппа группы G, где $\mathrm{Inn}G \leq A \leq \mathrm{Aut}G$. Тогда и только тогда $N \leq \mathrm{Z}_{\mathfrak{F}}(G,A)$, когда $N_A(P)/C_A(P) \in F(p)$ для любых силовской p-подгруппы P группы N и простого делителя p порядка N.*

Из данной теоремы непосредственно следует результат Р. Бэра о подгруппах лежащих в сверхразрешимом гиперцентре.

Следствие 1 ([15, теорема 4.1]). *Пусть N — нормальная подгруппа группы G. Тогда и только тогда $N \leq \mathrm{Z}_{\mathfrak{U}}(G)$, когда N обладает силовской башней сверхразрешимого типа и $N_G(P)/C_G(P) \in \mathfrak{N}_p\mathfrak{A}(p-1)$ для любой силовской p-подгруппы P группы N и любого $p \in \pi(N)$.*

В работе [14] Р. Бэр описал элементы лежащие в гиперцентре. Нами получен аналог его результата для A-гиперцентра.

Следствие 2. *Пусть g — p-элемент группы G и $\mathrm{Inn}G \leq A \leq \mathrm{Aut}G$, где p — простое число. Тогда и только тогда $g \in \mathrm{Z}_\infty(G,A)$, когда $g^\alpha = g$ для любого p'-элемента α группы A.*

Следствие 3 (Р. Бэр [14]). *Пусть p — простое число и G — группа. Тогда и только тогда p-элемент g группы G принадлежит $\mathrm{Z}_\infty(G)$, когда он перестановочен со всеми p'-элементами G.*

Мохаддам и Ростамьяри (см. [10]) ввели понятие автонильпотентной группы. Пусть $x \in G$ и $\alpha, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathrm{Aut}G$. Напомним, что $[x,\alpha] = x^\alpha x^{-1}$ и $[x,\alpha_1,\dots,\alpha_n] = [\dots[x,\alpha_1],\alpha_2],\dots],\alpha_n]$. Пусть

$$L_n(G) = \{x \in G \mid [x,\alpha_1,\dots,\alpha_n] = 1 \ \forall \alpha_1,\dots,\alpha_n \in \mathrm{Aut}G\}.$$

Тогда G называется *автонильпотентной* если $G = L_n(G)$ для некоторого натурального n. Связь этого определения с операторным обобщением гиперцентра показывает

Теорема 2. *Группа G автонильпотентна тогда и только тогда, когда*

$$G = \mathrm{Z}_\infty(G, \mathrm{Aut}G).$$

Другими словами, группа G автонильпотентна тогда и только тогда, когда $\mathrm{Aut}G$ стабилизирует некоторый ряд подгрупп группы G. Доказательство дальнейших результатов существенным образом опирается на теорему 1.

Некоторые свойства автонильпотентных групп изучались в [10]. В [9] были описаны все абелевые автонильпотентные группы. В частности, не существует абелевых автонильпотентных групп нечетного порядка. Известно (см. теорему 2.2 из [16]), что если p-группа G автонильпотентна, то $\mathrm{Aut}G$ является p-группой. В [17, с. 45] был задан следующий вопрос: "Существуют ли автонильпотентные группы нечетного порядка?"

Предложение 1. *Пусть p — простое число. Тогда и только тогда p-группа G является автонильпотентной, когда $\mathrm{Aut}G$ является p-группой.*

Пример p-группы G порядка p^5 $(p > 3)$ такой, что $\mathrm{Aut}G$ также является p-группой был построен в работе [18]. В библиотеке групп малых порядков системы компьютерной алгебры GAP [19] имеется 30 групп порядка 3^6 таких, что их группы автоморфизмов также являются 3-группами (например, группы [729, 31], [729, 41] и [729, 46]).

Таким образом, получен положительный ответ на вопрос из [17]. Из теоремы 2.3 [10] и леммы 2.9 [16] следует, что группа автнильпотентна тогда и только тогда, когда она является прямым произведением своих автонильпотентных силовских подгрупп. Нами доказано

Теорема 3. *Группа G автонильптентна тогда и только тогда, когда она является прямым произведением своих силовских подгрупп и группа автоморфизмов всякой её силовской p-подгруппы является p-группой для любого $p \in \pi(G)$.*

Хорошо известно, что группа нильпотентна тогда и только тогда, когда в ней перестановочны элементы взаимнопростых порядков. Нами получен аналогичный результат для автонильпотентных групп.

Следствие 4. *Группа G автонильпотентна тогда и только тогда, когда любой автоморфизм α группы G действует тривиально на всех элементах группы G, у которых порядки взаимнопросты с α.*

Согласно хорошо известному критерию p-нильпотентности Фробениуса (см. [20, теорема 5.26, с. 171]) группа G нильпотентна тогда и только тогда, когда $N_G(P)/C_G(P)$ является p-группой для любой p-подгруппы P группы G и любого $p \in \pi(G)$.

Теорема 4. *Группа G автонильпотентна тогда и только тогда, когда*

$$N_{\mathrm{Aut}G}(P)/C_{\mathrm{Aut}G}(P)$$

является p-группой для любой p-подгруппы P группы G и любого $p \in \pi(G)$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Шеметков Л. А. Формации конечных групп. — Москва: Наука, 1978. 272 с.

2. Doerk K. Hawkes. T. Finite soluble groups. — Berlin — New York: Walter de Gruyter, 1992. 891 p.

3. Kaloujnine L. Über gewisse Beziehungen zwischen einer Gruppe und ihren Automorphismen Berliner Mathematische Tagung, Berlin. 1953. P. 164–172.

4. Hall P. Some sufficient conditions for a group to be nilpotent // Illinois J. Math. 1968. Vol. 2, № 4. P. 787–801.

5. Huppert B. Normalteiler und maximale Untergruppen endlicher Gruppen // Math. Z. 1954. Vol. 60, № 4. P. 409–434.

6. Шеметков Л. А. Ступенчатые формации групп // Матем. сб. 1974. Том 94(136), № 4(8). С. 628–648.

7. Schmid P. Lokale Formationen endllcher Gruppen // Math. Z. 1974. Vol. 137, № 1. P. 31–48.

8. Hegarty P. V. The absolute center of a group // J. Algebra. 1994. Vol. 169. P. 929–935.

9. Nasrabadi M. M., Gholamiam A. On A-nilpotent abelian groups // Proc. Indian Acad. Sci. (Math. Sci.). 2014. Vol. 124, № 4. P. 517–525.

10. Davoudirad S., Moghaddam M. R. R., Rostamyari M. A. Autonilpotent groups and their properties // Asian-European J. Math. 2016. Vol. 9, № 2. 1650056 (7 pages).

11. Васильев А. Ф., Васильева Т. И., Тютянов В. Н. О конечных группах сверхразрешимого типа // Сиб. мат. журн. 2010. Том 51, № 6. С. 1270–1281.

12. Monakhov V. S., Kniahina V. N. Finite groups with $\mathbb{P}$-subnormal subgroups // Ricerche mat. 2013. Vol. 62 P. 307–322.

13. Zimmermann I. Submodular subgroups in finite groups // Math. Z. 1989. Vol. 202. P. 545–557.

14. Baer R. Group elements of prime power index // Trans. Amer. Math. Soc. 1953. Vol. 75. P. 20–47.

15. Baer R. Supersoluble immersion // Canad. J. Math. 1959. Vol. 11. P. 353–369.

16. Hoseini S., Moghaddam M. R. R., Tajnia S. On Auto-nipoltent groups // Southeast Asian Bull. Math. 2015. Vol. 39. P. 219–224.

17. Arora H., Karan R. On Autonilpotent and Autosoluble Groups // Note Mat. 2018. Vol. 38, № 1. P. 35–45.

18. Curran M. J. Automorphisms of certain p-groups (p odd) // Bull. Austral. Math. Soc. 1988. Vol. 38. P. 299–305.

19. Groups, Algorithms, and Programming (GAP), Version 4.10.1 (2019). — Режим доступа: http://www.gap-system.org.

20. Isaacs I. M. Finite group theory (Graduate studies in mathematics, Vol. 92) — Providence: American Mathematical Society, 2008. 350 p.

УДК 512.542

О конечных группах

С. В. Путилов (Россия, г. Брянск)
Брянский государственный университет имени И.Г. Петровского
e-mail: algebra.bgu@yandex.ru

On finite groups

S. V. Putilov (Russia, Bryansk)
Bryansk State University named after I.G. Petrovsky
e-mail: algebra.bgu@yandex.ru

По О. Кегелю [1] подгруппу H группы G называют квазисубнормальной, если $H \cap G_p = H_p$ для любого $p \in \pi(G)$ и каждой силовской p-подгруппы G_p из G.

Теорема 1. *Если в конечной группе любая неквазисубнормальная ненильпотентная максимальная подгруппа имеет индекс равный простому числу или квадрату простого числа, то группа разрешима.*

Теорема 2. *Если в конечной группе любая неквазисубнормальная ненильпотентная максимальная подгруппа имеет индекс равный простому числу, то группа разрешима или сверхразрешима.*

Теоремы 1 и 2 соответственно усиливают и развивают известные результаты Ф. Холла [2, VI.9.4] и Б. Хупперта [2, VI.9.5].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Kegel O. Sylow Gruppen und Subnormalteiler endlichen Gruppen // Math. Z. 1962. Vol. 78. S. 205-221.

2. Huppert B. Endliche Gruppen. I. — Berlin; Heidelberg; New York: Springer – Verl., 1967.

———————————————————————————————

УДК 512.543

Об аппроксимируемости корневыми классами древесных произведений с центральными объединенными подгруппами[1]

Е. В. Соколов (Россия, г. Иваново)
Ивановский государственный университет
e-mail: ev-sokolov@yandex.ru
Е. А. Туманова (Россия, г. Иваново)
Ивановский государственный университет
e-mail: helenfog@bk.ru

On the root-class residuality of tree products with central amalgamated subgroups

E. V. Sokolov (Russia, Ivanovo)
Ivanovo State University
e-mail: ev-sokolov@yandex.ru
E. A. Tumanova (Russia, Ivanovo)
Ivanovo State University
e-mail: helenfog@bk.ru

В настоящей работе описывается подход к исследованию аппроксимируемости корневыми классами свободных конструкций групп, в первую очередь древесных произведений, основанный на использовании введенной авторами конструкции обобщенного прямого произведения, ассоциированного с графом групп.

Напомним (см. [1]), что нетривиальный (т. е. содержащий хотя бы одну неединичную группу) класс групп называется *корневым*, если он замкнут относительно взятия подгрупп и расширений, а также вместе с любыми двумя группами X и Y содержит декартово произведение вида $\prod_{y \in Y} X_y$, где X_y — изоморфная копия группы X для каждого $y \in Y$. Напомним также,

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 18-31-00187.

что группа X называется *аппроксимируемой классом групп* $\mathcal{C}$ или, короче, $\mathcal{C}$*-аппроксимируемой*, если для каждого ее неединичного элемента найдется гомоморфизм группы X на группу из класса $\mathcal{C}$ ($\mathcal{C}$-группу), при котором образ этого элемента по-прежнему отличен от 1.

Исследования аппроксимируемости свободных конструкций групп как конкретными, так и произвольными корневыми классами продолжаются уже достаточно давно. Однако, завершенными их можно считать лишь для обычного свободного произведения групп [2]. Аппроксимируемость более сложно устроенных конструкций (обобщенных свободных произведений, HNN-расширений, фундаментальных групп графов групп) удается полностью исследовать лишь при различных дополнительных ограничениях, накладываемых как на саму конструкцию, так и на аппроксимирующий класс (см., например, [3, 4, 5]). В настоящей работе основным ограничением такого рода является центральность объединенных или связанных подгрупп в содержащих их вершинных группах.

Пусть далее $\Gamma = (V, E)$ — непустой связный неориентированный граф с множеством вершин V и множеством ребер E, не обязательно конечный, но без кратных ребер и петель. Сопоставляя каждой вершине $v \in V$ некоторую группу G_v и каждому ребру $e = \{v, w\} \in E$ группу H_e и инъективные гомоморфизмы $\varphi_{e,v}\colon H_e \to G_v$, $\varphi_{e,w}\colon H_e \to G_w$, получим *граф групп*, который далее для краткости будем называть просто графом и обозначать той же буквой Γ. Группы G_v $(v \in V)$, H_e $(e \in E)$, подгруппы $H_{e,v} = H_e\varphi_{e,v}$ и гомоморфизмы $\varphi_{e,v}$ $(e \in E,\ v \in e)$ будем называть соответственно *вершинными* и *реберными группами*, *реберными подгруппами* и *реберными гомоморфизмами*.

Рассмотрим группы

$$\mathrm{GFP}(\Gamma) = \langle G_v\ (v \in V);\ H_{e,v} = H_{e,w}\ (e = \{v, w\} \in E)\rangle,$$
$$\mathrm{GDP}(\Gamma) = \langle G_v\ (v \in V);\ H_{e,v} = H_{e,w}\ (e = \{v, w\} \in E),\ [G_u, G_v] = 1\ (u, v \in V,\ u \neq v)\rangle,$$

образующими которых являются образующие групп G_v $(v \in V)$, а определяющими соотношениями — определяющие соотношения групп G_v $(v \in V)$, всевозможные соотношения вида $h\varphi_{e,v} = h\varphi_{e,w}$, где $e = \{v, w\} \in E$, $h \in H_e$, а также, в случае группы $\mathrm{GDP}(\Gamma)$, соотношения вида $[g_u, g_v] = 1$, где $u, v \in V$, $u \neq v$, g_u — произвольный образующий группы G_u, g_v — произвольный образующий группы G_v. Очевидно, что группы $\mathrm{GFP}(\Gamma)$ и $\mathrm{GDP}(\Gamma)$ представляют собой фактор-группы соответственно свободного и прямого произведений групп G_v $(v \in V)$ по нормальному замыканию множества элементов

$$\{h\varphi_{e,v}(h\varphi_{e,w})^{-1} \mid e = \{v, w\} \in E,\ h \in H_e\}.$$

Отметим также, что группа $\mathrm{GFP}(\Gamma)$ изоморфна фактор-группе фундаментальной группы графа Γ по нормальному замыканию множества всех проходных букв последней.

Группу $\mathrm{GFP}(\Gamma)$ (группу $\mathrm{GDP}(\Gamma)$) будем называть *обобщенным свободным* (соответственно *обобщенным прямым*) *произведением*, *ассоциированным с графом* Γ, если выполняются следующие два условия:

(i) для каждой вершины $v \in V$ тождественное отображение образующих группы G_v в группу $\mathrm{GFP}(\Gamma)$ (в группу $\mathrm{GDP}(\Gamma)$) продолжаемо до инъективного гомоморфизма и потому все группы G_v $(v \in V)$ можно считать подгруппами группы $\mathrm{GFP}(\Gamma)$ (соответственно группы $\mathrm{GDP}(\Gamma)$);

(ii) для каждого ребра $e = \{v, w\} \in E$ в группе $\mathrm{GFP}(\Gamma)$ (в группе $\mathrm{GDP}(\Gamma)$) имеют место равенства $H_{e,v} = G_v \cap G_w = H_{e,w}$.

Отметим, что если граф Γ является полным, то ассоциированные с ним обобщенные произведения оказываются *обобщенным свободным* и *обобщенным прямым* произведениями в смысле определений, данных в [6] и [7] соответственно. Кроме того, группу $\mathrm{GFP}(\Gamma)$ называют *древесным произведением*, если граф Γ является деревом, и *полигональным произведением*, если Γ представляет собой простой цикл. Таким образом, группа GFP(Γ) позволяет с единых позиций описать некоторые известные свободные конструкции групп, в том числе те, которые появились значительно позднее работы [6], а группа GDP(Γ) дает возможность унифицированным образом определить аналогичные конструкции, в основе которых лежит прямое, а не свободное произведение групп.

В связи с введенными понятиями сразу же возникает вопрос о существовании обобщенных произведений, т. е. об условиях, при которых группы GFP(Γ) и/или GDP(Γ) удовлетворяют требованиям (i) и (ii). Хорошо известно, что ассоциированное с графом Γ обобщенное свободное произведение существует в следующих случаях:

1) если граф Γ является деревом [8];

2) если граф Γ представляет собой простой цикл длины, не меньшей 4, и для любых ребер $e, f \in E$, инцидентных одной вершине $v \in V$, подгруппы $H_{e,v}$ и $H_{f,v}$ группы G_v пересекаются тривиально [9].

Отметим, что полигональное произведение трех групп с тривиально пересекающимися реберными подгруппами уже не обязано удовлетворять требованию (i): соответствующий пример приводится в [10].

Переходя к описанию условий существования ассоциированного с графом Γ обобщенного прямого произведения, заметим прежде всего, что, как легко видеть, необходимым условием выполнения требования (i) для группы GDP(Γ) является центральность реберных подгрупп в содержащих их вершинных группах. Вследствие этого обобщенное прямое произведение двух групп в литературе называют также *центральным произведением.*

Если v — произвольная вершина графа Γ, то через E_v будем обозначать множество всех ребер, инцидентных вершине v, а через H_v — подгруппу группы G_v, порожденную всеми подгруппами семейства $\{H_{e,v} \mid e \in E_v\}$ (т. е. всеми реберными подгруппами, содержащимися в группе G_v). Понятно, что подгруппа H_v лежит в центре $\mathcal{Z}(G_v)$ группы G_v тогда и только тогда, когда $H_{e,v} \leqslant \mathcal{Z}(G_v)$ для каждого ребра $e \in E_v$.

Следующие две теоремы утверждают, что ассоциированное с графом Γ обобщенное прямое произведение существует в ситуациях, аналогичных указанным выше случаям 1 и 2, а также дают некоторые достаточные условия отсутствия кручения в группе GDP(Γ).

Теорема 1. *Пусть граф Γ является деревом и для любой вершины $v \in V$ подгруппа H_v лежит в центре группы G_v. Тогда ассоциированное с графом Γ обобщенное прямое произведение существует.*

Если все группы G_v $(v \in V)$ не имеют кручения и для любых $e \in E$, $v \in e$ подгруппа $H_{e,v}$ изолирована в группе G_v, то группа GDP(Γ) *не имеет кручения.*

Теорема 2. *Пусть для любой вершины $v \in V$ подгруппа H_v лежит в центре группы G_v и представляет собой прямое произведение подгрупп семейства $\{H_{e,v} \mid e \in E_v\}$. Тогда ассоциированное с графом Γ обобщенное прямое произведение существует.*

Если все группы G_v $(v \in V)$ не имеют кручения и для каждой вершины $v \in V$ произведение любого числа подгрупп из семейства $\{H_{e,v} \mid e \in E_v\}$ изолировано в группе G_v, то группа GDP(Γ) *не имеет кручения.*

Легко видеть, что если группа GDP(Γ) обладает свойством (i) или (i), (ii), тому же условию удовлетворяет и группа GFP(Γ). Поэтому из теоремы 2 следует, в частности, что полигональное произведение с центральными тривиально пересекающимися объединенными подгруппами существует и в случае трех вершинных групп.

Опишем теперь идею применения теоремы 1 к исследованию аппроксимируемости древесных произведений корневыми классами групп. Пусть $\mathcal{C}$ — нетривиальный корневой класс групп, замкнутый относительно взятия фактор-групп, граф Γ представляет собой конечное дерево и все группы G_v ($v \in V$) принадлежат классу $\mathcal{C}$. Тогда в силу теоремы 1 естественный гомоморфизм группы $\mathrm{GFP}(\Gamma)$ на группу $\mathrm{GDP}(\Gamma)$ действует инъективно на всех вершинных группах. Используя теорему о строении подгрупп обобщенных свободных произведений двух групп [8], отсюда легко вывести, что ядро данного гомоморфизма является свободной группой. Из свойств класса $\mathcal{C}$ следует также, что $\mathrm{GDP}(\Gamma) \in \mathcal{C}$. Таким образом, группа $\mathrm{GFP}(\Gamma)$ оказывается расширением свободной группы при помощи группы из класса $\mathcal{C}$ и потому аппроксимируется этим классом в силу результатов из [2]. Следующие две теоремы получаются путем некоторого усложнения описанного подхода.

Теорема 3. *Пусть Γ — произвольное дерево, $\mathcal{C}$ — нетривиальный корневой класс групп, для каждой вершины $v \in V$ подгруппа H_v лежит в центре группы G_v и $\mathrm{GDP}(\Gamma) \in \mathcal{C}$. Тогда группа $\mathrm{GFP}(\Gamma)$ $\mathcal{C}$-аппроксимируема.*

Теорема 4. *Пусть Γ — конечное дерево, $\mathcal{C}$ — нетривиальный корневой класс групп, замкнутый относительно взятия фактор-групп, и для любой вершины $v \in V$ подгруппа H_v лежит в центре группы G_v. Пусть также каждая вершинная группа G_v $\mathcal{C}$-аппроксимируема и обладает гомоморфизмом σ_v на группу из класса $\mathcal{C}$, инъективным на всех реберных подгруппах, лежащих в G_v. Тогда существует гомоморфизм σ группы $\mathrm{GFP}(\Gamma)$ на группу из класса $\mathcal{C}$, продолжающий гомоморфизмы σ_v ($v \in V$). В частности, группа $\mathrm{GFP}(\Gamma)$ $\mathcal{C}$-аппроксимируема.*

Если в дополнение к этому для любых $e \in E$, $v \in e$ группа $G_v\sigma_v$ не имеет кручения и подгруппа $H_{e,v}\sigma_v$ изолирована в ней, то образ гомоморфизма σ можно считать группой без кручения и потому, если все группы G_v ($v \in V$) аппроксимируются $\mathcal{C}$-группами без кручения, то группа $\mathrm{GFP}(\Gamma)$ также аппроксимируется $\mathcal{C}$-группами без кручения.

Теорема 2 может быть использована аналогичным образом при исследовании аппроксимируемости полигональных произведений, HNN-расширений, а также фундаментальных групп произвольных графов групп. Отметим, что, как это видно из формулировки теоремы 4, достаточные условия отсутствия кручения в группе $\mathrm{GDP}(\Gamma)$, доставляемые теоремами 1 и 2, позволяют наряду с аппроксимируемостью корневым классом $\mathcal{C}$, замкнутым относительно взятия фактор-групп, изучать и аппроксимируемость группы $\mathrm{GFP}(\Gamma)$ классом всех $\mathcal{C}$-групп без кручения, который также является корневым, но содержит уже заведомо не все гомоморфные образы своих групп.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Sokolov E. V. A characterization of root classes of groups // Comm. Algebra. 2015. Vol. 43. P. 856–860.

2. Азаров Д. Н., Тьеджо Д. Об аппроксимируемости свободного произведения групп с объединенной подгруппой корневым классом групп // Науч. тр. Иван. гос. ун-та. Математика. Вып. 5 (2002). С. 6–10.

3. Туманова Е. А. Об аппроксимируемости корневыми классами групп обобщенных свободных произведений с нормальным объединением // Изв. вузов. Математика. 2015. № 10. С. 27–44.

4. Туманова Е. А. Об аппроксимируемости корневыми классами групп Баумслага–Солитэра // Сиб. матем. журн. 2017. Т. 58, № 3. С. 700–709.

5. Соколов Е. В., Туманова Е. А. Аппроксимируемость корневыми классами HNN-расширений с центральными циклическими связанными подгруппами // Матем. заметки. 2017. Т. 102, № 4. С. 597–612.

6. Neumann H. Generalized free products with amalgamated subgroups // Amer. J. Math. 1948. Vol. 70, № 3. P. 590–625.

7. Neumann B. H., Neumann H. A remark on generalized free products // J. London Math. Soc. 1950. Vol. 25. P. 202–204.

8. Karras A., Solitar D. The subgroups of a free product of two groups with an amalgamated subgroups // Trans. Amer. Math. Soc. 1970. Vol. 150. P. 227–255.

9. Allenby R. B. J. T. Polygonal products of polycyclic by finite groups // Bull. Aust. Math. Soc. 1996. Vol. 54, № 3. P. 369–372.

10. Higman G. A finitely generated infinite simple group // J. London Math. Soc. 1951. Vol. 26. P. 61–64.

УДК 512.542

О τ-замкнутых классах конечных групп

М. М. Сорокина (Россия, г. Брянск)
Брянский государственный университет имени И.Г. Петровского
e-mail: mmsorokina@yandex.ru

On τ-closed classes of finite groups

M. M. Sorokina (Russia, Bryansk)
Bryansk State University named after I.G. Petrovsky
e-mail: mmsorokina@yandex.ru

Рассматриваются только конечные группы. Используются обозначения, принятые в [1]. Пусть τ – подгрупповой функтор, т.е. отображение, ставящее в соответствие каждой группе G некоторую непустую совокупность $\tau(G)$ ее подгрупп, удовлетворяющее условию:

$$(\tau(G))^{\varphi} = \tau(G^{\varphi})$$

для любого изоморфизма φ каждой группы G. Подгрупповой функтор τ называется
– регулярным, если выполняются два условия:
1) из $H \in \tau(G)$ и $N \lhd G$ следует $HN/N \in \tau(G/N)$,
2) из $K/N \in \tau(G/N)$ следует $K \in \tau(G)$;
– наследственным, если $H \cap \tau(G) \subseteq \tau(H)$ для любой подгруппы H каждой группы G, где $H \cap \tau(G) = \{H \cap K \mid K \in \tau(G)\}$;
– решеточным, если для любой группы G из $H, K \in \tau(G)$ следует, что $H \cap K \in \tau(G)$ и $< H, K > \in \tau(G)$;
– естественным, если τ является регулярным и наследственным функтором [1].

Через S обозначается тривиальный подгрупповой функтор, ставящий в соответствие каждой группе совокупность всех ее подгрупп; S_n – нормальный подгрупповой функтор [1]. Класс групп $\mathfrak{X}$ называется τ-замкнутым, если $\tau(G) \subseteq \mathfrak{X}$ для любой группы $G \in \mathfrak{X}$. Группа G называется минимальной не $\mathfrak{X}$-группой, если $G \notin \mathfrak{X}$, но все собственные подгруппы группы G принадлежат классу групп $\mathfrak{X}$ [2]. Через $\mathscr{M}(\mathfrak{X})$ обозначается совокупность всех минимальных не $\mathfrak{X}$-групп [1].

Пусть ω – непустое множество простых чисел, f – функция вида $f : \omega \cup \{\omega'\} \to \{$ формации групп $\}$. Формация

$$\mathfrak{F} = \{ \ G \mid G/O_\omega(G) \in f(\omega') \text{ и } G/F_p(G) \in f(p) \text{ для любого } p \in \pi(G) \cap \omega \ \}$$

называется ω-локальной формацией, где $O_\omega(G)$ – наибольшая нормальная ω-подгруппа группы G, $F_p(G)$ – p-нильпотентный радикал группы G [3]. Через $\mathfrak{N}$ и $\mathfrak{S}_\omega$ обозначаются классы всех конечных нильпотентных групп и всех конечных разрешимых ω-групп соответственно.

Теорема 1. *Пусть τ – естественный решеточный подгрупповой функтор, $\tau \le S_n$, $\mathfrak{F}$ – τ-замкнутая ω-локальная формация, G – конечная группа, не принадлежащая $\mathfrak{F}$. Если $\mathscr{M}(\mathfrak{F}) \cap S(G) \subseteq \tau(G) \cap \mathfrak{S}_\omega$, то $G \in \mathfrak{N}\mathfrak{F}$.*

Следствие 1. *Пусть $\mathfrak{F}$ – нормально наследственная ω-локальная формация, G – конечная группа, не принадлежащая $\mathfrak{F}$. Если каждая минимальная не $\mathfrak{F}$-подгруппа группы G является разрешимой нормальной ω-подгруппой в G, то $G \in \mathfrak{N}\mathfrak{F}$.*

Следствие 2. *Пусть $\mathfrak{F}$ – ω-локальная формация, $G \in \mathscr{M}(\mathfrak{F}) \cap \mathfrak{S}_\omega$. Тогда $G \in \mathfrak{N}\mathfrak{F}$.*

Теорема 1 является развитием теоремы 1.2 [2].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Каморников С. Ф., Селькин М. В. Подгрупповые функторы и классы конечных групп. — Минск: Изд-во Беларуская навука, 2003. 254 с.

2. Семенчук В. Н. Конечные группы с системой минимальных не $\mathfrak{F}$-подгрупп // В кн. Подгрупповое строение конечных групп. — Минск: Изд-во Наука и техника, 1981. С. 138-149.

3. Скиба А. Н., Шеметков Л. А. Кратно ω-локальные формации и классы Фиттинга конечных групп // Математические труды. 1999. Том 2, № 2. С. 114-147.

УДК 512.543

Аппроксимируемость корневыми классами групп Артина и Коксетера с древесной структурой[1]

Е. А. Туманова (Россия, г. Иваново)
Ивановский государственный университет
e-mail: helenfog@bk.ru

The root-class residuality of Artin groups and Coxeter groups with a tree structure

E. A. Tumanova (Russia, Ivanovo)
Ivanovo State University
e-mail: helenfog@bk.ru

Напомним, что группа X называется *аппроксимируемой классом групп $\mathcal{K}$* (или, короче, *$\mathcal{K}$-аппроксимируемой*), если для каждого отличного от 1 элемента $x \in X$ найдется гомоморфизм группы X на группу из класса $\mathcal{K}$ ($\mathcal{K}$-группу), под действием которого x переходит

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 18-31-00187.

в неединичный элемент. В настоящей работе рассматривается аппроксимируемость корневыми классами групп, введенными К. Грюнбергом в [1].

Согласно определению из [1] нетривиальный (т. е. содержащий хотя бы одну неединичную группу) класс групп $\mathcal{K}$ называется *корневым*, если он замкнут относительно взятия подгрупп и прямых произведений конечного числа сомножителей, а также удовлетворяет следующему условию: если $1 \leqslant Z \leqslant Y \leqslant X$ — субнормальный ряд группы X, факторы X/Y и Y/Z которого принадлежат классу $\mathcal{K}$, то в группе X существует нормальная подгруппа T такая, что $T \subseteq Z$ и $X/T \in \mathcal{K}$. Последняя часть данного определения, называемая обычно *условием Грюнберга*, позволяет доказать весьма полезное и часто используемое утверждение о том, что если $\mathcal{K}$ — корневой класс групп, то произвольное расширение $\mathcal{K}$-аппроксимируемой группы при помощи $\mathcal{K}$-группы в свою очередь аппроксимируется классом $\mathcal{K}$. Однако, условие Грюнберга затрудняет понимание того, что же именно представляют собой корневые классы групп.

Равносильное, более простое определение корневого класса дано Е. В. Соколовым в [2]. Согласно ему нетривиальный класс групп $\mathcal{K}$ называется корневым, если он замкнут относительно взятия подгрупп и расширений, а также вместе с любыми двумя группами X и Y содержит декартово произведение вида $\prod_{y \in Y} X_y$, где X_y — изоморфная копия группы X для каждого $y \in Y$. Из этого определения следует, в частности, что пересечение любого числа корневых классов — снова корневой класс.

Примерами корневых классов, аппроксимируемость которыми чаще всего исследуется в литературе, служат классы всех конечных групп, конечных p-групп (где p — простое число), периодических π-групп конечного периода (где π — непустое множество простых чисел), разрешимых групп, разрешимых групп без кручения, а также всевозможные их пересечения. Класс всех нильпотентных групп, также нередко выступающий в качестве аппроксимирующего, не замкнут относительно взятия расширений и потому корневым не является. Однако, для некоторых групп нильпотентную аппроксимируемость удается полностью исследовать, пользуясь лишь критерием аппроксимируемости конечными p-группами (см., например, [3]). Таким образом, результаты об аппроксимируемости корневыми классами могут оказаться полезными и в этом случае.

Наибольшее количество утверждений об аппроксимируемости корневыми классами доказано для свободных конструкций групп. В этих исследованиях основным является вопрос о наследовании конструкцией свойства аппроксимируемости от групп, из которых она построена. Для таких свободных конструкций, как обобщенное свободное произведение двух групп или HNN-расширение полностью ответить на данный вопрос не удается даже в случае конкретного аппроксимирующего класса групп. Поэтому их аппроксимируемость изучают при различных дополнительных ограничениях, накладываемых на группы, из которых они построены, объединенные или связанные подгруппы, а также на аппроксимирующий класс. В последние годы на этом пути было получено достаточно много результатов об аппроксимируемости уже не каким-то конкретным, а произвольным корневым классом групп, удовлетворяющим, возможно, некоторым дополнительным условиям (см., например, [2], [4] — [7]). Настоящая работа также находится в русле данных исследований.

Пусть далее V — произвольное множество, E — некоторое семейство двухэлементных подмножеств множества V. *Группой Артина* называется группа с образующими a_v $(v \in V)$ и определяющими соотношениями

$$a_v a_w a_v \ldots = a_w a_v a_w \ldots \quad (\{v, w\} \in E),$$

где оба слова, в левой и правой частях, имеют длину $m_e \geqslant 2$ $(e = \{v, w\} \in E)$ и состоят из чередующихся символов a_v и a_w. Всюду далее будем записывать такие соотношения в виде

$$\langle a_v a_w \rangle^{m_e} = \langle a_w a_v \rangle^{m_e} \quad (e = \{v, w\} \in E).$$

Таким образом, группа Артина задается представлением

$$G = \langle a_v\ (v \in V);\ \langle a_v a_w\rangle^{m_e} = \langle a_w a_v\rangle^{m_e}\ (e = \{v, w\} \in E)\rangle.$$

Вместе с группой Артина обычно рассматривают и *группу Коксетера* $\overline{G}$, которая получается, если к числу определяющих соотношений группы Артина G добавить соотношения $a_v^2 = 1$ $(v \in V)$. Из равенств $a_v^2 = 1$ следует, что $a_v = a_v^{-1}$ для всех $v \in V$ и потому каждое соотношение $\langle a_v a_w\rangle^{m_e} = \langle a_w a_v\rangle^{m_e}$ $(e = \{v, w\} \in E)$ может быть переписано в виде $(a_v a_w)^{m_e} = 1$. Таким образом, группа $\overline{G}$ имеет представление

$$\overline{G} = \langle a_v\,(v \in V);\, a_v^2 = 1\,(v \in V),\, (a_v a_w)^{m_e} = 1\,(e = \{v, w\} \in E)\rangle.$$

Отметим, что обычно в определения групп Артина и Коксетера включают условие конечности множества V. Однако, все приводимые далее результаты остаются справедливыми и в отсутствие данного предположения.

Очевидно, что пару множеств (V, E) можно рассматривать как неориентированный граф с множеством вершин V и множеством ребер E. Если этот граф является деревом, то группа Артина (Коксетера) называется *группой Артина* (соответственно *Коксетера*) *с древесной структурой* [8].

Всюду далее, если $\mathcal{K}$ — корневой класс, состоящий только из периодических групп, через $\pi(\mathcal{K})$ будем обозначать множество всех простых делителей порядков элементов групп из класса $\mathcal{K}$, а через $\mathcal{Z}(\mathcal{K})$ — множество положительных целых чисел, все простые делители которых принадлежат $\pi(\mathcal{K})$. Основными результатами работы являются две приводимые далее теоремы.

Теорема 1. *Пусть $\mathcal{K}$ — произвольный корневой класс групп,*

$$G = \langle a_v\ (v \in V);\ \langle a_v a_w\rangle^{m_e} = \langle a_w a_v\rangle^{m_e}\ (e = \{v, w\} \in E)\rangle\ -$$

группа Артина с древесной структурой. Тогда справедливы следующие утверждения.

1. *Если класс $\mathcal{K}$ содержит хотя бы одну непериодическую группу, то группа G $\mathcal{K}$-аппроксимируема.*
2. *Пусть класс $\mathcal{K}$ состоит только из периодических групп.*
   (a) *Если все числа m_e $(e \in E)$ четны, то группа G $\mathcal{K}$-аппроксимируема тогда и только тогда, когда все числа $m_e/2$ $(e \in E)$ принадлежат множеству $\mathcal{Z}(\mathcal{K})$.*
   (b) *Если среди чисел m_e $(e \in E)$ есть хотя бы одно нечетное, то группа G $\mathcal{K}$-аппроксимируема тогда и только тогда, когда все числа m_e $(e \in E)$ принадлежат множеству $\mathcal{Z}(\mathcal{K})$ и $2 \in \mathcal{Z}(\mathcal{K})$.*

Теорема 2. *Пусть $\mathcal{K}$ — произвольный корневой класс групп,*

$$\overline{G} = \langle a_v\ (v \in V);\ a_v^2 = 1\ (v \in V),\ (a_v a_w)^{m_e} = 1\ (e = \{v, w\} \in E)\rangle\ -$$

группа Коксетера с древесной структурой. Группа $\overline{G}$ $\mathcal{K}$-аппроксимируема тогда и только тогда, когда все числа m_e $(e \in E)$ принадлежат множеству $\mathcal{Z}(\mathcal{K})$ и $2 \in \mathcal{Z}(\mathcal{K})$.

Как было отмечено выше, классы конечных групп и разрешимых групп, а, значит, и их пересечение — класс конечных разрешимых групп — являются корневыми. Поэтому из теорем 1 и 2 вытекает, что группы Артина и Коксетера с древесной структурой аппроксимируются конечными разрешимыми группами. Из указанных утверждений легко вывести также критерий аппроксимируемости данных групп конечными p-группами: в этом случае $\pi(\mathcal{K}) = \{p\}$, а $\mathcal{Z}(\mathcal{K})$ представляет собой множество всех неотрицательных степеней числа p. В качестве комментария к формулировкам теорем 1 и 2 отметим, что если все числа m_e ($e \in E$) принадлежат множеству $\mathcal{Z}(\mathcal{K})$ и среди них есть хотя бы одно четное, то включение $2 \in \mathcal{Z}(\mathcal{K})$ выполняется автоматически.

В основе доказательств теорем 1 и 2 лежит представление групп G и $\overline{G}$ в виде древесных произведений, реберные подгруппы которых являются ретрактами в соответствующих вершинных группах. Напомним, что представляет собой конструкция древесного произведения.

Пусть $\mathcal{T}$ — произвольное, не обязательно конечное, дерево с множеством вершин $\mathcal{V}$ и множеством ребер $\mathcal{E}$, каждой вершине $v \in \mathcal{V}$ сопоставлена некоторая группа A_v, каждому ребру $e = \{v, w\} \in \mathcal{E}$ — группа H_e и вложения $\varphi_{ev}\colon H_e \to A_v$, $\varphi_{ew}\colon H_e \to A_w$. *Древесным произведением* групп A_v ($v \in \mathcal{V}$) с подгруппами $H_e\varphi_{ev}$ и $H_e\varphi_{ew}$, объединенными при помощи изоморфизмов φ_{ev} и φ_{ew} ($e = \{v, w\} \in \mathcal{E}$), называется группа

$$\mathcal{G} = \langle A_v \ (v \in \mathcal{V});\ H_e\varphi_{ev} = H_e\varphi_{ew} \ (\{v, w\} \in \mathcal{E})\rangle,$$

образующими которой являются образующие групп A_v ($v \in \mathcal{V}$), а определяющими соотношениями — соотношения групп A_v ($v \in \mathcal{V}$), а также всевозможные соотношения вида $h\varphi_{ev} = h\varphi_{ew}$ ($e = \{v, w\} \in \mathcal{E}$, $h \in H_e$), где $h\varphi_{ev}$ — слово от образующих группы A_v, определяющее образ элемента h относительно вложения φ_{ev}, $h\varphi_{ew}$ — слово от образующих группы A_w, определяющее образ элемента h относительно вложения φ_{ew}. Группы A_v ($v \in \mathcal{V}$) называются *вершинными группами*, а подгруппы $H_e\varphi_{ev}$ и $H_e\varphi_{ew}$ ($\{v, w\} \in \mathcal{E}$) — *реберными подгруппами*.

Говорят, что подгруппа Y группы X является *ретрактом* в этой группе, если X содержит нормальную подгруппу Z такую, что $X = YZ$ и $Y \cap Z = 1$. Иными словами, подгруппа Y — ретракт в X, если существует гомоморфизм группы X на группу Y, действующий на подгруппе Y тождественно. Отметим также, что подгруппа Y является ретрактом в группе X тогда и только тогда, когда последняя представляет собой расщепляемое расширение некоторой группы Z с помощью группы Y.

В [9] автором анонсирована

Теорема 3. *Пусть $\mathcal{K}$ — произвольный корневой класс групп, $\mathcal{T} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ — дерево,*

$$\mathcal{G} = \langle A_v \ (v \in \mathcal{V});\ H_e\varphi_{ev} = H_e\varphi_{ew} \ (\{v, w\} \in \mathcal{E})\rangle \ —$$

древесное произведение групп A_v ($v \in \mathcal{V}$) с подгруппами $H_e\varphi_{ev}$ и $H_e\varphi_{ew}$, объединенными при помощи изоморфизмов φ_{ev} и φ_{ew} ($e = \{v, w\} \in \mathcal{E}$). Если все группы A_v $\mathcal{K}$-аппроксимируемы и для каждого ребра $\{v, w\} \in \mathcal{E}$ подгруппа $H_e\varphi_{ev}$ является ретрактом в группе A_v и подгруппа $H_e\varphi_{ew}$ является ретрактом в группе A_w, то группа $\mathcal{G}$ $\mathcal{K}$-аппроксимируема.

Автором установлено, что группы G и $\overline{G}$ представляют собой древесные произведения с объединенными ретрактами, вершинными группами которых служат двупорожденные группы Артина и Коксетера соответственно, а также циклические группы (бесконечные в случае группы Артина и порядка 2 в случае группы Коксетера). Поэтому теорема 3 позволяет свести изучение аппроксимируемости групп G и $\overline{G}$ произвольным корневым классом групп к исследованию вопроса об аппроксимируемости таким классом двупорожденных групп Артина и Коксетера. В решении последней задачи важную роль играют указанное в [10] представление двупорожденной группы Артина в виде обобщенного свободного произведения двух бесконечных циклических групп или HNN-расширения бесконечной циклической группы, а также легко проверяемое утверждение о том, что двупорожденная группа Коксетера является конечной полициклической группой.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Gruenberg K. W. Residual properties of infinite soluble groups // Proc. Lond. Math. Soc. 1957. Vol. 7. P. 29–62.
2. Sokolov E. V. A characterization of root classes of groups // Comm. Algebra. 2015. Vol. 43. P. 856–860.
3. Соколов Е. В. Некоторые аппроксимационные свойства обобщенных свободных произведений групп // Чебышевский сб. 2012. Т. 13, № 1. С. 143–149.
4. Туманова Е. А. Об аппроксимируемости обобщенных свободных произведений корневыми классами групп // Модел. и анализ информ. систем. 2013. Т. 20, № 1. С. 133–137.
5. Туманова Е. А. Об аппроксимируемости корневыми классами HNN-расширений групп // Модел. и анализ информ. систем. 2014. Т. 21, № 4. С. 148–180.
6. Соколов Е. В. Об аппроксимируемости относительно сопряженности некоторых свободных конструкций групп корневыми классами конечных групп // Матем. заметки. 2015. Т. 97, № 5. С. 767–780.
7. Соколов Е. В., Туманова Е. А. Достаточные условия аппроксимируемости некоторых обобщенных свободных произведений корневыми классами групп // Сиб. матем. журн. 2016. Т. 57, № 1. С. 171–185.
8. Безверхний В. Н., Инченко О. В. Проблемы равенства и сопряженности в группах Коксетера с древесной структурой // Чебышевский сб. 2005. Т. 6, № 2. С. 81–90.
9. Туманова Е. А. Об аппроксимируемости корневыми классами древесных произведений с объединенными ретрактами // Мальцевские чтения. Тез. докл. междунар. науч. конф. (Новосибирск, 19–22 ноября 2018 г.) — Новосибирск: ИМ СО РАН, 2018. С. 122.
10. Безверхний В. Н. Решение проблемы сопряженности слов в группах Артина и Коксетера большого типа // Алгоритмические проблемы теории групп и полугрупп. Межвузовск. сб. науч. тр. Тула: Тул. гос. пед. ин-т. им. Л. Н. Толстого, 1986. С. 26–61.

УДК 512.552

Индуктивные решетки τ-замкнутых частично композиционных формаций конечных групп

А. Царев (Корея, Чеджу)
Национальный университет Чеджу
e-mail: alex_vitebsk@mail.ru

Inductive lattices of τ-closed partially composition formations of finite groups

A. Tsarev (Korea, Jeju)
Jeju National University, Department of Mathematics
e-mail: alex_vitebsk@mail.ru

All groups considered are finite. Throughout this paper, we will use ω to denote a non-empty set of primes and $\omega' = \mathbb{P} \setminus \omega$. Recall that a class of groups closed under taking homomorphic images and finite subdirect products is called a *formation*. Consider a function f of the form

$$f : \omega \cup \{\omega'\} \longrightarrow \{\text{formations of groups}\}. \tag{1}$$

Let $p \in \mathbb{P}$, and G a group. Then the subgroup $C^p(G)$ is the intersection of the centralizers of all the abelian p-chief factors of G, with $C^p(G) = G$ if G has no abelian p-chief factors. For any set of groups $\mathfrak{X}$, we denote by $\mathrm{Com}(\mathfrak{X})$ the class of all simple abelian groups A such that $A \cong H/K$, where H/K is a composition factor of $G \in \mathfrak{X}$. The symbol $R_\omega(G)$ denotes the $\mathfrak{S}_\omega$-radical of G, i.e., the product of all soluble normal ω-subgroups of G. Following [2], we consider the class of groups

$$CF_\omega(f) = (G \mid G/R_\omega(G) \in f(\omega') \text{ and}$$
$$G/C^p(G) \in f(p) \text{ for all } p \in \omega \cap \pi(\mathrm{Com}(G))).$$

If $\mathfrak{F}$ is a formation such that $\mathfrak{F} = CF_\omega(f)$ for a function f of the form (1), then $\mathfrak{F}$ is said to be ω*-composition formation* and f is said to be an ω*-composition satellite* of $\mathfrak{F}$ [2].

Every formation is 0-multiply ω-composition by definition. For $n > 0$, a formation $\mathfrak{F}$ is called n-multiply ω-composition [2] if $\mathfrak{F} = CF_\omega(f)$ and all non-empty values of f are $(n-1)$-multiply ω-composition formations. A formation is called *totally composition* if it is n-multiply composition for all positive integers n. By definition any totally composition formation is non-empty.

Recall that a set of formations Θ is called a *complete lattice of formations* if the intersection of every set of formations in Θ belongs to Θ and there is a formation $\mathfrak{F}$ in Θ such that $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{F}$ for every other formation $\mathfrak{M}$ of Θ (see [1]). A formation in Θ is called a Θ*-formation*. With respect to inclusion $\subseteq$ the set of all totally ω-composition formations c_∞^ω is a complete lattice.

The concept of inductive lattice of formations was introduced in [1]. It plays an important role in the research of law systems of formation lattices. Let Θ be a complete lattice of formations. Then we denote by Θ^{ω_c} the set of all formations having an ω-composition Θ-valued satellite (see [2]). In [2, p. 901] it is proved that Θ^{ω_c} is a complete lattice of formations.

A complete lattice Θ^{ω_c} is called *inductive* if for any collection $\{\mathfrak{F}_i = CF_\omega(f_i) \mid i \in I\}$, where f_i is an integrated satellite of $\mathfrak{F}_i \in \Theta^{\omega_c}$, the following equality holds:

$$\vee_{\Theta^{\omega_c}}(\mathfrak{F}_i \mid i \in I) = CF_\omega(\vee_\Theta(f_i \mid i \in I)).$$

The inductance of a lattice Θ^{ω_c} means that a research of the operation $\vee_{\Theta^{\omega_c}}$ on the set Θ^{ω_c} can be reduced to a research of the operation $\vee_\Theta$ on the set Θ. Therefore, the inductance is an important property of the lattice Θ^{ω_c}. Bearing in mind this fact A.N. Skiba asked in 2001 at the Gomel Algebraic Seminar the following question: *Is the lattice of all τ-closed n-multiply ω-composition formations inductive?* N.N. Vorob'ev and the author [4, 5] showed that it is true. This property is very important in the investigation of laws of the lattices of partially composition formations; see [3, 8]. Both the lattice of all totally saturated formations [7] and the lattice of all totally composition formations [6] are inductive. However the following question was still open.

Question [3, 5.5 (2)]. *Is the lattice of all τ-closed totally ω-composition formations inductive?*

The following theorem gives a positive answer to this question.

Theorem. *Let ω be non-empty set of primes. Then the lattice of all τ-closed totally ω-composition formations $c_{\omega_\infty}^\tau$ is inductive.*

Corollary 0.1. *The lattice of all τ-closed totally $\mathfrak{L}$-composition formations is inductive.*

Corollary 0.2. *Let ω be non-empty set of primes. Then the lattice of all totally ω-composition formations is inductive.*

Corollary 0.3. *[6] The lattice of all τ-closed totally composition formations is inductive.*

Corollary 0.4. *The lattice of all totally composition formations is inductive.*

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Skiba A.N., *Algebra of Formations*, Belaruskaya Navuka, Minsk, 1997 (in Russian).
2. Skiba A.N., Shemetkov L.A., Multiply $\mathfrak{L}$-composition formations of finite groups, *Ukrainian Math. Journal* **52** (6) (2000) 898–913.
3. Tsarev A., Vorob'ev N.N., *Lattices of composition formations of finite groups and the laws*, J. Algebra Appl., **17**, No. 5, 17 p (2018).
4. Tsarev A.A., Vorob'ev N.N., On a question of the theory of partially composition formations, *Algebra Colloq.* **21** (3) (2014) 437–447.
5. Vorob'ev N.N., Tsarev A.A., On the modularity of a lattice of τ-closed n-multiply ω-composition formations, *Ukrainian Math. Journal*, **62** (4) (2010) 518–529.
6. Tsarev A., *Inductive lattices of totally composition formations*, Revista Colombiana de Matemáticas **52**, no. 2, 2018, pp. 161–169.
7. Vorob'ev N.N., *On one question of the theory of local classes of finite groups*, Problems in Algebra Proc. F. Scorina Gomel State Univ., Gomel. **14**, 1999, pp. 132–140.
8. Vorob'ev N.N., Skiba A.N., Tsarev A.A., *Laws of the lattices of partially composition formations*, Sib. Math. J., **52**, No. 5, 802–812 (2011).

———————————————————————————

Axial algebras and 3-transposition groups

S. Shpectorov (United Kingdom, Birmingham)
University of Birmingham
e-mail: s.shpectorov@bham.ac.uk

Axial algebras are a recently introduced class of commutative non-associative algebras generalising Jordan algebras and some other remarkable group-related examples, like the Griess algebra for the Monster sporadic simple group.

The focus of this talk will be on the class of Matsuo algebras corresponding to 3-transposition groups, that is, groups generated by a normal set of involutions, such that the order of the product of any two of these involutions is at most 3. After providing necessary background information, we describe the double axis construction that leads to a wealth of examples of algebras from the broader class of algebras of Monster type.

———————————————————————————

Секция 2. Полугруппы и универсальные алгебры

УДК 512.548

О неабелевости полиадических группоидов специального вида

А. М. Гальмак (Республика Беларусь, г. Могилев)
Могилёвский государственный университет продовольствия
e-mail:halm54@mail.ru
М. В. Селькин (Республика Беларусь, г. Гомель)
Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины
e-mail: selkin@gsu.by

On nonabelianness polyadic groupoids of special form

A. M. Gal'mak (Belarus, Mogilev)
Mogilev State University of Food Technologies
e-mail: halm54@mail.ru
M. V. Selkin (Belarus, Gomel)
F. Scorina Gomel State University
e-mail: selkin@gsu.by

Полиадическим группоидом специального вида называется l-арный группоид $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$ с l-арной операцией $\eta_{s,\sigma,k}$, которая определяется [1] на декартовой степени A^k n-арного группоида $< A, \eta >$ с помощью подстановки $\sigma \in \boldsymbol{S}_k$ и n-арной операции η. К числу полиадических операций специального вида относятся две полиадические операции Э. Поста [2], соответствующие случаю $n = 2, s = m, k = m-1, l = m, \sigma = (12\ldots m-1)$. Одну из своих операций Э. Пост определил на декартовой степени симметрической группы, вторую – на декартовой степени полной линейной группы над полем комплексных чисел. Обе операции Э. Поста являются частными случаями l-арной операции $[\ ]_{l,\sigma,k}$, которая определена для любых целых $k \geq 2, l \geq 2$ и любой подстановки σ множества $\{1,\ldots,k\}$ на k-ой декартовой степени A^k группоида A. В свою очередь, операция $[\ ]_{l,\sigma,k}$, является частным случаем $(n = 2)$ операции $\eta_{s,\sigma,k}$, а именно: $[\ ]_{s+1,\sigma,k} = \eta_{s,\sigma,k}$. Изучению операции $[\ ]_{l,\sigma,k}$ посвящена книга [3].

Согласно следующей теореме, тождественность подстановки σ^{l-1} влечёт за собой перенос ассоциативности с n-арной операции η на l-арную операцию $\eta_{s,\sigma,k}$.

Теорема 1. *[1] Если n-арная операция η – ассоциативна, подстановка $\sigma \in \boldsymbol{S}_k$ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, то l-арная операция $\eta_{s,\sigma,k}$ ассоциативна.*

Напомним, что n-арный группоид $< A,\ [\ ] >$ называют *абелевым*, если в нём для любой подстановки σ множества $\{1, 2, \ldots, n\}$ выполняется тождество

$$[a_1a_2\ldots a_n] \ = \ [a_{\sigma(1)}a_{\sigma(2)}\ldots a_{\sigma(n)}].$$

l-Арный группоид $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$ может быть как абелевым, так и неабелевым. Некоторые условия неабелевости l-арного группоида $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$ сформулированы в следующих двух теоремах.

Теорема 2. *[4] Пусть подстановка $\sigma \in \boldsymbol{S}_k$ не является тождественной, n-арный группоид $< A, \eta >$ обладает такими элементами $a, e_1, \ldots, e_{n-1}$, что $a \neq e_1$,*

$$\eta(ae_1 \ldots e_{n-1}) = a, \tag{1}$$

$$\eta(e_1 e_1 \ldots e_{n-1}) = e_1, \tag{2}$$

$$\eta(e_{n-1} e_1 \ldots e_{n-1}) = e_{n-1}. \tag{3}$$

Тогда l-арный группоид $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$ не является абелевым.

Теорема 3. *[4] Пусть подстановка $\sigma \in \boldsymbol{S}_k$ не является тождественной, n-арный группоид $< A, \eta >$, где $n \geq 3$, обладает такими элементами $e_1, \ldots, e_{n-1}$, что $e_1 \neq e_{n-1}$, и верны равенства (2) и (3). Тогда l-арный группоид $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$ не является абелевым.*

В следующей теореме равенство (3) из теоремы 2 заменяется более общим равенством. При этом для сохранения неабелевости l-арного группоида $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$ пришлось наложить дополнительные ограничения на l-арную операцию $\eta_{s,\sigma,k}$, делающие её частично ассоциативной.

Теорема 4. *Пусть подстановка $\sigma \in \boldsymbol{S}_k$ не является тождественной, в n-арном группоиде $< A, \eta >$ существуют элементы $a, e_1, \ldots, e_{n-1} \in A$ такие, что $a \neq e_1$, и верны равенства (1), (2), а также для некоторого $i \in \{1, \ldots, n-1\}$ верны равенства*

$$\eta(e_i \ldots e_{n-1} e_1 \ldots e_i) = e_i, \tag{4}$$

$$\eta(ae_1 \ldots e_{n-2}\eta(e_{n-1}e_1 \ldots e_{n-1})) = \eta(ae_1 \ldots e_{i-1}\eta(e_i \ldots e_{n-1}e_1 \ldots e_i)e_{i+1} \ldots e_{n-1}), \tag{5}$$

$$\eta(e_1e_1 \ldots e_{n-2}\eta(e_{n-1}e_1 \ldots e_{n-1})) = \eta(e_1e_1 \ldots e_{i-1}\eta(e_i \ldots e_{n-1}e_1 \ldots e_i)e_{i+1} \ldots e_{n-1}), \tag{6}$$

$$\eta(e_{n-1}e_1 \ldots e_{n-2}\eta(e_{n-1}e_1 \ldots e_{n-1})) = \eta(e_{n-1}e_1 \ldots e_{i-1}\eta(e_i \ldots e_{n-1}e_1 \ldots e_i)e_{i+1} \ldots e_{n-1}). \tag{7}$$

Тогда l-арный группоид $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$ не является абелевым.

Если $i = n-1$, то равенство (4) совпадает с равенством (3), а равенства (5) – (7) выполняются тривиально, так как в каждом из них левая и правая части совпадают. Следовательно, теорема 2 является следствием теоремы 4 при $i = n-1$.

Если в теореме 4 для $n \geq 3$ положить $a = e_{n-1}$, то равенство (1) совпадает с равенством (3), а равенство (5) совпадает с равенством (7). Таким образом, верна

Теорема 5. *Пусть подстановка $\sigma \in \boldsymbol{S}_k$ не является тождественной, в n-арном группоиде $< A, \eta >$, где $n \geq 3$, существуют элементы $e_1, \ldots, e_{n-1} \in A$ такие, что $e_1 \neq e_{n-1}$, и верны равенства (2), (3), а также для некоторого $i \in \{1, \ldots, n-1\}$ верны равенства (4), (6) и (7). Тогда l-арный группоид $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$ не является абелевым.*

Если $i = n-1$, то равенство (4) совпадает с равенством (3), а равенства (6) и (7) выполняются тривиально. Следовательно, теорема 3 является следствием теоремы 5 при $i = n-1$.

Так как в n-арной полугруппе $< A, \eta >$ равенства (5) – (7) из теоремы 4 выполняются для любого $i \in \{1, \ldots, n-1\}$, то справедлива

Теорема 6. *Пусть подстановка $\sigma \in \boldsymbol{S}_k$ не является тождественной, в n-арной полугруппе $< A, \eta >$ существуют элементы $a, e_1, \ldots, e_{n-1} \in A$ такие, что $a \neq e_1$, и верны равенства (1), (2), а также равенство*

$$\eta(e_i \ldots e_{n-1} e_1 \ldots e_i) = e_i$$

для некоторого $i \in \{1, \ldots, n-1\}$. Тогда l-арный группоид $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$ не является абелевым.

Если в теореме 6 потребовать, чтобы нетождественная подстановка $\sigma \in \boldsymbol{S}_k$ удовлетворяла условию $\sigma^l = \sigma$, то получим новый результат, в котором, согласно теореме 1, вместо l-арного группоида $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$ будет фигурировать l-арная полугруппа $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$.

Теорема 7. *Пусть нетождественная подстановка $\sigma \in \boldsymbol{S}_k$ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, в n-арной полугруппе $< A, \eta >$ существуют элементы $a, e_1, \ldots, e_{n-1} \in A$ такие, что $a \neq e_1$, и верны равенства (1) и (2), а также равенство*

$$\eta(e_i \ldots e_{n-1} e_1 \ldots e_i) = e_i$$

для некоторого $i \in \{1, \ldots, n-1\}$. Тогда $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$ – неабелева l-арная полугруппа.

Если в теоремах 6 и 7 для $n \geq 3$ положить $a = e_{n-1}$, то получим результаты, аналогичные теореме 5.

Следствием из теоремы 2, а значит и теоремы 4 является следующая

Теорема 8. *[4] Если нетождественная подстановка $\sigma \in \boldsymbol{S}_k$ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, $< A, \eta >$ – неодноэлементная n-арная группа, то $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$ – неабелева l-арная группа.*

Другие следствия из теоремы 2, а значит и теоремы 4 приведены в [4].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гальмак А. М. О полиадических операциях на декартовых степенях // Известия ГГУ им. Ф. Скорины. 2014. № 3. С. 35-40.

2. Post E. L. Polyadic groups // rans. Amer. Math. Soc. 1940. № 2(48). P. 208-350.

3. Гальмак А. М. Многоместные операции на декартовых степенях. — Минск: Изд. центр БГУ, 2009. 265 с.

4. Гальмак А. М. О неабелевости полиадических группоидов специального вида // Веснік МДУ ім. А.А. Куляшова. 2019. № 1(53). С. 13-21.

УДК 510.53+512.54.0+512.54.03+512.54.05+512.543.72

Об ограниченных фрагментах позитивной теории свободной полугруппы

В. Г. Дурнев (Россия, г. Ярославль)
Ярославский государственный университет имени П. Г. Демидова
e-mail: durnev@uniyar.ac.ru
А. И. Зеткина (Россия, г. Ярославль)
Ярославский государственный университет имени П. Г. Демидова
e-mail: ovzetkina@yandex.ru
О. В. Зеткина (Россия, г. Ярославль)
Ярославский государственный университет имени П. Г. Демидова
e-mail: ovzetkina@yandex.ru

On limited fragments of the positive theory of free semigroup

V. G. Durnev (Russia, Yaroslavl)
Yaroslavl State Pavel Demidov University
e-mail: durnev@uniyar.ac.ru
A. I. Zetkina (Russia, Yaroslavl)
Yaroslavl State Pavel Demidov University
e-mail: ovzetkina@yandex.ru
O. V. Zetkina (Russia, Yaroslavl)
Yaroslavl State Pavel Demidov University
e-mail: ovzetkina@yandex.ru

Обозначим через S_m – свободную полугруппу ранга m со свободными образующими a_1, ..., a_m. При $m = 2$ вместо a_1 и a_2 будем писать a и b соответственно. Заметим, что S_1 – циклическая полугруппа. В дальнейшем речь будет идти только о нециклических (некоммутативных) полугруппах S_m, т.е. будем считать, что $m \geq 2$. Особый интерес по ряду причин представляет "пограничный" случай – свободная полугруппа $S_2 = \langle a, b\rangle$ с двумя свободными образующими a и b.

Изучение элементарной теории свободной некоммутативной полугруппы началось с работы В. Куайна [1] 1946 года, в которой он доказал *алгоритмическую неразрешимость элементарной теории нециклической свободной полугруппы.*

Так как для любых двух элементов U и V полугруппы S_m справедлива эквивалентность

$$U \neq V \iff (\exists x)(\exists y)(\exists z)(\bigvee_{i=1}^{m}(U = Va_i \vee V = Ua_i) \vee (\bigvee_{i,j=1,\, i\neq j}^{m} U = xa_iy \,\&\, V = xa_jz)),$$

то из результата В. Куайна сразу следует *алгоритмическая неразрешимость позитивной теории свободной нециклической полугруппы* (этот факт в работе В. Куайна не отмечается).

В работе [2] был существенно усилен этот результат – доказано, что можно построить такое однопараметрическое семейство формул с параметром x

$$(\exists y)(\forall z)(\exists x_1)(\exists x_2)(\exists x_3)\,(\bigvee_{i=1}^{14} w_i(x, y, z, x_1, x_2, x_3, a, b) \;=\; u_i(x, y, z, x_1, x_2, x_3, a, b)),$$

что невозможно создать алгоритм, позволяющий по произвольному слову A, элементу свободной полугруппы S_2, определить, истинна ли на этой свободной полугруппе позитивная формула

$$(\exists y)(\forall z)(\exists x_1)(\exists x_2)(\exists x_3)\,(\bigvee_{i=1}^{14} w_i(A, y, z, x_1, x_2, x_3, a, b) \;=\; u_i(A, y, z, x_1, x_2, x_3, a, b)).$$

Естественно встал вопрос о возможности упрощения бескванторной части. В работе Н.К. Косовского [3] построена формула $DK(x, y, z, v)$ вида

$$(\exists x_1)(\exists x_2)(\exists x_3)(\exists x_4)\, w(x, y, z, v, x_1, x_2, x_3, x_4, a, b) \;=\; u(x, y, z, v, x_1, x_2, x_3, x_4, a, b)$$

такая, что для произвольных элементов A, B, C и D свободной полугруппы S_2 справедлива эквивалентность

$$A \;=\; B \vee C \;=\; D \iff$$
$$(\exists x_1)(\exists x_2)(\exists x_3)(\exists x_4)\, w(A, B, C, D, x_1, x_2, x_3, x_4, a, b) \;=\; u(A, B, C, D, x_1, x_2, x_3, x_4, a, b).$$

Это позволяет исключить знак дизъюнкции $\vee$ из бескванторной части рассматриваемых формул, однако приводит к значительному усложнению кванторной приставки.

В работе [4] был несколько усилен этот результат Н.К. Косовского – построена формула вида $DD(x,y,z,v)$

$$(\exists x_1)(\exists x_2)\, w(x,y,z,v,x_1,x_2,a,b) \;=\; u(x,y,z,v,x_1,x_2,a,b)$$

такая, что для произвольных элементов A, B, C и D свободной полугруппы S_2 справедлива эквивалентность

$$A \;=\; B \vee C \;=\; D \iff$$
$$(\exists x_1)(\exists x_2)\, w(A,B,C,D,x_1,x_2,a,b) \;=\; u(A,B,C,D,x_1,x_2,a,b).$$

Это позволяет упростить бескванторную часть рассматриваемых формул, но кванторная приставка, конечно, несколько усложняется. Справедливо следующее утверждение: можно построить такое однопараметрическое семейство формул с параметром x

$$(\exists y)(\forall z)(\exists x_1)(\exists x_2)\ldots(\exists x_{11})\, w(x,y,z,x_1,x_2,\ldots,x_{11},a,b) \;=\; u(x,y,z,x_1,x_2,\ldots,x_{11},a,b),$$

что невозможно создать алгоритм, позволяющий по произвольному слову A, элементу свободной полугруппы S_2, определить, истинна ли на этой свободной полугруппе позитивная формула

$$(\exists y)(\forall z)(\exists x_1)(\exists x_2)\ldots(\exists x_{11})\, w(A,y,z,x_1,x_2,\ldots,x_{11},a,b) \;=\; u(A,y,z,x_1,x_2,\ldots,x_{11},a,b).$$

Позже нам стало известно, что в работе [5] построена формула $DKMP_n(x,y,z,v)$

$$(\exists x_1)(\exists x_2)\, w(y_1,z_1,\ldots,y_n,z_n,x_1,x_2,a,b) \;=\; u(y_1,z_1,\ldots,y_n,z_n,x_1,x_2,a,b)$$

такая, что для произвольных элементов A_1, B_1, ... , A_n и B_n свободной полугруппы S_2 справедлива эквивалентность

$$A_1 \;=\; B_1 \vee A_2 \;=\; B_2 \vee \ldots \vee A_n \;=\; B_n \iff$$
$$(\exists x_1)(\exists x_2)\, w(A_1,B_1,A_2,B_2,\ldots,A_n,B_n,x_1,x_2,a,b) \;=\; u(A_1,B_1,A_2,B_2,\ldots,A_n,B_n,x_1,x_2,a,b).$$

Это позволяет упрощать бескванторную часть рассматриваемых формул за счет незначительного усложнения кванторной приставки. Справедливо следующее утверждение. Можно построить такое однопараметрическое семейство формул с параметром x

$$(\exists y)(\forall z)(\exists x_1)(\exists x_2)(\exists x_3)(\exists x_4)(\exists x_5) w(x,y,z,x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,a,b) = u(x,y,z,x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,a,b),$$

что невозможно создать алгоритм, позволяющий по произвольному слову A, элементу свободной полугруппы S_2, определить, истинна ли на этой свободной полугруппе позитивная формула

$$(\exists y)(\forall z)(\exists x_1)(\exists x_2)(\exists x_3)(\exists x_4)(\exists x_5) w(A,y,z,x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,a,b) = u(A,y,z,x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,a,b).$$

В работе [6] С.С. Марченкова построено такое однопараметрическое семейство формул вида

$$(\forall y)(\exists x_1)(\exists x_2)(\exists x_3)(\exists x_4)\,(\bigvee_{i=1}^{m} w_i(x,y,x_1,x_2,x_3,x_4,a,b) \;=\; u_i(x,y,x_1,x_2,x_3,x_4,a,b)),$$

что невозможно создать алгоритм, позволяющий по произвольному натуральному числу k определить, истинна ли на свободной полугруппе S_2 позитивная формула

$$(\forall y)(\exists x_1)(\exists x_2)(\exists x_3)(\exists x_4)\,(\bigvee_{i=1}^{m} w_i(a^k,y,x_1,x_2,x_3,x_4,a,b) \;=\; u_i(a^k,y,x_1,x_2,x_3,x_4,a,b)).$$

В работе [4] получено дальнейшее усиление результатов работ [2] и [6] – построено такое однопараметрическое семейство формул вида

$$(\forall y)(\exists x_1)(\exists x_2)(\exists x_3)\,(\bigvee_{i=1}^{m} w_i(x,y,x_1,x_2,x_3,a,b) \;=\; u_i(x,y,x_1,x_2,x_3,a,b)),$$

что невозможно создать алгоритм, позволяющий по произвольному натуральному числу k определить, истинна ли на свободной полугруппе S_2 позитивная формула

$$(\forall y)(\exists x_1)(\exists x_2)(\exists x_3)\,(\bigvee_{i=1}^{m} w_i(a^k,y,x_1,x_2,x_3,a,b) \;=\; u_i(a^k,y,x_1,x_2,x_3,a,b))$$

Используя для удаления дизъюнкции из бескванторной части указанную выше формулу из работы [5], получаем следующую теорему.

Теорема 1. *Можно построить такое однопараметрическое семейство формул с параметром x*

$$(\forall y)(\exists x_1)(\exists x_2)(\exists x_3)(\exists x_4)(\exists x_5)\,w(x,y,x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,a,b) \;=\; u(x,y,x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,a,b),$$

что невозможно создать алгоритм, позволяющий по произвольному натуральному числу k определить, истинна ли на свободной полугруппе S_2 позитивная формула

$$(\forall y)(\exists x_1)(\exists x_2)(\exists x_3)(\exists x_4)(\exists x_5)\,w(a^k,y,x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,a,b) \;=\; u(a^k,y,x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,a,b).$$

Заметим, что вопрос об истинности на свободной полугруппе S_2 позитивных формул с кванторными приставками вида $(\exists x_1)\dots(\exists x_n)(\forall y_1)\dots(\forall y_m)$ и произвольной бескванторной частью алгоритмически разрешим. Поэтому представляет интерес вопрос об алгоритмической разрешимости проблемы определения истинности на свободной полугруппе S_2 для позитивных формул с кванторными приставками вида $(\exists x_1)(\forall y)(\exists x_2)(\exists x_3)(\exists x_4)(\exists x_5)$, $(\exists x_1)(\exists x_2)(\forall y)(\exists x_3)(\exists x_4)(\exists x_5)$, $(\exists x_1)(\exists x_2)(\exists x_3)(\forall y)(\exists x_4)(\exists x_5)$ и $(\exists x_1)(\exists x_2)(\exists x_3)(\exists x_4)(\forall y)(\exists x_5)$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Quine W. Concatenation as a basis for arithmetic. // J. Symbolic Logic. 1946. V. 11. P. 105-114.
2. Дурнев В. Г. Позитивная теория свободной полугруппы. // ДАН СССР. 1973. Том 211, № 4. С. 772-774.
3. Косовский Н. К. Элементы математической логики и ее приложения к теории субрекурсивных алгоритмов. — Ленинград: Изд-во. ЛГУ, 1981. 192 с.
4. Дурнев В. Г. Неразрешимость позитивной $\forall\exists^3$-теории свободной полугруппы. // Сиб. матем. журн. 1995. Том 36 № 5. С. 1067-1080.
5. Karhumaki J., Mignosi F., Plandowski W. On the expressibility of languages by word equations with a bounded number of variables. // Bull. Belg. Math. Soc. 1993. P. 293-303.
6. Марченков С. С. Неразрешимость позитивной $\forall\exists$-теории свободной полугруппы. // Сиб. матем. журн. 1982. Том 23 № 1. С. 196-198.

УДК 512.579

О квазитождествах и решетках квазимногообразий некоторых унарных алгебр

В. К. Карташов (Россия, г. Волгоград)
Волгоградский государственный социально-педагогический университет
e-mail: kartashovvk@yandex.ru
А. В. Карташова (Россия, г. Волгоград)
Волгоградский государственный социально-педагогический университет
e-mail: kartashovaan@yandex.ru

On quasiidentities and lattices of quasivarieties of some unary algebras

V. K. Kartashov (Russia, Volgograd)
Volgograd State Socio- Pedagogical University
e-mail: kartashovvk@yandex.ru
A. V. Kartashova (Russia, Volgograd)
Volgograd State Socio-Pedagogical University
e-mail: kartashovaan@yandex.ru

Для произвольного многообразия $\mathfrak{M}$ алгебраических систем сигнатуры Ω через $T_V(\mathfrak{M})$ обозначается эквациональная теория класса $\mathfrak{M}$ (т. е. совокупность всех тождеств, истинных на классе $\mathfrak{M}$). Подмножество $\Sigma \subseteq T_V(\mathfrak{M})$ называется *базисом тождеств* многообразия $\mathfrak{M}$, если класс всех алгебраических систем, на котором истинны все тождества из Σ, совпадает с $\mathfrak{M}$. В случае, если $\mathfrak{M}$ порождается одной алгеброй A, то Σ называют *базисом тождеств алгебры A*. Аналогично определяется *базис квазитождеств*.

Известно, что для любого квазимногообразия алгебр его подквазимногообразия образуют решетку относительно вкдючения. Между свойствами этой решетки и базисами квазитождеств существуют глубокие взаимосвязи. Этот факт был четко проиллюстрирован В.А. Горбуновым в [1].

Г.Биркгоф [2] доказал, что всякая конечная унарная алгебра конечного типа имеет конечный базис тождеств. А.И. Мальцевым было установлено [3, с. 352], что всякое многообразие унарных алгебр с одной операцией имеет базис, состоящий из одного тождества.

Эти работы явились источником новых идей вокруг проблемы нахождения базисов тождеств и квазитождеств.

Позднее в [4] было доказано, что любое многообразие коммутативных унарных алгебр конечного типа имеет конечный базис тождеств.

В работах [5], [6] доказано, что любой конечный унар имеет конечный базис квазитождеств, а любой конечнопорожденный унар – независимый базис квазитождеств. При этом установлено существование континуума квазимногообразий унаров, которые не имеют независимого базиса квазитождеств.

И.П. Бесценный [7] приводит необходимые и достаточные условия существования конечного базиса для трехэлементной унарной алгебры конечного типа. В.А. Горбуновым [1] был приведен пример трехэлементной унарной алгебры, не имеющей независимого базиса квазитождеств. В [8] рассматриваются унарные алгебры специального типа с нулем, найден критерий существования конечного базиса квазитождеств для таких алгебр.

В предлагаемом сообщении эти и другие вопросы рассматриваются для классов коммутативных унарных алгебр конечного типа, у которых каждая связная компонента является сильно связной алгеброй, т. е. порождается любым своим элементом. Такие алгебры в дальнейшем будем называть *ssc-алгебрами* (sums of strongly connected algebras).

Они широко используются в различных областях математики, в частности, в теории автоматов, в дискретной математике.

В работе [9] изучались свойства решеток конгруэний ssc-алгебр.

Далее через Ω^* обозначается свободный моноид слов над алфавитом Ω.

Теорема 1. *Связная коммутативная унарная алгебраь $\langle A, \Omega\rangle$ конечного типа является ssc-алгеброй тогда и только тогда, когда она принадлежит многообразию, определяемому тождеством вида $wx = x$ для некоторого слова $w \in \Omega^*$, содержащего все сигнатурные символы из Ω.*

Напомним [10], что класс алгебр называется *обобщенным многообразием*, если он замкнут относительно гомоморфных образов, подалгебр, конечных декартовых произведений и любых декартовых степеней алгебр, входящих в него.

Теорема 2. *Класс всех ssc-алгебр конечного типа является обобщенным многообразием.*

Следствие 1. *Конечные коммутативные ssc-алгебры конечного типа образуют псевдомногообразие.*

Теорема 3. *Для любого квазимногообразия $\mathfrak{M}$ ssc-алгебр конечного типа решетка $L_q(\mathfrak{M})$ подквазимногообразий квазимногообразия $\mathfrak{M}$ конечна тогда и только тогда, когда $\mathfrak{M}$ порождается конечным множеством конечных алгебр.*

Отсюда вытекает

Теорема 4. *Всякая конечная коммутативная ssc-алгебра имеет конечный базис квазитождеств.*

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Горбунов В. А. Покрытия в решетках квазимногообразий и независимая аксиоматизируемость // Алгебра и логика. 1977. Том 16 № 5. С. 507-548.

2. Birkhoff G. On the structure of abstract algebras // Proc. Camb. Philos. Soc. 1935. Volume 31 (part 4). P. 432-454.

3. Мальцев А. И. Алгебраические системы. — М.: Наука, 1970. 392 с.

4. Kartashov V. K. On the finite axiomatizability of varieties of commutative unary algebras // J. Math. Sci. 2010. Volume 164 № 1. P. 56-59.

5. Карташов В. К. Квазимногообразия унаров // Математические заметки. 1980. Том 27 № 1. С. 7-20.

6. Карташов В. К. Квазимногообразия унаров с конечным числом циклов // Алгебра и логика. 1980. Том 19 № 2. С. 173-193.

7. Бесценный И. П. Квазитождества конечных унарных алгебр // Алгебра и логика. 1989. Том 28 № 5. С. 493-512.

8. Casperson D., Hyndman J., Mason J., Nation J. B., Schaan B. Existence of finite bases for quasi-equations of unary algebras with 0 // Internat. J. Algebra Comput. 2015. Volume 25 № 6. P. 927-950.

9. Карташова А. В. О решетках конгруэнций прямых сумм сильно связных коммутативных унарных алгебр // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2003. Том 13 выпуск 4(2). С. 57-62.

10. Ash C. J. Pseudovarieties, generalized varieties and similarly described classes // Journal of Algebra. 1985. Volume 92. P. 104-115.

УДК 512.567.5

Коммутативные унарные алгебры с модулярной решеткой топологий

А. В. Карташова (Россия, г. Волгоград)
Волгоградский государственный социально-педагогический университет
e-mail: kartashovaan@yandex.ru

Commutative unary algebras with modular topology lattice

A. V. Kartashova (Russia, Volgograd)
Volgograd State Socio-Pedagogical University
e-mail: kartashovaan@yandex.ru

Пусть $\mathfrak{A} = \langle A, \Omega \rangle$ – произвольная алгебра и σ – топология на ее носителе A. Топология σ называется *топологией на алгебре* $\mathfrak{A}$, если каждая сигнатурная операция этой алгебры непрерывна относительно σ. .

Нетрудно убедиться в том, что такие топологии образуют полную решетку по включению. Будем называть ее решеткой топологий алгебры $\mathfrak{A}$ и обозначать через $\Im(\mathfrak{A})$.

Некоторые свойства решеток топологий групп, колец и модулей указаны в ([1]–[3]).

Автором доказано, что решетки, двойственные к решеткам конгруэнций и квазипорядков произвольной алгебры $\mathfrak{A}$, вкладываются в решетку $\Im(\mathfrak{A})$ ее топологий в качестве подрешеток ([4]). Кроме того, в [5] охарактеризованы классы унаров, т. е. алгебр с одной унарной операцией, решетка топологий которых является модулярной, дистрибутивной, булевой, решеткой с дополнениями, с псевдодополнениями, либо цепью. В [6] показано, что если решетка топологий коммутативной унарной алгебры конечна, то и сама алгебра конечна, и описаны коммутативные унарные алгебры, решетка топологий которых является цепью.

В данном сообщении охарактеризован класс всех коммутативных унарных алгебр с конечным числом операций, решетки топологий которых модулярны.

Унарная алгебра $\mathfrak{A} = \langle A, \Omega \rangle$ называется *коммутативной* , если $fg(a) = gf(a)$ для любых $f, g \in \Omega$, $a \in A$.

Если связная коммутативная унарная алгебра $\mathfrak{A}$ имеет наименьшую по включению подалгебру, то будем называть ее *ядром* этой алгебры.

Для любого элемента a алгебры $\mathfrak{A}$ через (a) обозначается подалгебра этой алгебры, порожденная элементом a.

Теорема 1. *Пусть $\mathfrak{A} = \langle A, \Omega \rangle$ – произвольная коммутативная унарная алгебра с конечным числом операций. Тогда решетка $\Im(\mathfrak{A})$ топологий этой алгебры модулярна в том и только в том случае, если либо $|A| \leqslant 2$, либо $\mathfrak{A}$ – конечная связная алгебра с ядром $\mathfrak{B}$, и выполнены следующие условия:*

1) для каждого элемента $a \in A \setminus B$ множество $(a) \setminus B$ одноэлементно;

2) для любых двух различных элементов $a, b \in A \setminus B$ существует операция $f_{a,b} \in \Omega$ такая, что $f_{a,b}(a) \in B$ и $f_{a,b}(b) = b$.

Описан также *класс всех модулярных решеток, каждая из которых изоморфна решетке топологий некоторой коммутативной унарной алгебры с конечным числом операций.*

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Lamper M. Complements in the lattice of all topologies of topological groups // Archivum Mathematicum. 1974. Vol. 10 , №4. P. 221–230.

2. Arnautov V. I., Ermakova G. N. Lattice of all topologies of countable module over countable rings // Bul. Acad. Stiinte Repub. Mold. Mat. 2016. Vol. 2 . P. 63–70.

3. Šmarda B. The lattice of topologies of topological l-groups // Czech. Math. J. 1976. Vol. 26, №1. P. 128–136.

4. Карташова А. В. О решетках квазипорядков и топологий алгебр // Фундаментальная и прикладная математика. 2008. Т. 14, № 5. С. 85–92.

5. Kartashova A. V. On lattices of topologies of unary algebras // J. of Math. Sci. 2003. Vol. 114 № 2. P. 1086–1118.

6. Карташова А. В. О конечных решетках топологий коммутативных унарных алгебр // Дискрет. матем. 2009. Том 21 выпуск 3. С. 119–131.

УДК 512.579

О полигонах над группами

И. Б. Кожухов (Россия, г. Москва)
Национальный исследовательский университет "МИЭТ"
e-mail: kozhuhov_i_b@mail.ru
К. А. Колесникова (Россия, г. Москва)
МГУ имени М. В. Ломоносова
А. С. Сотов (Россия, г. Москва)
МГУ имени М. В. Ломоносова

On the act on groups

I. B. Kozhukhov (Russia, Moscow)
National research University "MIET"
e-mail: kozhuhov_i_b@mail.ru
K. A. Kolesnikova (Russia, Moscow)
Moscow state University named after M. V. Lomonosov

A. S. Sotov (Russia, Moscow)
Moscow state University named after M. V. Lomonosov

Полигоном над полугруппой S (см. [1]) называется множество X, на котором действует полугруппа S, то есть определено отображение $X \times S \to X$, $(x, s) \mapsto xs$ такое, что $x(st) = (xs)t$ при всех $x \in X$, $s, t \in S$. Полигон является унарной алгеброй — элементы полугруппы S задают унарные операции на X. Кроме того, полигон является алгебраической моделью автомата (см. [2]).

Если полигон X является дизъюнктным объединением своих подполигонов X_i $(i \in I)$, то мы говорим, что X является *копроизведением* полигонов X_i, и пишем $X = \coprod_{i \in I} X_i$.

Полигон X над полугруппой S называется *унитарным*, если в полугруппе S есть единица e и $xe = x$ для всех $x \in X$.

Пусть G – группа, H – её подгруппа (не обязательно нормальная) и пусть G/H — множество правых смежных классов Hg. Тогда G/H – полигон над G относительно умножения $Hg \cdot g' = Hgg'$. Нетрудно видеть, что G/H – это общий вид любого унитарного циклического полигона над группой G. Произвольный унитарный полигон над группой G изоморфен полигону $\coprod_{i \in I} G/H_i$, где $\{H_i | i \in I\}$ – семейство подгрупп группы G. Наконец, произвольный полигон над группой может быть построен с помощью унитарного на основании следующей конструкции (см. [3], теорема 4). Пусть Y – унитарный полигон над группой G, A – множество, не пересекающееся с Y, и $\mu : A \to Y$ – произвольное отображение. Положим $X = Y \cup A$ и определим умножение $x \cdot g$ для $x \in X$, $g \in G$ по правилу

$$x \cdot g = \begin{cases} xg, & \text{если } x \in Y, \\ \mu(x)g, & \text{если } x \in A. \end{cases}$$

Тогда X будет являться полигоном над группой G. Более того, любой полигон над группой G изоморфен полигону, построенному таким образом.

С использованием только что приведённого описания полигонов над группами могут быть решены многие вопросы теории этих полигонов. В частности, в [4, теорема 6] была получена характеризация подпрямо неразложимых полигонов над группами. В данной работе мы приводим последние результаты о полигонах над группами [5, 6].

Универсальная алгебра называется *хопфовой*, если всякий её сюръективный эндоморфизм является инъективным. Нетрудно видеть, что хопфовость является условием конечности. В.К.Картащов ([7], теорема 2) доказал, что всякий конечно порождённый коммутативный полигон (т.е. полигон X над полугруппой S, в котором $x(st) = x(ts)$ при всех $x \in X$, $s, t \in S$) является хопфовым. Вопрос о хопфовости унитарного полигона над группой исчерпывающим образом решается в следующих ниже утверждениях 1-3.

Утверждение 1. Унитарный циклический полигон $X = G/H$ хопфов в том и только том случае, если выполняется условие

$$\forall x \in G \;\; a^{-1}Ha \subseteq H \Rightarrow a^{-1}Ha = H.$$

Отметим, что группы, в которых $a^{-1}Ha \subset H$ для некоторой подгруппы H и элемента $a \in G$, существуют, и в этом случае группа G имеет бесконечный в обе стороны ряд строгих включений

$$\ldots \subset a^{-2}Ha^2 \subset a^{-1}Ha \subset aHa^{-1} \subset a^2Ha^{-2} \subset \ldots$$

(см., например, [9, §44]).

Аналогичный ответ будет в случае конечно порождённого унитарного полигона над группой.

Утверждение 2. Унитарный конечно порождённый полигон $X = G/H_1 \sqcup \ldots \sqcup G/H_n$ является хопфовым в том и только том случае, если

$$\forall a \in G \ \forall i \leqslant n \ \ a^{-1}H_i a \subseteq H_i \Rightarrow a^{-1}H_i a = H_i.$$

Пусть теперь $X = \bigsqcup_{i\in I} G/H_i$ – произвольный унитарный полигон над группой G. На семействе $\mathcal{H} = \{H_i | i \in I\}$ подгрупп группы G введём отношение $\preccurlyeq$, полагая $H_i \preccurlyeq H_j$, если $H_i \subseteq a^{-1}H_j a$ при некотором $a \in G$. Очевидно, $\preccurlyeq$ – отношение квазипорядка на $\mathcal{H}$.

Утверждение 3. Пусть $X = \bigsqcup_{i\in I} G/H_i$ – унитарный полигон над группой G. Тогда X хопфов в том и только том случае, если выполняются условия:

(1) для любой бесконечной в обе стороны цепочки

$$\ldots \preccurlyeq H_{i_{-1}} \preccurlyeq H_{i_0} \preccurlyeq H_{i_1} \preccurlyeq H_{i_2} \ldots$$

,

любых $a \in G$ и любого $k \in \mathbb{Z}$

$$H_{i_k} \preccurlyeq a^{-1}H_{i_{k+1}}a \Rightarrow H_{i_k} = a^{-1}H_{i_{k+1}}a;$$

(2) не существует бесконечного множества

$$\{\ldots, H_{i_{-1}}, H_{i_0}, H_{i_1}, \ldots\} \cup \{\ldots, H_{j_{-2}}, H_{j_{-1}}\}$$

различных элементов из $\mathcal{H}$ таких, что $H_{i_t} \preccurlyeq H_{i_{t+1}}$ при всех $t \in \mathbb{Z}$, $H_{j_{-k-1}} \preccurlyeq H_{j_{-k}}$ при $k = 1, 2, \ldots$ и $H_{j_{-1}} \preccurlyeq H_{i_0}$;

(3) если $H_{i_1} \preccurlyeq H_{i_2} \preccurlyeq \ldots \preccurlyeq H_{i_k} \preccurlyeq H_{i_1}$, то для любого $a \in G$ при $s = 1, 2, \ldots, k-1$ имеем $H_{i_s} \subseteq a^{-1}H_{i_{s+1}}a \Rightarrow H_{i_s} = a^{-1}H_{i_{s+1}}a$, а также $H_{i_k} \subseteq a^{-1}H_{i_1}a \Rightarrow H_{i_k} = a^{-1}H_{i_1}a$.

Широко известна теорема Кантора – Бернштейна (см. [9], теорема 1.1.10). В [9] автор приводит аргументы в пользу названия "теорема Шрёдера – Бернштейна". Эта теорема утверждает, что если существуют инъективные отображения $A \to B$, $B \to A$ множеств A, B, то существует взаимно однозначное отображение A на B. Возникает вопрос: верно ли это утверждение в случае, когда множества A и B являются универсальными алгебрами, а рассматриваемые отображения – гомоморфизмы? Разумеется, в общем случае это неверно (например, можно взять свободные группы рангов 2 и 3), но для полигонов над группами (как унитарных, так и неунитарных), аналог теоремы Кантора – Бернштейна является истинным утверждением.

Утверждение 4. Если A и B – полигоны над группой и существуют инъективные гомоморфизмы $A \to B$ и $B \to A$, то $A \cong B$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Kilp M., Knauer U., Mikhalev A.V., Monoids, acts and categories, N.Y. – Berlin, W. de Gruyter, 2000.

2. Плоткин Б. И., Гринглаз Л. Я., Гварамия А. А. Элементы алгебраической теории автоматов // М.: Высш. шк., – 1994. – 192 с.

3. Максимовский М.Ю., О биполигонах и мультиполигонах над полугруппами, Мат. заметки, 2010, т. 87, вып. 6, с. 855-866.

4. Кожухов И.Б., Халиуллина А.Р., Полугруппы с финитно аппроксимируемыми полигонами. Матем. заметки СВФУ, 2014, N 3 (83), 60-67.

5. Кожухов И.Б., Колесникова К.А., О хопфовости полигонов над группами (в печати).

6. Сотов А.С., Теорема Кантора – Бернштейна для полигонов над группами (в печати).
7. Карташов В.К. Независимые системы порождающих и свойство Хопфа для унарных алгебр. Дискретная матем., 2008, т. 20, вып. 4, с. 79-84.
8. Курош А.Г., Теория групп, М., "Наука 1967.
9. Архангельский А.В., Канторовская теория множеств, Изд-во МГУ, 1988.

УДК 512.577

Подсистемы некоторых конечных магм [1]

А. В. Литаврин (Россия, г. Красноярск)

Subsystems of some finite magmas

A. V. Litavrin (Russia, Krasnoyarsk)

Магмой называется алгебраическая система без предикатов и с единственной операцией, которая является бинарной (так же распространен термин *группоид*). Для каждой алгебраической системы $\mathfrak{A}$ определена группа автоморфизмов $Aut\ (\mathfrak{A})$ (см. [1, стр. 21]). Как обычно, через S_m обозначаем симметрическую группу перестановок множества из m элементов. В работе [2] для каждого натурального числа k и всякого кортежа $q \in S_k^{2k}$ вводится магма $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}(k,q) = (V,*)$ (см. определение 1 в [2]) порядка $k + k^2$. Магмы $\mathfrak{S}(k,q) = (V,*)$ такие, что в множестве-носителе V можно выделить подмножество M, которое удовлетворяет равенствам

$$V = M \cup (M * M), \qquad |M * M| = |M| \cdot |M|.$$

Для каждой магмы $\mathfrak{S}$ было получено описание группы автоморфизмов (см. теорема 2 и лемму 7 из [2]). В частности, было установлено, что для каждого натурального числа k можно построить магму $\mathfrak{S}$ порядка $k+k^2$ такую, что $Aut\ (\mathfrak{S}) \cong S_k$. Вместе с известной теоремой Кэли (о представлении конечной группы G подгруппой группы перестановок $S_{|G|}$) этот результат показывает, что всякая конечная группа G будет изоморфна некоторой подгруппе группы $Aut\ (\mathfrak{S}(|G|,q))$ для подходящей магмы $\mathfrak{S}(|G|,q)$.

Для удобства читателя приведем определение 1 из [2].

Определение 1. *Для каждого натурального числа k вводим следующие множества:*

$$M := \{a_1, ..., a_k\}, \quad B := \{b_{ij} \mid i,j = 1,...,k\}, \quad V := M \cup B,$$

$$S_k^m := \{(\varepsilon_1, ..., \varepsilon_m) \mid \varepsilon_i \in S_k,\ i = 1,...,m\}.$$

Далее, фиксируем кортеж $q = (\beta_1, ..., \beta_k, \beta'_1, ..., \beta'_k) \in S_k^{2k}$. На множестве V зададим бинарную алгебраическую операцию $*$ такую, что справедливы равенства:

$$a_i * a_j = b_{ij}, \quad a_s * b_{ij} = b_{\beta_s(i),\beta_s(j)}, \tag{1}$$

$$b_{ij} * a_s = b_{\beta'_s(i),\beta'_s(j)}, \quad b_{mv} * b_{ij} = b_{mj} \quad (m,v,s,i,j = 1,...,k).$$

Тогда через

$$\mathfrak{S} = \mathfrak{S}(k,q) = (V,*)$$

обозначим магму $\mathfrak{S}$ с множеством носителем V и бинарной алгебраической операцией $*$, которую задают равенства (1).

[1]Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант 16-01-00707.

Данная работа посвящена изучению *подсистем* магм $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}(k,q) = (V,*)$. Рассмотрим следующую общую задачу

Задача 1. *Описать подсистемы некоторой фиксированной алгебраической системы $\mathfrak{A}$.*

Данная задача исследуется в этой работе, когда $\mathfrak{A} = \mathfrak{S}(k,q)$. Основной результат работы сформулирован в виде теоремы 1 и 2.

Ниже приведем определения *подсистемы* для случая магмы и *порождающего множества* некоторой подсистемы для магмы. Приведенные ниже определения 2 и 3 для случая магм получаются из соответствующих общих определений для случая произвольной алгебраической системы (см. [3, стр. 53 и стр. 55]).

Определение 2. *Пусть $\mathfrak{A} = (A,*)$ – некоторая магма и $A_1 \subseteq A$ множество такое, что для любых $x,y \in A_1$ выполняется включение $x*y \in A_1$. Полагаем, что бинарная операция $*_1$ на множестве A_1 вводится равенством $x *_1 y = x*y$ для всяких $x,y \in A_1$. Тогда магма $\mathfrak{A}_1 = (A_1, *_1)$ будет называться подсистемой магмы $\mathfrak{A}_1$.*

Поскольку операция $*_1$ полностью определяется операцией $*$, то нижний индекс будем опускать и писать $\mathfrak{A}_1 = (A_1,*)$. В этой работе последнее соглашение к двусмысленности не приведет.

Определение 3. *Пусть $\mathfrak{A} = (A,*)$ – некоторая магма и B – некоторое подмножество множества A. Тогда пересечение всех подсистем магмы $\mathfrak{A}$, содержащих множество B, обозначим символом $\mathfrak{B}$. Будем говорить, что B – порождающее множество подсистемы $\mathfrak{B}$. Если $\mathfrak{B}$ совпадает с $\mathfrak{A}$, то множество B называем порождающим множеством магмы $\mathfrak{A}$.*

Можно показать (см. [3, стр. 54]), что пересечение $\mathfrak{B}$ не пусто и является подсистемой магмы $\mathfrak{A}$. Множество M (из определения 1) является порождающим множеством магмы $\mathfrak{S}$.

Для формулировки основного результата введем некоторые дополнительные объекты.

Зафиксируем произвольное натуральное число k и кортеж

$$q = (\beta_1, \beta_2, ..., \beta_k, \beta_1', \beta_2', ..., \beta_k') \in S_k^{2k}$$

(тем самым мы зафиксировали носитемь V и магму $\mathfrak{S}(k,q) = (V,*)$). Далее, для каждого индекса $i \in \{1,...,k\}$ введем множество перестановок $M_i \subset S_k$, состоящее из всевозможных произведений перестановок β_i и β_i'. И введем множество

$$A_i := \{a_i\} \cup \{b_{ii}\} \cup \left\{b_{\gamma_1(i),\gamma_2(i)} \mid \gamma_1,\gamma_2 \in M_i\right\}) \subset V.$$

Как обычно, если K – подмножество множества V, то

$$K*K := \{x*y \mid x \in K,\ y \in K\}.$$

Были доказаны следующие теоремы 1 и 2.

Теорема 1. *Пусть задана магма $\mathfrak{S}(k,q) = (V,*)$, L – произвольное подмножество множества $M*M$ и задано множество $B(L) := L*L$. Тогда для всякого $i \in \{1,...,k\}$ магма $\mathfrak{A}_\mathrm{i} := (A_i,*)$ является подсистемой магмы $\mathfrak{S}(k,q)$, порожденной множеством $\{a_i\}$. Кроме того, $\mathfrak{B}(L) := (B(L),*)$ – подсистема магмы $\mathfrak{S}(k,q)$, порожденная множеством L. При любом непустом подмножестве $L \subseteq M*M$ подсистема $\mathfrak{B}(L)$ будет являться полугруппой. Полугруппа $\mathfrak{B}(L)$ является моноидом тогда и только тогда, когда множество L состоит из одного элемента, в этом случае $B(L) = L$.*

Теорема 2. *Пусть задана магма $\mathfrak{S}(k,q) = (V,*)$ и Q – подмножество множества носителя V такое, что $Q = Q_1 \cup Q_2$ для подходящих непустых подмножеств:*

$$Q_1 := \{a_{s_1}, ..., a_{s_m}\} \subseteq M, \quad Q_2 := \{b_{u_1 v_1}, ..., b_{u_d v_d}\} \subseteq M * M.$$

Кроме того, полагаем, что

$$D_1 := (Q_1 * Q_2) \cup (Q_2 * Q_1), \quad D_2 := Q_1 * Q_1,$$

$$D_3 := (A_{s_1} \setminus \{a_{s_1}\}) \cup (A_{s_2} \setminus \{a_{s_2}\}) \cup ... \cup (A_{s_m} \setminus \{a_{s_m}\}),$$

$$W(Q) := ((D_1 \cup D_2 \cup D_3 \cup Q_2) * (D_1 \cup D_2 \cup D_3 \cup Q_2)) \cup Q_1.$$

Тогда магма $\mathfrak{W}(Q) = (W(Q),*)$ является подсистемой магмы $\mathfrak{S}(k,q)$, а множество Q является порождающим множеством подсистемы $\mathfrak{W}(Q)$.

Если $Q = Q_1$ (случай, когда Q_2 – пустое множество), то

$$\mathfrak{R}(Q) := (((D_2 \cup D_3) * (D_2 \cup D_3)) \cup Q_1, *)$$

является подсистемой магмы $\mathfrak{S}(k,q)$, порожденной множеством Q.

Теоремы 1 и 2 дают поэлементное описание подсистем $\mathfrak{W}(Q), \mathfrak{R}(Q), \mathfrak{A}_{\mathfrak{i}}$ и $\mathfrak{B}(L)$ магмы $\mathfrak{S}(k,q) = (V,*)$. Теоремы 1 и 2 дают решение задачи 1 (в виде поэлементного описания подсистем), когда $\mathfrak{A} = \mathfrak{S}(k,q)$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Плоткин Б.И. Группы автоморфизмов алгебраических систем – Москва: Издательство Наука. 1966. 604 С.

2. Литаврин А. В. Автоморфизмы некоторых магм порядка $k + k^2$ // Известия Иркутского государственного университета. Серия Математика. 2018. Т. 26. С. 47–61

3. Мальцев А.И. Алгебраические системы / А.И. Мальцев // Москва. Издательство "Наука", 1970.

Сибирский федеральный университет,
Siberian Federal University

———————————————————————————

УДК 512.56

Алгебраические множества и внутренние гомоморфизмы универсальных алгебр

А. Г. Пинус (Россия, Новосибирск)
Новосибирский государственный технический университет.
e-mail: ag.pinus@gmail.com

Algebraic sets and innere homomorphisms of universal algebras

A. G. Pinus (Russia, Novosibirsk)
Novosibirsk state technical university
e-mail: ag.pinus@gmail.com

Напомним, что множество $B \subseteq A^m$ называется алгебраическим для универсальной алгебры $\mathfrak{A} =< A; \sigma >$, если B суть совокупность решений в $\mathfrak{A}$ некоторой (возможно бесконечной) системы термальных уравнений. *Обобщенно алгебраическим множеством* для алгебры $\mathfrak{A}$ назовем любое объединение алгебраических для $\mathfrak{A}$ множеств. Внутренним гомоморфизмом алгебры $\mathfrak{A}$ называется любой гомоморфизм между ее подалгебрами. Через $Ihm\mathfrak{A}$ обозначим полугруппу всех внутренних гомоморфизмов алгебры $\mathfrak{A}$. Кортеж $< a_1, \ldots, a_m >$ элементов алгебры $\mathfrak{A}$ называется $Ihm\mathfrak{A}$-образом кортежа $< b_1, \ldots, b_m >$ элементов из $\mathfrak{A}$, если существует $\varphi \in Ihm\mathfrak{A}$ такой, что $\varphi(b_i) = a_i$ для $i = 1, \ldots, m$. Пусть $\mathfrak{A}'$ некоторое расширение алгебры $\mathfrak{A} =< A; \sigma >$ и $< b_1, \ldots, b_m >$ кортеж элементов из $\mathfrak{A}'$. Множество $B \subseteq A^m$ назовем $Ihm\mathfrak{A}'$-*насыщенным* в $\mathfrak{A}$ *относительно кортежа* $< b_1, \ldots, b_m > \in \mathfrak{A}'$, если B – совокупность всех кортежей элементов из $\mathfrak{A}$ являющихся $Ihm\mathfrak{A}'$-образами кортежа $< b_1, \ldots, b_m >$.

Имеет место следующая характеризация алгебраических и обобщенно алгебраических множеств универсальных алгебр в терминах внутренних гомоморфизмов этих алгебр.

ТЕОРЕМА. Для любой алгебры $\mathfrak{A} =< A; \sigma >$ множество $B \subseteq A^m$

1) является обобщенно алгебраическим для $\mathfrak{A}$ тогда и только тогда, когда оно замкнуто относительно внутренних гомоморфизмов алгебры $\mathfrak{A}$.

2) является алгебраическим для $\mathfrak{A}$ тогда и только тогда, кода оно является $Ihm\mathfrak{A}'$-насыщенным в $\mathfrak{A}$ для некоторого расширения $\mathfrak{A}'$ алгебры $\mathfrak{A}$ относительно некоторого кортежа элементов из $\mathfrak{A}'$.

—————————————————————————————————

УДК 512.53+512.64

Об инверсных D-классах полугруппы булевых матриц

В. Б. Поплавский (Россия, г. Саратов)
Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского
e-mail: poplavskivb@mail.ru
Д. Г. Явкаев (Россия, г. Саратов)
Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского
e-mail: danj199416@mail.ru

On Inverse D-classes of a Semigroup of Boolean Matrices

V. B. Poplavski (Russia, Saratov)
Saratov State University
e-mail:poplavskivb@mail.ru
D. G. Yavkaev (Russia, Saratov)
Saratov State University
e-mail: danj199416@mail.ru

Обозначим множество булевых матриц с элементами из $B_2 = \{0; 1\}$ всевозможных размерностей $k \times l$, где $k = 1..n$ и $l = 1..n$ через $M_{n\times n}(B_2)$. Вместе с частичной операцией конъюктного умножения $\sqcap$ множество $M_{n\times n}(B_2)$ образует частичную полугруппу [1], [2]. Пусть D –

отношение эквивалентности Грина на $M_{n\times n}(B_2)$, разбивающее полугруппу на $D-$ классы [3]. Отображение $i : M_{n\times n}(B_2) \to M_{n\times n}(B_2)$, ставящее каждой матрице A вторичный идемпотент $i(A) = ((A \sqcap A^{T'}))^{T'}$, где T' обозначает одновременное транспонирование и взятие дополнения булевой матрицы (см. [1], [2]).

Из работ [1],[2] следует, что отображение i порождает бинарное отношение на фактормножестве $M_{n\times n}(B_2)|_D$, которое представимо в виде конечного ориентированного графа, вершинами которого служат $D-$классы частичной полугруппы $M_{n\times n}(B_2)$. Этот граф разбивается на компоненты, которые мы назовем орбитами отображения i на фактор-множестве $M_{n\times n}(B_2)|_D$. На рис.1 показаны орбиты на $M_{3\times 3}|_D$, содержащие 11 $D-$классов, которые пронумерованы на рис.1 с 1 по 11. Кружками обозначены регулярные классы, а треугольниками – нерегулярные $D-$классы. Концы стрелок каждой компоненты заканчиваются в классах D_{11}, D_5, D_6, D_7, D_{10}, которые порождаются матрицами следующим образом. Класс D_{11} порожден матрицей $\begin{pmatrix}1&1&1\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$,класс D_5 порожден матрицей $\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$,класс D_6 порожден матрицей $\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$,класс D_7 порожден матрицей $\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$. Наконец, класс D_{10} порожден матрицей $\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$.

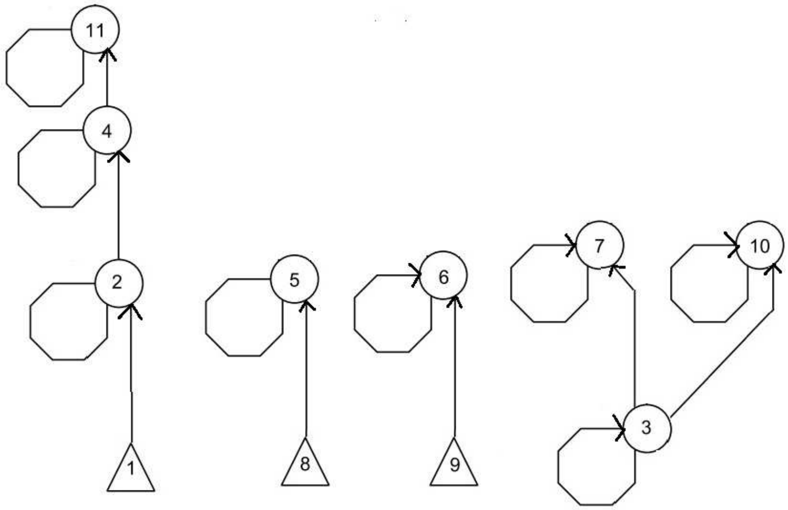


Рис. 6: Орбиты отображения $M_{3\times 3}|_D \to M_{3\times 3}\,|_D$

Определение 1. *Регулярный $D-$класс частичной полугруппы $M_{n\times n}(B_2)$ назовем инверсным, если в каждом его $R-$ и $L-$ подклассах Грина находится ровно один идемпотент.*

Все указанные на рис.1 классы D_{11}, D_5, D_6, D_7, D_{10} являются инверсными. Более того, остальные $D-$классы полугруппы $M(B_2)_{3\times 3}$ инверсными не являются.

Имеет место более общее утверждение.

Теорема 1. *Пусть $M_{n\times n}(B_2)-$ частичная полугруппа матриц всевозможных размерностей до размерности $n\times n$ с элементами из булевой алгебры $B_2 = \{0; 1\}$. Тогда орбиты отображения i на фактор-множестве $M_{n\times n}(B_2)|_D$ заканчиваются инверсными $D-$классами, причем все идемпотенты этих инверсных $D-$классов являются вторичными. Остальные регулярные $D-$классы инверсными не являются.*

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Поплавский В.Б. Об идемпотентах алгебры булевых матриц. <Известия Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика>. 2012. Т. 12, вып. 2. С. 26-33.

2. Поплавский В.Б. О приложениях ассоциативности дуальных произведений алгебры булевых матриц// Фундаментальная и прикладная математика.- 2012. Т.17, вып.4. С. 181-192

3. Клиффорд, А.; Престон, Г. Алгебраическая теория полугрупп. М:"МИР". - 1972. -Т.1. -287 с.

УДК 512.579, 512.577

Формации и псевдомногообразия унарных алгебр

А. Л. Расстригин (Россия, г. Волгоград)
Волгоградский государственный социально-педагогический университет
e-mail: rasal@fizmat.vspu.ru

Formations and pseudovarieties of unary algebras

A. L. Rasstrigin (Russia, Volgograd)
Volgograd State Socio-Pedagogical University
e-mail: rasal@fizmat.vspu.ru

Псевдомногообразием [1, 2] называется класс конечных алгебр, замкнутый относительно взятия подалгебр, гомоморфных образов и конечных прямых произведений. Псевдомногообразия играют значительную роль в алгебраической теории автоматов. Понятие формации является более общим и находит применение как в теории формальных языков [3], так и, в большей степени, теории групп [4]: *формацией* называется класс, замкнутый относительно взятия гомоморфных образов и конечных подпрямых произведений. Формации обладают схожими с многообразиями свойствами, но в отличии от многообразий могут, например, состоять только из конечных алгебр.

Таким образом, всякая формация, которая состоит из конечных алгебр и замкнута относительно подалгебр, является псевдомногообразием. В общем случае, как известно [5], замкнутости относительно взятия гомоморфных образов и произвольных подпрямых произведений достаточно для наследственности класса, но для формаций это не всегда так. К примеру, порожденная простой неабелевой группой G формация состоит из конечных прямых произведений копий группы G и не содержит ее подгрупп [6, глава II, 2.13].

В настоящем сообщении показывается, что если все основные операции рассматриваемых алгебр являются унарными, то понятия формации и псевдомногообразия совпадают:

Теорема 1. *Каждая формация конечных унарных алгебр является псевдомногообразием.*

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Eilenberg S. Automata, languages, and machines. Vol. B. — Academic Press, New York, 1976.
2. Ash C. J. Pseudovarieties, generalized varieties and similarly described classes // Journal of Algebra. 1985. Vol. 92, no. 1. P. 104–115.
3. Ballester-Bolinches A., Pin J.-É., Soler-Escrivà X. Formations of finite monoids and formal languages: Eilenberg's theorem revisited // Forum Mathematicum. 2012. Vol. 26, no. 6. P. 1731–1761.
4. Шеметков Л. А., Скиба А. Н. Формации алгебраических систем. — М.: Наука, 1989.
5. Когаловский С. Р. К теореме Биркгофа // Успехи математических наук. 1965. Т. 20, № 5. С. 206–207.
6. Doerk K., Hawkes T. Finite soluble groups. De Gruyter Expositions in Mathematics no. 4. — Walter de Gruyter, Berlin, 1992.

УДК 512.579

Подпрямо неразложимые алгебры в классе алгебр с оператором и симметрической основной операцией

В. Л. Усольцев (Россия, г. Волгоград)
Волгоградский государственный социально-педагогический университет
e-mail: usl2004@mail.ru

Subdirectly irreducible algebras in the class of algebras with one operator and the symmetric basic operation

V. L. Usoltsev (Russia, Volgograd)
Volgograd State Socio-Pedagogical University
e-mail: usl2004@mail.ru

Универсальная алгебра называется подпрямо неразложимой, если она имеет наименьшую ненулевую конгруэнцию. Известно, что любое многообразие алгебр вполне определяется своими подпрямо неразложимыми алгебрами. В связи с этим, естественный интерес вызывает задача описания подпрямо неразложимых алгебр в различных классах алгебр (см., например, [1]–[4]).

В терминах теории решеток неодноэлементная алгебра подпрямо неразложима тогда и только тогда, когда ее решетка конгруэнций имеет атом, содержащийся во всех ненулевых конгруэнциях алгебры. Элемент a решетки L с нулем 0 называется атомом, если для любого $x \in L$ из $0 < x \leqslant a$ следует, что $x = a$. Решетка называется атомной, если любой ее элемент содержит некоторый атом. В [5] были описаны атомы в решетках конгруэнций унаров, то есть алгебр с одной унарной операцией. Там же были получены необходимые и достаточные условия, при которых решетка конгруэнций унара является точечной. Решетка с нулем называется точечной (atomistic), если любой ее ненулевой элемент представляется как решеточное объединение некоторого множества атомов.

Алгеброй с операторами называется универсальная алгебра, сигнатура которой состоит из двух частей: основной, которая может содержать произвольные операции, и дополнительной, состоящей из операторов — унарных операций, действующих как эндоморфизмы относительно основных операций, то есть перестановочных с основными операциями. Подпрямо неразложимые алгебры с операторами изучались в [3], [4].

В [6] показано, что на любом унаре $\langle A, f\rangle$ можно так задать тернарную операцию $s(x, y, z)$, что алгебра $\langle A, s, f\rangle$ становится алгеброй с оператором f. Пусть $\langle A, f\rangle$ — произвольный унар и $x, y \in A$. Для любого элемента z унара $\langle A, f\rangle$ через $f^n(z)$ обозначается результат n-кратного применения операции f к элементу z; при этом $f^0(z) = z$. Положим $M_{x,y} = \{n \in \mathbb{N} \cup \{0\} \mid f^n(x) = f^n(y)\}$, а также $k(x, y) = \min\ M_{x,y}$, если $M_{x,y} \neq \emptyset$, и $k(x, y) = \infty$, если $M_{x,y} = \emptyset$. Положим далее

$$s(x, y, z) \overset{def}{=} \begin{cases} z, & \text{если } k(x, y) < k(y, z); \\ y, & \text{если } k(x, y) = k(y, z); \\ x, & \text{если } k(x, y) > k(y, z). \end{cases} \tag{1}$$

Из определения следует, что операция s удовлетворяет тождествам

$$s(y, x, x) = s(x, x, y) = s(x, y, x) = y,$$

то есть является операцией меньшинства (minority operation) и, как следствие, мальцевской операцией.

Слабой функцией почти единогласия (WNU, weak near-unanimity function) (см., например, [7]) называется идемпотентная n-арная операция d, где $n > 1$, для которой выполняются тождества $d(y, x, \dots, x) = d(x, y, \dots, x) = \ldots = d(x, x, \dots, y)$. Алгебры, имеющие термальную WNU-операцию находят применение в рамках алгебраического подхода к исследованию вычислительной сложности ограничений задачи CSP (Constraint Satisfaction Problem) и в смежных областях алгебры. Поскольку $s(x, x, x) = x$ и $s(x, x, y) = s(x, y, x) = s(y, x, x)$ для любых x, y, то операция s является тернарным вариантом слабой функции почти единогласия. В духе работы [7] операция s была названа в [6] симметрической. В [8] были описаны простые, абелевы и полиномиально полные алгебры в классе алгебр $\langle A, s, f\rangle$, в [9] — гамильтоновы алгебры данного класса.

Для любых чисел $n > 0$, $m \geqslant 0$ положим $C_n^m = \langle a | f^m(a) = f^{n+m}(a)\rangle$. Унар C_n^0 называется циклом длины n. Элемент унара называется циклическим, если подунар, порожденный этим элементом, является циклом. Через C_n^∞ обозначается объединение возрастающей последовательности унаров $C_n^{t_1} \subseteq C_n^{t_2} \subseteq \ldots$, где $n > 0$ и $0 \leqslant t_1 < t_2 < \ldots$. Элемент a унара называется периодическим, если $f^t(a) = f^{t+n}(a)$ для некоторых $t \geqslant 0$ и $n \geqslant 1$, и непериодическим в противном случае. Через $T(A)$ и $D(A)$ обозначаются множества всех периодических и непериодических элементов унара A соответственно. Унар A называется периодическим, если $A = T(A)$, и унаром без кручения, если $A = D(A)$. Если a — периодический элемент, то наименьшее из чисел t, для которых $f^t(a) = f^{t+n}(a)$ при некоторых $n \geqslant 1$, называется глубиной элемента a и обозначается через $t(a)$. Глубиной $t(A)$ унара A называется наибольшая из глубин его периодических элементов, если $T(A) \neq \emptyset$. Объединение двух непересекающихся унаров B и C называется их суммой. Унар $\langle A, f\rangle$ называется связным, если для любых $x, y \in A$ выполняется условие $f^n(x) = f^m(y)$ для некоторых $n, m \geqslant 0$. Максимальный по включению связный подунар унара A называется компонентой связности унара A. Элемент a унара называется узловым, если найдутся такие различные элементы b и c, отличные от a, что $f(b) = a = f(c)$. Элемент a унара $\langle A, f\rangle$ называется неподвижным, если $f(a) = a$. Связный унар с неподвижным элементом называется корнем.

Пусть B — подунар произвольного унара $\langle A, f\rangle$. Через θ_B обозначается конгруэнция унара $\langle A, f\rangle$, определенная по правилу [1]: условие $x\theta_B y$ для $x, y \in A$ выполняется тогда и только тогда, когда либо $x = y$, либо $x, y \in B$.

Пусть v — узловой элемент унара $\langle A, f\rangle$. Через θ_v обозначается конгруэнция унара $\langle A, f\rangle$, определенная по правилу [4]: условие $x\theta_v y$ для любых $x, y \in A$ выполняется тогда и только тогда, когда либо $x = y$, либо $x, y \in f^{-1}(v)$.

Через $\bigtriangledown_A$ обозначается конгруэнция $A \times A$ алгебры A.

Теорема 1. *Если $\langle A, s, f\rangle$ — алгебра с оператором f и операцией $s(x, y, z)$, определенной по правилу (1), то решетка конгруэнций алгебры $\langle A, s, f\rangle$ является атомной.*

Следствие 1. *Неодноэлементная алгебра $\langle A, s, f\rangle$ подпрямо неразложима тогда и только тогда, когда решетка ее конгруэнций имеет единственный атом.*

Теорема 2. *Пусть $\langle A, s, f\rangle$ — алгебра с оператором f и операцией $s(x, y, z)$, определенной по правилу (1). Атомами решетки конгруэнций алгебры $\langle A, s, f\rangle$ являются те и только те конгруэнции, которые определены одним из следующих способов:*
1) $\bigtriangledown_A$, если операция f инъективна на A, либо унар $\langle A, f\rangle$ является корнем глубины 1;
2) θ_v, если унар $\langle A, f\rangle$ неизоморфен корню глубины 1 и содержит узловой элемент v;
3) θ_B, если унар $\langle A, f\rangle$ неизоморфен корню глубины 1 и имеет собственный подунар $B \cong C_1^1$, где для всех $x \in A \setminus B$ элемент $f(x)$ не совпадает с неподвижным элементом подунара B.

Теорема 3. *Пусть $\langle A, s, f\rangle$ — алгебра с оператором f и операцией $s(x, y, z)$, определенной по правилу (1). Алгебра $\langle A, s, f\rangle$ подпрямо неразложима тогда и только тогда, когда унар $\langle A, f\rangle$ удовлетворяет одному из следующих условий:*
1) $\langle A, f\rangle$ — унар с инъективной операцией;
2) $\langle A, f\rangle$ изоморфен C_1^t, где $t \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$;
3) $\langle A, f\rangle$ — связный периодический унар, имеющий единственный узловой элемент, который является циклическим;
4) $\langle A, f\rangle$ — связный унар без кручения, имеющий единственный узловой элемент;
5) $\langle A, f\rangle$ является суммой одной компоненты связности вида 2)–4) и произвольного числа компонент вида 1).

Теорема 4. *Пусть $\langle A, s, f\rangle$ — алгебра с оператором f и операцией $s(x, y, z)$, определенной по правилу (1). Решетка конгруэнций алгебры $\langle A, s, f\rangle$ является точечной тогда и только тогда, когда $\langle A, f\rangle$ удовлетворяет одному из следующих условий:*
1) операция f инъективна на A;
2) унар $\langle A, f\rangle$ содержит такой элемент a, что $f(x) = a$ для любого $x \in A$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Wenzel G. H. Subdirect irreducibility and equational compactness in unary algebras $\langle A; f\rangle$ // Arch. Math. (Basel) 21. 1970. P. 256–264.

2. Płonka J. Subdirectly irreducible groupoids in some varieties // Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae. 1983. Vol. 24. № 4. P. 631–645.

3. Celani S. A. Simple and subdirectly irreducibles bounded distributive lattices with unary operators // International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences. Vol. 2006, Article ID 21835, p. 1—20.

4. Усольцев В. Л. О подпрямо неразложимых унарах с мальцевской операцией // Изв. Волгоградского гос. пед. ун-та, сер. "Ест. и физ.-мат. науки". 2005. № 4(13). С. 17–24.

5. Berman J. On the congruence lattices of unary algebras // Proc. Amer. Math. Soc. 1972. Vol. 36. P. 34–38.

6. Усольцев В. Л. Свободные алгебры многообразия унаров с мальцевской операцией p, заданного тождеством $p(x, y, x) = y$ // Чебышевский сборник. 2011. Том 12, № 2(38). С. 127–134.

7. Maróti M., McKenzie R. Existence theorems for weakly symmetric operations // Algebra Universalis. 2008. Vol. 59. № 3–4. P. 463–489.

8. Усольцев В. Л. О полиномиально полных и абелевых унарах с мальцевской операцией // Уч. зап. Орловского гос. ун-та. 2012. Том 6(50), ч. 2. С. 229–236.

9. Усольцев В. Л. О гамильтоновых тернарных алгебрах с операторами // Чебышевский сборник. 2014. Том 15, № 3(51). С. 100–113.

———————————————————————————

УДК 512. 548

Полиадическая группа гомоморфизмов из n-группы в полуабелеву n-группу

Н. А. Щучкин (Россия, г. Волгоград)
Волгоградский государственный социально-педагогический университет
e-mail: nikolaj_shchuchkin@mail.ru

Poliadic group of gomomorphisms from n-group in semiabelian n-group

N. A. Shchuchkin (Russia, Volgograd)
Volgograd State Socio-Pedagogical University
e-mail: nikolaj_shchuchkin@mail.ru

1. Введение. Известно, что гомоморфизмы любой группы в абелеву группу образуют абелеву группу по сложению гомоморфизмов. В общем случае аналогичным свойством обладают абелевы алгебры произвольной сигнатуры (смотри, например, [1], стр. 87). Здесь мы построим n-группу гомоморфизмов из n-группы в полуабелеву n-группу.

Одной из основных проблем, касающихся n-групп гомоморфизмов из n-группы в полуабелеву n-группу, является отыскание полуабелевой n-группы, которая была бы изоморфна n-группе гомоморфизмов из некоторой известной n-группы в полуабелеву n-группу. Если такая n-группа будет найдена, то можно сказать, что удалось описать n-группу гомоморфизмов из некоторой известной n-группы в полуабелеву n-группу. Ниже приведено описание n-группы гомоморфизмов из бесконечной полуциклической n-группы в полуабелеву n-группу.

2. Предварительные сведения. На полуабелевой n-группе $\langle G, f\rangle$ для элемента c определим сложение $a + b = f(a, c, \ldots, c, \bar{c}, b)$. Здесь $\bar{c}$ — решение уравнения $f(c, \ldots, c, x) = c$. Получим абелеву группу G. Для автоморфизма $\varphi(x) = f(c, x, c, \ldots, c, \bar{c})$ и элемента $d = f(c, \ldots, c)$ группы G верны равенства

$$\varphi(d) = d, \quad \varphi^{n-1}(x) = x \ \text{ для любого элемента } x \in G, \tag{1}$$

$$f(a_1, \ldots, a_n) = a_1 + \varphi(a_2) + \ldots + \varphi^{n-2}(a_{n-1}) + a_n + d \tag{2}$$

для любых элементов $a_1, \ldots, a_n \in G$. Группу G называют ретрактом n-группы $\langle G, f\rangle$. Верно и обратно: в абелевой группе G для автоморфизма φ и элемента d с условиями (1) задается полуабелева n-группа $\langle G, f\rangle$, где f действует по (2). Такую n-группу $\langle G, f\rangle$ называют (φ, d)-определенной на G и обозначают $der_{\varphi,d}G$. Известно, что для абелевых n-групп и только для них автоморфизм φ является тождественным.

Если ретракт n-группы является циклической группой, то ее называют полуциклической [2]. На группе целых чисел Z строим n-группу $\langle Z, f_1\rangle = der_{1_Z,l}Z$, где $0 \le l \le [\frac{n-1}{2}]$, она будет абелевой полуциклической. На группе Z зададим не абелеву полуциклическую n-группу $\langle Z, f_2\rangle = der_{\varphi,0}Z$ для $n = 2k + 1$, $k \in N$, где $\varphi(z) = -z$. Любая бесконечная полуциклическая n-группа изоморфна $\langle Z, f_1\rangle$ либо $\langle Z, f_2\rangle$ для нечетных n (см. [3]). В первом случае будем говорить, что такая n-группа имеет тип $(\infty, 1, l)$, а во втором случае — имеет тип $(\infty, -1, 0)$. Если n-группа порождается одним элементом a, то ее называют циклической. Примером циклической n-группы служит $\langle Z, f_1\rangle = der_{1_Z,1}Z$. Любая бесконечная циклическая n-группа изоморфна этой n-группе (см. [3]).

3. Результаты. Рассмотрим множество $Hom(G, C)$ всех гомоморфизмов из n-группы $\langle G, f_1\rangle$ в полуабелеву n-группу $\langle C, f_2\rangle$ и на этом множестве определим n-арную операцию g по правилу $g(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)(x) = f_2(\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)), x \in G$.

Отметим, что множество $Hom(G, C)$ может быть пустым, в отличие от множества всех гомоморфизмов из группы в абелеву группу, в этом множестве, по крайней мере, есть нулевой гомоморфизм. Дальше, если рассматривается множество всех гомоморфизмов из n-группы в полуабелеву n-группу, то будем считать, что это множество не пусто.

Предложение 1. *Множество $Hom(G, C)$ всех гомоморфизмов из n-группы $\langle G, f_1\rangle$ в полуабелеву n-группу $\langle C, f_2\rangle$ с n-арной операцией g образует полуабелеву n-группу.*

Следствие 1. *Множество $Hom(G, C)$ всех гомоморфизмов из n-группы $\langle G, f_1\rangle$ в абелеву n-группу $\langle C, f_2\rangle$ с n-арной операцией g образует абелеву n-группу.*

У изоморфных n-групп и изоморфных полуабелевых n-групп n-группы гомоморфизмов также изоморфны, более того, верна

Теорема 1. *Изоморфизмы ψ_1 n-групп $\langle G, f_1\rangle$ и $\langle G', f'_1\rangle$ и ψ_2 полуабелевых n-групп $\langle C, f_2\rangle$ и $\langle C', f'_2\rangle$ индуцируют изоморфизм τ n-групп гомоморфизмов $\langle Hom(G, C), g\rangle$ и $\langle Hom(G', C'), g'\rangle$, который действует по правилу $\tau : \alpha \to \psi_2 \circ \alpha \circ \psi_1^{-1}$.*

Вначале рассмотрим n-группу гомоморфизмов $\langle Hom(Z, C), g\rangle$ из бесконечной абелевой полуциклической n-группы $\langle Z, f_1\rangle = der_{1_Z,l}Z$ (Z — аддитивная группа целых чисел, $0 \le l \le \frac{n-1}{2}$) в полуабелеву n-группу $\langle C, f_2\rangle$. На n-группе $\langle C, f_2\rangle$ строим ретракт $C = ret_c\langle C, f_2\rangle$, причем, имеются элемент $d_2 = f_2(\overset{(n)}{c})$ и автоморфизм $\varphi_2(x) = f_2(c, x, \overset{(n-3)}{c}, \bar{c})$ группы C, которые удовлетворяют равенствам (1), (2).

Для фиксированного целого числа l выделим множество P_1 таких упорядоченных пар элементов (a, u), где $a, u \in C$, которые удовлетворяют равенству

$$la = d_2 + \widetilde{\varphi}_2(u),$$

где $\widetilde{\varphi_2}(x) = x+\varphi_2(x)+\ldots+\varphi_2^{n-2}(x), x \in C$ — эндоморфизм группы C, а для первой компоненты этих пар верно равенство $\varphi_2(a) = a$. На этом множестве определим n-арную операцию h_1 по правилу $h_1((a_1, u_1), \ldots, (a_n, u_n)) = (a_1+\ldots+a_n, f_2(u_1, \ldots, u_n))$. Получим полуабелеву n-группу $\langle P_1, h_1\rangle$.

Теорема 2. *Полубелева n-группа $\langle P_1, h_1\rangle$, построенная перед теоремой, изоморфна n-группе гомоморфизмов из бесконечной абелевой полуциклической n-группы $\langle Z, f_1\rangle = der_{1_Z,l}Z$ $(0 \leq l \leq \frac{n-1}{2})$ в n-группу $\langle C, f_2\rangle$.*

Следствие 2. *Полубелева n-группа $\langle P_1, h_1\rangle$, построенная перед теоремой 2, изоморфна n-группе гомоморфизмов из бесконечной абелевой полуциклической n-группы $\langle G, f\rangle$ типа $(\infty, 1, l)$ в полуабелеву n-группу $\langle C, f_2\rangle$.*

Следствие 3. *Полубелева n-группа $\langle P, h\rangle$, построенная перед теоремой 2 при $l = 1$, изоморфна n-группе гомоморфизмов из бесконечной циклической n-группы $\langle G, f\rangle$ в полуабелеву n-группу $\langle C, f_2\rangle$.*

Теперь рассмотрим n-группу гомоморфизмов $\langle Hom(Z, A), g\rangle$ из бесконечной абелевой полуциклической n-группы $\langle Z, f_1\rangle = der_{1_Z,l}Z$ $(0 \leq l \leq \frac{n-1}{2})$ в абелеву n-группу $\langle A, f_2\rangle$. На n-группе $\langle A, f_2\rangle$ также строим ретракт $A = ret_c\langle C, f_2\rangle$, причем, имеется элемент $d_2 = f_2(\overset{(n)}{c})$, а автоморфизм $\varphi_2(x) = f_2(c, x, \overset{(n-3)}{c}, \bar{c})$ группы A будет тождественным, кроме того, верно равенство $f_2(x_1, \ldots, x_n) = x_1 + \ldots + x_n + d_2,\ x_1, \ldots, x_n \in A$.

Для фиксированного целого числа l выделим множество R_1 таких упорядоченных пар элементов (a, u), где $a, u \in A$, которые удовлетворяют равенству

$$la = d_2 + (n-1)u.$$

На этом множестве определим n-арную операцию h_1 по правилу

$$h_1((a_1, u_1), \ldots, (a_n, u_n)) = (a_1 + \ldots + a_n, u_1 + \ldots + u_n + d_2).$$

Получим абелеву n-группу $\langle R_1, h_1\rangle$. Из теоремы 2 получаем

Следствие 4. *Абелева n-группа $\langle R_1, h_1\rangle$, построенная перед следствием, изоморфна n-группе гомоморфизмов из бесконечной абелевой полуциклической n-группы $\langle Z, f_1\rangle = der_{1_Z,l}Z$ $(0 \leq l \leq \frac{n-1}{2})$ в абелеву n-группу $\langle A, f_2\rangle$.*

Следствие 5. *Абелева n-группа $\langle R_1, h_1\rangle$, построенная перед следствием* 4, изоморфна n-группе гомоморфизмов из бесконечной абелевой полуциклической n-группы $\langle G, f\rangle$ типа $(\infty, 1, l)$ в абелеву n-группу $\langle A, f_2\rangle$.

Если при построении абелевой n-группы $\langle R, h_1\rangle$ перед следствием 4 положить $l = 1$, то из следствия 4 получаем

Следствие 6. *Абелева n-группа $\langle R_1, h_1\rangle$, построенная перед следствием* 4 для $l = 1$, изоморфна n-группе гомоморфизмов $\langle Hom(G, A), g\rangle$ из бесконечной циклической n-группы $\langle G, f\rangle$ в абелеву n-группу $\langle A, f_2\rangle$.

Опишем теперь n-группу гомоморфизмов из бесконечной не абелевой полуциклической n-группы в полуабелеву n-группу. Полагаем n — нечетное число и $n > 1$. Рассмотрим n-группу гомоморфизмов $\langle Hom(Z, C), g\rangle$ из бесконечной полуциклической n-группы $\langle Z, f_1\rangle = der_{\varphi_1,0}Z$ (Z — аддитивная группа целых чисел, $\varphi_1(x) = -x, x \in Z$) в полуабелеву n-группу $\langle C, f_2\rangle$.

На n-группе $\langle C, f_2\rangle$ строим ретракт $C = ret_c\langle C, f_2\rangle$. Элемент $d_2 = f_2(\overset{(n)}{c})$ и автоморфизм $\varphi_2(x) = f_2(c, x, \overset{(n-3)}{c}, \bar{c})$ группы C удовлетворяют равенствам (1), (2).

В группе C выделим множество H таких элементов a, для которых верно равенство $\varphi_2(a) = -a$, т.е. $H = \{a \in C \mid \varphi_2(a) = -a\}$. Очевидно H подгруппа в C и ограничение автоморфизма φ_2 на H будет автоморфизмом подгруппы H, причем это ограничение и нуль группы H удовлетворяют равенствам (1), (2). На подгруппе H определим полуабелеву n-группу $\langle H, h\rangle = der_{\varphi_2,0}H$, где h действует по правилу

$$h(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n) = a_1 + \varphi_2(a_2) + \ldots + \varphi_2^{n-2}(a_{n-1}) + a_n,$$

$a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n \in H$.

Далее, обозначим через T множество всех таких элементов u из C, что образ этих элементов при эндоморфизме $\widetilde{\varphi_2} = 1_C + \varphi_2 + \ldots + \varphi_2^{n-2}$ группы C (этот эндоморфизм нам уже встречался перед теоремой 2) равен $-d_2$, т.е. $T = \{u \in C \mid \widetilde{\varphi_2}(u) = -d_2\}$. Заметим, что элемент u является идемпотентом тогда и только тогда, когда верно равенство $\widetilde{\varphi_2}(u) = -d_2$ (проверяется непосредственно). Значит, T — множество всех идемпотентов полуабелевой n-группы $\langle C, f_2\rangle$. Получим подгруппу $\langle T, f_2\rangle$ n-группы $\langle C, f_2\rangle$, если $T \neq \emptyset$.

Теорема 3. *Для нечетного числа $n > 1$ декартово произведение построенных выше полуабелевых n-групп $\langle H, h\rangle \times \langle T, f_2\rangle$ изоморфно n-группе гомоморфизмов из бесконечной полуциклической n-группы $\langle Z, f_1\rangle = der_{\varphi_1,0}Z$ (Z — аддитивная группа целых чисел, $\varphi_1(x) = -x, x \in Z$) в полуабелеву n-группу $\langle C, f_2\rangle$ с не пустым множеством идемпотентов T.*

Следствие 7. *Для нечетного числа $n > 1$ декартово произведение построенных перед теоремой 3 полуабелевых n-групп $\langle H, h\rangle \times \langle T, f_2\rangle$ изоморфно n-группе гомоморфизмов из бесконечной полуциклической n-группы $\langle G, f\rangle$ типа $(\infty, -1, 0)$ в полуабелеву n-группу $\langle C, f_2\rangle$ с не пустым множеством идемпотентов T.*

Для нечетного числа $n > 1$ рассмотрим теперь n-группу гомоморфизмов $\langle Hom(Z, A), g\rangle$ из бесконечной полуциклической n-группы $\langle Z, f_1\rangle = der_{\varphi_1,0}Z$ (Z — аддитивная группа целых чисел, $\varphi_1(x) = -x, x \in Z$) в абелеву n-группу $\langle A, f_2\rangle$.

На n-группе $\langle A, f_2\rangle$ строим ретракт $A = ret_c\langle A, f_2\rangle$. Автоморфизм $\varphi_2(x) = f_2(c, x, \overset{(n-3)}{c}, \bar{c})$ группы A будет тождественным, n-арная операция f_2 удовлетворяет равенству

$$f_2(x_1, \ldots, x_n) = x_1 + \ldots + x_n + d_2, \quad x_1, \ldots, x_n \in A,$$

где $d_2 = f_2(\overset{(n)}{c})$.

В группе A выбираем множество M таких элементов a, для которых верно равенство $a = -a$, т.е. $M = \{a \in A \mid a = -a\}$. Очевидно M подгруппа в A. На подгруппе M определим абелеву n-группу $\langle M, h\rangle = der_{1_H,0}H$, где h действует по правилу $h(a_1, \ldots, a_n) = a_1 + \ldots + a_n$, $a_1, \ldots, a_n \in M$.

Далее, обозначим через E множество всех таких элементов u из A, для которых верно равенство $(n-1)u = -d_2$, т.е. $E = \{u \in A \mid (n-1)u = -d_2\}$. Все элементы из E будут идемпотентами и каждый идемпотент n-группы $\langle A, f_2\rangle$ принадлежит E (проверяется непосредственно). Кроме того, в абелевой n-группе каждый идемпотент является единицей. Значит, E — множество всех единиц абелевой n-группы $\langle A, f_2\rangle$. Получим подгруппу $\langle E, f_2\rangle$ n-группы $\langle A, f_2\rangle$, если $E \neq \emptyset$.

Следствие 8. *Для нечетного числа $n > 1$ декартово произведение построенных перед следствием абелевых n-групп $\langle M, h\rangle \times \langle E, f_2\rangle$ изоморфно n-группе гомоморфизмов из бесконечной полуциклической n-группы $\langle Z, f_1\rangle = der_{\varphi_1,0}Z$ (Z — аддитивная группа целых чисел, $\varphi_1(x) = -x, x \in Z$) в абелеву n-группу $\langle A, f_2\rangle$ с не пустым множеством единиц E.*

Следствие 9. *Для нечетного числа $n > 1$ декартово произведение построенных перед следствием* 8 абелевых n-групп $\langle M, h\rangle \times \langle E, f_2\rangle$ изоморфно n-группе гомоморфизмов из бесконечной полуциклической n-группы $\langle G, f\rangle$ типа $(\infty, -1, 0)$ в абелеву n-группу $\langle A, f_2\rangle$ с не пустым множеством единиц E.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Курош А. Г. Обща алгебра, Лекции 1969-1970 уч. года — М.: Наука, 1974. 155 с.

2. Гальмак А. М. n-Арные группы : Часть 1. — Гомель: Гомельский гос. университет им. Ф. Скорины, 2003. 195 с.

3. Щучкин Н. А. Полуциклические n-арные группы // Известия ГГУ им. Ф. Скорины. 2009. 3 (54). С. 186-194.

Секция 3. Кольца и модули

УДК 512.554

Абелевы идеалы и автоморфизмы алгебры нефинитарных нильтреугольных матриц

Ю. В. Беккер (Россия, г. Красноярск)
Сибирский Федеральный Университет
e-mail:angel220@bk.ru
В. М. Левчук (Россия, г. Красноярск)
Сибирский Федеральный Университет
e-mail:vlevchuk@sfu-kras.ru
Е. А. Сотникова (Россия, г. Красноярск)
Сибирский Федеральный Университет
e-mail: vlevchuk@sfu-kras.ru

Abelian ideals and automorphisms of the algebra of non-finitary nil-triangular matrices

J. V. Bekker (Russia, Kranoyarsk)
Siberian Federal University
e-mail::angel220@bk.ru
V. M. Levchuk (Russia, Kranoyarsk)
Siberian Federal University
e-mail: vlevchuk@sfu-kras.ru
E. A. Sotnikova (Russia, Kranoyarsk)
Siberian Federal University
e-mail: vlevchuk@sfu-kras.ru

Если R — подкольцо ассоциативного кольца с единицей, то $1 + R$ всегда есть полугруппа по умножению, другими словами, R – полугруппа с единицей 0 относительно присоединенного умножения $\alpha \circ \beta = \alpha + \beta + \alpha\beta \ \ (\alpha, \beta \in R)$.

Ассоциативное кольцо R называется *радикальным*, если $(R, \circ)$ — группа.

Пусть Γ — произвольная цепь (или линейно упорядоченное множество) с отношением порядка $\leq$, и K — ассоциативное кольцо с единицей. Γ-матрицу $\alpha = ||a_{ij}||_{i,j\in\Gamma}$ над K назовем финитарной, если число ее ненулевых элементов конечно. Ясно, что все такие Γ-матрицы образуют кольцо $M(\Gamma, K)$ относительно обычных матричных операций (по-координатного) сложения и умножения

$$\|a_{ij}\| \cdot \|b_{ij}\| = \|c_{ij}\|, \quad c_{ij} = \sum_{k\in\Gamma} a_{ik} \cdot b_{kj}. \tag{1}$$

Нильтреугольное подкольцо $NT(\Gamma, K)$ образуют Γ-матрицы α с условием (нижней) нильтреугольности $a_{ij} = 0$ для всех $i > j$.

Для произвольной бесконечной цепи Γ обычное умножение (1) всех нильтреугольных Γ-матриц (без предположения финитарности) не является корректным. Однако оно остается корректным для цепи $\Gamma = \{1, 2, 3, \cdots\}$ натуральных чисел. Полученное кольцо обозначаем через $GNT(\Gamma, K)$.

Теорема 1. *Кольцо $NT(\Gamma, K)$ финитарных нильтреугольных Γ-матриц над K радикально для любой цепи Γ. Когда $\Gamma = \{1, 2, 3, \cdots\}$ – цепь натуральных чисел, кольцо $GNT(\Gamma, K)$ также радикально.*

В общем случае $NT(\Gamma, K)$ не обязано быть даже кольцом, умножение не всегда определено. Однако для цепи Г- натуральных чисел это радикальное кольцо, хотя и не является нилькольцом. Выделим в кольце $GNT(\Gamma, K)$ бесконечные идеалы

$$\widetilde{T}_{ij} = \langle \alpha = ||a_{uv}|| \mid a_{uv} = 0 \text{ при } \ u < i \ \text{ или } \ \ v > j \rangle \quad (i, j \in \Gamma, \ i > j). \tag{2}$$

и идеалы с конечным числом элементов

$$T_{ij} = \langle \alpha = ||a_{uv}|| \mid a_{uv} = 0 \text{ при } \ u < i \ \text{ или } \ \ v > j \rangle \quad (i, j \in \Gamma, \ i > j). \tag{3}$$

Основной в этом параграфе является

Теорема 2. *Пусть K — ассоциативное кольцо с единицей и без делителей нуля. Тогда идеалы $T_{i+1i}, i = 1, 2, 3, ...,$ исчерпывают максимальные абелевы идеалы, как в кольце $R = GNT(\Gamma, K)$, так и в ассоциированном кольце Ли $\Lambda(R)$. Они исчерпывают также максимальные абелевы нормальные подгруппы присоединенной группы $R^{(\circ)}$.*

С помощью теоремы исследуются автоморфизмы нефинитарных нильтреугольных алгебр. Нефинитарные обобщения унитреугольных групп $UT(n, K)$ над полем K изучались в ряде работ R.Slovik, начиная с 2009 года. В [1] начато исследование нефинитарных обобщений алгебр и колец $NT(n, K)$ нильтреугольных $n \times n$ матриц. Результаты, также можно рассматривать для классических типов B_Γ, C_Γ и D_Γ, так как $GNT(\Gamma, K)$ является нильтреугольной подалгеброй алгебры Ли.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. В. М. Левчук, А. В. Литаврин, Н. Д. Ходюня, В. В. Цыганков, Нильтреугольные подалгебры алгебр Шевалле и их обобщения. Владикав. мат. журнал, т. 17(2015), Вып. 2,С.37-46 .

2. В. М. Левчук, Автоморфизмы унипотентных подгрупп групп Шевалле. Алгебра и Логика, 29 (1990), No. 3, 315–338.

3. В. М. Левчук, Г. С. Сулейманова, Автоморфизмы и нормальное строение унипотентных подгрупп финитарных групп Шевалле. Труды Инс. Мат. и Мех. УрО РАН, т. 15 (2009), № 2, с. 1-10.

4. R. Carter, Simple Groups of Lie type. Wiley and Sons, New York, 1972

5. В. М. Левчук Некоторые локально нильпотентные кольца и их присоединенные группы. Математические заметки. 1987. Т.42. №5. С. 631-641

6. Roksana Slowik, Bijective maps of infinite triangular and unitriangular matrices preserving commutators. Linear and Multilinear Algebra. 2013. Vol. 61. 8. P. 1028-1040.

——

УДК 512.643.2

Формулы для теоретико-числовых σ-определителей

А. С. Гаспарян (Россия, г. Переславль-Залесский)
e-mail: armenak.gasparyan@yandex.ru

Formulae of Number-Theoretical σ-Determinants

A. S. Gasparyan (Pereslavl-Zalesskii, Russia)
e-mail: armenak.gasparyan@yandex.ru

1. Многомерные определители.

Теория многомерных определителей начинается с работы А.Кэли [1], в которой впервые были введены понятия гипердетерминанта и многомерного определителя. Дальнейшее развитие теории связано с именами Гaспариса, Арменанта, Гарбиери, Цейфуса, Райса, Скотта, Гегенбауэра, Олденбургера, Соколова и др. Подробнее об истории теории многомерных матриц можно узнать в монографиях Соколова [2 ,3]. Цейфус вв|"ел понятие многомерного определителя смешанного типа. Тип определителя p-мерной кубической матрицы n-го порядка $A = \|a_{i_1 \ldots, i_p}\|$ определяется его так называемой сигнатурой $\sigma \in \{0,1\}^p$, $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_p)$, причём $\sum \sigma_r = 0(mod 2)$. Число $d = \sum \sigma_r$ называется родом определителя. Определитель рода 0 суть p-мерный перманент, определитель максимального рода назван гипердетерминантом. При $p = 2$ гипердетерминант по существу есть классический определитель $det(A)$, а определитель нулевого рода, $per(A)$ — был впервые введён Бине.

Определение. *σ-определителем ($\sigma \in \{0,1\}^p$) p-мерной кубической матрицы $A = \|a_{i_1 \ldots, i_p}\|$, $i_1 \ldots, i_p = 1, \ldots, n$, называется выражение*

$$|A|^{(\sigma)} = \frac{1}{n!} \sum_{\pi_1, \ldots, \pi_p \in S_n} \prod_{r=1}^{p} (sgn(\pi_r))^{\sigma_r} \prod_{i=1}^{n} a_{\pi_1(i) \ldots \pi_p(i)} \quad . \tag{1}$$

Среди множества свойств многомерных определителей особое место занимают формулы типа Бине-Коши, выражающие σ-миноры произведений многомерных матриц через миноры матриц-сомножителей. В простейшем случае двумерных матриц это известные теоремы Бине-Коши для определителей и перманентов. Если $A \in \mathcal{M}_{m,n}(K)$, $B \in \mathcal{M}_{n,m}(K)$ и $C \in \mathcal{M}_{m,m}(K)$, причём $C = AB$, то имеют место тождества [4]:

$$\det(C) = \sum_{\omega \in Q_{m,n}} \det\left(A[1, \ldots, m|\omega]\right) \det\left(B[\omega|1, \ldots, m]\right); \tag{2}$$

$$per(C) = \sum_{\omega \in G_{m,n}} \frac{1}{\mu(\omega)} per\left(A[1, \ldots, m|\omega]\right) per\left(B[\omega|1, \ldots, m]\right), \tag{3}$$

где $Q_{m,n}$ ($G_{m,n}$) — множество всех строго возрастающих (неубывающих) m-последовательностей над $\{1, \ldots, n\}$, и $\mu(\omega) = \mu(1)! \cdots \mu(n)!$, $\mu(r)$ — кратность повторения элемента r в последовательности ω.

Гегенбауэр [5] и Олденбургер [6] доказали тождества, являющиеся аналогами тождеств (2) и (3) для многомерных определителей. Эти тождества можно представить в единой форме:

$$|AB|^{(\sigma)} = \sum_{\omega \in G_{m,n}} \frac{1}{\mu(\omega)} \left|A[e|\cdots|e|\omega|e|\cdots|e]\right|^{(\sigma^{(1)})} \cdot$$

$$\cdot \left|B[e|\cdots|e|\omega|e|\cdots|e]\right|^{(\sigma^{(2)})}. \tag{4}$$

Здесь сигнатуры σ, $\sigma(1)$ и $\sigma(2)$ должны удовлетворять условию согласованности

$$\sigma^{(1)}(r)=\sigma^{(2)}(s),$$

если умножение матриц A и B производится свёртыванием по их r-тому и s-тому индексам. Формула (4) для случая $\sigma^{(1)}(r)=\sigma^{(2)}(s)=1$ была доказана Гегенбауэром, а для случая $\sigma^{(1)}(r)=\sigma^{(2)}(s)=0$ — Олденбургером.

В работе [7] автором была введена многоместная операция умножения многомерных матриц — зв|"ездное произведение $C=A\star(B^{(1)}\cdots B^{(k)})$, определяемая соотношением

$$C_{I^{(1)}J^{(1)}\dots I^{(k)}J^{(k)}}=\sum_{i_1,\dots,i_k=1}^{n_1,\dots,n_k}A_{i_1\dots i_k}\prod_{r=1}^{k}B^{(r)}_{I^{(r)}i_rJ^{(r)}}. \qquad (5)$$

Символы $I^{(r)}$ и $J^{(r)}$ — мультииндексы, состоящие из свободных индексов.

Выберем сигнатуры σ, $\sigma^{(0)}$, $\sigma^{(1)},\dots,\sigma^{(k)}$ для определителей кубических подматриц (σ-миноров) матриц $C,A,B^{(1)},\dots,B^{(k)}$, подчинённые условиям $\sigma^{(0)}(r)=\sigma^{(r)}(i_r)$, $r=1,\dots,k$. Пусть, кроме того, все свободные индексы пробегают один и тот же ряд значений $1,\dots,m$. Тогда имеет место тождество (тождество Бине-Коши для звёздного произведения):

$$|C|^{(\sigma)}=\sum_{\omega^{(r)}\in\Omega^{(r)}_{m,n_r}}\left(\prod_{(r=1)}^{k}\mu(\omega^{(r)})\right)^{-1}\left|A[\omega^{(1)}|\cdots|\omega^{(k)}]\right|^{(\sigma^{(0)})}\cdot$$
$$\cdot\prod_{r=1}^{k}\left|B^{(r)}[e|\cdots|e|\omega^{(r)}|e|\cdots|e]\right|^{(\sigma^{(r)})}. \qquad (6)$$

2. Теоретико-числовые определители.

В 1875г. Смит [8] показал, что определитель НОД-матрицы $\|(i,j)\|$, $i,j=1,\dots,n$, где (a,b) — наибольший общий делитель a и b, равен $\phi(1)\cdots\phi(n)$, где $\phi(x)$ — функция Эйлера из теории чисел. С того времени было предложено несколько обобщений этого результата, в частности, формула Смита оказалась верной для произвольного конечного множества $\{x_1,\dots x_n\}\subset Z$, замкнутого по отношению делимости, т.е. содержащего делители всех своих элементов (см. [9]). Она была обобщена также до матриц типа $\|f(x_i,x_j)\|$ и до так называемых meet-матриц над частично упорядоченными множествами. В 1964г. Соколов обобщил формулу Смита на многомерные определители типа $|(i_1,\dots,i_p)|^{(\sigma)}$, $i_r=1,\dots,n$ (см. [3], стр. 36-39). В 1992г. Хаукканен [10] обобщил результат Соколова на определители $|(x_{i_1},\dots,x_{i_p})|^{(\sigma)}$, где $x_{i_r}\in X=\{x_1,\dots,x_n\}$, для НОД-замкнутых множеств.

3. Основные результаты.

В данной работе представлены результаты, касающиеся многомерных определителей достаточно общего вида:

$$\left|f\left((x^{(1)}_{i^{(1)}_1},\dots,x^{(1)}_{i^{(1)}_{p_1}}),\dots,(x^{(k)}_{i^{(k)}_1},\dots,x^{(k)}_{i^{(k)}_{p_k}})\right)\right|^{(\sigma^{(1)},\dots,\sigma^{(k)})},$$

где $f(u_1,\dots,u_k)$ — арифметическая функция k переменных, $x^{(r)}_{i^{(r)}_s}\in X^{(r)}_{s_r}=\{x^{(r)}_{s_r1},\dots,x^{(r)}_{s_rm}\}$, и $\sigma=(\sigma^{(1)},\dots,\sigma^{(k)})$ -составная сигнатура, полученная конкатенацией сигнатур

$$\sigma^{(r)}=(\sigma^{(r)}_1,\dots,\sigma^{(r)}_{p_r}).$$

Для заданной арифметической функции $f(m_1,\dots,m_k)$ определим новую функцию

$\Phi_f(d_1,\dots,d_k)$, равную

$$\Phi_f(d_1,\dots,d_k)=\sum_{\substack{n_r|d_r,\\ r=1,\dots,k}} f(n_1,\dots,n_k)\mu\left(\frac{d_1}{n_1}\right)\cdots\mu\left(\frac{d_k}{n_k}\right)n. \tag{7}$$

Имеет место

$$f(m_1,\dots,m_k)=$$

$$\sum_{\substack{d_r|m_r,\\ r=1,\dots,k}}\ \sum_{\substack{n_r|d_r,\\ r=1,\dots,k}} f(n_1,\dots,n_k)\,\mu\left(\frac{d_1}{n_1}\right)\cdots\mu\left(\frac{d_k}{n_k}\right)=$$

$$\sum_{\substack{d_r|m_r,\\ r=1,\dots,k}} \Phi_f(d_1,\dots,d_k). \tag{8}$$

Функция $\Phi_f(d_1,\dots,d_k)$ является обобщением функции Эйлера $\phi(d)$, так как в частном случае $f(m_1,\dots,m_k)=\prod_{r=1}^k m_r \quad \Phi_f(d_1,\dots,d_k)=\prod_{r=1}^k\phi(d_r)$ и в частности $\Phi_e(d)\equiv\phi(d)$, (e — тождественная функция).

Пусть для каждого значения $r=1,\dots,k$ задано p_r множеств целых чисел

$$X^{(r)}_{s_r}=\{x^{(r)}_{s_r1},\dots,x^{(r)}_{s_rm}\},$$

и пусть $T_r=\{y^{(r)}_1,\dots,y^{(r)}_{t_r}\}$ — минимальное замкнутое по делимости множество, содержащее множества $X^{(r)}_{s_r}$, $s_r=1,\dots,p_r$. Определим $(0,1)$-матрицы $C^{(r)}_{s_r}=(c^{(r)}_{s_ri_rj^{(r)}_{s_r}})$ следующим образом: $c^{(r)}_{s_ri_rj^{(r)}_{s_r}}=1$, если $y^{(r)}_{i_r}|x^{(r)}_{s_rj^{(r)}_{s_r}}$, и 0 в противном случае.

Лемма. *Справедливо равенство*

$$\sum_{i_1,\dots,i_k}\prod_{r=1}^{k}\prod_{s_r=1}^{p_r}c^{(r)}_{s_ri_rj^{(r)}_{s_r}}=f\left((x^{(1)}_{i^{(1)}_1},\dots,x^{(1)}_{i^{(1)}_{p_1}}),\dots,(x^{(k)}_{i^{(k)}_1},\dots,x^{(k)}_{i^{(k)}_{p_k}})\right). \tag{9}$$

Равенство (9) равносильно матричному равенству

$$\begin{aligned}F=\|f\left((x^{(1)}_{i^{(1)}_1},\dots,x^{(1)}_{i^{(1)}_{p_1}}),\dots,(x^{(k)}_{i^{(k)}_1},\dots,x^{(k)}_{i^{(k)}_{p_k}})\right)\|=&\\ \|\Phi_f(i_1,\dots,i_k)\|\star\left(C^{(1)}\cdots C^{(k)}\right),&\qquad(10)\\ \text{где}\quad C^{(r)}=I^{(p_r+1)}_{i_r}\star\left(C^{(r)}_1,\cdots C^{(r)}_{p_r}\right),\quad r=1,\dots,k.&\end{aligned}$$

Здесь $I^{(p_r+1)}_{i_r}$ — (p_r+1)-мерная кубическая единичная матрица порядка i_r.

Выберем для миноров матриц $F,\Phi_f=\|\Phi_f(i_1,\dots,i_k)\|$, $I^{(p_r+1)}_{i_r}$ и $C^{(r)}$, $r=1,\dots,k$, сигнатуры $\sigma,\sigma^{(0)}\sigma^{(1)},\dots,\sigma^{(k)}$, согласованные в определённом выше смысле.

Теорема *Имеет место тождество*

$$|F|^{(\sigma)} = \sum_{\substack{\omega^{(r)} \in \Omega^{(r)}_{m,t_r} \\ r=1,\dots,k}} \left(\prod_{r=1}^{k} \mu(\omega^{(r)})\right)^{-1} \left|\Phi_f[\omega^{(1)}|\cdots|\omega^{(k)}]\right|^{(\sigma^{(0)})} \cdot$$

$$\cdot \prod_{r=1}^{k} \left|C^{(r)}[\omega^{(r)}|e|\cdots|e]\right|^{(\sigma^{(r)})}, \qquad (11)$$

В свою очередь,

$$\left|C^{(r)}[\omega^{(r)}|e|\cdots|e]\right|^{(\sigma^{(r)})} = \prod_{s_r=1}^{p_r} \left|C^{(r)}_{s_r}[\omega^{(r)}|e]\right|^{(\sigma^{(0)}_r, \sigma^{(r)}_{s_r})}, \quad r = 1, \dots, k.$$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Cayley A., On the notations and properties of certainfunctions resolable into a series of determinants, Trans. Cambridge Phil. Soc. 8 (1842/9) 85-88.
2. Соколов Н.П., Пространственные матрицы и их приложения. М., 1960.
3. Соколов Н.П., Введение в теорию многомерных матриц. Киев, Наукова думка, 1972.
4. Маркус М., Минк Х., Обзор по теории матриц и матричных неравенств. М., Наука, 1972.
5. Gegenbauer L., Einige Satze uber Determinanten hoheren Ranges. Denkschr. Akad. Wiss.Vien Math.-naturwiss. C1 57 (1890) 735-752.
6. Oldenburger L., Composition and rank of n-ary matrices and multilinear forms, Ann. Math. 35 (1934), 622-657.
7. Гаспарян А.С., О некоторых приложениях многомерных матриц. Сообщения по прикладной математике, ВЦ АН СССР, М., 1983, 1-61.
8. Smith H.J.S., On the value of a certain arithmetical detrminant. Proc. London Math. Soc. 7:208-212(1875-1876).
9. Beslin S., Ligh S., Greatest Common Divisor Matrices. Lin. Alg. Appl., 118:69-76(1989)
10. Haukkanen P., Higher-Dimensional GCD Matrices. Lin. Alg. Appl., 170:53-63 (1992).

———————————————————————————

УДК 512

Разложение гиперболических матриц и трансферы

В. И. Копейко (Россия, г. Элиста)
Калмыцкий государственный университет им. Б. Б. Городовикова
email: kopeiko52@mail.ru

Factorization of hyperbolic matrices and transfers

V. I. Kopeiko (Russia, Elista)
Gorodovikov Kalmyk State University
email: kopeiko52@mail.ru

В 2015 году в письме к автору проф. Рао из Тата института фундаментальных исследований, Мумбаи, Индия поставил вопрос о построении трансфера $K_1Sp(R[X]) \to K_1Sp(R[X^2])$ и вычислении композиции гомоморфизма $K_1Sp(R[X^2]) \to K_1Sp(R[X])$, индуцированного вложением $R[X^2] \to R[X]$ и данного трансфера с предположением, что оно совпадает с отображением умножения на 2. Как хорошо известно (см., например, предложение 1.8, глава 9 в [1]) в линейном случае для любого натурального n такой трансфер существует и композиция $K_1(R[X^n]) \to K_1(R[X]) \to K_1(R[X^n])$ совпадает с отображением умножения на n.

Для формулировки основных результатов, напомним ряд определений и обозначений унитарной $K-$теории [2]. Пусть (R, λ, Λ) — унитарное кольцо, где R — ассоциативное кольцо с 1, на котором задана инволюция $x \to \bar{x}$, λ — центральный элемент кольца R, удовлетворяющий условию $\lambda \cdot \bar{\lambda} = 1$, Λ — аддитивная подгруппа R такая, что $\Lambda_{min} = \{x - \lambda\bar{x}, x \in R\} \leq \Lambda \leq \Lambda_{max} = \{x \in R : x = -\lambda\bar{x}\}$, причем $\bar{x}\Lambda x \subseteq \Lambda$ для любого $x \in R$. Отметим, что $(R, \bar{\lambda}, \bar{\Lambda})$, где $\bar{\Lambda} = \{\bar{x}, x \in \Lambda\}$, также является унитарным кольцом. Продолжим инволюцию на кольцо матриц $M_r(R)$, положив $(a_{ij})^* = (\overline{a_{ji}})$.

Определение 1. *Матрица $a = (a_{ij}) (\in M_r(R))$ называется $\Lambda-$эрмитовой, если $a = -\lambda a^*$ и все диагональные элементы матрицы a содержатся в Λ.*

В тезисах мы будем использовать блочную форму записи матриц. Более точно, запись $\alpha = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_{2r}(R)$ означает, что $a, b, c, d \in M_r(R)$. Для натурального r положим $I_r^\lambda = \begin{pmatrix} 0 & e_r \\ \lambda e_r & 0 \end{pmatrix}$, где e_r - единичная матрица порядка r.

Определение 2. *Матрица $\alpha = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_{2r}(R)$ называется $\Lambda-$унитарной, если $\alpha^* I_r^\lambda \alpha = I_r^\lambda$ и все диагональные элементы матриц ab^*, cd^* содержатся в Λ.*

Множество $U_{2r}^\lambda(R, \Lambda)$ всех $\Lambda-$унитарных матриц порядка $2r$ образует группу, которая называется (гиперболической) $\Lambda-$унитарной группой. Переход к $\Lambda-$унитарным группам над унитарными кольцами унифицирует изучение классических групп над кольцами. Например, если R - коммутативное кольцо с тривиальной инволюцией, то симплектическая группа $Sp_{2r}(R)$ есть группа $U_{2r}^{-1}(R, \Lambda_{max} = R)$, а ортогональная группа $O_{2r}(R)$ есть группа $U_{2r}^1(R, \Lambda_{min} = 0)$.

Определим гиперболический гомоморфизм групп

$$H : GL_r(R) \to U_{2r}^\lambda(R, \Lambda) : \quad H(a) = diag(a, (a^*)^{-1}).$$

Подгруппа $EU_{2r}^\lambda(R, \Lambda)$ группы $U_{2r}^\lambda(R, \Lambda)$, порожденная матрицами вида: $H(a)$, где $a \in E_r(R)$; $\begin{pmatrix} e_r & b \\ 0 & e_r \end{pmatrix}$, где b - $\bar{\Lambda}-$эрмитова; $\begin{pmatrix} e_r & 0 \\ c & e_r \end{pmatrix}$, где c - $\Lambda-$эрмитова называется элементарной (гиперболической) $\Lambda-$унитарной группой.

Введем одну операцию на матрицах. Пусть

$$\alpha = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} \in M_{2r}(R), \quad \beta = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} \in M_{2s}(R).$$

Положим
$$\alpha\perp\beta = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & b_1 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & b_2 \\ c_1 & 0 & d_1 & 0 \\ 0 & c_2 & 0 & d_2 \end{pmatrix} \in M_{2(r+s)}(R).$$
Определим вложение $U^{\lambda}_{2r}(R,\Lambda) \to U^{\lambda}_{2r+2s}(R,\Lambda) : \alpha \to \alpha\perp e_{2s}$ и пусть $U^{\lambda}(R,\Lambda) = \cup U^{\lambda}_{2r}(R,\Lambda)$, $EU^{\lambda}(R,\Lambda) = \cup EU^{\lambda}_{2r}(R,\Lambda)$ - стабильные группы. В силу унитарного аналога леммы Уайтхеда [2], группа $EU^{\lambda}(R,\Lambda)$ совпадает с коммутантом группы $U^{\lambda}(R,\Lambda)$ и, в частности, корректно определена (абелева) группа $K_1U^{\lambda}(R,\Lambda) = U^{\lambda}(R,\Lambda)/EU^{\lambda}(R,\Lambda)$. Для произвольной $\alpha \in U^{\lambda}(R,\Lambda)$ ее класс в группе $K_1U^{\lambda}(R,\Lambda)$ будем обозначать $[\alpha]$. Гиперболический гомоморфизм H индуцирует корректно определенный гомоморфизм групп $H : K_1(R) \to K_1U^{\lambda}(R,\Lambda)$, также называемый гиперболическим.

В [3] автором был получен следующий результат, дающий полный ответ на вопрос Рао для произвольного унитарного кольца.

Теорема 1. *Пусть (R,λ,Λ) - унитарное кольцо. Для любого натурального n существует трансфер $(i_n)_* : K_1U^{\lambda}(R[X],\Lambda[X]) \to K_1U^{\lambda}(R[X^n],\Lambda[X^n])$, где i_n обозначает естественное вложение $R[X^n] \to R[X]$, причем композиция $(i_n)_* \circ (i_n)^*$ гомоморфизма $(i_n)^* : K_1U^{\lambda}(R[X^n],\Lambda[X^n]) \to K_1U^{\lambda}(R[X],\Lambda[X])$, индуцированного вложением i_n и трансфера $(i_n)_*$ равна kH, если $n = 2k$ и равна $id + kH$, если $n = 2k+1$.*

В теореме id обозначает тождественный гомоморфизм группы $K_1U^{\lambda}(R[X^n],\Lambda[X^n])$, а $kH : K_1U^{\lambda}(R[X^n],\Lambda[X^n]) \to K_1U^{\lambda}(R[X^n],\Lambda[X^n])$ обозначает $k-$кратное гиперболического гомоморфизма, индуцированного отображением $H\perp H\perp\ldots\perp H$.

Из полученной формулы следует, что в симплектическом случае композиция
$$(i_2)_* \circ (i_2)^* : K_1Sp(R[X^2]) \to K_1Sp(R[X^2])$$
совпадает с гиперболическим гомоморфизмом H. Таким образом, естественно встает задача нахождения соотношений в группе $K_1U^{\lambda}(R,\Lambda)$ между классами произвольной унитарной матрицы α и гиперболической матрицы $H(\alpha)$. В [4] автором были построены унитарные символы, использованные для получения следующего результата.

Теорема 2. *Для произвольной матрицы $\alpha = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in U^{\lambda}_{2r}(R,\Lambda)$ справедливо следующее сравнение:*
$$H(\alpha) = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & (\alpha^*)^{-1} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & -b \\ -c & d \end{pmatrix} mod EU^{\lambda}(R,\Lambda).$$

Следствие 1. *Если характеристика унитарного кольца R равна 2, то $H([\alpha]) = 2[\alpha]$ в (абелевой) группе $K_1U^{\lambda}(R,\Lambda)$ для произвольной $\alpha \in U^{\lambda}(R,\Lambda)$. В частности, гиперболический гомоморфизм $H : K_1U^{\lambda}(R,\Lambda) \to K_1U^{\lambda}(R,\Lambda)$ совпадает с отображением умножения на 2.*

Действительно, если характеристика унитарного кольца R равна 2, то, в силу сравнения из теоремы 2, для произвольной $\alpha \in U^{\lambda}(R,\Lambda)$ получаем, что $H([\alpha]) = [\alpha^2] = 2[\alpha]$ в (абелевой) группе $K_1U^{\lambda}(R,\Lambda)$.

Из следствия 1 и теоремы 1 получаем следующее утверждение.

Следствие 2. *Если характеристика унитарного кольца R равна 2, то в обозначениях теоремы 1 для любого натурального n композиция*
$$(i_n)_* \circ (i_n)^* : K_1U^{\lambda}(R[X^n],\Lambda[X^n]) \to K_1U^{\lambda}(R[X^n],\Lambda[X^n])$$
совпадает с отображением умножения на n.

В следующем следствии нет никаких условий на характеристику унитарного кольца.

Следствие 3. *Если* $\alpha \in U_{2r}^{\lambda}(R,\Lambda)$, *то* $H(\alpha) \equiv \alpha^2 modE(R)$.

В заключение отметим, что представленные результаты были получены автором в период с 2016 года по 2018 год при поддержке РФФИ (проект 16-01-00148 а).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Басс Х. Алгебраическая $K-$теория. — Москва: Изд-во Мир, 1973. 592 с.
2. Bass H. Unitary algebraic $K-$theory // Lecture Notes Math. 1973. V. 343. P. 57-265.
3. Копейко В. И. Трансфер унитарного K_1-функтора при полиномиальных расширениях колец // Алгебра и анализ. 2017.Том 29. № 3. С. 34-60.
4. Копейко В. И. Унитарные символы и разложение гиперболических матриц // Записки научных семинаров ПОМИ. 2018.Том 470. С. 111-119.

———————————————————————————

УДК 512.552

Решеточные изоморфизмы конечных колец, разложимых в прямые суммы локальных колец

С. С. Коробков (Россия, г. Екатеринбург)
Уральский государственный педагогический университет
e-mail: ser1948@gmail.com

Lattice isomorphisms of finite rings, decomposable into a direct sums of local rings

S. S. Korobkov (Russia, г. Yekaterinburg)
Ural State Pedagogical University
e-mail: ser1948@gmail.com

1. Введение

Рассматриваются ассоциативные кольца. Под решеточным изоморфизмом (иначе проектированием) кольца R на кольцо R^{φ} понимается изоморфизм φ решетки всех подколец $L(R)$ кольца R на решетку всех подколец $L(R^{\varphi})$ кольца R^{φ}. Кольцо R^{φ} называется проективным образом кольца R, а само R — проективным прообразом кольца R^{φ}. При изучении решеточных изоморфизмов колец изучаются взаимные связи между свойствами колец R и R^{φ}. Будем говорить, что кольцо R определяется своей решеткой подколец, если R изоморфно кольцу R^{φ} при любом решеточном изоморфизме φ.

Пусть R — конечное локальное кольцо, то есть конечное кольцо с единицей, для которого факторкольцо $R/\mathrm{Rad}\, R$ — поле. Общее строение конечных локальных колец хорошо известно. Согласно [1, теорема XIX.4] произвольное конечное локальное кольцо R представимо в виде: $R = S \dotplus N$ (групповая прямая сумма), где N — (S,S)-модуль из радикала Джекобсона $\mathrm{Rad}\, R$ кольца R, а S — подкольцо, удовлетворяющее одному из трех условий:

1) $S = \langle e \rangle$, e — единица кольца,
2) $S = GF(p^k)$ — поле Галуа,

3) $S = GR(p^k, m)$ — кольцо Галуа, $k > 1$, $m > 1$.

Класс конечных локальных колец достаточно широк. Он, в частности, содержит классы конечных полей и колец Галуа. Решеточные изоморфизмы различных видов локальных колец изучались в работах [2] – [5]. Как оказалось, проективный образ локального кольца не всегда является локальным кольцом. Достаточные условия, при которых свойство кольца быть локальным кольцом сохраняется при проектированиях колец, приведены в сообщении [6]. Дальнейшее изучение решеточных изоморфизмов конечных колец может быть связано с базисными кольцами. Конечное кольцо R с единицей называется *базисным,* если факторкольцо $R/\mathrm{Rad}\,R$ коммутативно. Согласно [7, теорема 4.4] конечное кольцо R с единицей тогда и только тогда является базисным кольцом, когда R представимо в виде: $R = S \dotplus N$, где $S = R_1 \oplus \dots \oplus R_n$, R_i $(i = \overline{1,n})$ — локальное подкольцо кольца R, N — (S, S)-модуль из $\mathrm{Rad}\,R$.

В данном сообщении рассматриваются решеточные изоморфизмы конечных колец, разложимых в прямые суммы локальных колец. Специфической особенностью большинства таких колец является наличие в них двух типов нильпотентных элементов, при умножении которых на идемпотенты, последние действуют на одни как единицы, а на другие — как делители нуля. Присутствие таких элементов в кольце отражается и на решетке подколец, которая становится менее однородной, что в свою очередь сужает множество проективных образов кольца. В некоторых случаях приходим к решеточной определяемости колец (см. леммы 1 и 2). Заметим, что такой особенностью не обладают сами конечные локальные кольца, так как в них единица является единственным ненулевым идемпотентом.

Пусть $R = R_1 \oplus \dots \oplus R_n$, где R_i — локальное кольцо $(i = \overline{1,n})$. Сформулируем главный вопрос: При каких условиях выполняется равенство:

$$(R_1 \oplus \dots \oplus R_n)^\varphi = R_1^\varphi \oplus \dots \oplus R_n^\varphi \tag{1}$$

и при этом $R_1^\varphi, \dots, R_n^\varphi$ — локальные кольца?

Прежде, чем переходить к изложению основных результатов, заметим, что изучение решеточных изоморфизмов конечных колец сводится к изучению проективных образов конечных колец, имеющих примарные аддитивные группы (так называемых p-колец (p — простое число)). Действительно, любое конечное кольцо K разложимо в прямую сумму своих p_i-подколец K_i: $K = K_1 \oplus \dots \oplus K_n$, взятую по различным простым числам p_i. Ясно, что $L(K) \cong L(K_1) \times \dots \times L(K_n)$, а значит, $L(K^\varphi) \cong L(K_1^\varphi) \times \dots \times L(K_n^\varphi)$.

Уточним используемые в работе обозначения: $R = S \dotplus T$ — аддитивная прямая сумма колец S и T; $\langle a_1, a_2, \dots, a_n\rangle$ — кольцо, порожденное элементами $a_1, a_2, \dots, a_n$; $o(r)$ — аддитивный порядок элемента r; буквы k, l, m, n, p, q с индексами и без индексов обозначают натуральные числа, причем p и q — простые числа; строчные греческие буквы, кроме буквы φ, обозначают целые числа.

2. Предварительные факты

Случаи, когда кольца R_i $(i = \overline{1,n})$ в равенстве (1) являются кольцами Галуа различных типов, рассматривались ранее. Приведем некоторые из полученных результатов.

Теорема 1. ([5, Предложение 2]). *Пусть $R = \langle e_1\rangle \oplus \dots \oplus \langle e_n\rangle$, где $n > 1$, $e_i^2 = e_i$, $o(e_i) = p^{k_i}$ $(i = \overline{1,n})$, $k_1 \geqslant k_2 \geqslant \ldots \geqslant k_n$ и выполнено любое из двух следующих условий:*

$k_1 = \ldots = k_n = 1$ и $n > 2$;

$k_1 > 1$.

Предположим также, что φ — проектирование кольца R на кольцо R^φ. Тогда справедливы следующие утверждения:

1) $R^\varphi = \langle e_1'\rangle \oplus \dots \oplus \langle e_n'\rangle$, где $(e_i')^2 = e_i'$, $o(e_i') = q^{k_i}$ $(i = \overline{1,n})$;

2) если $k_2 > 1$, то $R^\varphi \cong R$.

Теорема 2. ([2, Теорема 4.2]). *Пусть* $R = R_1 \oplus \cdots \oplus R_n$, *где* $n > 1$, $R_i \cong GF(p^{l_i})$, $l_i > 1$ *и* $l_i = p_1^{\alpha_1} \cdots p_{k_i}^{\alpha_{k_i}}$ $(i = \overline{1,n})$. *Пусть* φ — *решеточный изоморфизм кольца* R *на кольцо* R^φ. *Тогда* $R^\varphi = R_1^\varphi \oplus \cdots \oplus R_n^\varphi$, *где* $R_i^\varphi \cong GF(q^{m_i})$ *и* $m_i = q_1^{\alpha_1} \cdots q_{k_i}^{\alpha_{k_i}}$.

Теорема 3. ([4, Теорема 9]). *Пусть* $R = R_1 \oplus \cdots \oplus R_n$, *где* $R_i \cong GR(p^{k_i}, m_i)$, $k_i > 1$, $m_i > 1$ $(i = \overline{1,n})$. *Пусть* φ — *решеточный изоморфизм кольца* R *на кольцо* R^φ. *Тогда* $R^\varphi = R_1^\varphi \oplus \cdots \oplus R_n^\varphi$, $R_i^\varphi \cong R_i$ $(i = \overline{1,n})$ *и* $R^\varphi \cong R$.

3. Основные результаты

Рассмотрим минимальный (по длине решетки подколец) пример кольца, разложимого в прямую сумму двух локальных колец, и определяющегося своей решеткой подколец.

Пример 1. Пусть $R = S_1 \oplus S_2$, где $S_i = \langle e_i \rangle \dotplus \langle r_i \rangle$, e_i — единичный элемент порядка p в подкольце S_i, $r_i^2 = 0$ $(i = 1,2)$. Подкольца $T_1 = S_1 \oplus \langle r_2 \rangle$ и $T_2 = S_2 \oplus \langle r_1 \rangle$ изоморфны кольцу R_{46} из [8, стр. 22]. Решетка подколец кольца R_{46} описана в [8, стр. 30]. Из этого описания следует, что подкольцо R_{46} определяется своей решеткой подколец. Значит, подкольца T_1 и T_2 также определяются своими решетками подколец. Пусть φ — проектирование кольца R на кольцо R^φ. Так как $T_i^\varphi \cong T_i$ $(i = 1,2)$, то $R^\varphi = T_1^\varphi \oplus T_2^\varphi$ и потому $R^\varphi \cong R$. Следовательно, кольцо R определяется своей решеткой подколец.

Лемма 1. *Пусть* $R = (\langle e \rangle \dotplus \langle r_1 \rangle) \oplus \langle r_2 \rangle$, *где* $pR = \{0\}$, $e^2 = e$, $er_1 = r_1 e = r_1$, r_1, r_2 — *ненулевые нильпотентные элементы. Пусть* φ — *проектирование кольца* R *на кольцо* R^φ. *Тогда* $R^\varphi \cong R$.

Лемма 2. *Пусть* $R = S_1 \oplus S_2$, *где* $S_i = \langle e_i \rangle \dotplus \langle r_i \rangle$, e_i — *единичный элемент простого порядка* p *в подкольце* S_i, r_i — *ненулевой нильпотентный элемент* $(i = 1,2)$. *Пусть* φ — *проектирование кольца* R *на кольцо* R^φ. *Тогда* $R^\varphi = S_1^\varphi \oplus S_2^\varphi$ *и при этом* $S_i^\varphi = \langle e_i \rangle^\varphi \dotplus \langle r_i \rangle^\varphi$, $\langle e_i \rangle^\varphi = \langle e_i' \rangle$, e_i' — *единичный элемент порядка* p *в подкольце* S_i^φ, $\langle r_i \rangle^\varphi \cong \langle r_i \rangle$ $(i = 1,2)$ *и* $R^\varphi \cong R$.

Лемма 3. *Пусть* $R = S_1 \oplus S_2$, *где* $S_i = \langle e_i \rangle \dotplus N_i$, e_i — *единичный элемент простого порядка* p *в подкольце* S_i, N_i — *ненулевое нильпотентное подкольцо* $(i = 1,2)$. *Пусть* φ — *проектирование кольца* R *на кольцо* R^φ. *Тогда* $R^\varphi = S_1^\varphi \oplus S_2^\varphi$ *и при этом* $S_i^\varphi = \langle e_i \rangle^\varphi \dotplus N_i^\varphi$, $\langle e_i \rangle^\varphi = \langle e_i' \rangle$, e_i' — *единичный элемент порядка* p *в подкольце* S_i^φ, N_i^φ — *нильпотентное подкольцо* $(i = 1,2)$.

Теорема 4. *Пусть кольцо* R *разложимо в прямую сумму* $R = R_1 \oplus \cdots \oplus R_n$ *конечных локальных колец* $R_i = S_i \dotplus N_i$, *где* $S_i \cong GF(p^{k_i})$, N_i — *ненулевое нильпотентное подкольцо* $(i = \overline{1,n})$. *Пусть* φ — *проектирование кольца* R *на кольцо* R^φ. *Тогда* $R^\varphi = R_1^\varphi \oplus \cdots \oplus R_n^\varphi$, *где* $R_i^\varphi = S^\varphi \dotplus N_i^\varphi$ — *локальное кольцо характеристики* p $(i = \overline{1,n})$.

Следующий пример показывает, что условие $N_i \neq \{0\}$ в теореме 4 опустить нельзя.

Пример 2. Пусть конечное кольцо R характеристики p разложимо в прямую сумму двух локальных колец: $R = S \oplus P$, где $S = \langle e \rangle \dotplus N$, e — единица в подкольце S, N — ненулевое нильпотентное кольцо, $P = GF(p^q)$, $q \neq p$. Согласно [9, теорема 1] решетка подколец $L(R)$ разложима в прямое произведение решеток $L(N)$ и $L(T)$, где $T = \langle e \rangle \oplus P$. Рассмотрим подкольцо $T' = \langle e' \rangle \oplus P'$, где $(e')^2 = e'$, $o(e') = q$, $P' = GF(q^p)$. Согласно [2, лемма 1.2] кольца T и T' решеточно изоморфны. Рассмотрим кольцо $R' = N \oplus T'$. Так как $p \neq q$, то $L(R') \cong L(N) \times L(T')$ и потому кольца R и R' решеточно изоморфны, но при этом кольцо R' не разложимо в прямую сумму локальных колец.

Для конечных колец, имеющих характеристику p^k, где $k > 1$, доказана

Теорема 5. *Пусть $R = R_1 \oplus \cdots \oplus R_n$, где R_i — локальное p-кольцо, удовлетворяющее условиям: $R_i = S_i \dotplus N_i$, $S_i \cong GR(p^{k_i}, m_i)$, $k_i > 1$, $m_i > 1$, N_i — (S_i, S_i)-модуль из $\operatorname{Rad} R_i$ $(i = \overline{1,n})$. Пусть φ — решеточный изоморфизм кольца R на кольцо R^φ. Тогда $R^\varphi = R_1^\varphi \oplus \cdots \oplus R_n^\varphi$ и при этом R_i^φ $(i = \overline{1,n})$ — локальное p-кольцо.*

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. McDonald B. R. Finite rings with identity. — New York: Marcel Dekker, 1974. ix+429 pp.
2. Коробков С. С. Решеточные изоморфизмы конечных колец без нильпотентных элементов // Изв. Урал. гос. ун-та, 2002, № 22, Матем. и механ., Вып. 4. С. 81—93.
3. Коробков С. С. Проектирования колец Галуа // Алгебра и логика, 54, № 1 (2015). С. 16—33.
4. Коробков С. С. Проектирования конечных однопорожденных колец с единицей // Алгебра и логика, 55, № 2 (2016). С. 192—218.
5. Коробков С. С. Проектирования конечных коммутативных колец с единицей // Алгебра и логика, 57, № 3 (2018). С. 285—305.
6. Коробков С. С. Проектирования конечных локальных колец // Международная конференция "Мальцевские чтения-18": тезисы докладов (Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, 19–22 ноября 2018 г.) — Новосибирск, 2018. С. 155.
7. Елизаров В.П. Конечные кольца. Основы теории. — Москва: Гелиос. 2006. 304 с.
8. Коробков С. С., Свинина Е. М., Смирнов В. Д. Ассоциативные кольца малой длины // Свердл. гос. пед. ин-т. Свердловск. 1990. 40 с. Деп. в ВИНИТИ, № 1441-90.
9. Коробков С. С. Периодические кольца с разложимыми в прямое произведение решетками подколец // Исследование алгебраических систем по свойствам их подсистем, Урал. гос. пед. ун-т. Екатеринбург. 1998. С. 48—59.

УДК 512.552+512.545

О некоторых свойствах решёточного $\mathcal{K}$-порядка на алгебрах

Ю. В. Кочетова (Россия, г. Москва)
Московский педагогический государственный университет
e-mail: jkochetova@mail.ru

On some properties of lattice $\mathcal{K}$-ordered algebras

J. V. Kochetova (Russia, Moscow)
Moscow Pedagogical State University
e-mail: jkochetova@mail.ru

Пусть на линейной алгебре $A = \langle A; +; \cdot \rangle$ над частично упорядоченным полем F задан частичный порядок $\leqslant$, относительно которого A является решёточно упорядоченным векторным пространством над полем F (см. [1]).

Будем говорить, что при данном порядке элемент $b \in A$ *бесконечно мал* относительно элемента $a \in A$ $(0 < a)$ и писать $b \ll a$, если $\gamma b \leqslant a$ для всех $\gamma \in F$.

Если рассматриваемый решёточный порядок $\leqslant$ на A таков, что

$$\text{из } a > 0 \text{ следует } ab \ll a \text{ и } ba \ll a \text{ для всех } b \in A,$$

то говорят (см., например, [2]), что на алгебре A определён *$\mathcal{K}$-порядок* $\leqslant$, а алгебру A над полем F называют *решёточно $\mathcal{K}$-упорядоченной алгеброй.*

Пусть A — решёточно $\mathcal{K}$-упорядоченная алгебра над полем F. Будем рассматривать различные типы порядков на поле F, а именно, частичный, направленный, линейный порядок, а также порядок, удовлетворяющий условию:

$$\text{из неравенств } \alpha\beta > 0 \text{ и } \alpha > 0, \text{ следует, что } \beta > 0 \text{ для любых элементов } \alpha, \beta \in F. \qquad (*)$$

Данная терминология является общепринятой для частично упорядоченных алгебраических систем (см. [3]).

Теорема 1. *Для произвольных элементов $x, y, z, t \in A$, $t > 0$ и $\alpha, \gamma \in F$, $\gamma \geqslant 0$ справедливы следующие соотношения:*

1) если порядок на поле F частичный, то

$$x \not\ll x \text{ и } x^n \ll x \text{ для } x > 0 \text{ и любого } n \in \mathbb{N}, n \geqslant 2,$$
$$\text{из } x \ll y \text{ и } y \ll z \text{ следует } \alpha x \ll y \text{ и } x \ll z \text{ для } y, z > 0;$$

2) если частичный порядок поля F удовлетворяет условию $(*)$, то

$$\gamma(x \wedge y) = \gamma x \wedge \gamma y \text{ и } \gamma(x \vee y) = \gamma x \vee \gamma y;$$

3) если порядок поля F является направленным и удовлетворяет условию $(*)$, то

$$|xy| \ll x \text{ и } |yx| \ll x \text{ для } x > 0,$$
$$(y \vee z) + x(y \vee z) = (y + xy) \vee (z + xz) \text{ и } (y \wedge z) + x(y \wedge z) = (y + xy) \wedge (z + xz),$$
$$xy \wedge xz \leqslant x(y \vee z) \leqslant xy \vee xz \text{ и } xy \wedge xz \leqslant x(y \wedge z) \leqslant xy \vee xz;$$

4) если поле F линейно упорядочено, то

$$\text{если } y \ll t \text{ и } z \ll t, \text{ то } y \vee z \ll t \text{ и } y \wedge z \ll t,$$
$$y \ll t \text{ тогда и только тогда, когда } |y| \ll t.$$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Биркгоф Г. Теория решеток. — М.: Наука, 1984.

2. Кочетова Ю.В., Ширшова Е.Е. Первичный радикал решёточно $\mathcal{K}$-упорядоченных алгебр // Фундаментальная и прикладная математика. 2013. Т. 18, вып. 1. С. 85–158.

3. Фукс Л. Частично упорядоченные алгебраические системы. — М.: Мир, 1965.

УДК 512.552.7, 519.725

Групповые коды размерности 4[1]

В. Т. Марков (Россия, г. Москва)
Механико-математический факультет МГУ имени М.В. Ломоносова
e-mail: vtmarkov@yandex.ru
О. В. Маркова (Россия, г. Москва)
Механико-математический факультет МГУ имени М.В. Ломоносова
e-mail: ov_markova@mail.ru

Group codes of dimension 4

V. T. Markov (Russia, Moscow)
M.V. Lomonosov Moscow State University
e-mail: vtmarkov@yandex.ru
O. V. Markova (Russia, Moscow)
M.V. Lomonosov Moscow State University
e-mail: ov_markova@mail.ru

Представленные в данном сообщении результаты получены коллективом авторов: К. Гарсиа Пильядо, С. Гонсалес, К. Мартинес (Овьедо), О. В. Маркова, В. Т. Марков (Москва).

Все рассматриваемые в данном сообщении поля и группы — конечные.

В [1] дано следующее определение группового кода, не зависящее от нумерации элементов группы.

Определение 1 ([1]). *Пусть G - группа порядка n. Код $\mathcal{C}$ длины n над полем F называется G-кодом, если существуют идеал I группового кольца FG и биекция $\sigma : \{1, \ldots, n\} \to G$, такие, что*

$$\mathcal{C} = \{(a_1, \ldots, a_n) \in F^n : a_1\sigma(1) + \ldots + a_n\sigma(n) \in I\}. \tag{1}$$

Мы также будем говорить, что код $\mathcal{C}$ и идеал I, связанные соотношением (1), *перестановочно эквивалентны.*

Это определение позволяет рассматривать один и тот же код как групповой код для различных групп одновременно. В частности, было предложено

Определение 2 ([1]). *Код $\mathcal{C}$ длины n над полем F называется абелевым групповым кодом, если он является A-кодом над F для некоторой абелевой группы A порядка n.*

Для некоторых некоммутативных групп G все G-коды оказываются абелевыми. В частности, справедлива

Теорема 1 ([1]). *Если G — конечная группа, и G является произведением двух абелевых подгрупп в смысле [2], т.е.*

$$G = AB = \{ab : a \in A, b \in B\}$$

для некоторых абелевых подгрупп A, B группы G, то любой G-код является абелевым.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ № 17-01-00895.

Первые примеры неабелевых S_4-кодов были построены в [3] с существенным использованием компьютера. Позже были получены новые примеры неабелевых групповых кодов, и в [4] было высказано предположение, что над любым конечным полем характеристики $p > 2$ существует неабелев $\mathrm{SL}_2(\mathrm{GF}(3))$-код размерности 4. Эта гипотеза была доказана в [5].

С другой стороны, интересно определить, какова минимальная размерность неабелева группового кода. Первый шаг в этом направлении сделан в [1], где было показано, что одномерные групповые коды являются абелевыми. В [6] получен следующий результат в этом направлении.

Теорема 2 ([6]). *Если G — конечная группа и F — конечное поле, то любой G-код размерности $d < 4$ над F является абелевым, т.е. 4 — наименьшая возможная размерность неабелева группового кода.*

Во всех известных примерах неабелевых групповых кодов размерности 4 группа G не является p-группой. Оказывается, что при некотором ограничении на поле коэффициентов, действительно, для произвольной конечной p-группы G все четырёхмерные G-коды абелевы. Именно, основной результат данного сообщения — следующая

Теорема 3. *Пусть p — простое число и пусть G — конечная p-группа. Если поле F удовлетворяет условию $|F| < p^3$, то любой G-код C над F размерности $\dim_F C = 4$ является абелевым групповым кодом.*

Техника доказательства теоремы 3 развивает методы, на которых основано доказательство теоремы 2 (см. [6]). Доказательство основано на следующих вспомогательных утверждениях.

Пусть здесь и далее F — поле, G — группа. Для любого идеала I группового кольца FG введём обозначения $\varphi_I : G \to GL(I)$ и $\psi_I : G \to GL(I)$ для представлений группы G левыми и правыми умножениями на I:

$$\forall g \in G, v \in I, \quad \varphi_I(g)(v) = gv, \ \psi_I(g)(v) = vg^{-1}. \tag{2}$$

Если N — подгруппа группы G и $N \subseteq \ker \varphi_I$ (соответственно, $N \subseteq \ker \psi_I$), то будем говорить, что N *действует на I тривиально* слева (соответственно, справа).

Лемма 1 ([6]). *Пусть G, H — две группы одинакового порядка. Допустим, что существуют нормальные подгруппы $N \lhd G$ и $K \lhd H$ такие, что $G/N \cong H/K$. Если $I \lhd FG$ и N действует на I тривиально слева или справа, то идеал I перестановочно эквивалентен некоторому H-коду.*

Лемма 2. *Пусть e — центральный идемпотент группового кольца $R = FG$. Тогда отображение $f : g \mapsto ge$ для любого $g \in G$ является гомоморфизмом из группы G в группу обратимых элементы кольца Re и его ядро действует тривиально на $I = Re$ слева и справа.*

Доказательство теоремы 3 далее производится отдельно в полупростом и модулярном случаях. Если $\mathrm{char} F \neq p$, то используя теорему Машке, мы получаем, что любой идеал кольца $R = FG$ имеет вид Re для некоторого центрального идемпонента $e \in R$. Дальнейшее доказательство основано на применении теоремы 1, лемм 1–2 и проверке того факта, что в случае $I \cong M_2(F)$ для гомоморфизма f из леммы 2 фактор-группа $G/\mathrm{Ker} f$ является произведением двух абелевых подгрупп.

Если $\mathrm{char} F = p$, то доказательство теоремы 3 состоит в проверке того, что по крайней мере одна из групп $\varphi_I(G)$, $\psi_I(G)$ является произведением двух абелевых подгрупп. Для этого используются представления этих групп в $\mathrm{GL}_4(F)$ и матричные методы исследования коммутирующих подгрупп линейной группы.

Ограничение на поле в теореме 3 является существенным для всех рассуждений, на которых основано её доказательство. Поэтому на данный момент условие на поле коэффициентов не представляется возможным ослабить. Вопрос существование неабелева G-кода размерности 4 для конечной p-группы G и большого поля F остаётся открытым.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Bernal J. J., del Río Á., Simón J.J. An intrinsical description of group codes // Designs, Codes and Cryptography. 2009. V. 51. N. 3. P. 289–300.
2. Itô N. Über das Produkt von zwei abelschen Gruppen // Mathematische Zeitschrift. 1955. Vol. 62. P. 400–401.
3. Гарсиа Пильядо К., Гонсалес С., Марков В. Т., Мартинес К., Нечаев А. А. Когда все групповые коды некоммутативной группы абелевы (вычислительный подход)? // Фундаментальная и прикладная математика. 2011–2012. Т. 17. № 2. С.75–85.
4. Марков В. Т. Абелевы и неабелевы групповые коды над некоммутативными группами // Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения, Материалы XII Международной конференции, посвященной 80-летию профессора Виктора Николаевича Латышева, Тула, 21-25 апреля 2014 г. Тула: Издательство ТГПУ им. Л.Н.Толстого, 2014. С. 200–203.
5. Гарсиа Пильядо К., Гонсалес С., Марков В. Т., Мартинес К. Неабелевы групповые коды над произвольным конечным полем // Фундаментальная и прикладная математика. 2015. Т. 20, № 1. С. 17–22.
6. García-Pillado C., González S., Markov V., Markova O., Martínez C. Group codes of dimension 2 and 3 are abelian // Finite Fields and their Applications. 2019. V. 55. P. 167–176.

УДК 512.552.7

Длина групповых алгебр групп небольшого размера[1]

О. В. Маркова (Россия, г. Москва)
Механико-математический факультет МГУ имени М.В. Ломоносова
e-mail: ov_markova@mail.ru

Length of group algebras of small order groups

O. V. Markova (Russia, Moscow)
M.V. Lomonosov Moscow State University
e-mail: ov_markova@mail.ru

Представленные в данном сообщении результаты получены коллективом авторов: **А. Э. Гутерман, О. В. Маркова, М. А. Хрыстик** (Москва). В докладе будут представлены результаты о длине групповых алгебр групп порядков не превосходящих девяти и её связи с характеристиками группы и свойствами поля коэффициентов.

Определение 1 ([1]). Длиной конечной системы $\mathcal{S}$ порождающих *конечномерной ассоциативной алгебры* $\mathcal{A}$ *над произвольным полем называется наименьшее натуральное число* $l(\mathcal{S})$, *такое что слова длины не большей* $l(\mathcal{S})$ *порождают данную алгебру как векторное пространство.* Длиной алгебры *называется максимум длин её систем порождающих, обозначим её* $l(\mathcal{A})$.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РНФ 17-11-01124.

Длина является важной числовой характеристикой алгебры, трудность вычисления которой даже для классических алгебр обусловлена необходимостью рассмотрения всех систем образующих в данной алгебре. Общая задача исследования связи функции длины с другими характеристиками алгебры была впервые поставлена К. Паппаченой в [1]. Результаты в этом направлении для коммутативных алгебр были получены автором в [2].

Для длины алгебры всегда справедлива следующая тривиальная верхняя оценка:

Замечание 1 ([2, лемма 5.3]). *Пусть $\mathcal{A}$ — алгебра размерности n над произвольным полем $\mathbb{F}$. Тогда $l(\mathcal{A}) \leq n-1$, причём оценка превращается в равенство тогда и только тогда, когда алгебра $\mathcal{A}$ является однопорождённой, из чего автоматически следует, что она коммутативна.*

Через $\mathbb{F}G$ (или иногда через $\mathbb{F}[G]$) будем обозначать групповую алгебру группы G над полем $\mathbb{F}$. Для групповых алгебр получаем

Следствие 1. *Для произвольной конечной группы G и произвольного поля $\mathbb{F}$ справедливы утверждения:*
1. $l(\mathbb{F}G) \leq |G|-1$, причём оценка превращается в равенство тогда и только тогда, когда алгебра $\mathbb{F}G$ является однопорождённой;
2. если G — циклическая группа, то $l(\mathbb{F}G) = |G|-1$;
3. если G неабелева, то $l(\mathbb{F}G) \leq |G|-2$.

Как основной результат в [3] показано, что для бесконечных и достаточно больших конечных полей выполнено условие однопорождённости групповой алгебры для произвольной абелевой группы:

Теорема 1 ([3]). *Пусть G — конечная абелева группа и $\mathbb{F}$ — поле мощности $|\mathbb{F}| \geq |G|$ (в частности, бесконечное поле) такое, что $\operatorname{char} \mathbb{F} \nmid |G|$. Тогда групповая алгебра $\mathbb{F}G$ является однопорождённой и $l(\mathbb{F}G) = |G|-1$.*

Хорошо известно, что любая группа порядка не превосходящего 9 либо является циклической, либо изоморфна одной из групп $V_4 \cong \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$, $S_3 \cong D_3$, D_4, Q_8, $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_4$, $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ и $\mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_3$. Длина групповых алгебр всех циклических групп над произвольными полями уже найдена (следствие 1) и от поля не зависит.

1. Группа подстановок S_3 и диэдральная группа D_4.

Исследуя вопросы связанные с образующими групповых алгебр, естественно рассматривать в качестве порождающей системы групповой алгебры $\mathbb{F}G$ систему образующих группы G. Отметим, что для группы G и её системы порождающих S широко изучается соответствующая задача нахождения кратчайшего слова от образующих, представляющего элемент $g \in G$. Основное отличие заключается в том, что при решении соответствующих групповых задач алфавит по определению расширяется всеми обратными к элементам порождающего множества и рассматриваются слова от элементов $S \cup S^{-1}$.

Определение 2. Диаметром *группы G относительно системы образующих S называется максимум по $g \in G$ длин кратчайших слов от $S \cup S^{-1}$, представляющих g.*

Для систем образующих с условием $S = S \cup S^{-1}$ имеющиеся вычисления диаметра групп обеспечивают нижние оценки длины групповых алгебр. Для симметрической группы такие оценки получаются из порождающих транспозиций [4, §2], в частности, $l(\mathbb{F}S_3) \geq 3$. Для диэральных групп таким примером будут системы образующих, состоящие из отражений, в частности, $l(\mathbb{F}D_4) \geq 4$.

Для этих групп справедливо общее утверждение, что длина групповой алгебры совпадает с диаметром группы относительно групповых систем образующих.

Теорема 2 ([5]). *Пусть $\mathbb{F}$ — произвольное поле. Тогда*
1. $l(\mathbb{F}S_3) = 3$;
2. $l(\mathbb{F}D_4) = 4$.

2. Нециклические абелевы группы порядков 4, 8 и 9.

Для групповых алгебр нециклических абелевых групп над малыми конечными полями условие однопорождённости уже не всегда выполнено, поэтому длина зависит от мощности поля коэффициентов.

Теорема 3 ([5]). *Длина $l(\mathbb{F}V_4)$ принимает следующие значения:*
3, *если* $\operatorname{char} \mathbb{F} \neq 2$ *и* $|\mathbb{F}| > 3$*;*
2 *в остальных случаях.*

Теорема 4 ([3, 6]). *Длина $l(\mathbb{F}[\mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_3])$ принимает следующие значения:*
4, *если* $\operatorname{char} \mathbb{F} = 3$, *либо если* $|\mathbb{F}| \in \{2, 4\}$*;*
6, *если* $|\mathbb{F}| = 7$*;*
8, *если* $\operatorname{char} \mathbb{F} \neq 3$ *и* $|\mathbb{F}| = 5$ *или* $|\mathbb{F}| \geq 8$.

Теорема 5 ([3, 6]). *Длина $l(\mathbb{F}[\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_4])$ принимает следующие значения:*
4, *если* $|\mathbb{F}| = 5$, *либо если* $\operatorname{char} \mathbb{F} = 2$;
6, *если* $|\mathbb{F}| = 3$*;*
7 *в остальных случаях.*

Теорема 6 ([3, 6]). *Длина $l(\mathbb{F}[\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2])$ принимает следующие значения:*
3, *если* $\operatorname{char} \mathbb{F} = 2$, *либо если* $|\mathbb{F}| = 3$*;*
4, *если* $|\mathbb{F}| = 5$*;*
6, *если* $|\mathbb{F}| = 7$*;*
7 *в остальных случаях.*

Замечание 2. *Эти результаты показывают, что для фиксированной группы функция длины её групповой алгебры, рассматриваемая как функция мощности поля коэффициентов,*
1. может принимать не все значения между минимумом и максимумом;
2. может быть немонотонной, а именно, возможно, что $l(\mathbb{F}G) > l(\mathbb{E}G)$ *при* $|\mathbb{F}| < |\mathbb{E}|$.

Также видно, что возможные значения длины групповых алгебр не определяются только мощностью группы, но и зависят от структуры группы.

3. Группа кватернионов Q_8.

Теорема 7 ([7]). *Длина $l(\mathbb{F}Q_8)$ принимает следующие значения:*
4, *если* $\operatorname{char} \mathbb{F} \neq 2$ *и в поле* $\mathbb{F}$ *существуют элементы* α, β, *такие, что* $\alpha^2 + \beta^2 = -1$*;*
3 *в остальных случаях.*

Замечание 3. *Группа кватернионов Q_8 даёт первый пример нетривиальной зависимости длины групповой алгебры неабелевой группы от свойств поля коэффициентов, причём не от мощности поля, как в коммутативном случае, а от разложимости -1 в сумму квадратов.*

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Pappacena C. J. An upper bound for the length of a finite-dimensional algebra// J. Algebra. 1997. V. 197. P. 535–545.

2. Маркова О. В. Верхняя оценка длины коммутативных алгебр // Матем. сб. 2009. Том 200, № 12. С. 41–62.

3. Guterman A. E., Markova O. V., Khrystik M. A. On the lengths of group algebras of finite Abelian groups in the semi-simple case// Preprint, 2018.

4. Глухов М. М., Зубов А. Ю. О длинах симметрических и знакопеременных групп подстановок в различных системах образующих (обзор)// Математические вопросы кибернетики. 1999. Том 8. 5–32. — М.: Наука; Физматлит, 1999.

5. Гутерман А. Э., Маркова О. В. Длина групповых алгебр групп небольшого размера// Зап. научн. сем. ПОМИ. 2018. Том 472. С. 76–87.

6. Guterman A. E., Markova O. V., Khrystik M. A. On the lengths of group algebras of finite Abelian groups in the modular case// Preprint, 2019.

7. Guterman A. E., Markova O. V. The length of the group algebra of the group $\mathbf{Q}_8$// Proceedings of ICAC2017. 2019. to appear.

УДК 511.32

О почти локально разрешимых алгебрах Ли с нулевым радикалом Джекобсона и локально нильпотентном радикале для алгебр Ли

О. А. Пихтилькова (Россия, г. Оренбург)
Оренбургский государственный университет
e-mail: opikhtilkova@mail.ru
Е. В. Мещерина (Россия, г. Оренбург)
Оренбургский государственный университет
e-mail: elena_lipilina@mail.ru
А. А. Горелик (Россия, г. Оренбург)
Оренбургский государственный университет

On almost locally solvable Lie algebras with null Jacobson radical of a locally nilpotent radical for Lie algebras

O. A. Pikhtilkova (Russia, Orenburg)
Orenburg State University
e-mail: opikhtilkova@mail.ru
E. V. Mescherina (Russia, Orenburg)
Orenburg State University
e-mail: elena_lipilina@mail.ru
A. A. Gorelik (Russia, Orenburg)
Orenburg State University

Основной текст тезисов.

Определение радикала Джекобсона было дано Е. Маршаллом [1] и дополнено Ф. Кубо. Следующая теорема доказана Е. Маршаллом:

Теорема 1. *Если конечномерная алгебра Ли L над полем характеристики нуль имеет разложение Леви в прямую сумму $L = S \oplus \sigma(L)$, тогда радикал Джекобсона алгебры Ли L равен $J(L) = [L, \sigma(L)]$, где S – полупростая алгебра, а $\sigma(L)$ – разрешимый радикал L.*

Ф. Кубо показал, что результаты Е. Маршалла и Н. Камийя в общем случае неверны для бесконечномерных алгебр Ли даже в случае локально-конечных алгебр.[2]

Теорема 2. *Пусть L – почти локально разрешимая алгебра Ли над полем F характеристики нуль. Если алгебра Ли L имеет разложение Леви $L = S \oplus R$, где S – конечномерная подалгебра L такая, что $J(L) = 0$, а S – разрешимый радикал, то $J(L) = [L, R]$.*

Следующее следствие является аналогом теоремы Ф. Кубо.

Следствие 1. *Пусть L – специальная почти локально разрешимая алгебра Ли над полем F характеристики нуль. Справедливо: $J(L) = 0$ тогда и только тогда, когда алгебра Ли L имеет разложение Леви $L = S \oplus Z(L)$, где $Z(L)$ – центр алгебры L, S – конечномерная подалгебра L такая, что $J(L) = 0$.*

Локально нильпотентный радикал специальных алгебр Ли является обобщением нильпотентного радикала конечномерных алгебр Ли [3], [4].

Для конечномерной алгебры Ли L нильпотентный радикал $N(L)$ характеризуется также как пересечение наибольших идеалов нильпотентности конечномерных представлений алгебры L [3].

Говоря о представлениях алгебры Ли, следует рассмотреть и случай, когда представление неприводимо.

Определение 1. *Алгебру Ли, имеющую точное неприводимое представление называют примитивной.*

Теорема 3. *Пусть L – артинова алгебра Ли над полем, имеющая единственный минимальный идеал. Тогда алгебра Ли L – примитивна.*

Теорема 4. *Пусть L_1 и L_2 – примитивные алгебры Ли, имеющие такие точные неприводимые представления $\varphi_i : L_i \to M_i$ такие, что центродиды Δ_i модулей M_i совпадают с основным полем и $\varphi_i(L_i) \cap \Delta_i = 0$, где $i = 1, 2$. Тогда их прямая сумма $L_1 \oplus L_2$ также примитивна.*

Если универсальная обертывающая алгебра $U(L)$ - примитивна, то алгебра Ли L также является примитивной. Обратное в общем случае неверно.

Относительно примитивности полупростых алгебр Ли справедливы следующие утверждения.

Утверждение 1. *Полупростые конечномерные алгебры Ли над алгебраически замкнутым полем характеристики нуль – примитивны.*

Утверждение 2. *Если полупростая конечномерная алгебра Ли над полем характеристики нуль раскладывается в прямую сумму центральных простых алгебр, то она является примитивной.*

Свободная алгебра Ли является примитивной.[5]

Все коммутативные агебры Ли над полями $\mathbb{Z}_p$, где p – простое, и $\mathbb{Q}$ также являются примитивными. Бесконечномерные коммутативные алгебры Ли являются примитивными над любыми полями.

Конечномерная абелева алгебра, размерности больше 1, над алгебраически замкнутым полем не является примитивной.

Определение 2. *Обозначим через $IrrPI(L)$ пересечение аннуляторов всех неприводимых PI-представлений алгебры Ли L и саму алгебру L если их нет. Назовем идеал $IrrPI(L)$ алгебры Ли L PI-неприводимо представленным радикалом.*

Определение 3. *По аналогии с конечномерными алгебрами, назовем идеал U наибольшим идеалом локальной нильпотентности представления.*

Определение 4. *Назовем локально нильпотентным радикалом $N(L)$ специальной алгебры Ли L над полем F пересечение наибольших идеалов локальной нильпотентности всех PI-представлений алгебры Ли L над полем F и саму алгебру Ли, если их нет.*

Теорема 5. *Для произвольной специальной алгебры Ли L над полем F характеристики нуль справедливо равенство $N(L) = IrrPI(L)$.*

Определение 5. *Также как и для специальных алгебр Ли, назовем локально нильпотентным радикалом $N(L)$ алгебры Ли L над полем F пересечение наибольших идеалов локальной нильпотентности всех PI-представлений алгебры Ли L над полем F и саму алгебру Ли, если их нет.*

Локально нильпотентный радикал алгебры Ли может не быть ни локально нильпотентным, ни локально разрешимым.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Marshall E. I. The Frattini subalgebras of a Lie algebra. J. London Math. Soc. 1967. V. 42. P. 416-422.

2. Kubo F. Infinite-dimensional Lie algebras with null Jacobson radical // Bull. Kyushu Inst. Technol. Math. Nat. Sci. 1991. V. 38. P. 23-30.

3. Бурбаки, Н. Группы и алгебры Ли (главы I-III).- М.: Мир, 1976.- 496 с.

4. Пихтильков, С. А. О локально нильпотентном радикале специальных алгебр Ли / С. А. Пихтильков // Фундаментальная и прикладная математика.- 2002.- Т. 8.- Вып. 3.- С. 769-782.

5. Пихтильков С.А. Примитивность свободной ассоциативной алгебры с конечным числом образующих // УМН. 1974. № 1. С. 183-184.

УДК 512

Genus of division algebras

S. V. Tikhonov (Belarus, Minsk)
Belarusian State University
e-mail: tikhonovsv@bsu.by

The genus $\mathbf{gen}(D)$ of a finite-dimensional central division algebra D over a field F is defined as the collection of classes $[D'] \in Br(F)$, where D' is a central division F-algebra having the same maximal subfields as D. This means that D and D' have the same degree n, and a field extension K/F of degree n admits an F-embedding $K \hookrightarrow D$ if and only if it admits an F-embedding $K \hookrightarrow D'$. Different variations of the notion of the genus are mentioned in [1].

We show that the fact that quaternion division algebras D and D' have the same maximal subfields does not imply that the matrix algebras $M_l(D)$ and $M_l(D')$ have the same maximal subfields for $l > 1$. Moreover, for any odd $n > 1$, we construct a field L such that there are two quaternion division L-algebras D and D' and a central division L-algebra C of degree and exponent n such that $\mathbf{gen}(D) = \mathbf{gen}(D')$ but $\mathbf{gen}(D \otimes C) \neq \mathbf{gen}(D' \otimes C)$.

REFERENCES

1. V.I. Chernousov, A.S. Rapinchuk, I.A. Rapinchuk, Division algebras with the same maximal subfields, Russian Math. Surveys **70**:1 (2015), 83-112.

2. S.V. Tikhonov, On genus of division algebras, https://arxiv.org/abs/1904.03933

———————————————————————————

УДК 512

Noetherianity of nonassociative algebras

K. M. Tulenbayev (Kazakhstan, Almaty)
Suleyman Demirel University
e-mail: tulen75@@hotmail.com

Abstract

We prove that for Zinbiel algebras defined by identity $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c + c \circ b)$ Hilbert theorem on basis is not true. Also Novikov algebras are not weakly Noetherian. For free Bicommutative algebra on one variable is given search algorithm for generators of homogeneous ideal.

1. Introduction

David Hilbert proved in 1890 the theorem on basis for ring of polynomials $A = C[x_1, \cdots, x_n]$. It states that any ideal in $C[x_1, \cdots, x_n]$ is finitely generated [1].

Definition.A is weakly Noetherian algebra iff any two-sided ideal of A is finitely generated.

We will follow to original formulation of Hilbert of his theorem on basis. We will say that Hilbert theorem on basis is true for free nonassociative algebra $A = C < x_1, \ldots, x_n >$ with nonassociative identities if any ideal of $A = C < x_1, \ldots, x_n >$ is finitely generated. So natural question arises: for what nonassociative algebras Hilbert theorem on basis is true? In given article we give an answer on this question for Zinbiel algebras, Novikov algebras. And an algorithm for Bicommutative algebras.

Example 1. Let us consider non-associative algebra $A = k[x]$ and new multiplication $x^n \circ x^k = c(n,k)x^{\gamma(n+k)}$ where $c(n,k) \neq 0$ for all $n, k \in N$ and $\gamma(n)$ give all N. Then $A = k[x]$ is weakly Noetherian ring.

Zinbiel algebras are given by identity $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c + c \circ b)$

Theorem 1. Let $A = C < x_1, \ldots, x_m >$ be free Zinbiel algebra on m $(m \geq 2)$ variables. Then A is not Noetherian.

2. An algorithm for Bicommutative algebras

Weak Noetherianity of Bicommutative algebras [2] was proved in [3]. In this section we give an algorithm of finding the generators of homogeneous ideal of free Bicommutative algebra on one variable.

Bicommutative algebras are defined by the identities $a \circ (b \circ c) = b \circ (a \circ c)$and $(a \circ b) \circ c = (a \circ c) \circ b$. In Novikov algebras and in bicommutative algebras base elements can be formed by elements that are right-bracketed products of left-bracketed elements. For example,

$$a(b(cd)) = \begin{array}{ll} c & d \\ b & \\ a & \end{array},$$

$$((ab)c)d = \begin{array}{llll} a & b & c & d \end{array}$$

So, left-bracketed element $((a_1a_2)\cdots)a_n$ we write as a row

$$\begin{array}{llll} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{array},$$

right-bracketed element $a_1(\cdots(a_{n-1}a_n)\cdots)$ as a column

$$\begin{array}{ll} a_{n-1} & a_n \\ \vdots & \\ a_1 & \end{array},$$

and the following hook

$$\begin{array}{llll} a_k & b_1 & \cdots & b_l \\ a_{k-1} & & & \\ \vdots & & & \\ a_1 & & & \end{array}$$

will denote the element $a_1(\cdots(a_{k-1}\Big((\cdots(a_kb_1)\cdots)b_l\Big))\cdots)$.

Free Novikov algebras are not weakly Noetherian, when Bicommutative algebras are.

Theorem 2. Let $A = C < x >$ be free Bicommutative algebra on 1 variable. Then A is a Noetherian algebra.

Proof. We use Buchberger algorithm for Bicommutative algebras. Most important part is to work with base elements, which are analogue of monomials in polynomial case. Another representation of basis element of Bicommutative algebra as pair (x^n, x^m) is used. Let I to be homogeneous ideal of A. Firstly, consider older part of an element i of homogeneous ideal I to be monomial $Z \in A$.

Z=(X,Y), where $X = x^\alpha$ and $Y = x^\beta$ Suppose we have base elements $Z_1 = (X_1, Y_1)$ and $Z_2 = (X_2, Y_2)$ then $Z_1 \circ Z_2 = (X_1 \cdot X_2, Y_1 \cdot Y_2)$, where $\cdot$ is usual multiplication in polynomial ring, is also base element. Let me mention that (X,Y) is not Cartesian product and but is useful notation for base elements of linear vector space. Any element of bicommutative algebra is linear combination of base elements. We consider an ideal K of polynomial ring on 1 variable x, generated by elements X from base elements (X,Y) from bicommutative homogeneous ideal I. Ideal M of polynomial ring on 1 variable x, generated by such Y from base elements (X,Y) from bicommutative ideal I.

Step 1 of our algorithm.

Polynomial ideal K is generated by one element $X_1 = x^n$. We take homogeneous element i with older part $Z_1 = (X_1, Y_1)$, where Y_1 has minimal degree r, so $Y_1 = x^r$.

Step 2 of our algorithm.

Polynomial ideal M is generated by one element $Y_2 = x^m$. We take homogeneous element j with older part $Z_2 = (X_2, Y_2)$, where X_2 has minimal degree s, so $X_2 = x^s$.

Step 3 of our algorithm.

We choose homogeneous elements g_w with older part (X,Y) such that $X = x^p$ and $Y = x^t$ where $p > n$ but $t < m$. Exactly for every $t < m$ we take minimal p.

Last step of algorithm.

We choose homogeneous elements h_z with older part (X,Y) such that $X = x^q$ and $Y = x^l$ where $l > m$ but $q < n$. Exactly for every $q < n$ we take minimal l. Eeasy to see that elements i,g,g_w, h_z generates leading parts of homogeneous ideal I. After that we use all steps of Buchberger algorithm for Bicommutative algebras.

3. Counterexample for Novikov algebras

Let $A = (A, \circ)$ be an algebra over field k of characteristic $p \geqslant 0$ и $A \times A \to A$, $(a, b) \mapsto a \circ b$, defines product. Algebra $(A, \circ)$ is called *Novikov* [4], if

$$a_1 \circ (a_2 \circ a_3) - (a_1 \circ a_2) \circ a_3 = a_1 \circ (a_3 \circ a_2) - (a_1 \circ a_3) \circ a_2 (RSym),$$

$$a_1 \circ (a_2 \circ a_3) = a_2 \circ (a_1 \circ a_3)(LCom),$$

for any $a_1, a_2, a_3 \in A$.

Example 2. Algebra $(K[x], \circ)$, where $(a \circ b)(x) = a(x)' b(x)$,is Novikov.

In [5] the description of free Novikov algebras basis was given in terms of Young diagrams. Neck is the number of rows in Young (Novikov) diagram.

Theorem 3. Let $A = k < x_1, \ldots, x_n >$ be free Novikov algebra on n variables. Then A is not a Noetherian algebra.

This publication is supported by the grant AP05133271 from the Ministry of Science and Education of the Republic of Kazakhstan.

REFERENCES

1. Hilbert D. "Ueber die Theorie der algebraischen Formen"// Mathematische Annalen,1890, 36 (4), P.473–534.

2. Dzhumadil'daev A.S., Tulenbaev K.M., *Bi-commutative algebras,*// Uspechi Math. Nauk.,2003, No.6, 149-150=engl.transl. Russian Math. Surv., 1196-1197.

3. Drensky V., Zhakhayev B. Noetherianity and Specht problem for varieties of bicommutative algebras// arXiv:1706.02529.

4. Dzhumadil'daev A.S., Tulenbaev K.M. Engel theorem for Novikov algebras // Comm. Algebra, 2006,v.34, No.3, P.883–888.

5. Dzhumadil'daev A.S., Lofwall C. Trees, free right-symmetric algebras, free Novikov algebras and identities // Homology, Homotopy and Appl., 2002, V.4, No.2(1), P.165–190.

———————————————————————————————

Секция 4. Прикладная и компьютерная алгебра, криптография и дискретная математика

On recurrent neural network based theorem prover for first order minimal logic

A. R. Baghdasaryan (Armenia, Yerevan)
Yerevan State University
e-mail: baghdasaryana95@gmail.com

Abstract

Automated theorem provers based on different systems of minimal logic experience some difficulties because of many problems. One of them is a stoup selection rule, when a formula from the context should be selected to be considered as a stoup. Neural networks are added to these systems of minimal logic and they are used to determine which formula from the context will become a stoup. This partially solves the problem of rule selection and gives reduction of time in theorem proving.

УДК 510.662

О доказательстве теорем на основе рекуррентной нейронной сети для минимальной логики первого порядка

А. Р. Багдасарян (Армения, г. Ереван)
Ереванский государственный университет
e-mail: baghdasaryana95@gmail.com

Аннотация

Автоматическое доказательство теорем на основе системах минимальной логики испытывает сложности из за некоторых проблем. Одной из них является правило выбора "стоупа когда выбирается формула из контекста как "стоуп". Нейронные сети были добавлены на этих системах минимальной логики и они используются для выявления претендента для "стоупа". Это решает проблему для выбора правило и это сокращает время для автоматической доказательстве теорем.

1. Introduction

There are different kind of systems in which rule selection problem leads to proof search inefficiency issues. Because of that problem automated theorem provers based on that systems experience some difficulties. Two systems for propositional fragment of minimal logic ($SwMin$ and $ScMin$) were introduced in [1]. In these systems the problem of rule selection remains unsolved. There is a stoup selection rule, when a formula from the context should be selected to be considered as a stoup. Though this is inefficient as it requires many branches to prove, which may be unnecessary. We extend these systems to the minimal fragments of first order predicate logic $SwMinPred$ and $ScMinPred$ and prove their equivalence to Hentzen type systems considered in [2]. We developed prover $SwProv$ based on $SwMinPred$ system. To avoid rule selection problems the neural networks are deployed in $SwProv$ prover ($SwNNProv$), which helps us to make a "right"decision. At each step of the proof, if there are multiple choices of the inference rule to be applied at the current step, neural network is used to determine which formula from the context will become a stoup.

Example	SwProv	SwNNProv
$(A \wedge \neg A) \supset B$	2.1	1.5
$(A \supset B) \supset (A \supset C) \supset (A \supset (B \supset C))$	2.6	1.2
$((\neg\neg A \supset A) \supset A) \vee (\neg A \supset \neg A) \vee (\neg\neg A \supset \neg\neg A) \vee (\neg\neg A \supset A)$	4.4	4.6
$\neg\neg((\neg A \supset B) \supset (\neg A \supset \neg B) \supset A)$	42	25

Таблица 1: Results and Timings (averages in milliseconds).

2. Sequent To Vector Transformation

Firstly all formulas in sequents are represented in Skolem standard form. To be able to use neural networks in the proof search it is necessary to train network model against provable sequents. To proceed with that we introduce numerical representation for the sequents assigning a specific number to each symbol. Based on that representation similar formulas will get identical vectors. After that autoencoder [6] is trained to get fixed length encoding for each sequent. As a result we get numerical representation for sequents.

3. Neural Networks in Proof Search

3.1. Data Collection

Standard library for first-order predicate logic problems are used as a training dataset. For each element in training set *SwProv* prover is run and it generates training examples. At each point of proof tree, where a stoup formula has to be selected, all sequents in that branch of tree are considered and sequence of vectors is generated by "Sequent to Vector"transformation. To differentiate successful outcomes while training neural network one needs to take numerical representation for each stoup candidate formula and corresponding ground truth label (whether this is the right selection).

3.2. Neural Network Architecture

Used neural network model consists of gated reclified unit(GRU) [3] as recurrent layer and 2-dense layers with skip connections [4] and residual blocks [5].

The output of recurrent layer (feature vector extractor module) is concatenated with numerical representation of stoup candidate and then is mapped to 2-length one-hot encoded vector via dense layer with softmax activation function. As a final step cross entropy is used as a loss function:

$$H_p(q) = -\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} y_i * \log(p(y_i)) + (1 - y_i) * \log(1 - p(y_i)) \tag{1}$$

, where y is the label and $p(y)$ is the predicted probability of the candidate formula being right for all N examples.

4. Results

In result of constructing new proof systems for minimal logic of predicates and deploying concept of neural network in the prover experiments revealed proof search space reduction and the level of accuracy up to 80% training 150 epochs. Compared to the prover without neural network time spent for the proof is reduced for almost twice (Table 1).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Bolibekyan H., Baghdasaryan A.. 2018, "On some systems of minimal predicate logic with history mechanism", *The Bulletin of Symbolic Logic*, vol. 24, no. 2, pp. 232-233.

2. Bolibekyan H.R., Chubaryan A.A.. 2002, "On the sequent systems of weak arithmetics", *Doklady National'noy Akademii Nauk RA*, vol. 102, no. 3, pp. 214-218(in Russian).

3. Kyunghyun Cho, Bart van Merrienboer, Dzmitry Bahdanau and Yoshua Bengio. 2014, "On the Properties of Neural Machine Translation: Encoder–Decoder Approaches".

4. Philipp Fischer, Olaf Ronneberger, Thomas Brox. 2015, "U-Net: Convolutional Networks for Biomedical Image Segmentation".

5. Kaiming He, Xiangyu Zhang, Shaoqing Ren, Jian Sun. 2014, "Deep Residual Learning for Image Recognition".

6. Pierre Baldi. 2012, "Autoencoders, Unsupervised Learning, and Deep Architectures".

———————————————————————————

УДК 512.1

История задач Снеллиуса и Ферма

О. О. Барабанов (Россия, Ковров)
e-mail: barabanovoo@yandex.ru
Л. П. Барабанова (Россия, Ковров)
Ковровская государственная технологическая академия имени В. А. Дегтярева, Ковров, Россия
e-mail: lpbarabanova@yandex.ru

History Snellius and Fermat problem

O. O. Barabanov (Russia, Kovrov)
e-mail: barabanovoo@yandex.ru
L. P. Barabanova (Russia, Kovrov)
The Kovrov State Technological Academy named after V. A. Degtyarev, Kovrov, Russia
e-mail: lpbarabanova@yandex.ru

В настоящей работе предъявляются быстрые алгоритмы решения обобщенных задач Снеллиуса и Ферма. Эти задачи существенно различны по постановкам, тем не менее, регулярный случай в обобщенной задаче Ферма сводится к неособому случаю обобщенной задачи Снеллиуса, обеспечивая построение быстрого алгоритма для обобщенной задачи Ферма.

Первоначальная задача Снеллиуса [1, p. 201-206] состояла в том, чтобы найти расстояния от точки до трёх наблюдаемых из неё известных пунктов по двум измеренным углам. Простая задача Снеллиуса, названная в геодезии обратной угловой засечкой, состоит в определении декартовых координат точки, из которой производились угловые наблюдения. Она впервые встречается у Бесселя [2]. Обобщенная задача Снеллиуса требует дополнительно определения направления, от которого измерялись три угла. Вопрос об адекватном алгоритме для обобщенной задачи Снеллиуса впервые встречается у Гаусса [3, p. 307-334], который называл эту задачу задачей Потенота [4]. Сейчас обобщенная задача Снеллиуса актуальна в робототехнике. В [5] приводится сравнение известных алгоритмов решения обобщенной задачи Снеллиуса по быстроте. Это сравнение некорректно, потому что все сравниваемые в [5] алгоритмы неадекватны обобщенной задаче Снеллиуса, причем неадекватны по-разному. В работе [6] был построен алгоритм для простой задаче Снеллиуса, который, однако, не полностью отражал особый случай задачи. В настоящей работе приводится быстрый алгоритм для обобщенной задачи Снеллиуса, он становится реализацией незавершенного замысла Гаусса.

Простая задача Ферма [7, p. 153] состояла в том, чтобы найти точку, минимизирующую сумму расстояний до вершин заданного треугольника. Симпсон обобщил её на случай взвешенных расстояний [8, p. 505-506]. Известны итерационные алгоритмы для обобщенной задачи Ферма, см. [9]. Конечный адекватный алгоритм для обобщенной задачи Ферма построен в [10]. В этой работе приводится значительно более быстрый конечный алгоритм для обобщенной задачи Ферма. Он является ветвью быстрого алгоритма для обобщенной задачи Снеллиуса.

Задача 2. *Дан треугольник $\{a_1,\ a_2,\ a_3\}$, где $a_k \in \mathbb{C}$ попарно не совпадают, и тройка ортов $\{v_1,\ v_2,\ v_3\}$, $|v_k| = 1$, $k = 1,2,3$. Требуется найти $z \in \mathbb{C}$; $r \in \mathbb{C}$, $|r| = 1$ такие, что*

$$a_k - z = |a_k - z| r v_k, \qquad z \neq a_k, \quad k = 1,2,3. \tag{1}$$

Всякую пару $(z,\ r)$, превращающую (1) в равенства, будем называть корнем задачи 1. В соответствии с геометрическим смыслом задачи 1 будем называть входные данные v_k направляющими ортами или просто ортами, а входные данные a_k – точками или пунктами. Геометрический смысл задачи 1 состоит в поиске точки z на плоскости, из которой, за счет некоторого общего поворота r тройки ортов v_k, получится их сонаправленность с тремя направлениями от z на соответствующие заданные пункты a_k. Заметим, что, если исключить r из системы трех уравнений (1), то останется система двух уравнений – простая задача Снеллиуса [6]:

Задача 3. *Дан треугольник $\{a_1,\ a_2,\ a_3\}$, где a_k попарно не совпадают, и тройка ортов $\{v_1,\ v_2,\ v_3\}$, $|v_k| = 1$, $k = 1,2,3$. Требуется найти $z \in \mathbb{C}$ такое, что $\frac{a_1-z}{|a_1-z|v_1} = \frac{a_2-z}{|a_2-z|v_2} = \frac{a_3-z}{|a_3-z|v_3}$, $\quad z \neq a_k$, $\quad k = 1,2,3$.*

Теорема 1. *По z задачи 1, 2 равносильны. То есть, если $(z,\ r)$ – корень задачи 1, то z – корень задачи 2, и если z – корень задачи 2, то $(z,\ r)$ – корень задачи 1, где для любого k $r = (a_k - z) \setminus (|a_k - z| v_k)$.*

Введем обозначения: $b_1 = a_3 - a_2, b_2 = a_1 - a_3, b_3 = a_2 - a_1, w_k = \overline{v_k}^2\ \overline{b_k}, W = v_1^2 b_1 + v_2^2 b_2 + v_3^2 b_3$,

$$z_* = \frac{w_1 a_1 + w_2 a_2 + w_3 a_3}{w_1 + w_2 + w_3}. \tag{2}$$

Всевозможные входы задач Снеллиуса разбиваются на четыре варианта в зависимости от того, выполняются или не выполняются условия a-невырожденности и v-невырожденности.

Условие a-невырожденности. *Пункты a_k, $k = 1,2,3$ не лежат на одной прямой.*

Противоположное условие a-вырожденности эквивалентно равенству $\mathrm{Im}(\overline{b_1} b_2) = 0$.

Условие v-невырожденности. *Орты v_k, $k = 1,2,3$ не коллинеарны.*

Противоположное условие v-вырожденности эквивалентно равенству $\mathrm{Im}(\overline{v_1} v_2) = 0$, что сводится к двум случаям: или все три орта совпадают, или один орт имеет противоположное двум другим ортам направление: $v_1^2 = v_2^2 = v_3^2$.

Теорема 2. *Пусть $W \neq 0$. Тогда задача 1 имеет один единственный корень $(z_*,\ r)$, если выполнены условия*

$$0 \neq \mathrm{sign}\ \mathrm{Im}(b_1 \overline{b_2} v_1 \overline{v_2}) = \mathrm{sign}\ \mathrm{Im}(b_2 \overline{b_3} v_2 \overline{v_3}) = \mathrm{sign}\ \mathrm{Im}(b_3 \overline{b_1} v_3 \overline{v_1}), \tag{3}$$

и не имеет корней в противном случае.

Пример того, как получается отсутствие корней задачи 2 при $W \neq 0$, приведен в [6].

Лемма 1. *Если $W = 0$ и $(z,\ r)$ – корень задачи 1, то $z \in C_a$.*

Случай одновременных a-невырожденности и v-вырожденности исключаем. Если $W = 0$ обозначим через B_k открытую дугу описанной окружности C_a, если её предельные точки – пункты исходной конфигурации и $a_k \notin B_k$. Введем следующие индикаторы:

$$I_1 = \operatorname{sign}((b_3 v_3) \setminus (b_1 v_1)), \quad I_2 = \operatorname{sign}((b_3 v_3) \setminus (b_2 v_2)).$$

Теорема 3. *Пусть $W = 0$ при исключении случая одновременных a-невырожденности и v-вырожденности. Тогда решением задачи 2: при $I_1 < 0$ и $I_2 < 0$ будет дуга B_3; при $I_1 < 0$ и $I_2 > 0$ будет дуга B_1; при $I_1 > 0$ и $I_2 < 0$ будет дуга B_2; при $I_1 > 0$ и $I_2 > 0$ будет пустое множество.*

Быстрый алгоритм для обобщенной задачи Снеллиуса.

Вычисление $W = W(a_1,\ a_2,\ a_3,\ v_1,\ v_2,\ v_3)$.

Если $W \neq 0$, то вычисление $z = z_*$ по формуле (2). Если выполнено (3), то на выходе единственный корень $(z,\ r)$ задачи, в противном случае на выходе флаг "Фиктивные данные в случае $W \neq 0$". Конец алгоритма. В противном случае $W = 0$.

Если обнаружится a-невырожденность и v-вырожденность, то на выходе флаг "Фиктивные данные в случае $W = 0$, a-невырожденность и v-вырожденность". Конец алгоритма. В противном случае вычисление индикаторов $I_1,\ I_2$ и применением правил теоремы 3. Соответственно, на выходе некоторая дуга B_m или флаг "Фиктивные данные в случае $W = 0$, пустая дуга". Конец алгоритма.

Построенный алгоритм является быстрым потому, что он является первым адекватным алгоритмом решения обобщенной задачи Снеллиуса.

Обобщенная задача Ферма. В этой задаче требуется найти точку, минимизирующую сумму взвешенных расстояний до вершин невырожденного треугольника. Другими словами, дана a-невырожденная тройка $a_1,\ a_2,\ a_3 \in \mathbb{C}$ и три соответствующих положительных числа $m_1,\ m_2,\ m_3$. Требуется найти $z_F \in \mathbb{C}$ как решение задачи

$$f(z) = m_1|a_1 - z| + m_2|a_2 - z| + m_3|a_3 - z| \longrightarrow \min_{z \in \mathbb{C}}.$$

Основными свойствами функции f является строгая выпуклость и $\mathbb{R}$-дифференцируемость всюду, кроме $a_1,\ a_2,\ a_3 \in \mathbb{R}^2$. В силу строгой выпуклости и ограниченности снизу f решение z_F обобщенной задачи Ферма существует и единственно. Негладкость в $a_1,\ a_2,\ a_3$ преодолевается производными по направлениям в фильтре Куна [9].

Фильтр Куна. Если $m_3^2 \geqslant m_1^2 + m_2^2 + 2m_1 m_2 \frac{\operatorname{Re}(\overline{b_1} b_2)}{|b_1||b_2|}$, то решение обобщенной задачи Ферма z_F совпадает с вершиной треугольника a_3. Аналогично – с вершиной a_1 или a_2. Если ни одно из этих условий не выполняется, то z_F принадлежит внутренности треугольника. Ясно, что в последнем случае z_F будет удовлетворять экстремальному условию Ферма во внутренней точке треугольника $\{a_1,\ a_2,\ a_3\}$: $m_1 v_1 + m_2 v_2 + m_3 v_3 = 0$, где $v_k = \frac{a_k - z_F}{|a_k - z_F|}$. Первое условие эквивалентно существованию треугольника со сторонами $v_1,\ v_2,\ v_3 \in \mathbb{C}$ с длинами $m_1,\ m_2,\ m_3$, соответственно. Таких треугольников ровно два в зависимости от ориентации.Ориентация тройки v совпадает с ориентацией данного треугольника. Без ограничения общности возьмем $v_3 = 1 + 0i$ и элементарно получим подходящую тройку ортов $\{v_1,\ v_2,\ v_3\}$: $v_1 = \frac{(m_2^2 - m_1^2 + i\mathfrak{O}_a M) - m_3^2}{2m_1 m_3}$, $v_2 = \frac{-(m_2^2 - m_1^2 + i\mathfrak{O}_a M) - m_3^2}{2m_2 m_3}$, $v_3 = 1$, где $M = \sqrt{(m_1 + m_2 + m_3)(-m_1 + m_2 + m_3)(m_1 - m_2 + m_3)(m_1 + m_2 - m_3)}$. Последняя формула обеспечивают нужную ориентацию:

$$\mathfrak{O}_v = \mathfrak{O}(v_1, v_2, v_3) = \operatorname{sign}(\operatorname{Im}(\overline{v_3 - v_2}(v_1 - v_3)) = \operatorname{sign}\left(\frac{\mathfrak{O}_a}{2}\left(\frac{M}{m_1 m_2} + \frac{M}{m_2 m_3} + \frac{M}{m_3 m_1}\right)\right) = \mathfrak{O}_a.$$

В результате, наш алгоритм для обобщенной задачи Ферма, при условии прохождения фильтра Куна, становится ветвью алгоритма для обобщенной задачи Снеллиуса в неособом случае $W \neq 0$ с входными данными $\{a_1,\ a_2,\ a_3\}$, $\{v_1,\ v_2,\ v_3\}$, где v-тройка строится по весам $\{m_1,\ m_2,\ m_3\}$ и ориентации данного треугольника.

Быстрый алгоритм для обобщенной задачи Ферма. На входе $\{a_1,\ a_2,\ a_3\}$ и соответствующая тройка весов $\{m_1,\ m_2,\ m_3\}$.

Шаг 1. Фильтр Куна. В случае его прохождения переход к следующему шагу.

Шаг 2. Последовательные вычисления $\mathfrak{O}_a$, M, $\{v_1,\ v_2,\ v_3\}$ и затем вычисление искомого $z_F = z_*$ по формуле (2). Конец алгоритма.

Этот алгоритм быстрее алгоритма [10], как минимум, в два раза.

На выходе первоначальной задачи Снеллиуса [1, p. 201-206] были расстояния от точки до вершин наблюдаемого треугольника. Снеллиус решал свою задачу циркульно, а затем тригонометрически. Свое решение Снеллиус сопроводил хорошим рисунком, из которого отчетливо следует, что при неправильных данных задача может не иметь решения. Труд Снеллиуса или не был прочитан или не был понят, и все последующие математики, включая Гаусса, ссылок на Снеллиуса не делали. Так в истории науки возник Потенот [4], именем которого и стали потом называть задачу Снеллиуса. Бессель [2] первым поставил задачу Снеллиуса в декартовых координатах, взяв за опорное направление меридиан.

Опорное направление, как неизвестное, впервые встречается у Гаусса в письме Герлингу 1842 года [3, p. 316]. Тем самым, Гаусс первым сформулировал обобщенную задачу Снеллиуса и этим предвосхитил требования робототехники. Также Гауссу принадлежит идея использовать комплексные переменные для задачи Снеллиуса. Письменные свидетельства об интересе Гаусса к задаче Снеллиуса собраны в [3, p. 307-334] в разделе "Pothenots Aufgabe und das Viereck". Это 17 фрагментов 1830-1852 гг. Из них следует, что стремлением Гаусса была разработка адекватного алгоритма для задачи Снеллиуса. Так, в письме Шумахеру 21.04.1836 [3, p. 310] Гаусс приводит пример несуществования решения задачи Снеллиуса. В письме Герлингу от 14.01.1842 Гаусс формулирует теорему, которую называет теоремой о четырехугольнике. Формулы (2) для z_* у Гаусса нет. В [11, p. 74] биограф и редактор записок и писем Гаусса, Штёкель, писал: "Почему так много времени и усилий потратил Гаусс на решение элементарного вопроса?". Возможно, ответ на вопрос Штёкеля связан с интересом Гаусса к геодезии, где тригонометрия может мешать комплексной алгебре.

У задачи Ферма тоже есть своя интрига. В своем письме Мерсенну [7, p. 153] Ферма предложил всем сомневающимся (имелся ввиду Декарт) решить, **без его метода**, свою задачу: "Qui hane methodum non probaveril, ei proponitur: *Datis tribus punctis, quartum reperire, a quo si ducantur Ires reelae ad data puncta, summa trium harum rectarum sil minima quantitas*". Исходя из формы вызова Ферма, можно утверждать, что Ферма *уже знал* решение своей задачи в удобном случае не слишком тупоугольного треугольника. Мерсенн во время своего паломничества в Рим сообщил Торичелли задачу Ферма и, вероятно, без коварного подтекста Ферма. Торичелли решил задачу Ферма для треугольника с углами, меньшими 120°, используя метод Ферма [12, p. 30–34]. Тем самым, он только подтвердил метод Ферма. Он *не ответил* на вопрос Ферма. На вопрос Ферма первым ответил Вивиани [13, p. 145–150], но он *уже знал результат* от Торичелли. Кавальери [14, p. 507–508] первым обратил внимание на условие углов, предваряя фильтр Куна. Формулировка обобщенной задачи Ферма принадлежит Симпсону, который заметил также необходимое условие для применения принципа Ферма в удобном случае: веса должны удовлетворять неравенству треугольника [8, p. 505-506].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Snellius W. Eratosthenes Batavus. — Leyden, 1617.

2. Bessel F. M. Über eine Aufgabe der praktischen Geometrie // Monatliche Korrespondenz zur Befördeung der Erd-und Himmelskunde. 1813. № 27. P. 222-226.

3. Gauss C. F. Werke, Band 8. — Leipzig, 1900.

4. Pothenot L. Probleme de Geometrie pratique // Memoires de mathematique et de physique: tirez des registres de l'Academie royale des sciences. Paris. 1692. P. 188–190.

5. Pierlot V., Van Droogenbroeck M. A New Three Object Triangulation Algorithm for Mobile Robot Positioning // IEEE Transactions on Robotics. 2014. №30(3). P. 566-577.

6. Барабанова Л. П. Окончательная формула для обратной однократной угловой засечки // Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъемка. 2013. №3. С. 9-13.

7. Fermat P. Oeuvres, vol. 1. Ed. Paul Tannery, Charles Henry. — Paris, 1891.

8. Simpson Th. The doctrine and application of fluxion. — London, 1750.

9. Kuhn H. W. A note on Fermat's problem // Math. Program. 1973. №4(1), P. 98–107.

10. Uteshev A. Y. Analytical solution for the generalized Fermat–Torricelli problem // Amer. Math. Monthly. 2014. №121. P. 318–331.

11. Gauss C. F. Werke, Band 10. Abt. 2. — Berlin, 1922-1933.

12. Torricelli E. Lettere fin qui inedite di Evangelista Torricelli precedute dalla vita di lui scritta da Giovanni Ghinassi. — Faenza, 1864.

13. Viviani V. De maximis et minimis geometrica divinatio in quintum conicorum Apollonii Pergaei iamdiu desideratum. Liber secundus. — Florentiae, 1659.

14. Cavalieri B. Excercitationes Geometricae sex. — Bononiae, 1647.

УДК 512.643.8

B-матрицы в методе наименьших квадратов

О. О. Барабанов (Россия, Ковров)
e-mail: barabanovoo@yandex.ru
Л. П. Барабанова (Россия, Ковров)
Ковровская государственная технологическая академия имени В. А. Дегтярева, Ковров, Россия
e-mail: lpbarabanova@yandex.ru

B-building matrices in least squares method

O. O. Barabanov (Russia, Kovrov)
e-mail: barabanovoo@yandex.ru
L. P. Barabanova (Russia, Kovrov)
The Kovrov State Technological Academy named after V. A. Degtyarev, Kovrov, Russia
e-mail: lpbarabanova@yandex.ru

Речь пойдет о *вертикальных матрицах*, т.е. о таких матрицах $N \times n$, у которых число N строк строго больше числа n столбцов. Такие матрицы всегда возникают в избыточных измерениях, а последние – обычное дело в экспериментах, наблюдениях и т. п. Одним из путей обработки избыточных измерений стал принцип наименьших квадратов Лежандра. Этому вопросу уделили внимание Гаусс, Лаплас, Чебышев, Марков, Фишер, Колмогоров, Рао и др.

В своё время [1] А.Н. Колмогоров в связи с методом наименьших квадратов поставил вопрос о существовании матриц из действительных компонент, которые (в каноническом евклидовом смысле) удовлетворяют следующим требованиям:

1. *Квадраты строк равны единице.*
2. *Квадраты столбцов равны между собой.*
3. *Столбцы попарно ортогональны.*

Мотивом для вопроса Колмогорова было достижение нижней границы у Гаусса, см. [1], для оценки дисперсии решения методом наименьших квадратов системы

$$Ax = t,$$

с полноранговой матрицей A и с единичной ковариационной матрицей для измеряемого столбца t. Положительный ответ на вопрос Колмогорова дал А. И. Мальцев в статье [2]: такие матрицы существуют при всех натуральных $N \geqslant n$. Разумеется, в этот класс матриц попали и ортогональные матрицы.

Аналогичный мотив возникает теперь при достижении нижней границы для оценки дисперсии решения методом наименьших квадратов специального класса измерительных задач, которые основаны на решении разностно-дальномерной задачи и обратной разностно-дальномерной задачи. Прямая разностно-дальномерная задача является математическим ядром навигационных систем GPS-ГЛОНАСС и многих других робототехнических систем, а обратная разностно-дальномерная задача является математическим ядром систем обнаружения источника сигнала (это электронная, сейсмическая, тепловая разведка и т.п.).

При нашей, ориентированной на эти задачи постановке вопроса, к условиям 1 – 3 приходится добавить следующее дополнительное требование:

4. *Сумма компонент каждого столбца матрицы A равна нулю.*

Отметим, что наше добавление требования 4 сразу делает разрешение вопроса о существовании таких матриц проблемным. Например, сразу отпадают все квадратные матрицы потому, что в силу требований 1-3 они должны быть ортогональными, а в силу требования 4 их столбцы должны быть ортогональны к одному и тому же столбцу, составленному из единиц. Последнее, очевидно, влечет линейную зависимость столбцов ортогональной матрицы, чего не может быть. Таким образом, матрицы, удовлетворяющие требованиям 1-4, автоматически вертикальные.

Вопрос о существовании матриц, отвечающих условиям 1-4, был *впервые* поставлен в работе [3]. Там же этот вопрос был частично разрешен «строительными» операциями *augment* (присоединение матриц слева направо) и *stack* (присоединение матриц сверху вниз).

Определение 1. *Вертикальную матрицу, удовлетворяющие условиям 1-4, будем называть* строящей *матрицей (building matrix) или B-матрицей.*

В настоящей статье вопрос о существовании B-матриц решается полностью следующей теоремой.

Теорема 1. *(основная). B-матрицы $N \times n$ строятся при любых натуральных парах $n < N$, кроме пар $(2k+1) \times 1$, $k \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$ и пар $(2k+3) \times (2k+1)$, $k \in \mathbb{N}$.*

Для пар $(2k+1) \times 1$, $k \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$ и пар $(2k+3) \times (2k+1)$, $k \in \mathbb{N}$ B-матрицы не существуют.

Лемма 1. (о B-матрицах $N\times 1$). *B-матрицы $N\times 1$ существуют тогда и только тогда, когда N – четно. Более того, эти матрицы-столбцы состоят из равного количества плюс и минус единиц.*

Эта лемма даёт понять, что за каждой матричной размерностью $N\times n$ скрывается свой класс эквивалентности B-матриц. Поэтому далее будем называть размерность $N\times n$ *B-клеткой*, если хотя бы одна такая матрица конструктивно строится, и *$\overline{B}$-клеткой* в случае, когда такие матрицы не существуют.

Как будет показано в ходе доказательства основной теоремы, других клеток, кроме B-клеток и $\overline{B}$-клеток, нет.

Лемма 2. (о В-матрицах $N\times 2$). *Пусть N – произвольное натуральное число, большее двух, и*

$$\varphi_k=\frac{2\pi}{N}\cdot k,\qquad k=0,...,(N-1),$$

тогда матрица $N\times 2$, состоящая из строк $(\cos\varphi_k \quad \sin\varphi_k)$, является B-матрицей.

Лемма 3. (о В-матрицах $N\times(N-1)$). *При всех $N>1$ существуют B-матрицы $N\times(N-1)$.*

Более того, начиная с B-матрицы $(1 \quad -1)^T$, индуктивно: пусть $1<N$ – произвольное натуральное число, $A(N\times(N-1))$ – B-матрица и

$$\alpha=\frac{\sqrt{N^2-1}}{N},\qquad \beta=-\frac{1}{N}.$$

Тогда матрица $A'((N+1)\times N)$, построенная согласно блочной схеме

$$A'=\begin{pmatrix}\alpha\cdot A & \beta\cdot\bar{1}\\ \\ \bar{0}^T & 1\end{pmatrix},$$

где $\bar{0},\bar{1}$ – столбцы, составленные из одних нулей и единиц соответственно, также будет B-матрицей.

Определение 2. *B-матрицы $P(N\times m),Q(N\times k)$* дуальны, *если $m+k=N-1$ и столбцы матрицы P ортогональны всем столбцам матрицы Q.*

Очевидно, что отношение дуальности в классе В-матриц симметрично.

Лемма 4. *(дуальная). Если $A(N\times n)$ – B-матрица при $n<N-1$, то по ней строится и B-матрица $B(N\times(N-n-1))$, дуальная к A.*

Эта лемма позволяет получить два простых следствия.

Лемма 5. *Клетки $(2k+2)\times 2k$, $k\in\mathbb{N}$ – B-клетки. Клетки $(2k+3)\times(2k+1)$ – $\overline{B}$-клетки.*

Лемма 6. *При $N\geqslant 6$ клетки $N\times(N-3)$ – B-клетки.*

Лемма 7. *(пороговая). Если натуральные числа n,m,k подчиняются неравенству*

$$n^2+n-mk>0$$

и построены B-матрицы $P((n+m+1)\times n)$, $D((n+k)\times n)$, то строится и B-матрица C размера

$$(2n+m+1+k)\times(n+m).$$

Лемма 8. *(медиантная). При всех натуральных j B-заполняются клетки*

$$(4j+3)\times(2j+1), (4j+4)\times(2j+1), (4j+5)\times(2j+1), (4j+5)\times(2j+2).$$

Лемма 9. *(стековая). Если $A(N\times n)$, $C(M\times n)$ – B-матрицы, то*

$$D((N+M)\times n) = stack(A, C)$$

является также B-матрицей.

Лемма 10. *Пусть a – натуральное число, большее 2. Из множества слагаемых $\mathfrak{I}_a$ можно получить, начиная с b, все натуральные числа, если:*

I. $\mathfrak{I}_a$ – однократно проколотый в точке $a+1$ отрезок натуральных чисел

$$[a, \boxed{a+1}, a+2, a+3, ..., 2a+1], b = a+2.$$

II. $\mathfrak{I}_a$ – отрезок натуральных чисел $[a, 2a-1], b = a$.

Лемма 11. *Если $n = 2j+1$, и построены B-матрицы $(N\times n)$ при $n < N < \overline{N}(j)$, кроме одного случая $(n+2)\times n$, то B-матрицы $(N\times n)$ строятся при всех $N \geqslant \overline{N}(j)$.*

Если $n = 2j+2$, и построены B-матрицы $(N\times n)$ при $n < N < \overline{N}(j)$, то B-матрицы $(N\times n)$ строятся при всех $N \geqslant \overline{N}(j)$.

Подробное доказательство основной теоремы см. в [4].

При $n = 3$, что соответствует окружающему нас пространству, доказанные результаты подводят определенную черту под вопросом об оптимальном расположении источников (в случае прямой разностно-дальномерной задачи) или приемников (в случае обратной разностно-дальномерной задачи) [3].

Следует сказать, что до сих пор не было ясности в клетках 5×3, 7×3 и 9×3. Теперь, согласно основной теореме 5×3 – $\overline{B}$-клетка, 7×3 и 9×3 – B-клетки.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Колмогоров А. Н., Петров А. А., Смирнов Ю. М. Одна формула Гаусса из теории наименьших квадратов // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1947. № 11. С. 561-566.

2. Мальцев А. И. Замечание к работе А.Н. Колмогорова, А.А. Петрова, Ю.М. Смирнова (Одна формула Гаусса из теории наименьших квадратов) // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1947. № 11. С. 567-568.

3. Барабанова Л. П. К минимизации геометрических факторов GNSS // Известия РАН. Теория и системы управления. 2010. № 2. С. 143-152.

4. Барабанов О. О., Барабанова Л. П. О строящих матрицах в теории метода наименьших квадратов // Изв. вузов. Математика. 2019. № 4. С. 27-35.

The codes and idempotents in some non-commutative group algebras

Kirill V. Vedenev (Russia, Rostov-on-Don)
Southern Federal University
e-mail: vedenevk@gmail.com
Vladimir M. Deundyak (Russia, Rostov-on-Don)
Southern Federal University
e-mail: vl.deundyak@gmail.com

УДК 512.552.7+519.725

Коды и идемпотенты в некоторых некоммутативных групповых алгебрах

К. В. Веденёв (Россия, г. Ростов-на-Дону)
Южный Федеральный Университет
e-mail: vedenevk@gmail.com
В. М. Деундяк (Россия, г. Ростов-на-Дону)
Южный Федеральный Университет
e-mail: vl.deundyak@gmail.com

1. Introduction

Let G be a finite group, written multiplicatively, and let $\mathbb{F}_q$ be a Galois field of order q. Recall, the group algebra $\mathbb{F}_qG$ is a set of all formal linear combinations $\alpha = \sum_{g \in G} a_g g$, $a_g \in \mathbb{F}_q$, equipped with operations of addition and multiplication by elements of $\mathbb{F}_q$ defined componentwise and multiplication defined as follows:

$$\sum_{g \in G} \alpha_g g \sum_{g \in G} \beta_g g = \sum_{g \in G} \left(\sum_{h \in H} \alpha_{gh^{-1}} \beta_h \right) g.$$

(see [1]). Any left ideal $I \subset \mathbb{F}_qG$ is called a group code over G (see [2]).

Robert McEliece developed an asymmetric cryptosystem based on the use of binary Goppa codes in 1978 and no effective key attacks has been described yet. Code cryptosystems are considered a potential replacement to number-theoretical ones in connection with the development of quantum computing. One of the main disadvantages of the original McEliece cryptosystem is that the private and public keys are very large matrices. Variants of this cryptosystem based on the use of well-known Reed–Solomon codes and Reed–Muller codes, which can be realised as two–sided ideals in some abelian group algebras (see [2]), were proven to be less secure [3]. So, non–commutative codes, which are one–sided (left) ideals in non–commutative group algebras, could be a good option to build new resistant and convenient in use cryptosystems.

The Wedderburn–Artin theorem implies that if $\mathbb{F}_qG$ is semisimple then $\mathbb{F}_qG$ is isomorphic to a direct sum of matrix algebras over some extensions of the field $\mathbb{F}_q$. This theorem is important to study the structure of non-commutative codes, but it gives no information about summands and the isomorphism. So, for an arbitary group algebra $\mathbb{F}_qG$ the problem of constructing its Wedderburn decomposition remains to be solved.

In this paper, using Weddernurn decompositions, we describe the codes and principal idempotents over two non–commutative groups, which are semidirect products of abelian subgroups.

2. The codes and idempotents over dihedral group

Wedderburn decomposition of the dihedral group algebra $\mathbb{F}_q D_{2n}$, in case when $\gcd(q, 2n) = 1$, was obtained by F. E. Brochero Martinez [4]. Recall, dihedral group of order $2n$ is a group with the following presentation

$$D_{2n} = \langle a, b \mid a^n,\ b^2,\ (ba)^2 \rangle.$$

For every polynomial $g(x) \in \mathbb{F}_q[x]$ with $g(0) \neq 0$, $g^*(x)$ denotes its reciprocal polynomial, i.e., $g^*(x) = x^{\deg(g)} g(x^{-1})$. We say that a polinomial $g(x)$ is auto-reciprocal if $g(x)$ and $g^*(x)$ differ by a multiplicative constant.

Throughout this paper we will assume that $\gcd(q, 2n) = 1$.

The polynomial $x^n - 1 \in \mathbb{F}_q[x]$ splits into monic irreducible factors as

$$x^n - 1 = (f_1 f_2 \dots f_r)(f_{r+1} f^*_{r+1} f_{r+2} f^*_{r+2} \dots f_{r+s} f^*_{r+s}), \tag{1}$$

where $f_1 = x - 1$, $f^*_j = f_j$ for $1 < j \leq r$, and $f_2 = x + 1$ if n is even. Here r denotes the number of auto-reciprocal factors in this factorization and $2s$ denotes the number of non-auto-reciprocal factors.

By α_j we denote a root of the polynomial f_j and by $\mathbb{M}_k[\mathbb{F}]$ we denote the algebra of $(k \times k)$–matrices over the field $\mathbb{F}$. Define

$$\zeta(n) := \begin{cases} 1, & \text{if } n \text{ is odd}, \\ 2, & \text{if } n \text{ is even}. \end{cases}$$

Theorem 1 ([4]). *Let* $\gcd(q, 2n) = 1$*; then the group algebra* $\mathbb{F}_q D_{2n}$ *has Wedderburn decomposition of the form:*

$$p : \mathbb{F}_q D_{2n} \to \bigoplus_{j=1}^{r+s} A_j, \quad A_j := \begin{cases} \mathbb{F}_q \oplus \mathbb{F}_q, & 1 \leq j \leq \zeta(n) \\ \mathbb{M}_2(\mathbb{F}_q[\alpha_j + \alpha_j^{-1}]), & \zeta(n) + 1 \leq j \leq r \\ \mathbb{M}_2(\mathbb{F}_q[\alpha_j]), & r + 1 \leq j \leq r + s \end{cases} \tag{2}$$

We obtained the explicit construction of p^{-1} and proved the following theorem which describes the structure of codes over D_{2n} (see [5]).

Theorem 2. *Let* $\gcd(q, 2n) = 1$*, let*

$$R_j := \begin{cases} \mathbb{F}_q, & 1 \leq j \leq \zeta(n), \\ \mathbb{F}_q[\alpha_j + \alpha_j^{-1}], & \zeta(n) + 1 \leq j \leq r, \\ \mathbb{F}_q[\alpha_j], & r + 1 \leq j \leq r + s. \end{cases} ,$$

and let

$$I_j(x, y) := \begin{cases} \{kx, ty \mid k, t \in \mathbb{F}_q\}, & 1 \leq j \leq \zeta(n), \\ \left\{ \begin{pmatrix} ky & -kx \\ ty & -tx \end{pmatrix} \mid k, t \in R_j \right\}, & \zeta(n) + 1 \leq j \leq r + s. \end{cases}$$

Consider the isomorphism (2). Then for any group code $I \subset \mathbb{F}_q D_{2n}$ *there exist disjoint sets* $J_1, J_2, J_3 \subset \{1, \dots, r + s\}$ *and* $\{q_j\}_{j \in J_2}$*,* $q_j \in R_j$*, such that*

$$p(I) = \bigoplus_{j=1}^{r+s} B_j, \quad B_j = \begin{cases} A_j, & j \in J_1 \\ I_j(-q_j, 1) & j \in J_2 \setminus \{1, \zeta(n)\} \\ I_j(0, 1) & j \in J_2 \cap \{1, \zeta(n)\} \\ I_j(1, 0), & j \in J_3 \\ 0, & j \notin J_1 \cup J_2 \cup J_3 \end{cases} . \tag{3}$$

Contrariwise, for any disjoint $J_1, J_2, J_3 \subset \{1, \dots, r+s\}$ *and for any* $\{q_j\}_{j\in J_2}$, $q_j \in R_j$, *the set*

$$p^{-1}(\bigoplus_{j=1}^{r+s} B_j),$$

with B_j *defined in (3), is a group code in* $\mathbb{F}_q D_{2n}$.

Using this theorem, for every group code defined by its image under Wedderburn decomposition (2) of $\mathbb{F}_q D_{2n}$ we obtain its principal idempotent. Contrariwise, for some codes defined by their principal idempotents it is easy to describe their images under Wedderburm decomposition. As an application, we apply this results to study group codes over D_{2n}, which are induced by group codes over subgroups of D_{2n}.

3. The codes and idempotents over $(\mathbb{Z}_n \oplus \mathbb{Z}_n) \leftthreetimes (\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2)$

Let Q_n be a group with the following presentation:

$$Q_n := \langle a_1^n, a_2^n, b^2, c^2 \mid a_1a_2 = a_2a_1, bc = cb, (ba_1)^2, (ba_2)^2, (ca_1)^2, ca_2 = a_2c\rangle.$$

Lemma 1. *Let* $N = \langle a_1, a_2\rangle$, $H = \langle b, c\rangle$ *be subgroups of* Q_n*; then*
(i) $N \simeq \mathbb{Z}_n \oplus \mathbb{Z}_n$ *is a normal subgroup of* Q_n*;*
(ii) $H \simeq \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$*;*
(iii) $Q_n = N \leftthreetimes H$.

Using the finite field adaptation of the Wigner–Mackey method of little subgroups (see [6]), we obtain the Wedderburn decomposition of $\mathbb{F}_q Q_n$ in case when $n \mid (q-1)$ and $2 \nmid q$. *Throughout this section, we assume that* $n \mid (q-1)$, $2 \nmid q$. Note that this condition implies that all irreducible factors in (1) are of degree 1; hence $r = \zeta(n)$, $s = \frac{n-\zeta(n)}{2}$.

Theorem 3. *Let* $n \mid (q-1)$, $2 \nmid q$*; then the group algebra* $\mathbb{F}_q Q_n$ *has Wedderburn decomposition of the form:*

$$v : \mathbb{F}_q Q_n \to \bigoplus_{i,j=1}^{r+s} \mathcal{A}_{i,j}, \quad \mathcal{A}_{i,j} := \begin{cases} \mathbb{F}_q \oplus \mathbb{F}_q \oplus \mathbb{F}_q \oplus \mathbb{F}_q, & i,j = 1,r \\ \mathbb{M}_2(\mathbb{F}_q) \oplus \mathbb{M}_2(\mathbb{F}_q), & (r+1 \le i \le r+s) \wedge (j = 1,r) \\ \mathbb{M}_2(\mathbb{F}_q) \oplus \mathbb{M}_2(\mathbb{F}_q), & (i = 1,r) \wedge (r+1 \le j \le r+s) \\ \mathbb{M}_4(\mathbb{F}_q), & r+1 \le i,j \le r+s \end{cases} \tag{4}$$

Now we can establish the structure of the group codes over Q_n. Let $m \in \mathbb{N}$, V be a subspace of $\mathbb{F}_q^m$; by $\mathcal{I}^m(V)$ we denote the set of all matrices $K \in \mathbb{M}_m(\mathbb{F}_q)$ such that $K\bar{v} = 0$ for all $\bar{v} \in V$.

Theorem 4. *Let* $n \mid (q-1)$, $2 \nmid q$. *Consider the isomorphism (4). Then for any group code* $I \subset \mathbb{F}_q Q_n$ *there exist subspaces* $V^m_{i,j,k} \subset \mathbb{F}_q^m$ *such that*

$$v(I) = \bigoplus_{i,j=1}^{r+s} \mathcal{B}_{i,j}, \tag{5}$$

$$\mathcal{B}_{i,j} = \begin{cases} \mathcal{I}^1(V^1_{i,j,1}) \oplus \mathcal{I}^1(V^1_{i,j,2}) \oplus \mathcal{I}^1(V^1_{i,j,3}) \oplus \mathcal{I}^1(V^1_{i,j,4}), & i,j = 1,r \\ \mathcal{I}^2(V^2_{i,j,1}) \oplus \mathcal{I}^2(V^2_{i,j,2}), & (r+1 \le i \le r+s) \wedge (j = 1,r) \\ \mathcal{I}^2(V^2_{i,j,1}) \oplus \mathcal{I}^2(V^2_{i,j,2}), & (i = 1,r) \wedge (r+1 \le j \le r+s) \\ \mathcal{I}^4(V^4_{i,j,1}), & r+1 \le i,j \le r+s \end{cases}. \tag{6}$$

Contrariwise, for any subspaces $V^m_{i,j,k} \subset \mathbb{F}_q^m$ *the set*

$$v^{-1}(\bigoplus_{i,j=1}^{r+s} \mathcal{B}_{i,j}),$$

with $\mathcal{B}_{i,j}$ *defined in (6), is a group code in* $\mathbb{F}_q Q_n$.

Consider a group code $I \subset \mathbb{F}_q Q_n$. We obliviously have the length of I equals $4n^2$ and the dimension can be evaluated by the following formula:

$$\dim(I) = \sum_{i,j=1}^{r+s} \dim(\mathcal{B}_{i,j}).$$

REFERENCES

1. C. P. Milies, S. K. Sehgal, *An inroduction to Group Rings,* Kluwer Academic Publishers, Boston, 2002, 371 pp.
2. E. Couselo, S. Gonzalez, V. T. Markov, C. Martinez, A. A. Nechaev "Ideal representation of Reed–Solomon and Reed–Muller codes" , *Algebra and Logic*, **51**:3 (2012), 195–212.
3. D. J. Bernstein "Grover vs. McEliece" , *Lecture Notes in Computer Science*, **6061** (2010), 73–80
4. F. E. Brochero Martinez "Structure of finite dihedral group algebra" , *Finite Fields and Their Applications*, **35** (2015), 204–214
5. K. V. Vedenev, V. M. Deundyak "Codes in dihedral group algebra" , *Modeling and Analysis of Information Systems*, **25**:2 (2018), 232–245 (in Russian).
6. G. Venkataraman "On irreducibility of induced modules and an adaptation of the Wigner-Mackey method of little groups" , *J. Korean Math. Soc*, **50**:6 (2013), 1213–1222

———————————————————————————

УДК 519.175.3

Исправление формулы Дубиле-Рота-Стенли для числа помеченных связных графов

В. А. Воблый (Россия, г. Москва)
Всероссийский Институт Научной и Технической Информации РАН
e-mail: vitvobl@yandex.ru

Correction of the Doubilet-Rota-Stanley formula for the number of labeled connected graphs

V. A. Voblyi (Russia, Moskow)
All Russian Institute of Scientific and Technical Information RAS
e-mail: vitvobl@yandex.ru

Пусть C_n – число помеченных связных графов с n вершинами. В [1, с. 188, формула (5.20)], перевод статьи в [2, с. 190] получена формула

$$C_n = \sum 2^{k_1\binom{1}{2}+k_2\binom{2}{2}+\cdots+k_n\binom{n}{2}}(-1)^{k_1+k_2+\cdots+k_n-1}(k_1+k_2+\cdots+k_n-1)!\,,$$

где суммирование проводится по всем разбиениям целого числа n, то есть по всем неотрицательным решениям $(k_1, k_2, \cdots, k_n)$ уравнения $k_1 + 2k_2 + \cdots + nk_n = n$, причем полагается $\binom{1}{2} = 0$.

Однако уже при $n = 3$ из формулы Дубиле-Рота-Стенли получаем неправильный результат $C_3 = 8$.

Теорема 1. *Для числа C_n помеченных связных графов с n вершинами верна формула*

$$C_n = \sum 2^{k_2\binom{2}{2}+\cdots+k_n\binom{n}{2}} \frac{n!(-1)^{k-1}(k-1)!}{k_1!(1!)^{k_1}k_2!(2!)^{k_2}\cdots k_n!(n!)^{k_n}},$$

где суммирование проводится по всем разбиениям целого числа n, то есть по всем неотрицательным решениям $(k_1, k_2, \cdots, k_n)$ уравнения $k_1 + 2k_2 + \cdots + nk_n = n$, причем полагается $k = k_1 + k_2 + \cdots + k_n$.

Доказательство.Введем производящие функции

$$C(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \frac{x^n}{n!}, G(x) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{\binom{n}{2}} \frac{x^n}{n!}.$$

В [3] доказывается равенство $1 + G(x) = \exp(C(x))$, что эквивалентно $C(x) = \ln(1 + G(x))$.

Используем логарифмические многочлены разбиений [4]:

$$\ln(1+g(x)) = \sum_{n=1}^{\infty} L_n(x_1, x_2, \cdots, x_n)\frac{x^n}{n!}, g(x) = \sum_{r=1}^{\infty} x_r \frac{x^r}{r!},$$

$$L_n(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \sum \frac{n!(-1)^{k-1}(k-1)!}{k_1!(1!)^{k_1}k_2!(2!)^{k_2}\cdots k_n!(n!)^{k_n}} x_1^{k_1}x_2^{k_2}\cdots x_n^{k_n},$$

где суммирование проводится по всем разбиениям целого числа n, то есть по всем неотрицательным решениям $(k_1, k_2, \cdots, k_n)$ уравнения $k_1 + 2k_2 + \cdots + nk_n = n$, причем полагается $k = k_1 + k_2 + \cdots + k_n$. В нашем случае $x_r = 2^{\binom{r}{2}}$ и $\binom{1}{2} = 0$. Теорема доказана.

□

Автор благодарит Коганова Л.М. за обсуждение работы.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Doubilet P., Rota G.-C., Stanley R., On the foundations of combinatorial theory (VI): The idea of generating function, Proceedings Sixth Berkely Symposium om Matematical Statistic and Probability, v. II, University of California Press — 1972, 267-318.

2. Дубиле П., Рота Дж.-Л., Стенли Р. Об основах комбинаторной теории (VI): идея производящей функции. В сб. «Перечислительные задачи комбинаторного анализа» — М.: Мир, 1979. 365 с.

3. Харари Ф., Палмер Э. Перечисление графов. — М.: Мир, 1977, 325 с.

4. Charalambides Ch. A. Enumerative combinatorics, CRC Press, Boca Raton, 2002, 624 с.

———————————————————

УДК 511

K-арный алгоритм вычисления НОД без побочных множителей

Д. А. Долгов (Россия, г. Казань)
Казанский (Приволжский) федеральный университет
e-mail: Dolgov.kfu@gmail.com

The K-ary gcd algorithm without spurious factors

D. A. Dolgov (Russia, Kazan)
Kazan (Volga region) Federal University
e-mail: Dolgov.kfu@gmail.com

Операция вычисления наибольшего общего делителя (НОД, gcd) часто используется в различных теоретико-числовых и криптографических алгоритмах. K-арный алгоритм - один из наиболее быстрых алгоритмов вычисления НОД натуральных чисел [1]. Пусть u, v - два нечетных натуральных числа, причем $u > v > 0$. Необходимо найти коэффициенты x, y, такие что выполняется $xu + yv = 0 \mod k$ для некоторого фиксированного целого k, $gcd(u, k) = gcd(v, k) = 1$. Основная проблема всех k-арных алгоритмов — появление побочных множителей в ходе вычислений, т.к. может получиться ситуация, что $\alpha > 1$, $\alpha|v$, $\alpha|x$ и $\alpha gcd(u, v) = gcd(v, |(xu + yv)/k|)$. Если $k = 2^s$, то получим обобщеннный бинарный алгоритм. В [2] был предложен новый способ выбора коэффициентов x, y для обобщенного бинарного алгоритма [3, 4]. Здесь данные результаты обобщаются на случай к-арного алгоритма. Ниже предложен k-арный алгоритм с правым (левым) сдвигом вычисления НОД двух натуральных чисел $LSNGCD$, близкий к алгоритмам Джебелеана-Вебера и Седжалмаси [3, 4, 5], в котором не накапливаются побочные множители. Для поиска коэффициентов используются остатки от деления исходных чисел на k. Функция $makeodd(x)$ приводит число к нечетному виду. Функция $findab(u \mod k^t, v \mod k^t, k, t)$ возвращает две пары коэффициентов (a, b), (c, d): $au + bv = 0 \mod k$, $cu + dv = 0 \mod k$. Алгоритм схож с алгоритмами Джебелеана-Вебера и Соренсона, за исключением функции $findab$ и отсутствия дополнительных множителей. Выявление классов чисел, на которых алгоритм дает наибольшее сокращение позволит построить эффективный алгоритм НОД [6].

Algorithm 1 $LSNGCD(u, v, k, t)$

while $uv \neq 0$ **do**
  if $u < v$ **then**
    $(u, v) = (v, u)$
  end if
  if $\frac{u}{v} \geqslant \frac{\sqrt{k^t}}{2}$ **then**
    $u = u \mod v$
  else
    $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = findab(u \mod k^t, v \mod k^t, k, t)$
    $u = makeodd(|au + bv|/k^t)$
    $v = makeodd(|cu + dv|/k^t)$
  end if
end while

На вход подаются нечетные числа $u > v > 0$, $k \geqslant 2$, $t \geqslant 2$, u, v, k, $t \in Z$. Если оба числа — четные, то необходимо выделить общую степень двойки и сократить на неё. k, t — параметры алгоритма. Рассмотрим сокращения в рамках одной итерации. Сокращение модульной редукции $\lfloor \log_2 u \rfloor + 2 > u > \frac{u}{u \mod v} \geq \frac{u}{v-1} > \frac{u}{v}$. Сокращение к-арной редукции $\frac{\sqrt{k^t}}{2} \leq \frac{uk^t}{|2xu|} \leq \frac{uk^t}{|xu+yv|} < \frac{uk^t}{u-v}$, если $|xu| > |yv|$, иначе можно рассматривать $\frac{\sqrt{k^t}}{2} \leq \frac{vk^t}{|2yv|} \leq \frac{vk^t}{|xu+yv|} < \frac{uk^t}{|xu+yv|}$. Если к-арные алгоритмы поиска коэффициентов $findab$ выдают коэффициенты разных знаков, то $\frac{uk^t}{|xu+yv|} \geq \sqrt{k^t}$. Отсюда можно сравнивать нижние границы сокращений $\frac{u}{u \mod v}$ и $\frac{uk^t}{|xu+yv|}$, выбирая тот или иной алгоритм в зависимости от ситуации. Если $\frac{u}{v} > \frac{\sqrt{k^t}}{2}$, то запускается 1 шаг алгоритма Евклида, иначе находим коэффициенты с помощью функции $findab$ и считаем две k-арные редукции, которые станут новыми входами на следующей итерации алгоритма.

Теорема 1. *Пусть $u \geqslant v \geqslant 1$ и $k^t \geqslant 4$ — три целых числа, причем*

$$GCD(u, k) = GCD(v, k) = 1,$$

$\frac{u}{v} < \frac{\sqrt{k^t}}{2}$. *Пусть* $M = \begin{pmatrix} c & d \\ a & b \end{pmatrix}$ *— результат работы функции $findab$, M — целочисленная матрица, $|\det M| = |cb - ad| = 2^s k^t$. Если существует два целых R_1, R_2, удовлетворяющих условию* $k^t \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$, *то* $GCD(R_1, R_2) = GCD(u, v)$.

Теорема 1 — аналог леммы Седжелмаси [5]. Результат работы функции $findab$ — две пары коэффициентов, которые используются в алгоритме LSNGCD. Пусть в рамках функции findab задействован произвольный k-арный алгоритм с одной редукцией за итерацию. В ходе работы функции findab необходимо искать (локальные) коэффициенты k-арной редукции на каждой итерации, которые будут нужны для вычисления коэффициентов, которые в конце будут использоваться в алгоритме LSNGCD. Предложение 1 показывает, что зная локальные коэффициенты с прошлой итерации, можно найти локальные коэффициенты для текущей итерации функции findab.

Предложение 1. *Пусть $A_1 > B_1 > 0$ — исходные числа, $A_i > B_i > 0$ — числа на i итерации к-арного алгоритма. x_i, y_i — коэффициенты на i итерации: $x_iA_1 + y_iB_1 = 0 \mod k$. $GCD(x_i, B_i) = GCD(y_i, A_i) = 1$,* $M = \begin{pmatrix} x_i & y_i \\ \pm x_i & y_{i+1} \end{pmatrix}$ *или* $M = \begin{pmatrix} x_i & y_i \\ x_{i+1} & \pm y_i \end{pmatrix}$, $|\det M| = 2^s k^{i-1}$, $2^{s-1} | (x_i y_i)$, $2^s \nmid (x_i y_i)$. *Тогда, $\pm x_iA_1 + y_{i+1}B_1 = 0 \mod k$ или $x_{i+1}A_1 \pm y_iB_1 = 0 \mod k$.*

Теорема 2. *Пусть $n = \lfloor \log_2 u \rfloor = \lfloor \log_2 v \rfloor$, $log_2 k = \Theta(\log_2 n)$, функция $findab$ — алгоритм Соренсона. Тогда, сложность алгоритма $LSNGCD$ в худшем случае равна $O(n^2)$.*

Если $k = 2^s$, то в качестве $findab$ можно использовать бинарный алгоритм. Следующая теорема описывает формулы вычисления коэффициентов для бинарного суммирующего алгоритма.

Теорема 3.

$$\alpha_1 = 1,\ \beta_1 = 1, \alpha_2 = 1,\ \beta_2 = 2^{s_1} + 1$$

$$\alpha_3 = \begin{cases} 1,\ if\ B_1 < C_1 \\ 2^{s_2} + 1, if\ B_1 \geq C_1 \end{cases} \qquad \beta_3 = \begin{cases} 2^{s_1+s_2} + 2^{s_1} + 1,\ if\ B_1 < C_1 \\ 2^{s_2} + 2^{s_1} + 1, if\ B_1 \geq C_1 \end{cases}$$

$$\alpha_i = \begin{cases} 1,\ if\ B_1 < C_z,\ i > 3,\ 1 \leq z \leq i-1 \\ \alpha_l * 2^{\sum_{z=l+1}^{i-1} s_z} + \alpha_{i-1}, where\ A_i = C_l,\ l < i-1 \end{cases}$$

$$\beta_i = \begin{cases} 2^{\sum_{z=1}^{i-1} s_z} + \beta_{i-1},\ if\ B_1 < C_z,\ i > 3,\ 1 \leq z \leq i-1 \\ \beta_l * 2^{\sum_{z=l+1}^{i-1} s_z} + \beta_{i-1}, where\ A_i = C_l,\ ,l < i-1, B_i = C_{i-1} \end{cases}$$

Следующая теорема описывает формулы вычисления коэффициентов для бинарного алгоритма [1].

Теорема 4.

$$\alpha_1 = 1,\ \beta_1 = -1,$$

$$\alpha_2 = \begin{cases} 1,\ \textit{if } B_1 < C_1 \\ -1, \textit{if } B_1 \geq C_1 \end{cases} \quad \beta_2 = \begin{cases} -2^{s_1} - 1,\ \textit{if } B_1 < C_1 \\ 2^{s_1} + 1, \textit{if } B_1 \geq C_1 \end{cases}$$

$$\alpha_3 = \begin{cases} 1,\ \textit{if } B_1 < C_1, B_1 < C_2 \\ -1, \textit{if } B_1 < C_1, B_1 \geq C_2 \\ -2^{s_2} - 1\ \textit{if } B_1 \geq C_1, C_1 < C_2 \\ 2^{s_2} + 1\ \textit{if } B_1 \geq C_1, C_1 \geq C_2 \end{cases} \quad \beta_3 = \begin{cases} -2^{s_1+s_2} - 2^{s_1} - 1,\ \textit{if } B_1 < C_1, B_1 < C_2 \\ 2^{s_1+s_2} + 2^{s_1} + 1, \textit{if } B_1 < C_1, B_1 \geq C_2 \\ 2^{s_2} + 2^{s_1} + 1\ \textit{if } B_1 \geq C_1, C_1 < C_2 \\ -2^{s_2} - 2^{s_1} - 1\ \textit{if } B_1 \geq C_1, C_1 \geq C_2 \end{cases}$$

$$\alpha_i = \begin{cases} \alpha_{i-1},\ \textit{if } B_1 < C_{i-2}, B_1 < C_{i-1} \\ -\alpha_{i-1},\ \textit{if } B_1 < C_{i-2}, B_1 \geq C_{i-1} \\ \alpha_{i-1} - \alpha_q * 2^{\sum_{z=q+1}^{i-1} s_z}\ \textit{if } A_i = C_q, q < i-1, C_q < C_{i-1} \\ -\alpha_{i-1} + \alpha_q * 2^{\sum_{z=q+1}^{i-1} s_z}\ \textit{if } A_i = C_q, q < i-1, C_q \geq C_{i-1} \end{cases}$$

$$\beta_i = \begin{cases} \beta_{i-1} - 2^{\sum_{z=1}^{i-1} s_z},\ \textit{if } B_1 < C_{i-2}, B_1 < C_{i-1} \\ -\beta_{i-1} + 2^{\sum_{z=1}^{i-1} s_z},\ \textit{if } B_1 < C_{i-2}, B_1 \geqslant C_{i-1} \\ \beta_{i-1} - \beta_q * 2^{\sum_{z=q+1}^{i-1} s_z}\ \textit{if } A_i = C_q, q < i-1, C_q < C_{i-1} \\ -\beta_{i-1} + \beta_q * 2^{\sum_{z=q+1}^{i-1} s_z}\ \textit{if } A_i = C_q, q < i-1, C_q \geq C_{i-1} \end{cases}$$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Sorenson J. Two fast GCD Algorithms // Journal of Algorithms. 1994. Том 16, № 1. С. 110-144.

2. Dolgov D. A. GCD calculation in the search task of pseudoprime and strong pseudoprime numbers // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2016. Том 37, № 6. С. 734-739.

3. Weber K. The accelerated integer GCD algorithm // Journal ACM Transactions on Mathematical Software. 2016. Том 37, № 6. С. 734-739.

4. Jebelean T. Generalization of the Binary GCD Algorithm // ISSAC '93 Proceedings of the 1993 international symposium on Symbolic and algebraic computation: abstracts of the international conference. 1993. С. 111-116.

5. Sedjelmaci S. M. Jebelean–Weber's algorithm without spurious factors // Information Processing Letters. 2007. Том 102, № 6. С. 247-252.

6. Долгов Д. А. Об одном способе выбора коэффициентов в обобщенном бинарном алгоритме вычисления НОД и некоторых классах сокращений // XV Международная конференция «Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы и приложения», посвященная столетию со дня рождения доктора физико-математических наук, профессора Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова Коробова Николая Михайловича.: тезисы докладов международной конференции (Тула, 28-31 мая 2018 г.) — Тула, 2018. С. 176-178.

———————————————————————————————

УДК 519.[172-178]

О некоторых полурешеточных свойствах состояний процессов Linux

Н. Н. Ефанов (Российская Федерация, г. Долгопрудный)
Московский физико-технический интститут (государственный университет)
e-mail: nefanov90@gmail.com

On some semilattice properties of Linux processes' states

N. N. Efanov (Russian Federation, Dolgoprudnyy)
Moscow Institute of Physics and Technology (State University)
e-mail: nefanov90@gmail.com

Функция сохранения и восстановления состояний процессов операционной системы является важнейшей составляющей ряда системных, виртуализационных и прикладных программных технологий [1]. В Unix-подобных ОС процессы объединяются в ориентированное дерево – дерево процессов [2]. Воспроизведение дерева процессов, полученного при сохранении, является важнейшей частью процедуры восстановления, а техника восстановления конечными последовательностями системных вызовов следует из особенностей управления ресурсами системы из пространства пользователя. В работах [2, 3, 4], изучены свойства, получены полиномиальные алгоритмы восстановления некоторых типов деревьев процессов, тем не менее, строгое исследование зависимостей между состояниями в деревьях, ровно как и разработка формальных методов валидации деревьев на корректность, являются открытыми вопросами. В работе представляются некоторые результаты исследования зависимостей между состояниями процесс, на основании изучения свойств графа восстановления - промежуточного представления, введённого в [4] (Рис. 7).

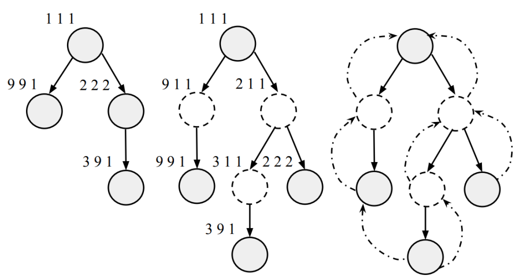


Рис. 7: Исходное и промежуточные представления (слева направо): дерево процессов T, некоторый его граф восстановления $G(T)$ и дополненный зависимостями (мульти)граф $G(T) \cup DEP(T)$. Числа при вершинах – атрибуты-идентификаторы процесса P, группы G и сессии S соответственно. Корневой процесс всегда имеет идентификаторы “1,1,1”.

1. Промежуточные представления и их анализ

Рассматриваются два орграфа - дерево процессов

$$T = (V, E) \tag{1}$$

и граф восстановления - промежуточное представление, на базе анализа которого производится восстановление дерева в работе [4]:

$$G(T) = (V^+, E^+) \tag{2}$$

где $V^+ = V \cup V^{int}$ - конечные вершины, дополненные промежуточными V^{int}, соответствуют состояниям процессов в ходе выполнения системных вызовов, описываемых E^+ как переходами между состояниями и иерархическими зависимостями [3, 4]. Вершины маркированы словарями атрибутов: $\forall v \in V^+ \exists v.attr : v.key = val(v.attr[key])|'None', \forall key \in K$, где K - список ключей как имён атрибутов процесса: системных идентификаторов, файловых дескрипторов, сигналов, отображений памяти и др, $val(v.attr[key]) : K \to type(key)$ - отображение ключей на типизированные значения атрибутов. Определяется также множество вершин с равным значением атрибута $u.attr_1$:$D(attr_1, val(u[attr_1])) = \{v \in V^+ | v.attr_1 = u.attr_1\}$

Definition 7. *Определим зависимость между вершинами $u, v \in V^+$ как бинарное отношение (u, v) с семантикой "для реализации и требуется сначала реализовать v". Следовательно, зависимости определяют частичный порядок на V^+. Будем говорить, что зависимость происходит по атрибуту $attr$, если v либо создаёт атрибут $attr$, либо в его контексте происходит системный вызов, выставляющий данный атрибут в v.*

Используя данное определение, рассморим ещё одно промежуточное представление:

Definition 8. *Графом зависимостей $DEP(T)$ называется мультиорграф:*

$$DEP(T) = (V^+, E^{dep}) \tag{3}$$

где E^{dep} - множество зависимостей между вершинами.

Definition 9. *Будем говорить, что атрибут $attr_2$ доминирует над $attr_1$, если*

$$\forall u \in V^+ : \forall v \in D(attr_1, val(u.attr_1)) \to val(u.attr_2) = const.$$

Definition 10. *Доминирующий над $attr_1$ атрибут $attr_2$ назовём минимально доминирующим,тогда и только тогда, когда $\forall u \in V^+ \exists \{v\} \in V^+ : v.attr_2 = u.attr_2, \forall V' = \{v\} \cup v'$, и $\forall v' \in V^+ \setminus \{v\} \to v'.attr_2 \neq const$.*

Такое определение задаёт минимальное по мощности множество, в которое включается и множество состояний с различными значениями атрибута $attr_1$, но с идентичными $attr_2$, и его замыкание.

Definition 11. *Глубиной изоляции атрибута $attr_1$ называется число доминирующих над $attr_1$ атрибутов: $depth(attr_1) = \sum_{i=2}^{|K|} attr_i : \forall u \in V^+ : \forall v \in D(attr_1, val(u.attr_1)) \to val(u.attr_i) = const$.*

$\forall attr_{key} \in K \to depth(attr_{key}) < \infty$, в противном случае, для реализации состояния с таким атрибутом пришлось бы выполнить бесконечное число системных вызовов, так как каждый новый атрибут создаётся через отдельный вызов.

Definition 12. *Максимальным по мощности доминирующим атрибутом называется $attr_x : \forall v \in V^+ \to depth(v.attr_x) = 0$.*

Для деревьев процессов $attr_x$ соответствует корневому PID-пространству имён [5], ввиду того, что построение дерева процессов начинается с корневого процесса v_{init}, который находится в корневом PID-пространстве, и вызовы, и первые вызовы создающие вложенные пространства, происходят именно в нём.
Свойства объектов, введённых в определениях 5 и 6, следуют из технических особенностей прикладной задачи, поэтому принимаются без доказательства.

Утверждение 3. *V^+ с отношением зависимости образует конечную верхнюю полурешетку.*

Доказательство.Выберем произвольные состояния $x, y, z, \in V^+ : x \neq y$. Рассмотрим бинарную операцию минимальной верхней границы $\sqcup$ на

$$V^+ : x \sqcup x = x; x \sqcup y = y \iff (x, y) \in E^{dep}.$$

$\sqcup$ по определению идемпотентна. Докажем, что $\forall x, y \in V^+ \exists z \in V^+ : (x, z) \in E^{dep}, (y, z) \in E^{dep}$, доказывая параллельно коммутативность и ассоциативность $\sqcup$. Рассмотрим ситуации:

1. $(x, y) \in E^{dep}$ - тогда, очевидно, $c = y$. Случай (y, x) симметричен.
2. Покажем, что $\{(x, y), (y, x)\} \subset E^{dep} \iff x = y$.
   - Допустим, что $\exists x, y \in V^+ : \{(x, y), (y, x)\} \subset E^{dep}$, и $x \neq y$. о определению зависимости, для реализации x нужно реализовать сначала y, но для этого нужно реализовать состояние, идентичное x. То есть на данном шаге нужно выполнить минимум 2 системных вызова, и требуется снова воспроизвести x.
   - Пусть выполнено $k-1$ итераций воспроизведения x,y, тогда нужно снова воспроизвести x, и выполнено $2(k-1)$ системных вызовов.
   - После шага k требуется снова воспроизвести x, следовательно, число системных вызовов не ограничено снизу, что противоречит самой схеме восстановления.

   В результате заключаем, что циклические зависимости запрещены, и допустимы лишь формально в случае $x = y$, откуда следует коммутативность: $y = x \sqcup y = y \sqcup x = x$.
3. Пусть $(x, y, attr_1), (y, x, attr_1) \notin E^{dep}$.
   - Рассмотрим минимальный доминирующий атрибут: $attr_2$. Если $y.attr_2 = x.attr_2$, и $\exists x'(attr_2) \in D(attr_2, x.attr_2)$ - создатель ресурса, описываемого атрибутом $attr_2$, доказательство завершено. Иначе, $y.attr_2 \neq x.attr_2$, и процедура повторяется.
   - Пусть выполнено $k - 1 = depth(attr_1)$ шагов процедуры выше, и $attr_k$ суть атрибут корневого PID-пространства имён.
   - корневое PID-пространство имён, по определению 6, и, после $k < \infty$-шагов, $z = v_{init}$.

Следовательно, $(V^+, \sqcup)$ - конечная верхняя полурешетка, с задаваемым зависимостями естественным частичным порядком и максимальным элементом v_{init}.

□

2. Проверка корректности дерева процессов и другие результаты

Полурешёточночная упорядоченность V^+ является довольно сильным результатом с точки зрения получения свойств задачи восстановления. В частности, из него следует как способ проверки произвольного дерева на корректность, так и способ восстановления корректных деревьев через замыкания зависимостей по атрибутам, элементарный шаг которого изображён на Рис. 7: для восстановления состояния $u : u.attr_1 = w.attr_1$ с атрибутом $attr_1$, созданным в w_{new}, из предшествующего состояния $v : u.pid = v.pid | u.pid \neq v.pid \ \ \& \ \ syscall =' fork'$ в контексте процесса с состоянием c, требуется, чтобы $c.attr_2 = v.attr_2 = w_{new}.attr_2$. Доказывается, что такие процессы найдутся в замыкании $cloj(u.attr_1)$, максимальным элементом по

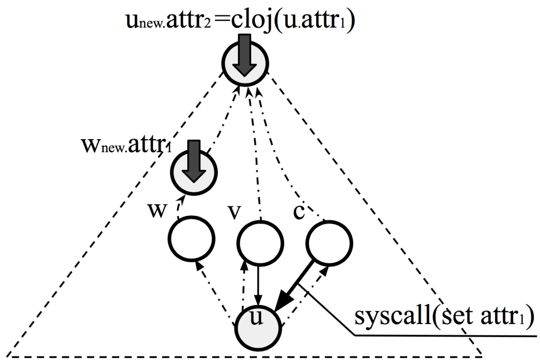


Рис. 8: Элементарный шаг восстановления состояния $u : u.attr_1 = w.attr_1$.

зависимостям для которого является создатель $u_{new} : u_{new}.attr_2 = u.attr_2$. Далее можно доказать, что множество создателей атрибутов также образует верхнюю конечную полурешётку с максимальным элементом v_{init}; транзитивное замыкание зависимостей также будет иметь v_{init} как единственную неподвижную точку. Эти результаты рассматриваются и доказываются в предложенной работе.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Checkpoint-Restore In Userspace (CRIU) usage scenarios. 2019. `https://criu.org/Usage_scenarios`

2. Ефанов Н. Н. О некоторых комбинаторных свойствах деревьев процессов LINUX. Чебышевский сборник. 2018;19(2):151-162.

3. Efanov N. N., Emelyanov P. V. Constructing the formal grammar of system calls // In Proceedings of the 13th Central & Eastern European Software Engineering Conference in Russia (CEE-SECR'17). 2017. Article 12. 5 pages.

4. Efanov N. N., Emelyanov P. V. Linux Process Tree Reconstruction Using The Attributed Grammar-Based Tree Transformation Model // In Proceedings of the 14th Central & Eastern European Software Engineering Conference in Russia (CEE-SECR'18). 2018. ACM, NY, USA, Article 2, 7 pages.

5. Linux namespaces. `https://en.wikipedia.org/wiki/Linux_namespaces`

УДК 519.6

Аспекты применения геометрической коррекции крыла обратной стреловидности

Е. А. Казаков (Россия, г. Ростов-на-Дону)
Южный Федеральный Университет
e-mail: Eugene.A.KazakoV@yandex.ru

Aspects of using the forward-swept wing's geometric correction

E. A. Kazakov (Russia, Rostov-on-Don)
Southern Federal University
e-mail: Eugene.A.KazakoV@yandex.ru

Крыло обратной стреловидности (КОС) обладает серьёзными преимуществами перед классическим крылом на большинстве режимов: сверхманёвренность на малых скоростях, повышенная надёжность на режимах взлёта и посадки, меньшая эффективная площадь рассеяния, меньшая радиолокационная заметность, большая удельная подъёмная сила. При всех этих неоспоримых достоинствах, КОС обладает существенным недостатком. Опасное явление флаттера, возникающее на форсажных скоростях, до сих пор не удалось преодолеть.

Самый простой способ сделать это – изменить геометрию аэроплана так, чтобы исключить столкновение потоков, но это решение, однако, приведёт к непомерно высоким требованиям к жёсткости крыла. Добиться выполнения этих требований можно, используя современные композитные материалы. Выяснение конструкции, соблюдающей баланс геометрической эффективности и технологичности – одно из текущих направлений работы.

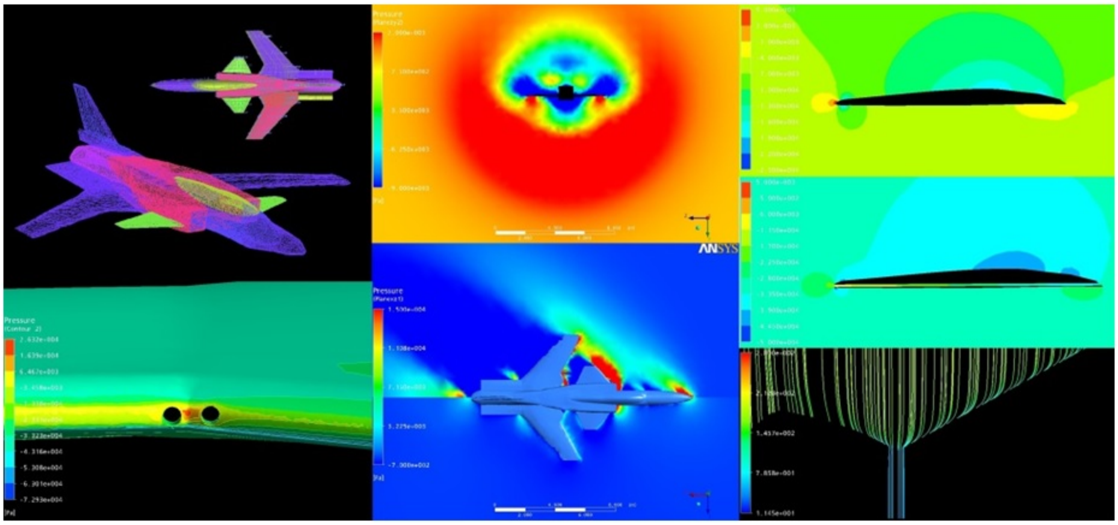


Рис. 9: Элементы визуализации геометрии аэроплана.

Не столь кардинальный способ – вносить в геометрию минорные изменения, не затрагивающие основной концепт (тем не менее, известны исторические случаи успеха этого метода). В настоящее время автор практикует генерацию и проверку этих вариативных изменений, моделируя в среде ANSYS полёты лично созданной модели аэроплана с КОС на дозвуковом и сверхзвуковом режимах.

Один из методов решения проблемы – микроперфорирование крыла, использование зеркальных относительно вихрей упаковок микроотверстий, смещающее собственную частоту крыла в недостижимые для флаттера зоны спектра. Однако автор предлагает радикальный метод сквозных каналов для разнесения конкурирующих потоков. Являясь, по большому счёту, вариацией первого способа, этот метод также требователен к жёсткости силового набора, но, тем не менее, не столь взыскателен к характеристикам обшивки крыла.

———————————————————————————

УДК 512.77

О конструкции подкодов заданного веса одного вида рациональных кодов Гоппы

Ю. С. Касаткина (Россия, г. Калининград)
Российская академия народного хозяйства и государственной службы при Президенте РФ (Западный филиал)
e-mail: yuliya_kasatkina@list.ru
А. С. Касаткина (Россия, г. Калининград)
Российская академия народного хозяйства и государственной службы при Президенте РФ (Западный филиал)
e-mail: kasatkina_ana@mail.ru

On the construction of subcodes of a given weight of one class of rational Goppa codes

Yu. S. Kasatkina (Russia, Kaliningrad)
Russian Presidential Academy of National Economy and Public Administration
e-mail: yuliya_kasatkina@list.ru
A. S. Kasatkina (Russia, Kaliningrad)
Russian Presidential Academy of National Economy and Public Administration
e-mail: kasatkina_ana@mail.ru

Проблема нахождения кодового слова заданного веса встречается во многих задачах теории кодирования. Например, при декодировании методом выбора информационного набора требуется найти кодовое слово заданного веса из смежного класса. Алгоритм Штерна, реализующий этот метод, первоначально и был разработан для поиска кодового слова заданного веса в двоичном линейном коде. Задача построения подкодов заданного веса возникает при построении кривых с большим числом рациональных точек [1; 2].

В данной работе исследуется конструкция подкодов рационального кода Гоппы, сужение на простое подполе которого приводит к классическому коду Гоппы. Опишем структуру этого вида рациональных кодов Гоппы. Мы рассматриваем геометрические коды Гоппы $C_L(D,G)$ ассоциированные с дивизорами D и G поля рациональных функций $F_q(x)$. Как обычно, предполагаем, что дивизор D является суммой различных точек степени один $D = P_1 + \ldots + P_n$ и носители дивизоров D и G не пересекаются.

Код Гоппы $C_L(D,G)$ является образом пространства $L(G)$ при линейном отображении

$$ev_D : L(G) \to F_q^n, \quad f \mapsto (f(P_1), \ldots, f(P_n)).$$

Если степень дивизора G меньше n, то отображение

$$ev_D : L(G) \to C_L(D,G)$$

является инъекцией. Кроме того, для рационального кода Гоппы $C_L(D,G)$ длины n, размерности k и с минимальным расстоянием d выполняется:

1. $n \leqslant q+1$.
2. $k = 0 \Leftrightarrow \deg G < 0$ и $k = n \Leftrightarrow \deg G > n-2$.
3. Если $0 \leqslant \deg G \leqslant n$, то $k = 1 + \deg G$ и $d = n - \deg G$.

4. Если $\{x_1, ..., x_n\}$ базис пространства $L(G)$, тогда матрица

$$M = \begin{pmatrix} x_1(P_1) & x_1(P_2) & \dots & x_1(P_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_k(P_1) & x_k(P_2) & \dots & x_k(P_n) \end{pmatrix}$$

является порождающей матрицей кода $C_L(D, G)$ [3].

Пусть L некоторое подмножество мощности n конечного поля F_{q^m}

$$L = \{\alpha_1, ..., \alpha_n\} \subseteq F_{q^m}, \quad |L| = n.$$

Многочлен $g(x) \in F_{q^m}[x]$ степени t, такой, что $1 \leq t \leq n-1$ и $g(\alpha_i) \neq 0$ для всех $\alpha_i \in L$. Обозначим P_i – нуль элемента $(x - \alpha_i)$ для всех $\alpha_i \in L$. Дивизор D_L есть сумма точек степени один

$$D_L = P_1 + P_2 + ... + P_n.$$

Положим P_∞ – полюс элемента x поля рациональных функций $F_{q^m}(x)$. Дивизор нулей элемента $g(x)$ будем обозначать $G_0 \in Div(F_{q^m}(x)/F_{q^m})$.

Рассмотрим рациональный код Гоппы $C_L(D_L, G_0 - P_\infty)$. Длина этого кода равна n, размерность

$$k = 1 + degG = 1 + (t-1) = t$$

и минимальное расстояние

$$d = n - degG = n - t + 1.$$

Элементы поля рациональных функций $g(x)^{-1}, xg(x)^{-1}, ..., x^{t-1}g(x)^{-1}$ принадлежат пространству $L(G_0 - P_\infty)$. Размерность этого векторного пространства равна t. Таким образом, элементы $\left\{x^j g(x)^{-1}\right\}_{0 \leqslant j \leqslant t-1}$ образуют базис пространства $L(G_0 - P_\infty)$, а порождающая матрица рационального кода Гоппы $C_L(D_L, G_0 - P_\infty)$ имеет вид:

$$\begin{pmatrix} g(\alpha_1)^{-1} & g(\alpha_2)^{-1} & \dots & g(\alpha_n)^{-1} \\ \alpha_1 g(\alpha_1)^{-1} & \alpha_2 g(\alpha_2)^{-1} & \dots & \alpha_n g(\alpha_n)^{-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_1^{t-1} g(\alpha_1)^{-1} & \alpha_2^{t-1} g(\alpha_2)^{-1} & \dots & \alpha_n^{t-1} g(\alpha_n)^{-1} \end{pmatrix}.$$

Весовая иерархия кода $C_L(D_L, G_0 - P_\infty)$, т.е. набор обобщенных весов Хемминга, определяется по формуле [4]:

$$d_r(C_L(D_L, G_0 - P_\infty)) = n - k + r, \text{ где } 1 \leq r \leq k.$$

В работе исследуется структура подкодов кода $C_L(D_L, G_0 - P_\infty)$, носители которых χ удовлетворяют условию

$$|\chi| = d_r(C_L(D_L, G_0 - P_\infty)).$$

Пусть D_r – r-мерный подкод кода $C_L(D_L, G_0 - P_\infty)$, обладающий наименьшим весом. Код D_r порождается r кодовыми словами $ev_D(f_1), \dots, ev_D(f_r)$, где $f_1, \dots, f_r$ – линейно независимые над полем F_{q^m} элементы пространства ассоциированного с дивизором $G_0 - P_\infty$. Условие

$$|\chi(D_r)| = d_r(C_L(D_L, G_0 - P_\infty))$$

определяет структуру главных дивизоров (f_i)

$$(f_i) = D + B_i - (G_0 - P_\infty),\ 1 \le i \le r.$$

При этом дивизоры D и B_i такие, что

$$0 \leqslant D \leqslant D_L,\ \deg D = t - r$$

и

$$B_i \geqslant 0,\ \deg B_i = r - 1 \text{ для } 1 \le i \le r.$$

Заметим, что в конструкции дивизоров B_i возможно использование рациональных точек. Таким образом, получено описание, в терминах дивизоров, элементов, порождающих подкоды малого веса.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Касаткина, Ю.С. Анализ рода кривой, соответствующей подкоду наименьшего веса рационального кода Гоппы/ Ю.С. Касаткина, А.С. Касаткина //Вестник Волгоградского государственного университета. Серия 1, Математика. Физика.– 2014.– №4 (23).– С. 6 – 10.

2. Касаткина, Ю.С. О конструкции кривой, соответствующей подкоду наименьшего веса рационального кода Гоппы / Ю.С. Касаткина, А.С. Касаткина //Вестник Волгоградского государственного университета. Серия 1, Математика. Физика.– 2016.– №4(35).– С. 75-83

3. Stichtenoth, H. Algebraic Function Fields and Codes / H. Stichtenoth. – Springer-Verlag, 1993.

4. Yang, K. On the weight hierarchy of geometric Goppa Codes/ K. Yang, P.V. Kumar, H. Stichtenoth // IEEE Trans. Inform. Theory. 1994. V. 40, no. 3, P. 913–920.

———————————————————————————

Krein–Milman Spaces

Yulia Kempner (Israel)
Holon Institute of Technology
e-mail: yuliak@hit.ac.il
Vadim E. Levit (Israel)
Ariel University
e-mail: levitv@ariel.ac.il

1. Introduction

Intuitively speaking, the Krein-Milman theorem says that every convex set is the convex hull of its extreme points. Originally, this theorem characterized convex subsets in topological vector spaces. In last few decades the theory of convexity was considerably developed and the Krein-Milman theorem was studied for various combinatorial structures: closure spaces, metric spaces, ordered sets and lattices, graphs and so on.

Definition 13. *Let E be a finite set. $\tau : 2^E \to 2^E$ is a closure operator on E if for all subsets $X, Y \subseteq E$ the following properties are satisfied:*

***C1**: $X \subseteq \tau(X)$ (expansivity),*

***C2**: $X \subseteq Y \Rightarrow \tau(X) \subseteq \tau(Y)$ (isotonicity),*

***C3**: $\tau(\tau(X)) = \tau(X)$ (idempotence).*

(E, τ) is a *closure space* if τ is a closure operator. A set $A \subseteq E$ is *closed* if $A = \tau(A)$. Clearly, the family of closed sets $K = \{A \in E : A = \tau(A)\}$ is closed under intersection. An element x of a subset $X \subseteq E$ is an *extreme point of* X if $x \notin \tau(X - x)$. The set of extreme points of X is denoted by $ex(X)$. A closure space (E, τ) satisfies the *Krein-Milman property* if for every closed set $A \subseteq E : A = \tau(ex(A))$. Such closure spaces are known as *convex geometries* [4]. The convex hull operator on the Euclidean space E^n is a canonical example of a closure operator defining a convex geometry.

Definition 14. *[2] A violator space is a pair (E, ν), where E is a finite set and ν is a mapping $2^E \to 2^E$ such that for all subsets $X, Y \subseteq E$ the following properties are satisfied:*

***V1**: $X \cap \nu(X) = \emptyset$ (consistency),*

***V2**: $(X \subseteq Y$ and $Y \cap \nu(X) = \emptyset) \Rightarrow \nu(X) = \nu(Y)$ (locality).*

Violator spaces have been introduced and analyzed as a combinatorial framework that encompasses Linear Programming (LP) and other geometric optimization problems [2]. Originally, violator spaces were defined for set of constraints E, where each subset of constraints $X \subseteq E$ is associated with $\nu(X)$ - the set of all constraints violating X. For instance, the problem of computing the smallest enclosing ball of a finite set of points in R^d is an LP-type problem. Here, the set E is a set of points in R^d, and the violated constraints of some subset of the points X are exactly the points lying outside the smallest enclosing ball of X.

Let $\alpha, \beta : 2^E \to 2^E$ be two operators satisfying $X \subseteq \alpha(X)$ and $\beta(X) \subseteq X$. We define (E, α, β) as a *Krein-Milman space* if for every set $X \subseteq E : \alpha(X) = \alpha(\beta(X))$. A well-known example of a Krein-Milman space is a convex geometry ($\alpha = \tau$, $\beta = ex$). One of our main findings is the characterization of Krein-Milman violator spaces.

2. Violator mappings and closure operators

Let (E, ν) be a violator space. Define $\varphi(X) = E - \nu(X)$. Then the operator φ satisfies expansivity and idempotence. In what follows, if (E, ν) is a violator space and $\varphi(X) = E - \nu(X)$, then (E, φ) will be called a violator space as well. Every violator space (E, φ) satisfies the following property

$(X \subseteq Y \subseteq Z) \wedge (\varphi(X) = \varphi(Z)) \Rightarrow \varphi(X) = \varphi(Y) = \varphi(Z)$.

Since this property deals with all sets lying between two given sets, we say that such operator φ is *convex*. Notice that locality is equivalent to the following property that we call *self-convexity* by analogy with convexity

C22 : $(X \subseteq Y \subseteq \varphi(X)) \Rightarrow \varphi(X) = \varphi(Y)$.

There are violator spaces, where the operator $\varphi(X)$ does not satisfy isotonicity [2]. Hence, there exists a violator space which is not a closure space.

It is easy to check, that expansivity and self-convexity imply convexity, while convexity and idempotence imply self-convexity. However, convexity accompanied with expansivity does not obligate a space to be a violator space.

Definition 15. *[3] A space (E, δ) is convex if $\delta : 2^E \to 2^E$ satisfies expansivity and convexity.*

Another example of the operator that does not satisfy idempotence is a *pre-closure operator* - the operator that satisfies only expansivity and isotonicity. It is easy to check that pre-closure operators satisfy the convexity, and so every pre-closure space is convex.

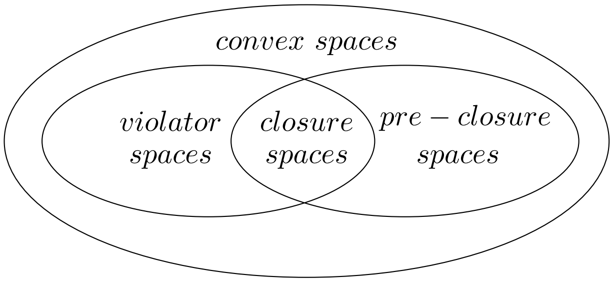


Рис. 10: The hierarchy of spaces.

3. Uniquely generated spaces and the Krein-Milman property

Let we have an arbitrary space (E, α) with the mapping $\alpha : 2^E \to 2^E$. We say that $B \subseteq E$ is a *generator* of $X \subseteq E$ if $\alpha(B) = \alpha(X)$. For $X \subseteq E$, a *basis (minimal generator) of* X is a inclusion-minimal set $B \subseteq E$ (not necessarily included in X) with $\alpha(B) = \alpha(X)$. A space (E, α) is *uniquely generated* if every set $X \subseteq E$ has a unique basis. A well-known characterization of closure operators states equivalence between uniqueness of the basis and the Krein-Milman property [4]. We extend this property to some more spaces.

Proposition 1. *The following assertions are equivalent:*
(i) The space (E, α) is uniquely generated;
(ii) For every set $X \subseteq E$ its bases are included in the intersection of all the generators of X.
(iii) For every set $X \subseteq E$ its bases are subsets of X.

For every set $X \subseteq E$ of a uniquely generated convex space (E, α), the basis B of X is an intersection of all generators of X: $B = \bigcap\{Y \subseteq E : \alpha(Y) = \alpha(X)\}$.

Following the definition of extreme points in closure spaces we define

$$ex(X) = \{x \in X : x \notin \alpha(X - x)\}.$$

For violator spaces, it gives us: $x \in ex(X) \Leftrightarrow \alpha(X) \neq \alpha(X - x)$. For convex spaces, the implication is only one-sided: $x \in ex(X) \Rightarrow \alpha(X) \neq \alpha(X - x)$.

Define $\bar{ex}(X) = \{x \in X : \alpha(X) \neq \alpha(X - x)\}$. It is worth notice that $ex(X) = \bar{ex}(X)$ for violator spaces, while for convex spaces only the inclusion $ex(X) \subseteq \bar{ex}(X)$ may be claimed.

Proposition 2. *For violator spaces $ex(X) = \bigcap\{B \subseteq X : \alpha(B) = \alpha(X)\}$, for convex spaces $\bar{ex}(X) = \bigcap\{B \subseteq X : \alpha(B) = \alpha(X)\}$.*

If α satisfies idempotence, then each generator of X is a generator of $\alpha(X)$ as well. Hence, for violator spaces, we have

$$ex(\alpha(X)) = \bigcap\{B \subseteq \alpha(X) : \alpha(B) = \alpha(X)\} =$$

$$ex(X) \cap \bigcap\{B \subseteq \alpha(X) \wedge B \nsubseteq X : \alpha(B) = \alpha(X)\} \subseteq ex(X).$$

In particular, $ex(\alpha(X)) \subseteq X$, which may be considered as a combinatorial interpretation of Milman's theorem [1].

Теорема 1. *Let (E, α) be a violator space. Then (E, α) is uniquely generated if and only if for every set $X \subseteq E$, $\alpha(X) = \alpha(ex(X))$.*

For a uniquely generated violator space each basis of a set is contained in this set (Proposition 1). Therefore, the inclusion $ex(\alpha(X)) \subseteq ex(X)$ turns out to be the equality $ex(\alpha(X)) = ex(X)$. Thus we conclude with the following.

Следствие 1. *Let* (E, α) *be a uniquely generated violator space. Then* $\alpha(X) = \alpha(ex(X))$ *and* $ex(X) = ex(\alpha(X))$.

Proposition 3. *Let* (E, α) *be a uniquely generated convex space. Then for every set* $X \subseteq E$, $\alpha(X) = \alpha(\bar{ex}(X))$.

In summary, the proper choice of the operator β allows to interpret uniquely generated convex spaces and uniquely generated violator spaces as Krein-Milman spaces.

REFERENCES

1. Bronsted, A., *Milman's theorem for convex functions*, Math. Scand. **19** (1966), 5–10.
2. Gärtner, B., J. Matoušek, L. Rüst, and P. Škovroň, *Violator spaces: structure and algorithms*, Disc. Appl. Math. **156** (2008), 2124–2141.
3. Kempner, Y., and V. E. Levit, *Violator spaces vs closure spaces*,European Journal of Combinatorics (in press).
4. Korte, B., L. Lovász and R. Schrader, "Greedoids," Springer-Verlag, New York/Berlin (1991).

УДК 519.719.2+519.142.1

Разностные характеристики сложений элементов $GF(2)^n$ по mod 2 и по mod 2^n

Ф. М. Малышев (Россия, Москва)
Математический институт им. В.А. Стеклова РАН, Москва
e-mail: malyshevfm@mi.ras.ru

Difference characteristics of additions of elements of $GF(2)^n$ according to mod 2 and according to mod 2^n

F. M. Malyshev (Russia, Moscow)
Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia
e-mail: malyshevfm@mi.ras.ru

В последнее время появилось большое семейство просто реализуемых блочных и поточных шифров, построенных по ARX технологиям. Как правило, в них используются лишь операции циклических сдвигов над машинными словами, модульных сложений слов и покомпонентных сложений машинных слов по mod 2. Примерами таких шифров служат Simeck, Simon и Speck, Salsa, FEAL, Threefish. Стандартная техника криптографического анализа ARX-шифров представлена в [1]. Для таких шифров разрабатываются алгоритмы автоматического поиска линейных и разностных соотношений [2, 3].

В этой связи представляют интерес задачи по нахождению и оптимизации разностных характеристик в самых общих ситуациях. Приведём возникающие при этом задачи, рассматриваемые в настоящем докладе и относящиеся к двум видам сложений на множестве $V_n = GF(2)^n$, $n \geqslant 2$: $+$ и $\oplus$. Через $\oplus$ обозначаем покомпонентное сложение векторов по mod 2, а через $+$ обозначаем сложение по mod 2^n. В последнем случае векторы пространства

V_n рассматриваются (при некоторой упорядоченности их компонент) как стандартные двоичные представления вычетов по $\bmod 2^n$. Считаем, что $V_n = \mathbb{Z}_{2^n}$, и двоичное представление вычета 2^{n-1-i}, $i = 0, 1, \ldots, n-1$, задаётся вектором $e_i \in V_n = GF(2)^n$ с единственной ненулевой компонентой с номером i.

Пусть $(*_1, *_2, *_3)$ – любой из 8 возможных наборов операций из множества $\{+, \oplus\}^3$. Будем рассматривать *разностные характеристики*:

$$p^{\oplus}_{*_1\alpha,*_2\beta;*_3\gamma} = \mathbf{P}\{(x_1 *_1 \alpha) \oplus (x_2 *_2 \beta) = (x_1 \oplus x_2) *_3 \gamma\},$$
$$p^{+}_{*_1\alpha,*_2\beta;*_3\gamma} = \mathbf{P}\{(x_1 *_1 \alpha) + (x_2 *_2 \beta) = (x_1 + x_2) *_3 \gamma\},$$
$$p^{\lll s}_{*_1\alpha;*_2\gamma} = \mathbf{P}\{[(x *_1 \alpha) \lll s] = [x \lll s] *_2 \gamma\},\ p^{\mathrm{id}}_{*_1\alpha;*_2\gamma} = \mathbf{P}\{x *_1 \alpha = x *_2 \gamma\}.$$

Здесь x, x_1, x_2 – независимые случайные векторы с равномерными распределениями на V_n, $\alpha, \beta, \gamma \in V_n$ – фиксированные векторы, определяющие разностные соотношения, $\lll s$ – циклический сдвиг влево на $s \in \{1, \ldots, n-1\}$ позиций, $\mathrm{id}\colon V_n \to V_n$ – тождественная подстановка.

Вероятностные разностные соотношения шифрпреобразований в разностном методе криптографического анализа строятся с помощью цепочек согласованных локальных разностных вероятностных соотношений, относящихся к отдельным операциям [4, 5, 6]. Целевая функция в разностном методе, которая максимизируется за счёт выбора конкретной цепочки согласованных локальных разностных вероятностных соотношений, является произведением локальных разностных характеристик. По этой причине при построении указанных цепочек часто приходится прибегать к максимизации вероятностей $p^{*}_{*_1\alpha,*_2\beta;*_3\gamma}$, $* \in \{\lll s, +, \oplus\}$, $*_1, *_2, *_3 \in \{+, \oplus\}$, когда заданы один или два из параметров $\alpha, \beta, \gamma \in V_n$, а нужно определить значения оставшихся параметров, при которых достигается максимум рассматриваемой вероятности. Возникает два списка задач: один по нахождению разностных характеристик, другой список по максимизации разностных характеристик. После исключения задач, сводящихся к другим, останется соответственно 11 и 39 задач. В докладе на основе приводимых далее теорем представлено решение 6 задач первого списка и 22 задач второго списка.

Вычеты $\alpha \in \mathbb{Z}_{2^n}$ представляем в двоичном виде, располагая цифры слева направо в естественном порядке, начиная со старших и заканчивая младшими: $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}) = \alpha_0 2^{n-1} + \alpha_1 2^{n-2} + \ldots + \alpha_{n-2} 2 + \alpha_{n-1}$. Для $\alpha \in \mathbb{Z}_{2^n}$ полагаем $[\alpha] = \{i \in \{1, \ldots, n-1\} | \alpha_i = 1\}$, $B(\alpha) = B(\alpha_0; [\alpha]) = B(\alpha_0; i_1, \ldots, i_r) = \left\{\alpha_0 2^{n-1} + \sum_{i\in[\alpha]} \varepsilon_i 2^{n-1-i} \,\middle|\, \varepsilon_i \in \{1, -1\}\, \forall\, i \in [\alpha]\right\}$.

Теорема 1. *Для $\alpha \in \mathbb{Z}_{2^n}$ имеем: $p^{\mathrm{id}}_{\oplus\alpha;+\beta} = 2^{-|[\alpha]|}$ для $\beta \in B(\alpha)$ и $p^{\mathrm{id}}_{\oplus\alpha;+\beta} = 0$ для $\beta \notin B(\alpha)$.*

Для решения задачи по нахождению $\max_\alpha p^{\mathrm{id}}_{\oplus\alpha;+\beta}$ можно ограничиться значениями

$$\beta \in \{1, \ldots, 2^{n-1} - 1\}.$$

По теореме 1 вычисление $\max_\alpha p^{\mathrm{id}}_{\oplus\alpha;+\beta}$ при заданном $\beta \in \mathbb{Z}_{2^n}$ отвечает нахождению векторов $\alpha \in V_n$ с минимальным значением $|[\alpha]|$, для которого $\beta \in B(\alpha)$. Среди элементов последовательности $\beta_1, \ldots, \beta_{n-1}$ выделим максимальные серии подряд идущих единиц (1-*серии*) длины $l \geqslant 1$. Соответствующее подмножество номеров единичных координат в $\{1, \ldots, n-1\}$ тоже будем называть 1-*серией*. Аналогично номер $i \in \{1, \ldots, n-1\}$ в случае $\beta_i = 0$ или $\beta_i = 1$ иногда будем называть соответственно нулевой или единичной точкой. Две соседние 1-серии считаем *связанными*, если между ними располагается ровно один нуль, а если между ними располагается более одного нуля, то эту пару 1-серий считаем просто *соседними*. Множество $[\beta]$ разбивается на компоненты связанных 1-серий, называемых далее просто *компонентами*. Число 1-серий в компоненте K обозначим через h_K, через I_K обозначаем минимальный номер в компоненте K, а через J_K – максимальный номер в компоненте K. Множество всех компонент в $[\beta]$ обозначаем через $\mathcal{K}$.

Будем различать компоненты типов I, II и III. К типу I относятся компоненты, в которых все 1-серии имеют длину $l = 1$. К типу II относятся компоненты, в которых ровно одна 1-серия имеет длину $l = 2$, а остальные 1-серии (если они есть) имеют длину 1. К типу III относятся все остальные компоненты. Будем также различать компоненты с параметром $I_K = 1$ и компоненты с $I_K > 1$. Тем самым, предусматривается 6 типов компонент. Компоненты типа I с параметром $I_K > 1$ будем называть *однородными*. Компоненты остальных 5 типов будем называть *неоднородными*. Через $\mathcal{K}_0$ обозначим множество однородных компонент в $[\beta]$, через $\mathcal{K}_1$ – множество неоднородных компонент в $[\beta]$: $\mathcal{K} = \mathcal{K}_0 \sqcup \mathcal{K}_1$.

Некоторые (не обязательно все) из пар соседних неоднородных компонент $K_1, K_2 \in \mathcal{K}_1$, между которыми располагается ровно два нуля (т.е. $J_{K_1} + 3 = I_{K_2}$), объявляем *близкими*. Нулевые номера $(J_{K_1}+1, I_{K_2}-1)$ при этом будем называть *связующей парой*. Максимальную последовательность из попарно близких неоднородных компонент назовём *блоком*. Неоднородную компоненту, не являющуюся близкой с соседними неоднородными компонентами, тоже будем считать блоком.

По каждому отношению близости на множестве $\mathcal{K}_1$ в работе [7] конструктивно задаётся семейство так называемых канонических векторов $\alpha \in V_n$, $\beta \in B(\alpha)$, задающих специальные канонические покрытия множества $[\beta]$ полуинтервалами отдельно для каждого блока и каждой однородной компоненты. Концами полуинтервалов являются элементы $[\alpha]$. Пусть $\mathcal{H} = \mathcal{H}(\beta) = \sum_{K\in\mathcal{K}} h_K + \kappa_1 + \delta$, где $\delta = \delta(\beta) = -1$, если $1 \in \bigsqcup_{K\in\mathcal{K}_1} K$, иначе, $\delta(\beta) = 0$.

Теорема 2. *Для произвольного $\beta \in \{1, \dots, 2^{n-1}-1\}$ с характеристикой подмножества $[\beta] \subseteq \{1, \dots, n-1\}$, равной $\mathcal{H}$, имеем $\max_\alpha p^{\mathrm{id}}_{\oplus\alpha;+\beta} = 2^{-\mathcal{H}}$. Максимум достигается на канонических векторах $\alpha \in V_n$, отвечающих каноническим покрытиям подмножества $[\beta]$.*

Для отображений $F : V_N \to V_M$, реализуемых функциональными схемами, вероятностное линейное соотношение, задаваемое парой вектор-столбцов $L' \in V_N^*$, $L'' \in V_M^*$ и записываемое в виде $aL' \simeq bL''$, $a \in V_N$, $b = F(a) \in V_M$, характеризуется преобладанием $\delta_{L',L''} = 2\mathbf{P}\{aL' = bL''\} - 1$, вычисляемом для равновероятного $a \in V_N$. Вероятностное разностное соотношение, задаваемое векторами разностей $D' \in V_N$, $D'' \in V_M$ и обозначаемое как (D', D''), можно воспринимать как вероятностную импликацию: если $a^{(1)} + a^{(2)} = D'$, то $b^{(1)} + b^{(2)} = D''$, $b^{(1)} = F(a^{(1)})$, $b^{(2)} = F(a^{(2)})$. Она оценивается разностной характеристикой $p_{D',D''} = p^F_{D',D''} = \mathbf{P}\{F(a + D') + F(a) = D''\}$, вычисляемой при равновероятном $a \in V_N$.

Функциональная схема $\mathcal{F}$, задающая шифрпреобразование F, может представляться последовательностью выполняемых в определённом порядке линейных и нелинейных преобразований. Пусть нелинейные преобразования $f_i : V_{n_i} \to V_{m_i}$, $x_i \mapsto y_i = f_i(x_i)$, $i = 1, \dots, k$, выполняются в этой программе в указанном порядке. Через $x_i \in V_{n_i}$ обозначено значение аргумента отображения f_i, которое, в конечном счёте, выражается через $a \in V_N$ и является результатом выполнения некоторых предыдущих операций. В промежутках между нелинейными преобразованиями выполняются линейные преобразования.

Вероятностные линейные соотношения $aL' + bL'' \simeq 0$ получаются формальным сложением локальных вероятностных линейных соотношений $x_i l'_i + y_i l''_i \simeq 0$, $l'_i \in V^*_{n_i}$, $l''_i \in V^*_{m_i}$, $y_i = f_i(x_i)$, $i = 1, \dots, k$, характеризующихся (локальными) преобладаниями $\delta_i = \delta^{f_i}_{l'_i,l''_i} = 2\mathbf{P}\{x_i l'_i = y_i l''_i\} - 1$, вычисляемыми в условиях равновероятных $x_i \in V_{n_i}$. Набор $\mathfrak{L} = ((l'_i, l''_i), i = 1, \dots, k)$ должен быть согласованным в том смысле, что при некоторых $L' = L'_\mathfrak{L} \in V_N^*$, $L'' = L''_\mathfrak{L} \in V_M^*$ имеет место тождество $\sum_{i=1}^k (x_i l'_i + y_i l''_i) = aL' + bL''$. В качестве грубого приближения для $\delta_{L',L''}$ рассматривают произведение $\tilde{\delta}_\mathfrak{L} = \delta_1 \cdot \ldots \cdot \delta_k$. Благодаря имеющейся двойственности между способами построения линейных и разностных вероятностных соотношений [4], разностные соотношения (D', D'') аналогично строятся по согласованному набору $\mathfrak{D} = ((d'_i, d''_i), i = 1, \dots, k)$, $d'_i \in Vn_i$, $d''_i \in V_{m_i}$, локальных разностных соотношений для f_i, характеризуемому произведением $\tilde{p}_\mathfrak{D} = \prod_{i=1}^k p^{f_i}_{d'_i,d''_i}$.

Следующие две теоремы были получены докладчиком достаточно давно.

Теорема 3. *Для* $L' \in V_N^*$, $L'' \in V_M^*$ *имеем:* $\delta_{L',L''} = \sum_{\mathfrak{L}:L'_{\mathfrak{L}}=L',L''_{\mathfrak{L}}=L''} \tilde{\tilde{\delta}}_{\mathfrak{L}}$.

Теорема 4. *Для* $D' \in V_N$, $D'' \in V_M$ *имеем:*

$$p_{D',D''} = \sum_{\mathfrak{D}:D'_{\mathfrak{D}}=D',D''_{\mathfrak{D}}=D''} \tilde{p}_{\mathfrak{D}}+$$

$$+\frac{1}{2^M} \sum_{(L',L'')\in V_N^* \times V_M^*} (-1)^{D'L'+D''L''} \sum_{\mathfrak{L}_1\neq\mathfrak{L}_2:L'_{\mathfrak{L}_1}=L'_{\mathfrak{L}_2}=L',L''_{\mathfrak{L}_1}=L''_{\mathfrak{L}_2}=L''} \tilde{\tilde{\delta}}_{\mathfrak{L}_1}\tilde{\tilde{\delta}}_{\mathfrak{L}_2}.$$

Применим теорему 4 для вычисления разностных характеристик $p^+_{\alpha,\beta;\gamma} = p^+_{\oplus\alpha,\oplus\beta;\oplus\gamma}$. Тройку векторов $\alpha,\beta,\gamma \in V_n$, $\alpha = (\alpha_0,\alpha_1,\dots,\alpha_{n-1})$, $\beta = (\beta_0,\beta_1,\dots,\beta_{n-1})$, $\gamma = (\gamma_0,\gamma_1,\dots,\gamma_{n-1})$, будем задавать последовательностью троек компонент

$$(\alpha_0,\beta_0;\gamma_0),\ (\alpha_1,\beta_1;\gamma_1), \dots, (\alpha_{n-1},\beta_{n-1};\gamma_{n-1}). \tag{1}$$

Для $i = 1,2,\dots,n-2$ положим $I(\alpha_i,\beta_i;\gamma_i) = 0$, если $\alpha_i = \beta_i = \gamma_i$, иначе $I(\alpha_i,\beta_i;\gamma_i) = 1$. Для $i = n-1$ полагаем $I(\alpha_{n-1},\beta_{n-1};\gamma_{n-1}) = 0$, если $\alpha_{n-1} = \beta_{n-1} = 0$, иначе $I(\alpha_{n-1},\beta_{n-1};\gamma_{n-1}) = 1$.

Теорема 5. *Тогда и только тогда* $p^+_{\alpha,\beta;\gamma} > 0$, *когда выполняются три следующих условия:*

i) $\alpha_{n-1} \oplus \beta_{n-1} = \gamma_{n-1}$,

ii) если $\alpha_{n-1} = \beta_{n-1} = 0$, *то* $\alpha_{n-2} \oplus \beta_{n-2} = \gamma_{n-2}$,

iii) если $\alpha_i = \beta_i = \gamma_i$, *то* $\alpha_{i-1} \oplus \beta_{i-1} \oplus \gamma_{i-1} = \alpha_i = \beta_i = \gamma_i$, $i = 1,2,\dots,n-2$. *Если* $p^+_{\alpha,\beta;\gamma} > 0$, *то* $p^+_{\alpha,\beta;\gamma} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\sum_{i=1}^{n-1} I(\alpha_i,\beta_i;\gamma_i)}$.

Следствие 1. *Если векторы* $\alpha',\beta',\gamma' \in V_n$ *получаются из векторов* $\alpha,\beta,\gamma \in V_n$ *путём независимых перестановок бит в каждой тройке последовательности (1), то* $p^+_{\alpha',\beta';\gamma'} = p^+_{\alpha,\beta;\gamma}$.

Другим способом условия *i), ii), iii)* в теореме 5 в своё время были получены А.Е. Тришиным. Равносильные этим условия имеются также в [8].

Аналогично (см. [7]), с помощью теоремы 3 можно получить простые выражения для линейных характеристик $\delta^+_{\alpha,\beta;\gamma} = 2\mathbf{P}\{x\alpha \oplus y\beta = (x+y)\gamma\} - 1$, $\alpha,\beta,\gamma \in V_n^*$.

С помощью теоремы 5 в работе [7] получены алгоритмы решения задачи по нахождению $\max_\gamma p^+_{\oplus\alpha,\oplus\beta;\oplus\gamma}$ при заданных $\alpha,\beta \in V_n$ с указанием всех точек экстремали $\gamma \in V_n$ и задачи по нахождению $\max_{(\beta,\gamma)} p^+_{\oplus\alpha,\oplus\beta;\oplus\gamma}$ при заданном векторе $\alpha \in V_n$ с указанием всех точек экстремали $(\beta,\gamma) \in V_n \times V_n$.

Доказательства теорем 1, 2, 5 имеются в работе [7].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Leurent G. Construction of differential charecteristics in ARX designs application to Skein. CRYPTO 2013, LNCS № 8042, 2013, p. 241–258.

2. Biryukov A., Velichkov V. Automatic search for differential trails in arx ciphers. LNCS v. 8366, 2014, p. 227–250.

3. Biryukov A., Roy A., Velichkov V. Differential analysis of block ciphers simon and speck. LNCS v. 8540, 2014, p. 525–545.

4. Малышев Ф. М. Двойственность разностного и линейного методов в криптографии. Матем. вопр. криптогр. **5**:3 (2014), 35–47.

5. Малышев Ф.М., Трифонов Д.И. Рассеивающие свойства XSLP-шифров. Математические вопросы криптографии. 2016. Т. 7, № 3. С. 47–60.

6. Малышев Ф. М., Тришин А. Е. Линейный и разностный методы в криптографии (другой взгляд). Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: Современные проблемы и приложения. Материалы XV Международной конференции, посвящённой столетию со дня рождения профессора Николая Михайловича Коробова. Тула, ТГПУ им. Л. Н. Толстого, 2018, стр. 42–45.

7. Малышев Ф. М. Вероятностные характеристики разностных и линейных соотношений для неоднородной линейной среды. Математические вопросы криптографии. 2019. Т. 19, № 1.

8. Wallén J. On the differential and linear properties of addition. Helsinki university of technology, Laboratory for theoretical computer science, HUT-TCS-A84, Espoo 2003.

УДК 519.1

Ориентированные матроиды и их приложения

А. М. Ревякин (Россия, г. Москва)
Национальный исследовательский университет «МИЭТ»
e-mail: arevyakin@mail.ru
А. Н. Исаченко (Беларусь, г. Минск)
Белорусский государственный университет
e-mail: isachenkoan@mail.ru

Oriented matroids and their applications

A. M. Revyakin (Russia, Moskow)
National research university of electronic technology «MIET»
e-mail: arevyakin@mail.ru
A. N. Isachenko (Belarus, Minsk)
Belarusian state university
e-mail: isachenkoan@mail.ru

Матроидом $M = (S, I)$ на множестве S называется система I подмножеств конечного множества S, если выполняются следующие условия: а) $\emptyset \in I$; б) если A – подмножество B и $B \in I$, то $A \in I$; в) если $A, B \in I$ и $|A| > |B|$, то найдется $a \in A \backslash B$ такой, что $B \cup \{a\} \in I$.

Элементы семейства I называют независимыми множествами матроида M. Подмножество A множества S – зависимо, если A не принадлежит семейству I. Максимальные по включению независимые множества называют базами, а минимальные по включению зависимые подмножества – циклами матроида M. Ранговой функцией называется такая целочисленная функция $r(A)$, определенная для всех подмножеств A множества S, что $r(A) = \max\{|X| : X -$ подмножество множества A и $X \in I\}$.

Далее используется терминология и обозначения монографий [1, 2, 3].

Пусть C – матрица инцидентности циклов матроида M на конечном множестве S, а R – матрица инцидентности коциклов этого же матроида. Каждой строке матрицы C соответствует цикл матроида M, а каждому столбцу – элемент множества S. Причем, $c_{ij} = 1$, если j-й элемент множества S принадлежит i-ому циклу. В противном случае, $c_{ij} = 0$. Аналогично, для матрицы R. Замена некоторых 1 на -1 в матрицах C и R называется ориентацией матроида M, если для "ориентированных"матриц C и R, полученных в результате замены некоторых 1 на -1, произведение матрицы C на транспонированную к матрице R равно нулевой матрице, т. е. $CR^T = 0$.

Следующая лемма Минти [4] используется как для определения матроидов с помощью циклов и коциклов, а также для доказательства различных свойств ориентированных матроидов.

Лемма 1. *Пусть a, S_1, S_2 – разбиение множества S, где $M = (S, I)$ – матроид с семейством независимых множеств I. Тогда выполняется одно из условий:*

1. *существует цикл C такой, что $a \in C$и $C \subseteq S_1 \cup \{a\}$;*
2. *существует коцикл R такой, что $a \in R$ и $R \subseteq S_2 \cup \{a\}$;*

но не оба условия сразу.

Пусть B – база матроида M на конечном множестве S и $a \in S \backslash B$. Тогда существует единственный цикл $C = C(a, B)$ такой, что $a \in C \subseteq B \cup \{a\}$. Цикл $C(a, B)$ называется фундаментальным циклом элемента a относительно базы B. Аналогично, если $B^* = S \backslash B$ и $a \in B$, то существует единственный коцикл $R = R(a, B^*)$ такой, что $a \in R \subseteq B^* \cup \{a\}$. Коцикл $R(a, B^*)$ называется фундаментальным коциклом элемента a относительно базы B.

Пусть $C = (C_1|E)$ – матрица фундаментальных циклов, а $R = (E|R_2)$ – матрица фундаментальных коциклов матроида M на конечном множестве S относительно базы B, где E – единичные матрицы, а вектор-столбцы матриц, соответствующие элементам базы B и кобазы B^*, отличаются подстрочными индексами. Матрицы такого вида называются стандартным представлением матроида M относительно базы B. Заметим, что для матриц фундаментальных циклов и коциклов ориентированного матроида M имеет место соотношение $C_1 = -R_2^T$. Если $(E|A)$ – стандартное представление матроида M, то $(-A^T|E)$ – стандартное представление двойственного матроида M^* на том же конечном множестве.

Рассмотрим граф G. Присвоим произвольным образом ориентацию ребрам графа G, получив в результате орграф G_1. Тогда усеченная матрица инцидентности графа G_1 является представлением циклического матроида $M(G)$ над произвольным полем F.

Легко видеть, что ориентированный матроид должен быть бинарным.

Ориентируемый матроид имеет линейные представления над всеми полями.

Матроид M является ориентируемым тогда и только тогда, и когда двойственный матроид M^* – ориентируем.

Миноры ориентируемых матроидов являются ориентируемыми.

Прямая сумма ориентируемых матроидов является ориентируемым матроидом.

Очевидно, что циклический и коциклический матроиды любого графа ориентируемы. Поскольку прямая сумма $M_1 + M_2$ двух матроидов является графическим (соответственно, кографическим) матроидом в том и только в том случае, когда оба матроида M_1 и M_2 являются одновременно графическими (соответственно, кографическими). Легко привести пример ориентированного матроида, который не является ни графическим, ни кографическим. Матроид Фано является бинарным, но не ориентируем. Ориентированные матроиды часто называют "регулярными"[5, 6].

Татт [5] получил следующую характеризацию регулярных (ориентированных) матроидов.

Теорема 1. *Бинарный матроид является регулярным тогда и только тогда, когда не содержит в качестве миноров ни матроид Фано, ни ему двойственный.*

Пусть $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ – стандартная матрица представления матроида R_{10} над полем GF(2). Матроид, двойственный к R_{10}, совпадает с R_{10}. Кроме того, все миноры R_{10} являются либо графическими, либо кографическими, в то время, как сам R_{10} таковым не является. Исключение произвольного элемента из R_{10} ведет к образованию матроида, изоморфного циклическому матроиду полного двудольного графа$K_{3,3}$. Кроме того, R_{10} является ориентированным, самодвойственным матроидом. Матроид M называется самодвойственным, если он изоморфен двойственному матроиду M^*. Например, самодвойственными являются циклический матроид полного графа K_4, матроиды $U_{3,6}$ и P_6. Самодвойственный матроид P_8 на восьми элементах со следующей матрицей представления $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ над полем GF(3) не является ориентированным матроидом.

Пусть A – $k \times n$-матрица с целыми коэффициентами и $k < n$. Матрица A называется тотально унимодулярной, если все ее миноры равны 0, $+1$ или -1.

Если M – матроид на конечном множестве S, то следующие утверждения эквивалентны: а) M обладает тотально унимодулярной матрицей представления над полем рациональных чисел; б) матроид M представим над каждым полем; в) M является и бинарным, и тернарным матроидом; г) матроид M является бинарным и представим над некоторым полем F, характеристика которого не равна 2; д) матроид M является ориентируемым.

Пусть M_1 и M_2 бинарные матроиды на множествах S_1 и S_2 соответственно, причем S_1 и S_2 могут пересекаться. Определим новый бинарный матроид $M_1 \Delta M_2$ на множестве $S_1 \Delta S_2 = (S_1 \backslash S_2) \cup (S_2 \backslash S_1)$, циклами которого будут все подмножества множества $S_1 \Delta S_2$ вида $C_1 \Delta C_2$, где C_i – цикл матроида M_i и $i = 1, 2$. При этом $M_1 \Delta M_2$ называется:

а) 1-суммой M_1 и M_2, если $S_1 \cap S_2 = \emptyset$;

б) 2-суммой M_1 и M_2, если $|S_1| \geqslant 3$, $|S_2| \geqslant 3$ и $S_1 \cap S_2 = x$, где x не является ни петлей, ни перешейком матроидов M_1 и M_2;

в) 3-суммой M_1 и M_2, если $|S_1| \geqslant 7$, $|S_2| \geqslant 7$ и $S_1 \cap S_2 = X$, где $|X| = 3$, X – цикл каждого из M_1 и M_2, в котором не содержится никакого коцикла ни из S_1, ни из S_2.

Заметим, что 1-сумма M_1 и M_2 является просто прямой суммой этих матроидов. 2-сумма – это такая склейка M_1 и M_2 по общему элементу x с последующим его исключением, при которой ранг $M_1 \Delta M_2$ максимален и равен $r(M_1) + r(M_2) - 1$. Аналогично, 3-сумма M_1 и M_2 – это склейка M_1 и M_2 по общей прямой, при которой ранг $M_1 \Delta M_2$ максимален и равен $r(M_1) + r(M_2) - 2$.

Т. Брилавский доказал, что 1-, 2- и 3-суммы унимодулярных матроидов являются унимодулярными. П. Сеймур установил, что каждый ориентированный матроид может быть получен посредством 1-, 2- и 3-сумм некоторых графических и кографических матроидов, а также R_{10}.

Для электрических цепей, состоящих из резисторов и источников напряжения и тока выполняются законы Кирхгофа для токов (алгебраическая сумма токов, вытекающих из узла равна нулю) и напряжений (алгебраическая сумма напряжений в любом замкнутом контуре равна нулю), которые можно записать как $RI = 0$ и $CV = 0$, где R – матрица разрезов, C – матрица циклов орграфа, сопоставленного электрической цепи, а I и V – вектор столбцы токов и напряжений соответственно на элементах электрической цепи.

Пусть T – остов цепи (орграфа), $\Phi = (\Phi_1|E)$ – матрица фундаментальных циклов, $K = (E|K_2)$ – матрица фундаментальных разрезов относительно остова T, где E – единичные матрицы, а вектор-столбцы матриц, соответствующие хордам и ветвям остова T, отличаются подстрочными индексами. Тогда, в силу законов Киргофа, $(\Phi_1|E)(I_1|I_2)^T = 0$ и $(E|K_2)(V_1|V_2)^T = 0$. Заметим, что $\Phi_1 = -K_2^T$. Отсюда, $I_2 = -\,\Phi_1 I_1 = K_2^T I_1$. Аналогично, $V_1 = K_2^T I_2$.

Таким образом, все токи текущие через элементы электрической цепи можно выразить линейной комбинацией хордовых токов, а все напряжения – линейной комбинацией напряжений на ветвях цепи. Как выбирать остов T электрической цепи детально описано в [2, 7].

Для электрических цепей, состоящих из резисторов и источников напряжения и тока [2, 7, 8], выполняются следующие свойства неусиления.

Теорема 2. *Для цепи, состоящей из источников тока и напряжений, а также (линейных/нелинейных) положительных сопротивлений, величина напряжения на любом из сопротивлений не больше суммы величин напряжений на всех источниках.*

Теорема 3. *Для цепи, состоящей из источников тока и напряжений, а также (линейных/нелинейных) положительных сопротивлений, величина тока в любом сопротивлении с нулевым напряжением не больше суммы величин токов, текущих через источники.*

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Oxley J. G. Matroid theory. — N.Y.: Oxford University Press, 1992 и 2006. 532 с.

2. Recski A. Matroid theory and its applications in electric network theory and in statics. — Budapest: Akad. Kiado, 1989. 531 с.

3. Welsh D. J. A. Matroid theory. — London: Acad. Press, 1976. 433 с.

4. Minty G. On the axiomatic foundations of the theories of directed linear graphs, electrical networks and network programming // J. Math. Mech. 1966. № 15. С. 485-520.

5. Tutte W. T. Introduction to the theory of matroids. — N.Y.: Amer. Elsevier, 1971. 84 с.

6. Revyakin A. M. Matroids // J. Math. Sci. 2002. V.108, № 1. С. 71-130.

7. Сешу С., Рид М. Б. Линейные графы и электрические цепи. — М.: Высш. школа, 1971. 448 с.

8. Свами М., Тхуласираман К. Графы, сети и алгоритмы. — М.: Мир, 1984. 454 с.

Секция 5. Аналитическая теория чисел

УДК 517

Нижние оценки винеровской нормы в $\mathbb{Z}_p^d$ [1]

М. Р. Габдуллин (Российская Федерация, Москва)
МГУ им. М. В. Ломоносова
e-mail: gabdullin.mikhail@yandex.ru

Lower bounds for the Wiener norm in $\mathbb{Z}_p^d$

M.R. Gabdullin (Russian Federation, Moscow)
Lomonosov Moscow State University
e-mail: gabdullin.mikhail@yandex.ru

Пусть $B \subset \mathbb{Z}$ — конечное множество и $e(x) := \exp(2\pi i x)$. Знаменитая гипотеза Литтлвуда гласит, что

$$\int_0^1 \left| \sum_{b\in B} e(bx) \right| dx \gg \log |B|. \tag{1}$$

Это неравенство было независимо доказано Конягиным [1] и МакГи, Пиньо и Смитом [2] в 1981 году.

В работе Грина и Конягина [3], а также в ряде последующих работ [4]-[8] изучался дискретный аналог гипотезы Литтлвуда для случая группы $\mathbb{Z}_p$. Для произвольной функции $f\colon \mathbb{Z}_p \to \mathbb{C}$ определим её винеровскую норму

$$\|f\|_{A(\mathbb{Z}_p)} := \|\widehat{f}\|_1 = \sum_{\gamma\in\hat{\mathbb{Z}}_p} |\hat{f}(\gamma)|$$

(здесь γ пробегает группу $\widehat{\mathbb{Z}}_p$ всех гомоморфизмов $\mathbb{Z}_p$ в $\mathbb{C}$, а $\widehat{f}(\gamma) = p^{-1}\sum_{x\in\mathbb{Z}_p} f(x)\overline{\gamma(x)}$; аналогично определяется преобразование Фурье и винеровская норма на произвольной конечной абелевой группе). Пусть $A \subseteq \mathbb{Z}_p$; через $A(x)$ будем обозначать его характеристическую функцию. Предполагается, что при $2 \le |A| < p/2$ имеет место оценка

$$\|A\|_{\mathbb{Z}_p} \gg \log |A|, \tag{2}$$

аналогичная оценке (1) в непрерывном случае. Неравенство (2) доказано Конягиным и Шкредовым [4] для множеств малого размера, а именно, при $|A| \ll \exp((\log p/\log\log p)^{1/3})$. В общем случае известны более слабые нижние оценки вида (2), где в правой части стоит некоторая степень логарифма $|A|$ (см. работы [4]-[8]).

Мы переносим одномерные результатов на многомерный случай.

Теорема 1. *Пусть $E \subseteq \mathbb{C}$ — произвольное множество и число $C > 0$ достаточно велико. Предположим, что для любой функции $h\colon \mathbb{Z}_p \to E\cup\{0\}$ выполнена оценка*

$$\|h\|_{A(\mathbb{Z}_p)} \ge F(p,\delta),$$

где $\delta = |supp\, h|p^{-1}$. Тогда для любой функции $f\colon \mathbb{Z}_p^d \to E\cup\{0\}$ такой, что $|supp\, f| = \delta p^d$, $\delta \ge Cp^{-1}$, выполнено

$$\|f\|_{A(\mathbb{Z}_p^d)} \ge F(p,\delta'),$$

для некоторого $\delta' = \delta + O(\delta^{1/2}p^{-1/2})$, причём подразумеваемая постоянная абсолютна.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Правительства РФ (проект № 14.W03.31.0031)

Замечание 1. *Не умаляя общности, в формулировке теоремы можно считать, что функция $F(p,\delta)$ равна $+\infty$, если $p\delta$ не равно целому числу. Это предположение не влияет на посылку теоремы и отсекает тривиальные случаи, связанные с тем, что мы не знаем точное значение δ'.*

Теорема 2. *Пусть $E \subseteq \mathbb{C}$ — произвольное множество, инвариантное относительно поворотов (то есть $e^{i\varphi}E = E$ при всех $\varphi \in \mathbb{R}$). Предположим, что для любой функции $h\colon \mathbb{Z}_p \to E \cup \{0\}$ такой, что $|supp\, h| = \delta p < (2p)^{1/2}$, выполнена оценка*

$$\|h\|_{A(\mathbb{Z}_p)} \geq F(p,\delta).$$

Тогда для любой функции $f\colon \mathbb{Z}_p^d \to E \cup \{0\}$ такой, что $|supp f| = \delta p < (2p)^{1/2}$, справедливо

$$\|f\|_{A(\mathbb{Z}_p^d)} \geq F(p,\delta).$$

Используя известные оценки в одномерном случае, с помощью теорем 1 и 2 можно получать оценки винеровсой нормы больших и малых подмножеств $\mathbb{Z}_p^d$. Так, из теоремы 1 вытекает, что если $A \subset \mathbb{Z}_p^d$ и $|A| \asymp p^d$ (и $|A| < p^d/2$), то $\|\hat{A}\|_1 \gg (\log p)^{1/2-o(1)}$. Из теоремы 2, например, следует, что при $A \subset \mathbb{Z}_p^d$, $|A| \leq \exp((\log p/\log\log p)^{1/3})$, справедлива точная оценка $\|\hat{A}\|_1 \gg \log|A|$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Конягин С.В. О проблеме Литтлвуда // Известия РАН. 1981. Том 45, С. 243-265.

2. McGehee O., Pigno L., Smith B. Hardy's inequality and the L_1 norm of exponential sums // Annals of Math. 1981. Issue 113, P. 613-618.

3. Green B. J., Konyagin S. V. On the Littlewood problem modulo prime // Canad.J.Math. 2009. Issue 61. P. 141-164.

4. Konyagin S. V., Shkredov I. D. A quantitative version of Beurling-Helson theorem // Functional Analysis and Its Application. 2015. Issue 49. P. 110-121.

5. Konyagin S. V., Shkredov I. D. On Wiener norm of subsets of $\mathbb{Z}_p$ of medium size // Journal of Mathemetical Sciences. 2016. Issue 218. P. 599-608.

6. Schoen T. On the Littlewood conjecture modulo prime // Moscow Journal of Number Theory and Combinatorics. 2016. P. 1-5.

7. Sanders T. The Littlewood-Gowers problem // J.Anal.Math. 2007. Issue 101. P. 123-162

8. Sanders T. Bounds in Cohen's idempotent theorem // preprint

УДК 511.32

О суммах с характерами Дирихле, родственных функции Чебышева

Е. И. Деза (Россия, г. Москва)
Московский педагогический государственный университет
e-mail: Elena.Deza@gmail.com
Л. В. Варухина (Россия, г. Москва)
Московский педагогический государственный университет
e-mail: lidadgemma@mail.ru

On sums with Dirichlet's characters, related to Chebushev function

E. I. Deza (Russia, Moscow)
Moscow State Pedagogical University
e-mail: Elena.Deza@gmail.com
L. V. Varukhina (Russia, Moscow)
Moscow State Pedagogical University
e-mail: lidadgemma@mail.ru

Многие вопросы теории чисел связаны с исследованием *рядов Дирихле* $f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$ и *сумматорных функций* $\Phi(x) = \sum_{n\leq x} a_n$ их коэффициентов. Наиболее известным примером ряда Дирихле является *дзета-функция Римана* $\zeta(s)$. Квадрат дзета-функции связян с *функцией делителей* $\tau(n) = \sum_{d|n} 1$, и, в общем случае, k-ая степень дзета-функции $\zeta^k(s)$ - с функцией $\tau_k(n) = \sum_{n=n_1\cdot\ldots\cdot n_k} 1$, дающей число представлений натурального числа n в виде произведения k натуральных сомножителей. Изучение сумматорной функции ряда Дирихле, соответствующего $\zeta^2(s)$ (в общем случае, $\zeta^k(s)$) - известная *проблема* (в общем случае, многомерная) *делителей Дирихле*. [1], [2]

С другой стороны, *функция Чебышева* $\psi(x) = \sum_{n\leq x} \Lambda(n)$ является сумматорной функцией коэффициентов ряда Дирихле $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s}$, соответствующего логарифмической производной $\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}$ дзета-функции Римана. (Здесь $\Lambda(n)$ - *функция Мангольдта*: $\Lambda(n) = \log p$, если $n = p^k$ для простого p и натурального k, и $\Lambda(n) = 0$, иначе.) Она хорошо известна в аналитической теории чисел. В частности, часто используется представление [3] функции $\psi(x)$ по нулям дзета-функции:

$$\psi(x) = x - \sum_{|\Im\rho|\leq T} \frac{x^\rho}{\rho} + O\left(\frac{x\ln^2 x}{T}\right),$$

где $x = n + 0,5$, $n \in \mathbb{N}$, $2 \leq T \leq x$, и $\rho = \beta + i\gamma$ - нетривиальные нули дзета-функции Римана, то есть нули $\zeta(s)$, лежащие в *критической полосе* $0 < \Re s < 1$. Аналогичные представления, связанные с нетривиальными нулями дзета-функции Римана, можно получить и для других арифметических функций, в частности, для функций

$$\psi_1(x) = \sum_{n\leq x} (x-n)\Lambda(n) \text{ и } \psi_2(x) = \sum_{n\leq x} \Lambda(n) \ln\frac{x}{n},$$

родственных функции Чебышева. [4]

Еще одним известным рядом Дирихле является L-функция Дирихле

$$L(s,\chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \chi(n) n^{-s}, \Re s > 1,$$

где χ - *характер Дирихле* по некоторому модулю D. Она является обобщением дзета-функции Римана и позволяет получить ряд более широких результатов в теоретико-числовых вопросах, связанных с использованием $\zeta(s)$. [3]

В частности, использование L-функций Дирихле позволило нам получить представления, связанные с их нетривиальными нулями, для двух арифметических функций с характерами,

$$\psi_1(x,\chi)=\sum_{n\leq x}(x-n)\Lambda(n)\chi(n) \text{ и } \psi_2(x,\chi)=\sum_{n\leq x}\Lambda(n)\chi(n)\ln\frac{x}{n},$$

родственных функции Чебышева. Основной результат работы состоит в доказательстве асимптотических формул, реализующих указанные представления.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Карацуба А.А. Равномерная оценка остаточного члена в проблеме делителей Дирихле // Известия АН СССР. Сер. матем. 1972. Т. 36, N. 3. С. 475 - 483.
2. Deza E., Varukhina L. On mean values of some arithmetic functions in number fields // Discrete Mathematics. 2008. Vol. 308, Issue 21. P. 4892 - 4899.
3. Карацуба А.А. Введение в аналитическую теорию чисел. Москва: Наука, 1983.
4. Деза Е.И., Варухина Л.В. Вопросы суммирования арифметических функций, родственных функции Чебышева // Чебышевский сборник. 2018. Том 19, вып. 2. С. 319 - 333.

On new method of investigation of extremal manifolds

I. Sh. Jabbarov (Azerbaijan, Ganja)
Ganja State University
e-mail: ilgar_j@rambler.ru
G. K. Hasanova (Azerbaijan, Ganja)
Ganja State University
e-mail: gunay.hasanova@mail.ru
L. G. Ismailova (Azerbaijan, Ganja)
Ganja State University
e-mail: ilgar_j@rambler.ru

УДК 511.36

О новом методе исследования экстремальных многообразий

И. Ш. Джаббаров (Азербайджан, г. Гянджа)
Гянджинский Госуниверситет
e-mail: ilgar_j@rambler.ru
Г. К. Гасанова (Азербайджан, г. Гянджа)
Гянджинский Госуниверситет
e-mail: gunay.hasanova@mail.ru
Л. Г. Исмаилова (Азербайджан, г. Гянджа)
Гянджинский Госуниверситет

e-mail: ilgar_j@rambler.ru

1. Introduction.

Let's introduce into consideration following set of polynomials with integral coefficients of degree not exceeding n:

$$\Pi = \left\{ f(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i x^i | a_i \in R \right\}.$$

We call the number

$$h(f) = \max(|a_0|,\, |a_1|, ..., |a_n|)$$

to be the height of the polynomial $f(x)$. Let we are given with real transcendental number α (consequently α cannot be a root of any polynomial from Π). Let $h > 0$ be a real number. Mahler K. showed that there is a constant $\kappa > 0$ for which the inequality

$$|f(\alpha)| > h^{-n\gamma};\ h = h(f) \tag{1}$$

is satisfied for any polynomial $f(x)$ with the height $\leqslant h$ for almost all real numbers. He had found the value $\kappa = 4 + \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$ is any). Mahler K. conjectured that it is possible to take $\kappa = 1 + \varepsilon$.

In the work (see [3,7]) Khintschine A. showed that the system of inequalities

$$\max\left(\|tq\|, \left\|t^2 q\right\|, ..., \|t^n q\|\right) < \delta q^{-1/n}$$

has infinite and fixed set $M$of solutions in positive integral numbers $q > 0$ for almost all real t in the Lebesgue sense. It means that for almost all real t there are infinitely many natural numbers $q_1, q_2, ..., q_m, ...$ such that for every natural m the following inequalities are satisfied:

$$\left| t^k - \frac{a_k}{q_m} \right| \leqslant \delta q_m^{-1/n},\ k = 1, ..., n.$$

To define basic notions of the theory, we consider the system of inequalities

$$\max\left(\|\alpha_1 q\|, \|\alpha_2 q\|, ..., \|\alpha_n q\|\right) < q^{-u}, u > 0, \tag{2}$$

Let $u(\alpha_1, ..., \alpha_n)$ be defined as a *sup* of such $u > 0$ for which (1) is satisfied for infinite set of natural numbers q. It is not difficult to show that $u(\alpha_1, ..., \alpha_n) \geqslant 1/n$ (see [10]). From this definition it follows that the inequality (1) is satisfied for infinitely many natural numbers q when $u < 1/n$. When $u(\alpha_1, ..., \alpha_n) = 1/n$ for almost all points of the variety $(\alpha_1, ..., \alpha_n) \in R^n$ of less dimension, then we call this manifold as an *extremal manifold*.

In 1993 Karatsuba A. A. advanced an opinion that the question on extremality of some algebraic varieties could be investigated by using of results on convergence exponent in the Tarry's problem (concerning the problem itself see [1, 4-5]). In the present work we show that this proposition is valid and can be useful for cases of many other manifolds. We prove some results and conjectures of Sprindzuk V. G. ([10-11]) by a new method.

2. Auxiliary results

We shall use following two auxiliary lemmas: Borel-Kantelly's lemma 1 and Kovalevskaya's lemma 2 (see[2,6,10]).

Lemma 1. Let A_q ($q = 1, 2, ...$) be a sequence of measurable sets in R^n, and

$$\sum_{\mathrm{q}=1}^{\infty} \mathrm{mes} A_q < \infty.$$

Then the measure of such real numbers which fall into infinite number of sets A_q is zero.

Lemma 2. Let q be natural numbers, $f_j(\bar{x})$, $j = 1, ..., N$ be a family of real measurable functions defined in the cube $\Omega = [0,1]^r$. Denote by $\mu(q)$ the measure of a set of that $\bar{x} \in \Omega = [0,1]^r$ for which

$$\|f_j(\bar{x})\| < q^{-r_j} \, (1 \leqslant j \leqslant N).$$

Then,

$$\mu(q) << q^{-r} \sum_{|A_1|<q^{r_1}} \cdots \sum_{|A_N|<q^{r_N}} \left| \int_\Omega e^{2\pi i (A_1 f_1(\bar{x}) + \cdots + A_N f_N(\bar{x}))} d\bar{x} \right|;$$

here $r = r_1 + \cdots + r_N$, and the constant in the symbol $<<$ depends on N only.

3. Basic results

In this section we formulate some results on extremality of manifolds which we prove by a new method.

Theorem 1. Let $n_1, n_2, ..., n_k$ be a natural number, $P(x_1, x_2, ..., x_k)$ be a polynomial with integral coefficients of degrees n_i with respects variables x_i $(i = 1, 2, . . ., k)$, i. e.

$$P(x_1, x_2, ..., x_k) = \sum_{\substack{0 \leqslant i_1 \leqslant n_1 \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ 0 \leqslant i_k \leqslant n_k}} a_{i_1 i_2 \cdots i_k} x_1^{i_1} x_2^{i_2} \cdots x_k^{i_k}.$$

Let, furthe,r $v(\beta_1, \beta_2, ..., \beta_k)$ be, for the real vector $\bar{\beta} = (\beta_1, \beta_2, ..., \beta_k)$, the supremum of such $v > 0$, for which the inequality

$$|P(\beta_1, \beta_2, ..., \beta_k)| < h^{-v}$$

is satisfied for infinitely many polynomials P, where

$$h = \max |a_{i_1 i_2 \cdots i_k}| \begin{pmatrix} 0 \leqslant i_1 \leqslant n_1 \\ \cdots \\ 0 \leqslant i_k \leqslant n_k \end{pmatrix}.$$

Then for almost all $\bar{\beta} = (\beta_1, \beta_2, ..., \beta_k)$

$$v(\beta_1, \beta_2, ..., \beta_k) = (n_1 + 1)(n_2 + 1) \cdots (n_k + 1) - 1.$$

Theorem 2. Let $m_1 < m_2 < \cdots < m_n$ be natural numbers, ω be a transsendental number, and $v_n(\omega) = v(m_1, m_2, ..., m_n)$ be a supremum of such $v > 0$ for which the inequality

$$|a_0 + a_1 \omega^{m_1} + \cdots + a_n \omega^{m_n}| < h^{-v}, h = \max(|a_0|, |a_1|, ..., |a_n|)$$

has infinitely many solutions in integral numbers $a_0, a_2, ..., a_n$. Then, $v_n(\omega)$.

Let we are given with some continuously differentable r-dimensional manifold

$$\Gamma = (f_1(\bar{x}), ..., f_n(\bar{x})), \, \bar{x} \in \Omega = [0,1]^r, r < n.$$

Sprindzuk V. G. in [11] put the question on conditions in which the given manifold is extremal. Our following result is a sufficient condition of this type.

Theorem 3. If the integral

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}\left|\int_{0}^{1}\cdots\int_{0}^{1}e^{2\pi i(\alpha_n f_n(\bar{x})+\alpha_{n-1}f_{n-1}(\bar{x})+\cdots+\alpha_1 f_1(\bar{x}))}d\bar{x}\right|^{2h}d\alpha_n d\alpha_{n-1}\cdots d\alpha_1$$

is convergen for some integral number $h>0$ then the manifold Γ is extremal.

REFERENCES

1. Arkhipov G. I., Karatsuba A. A., Chubarikov V. N., Thoery of multiple trigonometric sums., M.:, Nauka, 1987.
2. Bernik V. I., Kavaleuskaya E. I., Extremality property of some surfaces in n dimensional Euclidean space., Matemat. Zametki, (1974), v.15, no 2, 247-254.
3. Cassels J. W. S. An introduction to Diophantine Approximation. IIL, Moscow, 1961.
4. Dzhabbarov I. Sh., The exponent of convergence of a special integral in multidimensional problems Terry, Chebyshevskii Sbornik, 14:2 (2013), 74-103.
5. Dzhabbarov I. Sh., On an identity of Harmonic Analysis and its applications, Dokl.AS USSR, (1990), v.314, no 5, 1052-1054.
6. Kavaleuskaya E. I., Simultaneously extremal manifolds., Matemat. Zametki, (1987),v.41, no 1, 3-8.
7. Khintschine A., Uber eine Klasse linearer Diophantischer Approximationen, Circolo mat. Palermo 50, 1926, 175-195.
8. Mahler K. Zur Approximation der Exponentialfunktionen und des Logarithmus. I, II., J. reine und angew. Math., 1932, 166, S. 118150.
9. Mahler K. Uber das Mass der Menge aller S-Zahlen. Math. Ann., 1932, v. 106 pp.131 139.
10. Sprindzuk V. G., Metric theory of Diophantine Approximations., M. Nauka, 1977.
11. Sprindzuk V. G., A proof of Mahler's conjecture on the measure of the set of S-numbers. Izvestiya: Mathematics, 16: 1 (1981), 2140.

———————————————————————————

УДК 511.3

Об одной теореме распределения простых чисел в многочленах второй степени

Ильясов И. И. (Республика Казахстан, г. Актобе)
Актобинский Региональный Государственный Университет имени К. Жубанова
e-mail: ilyasov_isatay@mail.ru
Максут Т. А. (Республика Казахстан, г. Актобе)
Актобинский Региональный Государственный Университет имени К. Жубанова
e-mail: ilyasov_isatay@mail.ru

On one the theorem distribution of prime numbers in polynomials of the second degree

Ilyasov I. I. (The Republic of Kazakhstan, Aktobe)
K. Zhubanov Aktobe Regional State University
e-mail: ilyasov_isatay@mail.ru
Maksut T. A. (The Republic of Kazakhstan, Aktobe)
K. Zhubanov Aktobe Regional State University
e-mail: ilyasov_isatay@mail.ru

В 1837 г. Дирихле доказал, бесконечность простых чисел в арифметической прогрессии $ax+b$ при условии a и b взаимно простые натуральные числа.

Существует ли многочлены второй степени с целыми коэффициентами, содержащие бесконечное количество простых чисел, является нерешенной задачей. Эта задача в свое время привлекла внимание Эйлера, Лежандра и других: Эйлер открыл, что многочлен x^2+x+41 для $x=0,1,2,\ldots,39$ принимает простые значения.

Лежандр так же установил, что многочлен $2x^2+29$ для $x=0,1,2,\ldots,28$ принимают простые значения [1] стр. 420.

Чебышев доказал, что $\frac{P_x}{x} \to \infty$ при $x \to \infty$, где P_x наибольший простой делитель $\prod_{n\leqslant x}(n^2+1)$ [2] стр. 32-52. В этой же книге автором доказано, что $P_x \geqslant x^{\frac{11}{10}}$.

Г. Полиа доказал теорему: если $a.b.c \in Z$, $a \neq 0$, $b^2-4ac \neq 0$, то $\prod(ax^2+bx+c) \to \infty$ при $x \to \infty$, где $\prod(m)$ — наибольший простой делитель m [3] стр. 86.

Предполагается, что многочлен x^2+x+41, а так же многочлены x^2+k при любом натуральном k содержит бесконечное количество простых [4].

Со сведениями о простых числах в некоторых редких последовательностях можно ознакомиться в [2] стр. 117–127.

В данной статье доказывается

Теорема 1. *Существует бесконечное множество многочленов второй степени с целыми коэффициентами, каждый из которых содержит более N простых, где N — наперед заданное натуральное число.*

Это утверждение является следствием работы [6], где используются неравенства Чебышева для $\pi(x)$, где $\pi(x)$ — число простых, не превосходящих x. Данная работа опирается лишь на расходимость ряда обратных простым числам (Эйлер) [5].

В работе [6] доказывается, что многочлен $f(x,y)=\frac{1}{2}((x+y)^2-x-3y+2)$ для целых положительных точек (x,y) пробегает весь натуральный ряд без повторения.

В дальнейшем рассматриваются многочлены от y $f(k,y)$, где k — фиксированное натуральное число.

Обозначения: $r=1,2,\ldots$.

M_r — множество многочленов $f(k,y)$, каждый из которых содержит не менее r простых.

M'_r — множество многочленов $f(k,y)$, каждый из которых содержит ровно r простых.

$p \in M_r$ означает что, в M_r существует многочлен от y $f(k,y)$, для которого при некотором значении y $f(k,y)=p$. Аналогично определяется $p \in M'_r$.

Лемма 1. *Ряд*

$$\sum_{p\in M'_r}\frac{1}{p}$$

при $r \geqslant 1$ сходится.

Доказательство. Возможны следующие случаи:

1. $M'_r=\emptyset$, где $\emptyset$ — пустое множество. Тогда полагаем, что

$$\sum_{p\in M'_r}\frac{1}{p}=0.$$

2. M'_r содержит конечное количество многочленов. В этом случае $\sum_{p\in M'_r}\frac{1}{p}$ содержит конечное количество слагаемых, поэтому ряд сходится.

3. M'_r содержит бесконечное количество многочленов, каждый из которых содержит ровно r простых. И пусть этими многочленами будут

$f(k_s,\ y)$, $s=1,\ 2,\ \ldots$, т.е. $M'_r=\{f(k_s,\ y),\ \ s=1,\ 2,\ \ldots\}$.
И пусть многочлен $f(k_s,\ y)$, $s=1,\ 2,\ \ldots$ содержит простые числа

$$f(k_s,\ y_{s1}),\ f(k_s,\ y_{s2}),\ \ldots,\ f(k_s,\ y_{sr}).$$

Таким образом

$$\sum_{p\in M'_r}\frac{1}{p}=\sum_{s=1}^{\infty}\sum_{t=1}^{r}\frac{1}{f(k_s,\ y_{st})}\quad.$$

Так как

$$\frac{1}{f(x,\ y)}<\frac{2}{x^2}\qquad\qquad x,\ y\in N$$

то

$$\sum_{s=1}^{\infty}\sum_{t=1}^{r}\frac{1}{f(k_s,\ y_{st})}<\sum_{s=1}^{\infty}\sum_{t=1}^{r}\frac{2}{k_s^2}=2r\sum_{s=1}^{\infty}\frac{1}{k_s^2}\leqslant 2r\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}.$$

Но ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ сходится. Отсюда следует что, ряд

$$\sum_{s=1}^{\infty}\sum_{t=1}^{r}\frac{1}{f(k_s,\ y_{st})}$$

сходится.

Лемма доказана. □

Доказательство теоремы.
Ясно, что

$$M_1=M'_1\cup M'_2\cup\cdots\cup M'_{2N}\cup M_{2N+1}.$$

Тогда

$$\sum_{p\in M_1}\frac{1}{p}=\sum_{p\in M'_1}\frac{1}{p}+\sum_{p\in M'_2}\frac{1}{p}+\cdots+\sum_{p\in M'_{2N}}\frac{1}{p}+\sum_{p\in M_{2N+1}}\frac{1}{p}.\tag{1}$$

Так как ряд

$$\sum_{p\in M_1}\frac{1}{p}=\sum_{p}\frac{1}{p}$$

расходится, а ряды

$$\sum_{p\in M'_1}\frac{1}{p},\ \sum_{p\in M'_2}\frac{1}{p},\ \ldots,\ \sum_{p\in M'_{2N}}\frac{1}{p}$$

по лемме сходятся, то ряд

$$\sum_{p\in M_{2N+1}}\frac{1}{p}$$

в силу равенства (1) расходится.
Но число многочленов в M_{2N+1} не может быть конечным. Если предположить обратное, то из сходимости ряда $\sum_{y=1}^{\infty}\frac{1}{f(k,\ y)}$ для каждого k следует, что ряд

$$\sum_{p\in f(k,y)}\frac{1}{p}$$

сходится. И следовательно и ряд

$$\sum_{p \in M_{2N+1}} \frac{1}{p}$$

сходится как сумма конечного количества сходящихся рядов, но это противоречит его расходимости.

M_{2N+1}– множество многочленов, каждый из которых содержит не менее $2N+1$ простых. Пусть

$$f(k,y) = \frac{1}{2}\left(y^2 + (2k-3)\,y + k^2 - k + 2\right)$$

один из этих многочленов.

Полагая $y = 2y_1 + r$; $r = 0,\ 1$ получаем многочлены от y_1:

$$f(k, 2y_1) = 2y_1^2 + (2k-3)\,y_1 + \frac{k^2 - k + 2}{2}$$

$$f(k, 2y_1 + 1) = 2y_1^2 + (2k-1)\,y_1 + \frac{k^2 + k}{2}$$

Общее число y–ов, дающих простые значения $f(k,y)$ не менее $2N+1$.

Следовательно, не менее $N+1$ значений этих y– ов или четные, или нечетные значения, т.е. один из этих многочленов $f(k,2y_1)$ или $f(k,2y_1+1)$ содержит не менее $N+1$ простых. Так как исходных многочленов бесконечно много и каждому из них соответствует многочлен второй степени с целыми коэффициентами, каждый из которых содержит не менее $N+1$ простых, то таких многочленов так же бесконечно. Теорема доказана. □

Отметим, что множества значений этих многочленов не имеют общих элементов как значения $f(k,y)$ соответствующих различным k.

Серпинский В. в [4] стр. 33 замечает, что для $x \leqslant 10\,000$ есть 842 простых числа вида x^2+1; для $x \leqslant 100000$ есть 6656 простых чисел, для $x \leqslant 180000$ их 11223. В нашей работе доказывается, что если, например, N равняется миллиарду, то существует бесконечное количество многочленов второй степени, каждый из которых содержит не менее миллиарда простых.
В заключение отметим, что аналогичная теорема может быть доказана для многочленов третьей степени, с целыми коэффициентами используя многочлен

$$f(x,y,z) = \frac{(x+y+z)^3 - 3(x+y+z)^2 + 2\,(x+y+z)}{6} - \frac{(y+z)^2 - 3y - z}{2}$$

пробегающего весь натуральный ряд без повторения для всех целых положительных точек первого квадранта пространства $Oxyz$ [7].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Диксон Л.Е. История теории чисел, Том 1. - М.: Челси, Нью-Йорк, 1952.

2. Холли К. Применения методов решета в теории чисел. - Гл. редакция физ.-мат. литературы, Москва, 1987.

3. Фельдман Н. И. Приближения алгебраических чисел.- Изд-во Московского университета, Москва, 1981.

4. Серпинский В. Что мы знаем и чего не знаем о простых числах. - Гос. издат. физ.- мат. литературы, Москва, 1963.

5. Прахар К. Распределение простых чисел. - Изд - во «Мир», Москва, 1967.

6. Ильясов И.И. К распределению простых чисел в многочленах второй степени с целыми коэффициентами» // Чебышевский сборник, 14:1 – Тула, 2013.

7. Ильясов И.И. К распределению простых чисел в многочленах третьей степени с целыми коэффициентами» // «Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения», Материалы XII Международной конференции, посвященной 80-летию профессора В. Н. Латышева – Тула, 2014.

————————————————————————————————

УДК 511.3

Граничное поведение рядов Дирихле и гипотеза Н. Г. Чудакова относительно обобщенных характеров

В. Н. Кузнецов (Россия, г. Саратов)
Саратовский государственный технический университет им. Ю. А. Гагарина
e-mail: kuznetsovvalnik@gmail.com

О. А. Матвеева (Россия, г. Саратов)
Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского
e-mail: olga.matveeva.0@gmail.com

Boundary behavior of Dirichlet series and N. G. Chudakov's hypothesis about generalized characters

V. N. Kuznetsov (Russia, Saratov)
Saratov state technical University. Yu. A. Gagarin
e-mail: kuznetsovvalnik@gmail.com
O. A. Matveeva (Russia, Saratov)
Saratov state University N. G. Chernyshevsky
e-mail: olga.matveeva.0@gmail.com

В работе [1] авторами было приведено решение известной гипотезы Н. Г. Чудакова о том, что неглавный обобщенный характер $h(n)$, то есть конечнозначная мультипликативная функция, для которой

1.$h[p] \neq 0$ почти для всех простых p;

2.$S(x) = \sum\limits_{n \leq x} h(n) = O(1)$,

является характером Дирихле.

В основе доказательства этого факта лежал результат об аналитическом продолжении как целой функции на комплексную плоскость ряда Дирихле

$$f(s) = \sum_{1}^{\infty} \frac{h(n)}{n^s}, \quad s = \sigma + it. \tag{1}$$

Этот результат был получен авторами (см.[2]) на основании аппроксимационного подхода полиномами Дирихле, который позволил воспользоваться результатами Римана относительно принципа симметрии в задаче аналитического продолжения.

Н. Г. Чудаков искал решение своей гипотезы чисто алгебраическим путем. Здесь приводится новое "более алгебраическое" решение гипотезы Н. Г. Чудакова, основанное только на изучении поведения ряда Дирихле при подходе к мнимой оси.

На этом пути был получен основной результат.

Пусть m равно произведению простых, для которых $h(p)$ равно нулю, и пусть P_m – множество простых p, таких, что $p \equiv 1(\mod m)$, а N_m – множество натуральных, порожденных множеством P_m. При данных обозначениях имеет место

Теорема 1. *Для всех $n \in N_m$ имеет место равенство*

$$h(n) = 1$$

и, тем самым, $h(n)$ – характер Дирихле по модулю m.

В основе доказательства теоремы 1 лежат следующие утверждения:

- доказано, что ряд Дирихле
$$f_1(s) = \sum_{n \in N_m} \frac{h(n)}{n^s}$$
продолжим аналитическим образом в полуплоскость $\sigma > 0$ с единственным простым полюсом в точке $s = 1$. Более того, на мнимой оси нет точек "типа полюса" , т.е. таких точек $s_0 = it_0$, для которых существует последовательность $s_n = \sigma_n + it_0$, $\sigma_n \to 0$, что $|f(s_n)| \to \infty$;
- пусть $h_0(n)$ – главный характер Дирихле по модулю m. В силу предыдущего утверждения $h_0(n)$ не может отличаться от $h(n)$ на конечном множестве простых.

Рассуждения, аналогичные тем, что приведены в работе [3], раздел 1.1, при доказательстве гипотезы Н. Г. Чудакова для главных обобщенных характеров, показывают, что $h_0(n)$ не может отличаться от $h(n)$ на бесконечном множестве простых.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. В. Н. Кузнецов, О. А. Матвеева К проблеме обобщенных характеров // Чебышевский сб. 2018. Т. 19, вып. 3. С.
2. В. Н. Кузнецов, О. А. Матвеева. Граничное поведение и задача аналитического продолжения одного класса рядов Дирихле с мультипликативными коэффициентами как целых функций на комплексную плоскость // Чебышевский сборник. 2018. Т. 19, вып. 1, С. 124–137.
3. О. А. Матвеева. Аналитические свойства определенных классов рядов Дирихле и некоторые задачи теории L-функции Дирихле: диссертация на соискание ученой степени к.ф.-м.н. — Ульяновск. 2014.

УДК 511.3

О нулях рядов Дирихле с периодическими коэффициентами

В. Н. Кузнецов (Россия, г. Саратов)
Саратовский государственный технический университет им. Ю. А. Гагарина
e-mail: kuznetsovvalnik@gmail.com

О. А. Матвеева (Россия, г. Саратов)
Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского
e-mail: olga.matveeva.0@gmail.com

On the zeros of Dirichlet series with periodic coefficients

V. N. Kuznetsov (Russia, Saratov)
Saratov state technical University. Yu. A. Gagarin
e-mail: kuznetsovvalnik@gmail.com
O. A. Matveeva (Russia, Saratov)
Saratov state University N. G. Chernyshevsky
e-mail: olga.matveeva.0@gmail.com

В работе изучается задача распределения нулей в верхней полуплоскости целых функций, определенных рядами Дирихле с периодическими коэффициентами.

В [1] были получены условия, при которых такие ряды удовлетворяют функциональному уравнению римановского типа, и как показано в [2],[3] в этом случае существует последовательность полиномов Дирихле $Q_n(s)$, нули которых в полосе : $\sigma > 0, |t| \leq T$ при $n > 2[T]$ совпадают с нулями рядов Дирихле, т.е. задача распределения нулей рядов Дирихле сводится к задаче распределения нулей полиномов Дирихле, которая изучалась в [4].

В общем случае решение задачи распределения нулей требует иного подхода. Один из таких подходов излагается в данной работе.

Известно [5], что нули рядов Дирихле с периодическими коэффициентами могут располагаться вне критической полосы. Поэтому в дальнейшем будем изучать задачу определения числа нулей, лежащих в прямоугольнике $D_{T,H} : |\sigma| \leq H, |t| \leq T$. Число таких нулей будем обозначать через $N_H(T)$.

Для решения поставленной задачи определим общий множитель $f_0(s)$ всех функций $f(s)$, определенных рядами Дирихле с непериодическими коэффициентами.

Во-первых, несложно показать, что функция $f(s)$ является конечной линейной комбинацией L – функций Дирихле.

А именно имеет место представление

$$f(s) = \frac{1}{\varphi(m)} \sum_{\chi \, mod \, m} \alpha_l \cdot L(s, \chi), \tag{1}$$

где m – период последовательности коэффициентов и суммирование рассматривается по всем характерам по модулю m.

Из представления (1) следует утверждение

Теорема 1. *Для функции $f(s)$, определенной рядом Дирихле с периодическими коэффициентами имеет место следующее представление*

$$f(s) = Q_v(s) \cdot f_0(s), \tag{2}$$

где $Q_v(s)$ полином вида

$$Q_v(s) = \sum_{1}^{\nu} \beta_k e^{(\ln k)s}, \tag{3}$$

где $\nu \leq m$, а

$$f_0(s) = \sum_{n \equiv 1 \ mod \ m} \frac{1}{n^s},$$

Нули полинома (3), лежащие в верхней полуплоскости, совпадают с нулями полинома

$$\widetilde{Q}_v(s) = \sum_{1}^{\nu} \beta_k e^{(\ln k)(\sigma - it)}. \tag{4}$$

В [4] показано, что нули полинома (4) лежат в полосе : $|\sigma| \leq H$ и их число в прямоугольнике $D_{T,H}$ удовлетворяет следующей оценке

$$n_H(T) = \frac{2\ln \nu T}{\pi} + C, \tag{5}$$

где константа C не зависит от T.

Далее, соотношение (2) имеет место и для L – функций Дирихле. Отсюда в силу известной теоремы Бэклунда [6] и оценки (5) получаем оценку для числа нулей функции $f_0(s)$, лежащих в прямоугольнике $D_{T,H}$.

Теорема 2. *Для числа нулей функции $f(s)$, лежащих в прямоугольнике $D_{T,H}$, имеет место оценка вида*

$$N_H(T) = \frac{T\ln T}{\pi} + O(T),$$

где константа в символе "O" не превосходит величины $\ln 2 + 2\ln m$.

Следствие 1. *Для числа нулей функции $f(s)$, лежащих в области : $0 \leq t \leq T, \sigma > 1$, имеет место оценка*

$$N_1(T) \leq C_1 T,$$

где $C_1 < \ln 2 + 2\ln m$.

Следствие 2. *Для любого $\varepsilon > 0$ доля числа нулей функции $f(s)$, лежащих вне ε окрестности критической прямой имеет место оценка*

$$N_\varepsilon(T) \leq C_1 T,$$

где константа C зависит от ε.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кузнецов В. Н.,Матвеева О. А. К вопросу описания рядов Дирихле с конечнозначными коэффициентами определяющих целые функции и удовлетворяющих функциональному уравнению римановского типа // Известия Саратовского ун-та. Серия Математика. Механика. Информатика. – Саратов. Изд-во Сарат. ун-та, 2011, Вып. 3, С. 21-25.

2. Матвеева О. А. О нулях полиномов Дирихле, приближающих в критичной полосе L– функции Дирихле // Чебышевский сборник – Тула: Изд-во ТВГУ, 2013, Т. 14, Вып. 2, С. 117-121.

3. Матвеева О. А. Аналитические свойства определённых классов рядов Дирихле и некоторые задачи теории L-функций Дирихле: Диссертация на соискание ученой степени кандидата физ.-мат. наук.– Ульяновск, 2014.

4. Лёвин Б. Я. Распределение корней целых функций –М. : Изд-во технико-теоретической литературы, 1956.

5. Воронин С. М. Карацуба А. А. Дзета-функция Римана. –М. : Физматлит, 1994.

6. Прахар К. Распределение простых чисел. – М.: Мир, 1967.

Value-distribution theorems for the Lerch zeta-function

A. Mincevič (Lithuania, Vilnius))
Vilnius university
e-mail: asta.mincevic@mif.vu.lt

УДК 54.32

Теоремы о распределении значений дзета-функции Лерха

А. Минцевич (Литва, г. Вильнюс)
Вильнюский университет
e-mail: asta.mincevic@mif.vu.lt

Let $\lambda \in \mathbb{R}$ and α, $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, be fixed parameters. The Lerch zeta-function $L(\lambda, \alpha, s)$ is defined, for $\sigma > 1$, by the Dirichlet series

$$L(\lambda, \alpha, s) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{e^{2\pi i \lambda m}}{(m+\alpha)^s}.$$

If the parameter λ is an integer, then $L(\lambda, \alpha, s)$ becomes the Hurwitz zeta-function

$$\zeta(s, \alpha) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(m+\alpha)^s}, \quad \sigma > 1.$$

Therefore, the function $L(\lambda, \alpha, s)$ with $\lambda \in \mathbb{Z}$ has analytic continuation to the whole complex plane, except for a simple pole at the point $s = 1$ with residue 1. If $\lambda \notin \mathbb{Z}$, then the function $L(\lambda, \alpha, s)$ is entire. The function $L(\lambda, \alpha, s)$ was introduced independently by M. Lerch and R. Lipschitz. Analytic theory of the Lerch zeta-function is given in [2].

We are interested in universality in the Voronin sense of the function $L(\lambda, \alpha, s)$, i.e., in approximation of analytic functions by shifts $L(\lambda, \alpha, s+i\tau)$ with real τ. Let $D = \{s \in \mathbb{C} : \frac{1}{2} < \sigma < 1\}$. Denote by $\mathcal{K}$ the class of compact subsets of the strip D with connected complements, and by $H(K)$ with $K \in \mathcal{K}$ the class of continuous functions on K that are analytic in the interior of K. The first universality theorem for the Lerch zeta-function was obtained in [1].

Theorem 1. *Suppose that $0 < \lambda \leqslant 1$, and α is a transcendental number. Let $K \in \mathcal{K}$ and $f(s) \in H(K)$. Then, for every $\varepsilon > 0$,*

$$\liminf_{T\to\infty} \frac{1}{T} \operatorname{meas}\left\{\tau \in [0,T] : \sup_{s\in K}\left|L(\lambda, \alpha, s+i\tau) - f(s)\right| < \varepsilon\right\} > 0.$$

We replace the requirement of the transcendence for α by a weaker condition. Define the set

$$L(\alpha) = \left\{\log(m+\alpha) : m \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}\right\}.$$

Theorem 2. *[6] Suppose that the set $L(\alpha)$ is linearly independent over the field of rational numbers $\mathbb{Q}$, and $0 < \lambda \leqslant 1$. Let $K \in \mathcal{K}$ and $f(s) \in H(K)$. Then the same assertation as in Theorem 1 is true.*

We observe that if the number α is transcendental, then the set $L(\alpha)$ is linearly independent over $\mathbb{Q}$.
In the place of shifts $L(\lambda, \alpha, s+i\tau)$, where τ is an arbitrary real number, one can consider the shifts $L(\lambda, \alpha, s+i\phi(k))$, where $\phi(t)$ is a certain function, and k runs over non-negative integers.

Universality theorems for shifts $L(\lambda,\alpha,s+i\tau)$ with arbitrary $\tau\in\mathbb{R}$ are called continuous, while with shifts $L(\lambda,\alpha,s+i\phi(k))$ they are called discrete. The simplest function $\phi(k)$ is of the type kh, $k\in\mathbb{N}_0$, with fixed $h>0$.
Define the set

$$L(\alpha,h,\pi)=\Big\{(\log(m+\alpha):m\in\mathbb{N}_0),\frac{2\pi}{h}\Big\},\quad h>0,$$

and denote by $\#A$ the cardinality of the set A. Then the following discrete universality theorem for the function $L(\lambda,\alpha,s)$ is valid [3].

Theorem 3. *Suppose that the set $L(\alpha,h,\pi)$ is linearly independent over the field of rational numbers $\mathbb{Q}$, and $0<\lambda\leqslant 1$. Let $K\in\mathcal{K}$ and $f(s)\in H(K)$. Then, for every $\varepsilon>0$,*

$$\liminf_{N\to\infty}\frac{1}{N+1}\#\Big\{0\leqslant k\leqslant N:\sup_{s\in K}\Big|L(\lambda,\alpha,s+ikh)-f(s)\Big|<\varepsilon\Big\}>0.$$

Moreover, the limit

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N+1}\#\Big\{0\leqslant k\leqslant N:\sup_{s\in K}\Big|L(\lambda,\alpha,s+ikh)-f(s)\Big|<\varepsilon\Big\}>0$$

exists for all but at most countably many $\varepsilon>0$.

The joint universality for Lerch zeta-functions was studied by various authors. Usually, it was required that the parameters $\alpha_1\dots,\alpha_r$ were algebraically independent over $\mathbb{Q}$. We replace this requirement by a weaker one [5]. Define the set

$$L(\alpha_1,...,\alpha_r)=\Big\{(\log(m+\alpha_1):m\in\mathbb{N}_0),...,(\log(m+\alpha_r):m\in\mathbb{N}_0)\Big\}.$$

Theorem 4. *Suppose that the set $L(\alpha_1,...,\alpha_r)$ is linearly independent over $\mathbb{Q}$. For $j=1,\dots,r$, let $K_j\in\mathcal{K}$, $f_j(s)\in H(K_j)$, and $0<\lambda\leqslant 1$. Then, for every $\varepsilon>0$,*

$$\liminf_{T\to\infty}\frac{1}{T}\,\mathrm{meas}\Big\{\tau\in[0,T]:\sup_{1\leqslant j\leqslant r}\sup_{s\in K_j}\Big|L(\lambda_j,\alpha_j,s+i\tau)-f_j(s)\Big|<\varepsilon\Big\}>0.$$

Moreover, the limit

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\,\mathrm{meas}\Big\{\tau\in[0,T]:\sup_{1\leqslant j\leqslant r}\sup_{s\in K_j}\Big|L(\lambda_j,\alpha_j,s+i\tau)-f_j(s)\Big|<\varepsilon\Big\}>0.$$

exists for all but at most countably many $\varepsilon>0$.

Theorem 4 has a discrete analogue. Define the set

$$L(\lambda_1,...,\lambda_r;h,\pi)=\Big\{(\log(m+\alpha_1:m\in\mathbb{N}_0),...,(\log(m+\alpha_r:m\in\mathbb{N}_0),\frac{2\pi}{h}\Big\}.$$

Then the following theorem is true [4].

Theorem 5. *Suppose that the set $L(\alpha_1,\dots,\alpha_r;h,\pi)$ is linearly independent over $\mathbb{Q}$. For $j=1,...,r$, let $K_j\in\mathcal{K}$, $f_j(s)\in H(K_j)$, and $0<\lambda_j\leqslant 1$. Then, for every $\varepsilon>0$,*

$$\liminf_{N\to\infty}\frac{1}{N+1}\#\Big\{0\leqslant k\leqslant N\ \sup_{1\leqslant j\leqslant r}\sup_{s\in K_j}\Big|L(\lambda_j,\alpha_j,s+ikh)-f_j(s)\Big|<\varepsilon\Big\}>0.$$

Moreover, the limit

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N+1}\#\Big\{0\leqslant k\leqslant N\ \sup_{1\leqslant j\leqslant r}\sup_{s\in K_j}\Big|L(\lambda_j,\alpha_j,s+ikh)-f_j(s)\Big|<\varepsilon\Big\}>0$$

exists for all but at most countably many $\varepsilon>0$.

Universality theorems for the function $L(\lambda, \alpha, s)$ imply its functional independence. This problem comes back to Hilbert, and the functional independence for the Riemann zeta-function was obtained by S.M.Voronin. We present the following theorem [6].

Theorem 6. *Suppose that the set $L(\alpha)$ is linearly independent over $\mathbb{Q}$, and $0 < \lambda \leqslant 1$. For $j = 0, ..., n$, let $V_j : \mathbb{C}^k \to \mathbb{C}$ be a continuous function , and let*

$$\sum_{j=0}^{n} s^j V_j \Big(L(\lambda, \alpha, s), L'(\lambda, \alpha, s), ..., L^{(k-1)}(\lambda, \alpha, s) \Big) = 0$$

identically for s. Then $V_j \equiv 0$ for $j = 0, 1, ..., n$.

REFERENCES

1. Laurinčikas A., The universality of the Lerch zeta-function // Lith. Math.J. 1997. Vol 37. P. 275-280.

2. Laurinčikas A., Garunkštis R., The Lerch zeta-function. — Kluwer, Dordrecht, 2002.

3. Laurinčikas A., Mincevič A.,Discrete universality theorems for the Lerch zeta-function // Anal. Probab. Methods Number Theory, A. Dubickas et el (Eds), Vilnius University, Vilnius, 2017, P. 87-95.

4. Laurinčikas A., Mincevič A., Joint discrete universality for Lerch zeta-functions // Chebysh. sb. 2018. Vol. 19(1). P. 135-151.

5. Mincevič A., Šiaučiunas D., Joint universality theorems for Lerch zeta-functions // Šiauliai Math, Semin. 2017. Vol. 12(20). P. 31-47.

6. Mincevič A., Vaiginytė A., Remarks on the Lerch zeta-function //Šiauliai Math. Semin. 2016. Vol. 11(19). P. 65-73.

———————————————————————————————

УДК 511.3

О некоторых диофантовых уравнениях, неразрешимость которых эквивалентна гипотезе Римана

Б. З. Мороз (Россия, г. Москва)
МФТИ (Национальный исследовательский университет)
e-mail: oroz.bb@mipt.ru

On some Diophantine equations, undecidability which equivalent to the Riemann hypothesis

B. Z. Moroz (Russia, Moscow)
MFTI (National research University)
e-mail: oroz.bb@mipt.ru

Как известно, гипотеза Римана эквивалентна неразрешимости некоторых диофантовых уравнений (ср. [1], [2]); одно из таких уравнений было построено в дипломной работе [3] (ср. [4]). Следуя недавней работе Ю. В. Матиясевича [5], А. А. Норкин [6] построил сравнительно простое диофантово уравнение, неразрешимость которого эквивалентна гипотезе Римана. Я расскажу о его работе.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. M. Davis, Yu. Matijasevič, and Ju. Robinson, Hilbert's tenth problem. Diophantine equations: positive aspects of a negative solution, *Proceedings of Symposia in Pure Mathematics,* 28 (1976), 323-378.
2. Ю. В. Матиясевич, *Десятая проблема Гильберта,* Москва, Наука, 1993.
3. J. M. Hernandez Caceres, The Riemann Hypothesis and Diophantine equations, Master's Thesis Mathematics, *Mathematical Institute, University of Bonn,* May 2, 2018.
4. Б. З. Мороз, Гипотеза Римана и диофантовы уравнения, Препринт Санкт - Петербургского математического общества № 3 , 2018.
5. Ю. В. Матиясевич, Гипотеза Римана как чётность специальных биномиальных коэффициентов, *Чебышевский сборник,* 19 (2018), вып. 3, 46-60.
6. А. А. Норкин, Об одном диофантовом уравнении, неразрешимость которого эквивалентна гипотезе Римана, Дипломная работа на звание бакалавра, МФТИ, 2019.

———————————————————————————

УДК 511.3

Об одном классе нелинейных диофантовых неравенств с простыми числами

А. П. Науменко (Россия, г. Москва)
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
ОАО "ИнфоТеКС"
e-mail: naumenko.anton90@gmail.com

On the one class of nonlinear diophantine inequalities with primes

A. P. Naumenko (Russia, Moscow)
Lomonosov Moscow State University
JSC "InfoTeCS"
e-mail: naumenko.anton90@gmail.com

Со времен Римана известны формулы, связывающие суммы по простым числам с суммами по нетривиальным нулям дзета-функции Римана. Такие формулы называются явными. Одной из самых известных явных формул (см., например, [1]) является равенство:

$$\psi(x) = \sum_{n\le x} \Lambda(n) = x - \sum_{|Im\rho|\le T} \frac{x^\rho}{\rho} + O\left(\frac{x\ln^2 x}{T}\right),$$

где $2 \le T \le x$, $\rho = \beta + i\gamma$ – нули $\zeta(s)$ в критической полосе.

Оценки вида

$$N(\sigma,T) \ll T^{2\lambda(1-\sigma)} \ln^c T, c \ge 1,$$

где λ и c – константы, называются плотностными теоремами. Наилучшим современным значением λ на всем промежутке $1/2 \le \sigma < 1$ является $\lambda = \frac{6}{5}$ (см. [2]).

Мы будем использовать следующие плотностные теоремы (см. [3], [6], [8]):

$$N(\sigma,T) \ll T^{167(1-\sigma)^{3/2}} \ln^{16} T, \quad 9/10 \le \sigma \le 1. \tag{1}$$

$$N(\sigma,T) \ll T^{\frac{53}{40}(1-\sigma)+\varepsilon}, \quad 0.9524... = \frac{15891382}{16684097} \le \sigma \le 1-10^{-6}. \tag{2}$$

$$N(\sigma,T) \ll T^{\frac{21(1-\sigma)}{151\sigma-128}+\varepsilon}, \quad \frac{237}{250} \le \sigma \le \frac{953}{1000}. \tag{3}$$

$$N(\sigma,T) \ll T^{\frac{4(1-\sigma)}{2\sigma+1}+\varepsilon}, \quad 17/18 \le \sigma \le 1. \tag{4}$$

$$N(\sigma,T) \ll T^{\frac{24(1-\sigma)}{30\sigma-11}+\varepsilon}, \quad 0.89018... = 155/174 \le \sigma \le 17/18. \tag{5}$$

$$N(\sigma,T) \ll T^{\frac{192(1-\sigma)}{756\sigma-551}+\varepsilon}, \quad 0.7837... = \frac{743}{948} \le \sigma \le \frac{503}{564} = 0.8918... \tag{6}$$

$$N(\sigma,T) \ll T^{\frac{3(1-\sigma)}{2\sigma}+\varepsilon}, \quad 4/5 \le \sigma \le 1. \tag{7}$$

$$N(\sigma,T) \ll T^{\frac{6(1-\sigma)}{5\sigma-1}+\varepsilon}, \quad 13/17 \le \sigma \le 1. \tag{8}$$

$$N(\sigma,T) \ll T^{\frac{3(1-\sigma)}{7\sigma-4}+\varepsilon}, \quad 3/4 \le \sigma \le 13/17. \tag{9}$$

где ε – положительное число, $T > T_0(\varepsilon)$.

Также нам потребуется теорема [4], которая на данный момент является наилучшим результатом о "близости" простого числа к произвольному натуральному:

Теорема 1. *Пусть ε – произвольное положительное число. Если $H > N^{21/40+\varepsilon}$, то неравенство*

$$|p-N| \le H, \tag{10}$$

разрешимо в простых числах для любого $N > N_0(\varepsilon)$. Для числа решений неравенства (10) справедлива оценка $J(N,H) \gg \frac{H}{\ln N}$.

В сороковых годах двадцатого века Ю. В. Линник разработал новую технику решения арифметических задач с простыми числами, основанную на явных формулах и плотностных теоремах. Данная техника получила название плотностной. Плотностная техника особенно эффективна при решении задач о попадании простых чисел в короткие промежутки.

В 2012 году в работе [5] Н. Т. Ча и С. А. Гриценко при помощи плотностной техники получили следующие результаты.

Теорема 2. *Если $H > \sqrt{N}\exp(\ln^{-0.1} N)$, то неравенство*

$$|p_1^2 + p_2^2 - N| \le H,$$

разрешимо в простых числах p_1 и p_2.

Теорема 3. *Пусть λ – константа из плотностной теоремы. Если*

$$H > N^{(1-\lambda^{-1})(1-(2\lambda)^{-1})}\exp(\ln^{0.8} N),$$

то неравенство

$$|p_1 + p_2 - N| \le H,$$

разрешимо в простых числах p_1 и p_2.

В 2018 году автором с использованием плотностных теорем А. Ивича [3] получено следующее утверждение [7].

Теорема 4. *Пусть* ε *– произвольное положительное число. Если* $H > N^{\frac{31}{64}+\varepsilon}$, *то неравенство*

$$|p_1^2 + p_2^2 - N| \le H,$$

разрешимо в простых числах p_1 *и* p_2 *для любого* $N > N_0(\varepsilon)$.

С использованием метода экспоненциальных пар [3], [6] указанный результат был уточнен автором. Показано [8], что в теореме 4 возможен выбор
$H > N^{\frac{31}{64}-\frac{1}{300}+\varepsilon}$.

Основным результатом данного доклада является следующая теорема.

Теорема 5. *Пусть* ε *– произвольное положительное число,* $c \ge 1$ *– действительное число. Тогда неравенство*

$$|p_1^c + p_2^c - N| \le N^{\kappa(c)+\varepsilon},$$

разрешимо в простых числах p_1, p_2 *для любого* $N > N_0(\varepsilon)$ *при следующих условиях:*

$$\kappa(c) \ge 1 - \frac{357}{320c} + \frac{19}{128c^2}, \quad \text{если} \quad 1 \le c \le \frac{779}{422},$$

$$\kappa(c) \ge 1 - \frac{7359}{6880c} + \frac{437}{6880c^2}, \quad \text{если} \quad \frac{779}{422} < c \le \frac{171}{79},$$

$$\kappa(c) \ge 1 - \frac{23}{20c} + \frac{19}{80c^2}, \quad \text{если} \quad \frac{171}{79} < c \le \frac{38}{17},$$

$$\kappa(c) \ge 1 - \frac{919}{540c} + \frac{361}{2160c^2}, \quad \text{если} \quad \frac{38}{17} < c \le \frac{323}{50},$$

$$\kappa(c) \ge 1 - \frac{357}{320c} + \frac{19}{128c^2}, \quad \text{если} \quad \frac{323}{50} < c \le \frac{13863559}{1368538} = 10.13...,$$

$$\kappa(c) \ge 1 - \frac{926419}{1447332c} + \frac{1281911}{14473320c^2}, \quad \text{если} \quad \frac{13863559}{1368538} < c \le \frac{6213}{88} = 70.62...,$$

$$\kappa(c) \ge 1 - \frac{17024423}{25280c} + \frac{296457}{202240c^2}, \quad \text{если} \quad c > \frac{6213}{88}.$$

Замечание 1. *При* $c = 1$ *из Теоремы 5 следует разрешимость неравенства*
$|p_1 + p_2 - N| \le H$ *при* $H \gg N^{7/80+\varepsilon}$ *для любого* $N > N_0(\varepsilon)$, *что уточняет результат Теоремы 3.*

Замечание 2. *При каждом фиксированном* $\frac{95}{74} < c \le \frac{38}{17}$ *результат теоремы 5 может быть несколько уточнен за счет выбора экспоненциальной пары, соответствующей данному* c.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Карацуба А. А. Основы аналитической теории чисел — М.: Наука, 1983.
2. Huxley M. N. On the difference between consequtive primes // Invent. Math. - 1972. - 15. - P.164-170.
3. A. Ivic, The Riemann zeta-function — John Wiley and Sons, New York 1985, XVI + 517 pp.

4. R. C. Baker, G. Harman, J. Pintz. The difference between consecutive primes, II, Proceeding of the London Mathematical Society, vol. 83:3, 2001.

5. С. А. Гриценко, Нгуен Тхи Ча, О диофантовых неравенствах с простыми числами // Научные ведомости БелГУ. Серия: Математика, Физика, 2012. 23(142). Вып. 29

6. Ivic A. A note on the zero-density estimates for the zeta-function // Arch. Math. 1979. Vol. 33. P. 155–164.

7. Науменко А. П. О некоторых нелинейных диофантовых неравенствах с простыми числами // Математические заметки. 2019. Том 105, вып. 6. С. 943–948.

8. Науменко А. П. О приближении действительных чисел суммами двух квадратов простых чисел // Вестник Московского университета. Серия 1. Математика. Механика, 2019. Номер 5. (принято к печати)

———————————————————————————————

УДК 511.35

О поведении некоторых сумм вполне мультипликативных функций

О. А. Петрушов (Россия, Москва)
ИЦ "Радис"
e-mail: olegAP86@yandex.ru

On the behavior of some completely multiplicative function sums

O. A. Petrushov (Russia, Moscow)
RC "Radis"
e-mail: olegAP86@yandex.ru

В 2010 П. Борвейн, С. К. К. Чой и М. Кунс [1] изучали вполне мультипликативные Функции, которые принимают значения в {-1,1}. Пусть A–подмножество множества всех простых чисел. Пусть $\Omega_A(n)$–количество простых множителей n из A с учётом кратности. Let

$$\lambda_A(n) = (-1)^{\Omega_A(n)},$$

$$L_A(x) = \sum_{n \leqslant x} \lambda_A(n).$$

Они доказали следующую теорему. Пусть

$$\sum_{p<x; p\in A} \frac{\log p}{p} = \frac{1-\kappa}{2}\log x + O(1)$$

и $-1 \leqslant \kappa \leqslant 1$. Если $0 < \kappa \leqslant 1$, то

$$L_A(x) = (1+o(1))c_\kappa \kappa x(\log x)^{\kappa-1}$$

где

$$c_\kappa = \frac{1}{\Gamma(\kappa+1)}\prod_p (1-\frac{1}{p})^\kappa (1-\frac{\lambda_A(p)}{p})^{-1},$$

в частности
$$R_A = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} L_A(n) = \prod_{p\in A} \left(\frac{p-1}{p+1}\right)$$
if $\kappa = 1$ и $R_A = 0$ if $-1 \leqslant \kappa < 1$.

Мы рассматриваем случай $R_A = 0$. Мы доказываем следующие теоремы

Пусть $\alpha(n)$ вполне мультипликативная функция, удовлетворяющая $\alpha(p) = \pm 1$ за исключением конечного множества простых, где $\alpha(p) = 0$

$$A_0(x) = \sum_{n<x} \frac{\alpha(n)}{\sqrt{n}}$$

$$B_0(x) = \sum_{p<x} \frac{\alpha(p)}{\sqrt{p}}$$

Теорема 1. *Пусть ряд* $\sum_p \frac{\alpha(p)}{\sqrt{p}}$ *сходится. Тогда для некоторого* $C > 0$

$$\overline{\lim_{x\to+\infty}} \frac{A_0(x)}{\sqrt{\ln x}} \geqslant C, \tag{1}$$

$$\underline{\lim_{x\to+\infty}} \frac{A_0(x)}{\sqrt{\ln x}} \leqslant C. \tag{2}$$

Теорема 2. *Пусть* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(n)}{\sqrt{n}}$ *сходится. Тогда*

$$\overline{\lim_{x\to+\infty}} \frac{B_0(x)}{\ln\ln x} \geqslant -1/2, \tag{3}$$

$$\underline{\lim_{x\to+\infty}} \frac{B_0(x)}{\ln\ln x} \leqslant -1/2. \tag{4}$$

Таким образом, при $\alpha(n) = \pm 1$ ряды $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(n)}{\sqrt{n}}$ и $\sum_p \frac{\alpha)p)}{sqrtp}$ не могут сходиться одновременно.

Из этих теорем получаем примеры

Следствие 1. *Пусть* p_n*–*n*-е простое число. Пусть* $\alpha(n)$ *вполне мультипликативная функция, удовлетворяющая равенствам*

$$\alpha(p_n) = (-1)^n.$$

. Тогда существует $C > 0$ *такое что*

$$\overline{\lim_{x\to+\infty}} \frac{\sum_{n<x} \frac{\alpha(n)}{\sqrt{n}}}{\sqrt{\ln x}} \geqslant C \tag{5}$$

$$\underline{\lim_{x\to+\infty}} \frac{\sum_{n<x} \frac{\alpha(n)}{\sqrt{n}}}{\sqrt{\ln x}} \leqslant C \tag{6}$$

Следствие 2. *Пусть* $\chi(n)$*–неглавный характер Дирихле, принимающий действительные значения. Пусть* $L(s,\chi) \neq 0$ *для* $s \geqslant 1/2$*. Тогда*

$$\overline{\lim_{x\to+\infty}} \frac{\sum_{p<x} \frac{\chi(p)}{\sqrt{p}}}{\ln\ln x} \geqslant -1/2, \tag{7}$$

$$\underline{\lim_{x\to+\infty}} \frac{\sum_{p<x} \frac{\chi(p)}{\sqrt{p}}}{\ln\ln x} \leqslant -1/2. \tag{8}$$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Borwein P., Choi Stephen K. K., Coons M. // Completely Multiplicative Functions Taking Values in {-1,1} , Transactions of the American Mathematic Society, 2010, Том 362,1(65). С. 6279–6291

———————————————————————————

УДК 511.6

О поиске S-единиц с нормированиями второй степени в гиперэллиптических полях

Г. В. Федоров (Россия, г. Москва)
МГУ имени М.В. Ломоносова, НИИСИ РАН
e-mail: fedorov@mech.math.msu.su

On the search for S-units with second degree valuations in hyperelliptic fields

G. V. Fedorov (Moscow, Russia)
Moscow State University, SRISA/NIISI RAS
e-mail: fedorov@mech.math.msu.su

Одной из актуальных современных проблем алгебры и теории чисел является проблема существования и построения фундаментальных S-единиц в гиперэллиптических полях. Эта проблема имеет большую историю, восходящую к Абелю и Чебышеву.

В статье [1] предложены два метода для поиска S-единиц в гиперэллиптических полях: метод матричной линеаризации и метод функциональных непрерывных дробей. Метод матричной линеаризации имеет общую природу и применим к произвольному набору нормирований S. Метод непрерывных дробей имеет более эффективное применение для множеств S, состоящих из бесконечного нормирования и нормирования степени один. Опираясь на метод непрерывных дробей в статьях [3]-[9] была глубоко изучена проблема существования и построения нетривиальных S-единиц в гиперэллиптических полях в случае, когда множество S состоит из двух линейных нормирований. Однако, в статье [1] для S, состоящего из бесконечного нормирования и нормирования степени два, был построен контрпример для которого метод непрерывных дробей в текущем виде теряет свою эффективность.

Для случая двух линейных нормирований в статьях [8] и [10] был представлен новый геометрический метод, основанный на последовательном построении специальных дивизоров для заданного элемента гиперэллиптического поля. Многочлены Мамфорда этой последовательности дивизоров оказываются тесно связанными с непрерывной дробью рассматриваемого элемента.

Рассматрим проблему существования и построения фундаментальных S-единиц в гиперэллиптических полях для множеств S более общего вида. Наиболее важным является случай, когда множество $S = S_h$ состоит из двух сопряжённых нормирований, связанных с неприводимым многочленом h второй степени. В статье [2] нами впервые найдены методы поиска и построения фундаментальных S_h-единиц в гиперэллиптических полях сравнимые по эффективности с методами для двух линейных нормирований. Получить существенные продвижения удалось благодаря тому, что в проблеме существования и построения фундаментальных

S-единиц впервые была применена теория обобщенных функциональных непрерывных дробей в совокупности с геометрическим подходом к проблеме кручения в якобиевых многообразиях гиперэллиптических кривых. Основные результаты статьи [2] были получены путем обобщения методов статьи [8] для дивизоров, обобщенных непрерывных дробей и S_h-единиц, связанных с нормированиями второй степени.

Пусть K — поле характеристики отличной от 2. Рассмотрим неприводимый многочлен $h \in K[x]$, $\deg h = 2$, и свободный от квадратов многочлен $f \in K[x]$, $\deg f = 2g+1$, $g \geqslant 2$, такой, что нормирование v_h поля $K(x)$ имеет два неэквивалентных продолжения v_h^- и v_h^+ на гиперэллиптическое поле $L = K(x)(\sqrt{f})$. Обозначим $\mathrm{Div}(L)$ — группу K-дивизоров поля L. Инволюция i поля L, действуйющая $i : \sqrt{f} \to -\sqrt{f}$, $i^2 = \mathrm{id}$, может быть естественным образом определена на группе дивизоров $\mathrm{Div}(L)$ поля L. Бесконечное нормирование v_∞ имеет единственное продолжение на поле L, эффективный дивизор, соответствующий бесконечному нормированию поля L, обозначим $\infty \in \mathrm{Div}(L)$. Обозначим $D_h \in \mathrm{Div}(L)$ — эффективный дивизор, соответствующий нормированию v_h^-.

Пусть элемент $\alpha \in L$ имеет вид

$$\alpha = \frac{\sqrt{f}+V}{U}, \tag{1}$$

где

$$U, V \in K[x], \quad U \cdot h \mid f - V^2, \quad g-1 \leqslant \deg U \leqslant g, \quad \deg V \leqslant \deg U + 1. \tag{2}$$

Определим

$$R = \frac{f-V^2}{U\cdot h}, \quad a = [\alpha]_h^-, \quad W = aU - V, \quad T = \frac{f-W^2}{U\cdot h}, \quad \beta = \frac{\sqrt{f}+W}{T}. \tag{3}$$

По построению непрерывной дроби имеем $\alpha_1(\alpha_0 - a_0) = h$, а с другой стороны оказывается, что $\beta(\alpha - a) = h$. Из того, что $a = a_0$ следует, что $\alpha_1 = \beta$, то есть элементы α_0 и α_1 имеют одинаковый вид:

$$\alpha_j = \frac{\sqrt{f}+V_{j-1}}{U_j}, \ j = \overline{0,1}, \tag{4}$$

где

$$V_{-1} = V, \ U_{-1} = R, \ U_0 = U, \ V_0 = W, \ U_1 = T. \tag{5}$$

Продолжая рассуждать аналогично и далее для $j \in \mathbb{Z}$, $j \geqslant -1$, получаем однозначно определенные многочлены $U_j, V_j \in K[x]$, $g-1 \leqslant \deg U_j \leqslant g$, $\deg V_j \leqslant g+1$, $\max(2g+1, 2\deg V_j) = \deg U_j + 2 + \deg U_{j+1}$, и соответствующие им эффективные дивизоры $D_j \in \mathrm{Div}(L)$, для которых при $j \geqslant -1$ справедливы следующие формулы:

$$\alpha_{j+1} = \frac{V_j + \sqrt{f}}{U_{j+1}}, \quad f - V_j^2 = U_j \cdot h \cdot U_{j+1}, \tag{6}$$

$$a_{j+1} = [\alpha_{j+1}]_h^-, \quad V_{j+1} = a_{j+1}U_{j+1} - V_j, \tag{7}$$

$$s_{j+1} = v_h(U_{j+1}) = -v_h(a_{j+1}) = -v_h^-(\alpha_{j+1}), \tag{8}$$

$$(U_j) = D_j + iD_j + s_j\big(D_h + iD_h\big) - 2\deg U_j \cdot \infty, \tag{9}$$

$$(V_j - \sqrt{f}) = D_j + (s_j + s_{j+1} + 1)D_h + iD_{j+1} - \max(2g+1, 2\deg V_j)\cdot\infty. \tag{10}$$

Таким образом, построена непрерывная дробь вида

$$a_0 + \cfrac{h}{a_1 + \cfrac{h}{a_2 + \cdots}} \tag{11}$$

Теорема 1. *Пусть* $s_0 = [g/2]$, $U = h^{s_0}$, $V = h^{s_0} \cdot [\sqrt{f} h^{-s_0}]_h^-$ *и элемент* $\alpha \in L$ *имеет вид* (1). *Пусть справедливы построения* (3), (4)-(5) *и* (6)-(10) *для* $j \in \mathbb{N}_0$. *Тогда следующие условия эквивалентны*

1. *найдется минимальный номер* $n \in \mathbb{N}$ *такой, что* $D_n = D_0$*;*
2. *найдется минимальный номер* $n \in \mathbb{N}$ *такой, что* $V_n = V_0$ *и* $U_n = cU_0$ *для некоторой постоянной* $c \in K^*$*;*
3. *класс дивизора* $(D_h - 2\infty)$ *имеет конечный порядок* m *в группе классов дивизоров* $\Delta^\circ(L)$*;*
4. *класс дивизора* $(D_h - iD_h)$ *имеет конечный порядок* m_h *в группе классов дивизоров* $\Delta^\circ(L)$*;*
5. *в гиперэллиптическом поле* L *существует фундаментальная* S_h*-единица степени* m_h*;*
6. *непрерывная дробь элемента* α *типа* (11) *периодическая с длиной периода* n *или* $2n$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Беняш-Кривец В. В., Платонов В. П. Группы S-единиц в гиперэллиптических полях и непрерывные дроби // Мат. сборник. 2009. Т. 200, №1. С. 15-44.
2. Федоров Г. В. Периодические непрерывные дроби и S-единицы с нормированиями второй степени в гиперэллиптических полях // Чебышевский сб. 2018. Т. 19, №3.
3. Платонов В. П., Федоров Г. В. О проблеме периодичности непрерывных дробей в гиперэллиптических полях // Матем. сб. 2018. Т. 209, №4. С. 54-94.
4. Платонов В. П. Теоретико-числовые свойства гиперэллиптических полей и проблема кручения в якобианах гиперэллиптических кривых над полем рациональных чисел // УМН. 2014. Т. 69, №1(415). С. 3-38.
5. Платонов В. П., Петрунин М. М. Группы S-единиц и проблема периодичности непрерывных дробей в гиперэллиптических полях // Тр. МИАН. 2018. Т. 302. С. 354-376.
6. Платонов В. П., Федоров Г. В. О периодичности непрерывных дробей в гиперэллиптических полях // ДАН. 2017. Т. 474, №5. С. 540-544.
7. Платонов В. П., Федоров Г. В. О периодичности непрерывных дробей в эллиптических полях // ДАН. 2017. Т. 475, №2. С. 133-136.
8. Платонов В. П., Жгун В. С., Федоров Г. В. Непрерывные дроби в гиперэллиптических полях и многочлены Мамфорда // ДАН. 2016. Т. 471, №6. С. 640-644.
9. Платонов В. П., Федоров Г. В., S-единицы и периодичность непрерывных дробей в гиперэллиптических полях // ДАН. 2015. Т. 465, №5. С. 537-541.
10. Жгун В. С., Обобщенные якобианы и непрерывные дроби в гиперэллиптических полях // Чебышевский сборник. 2017. Т. 18, №4. С. 208-220.

УДК 511.325

Нули производной функции Харди

Ш. А. Хайруллоев (Таджикистан, г. Душанбе)
Институт математики имени А.Джураева Академии наук Республики Таджикистан
e-mail: shamsullo@rambler.ru

The zeros of the derivative of the function Hardy

Sh. A. Khayrulloev (Tajikistan, Dushanbe)
A.Juraev Institute of Mathematics, Academy of Sciences the Republic of Tajikistan
e-mail: shamsullo@rambler.ru

Функция Харди $Z(t)$ задается равенством

$$Z(t) = e^{i\theta(t)}\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right), \quad e^{i\theta(t)} = \pi^{-\frac{it}{2}}\Gamma\left(\frac{1}{4}+\frac{it}{2}\right)\left|\Gamma\left(\frac{1}{4}+\frac{it}{2}\right)\right|^{-1}$$

и принимает вещественные значения при вещественных значениях t, и вещественные нули $Z(t)$ являются нулями $\zeta(s)$, лежащими на критической прямой. Одним из вопросов относительно этих нулей является вопрос о величине промежутка, на котором заведомо лежит нуль функции $Z(t)$. Существует гипотеза о том, что промежуток $(T, T+H)$, при $H = T^{\varepsilon}$, $\varepsilon > 0$ – сколь угодно малое фиксированное число, содержит нуль функции $Z(t)$. В настоящее время эта гипотеза не доказана.

Первым результатом о нулях дзета-функции Римана $\zeta(s)$ на критической прямой является теорема Г.Харди [1]. В 1914 г. он доказал, что $\zeta(1/2+it)$ *имеет бесконечно много вещественных нулей.* Затем Харди и Литтлвуд [2] в 1921 г. доказали, что промежуток $(T, T+H)$ при $H \geqslant T^{1/4+\varepsilon}$ содержит нуль нечетного порядка $\zeta(1/2+it)$. Ян Мозер [3] в 1976 г. показал, что это утверждение имеет место при $H \geqslant T^{1/6}\ln^2 T$. В 1981 г. А.А.Карацуба [4] доказал теорему Харди-Литтлвуда уже при $H \geqslant T^{5/32}\ln^2 T$.

А.А.Карацуба, наряду с задачей о соседних нулях функции Харди, рассмотрел более общую задачу о соседних нулях функции $Z^{(n)}(t)$. Он показал, что с увеличением n длина промежутка, на котором заведомо лежит нуль $Z^{(n)}(t)$, уменьшается и доказал следующее: *если n–натуральное число, $T \geqslant T_0(n) > 0$, $H \geqslant cT^{1/(6n+6)}\ln^{2/(n+1)} T$, $c = c(n) > 0$, тогда промежуток $(T, T+H)$ содержит нуль нечетного порядка функции $Z^{(n)}(t)$* [4].

В работе [5] найдена нижняя грань длины промежутка критической прямой, в котором содержится нуль нечетного порядка дзета-функции, и она выражена через константу Ранкина, то есть доказана следующая

Теорема 1. *Пусть $\mathcal{P}$ множество всех экспоненциальных пар (k, l), отличных от $(1/2, 1/2)$, и*

$$\theta_1(k; l) = \frac{l}{0.5-k}.$$

Тогда справедливо соотношение

$$\inf_{(k,l)\in\mathcal{P}} \theta_1(k; l) = R+1,$$

где $R = 0.8290213568591335924092397772831120\ldots$ – постоянная Ранкина.

Полученный результат в рамках данного метода является окончательным.

В работе [6] задача о величине промежутка критической прямой, в котором содержится нуль нечетного порядка функции $Z^{(n)}(t)$, $n \geqslant 1$, сведена к проблеме отыскания экспоненциальных пар для оценки специальных тригонометрических сумм, то есть доказана

Теорема 2. *Пусть (k,l)– произвольная экспоненциальная пара, n– целое неотрицательное число, $c=c_0(n)>0$– постоянное число, $T\geq T_0(n)>0$,*

$$\delta_n(k;l)=\frac{l+n}{0.5-k+n},\qquad \theta_n(k;l)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2-\delta_n^{-1}(k;l)}\right).$$

Тогда при $H\geq cT^{\theta_n(k;l)}(\ln T)^{\frac{2}{n+1}}$ промежуток $(T,T+H)$ содержит нуль нечетного порядка функции $Z^{(n)}(t)$.

Заметим, что теорема А.А.Карацубы является следствием теоремы 2, при

$$(k,l)=\left(\frac{1}{6},\frac{2}{3}\right)=AB(0,1),\quad \delta_n\left(\frac{1}{6},\frac{2}{3}\right)=1+\frac{1}{3n+1},\quad \theta_n\left(\frac{1}{6},\frac{2}{3}\right)=\frac{1}{6n+6}.$$

В работе [7] получен новый результат для величин $\delta_n(k;l)$ и $\theta_n(k;l)$ при следующих экспоненциальных парах

$$(k,l)=\left(\frac{13}{106},\frac{75}{106}\right)=ABA^2BA^2B(0,1),$$

то есть доказано, что имеет место теорема 2 при

$$\delta_n\left(\frac{13}{106},\frac{75}{106}\right)=1+\frac{35}{40+106n},\quad \theta_n\left(\frac{13}{106},\frac{75}{106}\right)=\frac{35}{220+212n},\quad n\in N.$$

В настоящей работе автору удалось улучшить результат работы [7], что уточняет соответствующие результаты А.А.Карацубы при любом натуральном числе n.

Справедливо следующее утверждение

Теорема 3. *Пусть $T\geq T_0>0$, $H\geq cT^{\text{æ}_n}\ln T$,*

$$\text{æ}_n=\frac{1469}{9264+8876n},\quad c=c_0>0,\quad n\in N.$$

Тогда промежуток $(T,T+H)$ содержит нуль нечетного порядка функции $Z^{(n)}(t)$

Отметим, что æ_n получается при следующих экспоненциальных парах:

$$(k,l)=\left(\frac{525}{4438},\frac{3163}{4438}\right)=ABA^2BA^2BABA^2BA^2B(0,1),$$

$$\delta_n\left(\frac{525}{4438},\frac{3163}{4438}\right)=1+\frac{1469}{1694+4438n},$$

$$\theta_n\left(\frac{525}{4438},\frac{3163}{4438}\right)=\frac{1469}{9264+8876n}=\text{æ}_n.$$

Полученный результат

$$\text{æ}_n=\frac{1469}{9264+8876n}=\frac{1}{6+6n}-\frac{225+31n}{12(1+n)(2316+2219n)}$$

является уточнением оценок работы [7] и теоремы А.А.Карацубы при любом $n\in N$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Hardy G. H. Sur les zeros de la fonction $\zeta(s)$ de Riemann // Compt.Rend. Acad.Sci. 1914. V.158. pp.1012–1014.
2. Hardy G. H., Littlewood J. E. The zeros of Riemann's zeta-function on the critical line // Math.Z. 1921. bd. 10, S. 283-317.
3. Мозер Я. Об одной сумме в теории дзета-функции Римана // Acta arith. 1976. № 31. S. 31-43.
4. Карацуба А. А. О расстоянии между соседними нулями дзета-функции Римана, лежащими на критической прямой // Труды МИАН. 1981. Т. 157. С. 49-63.
5. Рахмонов З. Х., Хайруллоев Ш. А. Соседние нули дзета-функции Римана, лежащие на критической прямой // ДАН РТ. 2009. Т.52. № 5. С.331-337.
6. Хайруллоев Ш. А. Расстояние между соседними нулями дзета-функции Римана, лежащими на критической прямой // ДАН РТ. 2006. Т.49. № 9. С.803-809.
7. Хайруллоев Ш. А. Расстояние между соседними нулями производной j-го порядка функции Харди // ДАН РТ. 2016. Т.59. № 5-6. С.185-187.

УДК 511.325

Короткая двойная сумма значений характера Дирихле от сдвинутых произведений двух чисел, лежащих в арифметических прогрессиях

Д. Дж. Хокиев (Таджикистан, г. Душанбе)
Таджикский национальный университет
e-mail: khdj.91@mail.ru

Short double the sum of values of the Dirichlet character of shifted products of two numbers, lying in arithmetic progressions

D. Dj. Khokiev (Tajikistan, Dushanbe)
Tajik national University
e-mail: khdj.91@mail.ru

При изучении закона распределения значений производного характера χ по составному модулю D на последовательностях сдвинутых простых чисел вида $p-l$, $(l,D)=1$, возникает задача о нетривиальной оценке двойных сумм $W=W_q(x,M,N,l,\nu)$ вида

$$W_q(x,M,N,l,\nu)=\sum_{\substack{M<m\leqslant 2M\\ (m,q)=1}}a_m\sum_{\substack{U<n\leqslant\min(xm^{-1},2N)\\ (n,q)=1,\, mn\equiv l(\mathrm{mod}\ \nu)}}b_n\chi_q(mn-l),\qquad (\nu l,q)=1,$$

где a_m и b_n функции натурального аргумента такие, что $|a_m|\leqslant\tau^c(m)$ и $|b_n|\leqslant\tau^c(n)$, c – положительное фиксированное число, не все время одно и то же, χ_q – примитивный характер по модулю q.

В сумме $W_q(x,M,N,l,\nu)$ не ограничивая общности можно считать, что $N \leqslant M$. Отметим, что если в рассматриваемой задаче характер χ является примитивным, то есть если $\chi = \chi_q$, то вместо суммы $W_q(x,M,N,l,\nu)$ возникает более простая сумма

$$W_q(x,M,N,l,1) = W_q(x,M,N,l)$$

вида

$$W_q(x,M,N,l) = \sum_{\substack{M<m\leqslant 2M\\ (m,q)=1}} a_m \sum_{\substack{U<n\leqslant \min(xm^{-1},2N)\\ (n,q)=1}} b_n\chi_q(mn-l), \qquad (l,q)=1,$$

И.М. Виноградов, впервые изучая сумму $W_q(x,M,N,l)$ для простого q получил ее нетривиальную оценку при $x \geqslant q^{1+\varepsilon}$, а затем нетривиальную оценку короткой суммы $W_q(x,M,N,l)$ при $x \geqslant q^{0{,}75+\varepsilon}$ [1,2]. Наилучшая нетривиальная оценка $W_q(x,M,N,l)$ для простого q при $x \geqslant q^{0{,}5+\varepsilon}$ найдена в работе А.А. Карацубы [3].

З.Х. Рахмонов изучил сумму $W_q(x,M,N,l,\nu)$ для составного q и получил нетривиальную оценку при $x \geqslant q^{1+\varepsilon}$ [4,5,6]. Нетривиальную оценку короткой суммы $W_q(x,M,N,l)$ для составного q при $x \geqslant q^{\frac{8}{9}+\varepsilon}$ в 2010 году получили Дж.Б.Фридландер, К. Гонг, И.Е.Шпарлинский [7]. З.Х.Рахмонов для составного q доказал нетривиальную оценку $W_q(x,M,N,l)$ при $x \geqslant q^{\frac{5}{6}+\varepsilon}$ [8,9,10], а в 2017 г. он [11,12] для модулей q — число свободное от кубов получил нетривиальную оценку суммы $W_q(x,M,N,l,\nu)$ при $y \geqslant q^{\frac{1}{2}+\varepsilon}$.

Основными результатами этой работы являются теоремы 1 об оценках коротких двойных сумм значений примитивного характера Дирихле от сдвинутых произведений двух чисел, лежащих в арифметических прогрессиях то есть сумм вида $W_q(x,M,N,l,\nu)$.

Теорема 1 *Пусть M, N, U — целые числа, $N \leqslant U < 2N$, c_1, c_2, — положительные постоянные числа, не всегда одни и те же; δ — положительные, сколь угодно малые постоянные;*

$$W_q(x,M,N,l,\nu) = \sum_{\substack{M<m\leqslant 2M\\ (m,q)=1}} a_m \sum_{\substack{U<n\leqslant \min(xm^{-1},2N)\\ (n,q)=1,\, mn\equiv l \pmod{\nu}}} b_n\chi_q(mn-l), \qquad (\nu l,q)=1,$$

a_m и b_n функции натурального аргумента такие, что

$$\sum_{M<m\leqslant 2M} |a_m|^\alpha \ll M \ln c^{c_\alpha}, \quad \alpha = 1,2; \qquad |b_n| \ll B.$$

Тогда справедлива оценка

$$|W_q(x,M,N,l,\nu)| \ll B\left(M^{\frac{3}{4}}N^{\frac{1}{2}}q^{\frac{1}{4}} + M^{\frac{3}{4}}Nq^{\frac{1}{8}+\frac{\delta}{4}}\right)\ln c^{\frac{2c_1+c_2}{4}+1}$$

Доказательство теоремы 1 проводится развитием метода доказательства работы З.Х. Рахмонова [10] которая в свою очередь опирается на методы работ А.А. Карацубы [13],[14] и оценки Д.А. Берджесса [15].

Следствиями теоремы 1 в частности являются нетривиальные оценки двойных сумм $W_q(x,M,N,l,\nu)$ при $x \geqslant q^{\frac{5}{6}+\varepsilon}$, где ε — положительные, сколь угодно малые постоянные.

Следствие. *Пусть M, N, U — целые числа, $N \leqslant U < 2N$, $q^{\frac{1}{4}-\theta} \leqslant N \leqslant q^{\frac{1}{4}+\theta}$, $D^{\frac{1}{2}} \leqslant q \leqslant D$, $\nu \leqslant \exp\sqrt{2\ln D}$, δ — положительные, сколь угодно малые постоянные, $\delta = \frac{10}{27}\varepsilon, \theta = \frac{1}{12} + \frac{16}{27}\varepsilon$*

$$W_q(x,M,N,l,\nu) = \sum_{\substack{M<m\leqslant 2M\\ (m,q)=1}} a_m \sum_{\substack{U<n\leqslant \min(xm^{-1},2N)\\ (n,q)=1,\, mn\equiv l \pmod{\nu}}} b_n\chi_q(mn-l), \qquad (\nu l,q)=1,$$

a_m и b_n – функции натурального аргумента такие, что $|a_m| \leqslant \tau_5(m)$, $|b_n| \leqslant 1$. Тогда при $x \geqslant q^{\frac{3}{4}+\theta+1,1\delta}$ справедлива оценка

$$|W_q(x, M, N, l, \nu)| \ll \frac{x}{\nu} \exp\left(-0,7\sqrt{\ln D}\right).$$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Виноградов И.,М. Уточнение метода оценки сумм с простыми числами // Известия АН СССР. Серия математическая. 1943. Т. 7. С. 17 – 34.

2. Виноградов И.,М. Особые варианты метода тригонометрических сумм // М.: Наука. 1976.

3. Карацуба А.,А. Суммы характеров с простыми числами // Известия АН СССР. Серия математическая. 1970. Т. 34. С. 299 – 321.

4. Рахмонов З.,Х. О распределении значений характеров Дирихле // Успехи математических наук. 1986. Т. 41. № 1. С. 201 – 202.

5. Рахмонов З.,Х. Об оценке суммы характеров с простыми числами // Доклады АН Таджикский ССР. 1986. Т. 29. № 1. С. 16 – 20.

6. Рахмонов З.,Х. О распределении значений характеров Дирихле и их приложения // Труды Математического института имени В. А. Стеклова. 1994. Т. 207. С. 286 – 296.

7. Фридландера Дж.,Б., Гонг К., Шпарлинский И.,Е. Суммы значений характеров на сдвинутых простых числах // Математические заметки. 2010. Т. 88. В. 4. С. 605 – 619.

8. Рахмонов З.,Х. О распределении значений характеров Дирихле в последовательности сдвинутых простых чисел // Доклады АН Республики Таджикистан. 2013. Т. 56. № 1. С. 5 – 9.

9. Рахмонов З.,Х. Распределение значений характеров Дирихле в последовательности сдвинутых простых чисел // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия Математика. Механика. Информатика 2013. Т. 13. Вып. 4(2). С. 113–117.

10. Рахмонов З.,Х. Суммы характеров с простыми числами. Чебышевский сборник // 2014. Т. 15 . В. 2(50). С. 73 – 100.

11. Рахмонов З.,Х. Суммы значений неглавных характеров по последовательности сдвинутых простых чисел // Труды Математического института имени В. А. Стеклова. 2017. Т. 299. С. 234 — 260. DOI: 10.1134/S037196851704015X.

12. Rakhmonov Z.,Kh. Sums of values of nonprincipal characters over a sequence of shifted primes // Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics. 2017. V. 299. 219 — 245.

13. Карацуба А.А Об оценках сумм характеров // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1970. Т. 34. С. 20 – 30.

14. Карацуба А.А Распределение произведений сдвинутых простых чисел в арифметических прогрессиях // ДАН СССР. 1970. Т. 192. № 4. С. 724 – 727.

15. Burgess D.A. On character sums and L – series // Proc. London Math. Soc. 1962, v. 12, № 3, pp. 193 – 206.

Joint universality of certain zeta-functions

D. Šiaučiūnas (Lithuania, Šiauliai)
Šiauliai University
e-mail: darius.siauciunas@su.lt

УДК 511.32

Совместная универсальность некоторых дзета-функций

Д. Шяучюнас (Литва, г. Шяуляй)
Шяуляйский университет
e-mail: darius.siauciunas@su.lt

In [4], S. M. Voronin discovered the universality of the Riemann zeta-function $\zeta(s)$, $s = \sigma + it$. He proved that if the function $f(s)$ is continuous and non-vanishing on the disc $|s| \leqslant r$ with $0 < r < 1/4$, and analytic in the interior of this disc, then, for every $\varepsilon > 0$, there exists a real number $\tau = \tau(\varepsilon)$ such that

$$\max_{|s|\leqslant r} |\zeta\left(s + \frac{3}{4} + i\tau\right) - f(s)| < \varepsilon.$$

Now a strongerversion of the Voronin theorem is known. Let $D = \{s \in \mathbb{C} : 1/2 < \sigma < 1\}$. Denote by $\mathcal{K}$ the class of compact subsets of the strip D with connected complements, and by $H_0(K)$ with $K \in \mathcal{K}$, the class of continuous non-vanishing functions on K that are analytic in the interior of K. Suppose that $K \in \mathcal{K}$ and $f(s) \in H_0(K)$. Then the modern version of the Voronin theorem says that, for every $\varepsilon > 0$,

$$\liminf_{T\to\infty} \frac{1}{T}\text{meas}\left\{\tau \in [0,T] : \sup_{s\in K} |\zeta(s+i\tau) - f(s)| < \varepsilon\right\} > 0.$$

The notion of the joint universality also belongs to Voronin. In [5], he considered the functional independence of Dirichlet L-functions $L(s,\chi)$, and, for this, he, in fact, applied their joint universality.

Theorem 1. *Suppose that $\chi_1, \dots, \chi_r$ are pairwise non-equivalent Dirichlet characters. For $j = 1, \dots, r$, let $K_j \in \mathcal{K}$ and $f_j(s) \in H_0(K_j)$. Then, for every $\varepsilon > 0$,*

$$\liminf_{T\to\infty} \frac{1}{T}\text{meas}\left\{\tau \in [0,T] : \sup_{1\leqslant j\leqslant r} \sup_{s\in K_j} |L(s+i\tau,\chi_j) - f_j(s)| < \varepsilon\right\} > 0.$$

After Voronin's work, it is known that some other zeta- and L-functions also have the Voronin universality property. Among them, the zeta-functions associated to certain cusp forms. Let

$$SL(2,\mathbb{Z}) \stackrel{\text{def}}{=} \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a,b,c,d \in \mathbb{Z},\ ad - bc = 1\right\}$$

be the full modular group. The function $F(z)$ is called a cusp form of weight κ for the group $SL(2,\mathbb{Z})$ if $F(z)$ is analytic in the half-plane $\text{Im}z > 0$, for all

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2,\mathbb{Z})$$

satisfies the functional equation

$$F\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = (cz+d)^{\kappa} F(z),$$

and at infinity has the Fourier series expansion

$$F(z) = \sum_{m=1}^{\infty} c(m) \mathrm{e}^{2\pi i m z}.$$

Then the zeta-function $\zeta(s, F)$ of the form $F(z)$ is defined, for $\sigma > (\kappa+1)/2$, by the Dirichlet series

$$\zeta(s, F) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{c(m)}{m^s},$$

and has analytic continuation to an entire function. Additionally, let the form $F(z)$ be a Hecke-eigen cusp form, i. e., $F(z)$ is the eigen form of all Hecke operators

$$T_m F(z) = m^{\kappa-1} \sum_{\substack{a,d>0\\ ad=m}} \frac{1}{d^{\kappa}} \sum_{b (\mathrm{mod}\, d)} F\left(\frac{az+b}{d}\right), \qquad m \in \mathbb{N}.$$

Then $c(1) \neq 0$, and $F(z)$ can be normalized. In this case, the function $\zeta(s, F)$ has Euler's product representation over primes

$$\zeta(s, F) = \prod_p \left(1 - \frac{\alpha(p)}{p^s}\right)^{-1} \left(1 - \frac{\beta(p)}{p^s}\right)^{-1},$$

where $\alpha(p)$ and $\beta(p)$ are conjugate complex numbers such that $\alpha(p) + \beta(p) = c(p)$.

The universality of the function $\zeta(s, F)$ was proved in [2]. Now, let $D = D_{\kappa} = \{s \in \mathbb{C} : \ \kappa/2 < \sigma < (\kappa+1)/2\}$, $\mathcal{K} = \mathcal{K}_{\kappa}$ the class of compact subsets of the strip D_{κ} with connected complements, and $H_0(K) = H_{0\kappa}(K)$ with $K \in \mathcal{K}_{\kappa}$, the class of continuous non-vanishing functions on K that are analytic in the interior of K. Then, in [2], the following theorem was proved.

Theorem 2. *Suppose that $F(z)$ is a normalized Hecke-eigen cusp form of weight κ. Let $K \in \mathcal{K}$ and $f(s) \in H_0(K)$. Then, for every $\varepsilon > 0$,*

$$\liminf_{T \to \infty} \frac{1}{T} \mathrm{meas} \left\{ \tau \in [0, T] : \sup_{s \in K} |\zeta(s + i\tau, F) - f(s)| < \varepsilon \right\} > 0.$$

Theorem 2 has a discrete version [3].

Theorem 3. *Suppose that $F(z)$ is a normalized Hecke-eigen cusp form of weight κ. Let $K \in \mathcal{K}$ and $f(s) \in H_0(K)$. Then, for every $\varepsilon > 0$ and $h > 0$,*

$$\liminf_{N \to \infty} \frac{1}{N+1} \# \left\{ 0 \leqslant k \leqslant N : \sup_{s \in K} |\zeta(s + ikh, F) - f(s)| < \varepsilon \right\} > 0.$$

In [1], the joint version of Theorem 3 was obtained. Let $F_1, \dots, F_r$ be different normalized Hecke-eigen cusp forms of weights $\kappa_1, \dots, \kappa_r$ with Fourier coefficients $c_1(m), \dots, c_r(m)$, respectively, and let

$$\zeta(s, F_j) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{c_j(m)}{m^s}, \qquad \sigma > \frac{\kappa_j + 1}{2}, \ j = 1, \dots, r,$$

be the corresponding zeta-functions. For positive numbers $h_1, \dots, h_r$, define the set

$$L(\mathbb{P}; h_1, \dots, h_r; \pi) = \{(h_1 \log p : p \in \mathbb{P}), \dots, (h_r \log p : p \in \mathbb{P}), 2\pi\},$$

where $\mathbb{P}$ is the set of all prime numbers. For $j = 1, \dots, r$, let D_j, $\mathcal{K}_j$ and $H_0(K_j)$, be the analogues of D, $\mathcal{K}$ and $H_0(K)$. Then, in [1], the following joint discrete universality theorems was proved

Theorem 4. *Suppose that the set $L(\mathbb{P}; h_1, \ldots, h_r; \pi)$ is linearly independent over the field of rational numbers. For $j = 1, \ldots, r$, let $K_j \in \mathcal{K}_j$ and $f_j(s) \in H_0(K_j)$. Then, for every $\varepsilon > 0$,*

$$\liminf_{N\to\infty} \frac{1}{N+1} \# \left\{ 0 \leqslant k \leqslant N : \sup_{0\leqslant j\leqslant r} \sup_{s\in K_j} |\zeta(s+ikh_j, F_j) - f_j(s)| < \varepsilon \right\} > 0.$$

We note that the linear independence of the set $L(\mathbb{P}; h_1, \ldots, h_r; \pi)$ ensures a certain independence of the zeta-functions $\zeta(s, F_1), \ldots, \zeta(s, F_r)$.

Theorem 4 admits the following generalization. Suppose that $k_0 \in \mathbb{N}$, and $\varphi_1(t), \ldots, \varphi_r(t)$ are continuous differentiable increasing to ∞ functions on $[k_0 - 1/2, \infty)$ such that their derivatives $\varphi'_j(t)$ satisfy the estimate

$$\varphi_j(2t) \left(\max_{t\leqslant u\leqslant 2t} \frac{1}{\varphi'_j(u)} + \max_{t\leqslant u\leqslant 2t} \varphi'_j(u) \right) \ll t,$$

and the sequence $\{\varphi_1(k)a_1 + \cdots + \varphi_r(k)a_r : k \geqslant k_0\}$ is uniformly distributed modulo 1 with not all zeros real numbers $a_1, \ldots, a_r$. Denote this class of functions by $U_r(k_0)$. Then the following theorem is true.

Theorem 5. *Suppose that $(\varphi_1, \ldots, \varphi_r) \in U_r(k_0)$. For $j = 1, \ldots, r$, let $K_j \in \mathcal{K}_j$ and $f_j(s) \in H_0(K_j)$. Then, for every $\varepsilon > 0$,*

$$\liminf_{N\to\infty} \frac{1}{N-k_0+1} \# \left\{ k_0 \leqslant k \leqslant N : \sup_{1\leqslant j\leqslant r} \sup_{s\in K_j} |\zeta(s+i\varphi_j(k), F_j) - f_j(s)| < \varepsilon \right\} > 0.$$

For example, we can take the functions $\varphi_j(t) = t^\alpha \log^j t$ with $0 < \alpha < 1$ and $t \geqslant 2$.

REFERENCES

1. Laurinčikas A. Joint approximation by zeta-functions of cusp forms // Advanced Studies Pure Math.. 2019. (to appear).

2. Laurinčikas A., Matsumoto K. The universality of zeta-functions attached to certain cusp forms // Acta. Arith. 2001. Vol. 98. P. 345–359.

3. Laurinčikas A., Matsumoto K., Steuding J. Discrete universality of L-functions of new forms // Lith. Math. J. 2016. Vol. 56. P. 207–218.

4. Voronin S. M. Theorem on the “universality” of the Riemann zeta-function // Math. USSR Izv. 1975. Vol. 9. P. 443–453.

5. Voronin S. M. On the functional independence of Dirichlet L-functions // Acta Arith. 1975. Vol. 27. P. 495–503 (in Russian).

———————————————————————————

УДК 511.335

Об аналоге эффекта Эминяна для фибоначчиевой системы счисления

А. В. Шутов (Россия, г. Владимир)
Владимирский государственный университет
e-mail: a1981@mail.ru

On the analogue of the Eminyan effect for the fibonacci number system

A. V. Shutov (Russia, Vladimir)
Vladimir state University
e-mail: a1981@mail.ru

Рассмотрим двоичное разложения натурального числа n:

$$n = \sum_{i=0}^{\infty} n_i 2^i,$$

где $n_i \in \{0,1\}$ и определим множества

$$\mathbb{N}_0 = \{n : n \in \mathbb{N}, \sum_{i=0}^{\infty} n_i \equiv 0 \pmod 2\},$$

$$\mathbb{N}_1 = \mathbb{N} \setminus \mathbb{N}_0.$$

Изучение множеств $\mathbb{N}_i$ было начато А. О. Гельфондом в работе [1], в которой была показана равномерность распределения чисел из данных множеств по арифметическим прогрессиям. Дальнейшие многочисленные теоретико-числовые результаты о множествах $\mathbb{N}_i$ были получены К. М. Эминяном [5]–[7], А. П. Науменко [4] и рядом других авторов. В частности, в [5] был доказан следующий результат.

Теорема 1. *Пусть $F_{i,j}(X)$ – число решений уравнения $n - m = 1$, $n, m \leq X$, $n \in \mathbb{N}_i$, $m \in \mathbb{N}_j$, $i, j = 0, 1$. Тогда*

$$F_{i,j}(X) = \frac{X}{6} + O(\log X)$$

при $i = j$ и

$$F_{i,j}(X) = \frac{X}{3} + O(\log X)$$

при $i \neq j$.

Кроме двоичного разложения каждое натуральное число n может быть разложено в систему счисления Фибоначчи:

$$n = \sum_{i=1}^{\infty} f_i F_i,$$

где $f_i \in \{0,1\}$, $f_i f_{i+1} = 0$, $F_0 = F_1 = 1$, $F_{i+1} = F_i + F_{i-1}$. Аналог результатов Гельфонда для данной системы счисления был получен в работе [2]. Наша цель – получить аналог теоремы 1 для системы счисления Фибоначчи.

Определим множества

$$\mathbb{F}_0 = \{n : n \in \mathbb{N}, \sum_{i=0}^{\infty} f_i \equiv 0 \pmod 2\},$$

$$\mathbb{F}_1 = \mathbb{N} \setminus \mathbb{F}_0.$$

Теорема 2. *Пусть* $F'_{i,j}(X)$ *– число решений уравнения* $n - m = 1$, $n, m \le X$, $n \in \mathbb{F}_i$, $m \in \mathbb{F}_j$, $i, j = 0, 1$. *Тогда*

$$F'_{i,j}(X) = \frac{\sqrt{5}}{10}X + O(\log X)$$

при $i = j$ *и*

$$F'_{i,j}(X) = \frac{5-\sqrt{5}}{10}X + O(\log X)$$

при $i \ne j$.

Доказательство теоремы 2 основывается на явной формуле

$$F'_{i,j}(X) = \sum_{n \le X} \frac{(-1)^i \varepsilon(n) + 1}{2} \frac{(-1)^j \varepsilon(n+1) + 1}{2},$$

где

$$\varepsilon(n) = \begin{cases} 1, & n \in \mathbb{F}_0 \\ -1, & n \in \mathbb{F}_1 \end{cases}.$$

При этом используются результаты о суммах $S_1(X) = \sum_{n \le X} \varepsilon(n)$, $S_1^*(n) = S_1(F_n - 1)$ и $S_2(X) = \sum_{n \le X} \varepsilon(n)\varepsilon(n+1)$, $S_2^*(n) = S_2(F_n - 1)$, представляющие, на наш взгляд, и самостоятельный интерес.

Предложение 1. *Последовательность* $\{S_1^*(n)\}$ *периодична с периодом 6. Период имеет вид* $2, 1, 0, 0, 1, 2$.

Предложение 2. *Имеет место оценка*

$$S_1(X) = O(\log X).$$

Предложение 3. *Справедливо равенство*

$$S_2^*(n+1) = S_2^*(n) + S_2^*(n-1) + 2\chi(n),$$

где

$$\chi(n) = \begin{cases} 1, & n \equiv 2, 3 \pmod 4 \\ -1, & n \equiv 0, 1 \pmod 4 \end{cases}.$$

Предложение 4. *Справедлива асимптотическая формула*

$$S_2(X) = \frac{2\sqrt{5}-5}{5}X + O(\log X).$$

Мы также используем теорему о геометризации системы счисления Фибоначчи из [3] для того, чтобы явно построить множество X такое, что $\varepsilon(n)\varepsilon(n+1) = 1$ тогда и только тогда, когда $\{(n+1)(\sqrt{5}-1)/2\} \in X$.

Автор выражает благодарность Сергею Александровичу Гриценко за привлечение внимания к данной задаче.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Gelfond A. O. Sur les nombres qui ont des predriétés additives et multiplicatives données // Acta Aithmetica. 1968. V. 13. P. 259–265.

2. Lamberger M., Thuswaldner J. W. Distribution prederties of digital expansions arising from linear recurrences // Mathematica Slovaca. 2003. V. 53. No. 1. P. 1–20.

3. Давлетярова Е. П., Жукова А. А., Шутов А. В., Геометризация системы счисления Фибоначчи и ее приложения к теории чисел // Алгебра и анализ. 2013. Т. 25. Вып. 6. С. 1—23.

4. Науменко А. П. О числе решений некоторых диофантовых уравнений в натуральных числах с заданными свойствами двоичных разложений // Чебышевский сборник. 2011. Т. 12. Вып. 1. С. 140—157.

5. Эминян К. М. Об одной бинарной задаче // Математические заметки. 1996. Т. 60. Вып. 4. С. 634—637.

6. Эминян К. М. Асимптотический закон распределения простых чисел специального вида // Математические заметки. 2016. Т. 100. Вып. 4. С. 619—622.

7. Эминян К. М. Аддитивные задачи в натуральных числах с двоичными разложениями специального вида // Чебышевский сборник. 2011. Т. 12. Вып. 1. С. 178—185.

УДК 511

Нелинейная аддитивная задача с простыми числами специального вида

К. М. Эминян (Россия, г. Москва)
Финансовый университет при Правительстве РФ
e-mail: eminyan@mail.ru

Non-linear additive problem involving primes of a special type

K. M. Eminyan (Russia, Moscow)
Financial University under the Government of the Russian Federation
e-mail: eminyan@mail.ru

Пусть $n = e_0 + e_1 2 + \ldots + e_k 2^k$ — представление натурального числа n в виде двоичной системе счисления ($e_j = 0, 1$). Пусть $\mathbb{N}_0$ – множество натуральных чисел, двоичные разложения которых имеют четное число единиц, $\mathbb{N}_1 = \mathbb{N} \setminus \mathbb{N}_0$. Пусть

$$\varepsilon(n) = \begin{cases} \ \ 1, & \text{если} \quad n \in \mathbb{N}_0; \\ -1, & \text{если} \quad n \in \mathbb{N}_1. \end{cases}$$

В 1968 году А. О. Гельфонд [1] доказал, что натуральные числа из множеств $\mathbb{N}_0$ и $\mathbb{N}_1$ регулярно распределены в арифметических прогрессиях.

В 1991 году автор получил [4] асимптотическую формулу для суммы

$$\sum_{n \leqslant x,\ n \in \mathbb{N}_0} \tau(n)$$

и тем самим решил проблему делителей Дирихле в числах из множества $\mathbb{N}_0$.

В 2010 К. Маудюит и Дж. Риват [2] доказали, в частности, что плотности множеств простых чисел из классов $\mathbb{N}_0$ и $\mathbb{N}_1$ совпадают. Другое доказательство этого факта дал Б. Грин [3]. Указанные работы основаны на оценках специального вида тригонометрических сумм, которые как по своей силе, так и по доказательствам, представляют собой варианты принадлежащей автору оценки интеграла от модуля тригонометрической суммы специального вида (см. лемму 4), полученной в [4] в 1991 году.

В 2014 автор решил [10] тернарную проблему Гольбаха в простых числах класса $\mathbb{N}_0$.

В настоящей статье решается нелинейная аддитивная задача в простых и натуральных числах, двоичные разложения которых имеют специальный вид, продолжающий работы автора [4] – [13].

Сформулируем наш основной результат.

Пусть $n \geqslant 3$. Пусть $(j_1, j_2, j_3, j_4, j_5)$ – произвольный набор из нулей и единиц.

Пусть $J_1(N)$ – число решений уравнения

$$p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + p_4^2 + x^n = N \tag{1}$$

в простых числах p_1, p_2, p_3, p_4 и натуральных числах x таких, что $p_k \in \mathbb{N}_{j_k}$ $(k = 1, 2, 3, 4)$, $x \in \mathbb{N}_{j_5}$.

Пусть $I_1(N)$ – число решений уравнения (1) в произвольных простых числах p_1, p_2, p_3, p_4 и натуральных числах x.

Основным результатом статьи, является следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть $C > 0$ — сколь угодно большое фиксированное число, $N \geqslant N_0(C) > 0$. Тогда справедливо равенство*

$$J_1(N) = \frac{1}{32} I_1(N) + O(N^{1+1/n} L^{-C}),$$

где постоянная в знаке O зависит лишь от C.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. A. O. Gelfond, Sur les nombres qui ont des propriétés additives et multiplicatives données. *Acta Arith.,* 13 (1968), 259-265.

2. C. Mauduit et J. Rivat, Sur un problème de Gelfond: la somme des chiffres des nombres premiers V. 171. No 3, 1591–1646 Annals of Mathematics. Second Series 2010

3. B. Green, Three topics in additive prime number theory. Current Developments in Mathematics, Volume 2007 (2009), 1-41.

4. К. М. Эминян, О проблеме делителей Дирихле в некоторых последовательностях натуральных чисел. Изв. АН СССР. Сер. матем., 55:3 (1991), 680-686.

5. К. М. Эминян, О представлении чисел с заданными свойствами двоичного разложения суммами двух квадратов. Труды Математического Института им. В.А. Стеклова. Т.207 Теория чисел и Анализ. 1994г. С.377-382.

6. К. М. Эминян, Об одной бинарной задаче. Матем. заметки, 60:4 (1996), 634-637.

7. К. М. Эминян, L_1-норма одной тригонометрической суммы. Матем. заметки, 76:1 (2004), 133-143.

8. К. М. Эминян, Оценка дробного момента одной тригонометрической суммы. Матем. заметки, 76:2 (2004), 312-315.

9. К. М. Эминян, О средних значениях функции $\tau_k(n)$ в некоторых последовательностях натуральных чисел. Матем. заметки, 90:3 (2011), 454-463.

10. К. М. Эминян, Проблема Гольдбаха в простых числах с двоичными разложениями специального вида, Изв. РАН. Сер. матем., 78:1 (2014), 215-224.

11. К. М. Эминян, Обобщенная проблема делителей с натуральными числами специального вида. Матем. сб., 206:7 (2015), 135-144.

12. К. М. Эминян, Проблема Варинга в натуральных числах с двоичными разложениями специального вида, Ученые записки Орловского государственного университета № 3 (53) 2013г. 112-117.

13. К. М. Эминян, Аддитивные задачи в натуральных числах с двоичными разложениями специального вида. Чебышевский сб., 12:1 (2011), 178-185.

14. А. А. Карацуба, Основы аналитической теории чисел. М.: Наука, 1983.

———————————————————————————

УДК 511.32

О функции делителей в кольце многочленов над конечным полем

В. В. Юделевич (Российская Федерация, Москва)
МГУ им. М. В. Ломоносова
e-mail: Vitaliiyudelevich@mail.ru

On the function of divisors in a ring of polynomials over a finite field

V. Iudelevich (Russian Federation, Moscow)
Lomonosov Moscow State University
e-mail: Vitaliiyudelevich@mail.ru

Пусть q — степень простого числа, $\mathbb{F}_q$ — конечное поле порядка q, $\mathbb{F}_q[x]$ — кольцо многочленов над полем $\mathbb{F}_q$. Как известно, $\mathbb{F}_q[x]$ является евклидовым кольцом, где справедлива теорема об однозначном разложении на множители. Именно, каждый многочлен f, отличный от постоянной, представляется в виде $f = a \cdot p_1^{e_1} p_2^{e_2} \ldots p_k^{e_k}$, где $a \in \mathbb{F}_q^*$, $p_1, p_2, \ldots, p_k$ — различные неприводимые над полем $\mathbb{F}_q$ многочлены с единичными старшими коэффициентами (унитарные многочлены), а $e_1, e_2, \ldots, e_k$ — положительные целые числа. Такое разложение единственно с точностью до порядка следования множителей.

Приведённая теорема позволяет рассматривать в кольце $\mathbb{F}_q[x]$ аналоги известных из элементарной теории чисел мультипликативных функций, например, функции делителей. Напомним, что для унитарного многочлена f функция делителей $\tau(f)$ определяется равенством

$$\tau(f) = \sum_{d|f} 1,$$

где суммирование ведётся по всем унитарным многочленам, делящим f. Другими словами, $\tau(f)$ есть число решений в унитарных многочленах уравнения $f_1 f_2 = f$. Обобщённая функция делителей $\tau_m(f)$, $m \geq 2$, определяется аналогично – как число решений уравнения $f_1 f_2 \ldots f_m = f$.

Представляет интерес исследование средних значений мультипликативных функций над кольцом $\mathbb{F}_q[x]$. Впервые подобные задачи были рассмотрены Л. Карлитцем. В работе [1] им были получены точные формулы для средних значений некоторых мультпликативных функций.

Возможность получения точных (а не асимптотических) формул в задачах такого рода объясняется тем, что аналог дзета-функции для кольца $\mathbb{F}_q[x]$ имеет очень простой вид, а именно

$$\zeta_q(s) = \sum_{f\in\mathbb{F}_q[x]} \frac{1}{N^s(f)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^n}{q^{ns}} = \frac{1}{1-q^{1-s}} \quad (s=\sigma+it,\ \sigma>1)$$

(здесь $N(f) = q^{\deg f}$). Поэтому, в частности, задача нахождения величины

$$\sum_{\deg f = n} \tau_m(f) \tag{1}$$

сводится к подсчёту коэффициента при q^{-ns} ряда

$$\zeta_q^m(s) = \frac{1}{(1-q^{1-s})^m}.$$

Величина (1) является аналогом суммы

$$\sum_{n\le x} d_m(n), \tag{2}$$

исследование которой составляет предмет обобщённой проблемы делителей Дирихле (здесь $d_m(n)$ — классическая функция делителей, равная числу решений уравнения $x_1x_2\ldots x_m = n$ в натуральных числах $x_1, x_2, \ldots, x_n$). Наряду с (2) исследуются и суммы

$$\sum_{n\le x} \frac{1}{d_m(n)}, \tag{3}$$

(см. : Рамануджан [2], Ивич [3]), для которых получаются асимптотические выражения вида

$$\frac{x}{(\ln x)^{1-\frac{1}{m}}}\left(a_0 + \frac{a_1}{\ln x} + \ldots + \frac{a_N}{(\ln x)^N} + O_N\left(\frac{1}{(\ln x)^{N+1}}\right)\right),$$

где $x\to+\infty$, $N\ge 0$ — произвольное фиксированное число, $a_0, a_1, \ldots, a_N, \ldots$ — некоторые постоянные.

По аналогии с (3) определим величину

$$T(n) = \sum_{\deg f = n} \frac{1}{\tau_m(f)},$$

где суммирование ведётся по всем унитарным многочленам степени n. Тогда имеют место следующие утверждения:

Теорема 1. *Пусть $n\ge 1$ – произвольное фиксированное число. Тогда при $q\to+\infty$, $N\to+\infty$ справедлива асимптотическая формула*

$$T(N) = q^N\left\{A_0(N) + \frac{A_1(N)}{q} + \ldots + \frac{A_{n-1}(N)}{q^{n-1}} + O_n\left(\frac{N^{-1+1/m}}{q^n}\right)\right\}, \tag{4}$$

где $A_k(N)$ – некоторые величины, зависящие лишь от N и k и удовлетворяющие при фиксированном k неравенству $A_k(N) \ll N^{-1+1/m}$.

В частности,

$$A_0(N) = \frac{1}{Nm}\cdot\left(1+\frac{1}{m}\right)\left(1+\frac{1}{2m}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{(N-1)m}\right). \tag{5}$$

Теорема 2. *Пусть q — фиксировано, $N \to +\infty$. Тогда при любом фиксированном $M \geq 0$ справедлива следующая асимптотическая формула:*

$$\sum_{0\leqslant n\leqslant N} T(n) = \frac{q^N}{N^{1-\frac{1}{m}}} \left\{ \sum_{k=0}^{M} \frac{B_k}{\Gamma\left(\frac{1}{m}-k\right)} \cdot \frac{1}{(N\ln q)^k} + O_M\left(\frac{1}{N^{M+1}}\right) \right\},$$

где величины B_k зависят лишь от m и k, причём

$$B_0 = \prod_{n=1}^{\infty} \left\{ \left(1 + \frac{q^{-n}}{m} + \frac{q^{-2n}}{C_{m+1}^2} + \ldots\right) \cdot (1-q^{-n})^{1/m} \right\}^{\pi_q(n)}, \tag{6}$$

а $\pi_q(n)$ — число неприводимых унитарных многочленов степени n.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. L. Carlitz, The arithmetic of polymomials in a Galois field. // Amer. J. Math. 54(1), 39-50, 1932.

2. S. Ramanujan, Some formulae in the analytic theory of numbers. // The Messenger of Math. 45, 81-84, 1916.

3. A. Ivić, On the asymptotic formulae for some functions connected with powers of the zeta-function. // Математички весник (Belgrade), 1(14)(29), 79-90, 1977.

Секция 6. Диофантовы приближения и теория трансцендентных чисел

УДК 511.2

О возможном подходе к доказательству гипотезы Била

В. В. Агафонцев (Россия, г. Псков)
Псковский государственный университет
e-mail: fon-valery-ag@yandex.ru

On a possible approach to proof a Beal's conjecture

V. V. Agafontsev (Russia, Pskov)
Pskov State University
e-mail: fon-valery-ag@yandex.ru

Определение 1. *Следуя книге [1], определяющей в широком смысле системы счисления как* "нумерации" *[1; С.21, С.36, С.62, С.181, С.209, С.252], под понятием* "позиционные нумерации" *будем понимать позиционные системы счисления с произвольным целочисленным основанием.*

Определение 2. *Под понятием* "диофантово равенство" *будем понимать равенство, образующееся после подстановки в диофантово уравнение его фактического или гипотетического решения. Далее для краткости диофантово равенство вида $A^x + B^y = C^z$, в котором $A, B, C, x, y, z \in \mathbb{N}$, условимся называть* "равенством".

1993 год. США. Американский любитель математики Эндрю Бил (Andrew Beal) выдвинул гипотезу, интересную своим научным потенциалом. Формулировка гипотезы Била:

If $A^x + B^y = C^z$, where A, B, C, x, y and z are positive integers and x, y, and z are all greater than 2, then A, B, C must have a common prime factor.

В переводе на русский: *Если $A^x + B^y = C^z$, где A, B, C, x, y, z - натуральные числа; $x, y, z > 2$, то A, B, C имеют общий простой делитель.* В настоящее время гипотеза Била зарегистрирована в Американском математическом обществе (American Mathematical Society) как ***Beal's conjecture***.

Построим возможный подход к доказательству гипотезы Била на методологическом базисе *позиционных нумераций.* Такой подход в тезисном плане изложен в работе [2]. В данной работе названный подход строится на доказательстве леммы "ABC" и четырёх теорем. Кратко рассмотрим их.

Лемма "ABC". *Необходимое и достаточное условие выполнения равенства $A^x+B^y = C^z$, в котором $A, B, C, x, y, z \in \mathbb{N}; z \geq 2; (A, B, C) = 1$, представимо триадой равенств*:

$$\mathbf{1)} A^x = a_0 + \sum_{i=1}^{z-1} a_i \cdot C^i; \mathbf{2)} B^y = b_0 + \sum_{i=1}^{z-1} b_i \cdot C^i; \tag{1}$$

$$\mathbf{3)} C = a_0 + b_0 = a_i + b_i + 1, \tag{2}$$

где $i \in [1; z-1]$; $a_i, b_i \in \mathbb{N}_0 \leq C - 1; a_0, b_0 \in \mathbb{N}$.

Здесь и далее символом $\mathbb{N}$ обозначены натуральные, то есть положительные целые числа *без нуля.* Символом $\mathbb{N}_0$ обозначены натуральные числа *с нулём.*

Лемма "ABC" имеет два следствия.

Следствие 1. *Необходимое условие выполнения равенства* $A^x + B^y = C^z$, *в котором* $A, B, C, x, y, z \in \mathbb{N}; z \geq 2; (A, B, C) = 1$, *представимо равенством*

$$A^x + B^y = (C-1) \cdot C^{z-1} + C^{z-1}$$

Следствие 2. *Равенство* $a_0 + b_0 + \sum_{i=1}^{z-1}(a_i + b_i) \cdot C^i = C^z$, *в котором* $a_0, b_0, C \in \mathbb{N}$; $a_i, b_i \in \mathbb{N}_0 \leq C-1$ *образуют величины* $a_0 + \sum_{i=1}^{z-1} a_i \cdot C^i$ *и* $b_0 + \sum_{i=1}^{z-1} b_i \cdot C^i$, *являющиеся точными* x *и* y *степенями* $(x, y \in \mathbb{N})$ *некоторых натуральных чисел* A *и* B, *причём* $(A, B, C) = 1$ *— не зависит от значений* x *и* y *для любых* $x \geq 1, y \geq 1$ *и определяется* ***только*** *значением* $\boldsymbol{z}$.

Лемма "ABC" и её следствие 1 достаточно полно представлены в работах [3], [4]. В работах [5], [6] в развёрнутом виде доказано следствие 2 леммы "ABC".

Теорема 1. *Равенство*

$$a_0 + b_0 + \sum_{i=1}^{z-1}(a_i + b_i) \cdot C^i = C^z, \tag{3}$$

невыполнимо *для любых наборов чисел* $a_0, b_0, C \in \mathbb{N}; a_i, b_i \in \mathbb{N}_0 \leq C-1$, *с которыми выполнялись бы равенства* $A^x = a_0 + \sum_{i=1}^{z-1} a_i \cdot C^i$ *и* $B^y = b_0 + \sum_{i=1}^{z-1} b_i \cdot C^i$ *при условиях:* $A, B, C, x, y, z \in \mathbb{N}; (A, B, C) = 1; x > 2, y > 2, z > 2$.

Доказательство. Предположим выполнимость равенства (3) при заданных условиях хотя бы для одного набора чисел $a_0, b_0, C \in \mathbb{N}; a_i, b_i \in \mathbb{N}_0 \leq C-1$. Тогда в соответствии со следствием 2 леммы "ABC" равенство (3) не зависит от значений x и y для *любых* $x \geq 1, y \geq 1$ и определяется ***только*** значением $\mathbf{z}$. Исходя из этого, положим $x = y = z$. Получим такое гипотетическое равенство:

$$A^z + B^z = C^z, \tag{4}$$

В соответствии с леммой "ABC" необходимое и достаточное условие выполнения этого гипотетического равенства, в котором $A, B, C, z \in \mathbb{N}$; $z > 2$, $(A, B, C) = 1$, требует выполнения такой триады равенств:

$$\mathbf{1)} A^z = a_0 + \sum_{i=1}^{z-1} a_i \cdot C^i; \mathbf{2)} B^z = b_0 + \sum_{i=1}^{z-1} b_i \cdot C^i; \tag{5}$$

$$\mathbf{3)} C = a_0 + b_0 = a_i + b_i + 1, \tag{6}$$

где $i \in [1; z-1]$; $a_i, b_i \in \mathbb{N}_0 \leq C-1; a_0, b_0 \in \mathbb{N}$.

Если бы выполнялись равенства (6), то исходя из тождества

$$C + \sum_{i=1}^{z-1}(C-1) \cdot C^i = C^z \tag{7}$$

выполнялось бы и равенство (3). Если бы выполнялись равенства (5), (6), то было бы выполнимо и равенство (4). И наоборот: если бы существовали ненулевые положительные целые числа $(A, B, C) = 1$, удовлетворяющие равенству (4), то выполнялись бы равенства (5), (6). Исходя из этих равенств число C должно представляться числами $a_0, b_0 \in \mathbb{N}$; $a_i, b_i \in \mathbb{N}_0 \leq C-1; i \in [1; z-1]$. Число A^z должно представляться числами $a_0, a_i, C^i, i \in [1; z-1]$. Число B^z должно представляться числами $b_0, b_i, C^i, i \in [1; z-1]$ Следовательно, если бы существовали ненулевые положительные целые числа A, B, C, удовлетворяющие равенству (4), то в силу необходимого и достаточного условия его выполнения эти числа должны представляться набором чисел $a_0, b_0, a_i, b_i, i \in [1; z-1]$. Но в соответствии с работами [7], [8] для *любых* $z \in \mathbb{N} > 2$ не существует ненулевых положительных целых чисел A, B, C, с которыми равество (4) было бы выполнимо. Так как не существует натуральных чисел A, B, C, удовлетворяющих равенству (4), то не существует и таких наборов чисел $a_0, b_0, a_i, b_i, i \in [1; z-1]$, которыми числа A, B, C в соответствии с необходимым и достаточным условием выполнения равенства (4) должны представляться. Следовательно, при *любых* наборах чисел $a_0, b_0, a_i, b_i, i \in [1; z-1]$ триада равенств (5), (6) будет невыполнимой. Невыполнимость равенств (6) означает выполнимость таких неравенств:

$$C \neq a_i + b_i + 1, i \in [1; z-1]; C \neq a_0 + b_0$$

при *любых* наборах чисел $a_0, b_0, a_i, b_i, i \in [1; z-1]$. Исходя из тождества (7) и включая в него подстановки из этих неравенств, получим:

$$a_0 + b_0 + \sum_{i=1}^{z-1} (a_i + b_i) \cdot C^i \neq C^z \tag{8}$$

Следовательно, исходное предположение о выполнимости равенства (3) хотя бы для одного набора чисел $a_0, b_0, C \in \mathbb{N}; a_i, b_i \in \mathbb{N}_0 \leq C-1$ через последовательность импликаций привело к противоречию, заключающемуся в невыполнимости равенства (3) для *любых* наборов чисел $a_0, b_0, C \in \mathbb{N}; a_i, b_i \in \mathbb{N}_0 \leq C-1$. В силу закона логики — *закона противоречия* — приходим к выводу об истинности теоремы 1.

Теорема 2. *Равенство $A^x + B^y = C^z$, в котором $A, B, C, x, y, z \in \mathbb{N}$, при $x > 2, y > 2, z > 2$* ***невыполнимо*** *для любых натуральных чисел $(A, B, C) = 1$.*

Доказательство. Предположим выполнимость равенства $A^x + B^y = C^z$, в котором $A, B, C, x, y, z \in \mathbb{N}$ при $x > 2, y > 2, z > 2$, хотя бы для одного набора чисел $(A, B, C) = 1$. В этом случае из равенств (5) леммы "ABC" следует выполнимость такого равенства:

$$A^x + B^y = a_0 + b_0 + \sum_{i=1}^{z-1} (a_i + b_i) \cdot C^i \tag{9}$$

Но правая часть этого равенства, исходя из (8) и в соответствии с теоремой 1, не равна числу C^z. Следовательно, $A^x + B^y \neq C^z$. Это означает, что исходное утверждение, основанное на предположении о выполнимости равенства $A^x + B^y = C^z$ при $x > 2, y > 2, z > 2$ хотя бы для одного набора натуральных чисел $(A, B, C) = 1$, через последовательность импликаций привело к противоположному утверждению. В силу закона логики - *закона противоречия*-приходим к выводу об истинности теоремы 2.

Теорема 3. *Равенство $A^x + B^y = C^z$, в котором $A, B, C, x, y, z \in \mathbb{N}$, при $x > 2, y > 2, z > 2$* ***выполнимо*** *для составных натуральных чисел A, B, C, имеющих общий делитель.*

Доказательство. Покажем, что равенство $A^x + B^y = C^z$, в котором $A, B, C, x, y, z \in \mathbb{N}$ и все показатели степени больше 2, может быть порождено, например, одним из таких равенств: **a)** $D^x + E^y = F^2$ или **b)** $D^x + E^2 = F^z$, в которых $D, E, F, x, y, z \in \mathbb{N}$ и один из показателей x или y или z равен 2, а два других - больше 2. Для случая **a)**: умножим левую и правую части на число F^{2xy}; для случая **b)** - на число E^{2xz}. Получим: **a)** $(D \cdot F^{2y})^x + (E \cdot F^{2x})^y = (F^2)^{1+xy}$; **b)**$(D \cdot E^{2z})^x + (E^2)^{1+xz} = (F \cdot E^{2x})^z$.

Обозначим: для **a)**: $D \cdot F^{2y} = A; E \cdot F^{2x} = B; F^2 = C; 1 + xy = z$;

для **b)**: $D \cdot E^{2z} = A; E^2 = B; F \cdot E^{2x} = C; 1 + xz = y$

Для **a)**: $z > 2$, так как $x > 2$ и $y > 2$; для **b)**: $y > 2$, так как $x > 2$ и $z > 2$. С учётом этих обозначений равенства **a)** и **b)** запишутся так: $A^x + B^y = C^z$. Это равенство соответствует заключению теоремы 3, так как в нём $x > 2, y > 2, z > 2$ и числа A, B, C являются составными натуральными числами, имеющими **общий** делитель, что и требовалось доказать.

Приведём примеры, показывающие истинность теоремы 3. Исходя из равенств $6^3+5^4 = 29^2$, $3^4+46^2 = 13^3$ и выполняя процедуры, подобные приведённым выше, получим соответственно: $(6 \cdot 29^8)^3 + (5 \cdot 29^6)^4 = 29^{26}$; $(3 \cdot 46^6)^4 + 46^{26} = (13 \cdot 46^8)^3$. Очевидно, это *составные* натуральные числа, имеющие общий делитель, в которых показатели степени $x > 2, y > 2, z > 2$.

Теорема 4. *Равенство $A^x+B^y = C^z$, в котором $A, B, C, x, y, z \in \mathbb{N}$, при $x > 2, y > 2, z > 2$* ***выполнимо*** **только** *для составных натуральных чисел A, B, C, имеющих общий делитель.*

Доказательство. Из сопоставления теорем 2 и 3 в части их условия и заключения следует истинность теоремы 4.

Напомним формулировку гипотезы Била: *Если $A^x + B^y = C^z$, где A, B, C, x, y, z - натуральные числа; $x, y, z > 2$, то A, B, C имеют общий простой делитель.* Следовательно, на основании теорем 2, 3, 4 можно утверждать, что гипотеза Била (***Beal's conjecture***) **доказана** и уточнена, так как общий делитель чисел A, B, C может быть не только простым, но и *составным* натуральным числом.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. История математики с древнейших времён до начала XIX столетия: в 3 т /под ред. А.П. Юшкевича, Т.1, М.: Наука, 1970. 350 с.

2. Агафонцев В. В. Системы счисления в диофантовых равенствах //XIII Международная конференция «Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы и приложения», посвящённая 85-летию со дня рождения профессора Сергея Сергеевича Рышкова.: Тезисы докладов. Международная конференция (Тула, 25-30 мая 2015 г.) — Тула, 2015. С. 256-259. [Электронный ресурс–https://poivs.tsput.ru/conf/international/XIII/down/Conference2015.pdf]

3. Агафонцев В. В. Лемма «ABC» в исследовании диофантовых равенств // Международная конференция «Н.И. Лобачевский и математическое образование в России».: Тезисы докладов. Международная конференция (Казань, 18-22 октября 2017 г.) —Казань, 2017. Т.2, С. 12-18.

4. Агафонцев В. В. Лемма «ABC» и Последняя теорема Ферма // III Международная конференция «Современные проблемы физико-математических наук (СПФМН-2017)».: Тезисы докладов. Международная конференция (Орёл, 23-26 ноября 2017 г.) — Орёл, 2017. С. 113 -119. [Электронный ресурс–https://elibrary.ru/item.asp?id=35260995].

5. Агафонцев В. В. От позиционных систем счисления к диофантовым равенствам // Инновации в науке: научный журнал —№8(84).—Новосибирск, Изд. АНС «СибАК», 2018. С. 12-17. [Электронный ресурс–https://sibac.info/journal/innovation/84].

6. Агафонцев В. В. Позиционные нумерации в диофантовых равенствах // IV Всероссийская конференция с международным участием «Современные проблемы физико-математических наук (СПФМН-2018)».: Тезисы докладов, часть I. Всероссийская конференция с международным участием (Орёл, 22-25 ноября 2018 г.) — Орёл, 2018. С. 93-100.

7. Wiles A. Modular elliptic curves and Fermat's last theorem //Annals of Mathematics, 141:3 (1995), pp. 443-551.

8. Соловьёв Ю. П. Гипотеза Таниямы и Последняя теорема Ферма //Соросовский образовательный журнал №2, 1998. С. 135-138.

УДК 511.9

О методах оценок критических определителей[1]

Ю. А. Басалов (Россия, г. Тула)
ТГПУ им. Л. Н. Толстого
e-mail: basalov_yurij@mail.ru

On methods of estimating critical determinants

Yu. A. Basalov (Russia, Tula)
TSPU of Leo Tolstoy
e-mail: basalov_yurij@mail.ru

В работе [1] сформулированы основные термины проблемы наилучших совсместных диофантовых приближений, в частности понятие константы наилучших диофантовых приближений C_n. Проблеме оценки константы наилучших диофантовых приближений посвященно множество исследований. В работах [1, 3] излагаются различные подходы к получению оценки константы наилучших диофантовых приближений снизу.

Один из подходов сводится вычислению критического определителя для звездного тела [6]

$$\mathbb{F}^{n+1} : F^{n+1}(x_0, \dots, x_n) = |x_0| \max_{1 \le i \le n} |x_i|^n < 1.$$

Г. Дэвенпорт [6] доказал, что $C_n = 1/\Delta(\mathbb{F}^{n+1})$, где $\Delta(\mathbb{F}^{n+1})$ – критический определитель $\mathbb{F}^{n+1}$. Ранее были получены оценки для значения этого критического определителя [4, 5]. Для этого использовалась оценка величины $V_{n,s}$ – объема наибольшего пареллелипипеда с центром в начале координат, содержащегося внутри фигуры

$$\mathbb{F}_{n,s} : f_{n,s} = \frac{1}{2^s} \prod_{i=1}^{s} |x_i^2 + x_{s+i}^2| \prod_{i=2s+1}^{n} |x_i| \le 1. \qquad (1)$$

Основной целью исследования является попытка обобщить подход, изоженный в [1] для оценки $V_{n,s}$, на оценку критического определителя произвольного звездного тела $\mathbb{F} : f < 1$. Схематично этот подход можно описать так:

- получение численной оценки критического определителя путём нахождения критической решетки;
- формирование граничных условий и нахождение аналитического выражения критической решетки;
- доказательство допустимости полученной решетки (подходы которые могут быть использованны для этого, изложены в [2]);
- доказательство того, что найденная решетка является критической (для это можно, например, использовать метод Морделла [2]).

[1]Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ: (грант №19-41-710004_р_а).

Заметим, что можно опустить достаточно трудоемкий последний пункт. В этом случае, вместо точно значения критического определителя будет получена его оценка сверху. Часто такой оценки вполне достаточно, например в случае задачи оценки константы наилучших диофантовых приближений. Следует отметить, что использование численных экспериментов для получения критических решеток будет особенно эффективно, в случае негладкого тела $\mathbb{F}$, так как в этом случае построение критической решетки является сложной задачей.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Басалов Ю.А. Об истории оценок константы наилучших совместных диофантовых приближений. // Чебышевский сборник. 2018. Т. 19, вып. 2. С. 388-405.
2. Касселс Дж. В. С. Введение в геометрию чисел: Пер. с англ. — М.: Мир, 1965.
3. Basalov Yu. On estimating the constant of simultaneous Diophantine approximation, Режим доступа: https://arxiv.org/abs/1804.05385
4. Cassels J. W. S., Simultaneous Diophantine approximation // J. London Math. Soc. 30 (1955), p. 119-121.
5. Cusick J. W. Estimates for Diophantine approximation constants // Journal of Number Theory (1980) p. 543-556.
6. Davenport. H. On a theorem of Furtwängler // J. London Math. Soc. 30 (1955). p. 186-195.

УДК 511.42

Целочисленные полиномы с малыми значениями производных в $\mathbb{R}$ и Q_p

М. Л. Безруков (Беларусь, г. Минск)
Институт математики Национальной Академии наук Беларуси
e-mail: maksim.bezrukov@icloud.com
В. И. Берник (Беларусь, г. Минск)
Институт математики Национальной Академии наук Беларуси
e-mail: bernik.vasili@mail.ru
М. А. Жур (Беларусь, г. Минск)
Институт математики Национальной Академии наук Беларуси
e-mail: maksimzhur@gmail.com

On integer polynomials with small values of derivatives in $\mathbb{R}$ and Q_p

M. L. Bezrukov (Belarus, Minsk)
Institute of Mathematics of National Academy of Sciences of Belarus
e-mail: maksim.bezrukov@icloud.com
V. I. Bernik (Belarus, Minsk)
Institute of Mathematics of National Academy of Sciences of Belarus
e-mail: bernik.vasili@mail.ru

M. A. Zhur (Belarus, Minsk)
Institute of Mathematics of National Academy of Sciences of Belarus
e-mail: maksimzhur@gmail.com

Одним из первых шагов в метрических задачах в теории диофантовых приближений являются оценки расстояния от действительных и комплексных чисел до алгебраических чисел. Для этого надо иметь оценку сверху для модуля полинома $P(x)$ в точке x и оценку снизу для модуля производной $P'(x)$ в точке x или в ближайшем к x корне α_1 полинома $P(x)$. Историю указанного направления и результаты полученные в XX веке можно найти в работе [1].

В данной работе рассматриваются обобщения этих задач на совместные приближения в полях действительных и p-адических чисел. Теорема 1 обобщает результаты Б. Фолькмана [2] и В. Г. Спринджука [1].

Пусть $Q > 1$ - натуральное число и

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0,\ a_j \in \mathbb{Z},\ 0 \leqslant j \leqslant n, \tag{1}$$

целочисленный полином степени $deg\, P = n$ и высоты $H(P) = max_{0\leqslant j\leqslant n}|a_j| < Q$.

Будем рассматривать полиномы над полем целых p-адических чисел на цилиндре K таком, что мера $\mu K = 1$, а также над полем вещественных чисел на отрезке $I = [0;1]$. Введем множества $\mathcal{P}_n(Q)$, $\mathcal{P}_n(Q,v)$, $\mathcal{P}_n(Q,v_1,v_2)$ следующим образом:

$$\mathcal{P}_n(Q) = \{P(\omega) \mid degP = n, H(P) \leqslant Q\} \tag{2}$$

$$\mathcal{P}_n(Q,v_1) = \{P(\omega) \in \mathcal{P}_n(Q) \mid \exists \alpha_1 \in I, P(\alpha_1) = 0, |P'(\alpha_1)| < Q^{1-v_1}\} \tag{3}$$

$$\mathcal{P}_n(Q,v_1,v_3) = \{P(\omega) \in \mathcal{P}_n(Q,v_1) \mid \exists \gamma_1 \in K, P(\gamma_1) = 0, |P'(\gamma_1)|_p < Q^{-v3}\} \tag{4}$$

Теорема 1. *При*

$$\begin{cases} 0 \leqslant v_1 + v_2 \leqslant 1 \\ 0 \leqslant v_1 \leqslant 1 \\ 0 \leqslant v_2 \leqslant 1 \end{cases} \tag{5}$$

справедливо неравенство

$$\#\mathcal{P}_n(Q,v_1,v_2) < c_1 Q^{n+1-(v_1+v_2)}, \tag{6}$$

где $c = c(n)$ – величина зависящая от n и не зависящая от H и Q.

Теорема 1 используется при исследовании распределения дискриминантов и результантов полиномов из $\mathcal{P}_n(Q)$ [3].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Спринджук В. Г. Проблема Малера в метрической теории чисел. – Минск: Наука и техника, 1967г. 182 с.

2. Volkmann B. Zur metrischen Theorie der S-Zahlen, II. J. reine und angew // Math., 213, № 1-2, 1961, 67-77.

3. Beresnevich V., Bernik V., Götze F. The distribution of close conjugate algebraicnumbers // Compos. Math., 146, № 5, 2010, 1165-1179.

———————————————————————————

On algebraic numbers in short intervals with rational points

V. I. Bernik (Belarus, Minsk)
Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus
e-mail: bernik@im.bas-net.by
N. I. Kalosha (Belarus, Minsk)
Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus
e-mail: kalosha@im.bas-net.by
N. V. Shamukova (Belarus, Minsk)
University of Civil Protection of the Republic of Belarus
e-mail: shamukova_n@mail.ru

УДК 511.42

Об алгебраических числах в коротких интервалах, содержащих рациональные точки

В. И. Берник (Беларусь, г. Минск)
Институт математики НАН Беларуси
e-mail: bernik@im.bas-net.by
Н. И. Калоша (Беларусь, г. Минск)
Институт математики НАН Беларуси
e-mail: kalosha@im.bas-net.by
Н. В. Шамукова (Беларусь, г. Минск)
Университет гражданской защиты МЧС Беларуси
e-mail: shamukova_n@mail.ru

A sequence of real numbers can satisfy a number of properties related to the evenness of its distribution. Examples of such properties are everywhere density, uniformity of the distribution and regularity, introduced by Baker and Schmidt. Regularity is defined as follows: for an arbitrary interval, we can choose sufficiently many numbers from the first N members of sequence lying in that interval whilst also specifying a minimal distance that separates them. The regularity of the set of real algebraic numbers ordered by height led to an exact lower bound for the Hausdorff measure of the set of real numbers with a given order of approximation by algebraic numbers [1].

The regularity property was instrumental toward proving analogues of Khinchine's theorem for polynomials, as well as nondegenerate curves and surfaces.

We are going to show that the regularity property can be generalized for small intervals, improving on the results of [2, 3].

Let $\deg P = n$ be the degree and $H = H(P) = \max_{0\leqslant j\leqslant n} |a_j|$ be the height of the polynomial

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0 \in \mathbb{Z}[x], \qquad a_n \neq 0.$$

For a sufficiently large Q, we define the class of polynomials

$$\mathcal{P}_n(Q) = \{P \in \mathbb{Z}[x] : \deg P \leqslant n, H(P) \leqslant Q\}.$$

Let $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ be the roots of $P(x)$. The constants $c_1, c_2, ...$ are assumed to depend on n but not on H or Q; $\#A$ denotes the cardinality of a finite set A; μB is the Lebesque measure of $B \subset \mathbb{R}$. The set of all roots of the polynomials $P(x) \in \mathcal{P}_n(Q)$ will be denoted as $T_n(Q)$.

Our main result is we specifying conditions on intervals $I \subset [0,1)$ of length $\mu I = Q^{-\gamma_1}$, where $\gamma_1 > 1$, which guarantee that such intervals contain algebraic numbers from the class $T_n(Q)$. The paper [4] gives that type of condition for $\gamma_1 = \frac{3}{2}$.

Let us introduce a classification of the intervals I. An interval I of length $|I| = Q^{-\gamma_1}$ is called a (k,v)-interval if it contains a real algebraic number β_1 of degree $\deg\beta_1 = k < n$ and height $H(\beta_1) \leqslant Q^v$, $0 \leqslant v \leqslant 1$.

Theorem 1. *For $\gamma_1 > k+nv$, (k,v)-intervals I contain no real algebraic points α_1, $\deg\alpha_1 = n$, $H(\alpha_1) \leqslant Q$.*

Theorem 2. *For $\gamma_1 > 1+v$ an interval I_3 contains at most $2^{n+7}Q^{n+1-\gamma_1}$ algebraic numbers β_1, $\deg\beta_1 = n$, $H(\beta_1) \leqslant Q$.*

Consider an interval I of length $|I| = Q^{-\gamma_1}$ which isn't a $(1,v)$-interval. Let $S(I)$ denote the number of algebraic numbers β of degree $\deg\beta = n$ and height $H(\beta) \leqslant Q$ lying in the interval I.

Theorem 3. *The number $S(I)$ can be estimated from below as*

$$S(I) \geqslant cQ^{n+1-\gamma_1}$$

for some constant $c = c(n)$.

REFERENCES

1. Bernik V. I. Application of the Hausdorff dimension in the theory of Diophantine approximations // Acta Arith. 1983. Vol. 42, no. 3. Pp. 219–253.

2. Bernik V. I., Götze F. Distribution of real algebraic numbers of arbitrary degree in short intervals // Izvestiya: Mathematics. 2015. Vol. 79, no. 1. Pp. 18–39.

3. Kaliada D. Distribution of real algebraic numbers of a given degree // Dokl. Nats. Akad. Nauk Belarusi. 2012. Vol. 56, no. 3. Pp. 28–33.

4. Bernik V. I., Götze F., Gusakova A. G. On points with algebraically conjugate coordinates close to smooth curves // Moscow J. of Comb. and Numb. Theor. 2016. Vol. 6, no. 2–3. Pp. 57–100.

———————————————————————

Number of integer polynomials from the special classes with the given discriminants

N. V. Budarina (Ireland, Dundalk)
Dundalk Institute of Technology
e-mail:natalia.budarina@dkit.ie

УДК 511.42

Количество целочисленных многочленов из специальных классов с заданными дискриминантами

Н. В. Бударина (Ирландия, г. Дандолк)
Дандолкский технологический институт
e-mail: natalia.budarina@dkit.ie

In recent years, the problem of counting polynomials with a small discriminant $D(P)$ has become a new branch of the theory of Diophantine approximation. Given a parameter $Q \in \mathbb{N}_{>1}$ and $v \in \mathbb{R}_{\geqslant 0}$, define the following set of integer polynomials:

$$\mathcal{P}_n(Q,v) = \{P(x) \in \mathbb{Z}[x], \deg P = n, \ H(P) \leqslant Q: \ 1 \leqslant |D(P)| < Q^{2n-2-2v}\}.$$

Establishing the correct lower and upper bounds for $\#\mathcal{P}_n(Q,v)$ is the goal of this branch of Diophantine approximation. We now briefly recall the results that have been obtained to date. In the case of quadratic polynomials it was shown in [1] that $\#\mathcal{P}_2(Q,v) \asymp Q^{3-2v}$ for $0 < v < 3/4$ and in the case of cubic polynomials it was established in [2] that $\#\mathcal{P}_3(Q,v) \asymp Q^{4-5v/3}$ for $0 \leqslant v < 3/5$. The most general and best estimate for the lower bound with arbitrary n was found in [3] where it was shown that $\#\mathcal{P}_n(Q,v) \gg Q^{n+1-(n+2)v/n}$, $0 \leqslant v \leqslant n-1$. It is much harder to get the upper bounds for $\#\mathcal{P}_n(Q,v)$ with arbitrary n.

Consider the case when the irreducible polynomial $P \in \mathcal{P}_n(Q,v)$ has only one root α_2 close to α_1 and satisfying

$$|\alpha_1 - \alpha_2| = Q^{-\rho}, \ \ \rho \geqslant n/2.$$

Let $\mathcal{P}'_n(Q,v)$ denote the set of such polynomials P. In this paper we obtain an upper bound and lower bound for the number of polynomials $P \in \mathcal{P}'_n(Q,v)$.

Theorem. *For any sufficiently large Q the following estimate*

$$\#\mathcal{P}'_n(Q,v) \asymp Q^{n+1-2v}$$

holds if

$$0 < v \leqslant (n+2)/4.$$

REFERENCES

1. Kaliada D., Götze F., Korolev M. On the number of quadratic polynomials with bounded discriminants, Retrieved from: arXiv:1308.2091v1.

2. Kaliada D., Götze F., Kukso O. The asymptotic number of integral cubic polynomials with bounded heights and discriminants // Lith. Math. J. 2014. Vol. 54, № 2. P. 150-165.

3. Bernik V. I., Beresnevich V. V., Götze F. Integral polynomials with small discriminants and resultants // Advances in Mathematics. 2016. Vol. 298, № 2. P. 393-412.

———————————————————

УДК 517.58

Об алгебраических тождествах между фундаментальными матрицами обобщённых гипергеометрических уравнений

В. А. Горелов (Россия, Москва)
Национальный исследовательский университет "МЭИ"
e-mail: gorelov.va@mail.ru

On algebraic identities between fundamental matrices of generalized hypergeometric equations

V. A. Gorelov (Russia, Moscow)
National research University "Moscow power engineering Institute"
e-mail: gorelov.va@mail.ru

Пусть $\mathbb{Z}^+ = \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\mathbb{Z}^- = \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$, $\mathbb{C}[z^{\pm 1}] = \mathbb{C}[z, z^{-1}]$, δ_i^j — символ Кронекера, $GL(q, K)$ — полная линейная группа матриц размера $q \times q$ с элементами из кольца K. При $\gamma, \beta \in \mathbb{C}$, $\vec{\mu} = (\mu_1, \dots, \mu_n) \in \mathbb{C}^n$ положим $\gamma\vec{\mu} + \beta = (\gamma\mu_1 + \beta, \dots, \gamma\mu_n + \beta)$. Для векторов $\vec{\mu} = (\mu_1, \dots, \mu_n)$, $\vec{\eta} = (\eta_1, \dots, \eta_n)$ будем писать $\vec{\mu} \sim \vec{\eta}$, если существует перестановка π чисел $1, \dots, n$ такая, что $\mu_i - \eta_{\pi(i)} \in \mathbb{Z}$, $i = 1, \dots, n$.

Обобщённые гипергеометрические функции (см. [1–3]) имеют вид

$$ {}_l\varphi_q(z) = {}_l\varphi_q(\vec{\nu}; \vec{\lambda}; z) = {}_{l+1}F_q\left(\begin{matrix} 1, \nu_1, \dots, \nu_l \\ \lambda_1, \dots, \lambda_q \end{matrix} \middle| z \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\nu_1)_n \dots (\nu_l)_n}{(\lambda_1)_n \dots (\lambda_q)_n} z^n, $$

где $0 \leqslant l \leqslant q$, $(\nu)_0 = 1$, $(\nu)_n = \nu(\nu+1)\dots(\nu+n-1)$, $\vec{\nu} = (\nu_1, \dots, \nu_l) \in \mathbb{C}^l$, $\vec{\lambda} \in (\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}^-)^q$.

Функция ${}_l\varphi_q(\vec{\nu}; \vec{\lambda}; z)$ удовлетворяет (обобщённому) гипергеометрическому дифференциальному уравнению

$$ L(\vec{\nu}; \vec{\lambda}; z)\, y = (\lambda_1 - 1)\dots(\lambda_q - 1), $$

где

$$ L(\vec{\nu}; \vec{\lambda}; z) \equiv \left(\prod_{j=1}^{q} (\delta + \lambda_j - 1) - z \prod_{k=1}^{l} (\delta + \nu_k) \right), \quad \delta = z\frac{d}{dz}. $$

При $\lambda_i - \lambda_k \notin \mathbb{Z}$, $i \neq k$ фундаментальную систему решений уравнения $L(\vec{\nu}; \vec{\lambda}; \alpha z^p)\, y = 0$, получаемого из $L(\vec{\nu}; \vec{\lambda}; z)\, y = 0$ подстановкой $z \longrightarrow \alpha z^p$, где $\alpha \in \mathbb{C}$, $p \in \mathbb{N}$, образуют, например, функции

$$ z^{(1-\lambda_k)p}{}_lF_{q-1}(\vec{\nu} + 1 - \lambda_k; \vec{\lambda} + 1 - \lambda_k; \alpha z^p), \quad k = 1, \dots, q. \qquad (1) $$

Если Φ_1, Φ_2 — произвольные фундаментальные матрицы двух линейных однородных дифференциальных уравнений с коэффициентами из $\mathbb{C}(z)$ и выполняется одно из равенств

$$ \Phi_1 = gB\Phi_2 C, \qquad \Phi_1(\Phi_2 C)^T = gB, $$

где $C \in GL(q, \mathbb{C})$, $B \in GL(q, \mathbb{C}(z))$, $g = g(z)$ — функция с условием $g'/g \in \mathbb{C}(z)$, то исходные дифференциальные уравнения называются коградиентными (соответственно контргградиентными). Эти понятия важны (см. [4]) для установления алгебраической зависимости и независимости функций.

Теорема 1. *Пусть* $\vec{\nu} \in \mathbb{C}^l$, $\vec{\lambda} \in \mathbb{C}^q$, $q \geqslant \max(2, l)$, $\alpha \in \mathbb{C}$, $p \in \mathbb{N}$, Φ_1, Φ_2 *— произвольные фундаментальные матрицы дифференциальных операторов* $L(\vec{\nu}; \vec{\lambda}; \alpha z^p)$ *и* $L(1 - \vec{\nu}; 2 - \vec{\lambda}; (-1)^{q-l}\alpha z^p)$. *Тогда:*

1°. *Существует матрица* $C \in GL(q, \mathbb{C})$ *такая, что*

$$ \Phi_1(\Phi_2 C)^T = B, \qquad (2) $$

где $B = \|b_{i,j}\|_{i,j} \in GL(q, \mathbb{C}[z^{\pm 1}, (1 - \alpha z^p)^\varepsilon])$, $\varepsilon = -\delta_q^l$, *причём*

$$ b_{k,q-k+1} = (-1)^k c_0 z^{1-q}(1 - \alpha z^p)^\varepsilon, \quad c_0 \in \mathbb{C}, \quad k = 1, \dots, q, $$

а выше этих элементов стоят нули.

2°. *Если* $\lambda_i - \lambda_k \notin \mathbb{N},\ i,k = 1,\ldots,q$, *а* Φ_1, Φ_2 *соответствуют множествам функций (1) и*

$$f_k = z^{(\lambda_k - 1)p}{}_lF_{q-1}(\lambda_k - \vec{\nu}; \lambda_k + 1 - \vec{\lambda}; (-1)^{q-l}\alpha z^p),\ k = 1,\ldots,q,$$

то в равенстве (2) $C = \mathrm{diag}(c_1,\ldots,c_q)$,

$$c_k = (-1)^k \prod_{1\leqslant i<j\leqslant q;\ i,j\neq k} (\lambda_i - \lambda_j); \qquad c_0 = p^{q-1} \prod_{1\leqslant i<j\leqslant q} (\lambda_i - \lambda_j),$$

пустое произведение скобок равно 1.

Теорема 1 даёт нетривиальные примеры контрградиентности дифференциальных уравнений.

Из [5, лемма 12] и [6] следует, что однородные уравнения, соответствующие уравнениям, которым удовлетворяют т. н. смежные гипергеометрические функции, являются коградиентными.

В следующей теореме решается вопрос о том, возможны ли коградиентность или контрградиентность гипергеометрических уравнений при несовпадающих l (см. также [7]).

Теорема 2. *Уравнения* $L(\vec{\nu}_k; \vec{\lambda}_k; \alpha_k z^{p_k})y = 0$, *где* $\alpha_k \in \mathbb{C}$, $p_k \in \mathbb{N}$, $\vec{\nu}_k = (\nu_{k,1},\ldots,\nu_{k,l_k}) \in \mathbb{C}^{l_k}$, $\vec{\lambda}_k = (\lambda_{k,1},\ldots,\ \lambda_{k,q_k}) \in (\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}^-)^{q_k}$, $k = 1, 2$, *с условием*

$$q_1 = q_2 = 2,\ l_1 = 1,\ l_2 = 0,\ p_2 = 2p_1,\ \alpha_1^2 = 16\alpha_2,$$

$$\vec{\lambda}_1 - \lambda_{1,j} \sim \pm 2(\vec{\lambda}_2 - \lambda_{2,1}),\ 1 \leqslant j \leqslant 2,\ 2\nu_{1,1} - \lambda_{1,1} - \lambda_{1,2} \in \mathbb{Z},$$

являются коградиентными и контрградиентными.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Siegel C.L. Über einige Anwendungen Diophantischer Approximationen // Abh. Preuss. Acad. Wiss., Phys. – Math. Kl. – 1929 – 1930. – № 1. – S. 1 – 70.

2. Шидловский А.Б. Трансцендентные числа. – М: Наука, 1987.

3. Люк Ю. Специальные математические функции и их аппроксимации. – М: Мир, 1980.

4. Beukers F., Brownawell W.D., Heckman G. Siegel normality // Annals of Math. – 1988. – V. 127. – P. 279 – 308.

5. Горелов В.А. Об алгебраической независимости значений обобщённых гипергеометрических функций // Матем. заметки. – 2013. – Т. 94, вып. 1. – С. 94 – 108.

6. Горелов В.А. On contiguity relations for generalized hypergeometric functions // Problemy Analiza – Issues of Analysis. – 2018. – V. 7(25). – № 2. – P. 39 – 46.

7. Горелов В.А. Об алгебраических тождествах между фундаментальными матрицами уравнений Бесселя и Куммера // Сибирские электронные математические известия. – 2019. – Т. 16. – С. 258 – 262.

УДК 511.361

О линейной независимости функций, продифференцированных по параметру

П. Л. Иванков (Россия, г. Москва)
Московский Государственный Технический Университет им. Н. Э. Баумана
e-mail: ivankovpl@mail.ru

On linear independence of the functions differentiated with respect to parameter

P. L. Ivankov (Russia, Moscow)
Bauman Moscow State Technical University
e-mail: ivankovpl@mail.ru

Рассмотрим при $k = 1, \ldots, t$, $j = 1, \ldots, m+2$ гипергеометрические функции

$$F_{kj}(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} z^{\nu} \nu^{j-1} \prod_{x=1}^{\nu} \frac{a(x)}{b(x)} \cdot \frac{1}{(x+\lambda_k)(x+A-\lambda_k)}. \tag{1}$$

В этом равенстве $a(x)$ и $b(x)$ – многочлены степеней соответственно r и m, $r \leqslant m+1$; $A, \lambda_1, \ldots, \lambda_t$ – некоторые комплексные числа, причем

$$a(x)b(x)(x+\lambda_k)(x+A-\lambda_k) \neq 0$$

при $x = 1, 2, \ldots$.

Рассмотрим также производные функций (1) по параметру λ_k, т.е. функции

$$F_{kl_kj}(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} z^{\nu} \nu^{j-1} \prod_{x=1}^{\nu} \frac{a(x)}{b(x)} \cdot \frac{\partial^{l_k}}{\partial \lambda_k^{l_k}} \prod_{x=1}^{\nu} \frac{1}{(x+\lambda_k)(x+A-\lambda_k)}\,, \tag{2}$$

$k = 1, \ldots, t,\ l_k = 0, 1, \ldots, \tau_k - 1,\ j = 1, \ldots, m+2\,.$

Установить условия линейной независимости функций (1) над полем рациональных дробей можно с помощью теорем из работ [1] и [2]. В докладе будут указаны дополнительные ограничения на эти функции, при выполнении которых линейно независимыми будут функции (1) и (2).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Galochkin A.I. On effective bounds for certain linear forms // New Advances in Transcendence theory, Cambridge, New Rochell, Melbourne, Sydney. 1988 P. 207–215.

2. Galochkin A.I. Linear independence and transcendence of values of hypergeometric functions // Moscow Journal of Combinatorics and Number Theory. 2011. V. 1, iss. 2. P. 27–32. (2011).

———————————————————————————

УДК 511.361

О линейных приближающих формах

П. Л. Иванков (Россия, г. Москва)
Московский Государственный Технический Университет им. Н. Э. Баумана
e-mail: ivankovpl@mail.ru

On linear approximating forms

P. L. Ivankov (Russia, Moscow)
Bauman Moscow State Technical University
e-mail: ivankovpl@mail.ru

Рассмотрим функции

$$F_{kl_kj}(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} z^{\nu} \chi_{kj}(\nu) \prod_{x=1}^{\nu} \frac{a(x)}{b(x)} \cdot \frac{\partial^{l_k}}{\partial \lambda_k^{l_k}} \prod_{x=1}^{\nu} \frac{1}{(x+\lambda_k)(x+A-\lambda_k)}, \qquad (1)$$

где $k = 1, \ldots, t$, $l_k = 0, 1, \ldots, \tau_k - 1$, $j = 1, \ldots, m+2$; $a(x) = (x+\alpha_1)\ldots(x+\alpha_r)$, $b(x) = (x+\beta_1)\ldots(x+\beta_m)$, $0 \leqslant r \leqslant m+1$; $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$, $\beta_1, \ldots, \beta_m$, A, $\lambda_1, \ldots, \lambda_t$ – некоторые комплексные числа, причем $a(x)b(x)(x+\lambda_k)(x+A-\lambda_k) \neq 0$ при $x = 1, 2, \ldots$;

$$\chi_{kj}(\nu) = \prod_{u=1}^{j-1} (\nu + \beta_u),\ k = 1, \ldots, t,\ j = 1, \ldots, m+1,\ \chi_{k,m+2}(\nu) = \chi_{k,m+1}(\nu)(\nu + \lambda_k).$$

Пусть $P_0(z)$ и $P_{kl_kj}(z)$, $k = 1, \ldots, t$, $l_k = 1, \ldots, \tau_k - 1$, $j = 1, \ldots, m+2$, – многочлены, степени которых ограничены сверху числом n. Рассмотрим линейную форму

$$R(z) = P_0(z) + \sum_{k=1}^{t} \sum_{l_k=0}^{\tau_k - 1} \sum_{j=1}^{m+2} P_{kl_kj}(z) F_{kl_kj}(z)\,.$$

В докладе будет рассказано об эффективной конструкции такой формы, имеющей при $z = 0$ порядок нуля, близкий к максимально возможному. Линейную форму $R(z)$ можно использовать для получения арифметических результатов о значениях функций вида (1).

———————————————————————————

УДК 511.42

Оценки сверху для количества многочленов с заданными дискриминантами и близкими корнями

М. А. Калугина (Беларусь, г. Минск)
Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники
e-mail: m.kalugina@bsuir.by
М. В. Ламчановская (Беларусь, г. Минск)
Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники
e-mail: lammv@mail.ru

Estimates from above for the number of polynomials with given discriminants and close roots

M. A. Kaluguina (Belarus, Minsk)
Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics
e-mail: m.kalugina@bsuir.by
M. V. Lamchanovckaya (Belarus, Minsk)
Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics
e-mail: lammv@mail.ru

Пусть $Q > 1$ - натуральное число, а

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0,\ a_j \in \mathbb{Z},\ 0 \leqslant j \leqslant n, - \tag{1}$$

целочисленный полином степени n и высоты $H = H(P) = \max_{0\leqslant j\leqslant n}|a_j| \leqslant Q$.

Дискриминантом многочлена (1) с корнями α_1, α_2,…,α_n называется число

$$D(P) = a_n^{2n-2} \prod_{1\leqslant i<j\leqslant n} (\alpha_i - \alpha_j)^2. \tag{2}$$

Если $\alpha_j \in \mathbb{Z}$, то и дискриминант $D(P) \in \mathbb{Z}$.

Введем для $Q \in \mathbb{N}$ и $v \geq 0$ класс полиномов $\mathcal{P}_n(Q,v)$ следующим образом:

$$\mathcal{P}_n(Q,v) = \{P(x) \mid \deg P \leqslant n,\ 1 \leqslant D(P) < Q^{2n-2-2v}\}. \tag{3}$$

В приложениях оценок дискриминантов [1] к метрической теории диофантовых приближений важны оценки для количества $\#\mathcal{P}_n(Q,v)$. В [2] доказано, что

$$\#\mathcal{P}_n(Q,v) > c_1(n)Q^{n+1-\frac{n+2}{n}v}. \tag{4}$$

Неравенство (4) справедливо и для подкласса $\mathcal{P}_n(Q,v)$ многочленов с близкими корнями.

Оценки сверху получить сложнее, они пока получены только в частных случаях [3].

В данной работе предполагается, что корни α_1, α_2,…,α_n образуют один кластер, т. е. для них выполняются следующие условия:

$$\begin{cases} |\alpha_1 - \alpha_j| = Q^{-\rho_j},\ 1 \leqslant j \leqslant n, \\ |\alpha_i - \alpha_j| \asymp |\alpha_1 - \alpha_j|,\ 1 \leqslant i < j \leqslant n. \end{cases} \tag{5}$$

При соблюдении указанных выше ограничений (3) на дискриминанты и условий (5) на корни получена оценка сверху для $\mathcal{P}_n(Q,v)$, совпадающая с оценкой снизу в неравенстве (4) с точностью до константы, зависящей от n.

При доказательстве используется обобщение леммы Гельфонда из теории трансцендентных чисел, в которой величины полиномов связываются с мерой интервалов малости.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Спринджук В. Г. Проблема Малера в метрической теории чисел. – Минск: Наука и техника, 1967.

2. Beresnevich V., Bernik V., Götze F. The distribution of close conjugate algebraicnumbers // Compos. Math., 146, № 5, 2010, P. 1165-1179.

3. Коледа Д. В. О частоте целочисленных многочленов с заданным числом близких корней // Труды Института Математики. Т. 20. №2. 2012. С. 51-63.

УДК 511.42

Сумма мер малых значений неприводимых полиномов

О. Н. Кемеш (Беларусь, Минск)
Белорусский Государственный Аграрный Технический Университет
e-mail: oksana.kemesh@tut.by
И. М. Морозова (Беларусь, Минск)
Белорусский Государственный Аграрный Технический Университет
e-mail: inna.morozova@tut.by
Ж. И. Пантелеева (Беларусь, Минск)
Белорусский Государственный Аграрный Технический Университет
e-mail: janna-85@list.ru
О. В. Рыкова (Беларусь, Минск)
Белорусский Государственный Аграрный Технический Университет
e-mail: oly8521@yandex.ru

Sum of measures of small values of irreducible polynomials

O. N. Kemesh (Belarus, Minsk)
Belarusian State Agrarian Technical University
e-mail: oksana.kemesh@tut.by
I. M. Morozova (Belarus, Minsk)
Belarusian State Agrarian Technical University
e-mail: inna.morozova@tut.by
Zh. I. Panteleeva (Belarus, Minsk)
Belarusian State Agrarian Technical University
e-mail: janna-85@list.ru
O. V. Rykova (Belarus, Minsk)
Belarusian State Agrarian Technical University
e-mail: oly8521@yandex.ru

Пусть $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0 \in Z[x]$ – полином степени $\deg P = n$ и высоты $H = H(P) = \max_{0 \leqslant j \leqslant n} |a_j|$. При $\varepsilon > 0$ и натуральном $Q > 1$ обозначим через $\sigma(P)$ меру Лебега μ множества $x \in R$, для которых неравенство

$$|P(x)| < Q^{-n-\varepsilon} \tag{1}$$

имеет хотя бы одно решение в полиномах $P(x)$, $\deg P = n$, $H(P) \leqslant Q$. Разрешимость неравенства (1) является основой метрической теории диофантовых приближений, которая берет начало с работы Малера [1]. Его основную проблему решил Спринджук [2]. Обозначим через

$$S_n(Q) = \sum_p \mu\sigma(P), \tag{2}$$

где в (2) суммирование ведется по всем P, $\deg P = n$, $H(P) \leqslant Q$. Оценка сверху для $S_n(Q)$ важна в метрической теории чисел и при оценке сверху размерности Хаусдорфа множества решений неравенства (1), когда правая часть равна H^{-w}, $w > n$ [3]. Пусть $S'_n(Q)$ – подмножество $S_n(Q)$, когда суммирование в (2) ведется по неприводимым полиномам. Справедливы оценки:

Теорема 1. *Верно неравенство* $\lim\limits_{Q\to\infty} \mu S_n(Q) = \infty$.

Теорема 2. *Для любого* $\varepsilon > 0$ *при некотором* $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon$ *и* $n \leqslant 3$ *справедливо неравенство* $\mu\, S_n'(Q) < Q^{-\varepsilon_1}$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Mahler K. Über das Mass der Menge aller S-Zahlen // Math. Ann. 1932. S. 106.
2. Спринджук В. Г. Проблема Малера в метрической теории чисел. — Минск: Наука и техника, 1967. — 184 с.
3. Берник В. И. О точном порядке приближения нуля значениями целочисленных многочленов // Acta Arithmetica. T. 53. C. 17–28.

———————————————————————————

УДК 511.32

Геометрическое и арифметическое описание экстремальных многообразий в метрической теории диофантовых приближений

Э. И. Ковалевская (Республика Беларусь, г. Минск)
e-mail: ekovalevsk@mail.ru

Geometric and arithmetic description of extremal manifolds in metric theory of Diophantine approximation

E. I. Kavaleuskaya (Republic Belarus, Minsk)
e-mail: ekovalevsk@mail.ru

Этот тезис дополняет [1], где приведены две фундаментальные теоремы метрической теории диофантовых приближений зависимых величин. Одну из них [7, с. 78-87, 90-93] доказал В. Г. Спринджук. Другую получили Д. И. Клейнбок и Г. А. Маргулис [8]. Первая теорема (1977 г.) была доказана методом *тригонометрических сумм.* Вторая теорема (1998 г.) - *методами эргодической теории.* Для ее доказательства была найдена связь между диофантовыми приближения и однородными динамическими системами.

Здесь мы приведем некоторые классы экстремальных многообразий, определяемых их геометрическими или арифметическими свойствами. Они были доказаны разными методами и входят в список легко обозримых многообразий.

Напомним суть рассматриваемой теории.

Пусть $\gamma_1, \ldots, \gamma_n \in \mathbb{R}$. Обозначим через $w(\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$ точную верхнюю грань таких $w > 0$, для которых неравенство

$$||\gamma_1 a_1 + \cdots + \gamma_n a_n|| < a^{-w}, \quad a = \max_{1\leqslant i\leqslant n} |a_i| \neq 0, \tag{1}$$

где $||x||$ означает расстояние от $x \in \mathbb{R}$ до ближайшего целого, имеет бесконечно много решений в наборах целых чисел $(a_1, \ldots, a_n)$.

Из "принципа ящиков" Дирихле следует, что $w(\gamma_1,\ldots,\gamma_n)\geqslant n$. А. Я. Хинчин (1926 г.) показал, что $w(\gamma_1,\ldots,\gamma_n)=n$. Такие числа $\gamma_1,\ldots,\gamma_n$ стали называть "*плохо*" *аппроксимируемыми* числами. Тогда же Хинчин доказал, что почти все (в смысле меры Лебега) точки $\mathbb{R}^n$ являются системами "*плохо*" *аппроксимируемых* чисел. Из работ [4-6], [10] следовало, что в $\mathbb{R}^n$ есть многообразия размерности 1 с тем же свойством аппроксимации рациональными числами, что и все пространство. Отсюда возникла следующая проблема:

каким условиям должно удовлетворять многообразие Γ, $\Gamma\subset\mathbb{R}^n$, *размерности меньше* n, $\dim\Gamma<n$, *чтобы почти все его точки (в смысле меры на* Γ*) были "плохо" аппроксимируемыми числами*?

Следуя Спринджуку, такие многообразия Γ стали называть *экстремальными*. Так как $\dim\Gamma<n$, то между точками на Γ существуют функциональные связи. Таким образом, в 50-х годах прошлого столетия стала формироваться метрическая теория диофантовых приближений *зависимых величин*, которая исследует многообразия на экстремальность.

Чтобы упростить формулировку результатов, будем считать, что Γ определено в $\mathbb{R}^{m+n}$, $\dim\Gamma=m$,

$$\Gamma=(t_1,\ldots,t_m,f_1,\ldots,f_n),$$

где $t_1,\ldots,t_m$ — независимые переменные в некоторой области $\Omega\subseteq\mathbb{R}^m$, и $f_1,\ldots,f_n$ — непрерывные функции от $(t_1,\ldots,t_m)\subseteq\Omega$. Экстремальность следующих двух многообразий Γ обусловлена *аналитическими* (геометрическими) ограничениями.

Теорема 1. ([10]). *Пусть* $\Gamma=(x(s),y(s))$ *— кривая в* $\mathbb{R}^2$*, где параметр* s *— длина дуги, причем* $x^{'''}(s)$, $y^{'''}(s)$ *существуют и непрерывны, а кривизна кривой*

$$k(s)=x^{'}(s)y^{''}(s)-x^{''}(s)y^{'}(s)\neq 0$$

для почти всех s. *Тогда кривая* Γ *экстремальна.*

Следующая теорема является двумерным аналогом теоремы 1.

Теорема 2. ([3]). *Пусть поверхность* $\Gamma\subset\mathbb{R}^3$ *задана уравнением* $z=f(x,y)$, *где* $f(x,y)$ *— трижды непрерывно дифференцируемая функция в* $\mathbb{R}^2$. *Пусть полная (гауссова) кривизна* Γ *отлична от нуля почти всюду в* $\mathbb{R}^2$. *Тогда поверхность* Γ *— экстремальна.*

Экстремальность следующих трех многообразий Γ обусловлена *арифметическими* ограничениями.

Теорема 3. ([10]). *Пусть* Γ *— прямая в* $\mathbb{R}^n$, $n\geqslant 2$, $\Gamma=(t,\alpha_1t+\beta_1,\ldots,\alpha_{n-1}t+\beta_{n-1})$, *где или* $(\alpha_1,\ldots,\alpha_{n-1})$, *или* $(\beta_1,\ldots,\beta_{n-1})$ *— плохо аппроксимируемые числа. Тогда прямая* Γ *экстремальна.*

Теорема 4. ([9]). *Пусть* $k_1,\ldots,k_m\in\mathbb{N}$, $K=\max(k_1,\ldots,k_m)$, $K>1$, $k=\min(k_1,\ldots,k_m)$. *Предположим, что действительные числа* $\lambda_1,\ldots,\lambda_m$ *удовлетворяют условию: неравенство*

$$||\lambda_1a_1+\cdots+\lambda_ma_m||<(a_1^{'}\cdots a_m^{'})^{-1-\gamma},\quad a_i^{'}=|a_i|+1,$$

при некотором фиксированном γ, $0<\gamma<(k_1+\cdots+k_m)m^{-2}$, *имеет только конечное число решений в целых числах* $a_1,\ldots,a_m$. *Тогда произведение многообразий*

$$\Gamma_i=(\lambda_i,\lambda_ix,\lambda_ix^2,\ldots,\lambda_ix^{k_i})\quad(i=1,\ldots,m)$$

экстремально, если : 1) $m\geqslant 2$, $K=1$ *и* 2) $m\gg K^3k^{-1}\ln K$, $K\geqslant 2$.

В следующей теореме многообразие задается квадратичными многочленами.

Теорема 5. ([2]). *Для любого данного $\delta > 0$ неравенство*

$$\prod_{1\leqslant i\leqslant m} ||t_i q|| \prod_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant m} ||t_i t_j q|| < q^{-1-\delta}$$

имеет только конечное число решений в целых числах $q > 0$ для почти всех $(t_1, \ldots, t_m) \in \mathbb{R}^m$.

Отметим, что в теоремах 1, 3–5 размерность $\dim \Gamma = 1$, а в теореме 2 размерность $\dim \Gamma = 2$. Для доказательства теорем 1 и 3 применяется аналитический метод. Для доказательства теорем 2, 4 и 5 применяется метод тригонометрических сумм.

Работа выполнена в рамках ГП "Конвергенция-2020".

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ковалевская Э. И. Материалы конференции // XV Международная конференция "Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы и приложения посвященная столетию со дня рождения доктора физико-математических наук, профессора Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова, Коробова Николая Михайловича: тезисы докладов международной конференции (Тула, 28-31 мая 2018 г.) — Тула, 2018. С. 257-260.

2. Ковалевская Э. И. Диофантовы приближения с квадратичными многочленами // Весці АН БССР. Сер. фiз.-мат. н. 2018. № 4. С. 5-14.

3. Ковалевская Э. И. Одно геометрическое свойство экстремальной поверхности // Матем. заметки. 1978. № 23(2). С. 177-181.

4. Кубилюс Й. П. О применении метода академика Виноградова к решению одной задачи метрической теории чисел // Докл. АН СССР. 1949. Том 67. С. 783-786.

5. Кубилюс Й. П. О применении метода академика Виноградова к решению одной задачи метрической теории чисел // Докл. АН СССР. 1949. Том 67. С. 783-786.

6. Спринджук В. Г. Проблема Малера в метрической теории чисел // Минск: Изд-во Наука и техника, 1967. 184 с.

7. Спринджук В. Г. Метрическая теория диофантовых приближений / В. Г. Спринджук // Москва: Изд-во Наука, 1977. 144 с.

8. Kleinbock D. Y., Margulis G. A. Flows on homogeneous spaces and Diophantine approximation on manifolds // Ann. Math. 1998. Vol. 148. P. 339-360.

9. Kovalevskaja E. I. Metric theorems on the approximation of zero by a linear combination of polynomials with integral coefficients, Acta Arith. 1973. Vol. 25. P. 93-104.

10. Schmidt W. M. Metrische Sätze Über simultane Approximationabhängiger Grössen // Monatch. Math. 1964. Vol. 68, No. 2. P. 154-166.

УДК 511.35, 511.48, 511.75

Некоторые вопросы локального распределения алгебраических чисел

Д. В. Коледа (Беларусь, г. Минск)
Институт математики НАН Беларуси
e-mail: koledad@rambler.ru

Some questions on the local distribution of algebraic numbers

D. V. Koleda (Belarus, Minsk)
Institute of Mathematics of NAS of Belarus
e-mail: koledad@rambler.ru

Известно, что распределение рациональных чисел со знаменателем, не превосходящим Q, на любом отрезке при $Q \to +\infty$ стремится к равномерному. Для алгебраического числа аналогом знаменателя является так называемая высота, определяемая через коэффициенты минимального многочлена алгебраического числа. Отсюда возникает естественная задача найти распределение алгебраических чисел заданной степени $n \geqslant 2$ с высотой не больше Q, когда Q неограниченно возрастает. Данная задача была решена для вещественных алгебраических чисел в [4], а для комплексных — в [2]. На следующем уровне обобщения можно задать вопрос о совместном распределении сопряжённых алгебраических чисел степени n и высоты не больше Q (см. [3]). Здесь мы затронем вопросы, связанные с областями, не содержащими алгебраических чисел.

Пусть $p(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$ — многочлен степени n, и пусть $H(p)$ обозначает его (*обычную*) *высоту*, определяемую согласно $H(p) = \max_{0\leqslant i\leqslant n} |a_i|$.

Под *минимальным многочленом* алгебраического числа $\alpha \in \mathbb{C}$ будем понимать ненулевой многочлен $p_\alpha \in \mathbb{Z}[x]$ наименьшей степени $\deg(p)$ со взаимно простыми коэффициентами и положительным старшим коэффициентом, такой что $p_\alpha(\alpha) = 0$. *Степень* $\deg(\alpha)$ и *высота* $H(\alpha)$ алгебраического числа α по определению суть степень и высота минимального многочлена p_α.

Алгебраической (k,l)-*точкой* будем называть такой элемент $(\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \beta_1, \ldots, \beta_l)$ пространства $\mathbb{R}^k \times \mathbb{C}_+^l$, у которого вещественные координаты $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ и комплексные координаты $\beta_1, \ldots, \beta_l$, суть различные (алгебраически) сопряжённые алгебраические числа, т. е. являются различными корнями их общего минимального многочлена с целыми коэффициентами. Здесь $\mathbb{C}_+$ обозначает верхнюю комплексную полуплоскость. Ограничение на комплексные координаты (т. е. требование $\beta_j \in \mathbb{C}_+$) устраняет неоднозначности и сопутствующие им сложности в словесном описании распределения алгебраических (k,l)-точек.

Степень и *высоту* алгебраической точки определим как степень и высоту её координат как алгебраических чисел.

Мощность конечного множества S будем обозначать как $\#S$, а меру $I \subset \mathbb{R}$ — как $|I|$. Пространство $\mathbb{R}^k \times \mathbb{C}^l$ мы рассматриваем как евклидово пространство $\mathbb{R}^{k+2l}$.

Обозначим через $\mathbb{A}_n(k,l)$ множество алгебраических (k,l)-точек степени n (над $\mathbb{Q}$). Для $Q \geqslant 1$ и множества $S \subseteq \mathbb{R}^k \times \mathbb{C}^l$ определим считающую функцию

$$\Phi_{k,l}(Q,S) = \#\left\{\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{A}_n(k,l) \cap S : H(\boldsymbol{\alpha}) \leqslant Q\right\}.$$

В [3] было доказано, что для любой фиксированной области $B \subseteq \mathbb{R}^k \times \mathbb{C}^l$, у которой граница ∂B имеет нулевую меру Лебега, верно предельное равенство

$$\lim_{Q\to\infty} \frac{\Phi_{k,l}(Q,B)}{Q^{n+1}} = \frac{2^n}{\zeta(n+1)} \int_B \rho_{k,l}(\mathbf{v})\, d\mathbf{v}, \qquad (1)$$

где $\rho_{k,l} : \mathbb{R}^k \times \mathbb{C}^l \to \mathbb{R}$ — непрерывная положительная функция, $d\mathbf{v}$ — элемент объёма в пространстве $\mathbb{R}^k \times \mathbb{C}^l$, рассматриваемом как $\mathbb{R}^{k+2l}$.

При фиксированном n функции $\rho_{k,l}$ с одинаковым значением $k + 2l$ оказываются "проявлениями" одной и той же функции $\rho_m : \mathbb{C}^m \to \mathbb{R}$ с $m = k + 2l$. В строгой форме эта связь выглядит так [3]:

$$\rho_{k,l}(x_1, \dots, x_k, z_1, \dots, z_l) = 2^l \rho_{k+2l}(x_1, \dots, x_k, z_1, \overline{z_1}, \dots, z_l, \overline{z_l}).$$

В частности, при $l = 0$ верно соотношение $\rho_{k,0}(x_1, \dots, x_k) = \rho_k(x_1, \dots, x_k)$, т. е. функции ρ_m описывают совместное распределение вещественных сопряжённых алгебраических чисел.

Функция $\rho_m(\mathbf{x})$ может быть представлена в виде произведения

$$\rho_m(\mathbf{x}) = \chi_m(\mathbf{x}) \prod_{1 \le i < j \le m} |x_i - x_j|,$$

где $\chi_m : \mathbb{C}^m \to \mathbb{R}$ — непрерывная функция. Явное выражение для χ_m можно найти в [3].

С точностью до постоянного множителя $\rho_m(\mathbf{x})$ совпадает с корреляционной функцией корней случайного многочлена с независимыми равномерно распределёнными в $[-1, 1]$ коэффициентами (см. [1] и [3]).

Предельное равенство (1) ничего не говорит о скорости сходимости и, вообще говоря, может оказаться неверным, если позволить области B зависеть от Q. Чтобы дать равномерную оценку скорости сходимости, нужно рассматривать области B с более конкретными условиями на «извилистость» границы ∂B. То есть задача состоит в том, чтобы оценить равномерно по всем областям B (из рассматриваемого класса) величину

$$r_{k,l}(Q, B) := \left| \frac{\Phi_{k,l}(Q, B)}{Q^{n+1}} - \frac{2^n}{\zeta(n+1)} \int_B \rho_{k,l}(\mathbf{v}) \, d\mathbf{v} \right|.$$

Как и функции $\Phi_{k,l}(Q; B)$ и $\rho_{k,l}(\mathbf{v})$, величина $r_{k,l}(Q, B)$ зависит от степени n, от k и l. Чтобы не загромождать формулы, мы не указываем явно зависимость величин $\Phi_{k,l}(Q; B)$, $\rho_{k,l}(\mathbf{v})$ и $r_{k,l}(Q, B)$ от степени n.

Один из естественных классов областей, для которых удаётся получить равномерную оценку для $r_{k,l}(Q, B)$, составляют области с алгебраическими границами. Обозначим через $\mathfrak{A}_{s,d,m}$ класс областей $B \subseteq \mathbb{R}^s$, граница которых состоит из объединения не более чем m алгебраических множеств, каждое из которых имеет степень не выше d. Очевидно, что $\mathfrak{A}_{s,d_1,m_1} \subseteq \mathfrak{A}_{s,d_2,m_2}$, если одновременно $d_1 \leqslant d_2$ и $m_1 \leqslant m_2$.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 1 ([3]). *Пусть $n \geqslant 2, k \geqslant 0, l \geqslant 0$ — фиксированные целые числа, такие что $n \geqslant k + 2l \geqslant 1$. Для любой области $B \subset \mathbb{R}^k \times \mathbb{C}^l$, принадлежащей классу $\mathfrak{A}_{k+2l,d,m}$, справедливо неравенство:*

$$r_{k,l}(Q, B) \leqslant \begin{cases} C_2 Q^{-1} \log Q, & \text{при } n = 2 \text{ и } k \geqslant 1, \\ C_n Q^{-1}, & \text{в остальных случаях,} \end{cases} \tag{2}$$

где постоянная C_n зависит только от n и параметров d и m класса $\mathfrak{A}_{k+2l,d,m}$, из которого взята область B.

Логарифмический множитель в остаточном члене в (2) появляется при $n = 2$ и $k = 1, 2$. Однако можно показать, что влияние этого логарифма на оценку $r_{k,l}(Q, B)$ снижается, когда мера области B уменьшается. Эта зависимость выражается следующей теоремой.

Теорема 2. *Пусть $1 \leqslant k \leqslant n = 2$, и $B \subseteq \mathbb{R}^k$ — область из класса $\mathfrak{A}_{k,d,m}$. Тогда*

$$r_{k,0}(Q,B) \leqslant \begin{cases} C\left(\dfrac{\log Q}{Q}\displaystyle\int_B \frac{dx}{1+x^2} + \frac{1}{Q}\right), & \text{при } k=1,\\ C\left(\dfrac{\log Q}{Q}\displaystyle\int_B \frac{dx\,dy}{(1+x^2)(1+y^2)} + \frac{1}{Q}\right), & \text{при } k=2, \end{cases}$$

где постоянная C зависит только от параметров d и m.

Отметим, что в случае $k = 1$ область $B \in \mathfrak{A}_{1,d,m}$ представляет собой объединение конечного набора промежутков, количество которых определяется параметрами d и m.

Возникает вопрос, насколько точна оценка (2). Один из способов подойти к ответу на него — найти такие области $B \in \mathfrak{A}_{k+2l,d,m}$, для которых $r_{k,l}(Q,B)$ легко оценивается снизу. Наиболее очевидным выбором является поиск областей $B_{\text{пуст}} \in \mathfrak{A}_{k+2l,d,m}$, свободных от алгебраических точек. Для таких областей

$$r_{k,l}(Q, B_{\text{пуст}}) = \frac{2^n}{\zeta(n+1)} \int_{B_{\text{пуст}}} \rho_{k,l}(\mathbf{v})\, d\mathbf{v},$$

и если существует постоянная C, не зависящая от $B_{\text{пуст}}$ и Q, такая что $\rho_{k,l}(\mathbf{v}) \geqslant 2^{-n}\zeta(n+1)C$ для любых $\mathbf{v} \in B_{\text{пуст}}$, нижняя оценка принимает вид

$$r_{k,l}(Q, B_{\text{пуст}}) \geqslant C \operatorname{mes}_{k+2l} B_{\text{пуст}}.$$

Эффективность такого подхода определяется тем, насколько удачные множества $B_{\text{пуст}}$ были найдены.

Можно показать, что верно следующее утверждение.

Лемма 1. *Пусть z_0 — корень многочлена $q(z) = az^2 + bz + c \in \mathbb{Z}[z]$, удовлетворяющего условиям $a > 0$, $\gcd(a,b,c) = 1$ и $b^2 - 4ac \leqslant 0$. Тогда при*

$$r_0 = r_0(z_0, Q) = \frac{2}{n(n+1)} \cdot \frac{1}{\max(a,c)^{n/2}} \cdot Q^{-1},$$

в круге $|z - z_0| \leqslant r_0$ не будет алгебраических чисел α степени $\deg\alpha \leqslant n$ и высоты $H(\alpha) \leqslant Q$.

С использованием леммы 1 данный подход позволяет доказать следующую теорему.

Теорема 3. *Пусть $n \geqslant 1$, $k \geqslant 0$, $l \geqslant 0$ — фиксированные целые, такие что $n \geqslant k+2l \geqslant 1$. Для любой фиксированной области $B_0 \subseteq \mathbb{R}^k \times \mathbb{C}^l$ найдётся последовательность областей $B_Q \subset B_0$, таких что $B_Q \in \mathfrak{A}_{k+2l,d,m}$ и для любых $Q \geqslant 1$ верно неравенство*

$$r_{k,l}(Q, B_Q) \geqslant \begin{cases} C_n(B_0)\, Q^{-1}, & \text{при } k \geqslant 1,\\ C_n(B_0)\, Q^{-2}, & \text{при } k = 0, \end{cases} \tag{3}$$

где постоянную $C_n(B_0)$ можно выбрать так, чтобы она зависела только от степени n и области B_0.

Сравнив (2) и (3), можно заметить, что при $k = 0$, т. е. когда рассматривается распределение только комплексных алгебраических чисел, имеется степенное расхождение между верхними и нижними оценками. Таким образом, в случае чисто комплексных алгебраических точек (т. е. при $k = 0$) либо верхняя оценка (2) завышена, либо круги (при $l = 1$) и цилиндры (при $l \geqslant 2$), построенные по лемме 1, не дают максимального возможного порядка по Q. Поэтому вопрос о том, насколько точна оценка (2) для $r_{0,l}(Q,B)$, пока остаётся открытым.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Запорожец Д. Н. Случайные полиномы и геометрическая вероятность // ДАН. 2005. Т. 400, № 3. С. 299–303.
2. Götze F., Kaliada D., Zaporozhets D. Distribution of complex algebraic numbers // Proc. Amer. Math. Soc. 2017. Vol. 145, № 1. P. 61–71.
3. Götze F., Koleda D., Zaporozhets D., Joint distribution of conjugate algebraic numbers: a random polynomial approach [arXiv.org], Режим доступа: https://arxiv.org/abs/1703.02289.
4. Koleda D. V. On the density function of the distribution of real algebraic numbers // J. Théor. Nombres Bordeaux. 2017. Vol. 29, № 1. P. 179–200.

УДК 511.32

Об арифметических свойствах целых периодических функций, удовлетворяющих алгебраическим дифференциальным уравнениям

А. Я. Янченко (Россия, г. Москва)
НИУ «МЭИ»
e-mail: YanchenkoAY@mpei.ru

On arithmetic properties of entire periodic functions satisfying algebraic differential equations

A. Ya. Yanchenko (Russia, Moscow)
NRU «MPEI»
e-mail: YanchenkoAY@mpei.ru

Будем, как обычно, обозначать через $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ множества целых, действительных и комплексных чисел; через $A[\omega_1, \ldots, \omega_n]$ — кольцо многочленов от переменных $\omega_1, \ldots, \omega_n$ над кольцом A.

Для любой целой функции $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ положим при всяком $R > 0$ $M_f(R) = \max\limits_{|z| \leqslant R} |f(z)|$.

Порядок ρ целой функции определяется равенством $\rho = \varlimsup\limits_{R \to +\infty} \dfrac{\ln(\ln M_f(R))}{\ln R}$.

Если $P, Q \in \mathbb{C}[\omega_1, \ldots, \omega_n]$, то через $\mathrm{Res}_{\omega_i}(P, Q)$ будем обозначать результант многочленов P, Q по переменной ω_i. Основным результатом работы является следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть ненулевой многочлен $P \in \mathbb{Z}[\omega_0, \omega_1, \omega_2]$; отличная от постоянной, периодическая, с периодом d, целая функция конечного порядка $y = f(z)$ удовлетворяет в $\mathbb{C}$ уравнению $P(y, y', y'') = 0$. Тогда при всяком $z_0 \in \mathbb{C}$, таком, что*

$$\mathrm{Res}_{\omega_2}\left(P, \frac{\partial P}{\partial \omega_2}\right)(f(z_0), f'(z_0)) \neq 0,$$

среди чисел d, $f(z_0)$, $f'(z_0)$ есть хотя бы одно трансцендентное.

Доказательство теоремы проводится классическим методом А. О. Гельфонда ([1]) вместе с применением некоторой техники работы с целыми функциями ([2], [3]).

Существенными для доказательства теоремы являются следующие утверждения.

Предложение 1. *Пусть $f(z)$ удовлетворяет условиями теоремы и ее период d является алгебраическим числом. Тогда, если существует $z_0 \in \mathbb{C}$, такая, что $f(z_0)$, $f'(z_0)$ — алгебраические и $\mathrm{Res}_{\omega_2}\left(P, \frac{\partial P}{\partial \omega_2}\right)(f(z_0), f'(z_0)) \neq 0$, то найдется ненулевой многочлен $B \in \mathbb{C}[\omega_0, \omega_1, \omega_2]$, такой, что $B(z, f(z), f'(z)) \equiv 0$ в $\mathbb{C}$.*

Предложение 2. *Пусть $Q \in \mathbb{C}[\omega_0, \omega_1]$ и Q неприводим. Пусть $f(z) : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ — целая функция, такая, что $Q(f(z), f'(z)) \equiv 0$ в $\mathbb{C}$. Тогда $f(z) = e^{-Naz} \sum\limits_{n=0}^{M} A_k e^{kaz}$ при некоторых целых неотрицательных N, M и комплексных a, $\{A_k\}$.*

Отметим, что аналогичное теореме утверждение имеет место и в случае алгебраических дифференциальных уравнений произвольного порядка.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гельфонд А. О. Трансцендентные и алгебраические числа. — М.: Гостехиздат, 1952. 224 с.

2. Левин Б. Я. Распределение корней целых функций. — М.: ГИТТЛ, 1956. 632 с.

3. Янченко А. Я., Подкопаева В. А., О целых функциях — решениях одного класса алгебраических дифференциальных уравнений [Электронный ресурс], Режим доступа: http://semr.math.nsc.ru/v15/p1284-1291.pdf.

Секция 7. Дискретная геометрия и геометрия чисел

УДК 514.15+514.17+514.8+548.1

Построение изотропно плотного множества Делоне

К. Вишневецкий (Россия, г. Москва)
Мех-мат МГУ
А. Цегенько (Россия, г. Москва)
Мех-мат МГУ
М. Чернавских (Россия, г. Москва)
Мех-мат МГУ

В докладе рассматривается задача, непосредственно связанная с известной проблемой Данцера-Бошерницана — доказать или опровергнуть следующее утверждение: для любого множества Делоне на плоскости существует треугольник сколь угодно большой площади, пустой от точек множнества.

Совершенно ясно, что это утверждение было бы верным, если бы удалось доказать, что в любом множестве Делоне на плоскости найдется направление, проекция вдоль которого на трансверсальную прямую не является всюду плотным множеством.

Однако, авторами будет предъявлена конструкция множества Делоне на плоскости, проекция которого вдоль любой прямой на трансверсальную прямую является всюду плотным множеством на этой прямой.

Авторы выражают благодарность научному руководителю доктору физико-математических наук Николаю Петровичу Долбилину за значимые замечания и важнейшие советы при проведении исследования и оформлении данной работы.

———————————————————————————

УДК 51 М34

Прямые $y = -e \cdot x + t$ и шахматная раскраска

М. М. Галламов (Россия, г. Москва)
Математический институт им. В. А. Стеклова РАН
e-mail: gallamovj@gmail.com

Straight lines $y = -e \cdot x + t$ and chess coloring

M. M. Gallamov (Russia, Moscow)
Mathematical Institute. V. A. Steklov of the RAS
e-mail: gallamovj@gmail.com

Постановка задачи

Единичные квадраты целочисленной решетки первого квадранте I_{OXY} прямоугольной системы координат OXY раскрашены в шахматном порядке.

Рассмотрим семейство параллельных прямых

$$f_t(\kappa): \ y = \kappa \cdot x + t, \ \kappa < 0, \ t > 0. \tag{1}$$

При каждом фиксированном t мы имеем треугольник $\Delta OA_\kappa(t)B_\kappa(t)$, где $A_\kappa(t) = OX \cap f_t(\kappa)$, $B_\kappa(t) = OY \cap f_t(\kappa)$. Пусть $m_\kappa(t)$ и $n_\kappa(t)$ — количество соответственно белых и черных единичных квадратов, принадлежащих целиком $\Delta OA_\kappa(t)B_\kappa(t)$, а

$$u_\kappa(t) = m_\kappa(t) - n_\kappa(t). \tag{2}$$

`Постановка задачи:` *Разность $u_\kappa(t)$ для прямой $f_t(\kappa)$ с иррациональным угловым коэффициентом κ не ограничена ни снизу, ни сверху при $t \to \infty$.*

Эта задача была сформулирована в феврале 2011 г. на научном семинаре "Современные проблемы теории чисел" математического института РАН им. В. А. Стеклова под руководством С. В. Конягина и И. Д. Шкредова в связи, с чем см. [1], а также работу [2].

В данной статье поставленная задача решается для семейства прямых

$$f_t: \ y = -e \cdot x + t \tag{3}$$

с угловым коэффициентом $-e$, модуль которого равен константе Эйлера $e = 2,71828182845\ldots$.

Ниже будем полагать $A_\kappa(t) = A(t)$, $B_\kappa(t) = B(t)$, $u_\kappa(t) = u(t)$ и $f_t(\kappa) = f_t$ при $\kappa = -e$.

Необходимые сведения о цепных дробях

По поводу цепных дробей см. [3].

Пусть $\mathbb{N} = \{1, 2, ...\}$ и $\mathbb{N}_0 = \{0\} \cup \mathbb{N}$. Рассмотрим представление числа e цепной дроби с её элементами a_n, $n \in \mathbb{N}_0$:

$$\begin{aligned} e = a_0 + &\cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{\ddots}}}} = [a_0; a_1, a_2, a_3, \ldots] = \\ &[2; 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, 1, 1, 8, 1, 1, \ldots, (2(m+1))_{3m+2}, 1_{3m+3}, 1_{3m+4}, \ldots,], \\ &a_0 = 2, \ a_1 = 1, \ a_2 = 2, \ a_3 = a_4 = 1, \ a_5 = 4, \ \ldots, \\ &a_{3m+2} = 2m+2, \ a_{3m+1} = a_{3m+4} = 1, \ \ldots, m \in \mathbb{N}_0, \end{aligned} \tag{4}$$

где нижние индексы у чисел указывают номер места их расположения. Тогда

$$\frac{p_n}{q_n} = [2; 1, 2, 1, 1, 4, \ldots, a_n] \tag{5}$$

подходящая дробь порядка n цепной дроби (4), а a_n — её n-ый элемент, значение которого определятся делением с остатком индекса n на три, см. последнюю строку из (4), $n \in \mathbb{N}_0$. Согласно рекуррентным формулам для числителя и знаменателя подходящих дробей из (5) имеем

$$\begin{aligned} &p_n = p_{n-1}a_n + p_{n-2}, \ q_n = q_{n-1}a_n + q_{n-2}, \\ &p_0 = 2, p_1 = 3, \ q_0 = q_1 = 1, \ n = 1, 2, 3, \ \ldots . \end{aligned} \tag{6}$$

Для $n = 0, 1, ..., 14$ посредством этих формул найдем числовые значения a_n, p_n и q_n. Если они четные, то им припишем $\oplus$, в противном случае — $\ominus$ и все это запишем в виде следующей таблицы6

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
a_n	$\oplus$	$\ominus$	$\oplus$	$\ominus$	$\ominus$	$\oplus$	$\ominus$	$\ominus$	$\oplus$	$\ominus$	$\ominus$	$\oplus$	$\ominus$	$\ominus$	$\oplus$
p_n	$\oplus$	$\ominus$	$\oplus$	$\ominus$	$\ominus$	$\ominus$	$\oplus$	$\ominus$	$\oplus$	$\ominus$	$\ominus$	$\ominus$	$\oplus$	$\ominus$	$\oplus$
q_n	$\ominus$	$\ominus$	$\ominus$	$\oplus$	$\ominus$	$\oplus$	$\ominus$	$\ominus$	$\ominus$	$\oplus$	$\ominus$	$\oplus$	$\ominus$	$\ominus$	$\ominus$

(7)

Из таблицы видно, что последовательности, образованные четностями a_n, p_n и q_n при $n > 1$ соответственно 3-периодична и 6-периодичны.

Имеет место следующее свойство:

$$p_{n-1}q_n - p_nq_{n-1} = (-1)^n,\ n \in \mathbb{N} \tag{8}$$

для числителей и знаменателей двух подходящих дробей порядков, $n-1$ и n. Это свойство с геометрической точки зрения говорит о том, что если на двух последовательных векторах $\overline{e}_{n+2} = \overline{(q_{n-1}p_{;n-1})}$ и $\overline{e}_{n+3} = \overline{(q_n; p_n)}$ с координатами $(p_{n-1}; q_{n-1})$ и $(p_n; q_n)$ построить параллелограмм, то внутри его нет целочисленных точек, а его вершины — целочисленные точки.

Действительно, согласно формула Пике, выражающей площадь S многоугольника с целочисленными вершинами через число целочисленных точек, охватывающих этим многоугольником, равно $S = N + \frac{M}{2} - 1$, где N и M — количество таких точек, которые находятся соответственно внутри и границе данного многоугольника, см. [4]. В нашем случае $S = 1$, а $M = 4$ и поэтому $N = 0$.

Формулировка основного результата

Теорема 1. *Если $t_1 = p_{2+6k}$ и $t_2 = p_{2+6k} + 1$, $k \in \mathbb{N}_0$, то разности $u(t_1) = -(k+1)$ и $u(t_2) = k+1$ между белыми и черными клетками соответственно треугольников $\Delta OA(t_1)B(t_1)$ и $\Delta OA(t_2)B(t_2)$, при условии, что раскрашенный единичный квадрат из I_{OXY}, примыка.зий к началу O координат, черного цвета.*

Из теоремы 1 следует неограниченность ни снизу, ни сверху разности $u(t)$ для прямой (3) при $t \to \infty$, то есть $\inf_{t>0} u(t) = -\infty$ и $\sup_{t>0} u(t) = +\infty$.

Идея решения поставленной задачи при $\kappa = -e$

Метод решения данной задачи основан на геометрическом представлении цепной дроби числа Эйлера e, см. ниже (4), так называемом, алгоритме "*вытягивания носов*":

$$\overline{e}_{n+2} = \overline{e}_n + a_{n-1}\overline{e}_{n+1} = q_{n-1}\overline{e}_1 + p_{n-1}\overline{e}_2 = \overline{(q_{n-1}; p_{n-1})},\ n \in \mathbb{N}. \tag{9}$$

Более полная информация об этом алгоритме имеется в [5]. Каждая подходящая дробь $\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}$, $n \in \mathbb{N}$, определяет координаты $(q_{n-1}; p_{n-1})$ вектора посредством рекуррентных формул (6). Вектор $\overline{e}_{n+2}$ прилагается к произвольной целочисленной точке $(l_1; l_2)$ в I_{OXY} и с помощью его строится клетчатая область $\mathtt{E}_{n+2}(l_1; l_2)$, которое представляет собой множество раскрашенных квадратов, заключенных между вектором $\overline{e}_{n+2}(l_1; l_2)$ и осью OY и ограниченных прямыми $y = l_2$ и $y = l_2 + p_{n-1}$. Для областей такого сорта получены вычислительные формулы, определяющие разность $\epsilon_{n+2}(l_1; l_2)$ при $n = 3 + 6k$:

$$\epsilon_{5+6k}(l_1; l_2) = \left[\begin{array}{r} -(k+1),\ (\oplus; \oplus), \\ k+1,\ (\ominus; \oplus), \\ k+1,\ (\oplus; \ominus), \\ -(k+1),\ (\ominus; \ominus), \end{array}\right. \tag{10}$$

в которых $\oplus$ соответствует четному значению l_1 или l_2, а $\ominus$ — нечетному. Из этих вычислительных формул следует, что существую такие значения n, что разности, соответствующие этим индексам стремятся либо к плюс бесконечности, либо к минус при $n \to \infty$ — все зависит от четности l_1 и l_2. С ростом n увеличивается длина вектора $\overline{e}_{n+2}(l_1; l_2) = \overline{(q_{n-1}; p_{n-1})}$, чем он длиннее тем ближе угловой коэффициент $\frac{-p_{n-1}}{q_{n-1}}$ прямой, определяемой этим вектором к угловому коэффициенту $-e$ прямой f_t. Это следует из алгоритма "вытягивания носов" и свойств приближения подходящими дробями к числу e.

Так как параллелограмм, построенный на векторах $\overline{e}_{n+2}(l_1;l_2)$ и $\overline{e}_{n+3}(l_1;l_2)$ для любого $n \in \mathbb{N}$, приложенных к целочисленной точке $(l_1;l_2)$, содержит в силу (8) целочисленные точки только в виде своих вершин, то прилагая вектор $\overline{e}_{5+6k}$ к вершине $B(t) = OY \cap f_t = (0;p_{2+6k})$ треугольника $\Delta OA(t)B(t)$ при $t = p_{2+6k}$ получим, что клетчатая область $\mathtt{U}(p_{2+6k})$, образованная его раскрашенными квадратами, совпадает с $\mathtt{E}_{5+6k}(0;p_{2+6k})$. Из таблицы (7) имеем, что $p_{2+6k} = \oplus$ — четно для любого $k \in \mathbb{N}_0$, поэтому в силу первой формулы из (10) следует, что разность $\epsilon_{5+6k}(\oplus;\oplus) = u(p_{2+6k})$ области $\mathtt{E}_{5+6k}(0;p_{2+6k})$ не ограничена снизу при $k \to \infty$.

Аналогичным образом доказывается неограниченность сверху разности $u(t_k^+)$ при $k \to \infty$, где $t_k^+ = p_{2+6k} + 1$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Научный семинар // «Современные проблемы теории чисел». Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, руководители: С. В. Конягин и И. Д. Шкредов. http://www.mathnet.ru/php/conference.phtml?option_lang=rus&eventID=9&confid=215

2. Khovanova T., Konyagin S. Научная статья в сети Интернет: Sequences of Integers with Missing Quotients and Dense Points Without Neighbors. arXiv:1104.0441v1 [math.CO] 4 Apr 2011, 2011, pp. 1–20.

3. Хинчин А. Я. Цепные дроби. — М.: Наука, 1978. 112 с.

4. Вавилов В. В., Устинов А. В. *Многоугольники на решетках.* М.: МЦНМО, 2006. — 72с.

5. Арнольд В. И. Цепные дроби. — М: МЦНМО, 2001. 40 с.

———————————————————

УДК 517

Об одном алгоритме для отыскания целых точек на совершенных эллипсоидах

О. Х. Гуломов (Узбекистан, г. Карши)
Каршинский Государственный Университет
e-mail: otabek10@mail.ru
С. Ю. Шодиев (Узбекистан, г. Карши)
Каршинский Государственный Университет

About one algorithm for the determination of full points on a perfect ellipsoidah

O. X. Gulomov (Uzbekistan, Karshi)
Karshi State University
e-mail: otabek10@mail.ru
S. Yu. Shodiyev (Uzbekistan, Karshi)
Karshi State University

В работе предложен новый алгоритм для $r_k(f)$ и на его основе вычисляем все целочисленные точки и их количества на совершенных эллипсоидах при всех $k = 1, 2, ..., 7, 8, 9$.

$$\varphi_0^n = \varphi_0^n\,(x_1, ..., x_n) = k\,(n \geqslant 2) \tag{1}$$

$$\varphi_1^n = \varphi_1^n(x_1, ..., x_n) = k\,(n \geqslant 4) \qquad (2)$$

Основными результатами является следующие предложения.

Теорема 1. При $k = 8, 9$ количества $r_k(\varphi_0^n)$ целочисленных точек на эллипсоиде (1) соответственно равны:

$$\begin{aligned} r_8(\varphi_0^n) = {} & \tfrac{n(n-1)...(n-15)}{(8!)^2} + \tfrac{2n(n-1)...(n-14)}{7!8!} + \tfrac{4}{5!6!}n(n-1)...(n-11) + \\ & + \tfrac{7}{5(4!)^2}n(n-1)...(n-9) + \tfrac{14}{5(4!)^2}n(n-1)...(n-8) + \tfrac{n(n-1)...(n-7)}{5!} + \\ & + \tfrac{28}{5!}n(n-1)...(n-5) + n(n-1)...(n-5) + n(n-1)...(n-4) + \\ & + \tfrac{21}{4}n(n-1)(n-2)(n-3) + n(n-1)(n-2), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r_9(\varphi_0^n) = {} & \tfrac{n(n-1)...(n-13)}{(9!)^2} + \tfrac{2n(n-1)...(n-16)}{8!9!} + \tfrac{30}{6!8!}n(n-1)...(n-13) + \\ & + \tfrac{31}{21(5!)^2}n(n-1)...(n-11) + \tfrac{352}{21(5!)^2}n(n-1)...(n-10) + \\ & + \tfrac{1}{3\cdot 6!}n(n-1)...(n-7) + \tfrac{22}{5!}n(n-1)...(n-6) + \tfrac{158}{3!6!}n(n-1)...(n-5) + \\ & + n(n-1)...(n-4) + n(n-1)(n-2)(n-3) + 4n(n-1)(n-2) + n(n-1) + 2n. \end{aligned}$$

Теорема 2. При $k = 8, 9$ количества $r_k(\varphi_1^n)$ целочисленных точек на эллипсоида (2) $\varphi_1^n = x_1^2 + ... + x_n^2 + x_1x_3 + ... + x_{n-1}x_n = k$ соответственно равны:

$$\begin{aligned} r_8(\varphi_1^n) = {} & 2n + \tfrac{22}{4!}n(n-1)(n-2)(n-3) + \tfrac{32}{3!}n(n-1)...(n-4) + \\ & + \tfrac{128}{3!4!}n(n-1)...(n-6) + \tfrac{256}{7!}n(n-1)...(n-7) + \\ & + \tfrac{582}{8!}n(n-1)...(n-9) + \tfrac{8190}{12!}n(n-1)...(n-12) + \tfrac{69146}{18!}n(n-1)...(n-16); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r_9(\varphi_1^n) = {} & 2n(n-1) + 4n(n-1)(n-2) + 8n(n-1)(n-2)(n-3) + \\ & + \tfrac{40}{4!}n(n-1)...(n-5) + \tfrac{128}{5!}n(n-1)...(n-6) + \tfrac{512}{3!6!}n(n-1)...(n-8) + \\ & + \tfrac{1024}{9!}n(n-1)...(n-9) + \tfrac{3560}{10!}n(n-1)...(n-11) + \tfrac{32768}{14!}n(n-1)...(n-14) + \\ & + \tfrac{217944}{18!}n(n-1)...(n-17). \end{aligned}$$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Т. Ф. Вороной. О некоторых свойствах положительных квадратичных форм.// Собр. соч. Т.2. Киев. Издательство Ан УССР. 1952. С.171-238.

2. Х. Х. Абдуразиков, Шушбаев С. Ш. О количестве целочисленных точек на совершенных эллипсоидах. // Узб. матем. Журн. № 4, 1998, Ташкент.

3. С. Ш. Шушбаев. К проблеме Ранкина-Соболева многомерной дзета-функции. Труды МИ АН СССР. 1980. Т.152. С.22-235. Москва.

4. С. Ш. Шушбаев, О. Х. Гуломов. Усовершенствованный алгоритм Вороного.-Т.:2000.17с.- Деп. в.ГФНТИГКНТ РУз 14.11.2000, №2745-00

УДК 514.132+515.162

О 3-многообразиях с прямоугольными фундаментальными многогранниками

И. С. Гуцул, (Молдова, Кишинев)
Институт математики и информатики Республики Молдова
e-mail:igutsul@mail.ru

On 3-manifolds with rectangular fundamental polyhedrons

I.S. Gutsul (Moldova, Chisinău)
Institute of Mathematics and Computer Science of the Republic Moldova
e-mail:igutsul@mail.ru

Известные на сегодня гиперболические компактные 3-многообразия с прямоугольными фундаментальными многогранниками это так называемые многообразия Лебелля [1]. Однако построение этих многообразий ведется алгебраическими методами и поэтому очень сложно сказать что-либо о геометрии таких многообразий, кроме того объем многообразий Лебелля достаточно большой. Мы приведем построение счетной серии замкнутых гиперболических трехмерных многообразий, фундаментальный многогранник которых - многогранник со всеми прямыми двугранными углами. Каждое из этих многообразий имеет объем в четыре меньший чем соответствующее ему многообразие Лебелля. Что мы понимаем под соответствием многообразий Лебелля и построенных нами многообразий мы объясним ниже.

Приведем построение конечных многогранников, со всеми прямыми двугранными углами в пространстве Лобачевского H^3, которые мы будем использовать при конструировании многообразий.

Рассмотрим на плоскости Лобачевского правильный $4n$-угольник $n = 2, 3, \ldots$ со всеми прямыми углами. Легко доказать его существование. Через вершины этого многоугольника проведем прямые $b_i, i = 1, 2, \ldots, 4n$ перпендикулярные его плоскости δ_1. Через соседние прямые b_i проведем плоскости β_i, $i = 1, 2, \ldots, 4n$. Рассмотрим многогранник, являющийся пересечением полупространств ограниченных плоскостями β_i, $i = 1, 2, \ldots, 4n$. Этот многогранник бесконечен и объем его также бесконечен, а его двугранные углы будут прямыми. Отложим на всех прямых b_i выше плоскости δ_1 отрезки некоторой длины h_1 и через их концы проведем плоскости α_i перпендикулярные к этим прямым. Тогда можно подобрать длину отрезка h_1 такой, чтобы любая плоскость α_i пересекалась с соседними плоскостями α_{i-1} и α_{i+1} под прямым углом. Обозначим прямые пересечения плоскостей α_i через $a_i, i = 1, 2, \ldots, 4n$. На прямых $a_i, i = 1, 2, \ldots, 4n$ отложим отрезки h_2 и через их концы проведем плоскости $\gamma_i, i = 1, 2 \ldots, 4n$ перпендикулярные отрезкам прямых $a_i, i = 1, 2, \ldots, 4n$. Нетрудно подобрать длину отрезка h_2 такой, чтобы каждая плоскость γ_i пересекалась с соседними плоскостями γ_{i-1} и γ_{i+1} под прямым углом. Обозначим прямые пересечения плоскостей γ_i через c_i. Тогда нетрудно показать, что прямые c_i образуют гиперболическую связку. Следовательно существует плоскость δ_2 ортогональная всем прямым этой связки. Эта плоскость пересечет нашу конструкцию по правильному $4n$-угольнику со всеми прямыми внутренними углами. Если мы рассмотрим множество всех точек пространства Лобачевского H^3, являющихся пересечением полупространств ограниченных плоскостями $\delta_1, \delta_2, \beta_i, \alpha_i, \gamma_i, i = 1, 2, \ldots, 4n$, то получим конечный многогранник R_n со всеми прямыми двугранными углами. Грани этого многогранника обозначим также как и содержащие их плоскости. Тогда многогранник R_n состоит из двух правильных $4n$-угольников δ_1 и δ_2 все внутренние углы которых равны $\pi/2$. Назовем грань δ_1 нижним основанием, а грань δ_2 верхним основанием нашего многогранника R_n. Кроме того у этого могогранника имеется $4n$ пятиугольников $\beta_i, i = 1, 2, \ldots, 4n$, это грани пересекающиеся с нижним основанием δ_1 и $4n$ пятиугольников $\gamma_i, i = 1, 2, \ldots, 4n$, это грани пересекающиеся с верхним основанием δ_2. И еще $4n$ шестиугольников $\alpha_i, i = 1, 2, \ldots, 4n$ это грани, которые "лежат"между гранями β_i и γ_i. У всех граней β_i, γ_i и α_i внутренние углы прямые. Нетрудно показать, что прямые a_i по которым пересекаются грани α_i образуют гиперболическую связку прямых. Следовательно существует плоскость δ ортогональная ко всем прямым a_i. Легко доказывается, что плоскость δ пересекает многогранник R_n и более того, она является плоскостью симметрии многогранника R_n. Таким образом плоскость δ разбивает многогранник R_n на два конгруэнтных многогранника S_n и T_n.

В работе [1] многообразия Лебелля строятся из восьми экземпляров многогранника S_n. А в нашем случае мы строим многообразие из многогранника R_n т.е. из двух экземпляров многогранника S_n. Таким образом, объем многообразия построенного нами будет в четыре раза меньше (два многогранника S_n), чем объем соответствующего многообразия Лебелля (восемь многогранников S_n), при одинаковых n. Итак, мы описали построение многогранника R_n в пространстве Лобачевского со всеми прямыми двугранными углами. Уточним, какова полная схема этого многогранника, т.е. множество ребер многогранника: $a_i = \alpha_i \cap \alpha_{i+1}, i = 1, 2, \dots, 4n-1; a_{4n} = \alpha_{4n} \cap \alpha_1$;

$b_i = \beta_i \cap \beta_{i+1}, i = 1, 2, \dots, 4n-1; b_{4n} = \beta_{4n} \cap \beta_1$;

$c_i = \gamma_i \cap \gamma_{i+1}, i = 1, 2, \dots, 4n-1, c_{4n} = \gamma_{4n} \cap \gamma_1$;

$d_i = \beta_i \cap \delta_1, i = 1, 2, \dots, 4n$;

$e_i = \gamma_i \cap \delta_2, i = 1, 2, \dots, 4n$;

$f_i = \alpha_i \cap \beta_i, i = 1, 2, \dots, 4n$;

$l_i = \alpha_{i+1} \cap \beta_i, i = 1, 2, \dots, 4n-1, l_{4n} = \alpha_1 \cap \beta_{4n}$;

$m_i = \alpha_i \cap \gamma_i, i = 1, 2, \dots, 4n$;

$n_i = \alpha_{i+1} \cap \gamma_i, i = 1, 2, \dots, 4n-1; n_{4n} = \alpha_1 \cap \gamma_{4n}$.

Приведем схему отождествления граней многогранника, приводящую к многообразию. Грани α_i будем отождествлять двумя видами движений: каждую грань α_i с нечетным номером отождествим с противоположной гранью $\alpha_{i+2n}, i = 1, 3, \dots, 2n-1$ винтовым движением φ_i с углом поворота π и вектором сдвига равным расстоянию между этими гранями; каждую грань α_i с четным номером отождествим сдвигом φ_i с противоположной гранью $\alpha_{i+2n}, i = 2, 4, \dots, 2n$. Грани β_i и γ_i будем также отождествлять сдвигами и винтовыми движениями. Каждую грань β_i с нечетным номером отождествим сдвигом ψ_i с противоположной гранью β_{i+2n}, где $i = 1, 3, \dots, 2n-1$. Каждую четную грань γ_i отождествим сдвигом с противоположной гранью γ_{i+2n}, где $i = 2, 4, \dots, 2n$. Каждую грань β_i отождествим винтовым движением η_i с гранью γ_{i+2n-1}, где $i = 2, 4, \dots, 2n$ и грань β_{i+2n} отождествим винтовым движением η_{i-1} с гранью γ_{i-1} где $i = 2, 4, \dots, 2n$. И наконец грань δ_1 отождествим с гранью δ_2 винтовым движением τ, где вектор сдвига равен расстоянию между этими гранями, а угол поворота равен $\pi/2n$. Тогда группа Γ_n порожденная движениями $\varphi_i, \psi_i, \eta_i, \tau$, где $i = 1, 2, \dots, 4n$, является группой без неподвижных точек, а сам многогранник будет фундаментальным многогранником этой группы. Но тогда факторизация H^3 по группе Γ_n дает счетную серию гиперболических 3-многообраий M_n. Т.е. верна теорема:

Теорема. *Движения $\varphi_i, \psi_i, \eta_i, \tau$ где $i = 1, 2, \dots, 4n$, отождествляющие грани могогранника R_n, порождают дискретную группу Γ_n, без кручений, в пространстве H^3. Сам многогранник R_n является фундаментальным могогранником группы Γ_n и $H^3 \backslash \Gamma_n = M_n$ - замкнутое трехмерное гиперболическое многообразие, где $n \geq 2$.*

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. А.Ю.Веснин, Прямоугольные многогранники и трехмерные гиперболические многообразия, УМН, 2017, том 72, выпуск 2(434), С. 147-190.

УДК 519.1

Некоторые вопросы теории обобщенных дискретных метрик

Е. И. Деза (Россия, г. Москва)
Московский педагогический государственный университет
e-mail: Elena.Deza@gmail.com

Some questions of the theory of generalized discrete metrics

E. I. Deza (Russia, Moscow)
Moscow State Pedagogical University
e-mail: Elena.Deza@gmail.com

We consider some cones and polytopes of partial semimetrics, weightable quasi-semimetrics and weighted metrics. The main polyhedral structures under consideration are:

- the *partial semimetric cone* $PMET_n$ of all partial semimetrics on n points;
- the *weightable quasi-semimetric cone* $WQMET_n$ of all weightable quasi-semimetrics on n points;
- the *weighted semimetric cone* $WMET_n$ of all weighted semimetrics on n points;
- the cones $\{0,1\}$-$PMET_n$, $\{0,1\}$-$WQMET_n$, $\{0,1\}$-$WMET_n$, generated by all $\{0,1\}$-valued extreme rays of the cones $PMET_n$, $WQMET_n$, $WMET_n$, respectively.

After short preliminary information, we collect main facts about corresponding cones: definitions of underling metric structures, dimensions of considered polyhedra, different possibilities to represent our objects in a real vector space, simplest examples, natural inclusions and other connections between constructed cones and polytopes, questions of their possible symmetries, Tables with basic data on small polyhedra under consideration. [1], [2].

Moreover, we study generalizations of these polyhedra on general (instead of K_n) connected finite graphs. Such polyhedra over graphs are related to *maximum-cut problem*, which asks to find a cut of maximum weight in a graph. It is a prominent problem in Combinatorial Optimization.

The software is programmed in the `GAP` programming language.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. M.M. Deza, E.I. Deza. Cones of Partial Metrics // Contributions in Discrete Mathematics, **6** (2010) 26–41.
2. M.M. Deza, E.I. Deza, J. Vidali. Cones of Weighted and Partial Metrics // Algebra 2010: Advances in Algebraic Structures. World Scientific, 2011.

———————————————————————————

УДК 514.172.45+514.132+519.17

Теория семейств многогранников: фуллерены, 7-диск-фуллерены и многогранники А. В. Погорелова[1]

Н. Ю. Ероховец (Россия, г. Москва)
МГУ имени М. В. Ломоносова
e-mail: erochovetsn@hotmail.com

Theory of families of polytopes: fullerenes, 7-disk-fullerenes and Pogorelov polytopes

N. Yu. Erokhovets (Russia, Moscow)
Lomonosov Moscow State University
e-mail: erochovetsn@hotmail.com

Многогранником мы называем класс комбинаторной эквивалентности 3-мерных выпуклых многогранников. Все операции и конструкции будут определены именно на таких многогранниках, хотя описываются геометрически. Многогранник называется *простым*, если каждая его вершина имеет валентность 3. Грани многогранника *смежны*, если имеют общее ребро.

Работа посвящена изучению семейств простых многогранников, определяемых условием *циклической рёберной k-связности (ck-связности).*

Определение 1. *Назовем k-поясом циклическую последовательность граней, в которой смежными являются последовательные грани и только они и никакие 3 грани не имеют общей вершины. Простой многогранник, отличный от симплекса Δ^3, является ck-связным, если у него нет l-поясов, $l < k$, и сильно ck-связным (c^*k-связным), если, кроме того, любой его k-пояс окружает грань. По определению Δ^3 является c^*3-связным, но не $c4$-связным.*

Понятие ck-связности можно извлечь из работ начала XX века по проблеме 4 красок. В работах середины XX века его определение использует циклические рёберные разрезы графа многогранника. Мы используем эквивалентное определение в терминах поясов. Простые многогранники (семейство $\mathcal{P}_s$) являются $c3$-связными. Получаем цепочку вложенных семейств:

$$\mathcal{P}_s \supset \mathcal{P}_{aflag} \supset \mathcal{P}_{flag} \supset \mathcal{P}_{aPog} \supset \mathcal{P}_{Pog} \supset \mathcal{P}_{Pog^*}$$

Семейство $c4$-связных многогранников совпадает с семейством $\mathcal{P}_{flag}$ *флаговых* многогранников, у которых любой набор попарно смежных граней имеет непустое пересечение. Каждая грань такого многогранника окружена поясом. Из формулы Эйлера вытекает, что каждый простой многогранник имеет 3-, 4- или 5-угольную грань, поэтому не может быть более чем c^*5-связным. Семейство c^*3-связных многогранников мы называем *почти флаговыми* многогранниками и обозначаем $\mathcal{P}_{aflag}$. Из результатов А.В. Погорелова [1] и Е.М. Андреева [2] следует, что $c5$-связные многогранники (семейство $\mathcal{P}_{Pog}$) являются в точности многогранниками, реализуемыми в пространстве Лобачевского $\mathbb{L}^3$ в виде ограниченных многогранников с прямыми двугранными углами. Такая реализация единственна с точностью до изометрии. Они получили название *многогранников Погорелова*, так как именно таким многогранникам посвящена работа [1]. Из работы [2] вытекает, что флаговые многогранники отвечают многогранникам в $\mathbb{L}^3$ с одинаковыми нетупыми двугранными углами. Пример многогранников Погорелова дают *k-бочки* B_k, $k \geqslant 5$, (*многогранники Лёбелля* в терминологии А.Ю. Веснина [3]), см. рис.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, гранты 17-01-00671-а и 18-51-50005-Яф-а

11a). Из результатов T. Dǒslić (1998, 2003) следует, что в семействе $\mathcal{P}_{Pog}$ лежит семейство *фуллеренов*, состоящее из всех простых многогранников только с 5- и 6-угольными гранями. Математические фуллерены моделируют сферические молекулы углерода, за открытие которых в 1996 году R. Curl, H. Kroto и R. Smalley получили Нобелевскую премию по химии. Они синтезировали *бакминстерфуллерен* C_{60} (см. рис. 11b), который имеет форму усеченного икосаэдра. W.P. Thurston (1998) построил параметризацию пространства фуллеренов, из которой следует, что число фуллеренов с n атомами углерода с ростом n растёт как n^9.

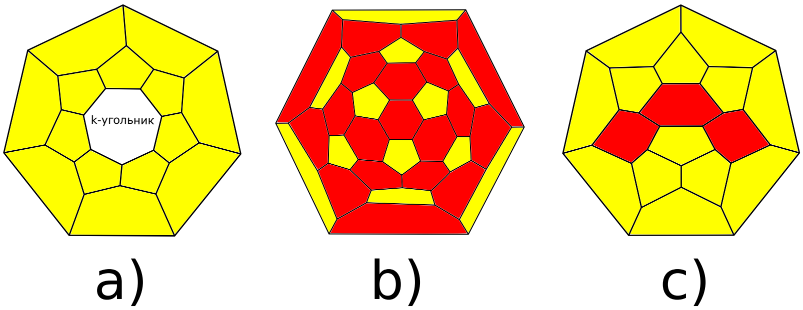


Рис. 11: a) k-бочка B_k; b) фуллерен C_{60}; c) 7-диск-фуллерен с наименьшим числом граней.

Семейство c^*4-связых многогранников $\mathcal{P}_{aPog}$ мы называем *почти погореловскими* многогранниками, а семейство c^*5-связных многогранников $\mathcal{P}_{Pog^*}$ – *сильно погореловскими.* Дж. Д. Биркгоф (1913) свёл проблему 4 красок к проблеме раскраски в 4 цвета граней многогранников из семейства, которое, как оказалось, совпадает с $\mathcal{P}_{Pog^*}$.

Определение 2. *Простой многогранник, у которого все грани, кроме n-угольника, являются 5- и 6-угольниками, мы называем n-диск-фуллереном (это понятие возникло в работе [4] и обозначало дополнение до n-угольника в поверхности такого многогранника). На рис. 11c) изображен 7-диск-фуллерен с минимальным числом граней.*

Утверждение 4 ([5, 6, 7]). *Любой 3-диск-фуллерен принадлежит семейству $\mathcal{P}_{aflag}$, 4-диск-фуллерен – семейству $\mathcal{P}_{aPog}$, а 7-диск-фуллерен – семейству $\mathcal{P}_{Pog}$. Для каждого $n \geqslant 8$ существует как n-диск-фуллерен, принадлежащий $\mathcal{P}_{Pog^*}$, так и не принадлежащий $\mathcal{P}_{aflag}$.*

Т. Е. Панов обратил внимание, что из результатов Е. М. Андреева [2, 8] должно следовать, что почти погореловские многогранники отвечают прямоугольным многогранникам конечного объема в $\mathbb{L}^3$. У таких многогранников могут быть 4-валентные вершины на абсолюте, в то время как остальные вершины имеют валентность 3.

Теорема 1 ([9]). *Срезка 4-валентных вершин устанавливает биекцию между комбинаторными типами прямоугольных многогранников конечного объема в $\mathbb{L}^3$ и почти погореловскими многогранниками, отличными от куба I^3 и 5-угольной призмы $M_5 \times I$.*

Мы развиваем теорию комбинаторного построения семейств многогранников, основной идеей которой является построение семейства при помощи набора операций из небольшого начального набора многогранников. Классический результат В. Эберхарда (1891) заключается в том, что любой простой многогранник комбинаторно получатся из симплекса Δ^3 срезками вершин, рёбер и пар смежных рёбер.

Утверждение 5 ([9]). *Простой многогранник принадлежит $\mathcal{P}_{aflag}$ тогда и только тогда, когда он получается из симплекса с не более чем двумя срезанными вершинами при помощи срезок вершин, рёбер и пар смежных рёбер, не эквивалентных срезке вершины 3-угольника, а также тогда и только тогда, когда он получается одновременной срезкой набора вершин симплекса Δ^3 или флагового многогранника, производящей все 3-угольники.*

Из результатов A. Kotzig (1969) следует, что простой многогранник является флаговым тогда и только тогда, когда он получается из куба срезками рёбер и срезками пар смежных рёбер граней по крайне мере с 6 сторонами.

Куб и 5-угольная призма принадлежат классу $\mathcal{P}_{aPog}$. Также этому классу принадлежит 3-мерный *многогранник Сташефа* As^3, представляющий собой куб с тремя срезанными попарно непересекающимися перпендикулярными рёбрами. Из результатов D. Barnette [10] следует, что простой многогранник принадлежит $\mathcal{P}_{aPog} \setminus \{I^3, M_5 \times I\}$ тогда и только тогда, когда он комбинаторно получается из As^3 при помощи срезок рёбер, не лежащих в 4-угольниках, и пар смежных рёбер граней по крайней мере с 6 сторонами.

В отличие от класса $\mathcal{P}_{flag}$, не любой 4-угольник многогранника из $\mathcal{P}_{aPog}$ получается срезкой ребра многогранника из того же класса. Однако, из результатов D. Barnette следует, что если в многограннике из $\mathcal{P}_{aPog}$ есть 4-угольники, то хотя бы один из них так получается.

Определение 3. *Паросочетанием графа называется набор его попарно непересекающихся рёбер. Мы называем паросочетанием многогранника паросочетание его рёберного графа. Паросочетание называется совершенным, если оно покрывает все вершины.*

Пусть P_8 – куб с двумя срезанными перпендикулярными непересекающимимся рёбрами.

Теорема 2. *[9] Любой почти погореловский многогранник $P \neq I^3, M_5 \times I$ получается срезкой паросочетания почти погореловского многогранника или многогранника P_8, производящей все 4-угольники.*

Многогранник в $\mathbb{L}^3$ называется *идеальным*, если все его вершины лежат на абсолюте. Идеальный многогранник имеет конечный объём.

Следствие 1 ([9]). *Любой идеальный прямоугольный многогранник P конечного объема в $\mathbb{L}^3$ получается из некоторого многогранника $Q \in \mathcal{P}_{aPog} \sqcup \{P_8\}$ стягиванием рёбер некоторого совершенного паросочетания, не содержащего противоположных рёбер никакого 4-угольника.*

В случае фуллеренов совершенные паросочетания соответствуют структурам Кекуле, обозначающим расстановку двойных связей в углеродной молекуле.

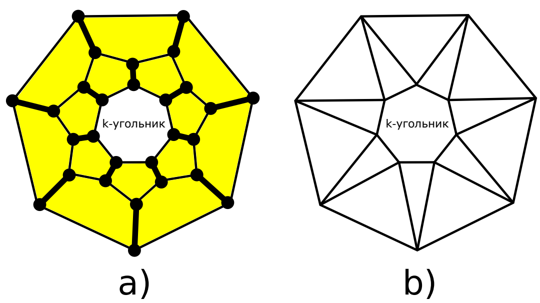


Рис. 12: a) каноническое паросочетание k-бочки; b) k-антипризма.

Пример 3. *k-бочка имеет каноническое совершенное паросочетание, см. рис. 12a). Соответствующий идеальный многогранник называется k-антипризмой (рис. 12b).*

Определение 4. *Операция скручивания рёбер изображена на рис. 13. Два ребра слева принадлежат одной грани многогранника и соединяют 4 различные вершины. Назовём скручивание крайним, если все 4 вершины следуют друг а другом при обходе границы грани.*

В обзоре А. Ю. Веснина [3] сопоставление результатов работ [11] об идеальных многогранниках и [12] о разбиениях сферы на 4-угольники привело к следующему результату. Любой идеальный прямоугольный многогранник в $\mathbb{L}^3$ получается из некоторой k-антипризмы, $k \geqslant 3$, при помощи конечного числа операций скручивания рёбер.

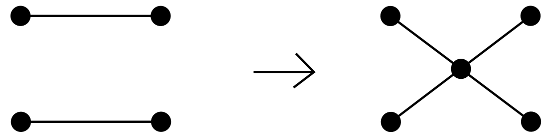


Рис. 13: Операция скручивания рёбер.

Теорема 3 ([9]). *Многогранник реализуется как идеальный прямоугольный многогранник тогда и только тогда, когда он либо является k-антипризмой, $k \geqslant 3$, либо получается из 4-антипризмы операциями крайнего скручивания ребер.*

Гипотеза 1. *Операция скручивания рёбер увеличивает объем многогранника в $\mathbb{L}^3$.*

В работе [9] приведены аргументы в пользу этой гипотезы на основе дифференциальной формулы Шлефли и характеризации И. Ривина [11] многогранников конечного объема в $\mathbb{L}^3$. Они обобщают поход T. Inoue [13].

Назовём совершенное паросочетание $\mathcal{M}_P$ многогранника $P \in \mathcal{P}_{aPog}$ *замечательным*, если каждый 4-угольник содержит ровно одно ребро в $\mathcal{M}_Q$. Бочка B_4 с точностью до симметрии имеет единственное замечательное паросочетание $\mathcal{M}_{B_4}$. Стягивание его рёбер дает 4-антипризму. Срезка s последовательных ребер k-угольной грани многогранника $P \in \mathcal{P}_{aPog}$ одной плоскостью даёт снова многогранник из $\mathcal{P}_{aPog}$ тогда и только тогда, когда $1 \leqslant s \leqslant k-3$ и срезка не эквивалента срезке ребра 4-угольника. При этом к графу многогранника P добавляется новое ребро, которое разбивает k-угольную грань на две грани: $(k-1)$-угольник и $(s+3)$-угольник. Для многогранника $P \in \mathcal{P}_{aPog}$ с замечательным паросочетанием $\mathcal{M}_P$ назовём такую срезку *допустимой*, если добавляемое ребро не пересекает рёбра из $\mathcal{M}_P$, каждая из последовательностей s рёбер и дополнительных $(k-s-2)$ рёбер пересекает не менее двух рёбер в $\mathcal{M}$ и хотя бы одна из них пересекает ровно два таких ребра. Результатом допустимой срезки является многогранник $Q \in \mathcal{P}_{aPog}$ с замечательным паросочетанием $\mathcal{M}_Q$, получаемым присоединением добавляемого ребра к $\mathcal{M}_P$. Связь между конструкцией D. Barnette почти погореловских многогранников и конструкцией идеальных многогранников описывается следующим результатом.

Теорема 4 ([9]). *Любой идеальный прямоугольный многогранник получается стягиванием рёбер замечательного совершенного паросочетания $\mathcal{M}_P$ многогранника $P \in \mathcal{P}_{aPog}$, где пара $(P, \mathcal{M}_P)$ получается из пары $(B_4, \mathcal{M}_{B_4})$ последовательностью допустимых срезок, каждая из которых отвечает крайнему скручиванию рёбер идеальных прямоугольных многогранников, полученных стягиванием рёбер паросочетаний.*

Легко видеть, что k-бочки, $k \geqslant 5$, принадлежат классу $\mathcal{P}_{Pog^*}$. Из результатов D. Barnette (1974,1977) и J. W. Butler (1974) и работы [6] следует, что отличный от них простой многогранник принадлежит классу $\mathcal{P}_{Pog}$ тогда и только тогда, когда он получается из 5- или 6-бочки срезками пар смежных рёбер граней по крайней мере с 6 сторонами и связными суммами с 5-бочкой (рис. 14), и классу $\mathcal{P}_{Pog^*}$ тогда и только тогда, когда он получается из 6-бочки срезками пар смежных рёбер граней по крайней мере с 6 сторонами. T. Inoue [13] показал, что обе операции увеличивают гиперболический объем, и перечислил первые 825 ограниченных прямоугольных многогранника в порядке возрастания объема (2015).

Для фуллеренов имеет место более сильный результат, чем для многогранников Погорелова. Имеется 1-параметрическая серия фуллеренов, которые получаются из 5-бочки связной суммой с 5-бочками вдоль 5-угольников, окруженных 5-угольниками. Она состоит из 5-бочки и так называемых $(5,0)$-*нанотрубок*. Из результатов F. Kardoš, R. Skrekovski (2008) и, независимо, K. Kutnar, D. Marušič (2008) следует, что остальные фуллерены принадлежат $\mathcal{P}_{Pog^*}$.

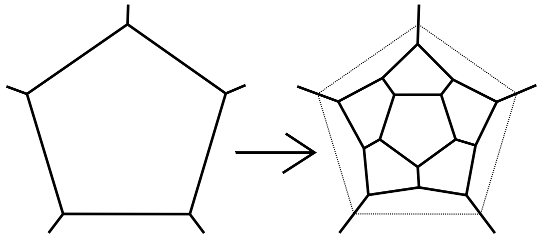


Рис. 14: Связная сумма с 5-бочкой.

Теорема 5 ([6]). *Любой фуллерен, отличный от* 5*-бочки и* $(5,0)$*-нанотрубок, получается из* 6*-бочки при помощи срезок пар смежных рёбер граней по крайней мере с* 6 *сторонами так, что промежуточные многогранники являются фуллеренами или* 7*-диск-фуллеренами, у которых* 7*-угольник смежен с* 5*-угольником.*

Трудность заключается в том, что конструкция многогранников из класса $\mathcal{P}_{Pog^*}$ не гарантирует того, что промежуточные многогранники будут близки к фуллеренам.

Теорема 6 ([7]). 7*-диск-фуллерен не принадлежит классу* $\mathcal{P}_{Pog^*}$ *тогда и только тогда, когда он получается из фуллерена последовательностью связных сумм с* 5*-бочкой. Любой* 7*-диск-фуллерен из* $\mathcal{P}_{Pog^*}$ *получается из* 6*-бочки при помощи срезок пар смежных рёбер граней по крайней мере с* 6 *сторонами так, что промежуточные многогранники имеют* 5-, 6- *и не более чем две* 7*-угольные грани.*

Автор благодарен В. М. Бухштаберу и Т. Е. Панову за плодотворную совместную работу и А. Ю. Веснину и О. В. Шварцману за обсуждение аспектов гиперболической геометрии.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Погорелов А.В. О правильном разбиении пространства Лобачевского// Матем. заметки. 1967. Т. 1, № 1. С. 3–8.

2. Андреев Е. М. О выпуклых многогранниках в пространствах Лобачевского// Матем. сб. 1970. Том 81 (123), № 3. С. 445–478.

3. Веснин А. Ю. Прямоугольные многогранники и трехмерные гиперболические многообразия// УМН. 2017. Том 72, № 2(434). С. 147-190.

4. Деза М., Дютур Сикирич М., Штогрин М. И. Фуллерены и диск-фуллерены// УМН. 2013. Том 68, № 4(412). С. 69-128.

5. Buchstaber V. M., Erokhovets N. Yu. Fullerenes, Polytopes and Toric Topology. In Volume 35 Combinatorial and Toric Homotopy: Introductory Lectures of Lect. Notes Ser. Inst. Math. Sci. Natl. Univ. Singap.; World Sci. Publ.: River Edge, NJ, USA, 2017; P. 67–178, arXiv: math.CO/160902949.

6. Бухштабер В. М., Ероховец Н. Ю. Конструкции семейств трехмерных многогранников, характеристические фрагменты фуллеренов и многогранники Погорелова// Изв. РАН. Сер. матем. 2017. Том 81, № 5. С. 15-91.

7. Erokhovets N. Construction of Fullerenes and Pogorelov Polytopes with 5-, 6- and one 7-Gonal Face// Symmetry. 2018. V. 10, № 3, 67.

8. Андреев Е. М. О выпуклых многогранниках конечного объема в пространстве Лобачевского// Матем. сб. 1970. Том 83 (125), № 2(10). С. 256-260.

9. Ероховец Н. Ю. Трехмерные прямоугольные многогранники конечного объема в пространстве Лобачевского: комбинаторика и конструкции// Тр. МИАН. 2019. Том 305. (в печати).

10. Barnette D. On generation of planar graphs// Discrete Mathematics. 1974. V. 7, № 3-4. P. 199–208.

11. Rivin I. A characterization of ideal polyhedra in hyperbolic 3-space// Ann. of Math., Second Series. 1996. V. 143, № 1. P. 51-70.

12. Brinkmann G., Greenberg S., Greenhill C., McKay B.D., Thomas R., Wollan P. Generation of simple quadrangulations of the sphere// Discrete Mathematics. 2005, V. 305, P. 33–54.

13. Inoue T. Organizing volumes of right-angled hyperbolic polyhedra// Algebr. Geom. Topol. 2008. V. 8, № 3. P. 1523-1565.

———————————————————————————

УДК 519.145

Полуполевые проективные плоскости, допускающие подгруппу коллинеаций, изоморфную S_3 [1]

О. В. Кравцова (Россия, г. Красноярск)
Сибирский федеральный университет
e-mail: ol71@bk.ru
Т. В. Моисеенкова (Россия, г. Красноярск)
Сибирский федеральный университет
e-mail: tanya-mois11@yandex.ru

Semifield projective plane that admit collineation subgroup isomorphic to S_3

O. V. Kravtsova (Russia, Krasnoyarsk)
Siberian Federal University
e-mail: ol71@bk.ru
T. V. Moiseenkova (Russia, Krasnoyarsk)
Siberian Federal University
e-mail: tanya-mois11@yandex.ru

Проективная плоскость называется полуполевой, если ее координатизирующее множество является полуполем (semifield). Известен способ задания полуполевой плоскости, как и всякой плоскости трансляций, с использованием линейного пространства и специального семейства линейных преобразований, так называемого регулярного множества. Матричное представление регулярного множества определяет геометрические свойства полуполевой плоскости, в том числе строение группы автоморфизмов (коллинеаций).

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект № 19-01-00566.

Одна из традиционных задач проективной геометрии – построение конечных проективных плоскостей по известным ограничениям на группу коллинеаций (например, [1]). Симметрическая группа S_3 является некоммутативной группой минимального порядка, ее наличие в группе коллинеаций проективной плоскости и в группе автоморфизмов координатизирующего множества указывает на наличие особенных свойств. Так, среди всех 23 неизоморфных полуполей порядка 16 ровно одно имеет группу автоморфизмов, изоморфную S_3. Таким свойством обладает и исключительное полуполе Хентзела–Руа порядка 64, не являющееся ни лево-, ни правопримитивным [2, 3].

Решена задача построения матричного представления регулярного множества конечной полуполевой плоскости порядка q^2 с ядром $GF(q)$ в предположении, что ее группа линейных автотопизмов (коллинеаций, фиксирующих треугольник) содержит подгруппу, изоморфную симметрической группе S_3. Построены примеры плоскостей минимальных порядков 16 и 625.

Теорема 1. *Пусть π – полуполевая плоскость порядка 2^{2n} с ядром $F \supseteq GF(2^n)$, группа линейных автототпизмов которой содержит подгруппу H, изоморфную симметрической группе S_3. Тогда плоскость π имеет регулярное множество в $GL_2(F) \cup \{0\}$ вида*

$$R = \left\{ \begin{pmatrix} u+v+m(v) & f(v)+m(u) \\ v & u \end{pmatrix} \;\middle|\; u, v \in F \right\},$$

где m, f – аддитивные функции на F, f взаимно однозначна, причем:

1) если H содержит гомологию с осью $[0,0]$ и центром (∞), то $f(x) = x$ $(x \in F)$;

2) если H содержит гомологию с осью $[0]$ и центром (0), то $f(x) = m(m(x)) + m(x) + x$ $(x \in F)$;

3) если H содержит гомологию с осью $[\infty]$ и центром $(0,0)$, то $f(x) = x$, $m(x) = 0$ $(x \in F)$, плоскость дезаргова;

4) если H не содержит гомологий, то функции m и f удовлетворяют условиям $(x \in F)$

$$m(m(x)) = m(x), \quad f(m(x)) = m(x), \quad m(f(x)) = m(x) + f(x) + x, \quad f(f(x)) = x.$$

Теорема 2. *Если π – полуполевая плоскость порядка 3^{2n} с ядром $F \supseteq GF(3^n)$, то группа линейных над F автотопизмов не содержит подгруппы, изоморфной симметрической группе S_3.*

Теорема 3. *Пусть π – полуполевая плоскость порядка p^{2n}, $p > 3$ – простое, с ядром $F \supseteq GF(p^n)$, группа линейных автотопизмов которой содержит подгруппу H, изоморфную симметрической группе S_3. Тогда плоскость π имеет регулярное множество в $GL_2(F) \cup \{0\}$ вида*

$$R = \left\{ \begin{pmatrix} m(u) & f(v) \\ v & u \end{pmatrix} \;\middle|\; u, v \in F \right\},$$

где m, f – аддитивные взаимно однозначные функции на F, причем:

1) если H содержит гомологию с осью $[0,0]$ и центром (∞), то $f(x) = -\frac{1}{3}m(x)$ $(x \in F)$;

2) если H содержит гомологию с осью $[0]$ и центром (0), то $f(m(x)) = m(f(x)) = -\frac{1}{3}x$ $(x \in F)$;

3) если H содержит гомологию с осью $[\infty]$ и центром $(0,0)$, то $p-3$ не является квадратом, $f(x) = -\frac{1}{3}x$, $m(x) = x$ $(x \in F)$, плоскость дезаргова;

4) если H не содержит гомологий, то функции m и f удовлетворяют условиям $(x \in F)$

$$\begin{aligned} &m(m(x)) = x, && f(f(x)) = \frac{1}{9}x, \\ &m(f(x)) = -\frac{1}{3}m(x) - f(x) - \frac{1}{3}x, && f(m(x)) = \frac{1}{3}m(x) + f(x) - \frac{1}{3}x. \end{aligned}$$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Biliotti M., Jha V., Johnson N. L., Menichetti G. A structure theory for two-dimensional translation planes of order q^2 that admit collineation group of order q^2 // Geom. Dedicata. 1989. Vol. 29. P. 7-43.

2. Hentzel I. R., Rúa I. F. Primitivity of Finite Semifields with 64 and 81 elements // International Journal of Algebra and Computation. 2007. Vol. 17, № 7. P. 1411-1429.

3. Levchuk V. M., Kravtsova O. V. Problems on structure of finite quasifields and projective translation planes // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2017. Vol. 38, № 4. P. 688-698.

УДК 519

Координационные последовательности 2-однородных графов[1]

А. В. Малеев (Россия, г. Владимир)
Владимирский государственный университет имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых
e-mail: andr_mal@mail.ru
А. А. Мокрова (Россия, г. Владимир)
Владимирский государственный университет имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых
e-mail: albina.mokrova@yandex.ru
А. В. Шутов (Россия, г. Владимир)
Владимирский государственный университет имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых
e-mail: a1981@mail.ru

Coordination sequences of the 2-uniform graphs

A. V. Maleev (Russia, Vladimir)
Vladimir State University named after Alexander and Nikolay Stoletovs
e-mail: andr_mal@mail.ru
A. A. Mokrova (Russia, Vladimir)
Vladimir State University named after Alexander and Nikolay Stoletovs
e-mail: albina.mokrova@yandex.ru
A. V. Shutov (Russia, Vladimir)
Vladimir State University named after Alexander and Nikolay Stoletovs
e-mail: a1981@mail.ru

Рассмотрен новый подход к изучению координационных последовательностей 2-однородных графов, основанный на введенной в [1] концепции послойного роста.

Для произвольной вершины x некоторого графа G рассмотрим последовательность координационных окружений $eq(x, n)$, определенную индуктивно:

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ в рамках проектов № 17-02-00835 А и № 17-42-330787 р_а

— координационное окружение $eq(x, 0)$ — сама вершина x;

— координационное окружение $eq(x, n+1)$ определяется как множество вершин графа, соседних с вершинами из координационного окружения $eq(x, n)$ и не входящих в координационные окружения $eq(x, k)$ с $0 \leqslant k \leqslant n$.

n-ое координационное число $e(x, n)$ вершины x — это число вершин графа G, входящих в координационное окружение $eq(x, n)$.

Координационной последовательностью назовем последовательность координационных чисел $e(x, n), n = 0, 1, \dots$ вершины x.

Будем называть 2-однородным графом периодический граф, для которого фундаментальная область относительно полной кристаллографической группы симметрий содержит ровно 2 вершины, причем граф, вложенный в плоскость, образует разбиение на правильные многогранники. На плоскости существует ровно 20 таких графов. Их полный список можно найти в [3].

Математическое изучение координационных чисел началось в работе [2], позднее в [4]. В их основе лежит модель, представляющая структуру в виде периодического графа, вершины которого соответствуют атомам или молекулам структуры, а ребра - связям между ними. В [5] можно найти подробную библиографию проблемы с описанием вклада каждой из работ. В [5] также поставлена задача строгого доказательства явных формул для координационных чисел 2-однородных графов. В [6] сформулирована и доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть G — 2-однородный граф и x — его вершина. Тогда существуют числа $n_0 \in \mathbb{N}, k, \alpha_i, \beta_i$, где $0 \leqslant i < k$, такие, что для $n \geqslant n_0$*

$$e_G(x, n) = \alpha_i n + \beta_i, \tag{1}$$

если $n \equiv i (\mathrm{mod}\ k)$.

Проиллюстрируем результаты на нескольких примерах.

Рассмотрим 2-однородный граф, имеющий двумерную пространственную группу симметрии $p6$. Фрагмент этого графа изображен на рис. 1. а). Данный граф известен под кодом kra в базе RSCR [7], там же можно найти данные по графу, в частности координаты вершин.Так как граф 2-однородный, в нем две симметрически независимые вершины v_1 — вершина степени 5 и v_2 — вершина степени 6. Поэтому в графе kra имеется ровно 2 различных последовательности координационных чисел $e_{kra}(v_1, n)$ и $e_{kra}(v_2, n)$. Эти координационные последовательности имеются в OEIS [8] под номерами A301726 и A301724, соответственно.

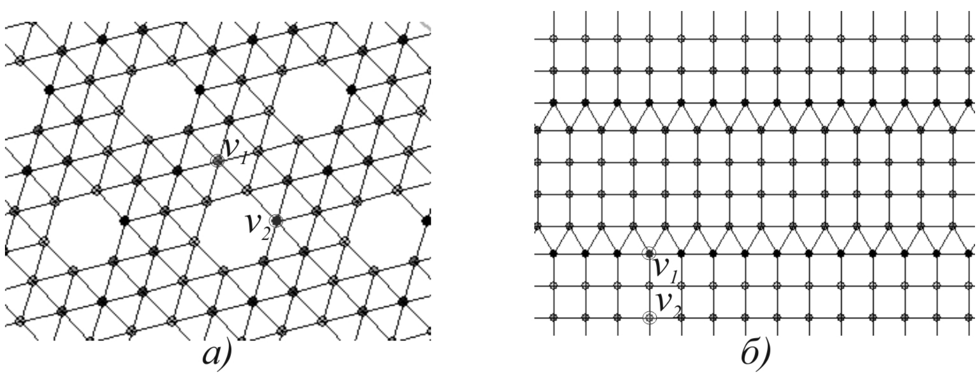


Рис. 15: Фрагменты графов kra — а) и krm — б).

Для графа kra справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть v_1 и v_2 — вершины степени 5 и степени 6 графа kra соответственно. Тогда для $n \geqslant 1$*

$$e_{kra}(v_1,n)=\begin{cases}\frac{27n}{5}, n\equiv 0,5(\mathrm{mod}10)\\ \frac{27n-2}{5}, n\equiv 1(\mathrm{mod}10)\\ \frac{27n+1}{5}, n\equiv 2,7(\mathrm{mod}10)\\ \frac{27n-1}{5}, n\equiv 3,8(\mathrm{mod}10)\\ \frac{27n-3}{5}, n\equiv 4(\mathrm{mod}10)\\ \frac{27n+3}{5}, n\equiv 6(\mathrm{mod}10)\\ \frac{27n+2}{5}, n\equiv 9(\mathrm{mod}10)\end{cases},\quad e_{kra}(v_2,n)=\begin{cases}\frac{27n}{5}, n\equiv 0,5(\mathrm{mod}10)\\ \frac{27n+3}{5}, n\equiv 1(\mathrm{mod}10)\\ \frac{27n-4}{5}, n\equiv 2(\mathrm{mod}10)\\ \frac{27n-1}{5}, n\equiv 3(\mathrm{mod}10)\\ \frac{27n+7}{5}, n\equiv 4(\mathrm{mod}10)\\ \frac{27n-7}{5}, n\equiv 6(\mathrm{mod}10)\\ \frac{27n+1}{5}, n\equiv 7(\mathrm{mod}10)\\ \frac{27n+4}{5}, n\equiv 8(\mathrm{mod}10)\\ \frac{27n-3}{5}, n\equiv 9(\mathrm{mod}10)\end{cases}.$$

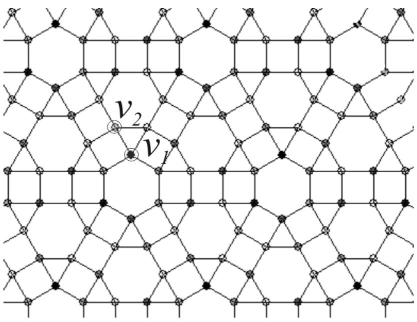
В качестве второго примера рассмотрим 2-однородный граф, имеющий двумерную пространственную группу симметрии $cmm2$. Код данного графа в базе RSCR [7] — krm. Он также имеет две симметрически независимые вершины v_1 — вершина степени 3 и v_2 — вершина степени 4, в нем 2 различных последовательности координационных чисел $e_{krm}(v_1,n)$ и $e_{krm}(v_2,n)$. Они имеются в OEIS [8] под номерами A301291 и A301293, соответственно. Фрагмент этого графа изображен на рис. 1. б).

Для графа krm справедлива следующая теорема.

Теорема 3. *Пусть v_1 и v_2 — вершины степени 3 и степени 4 графа krm соответственно. Тогда для $n \geqslant 1$*

$$e_{krm}(v_1,n)=\begin{cases}\frac{9n}{2}, n\equiv 0,2(\mathrm{mod}4)\\ \frac{9n+1}{2}, n\equiv 1(\mathrm{mod}4)\\ \frac{9n-1}{2}, n\equiv 3(\mathrm{mod}4)\end{cases},\quad e_{krm}(v_2,n)=\begin{cases}\frac{9n}{2}, n\equiv 0,2(\mathrm{mod}4)\\ \frac{9n-1}{2}, n\equiv 1(\mathrm{mod}4)\\ \frac{9n+1}{2}, n\equiv 3(\mathrm{mod}4)\end{cases}.$$

В качестве треьего примера рассмотрим 2-однородный граф, имеющий двумерную пространственную группу симметрии $p6mm$. Его код в базе RSCR [7] — krq. Он также имеет две симметрически независимые вершины v_1, v_2 — обе вершины степени 4. Его координационные последовательности имеются в OEIS [8] под номерами A301299 и A301301, соответственно. Фрагмент этого графа изображен на рис. 2. а).



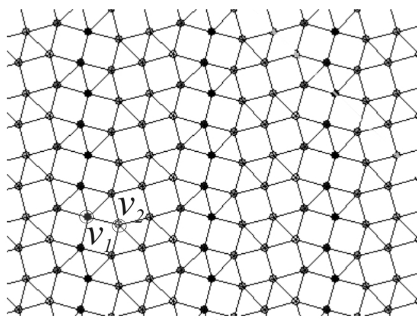


Рис. 16: Фрагменты графов krq — а) и krj — б.

Для графа krq справедлива следующая теорема.

Теорема 4. *Пусть v_1 и v_2 — две вершины 4 степени графа krq. Тогда*

$$e_{krq}(v_1,n)=\begin{cases}\frac{22n}{5}, n\equiv 0(\mathrm{mod}5)\\ \frac{22n-2}{5}, n\equiv 1,2(\mathrm{mod}5)\\ \frac{22n+2}{5}, n\equiv 3,4(\mathrm{mod}5)\end{cases},\quad e_{krq}(v_2,n)=\begin{cases}\frac{22n}{5}-1, n\equiv 0(\mathrm{mod}5)\\ \frac{21n+4}{5}, n\equiv 1(\mathrm{mod}5)\\ \frac{22n+1}{5}, n\equiv 2(\mathrm{mod}5)\\ \frac{21n-6}{5}, n\equiv 3(\mathrm{mod}5)\\ \frac{21n+6}{5}, n\equiv 4(\mathrm{mod}5)\end{cases},$$

для $n \geqslant 1$, *для $n \geqslant 8$.*

В качестве последнего примера рассмотрим 2-однородный граф, имеющий двумерную пространственную группу симметрии $pgg2$. Его код в базе RSCR [7] — krj. Он также имеет две симметрически независимые вершины v_1 и v_2, обе вершины степени 5. Его координационные последовательности имеются в OEIS [8] под номерами A219529 и A301697, соответственно. Фрагмент этого графа изображен на рис. 2. б).

Для графа krj справедлива следующая теорема.

Теорема 5. *Пусть v_1 и v_2 — две вершины 5 степени графа krj. Тогда для $n \geqslant 1$*

$$e_{krj}(v_1,n)=\begin{cases}\frac{16n}{3}, n\equiv 0(\mathrm{mod}3)\\ \frac{16n-1}{3}, n\equiv 1(\mathrm{mod}3)\\ \frac{16n+1}{3}, n\equiv 2(\mathrm{mod}3)\end{cases}, \quad e_{krj}(v_2,n)=\begin{cases}\frac{16n}{3}, n\equiv 0(\mathrm{mod}6)\\ \frac{16n-1}{3}, n\equiv 1,4(\mathrm{mod}6)\\ \frac{16n-2}{3}, n\equiv 2(\mathrm{mod}6)\\ \frac{16n}{3}-1, n\equiv 3(\mathrm{mod}6)\\ \frac{16n+1}{3}, n\equiv 5(\mathrm{mod}6)\end{cases}.$$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Zhuravlev V. G. Self-similar growth of periodic parti-tions and graphs // St. Petersburg Math. J. 2002. P. 13-201.
2. Brunner G. O., Laves F. Zum Problem der Koordina-tionszahl // Wiss. 7.. Techn. Univers. Dresden 20. 1971. P. 387.
3. Grünbaum B., Shephard G.C. Tilings and Patterns. — New York: W. H. Freeman & Co., 1987.
4. Fischer W. Existenzbedingungen homogener Kugelpackungen zu kubischen Gitterkomplexen mit weniger als drei Freiheitsgraden // Z. Kristallogr. 1973. P. 138-129.
5. Goodman-Strauss C., Sloane N. J. A. A coloring-book approach to finding coordination sequences // Acta Crystallographica. Section A. 2019. № 75. P. 121-134.
6. Shutov A., Maleev A. Coordination sequences and layer-by-layer growth of periodic structures // Zeitschrift für Kristallographie - Crystalline Materials ; doi:10.1515. 2018.
7. Reticular Chemistry Structure Resource (RCSR) [Электронный ресурс]. Режим доступа: http://rcsr.net/layers
8. The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences (OEIS) [Электронный ресурс]. Режим доступа: https://oeis.org/

———

On the manipulation of simple animations by dynamical distance geometry

Antonio Mucherino (Rennes, France)
IRISA, University of Rennes 1
e-mail: antonio.mucherino@irisa.fr

Аннотация

A simple approach for the manipulation of objects' animations, which is based on the definition and the solution of a *dynamical* Distance Geometry Problem (dynDGP), is discussed. An example in dimension 2 is presented where a video clip, designed to perform a psychological study in 1944, is manipulated by including new distance constraints. The obtained solution alters the perception of the "actions" performed in the original video clip.

1. Introduction

Given a positive integer $K > 0$ and a graph $G = (V \times T, E, d)$, the dynamical Distance Geometry Problem (dynDGP) [10] consists in finding a realization

$$x : (v, t) \in V \times T \longrightarrow x_v^t = x(v, t) \in \mathbb{R}^K$$

of G in the Euclidean space $\mathbb{R}^K$ such that the following objective is minimized:

$$\sigma(x) = \sum_{\substack{u,v \in V \\ t,q \in T}} \frac{|\, ||x_u^q - x_v^t|| - d(u_q, v_t)\, |}{d(u_q, v_t)},$$

where $|\cdot|$ is the absolute value of a real number, and $||\cdot||$ is the Euclidean norm.

The dynamical component of a dynDGP (when compared to a standard Distance Geometry Problem (DGP)) is given by fact that the vertex set of the graph G is the set product between two sets. The set V contains "objects", whose nature strongly depends on the problem at hand. The second set T actually represents the time as a sequence of discrete steps. Notice that, from a formal point of view, the only difference between the DGP and the dynDGP is given by their corresponding vertex sets. However, the study and use of subgraphs of G with fixed times $t \in T$, as well as with fixed objects $v \in V$, can give important help in improving the performances of some solution methods that were initially designed for the DGP [7].

The function x represents animations as a set of trajectories $x(v, t)$, for every object $v \in V$, and for every time $t \in T$. A given function x may either be the representation of a known animation, or a possible realization of the graph G. In order to manipulate an existing animations x', a transformation of its representation in distance space in performed, so that the manipulation of the animation can subsequently be performed by introducing new distance constraints. The graph G is obtained therefore by computing a subset of necessary distances extracted from the existing animation x'. Then, new distance constraints are introduced in G, and a new animation x'', which is close as much as possible to x' while it also satisfies the new distance constraints, is generated by solving a dynDGP.

Since it is likely that the distance constraints generated from x' may not be fully compatible with the new included distance constraints, a realization x'' that satisfies the entire set of distances included in G may not exist. For this reason, in the context of the dynDGP, the realization that satisfies *as much as possible* all distance constraints is rather searched, i.e. a realization x'' that minimizes the function $\sigma(x'')$ but such that $\sigma(x'') > 0$ [3].

For this reason, in the context of the dynDGP, a second weight $\pi(u_q, v_t)$ is associated to every edge of G, which represents the *priority* of every distance $d(u_q, v_t)$. The function σ can be slightly modified so that every term of the sum is multiplied by the corresponding priority $\pi(u_q, v_t)$. In this way, a different importance is given to every distance constraint: when the original distance constraints (extracted from x') and new included constraints are not fully compatible, for example, one may want to give a higher priority to the new constraints, because they represent some features one wants to include in the resulting animations. For a larger discussion on this point, the reader is referred to [6].

There exist several methods for the solution of DGPs [5, 9]. The aim of this extended abstract is to show how manipulations on two-dimensional animations can be performed *via* dynDGP and by employing a method for local optimization for its solution. In fact, the constraints that are included in G for manipulating the animations are not supposed to drastically modify them, otherwise there would be no interest in using them as a base animation. Therefore, the original animations x' can be considered as good starting points for iterative methods for the solution of the dynDGP by local optimization. In the experiments reported below, a Spectral Projected Gradient (SPG) method is employed [1, 7].

2. Heider and Simmel animation

In 1944, Heider and Simmel published an original psychological study about perception, where panelists were asked to express the behavior they perceived while viewing a video clip depicting a set of animated objects. Such objects had, for the first time in this study, no human qualities, but they were rather represented with geometrical figures such as triangles (one larger and another smaller) and one circle, together with third geometrical figure representing the "house". The house was the only inanimate object, unless "pushed" by the other objects. The performed experiments showed that most people interpreted the movements of the geometrical objects as actions of animated beings (in most cases persons). Some panelists were even able to "see" short stories out of the object's animation [4].

The trajectories of the moving objects were extracted from the original video clip[2] (starting from frame 100). For every animated object, only the trajectory of their geometrical centers (center of the circle, and centers of the triangles) were included in x'; when creating the new video clip for the obtained animation x'', then, every object was represented again with its original geometrical figure. Notice, however, that these geometrical figures do not have any role in the determination of the solutions. The original animation x' is composed by 1800 frames; the "house" was not included in the experiments.

The dynDGP instance related to Heider and Simmel's video clip is generated with the idea of avoiding contacts among the objects "taking part" to the scene. Given the animation x' extracted from the video clip, the graph G is created by measuring some distances between the trajectories of the animated objects. Then, new distance constraints are included in G so that the distance between every pair of objects cannot be smaller than a given threshold. The environment where the scene takes place is represented by a box having sides 1 by 1; the additional constraints avoid that two objects get closer than the threshold $\Delta = 0.2$. For more details on how the graph G can be generated, the reader can refer to [10].

The video clip generated from the dynDGP solutions obtained with the SPG method are available online[3], together with other animations recently presented in other publications [7, 8]. In the particular context of the chosen animation, the new introduced distance constraints reflect the fact that the "characters" in the video should not come too close to each other. Starting from frame 250, the viewer can in fact see in the original animation x' that the two triangular objects are *attacking* each other by sudden and repetitive approaches. In the dynDGP-derived animation x'', instead, this approaching behavior is not pronounced, because of the imposed distance constraints. However, the attacking effect is a way amplified with this modification. In fact, in the animation x'', it is not necessary for one triangle to approach "too much" the other to make it step back; a much lighter approach is actually sufficient to have the stepping back effect over the other. Fig. 17 shows three key frames of the two animations x' and x''.

3. Conclusion

This extended abstract briefly discussed a simple method that, via the representation of an original animation in terms of distances and the solution of a dynDGP, allows to manipulate animations by imposing distance constraints. An animation that was initially used in a psychological study was presented and manipulated with new imposed constraints, which were able to alter the perception of the viewer about the "scene".

The dynDGP was recently introduced as a subclass of the DGP where solutions methods may be efficiently adapted to take advantage of the particular features of the problem [10]. Future works will

[2] `https://www.youtube.com/watch?v=sx7lBzHH7c8`
[3] `https://www.antoniomucherino.it/en/animations.php`

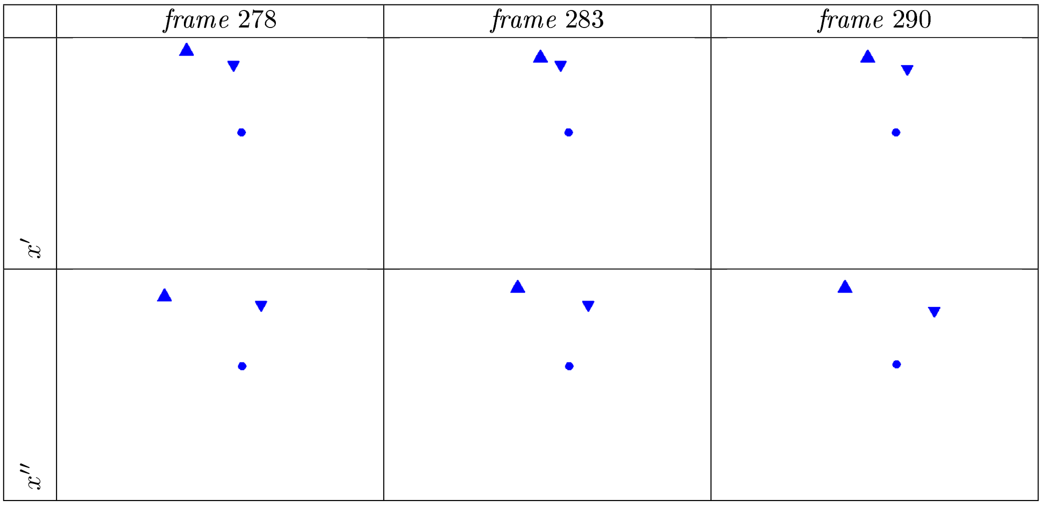


Рис. 17: *Comparisons between some key frames in the original animation and the obtained dynDGP solution. The new animation x'' is compared to the animation x' at frames 278 (the two triangles stare at each other), 283 (the big triangle attacks) and 290 (the small triangle makes a step back): the same behavior is visible in x'' but the two objects do not approach so much to each other.*

be focused on two particular points: (i) Can the dynDGP have benefits in the use of non-Euclidean distances [2], which might be able to better capture the dynamical component of these instances? (ii) Can other methods for optimization, or particularly designed for the DGP, be employed as more efficient alternatives to SPG?

REFERENCES

1. E.G. Birgin, J.M. Martínez, *Large-Scale Active-Set Box-Constrained Optimization Method with Spectral Projected Gradients*, Computational Optimization and Applications **23**, 101–125, 2002.

2. M.M. Deza, E. Deza, *Encyclopedia of Distances*, 756 pages, Springer, 2016.

3. W. Glunt, T.L. Hayden, M. Raydan, *Molecular Conformations from Distance Matrices*, Journal of Computational Chemistry **14**(1), 114–120, 1993.

4. F. Heider, M. Simmel, *An Experimental Study of Apparent Behavior*, The American Journal of Psychology **57**(2), 243–259, 1944.

5. L. Liberti, C. Lavor, N. Maculan, A. Mucherino, *Euclidean Distance Geometry and Applications*, SIAM Review **56**(1), 3–69, 2014.

6. A. Mucherino, *On the Discretization of Distance Geometry: Theory, Algorithms and Applications*, HDR Monograph, University of Rennes 1. INRIA Hal archive id: `tel-01846262`. July 17, 2018.

7. A. Mucherino, D.S. Gonçalves, *An Approach to Dynamical Distance Geometry*, Lecture Notes in Computer Science **10589**, F. Nielsen, F. Barbaresco (Eds.), Proceedings of Geometric Science of Information (GSI17), Paris, France, 821–829, 2017.

8. A. Mucherino, D.S. Gonçalves, A. Bernardin, L. Hoyet, F. Multon, *A Distance-Based Approach for Human Posture Simulations*, IEEE Conference Proceedings, Federated Conference on Computer Science and Information Systems (FedCSIS17), Workshop on Computational Optimization (WCO17), Prague, Czech Republic, 441–444, 2017.

9. A. Mucherino, C. Lavor, L. Liberti, N. Maculan (Eds.), *Distance Geometry: Theory, Methods and Applications*, 410 pages, Springer, 2013.

10. A. Mucherino, J. Omer, L. Hoyet, P. Robuffo Giordano, F. Multon, *An Application-based Characterization of Dynamical Distance Geometry Problems*, to appear in Optimization Letters, Springer, 2019.

УДК 519.652

Сжатые измерения и равноугольные жесткие фреймы

С. Я. Новиков (Россия, Самара)[1]
Самарский национальный исследовательский университет
e-mail: nvks@ssau.ru

Compressed dimensions and equiangular hard frames

S. Ya. Novikov (Russia, Samara)
Samara national research University
e-mail: nvks@ssau.ru

Фреймом конечномерного гильбертова пространства называют набор векторов, линейная оболочка которых образует всё пространство. Понятие фрейма обобщает понятие базиса, так как в определении нет требования линейной независимости.

Набор векторов $\Phi = \{\varphi_n\}_{n=1}^N$ называется *фреймом* вещественного или комплексного пространства $\mathbb{H}^M$, если существуют константы $0 < A \leq B < \infty$ такие что для всех $x \in \mathbb{H}^M$,

$$A\|x\|^2 \leq \sum_{n=1}^{N} |\langle x, \varphi_n\rangle|^2 \leq B\|x\|^2.$$

В конечномерном пространстве определение фрейма эквивалентно полноте системы векторов, то есть $\mathrm{span}\{\varphi_n\}_{n=1}^N = \mathbb{H}^M$.

Выделим следующие классы фреймов:

Φ — *жесткий фрейм,* если $A = B$.

Φ — *фрейм Парсеваля-Стеклова,* если $A = B = 1$.

Φ — *равномерный фрейм,* если $\|\varphi_{n'}\| = \|\varphi_{n''}\|$.

Φ — *равноугольный фрейм,* если Φ равномерный и существует $\beta \geq 0$ такое что $|\langle\varphi_{n'}, \varphi_{n''}\rangle| = \beta$ для всех $n' \neq n''$.

Φ — *равноугольный фрейм Парсеваля (EPF)*, если Φ равноугольный и фрейм Парсеваля - Стеклова.

Каждый фрейм определяет три линейных оператора. *Оператор анализа* — это оператор $V : \mathbb{H}^M \to \mathbb{H}^N$, определенный соотношениями $(Vx)_n = \langle x, \varphi_n\rangle,\ n = 1, \ldots, N$.

[1]Автор поддержан грантом РФФИ 17-01-00138.

Сопряженный к оператору анализа оператор V^*, *оператор синтеза* : $h \in \mathbb{H}^N \to \sum_{n=1}^{N} h_n\varphi_n$.

Фреймовый оператор — это положительный самосопряженный обратимый оператор $S = V^*V$ on $\mathbb{H}^M$.

Оператор Грама — это оператор $G = VV^*$ на $\mathbb{H}^N$.

Если Φ — фрейм Парсеваля-Стеклова с оператором анализа V, то V оказывается изометрией, так как

$$\|Vx\|_2^2 = \sum_{n=1}^{N} |\langle x, \varphi_n\rangle|^2 = \|x\|^2,\ x \in \mathbb{H}^M.$$

Обратно, если $N \times M$ матрица V является изометрией, то она определяет оператор анализа некоторого фрейма Парсеваля-Стеклова.

Фреймы Парсеваля-Стеклова восстанавливают вектор по коэффициентам представления:

$$x = \sum_{n=1}^{N} \langle x, \varphi_n\rangle\varphi_n,$$

или $x = V^*Vx$, or $S = V^*V = I_{\mathbb{H}^M}$.

Традиционные методы обработки больших данных предполагают наличие трёх этапов: сбор, сжатие, восстановление информации. Первая из них требует создания больших хранилищ. Метод сжатых измерений позволяет совместить сбор и сжатие информации.

Определение 1. Сигнал $x \in \mathbb{R}^N$ называется k-разреженным, если он имеет не более k ненулевых координат:

$$\|x\|_0 := |\{j : x(j) \neq 0\}| \leq k.$$

Множество всех k-разреженных векторов обозначается через Σ_k,, т.е.,

$$\Sigma_k := \{x \in \mathbb{R}^N : \|x\|_0 \leq k\}.$$

Математическую модель сжатого измерения можно описать матрицей $A \in \mathbb{R}^{M \times N}$, $M \ll N$, и измерениями разреженного вектора $y = Ax \in \mathbb{R}^M$, которые даны для восстановления вектора x. Разреженность k или расположения ненулевых координат вектора неизвестны.

Интуитивная идея восстановления вектора x решением задачи

$$\min \|x\|_0 \quad \text{subject to} \quad Ax = y, \tag{P_0}$$

оказалась NP-сложной.

Chen, Donoho и Saunders [1] предложили заменить

(P_0) другой задачей, которая может быть решена линейным программированием:

$$\min \|x\|_1 \quad \text{subject to} \quad Ax = y. \tag{P_1}$$

Такая формулировка известна как ℓ_1-минимизация, или *Basis Pursuit (BP)*.

Определение 2. Пусть $A \in \mathbb{R}^{M \times N}$. *Спарком* A называется минимальное количество линейно зависимых столбцов A.

Это определение может быть дано с использованием ℓ_0-количества:

$$\operatorname{spark}(A) = \min\big\{\|x\|_0 : x \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\},$$

$$\text{таких что} \quad Ax = 0\big\}.$$

Теорема 3.[2] *Пусть* $A \in \mathbb{R}^{M \times N}$, *и пусть* $k \in \mathbb{N}$. *Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

(1) Если решение x задачи (P_0) удовлетворяет неравенству $\|x\|_0 \le k$, то это решение единственно.

(2) $k < \mathrm{spark}(A)/2$.

Определение 4. Пусть $A \in \mathbb{R}^{M\times N}$ —матрица со столбцами $a_n \in \mathbb{R}^M, n = 1,\dots,N$. *Мерой согласованности* матрицы назовем

$$\mu(A) := \max_{n\neq n'} \frac{|\langle a_n, a_{n'}\rangle|}{\|a_n\|\cdot\|a_{n'}\|} \tag{2}$$

Theorem 5 [2, 3]. *Пусть $A \in \mathbb{R}^{M\times N}$ и пусть $x_0 \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$ — общее решение задач (P_0) и (P_1). Если $\|x_0\|_0 < \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{\mu(A)}\right)$, то x_0— единственное решение обеих задач.*

Theorem 6[2, 3]. *Пусть столбцы матрицы $A \in \mathbb{R}^{M\times N}$ имеют единичную норму и мера согласованности удовлетворяет неравенству $(2k-1)\mu(A) < 1$. Тогда (P_1) восстанавливает каждый из k-разреженных векторов x по измерениям $y = Ax$.*

Матрица Φ, столбцы которой образованы фреймом, обладает экстремальными свойствами.

Если столбцы Φ имеют единичную норму, то мера согласованности

$$\mu := \max_{n,n'\in\{1,\dots,N\},n\neq n'} \left|\langle \phi_n, \phi'_n\rangle\right|$$

для $M \times N$-матрицы $\Phi = [\varphi_1, ..., \varphi_N]$

удовлетворяет

$$\frac{N^2}{M} \le N + N\,(N-1)\,\mu^2.$$

Theorem 7. *Для произвольной $M\times N-$ матрицы Φ с нормированными столбцами имеет место неравенство*

$$\mu \ge \sqrt{\frac{N-M}{M(N-1)}}.$$

Равенство возможно только для **равноугольных жестких фреймов.**

Имеет ли равноугольный жесткий фрейм полный спарк?

Найдено два примера равноугольных жестких фреймов в $\mathbb{C}^3$ с $spark = 3$, т.е. с неполным спарком.

Для вещественных пространств вопрос пока открыт.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Chen, S. S., Atomic decomposition by basis pursuit/ S. S. Chen, D. L. Donoho, and M. A. Saunders// SIAM J. Sci. ., 20(1):33–61, 1998.

2. D. L. Donoho and M. Elad. Optimally sparse representation in general (nonorthogonal) dictionaries via l1 minimization. Proc. Natl. Acad. Sci., 100(5):2197–2202, 2003.

3. M. Elad and A. M. Bruckstein. A generalized uncertainty principle and sparse representation in pairs of bases. IEEE Trans. Inf. Theory, 48(9):2558–2567, 2002.

Resolvably measurable functions

A. Ostrovsky
Saint-Petersburg State University of Aerospace Instrumentation

We will be assumed that X and Y are subsets of the Cantor set $\mathbf{C}$.

The purpose of this paper is to give the prove of the following Theorem 1, which strengthens the main result of [4] and gives the answer in the affirmative to [3, Problem 1]. The close connection between resolvably measurable functions and piecewise continuous ones was announced by V. Vinokurov (without proof) [5].

Theorem 1. Each resolvably measurable function $f : X \to Y$ is piecewise continuous.

Recall that a subset E of a space X is *resolvable* if for each nonempty subset F, closed in X, there holds: $\overline{F \cap E} \cap \overline{F \setminus E} \neq F$. Resolvable sets are known as all sets in the difference hierarchy [2]. In each Polish space, resolvable sets are exactly the sets that are both F_σ and G_δ.

We say that a function f is *resolvably measurable* if the inverse images of open sets are resolvable sets. Recall that a function $f : X \to Y$ is *piecewise continuous* if X admits a countable closed cover $\mathcal{C}$ of X such that for each $C \in \mathcal{C}$ the restriction $f|C$ is continuous.

The following corollary was proved by J.E. Jayne, C.A. Rogers [1].

Corollary 1. Each Δ^2_0–measurable function $f : X \to Y$ of a Polish space X is piecewise continuous.

1. Definition of X^* and I

We will denote by $\mathcal{B}$ the countable clopen base of $\mathbf{C}$ and by X^* the set

$$X \setminus \bigcup_{U,W \in \mathcal{B}} \{U \cap f^{-1}(W) : f|U \cap f^{-1}(W) \text{ is piecewise continuous}\}. \tag{1.1}$$

We will denote by I a *nonempty* set $U \cap f^{-1}(W) \cap X^*$ where W, $U \in \mathcal{B}$.

Lemma 1.1. Let $f : X \to Y$ be a resolvably measurable function that is not piecewise continuous, then the restriction $f|I$ is not piecewise continuous.

Proof. Since the base $\mathcal{B}$ is countable, f is piecewise continuous on $X \setminus X^*$. As intersection of two F_σ, $U \cap f^{-1}(W)$ is F_σ, and, thus, f is piecewise continuous on $J = U \cap f^{-1}(W) \setminus X^*$. If we suppose the opposite to the assertion of Lemma 1.1, namely, that $f|I$ is piecewise continuous, then f is piecewise continuous on $I \cup J = (U \cap f^{-1}(W) \cap X^*) \cup ((U \cap f^{-1}(W)) \setminus X^*) = U \cap f^{-1}(W)$. By (1.1), $U \cap f^{-1}(W) \subset X \setminus X^*$, and hence, $I = U \cap f^{-1}(W) \cap X^* \subset (X \setminus X^*) \cap X^* = \emptyset$. This contradiction proves the lemma. $\square$

Note that the set $f(I)$ is not countable (otherwise $f|I$ is piecewise continuous) and without isolated points. Under the assumption of Lemma 1.1, we obtain:

Remark 1. For each $y \in Y$ the restriction of $f|(I \setminus f^{-1}(y))$ is not piecewise continuous. In particular, there is a point $x_1 \in I$ for which $f(x_1) \neq y$.

Indeed, both sets $I \setminus f^{-1}(y)$ and $I \cap f^{-1}(y)$ are F_σ in I. Obviously, $f|(I \cap f^{-1}(y))$ is piecewise continuous and, according to lemma above, $f|(I \setminus f^{-1}(y))$ is not piecewise continuous.

2. The main lemma

We will write $\widehat{\lim_{k\to\infty}} x_k = x$ for every sequence $(x_k)_{k\in\mathbb{N}^+}$ of *pairwise distinct points* with a unique limit point x and in the sequel S_x denote the set $\{x\}\cup D_x$, where $D_x = \{x_k : \widehat{\lim_{k\to\infty}} x_k = x\}$. We will write $y, y_k, y_{k,i}$ for $f(x), f(x_k), f(x_{k,i})$. We will denote by $\mathcal{B}_x$ (respectively, $\mathcal{B}_y$) some strictly decreasing clopen base $\{U_x^i : i\in\mathbb{N}^+\}$ at $x\in X$ (respectively, $\{W_y^i : i\in\mathbb{N}^+\}$ at $y\in Y$).

Lemma 2.1. Let the restriction $f|I$ be resolvably measurable and not piecewise continuous, then the following statements are equivalent:

(a) $f|I$ is not continuous at $x\in I$;

(b) there is a subspace $S_x = \{x\}\cup D_x$ in I such that $y\notin \overline{f(D_x)}$ and $f|D_x$ is a homeomorphism between discrete sets D_x and $f(D_x)$.

Proof. Obviously, $(b)\Rightarrow(a)$. To prove $(a)\Rightarrow(b)$, note that if $f|I$ is not continuous at $x\in I$, then there is a sequence $(x_k)_{k\in\mathbb{N}^+}$ in I such that $\lim_{k\to\infty} x_k = x$, but the condition $\lim_{k\to\infty} y_k = y$ does not hold. We denote by T the set of such points x_k and consider two cases A and B:

A. If $f(T)$ is infinite, then we may find a subsequence $(y_{k_j})_{k_j\in\mathbb{N}^+}$ of $(y_k)_{k\in\mathbb{N}^+}$ and a point $z\in\mathbf{C}$ such that $\widehat{\lim_{k_j\to\infty}} y_{k_j} = z\neq y$. Choosing for every y_{k_j} the corresponding point $x_{k_j}\in T\cap f^{-1}(y_{k_j})$, we obtain $D_x = \{x_{k_j} : k_j\in\mathbb{N}^+\}$ and $(a)\Rightarrow(b)$.

B. If $f(T)$ is finite, then we may assume that $f(T) = p$ and $y\notin W_p^1\in\mathcal{B}_p$, and then, according to Remark 1, there are some points[2] $x_i\in U_x^i\cap f^{-1}(W_p^i)\cap X^*\setminus f^{-1}(y)$ for which $\widehat{\lim_{i\to\infty}} x_i = x$ and $(a)\Rightarrow(b)$.

□

Lemma 2.2. Let the restriction $f|I$ be resolvably measurable and not continuous at $x\in I$, then there are A_1^x, B_1^x, $A_2^x\subset I$, and an open set $V_1^x\subset\mathbf{C}$ such that

$$f^{-1}(V_1^x)\cap(A_1^x\cup B_1^x\cup A_2^x) = B_1^x, \tag{2.1}$$

$$A_1^x\subset\overline{B_1^x}\setminus B_1^x,\ \ B_1^x\subset\overline{A_2^x}\setminus A_2^x, \tag{2.2}$$

and

$$f|A_2^x \text{ is a homeomorphism between discrete sets } A_2^x \text{ and } f(A_2^x). \tag{2.3}$$

Proof. We construct, by induction on i, the sets

$$I_{x_i} = U_x^i\cap f^{-1}(W_{y_i}^1)\cap X^*$$

and $I^i = U_x^i\cap f^{-1}(W_y^i)\cap X^*$, where $U_x^i\in\mathcal{B}_x, W_{y_i}^1\in\mathcal{B}_{y_i}$, $W_y^i\in\mathcal{B}_y$, with the following properties:

(1) the sets $W_{y_k}^1\not\ni y$ $(k\leq i)$ are pairwise disjoint;

(2) $x_i\in U_x^i$.

Step 1. By setting $U_x^1 = U$ and $W_y^1 = W$ in Remark 1 we obtain a point $x_1\in I^1 = I$ with $y\neq y_1$. Hence, we may take $W_{y_1}^1\not\ni y$ and consider $I_{x_1} = U_x^1\cap f^{-1}(W_{y_1}^1)\cap X^*$.

Step 2. Since $y\notin W_{y_1}^1$, we may assume that the set $W_y^2\in\mathcal{B}_y$ is disjoint from $W_{y_1}^1$. We may take by Remark 1 a point $x_2\in I^2 = U_x^2\cap f^{-1}(W_y^2)\cap X^*$ with $f(x_2) = y_2\neq y$ and $W_{y_2}^1\subset W_y^2\setminus\{y\}$, and consider $I_{x_2} = U_x^2\cap f^{-1}(W_{y_2}^1)\cap X^*$.

[2]since the base is strictly decreasing, we obtain for $i\neq j$ that $f(x_i)\neq f(x_j)$.

We show that our induction hypothesis holds at step $i+1$. Indeed, according to (1), we may assume that W_y^{i+1} is disjoint from $W_{y_1}^1, \dots, W_{y_i}^1$ and apply Remark 1 to

$$I^{i+1} = U_x^{i+1} \cap f^{-1}(W_y^{i+1}) \cap X^*.$$

So, we obtain $x_{i+1} \in I^{i+1} = U_x^{i+1} \cap f^{-1}(W_y^{i+1}) \cap X^*$ with $f(x_{i+1}) = y_{i+1} \neq y$. Analogously, for some $W_{y_{i+1}}^1 \subset W_y^{i+1} \setminus \{y\}$ we obtain $I_{x_{i+1}} = U_x^{i+1} \cap f^{-1}(W_{y_{i+1}}^{i+1}) \cap X^*$, thus, at step $i+1$ all the necessary conditions are fulfilled.

By definition of X^* each I_{x_i} contains a point of discontinuity z_i with the same properties (1) and (2); for simplicity of notations we write x_i and $y_i = f(x_i)$ instead of z_i and $f(z_i)$. Now, let us consider, according to item (a) of Lemma 2.1, the sets $S_{x_i} = \{x_i\} \cup D_{x_i} \subset I_{x_i}$, where $D_{x_i} = \{x_{i,k} : \widehat{\lim_{k\to\infty}} x_{i,k} = x_i\}$. Define the sets A_1^x, B_1^x, A_2^x by setting $A_1^x = \{x\}$, $B_1^x = \{x_i : i \in \mathbb{N}^+\}$, $A_2^x = \bigcup_i D_{x_i}$. Then by items (1) and (2), and definition of S_{x_i}, we have (2.2). According to item (b) of Lemma 2.1, the points of $f(B_1^x)$ are isolated in $f(A_1^x \cup B_1^x \cup A_2^x)$, and hence, for some open set $V_1^x \supset \{y_i : i \in \mathbb{N}^+\}$ we have (2.1) and, obviously, (2.3). □

3. Proof of Theorem 1

Suppose that f is not piecewise continuous and construct, by induction on n, the sets A_n, B_n, A_{n+1}, and an open set V_n in $\mathbf{C}$ such that

$$f^{-1}(V_n) \cap (A_n \cup B_n \cup A_{n+1}) = B_n, \tag{3.1}$$

$$A_n \subset \overline{B_n} \setminus B_n, \quad B_n \subset \overline{A_{n+1}} \setminus A_{n+1}, \tag{3.2}$$

$$\text{and } f|A_{n+1} \text{ is a homeomorphism between discrete sets } A_{n+1} \text{ and } f(A_{n+1}). \tag{3.3}$$

At step 1 we use Lemma 2.2 with $A_1 = A_1^x$, $B_1 = B_1^x$, $A_2 = A_2^x$, and $V_1 = V_1^x$.

Let us assume that at step n all sets with properties (3.1) and (3.3) have been constructed. We show that our induction hypothesis holds at step $n+1$. For this purpose we consider $I_c = U_c^1 \cap f^{-1}(W_c^1) \cap X^*$, where W_c^1 are pairwise disjoint sets ($c \in A_{n+1}$). According to conditions (2.1)–(2.3), we get the sets A_1^c, B_1^c, A_2^c, and an open set V_1^c such that

$$f^{-1}(V_1^c) \cap (A_1^c \cup B_1^c \cup A_2^c) = B_1^c,$$

$$A_1^c \subset \overline{B_1^c} \setminus B_1^c, \quad B_1^c \subset \overline{A_2^c} \setminus A_2^c,$$

and $f|A_2^c$ is a homeomorphism between discrete sets A_2^c and $f(A_2^c)$. Let

$$B_{n+1} = \bigcup_{c \in A_{n+1}} B_1^c,\ A_{n+2} = \bigcup_{c \in A_{n+1}} A_2^c,\ V_{n+1} = \bigcup_{c \in A_{n+1}} V_1^c.$$

Since W_1^c are pairwise disjoint, from (2.1)–(2.3) we conclude that

$$f^{-1}(V_{n+1}) \cap (A_{n+1} \cup B_{n+1} \cup A_{n+2}) = B_{n+1},$$

$$A_{n+1} \subset \overline{B_{n+1}} \setminus B_{n+1}, \quad B_{n+1} \subset \overline{A_{n+2}} \setminus A_{n+2},$$

and $f|A_{n+2}$ is a homeomorphism between discrete sets A_{n+2} and $f(A_{n+2})$. So, at step $n+1$, the conditions (3.1)–(3.3) are satisfied.

Having completed the inductive construction, we get for $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ and $B = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$ that $A \cup B \subset \overline{A} \cap \overline{B}$, so that both A and B are dense in $A \cup B$. Since the sets V_n are pairwise disjoint and open, for $V = \bigcup_{n=1}^{\infty} V_n$ we deduce from (3.1):

$$f^{-1}(V) \supset B \text{ and } f^{-1}(V) \cap A = \emptyset.$$

This contradicts the assumption of Theorem 1 that the set $f^{-1}(V)$ and, thus, its trace $B = f^{-1}(V) \cap (A \cup B)$ is resolvable. The theorem is proved.

□

A set of the form $E = E_1 \cup E_2 \cup \cdots \cup E_n$, where each $E_1, \ldots, E_n$ is the intersection of a closed and an open set, is said to be LC_n-set.

A function $f : X \to Y$ is said to be LC_n–measurable if, for every open subset $W \subset Y$, the set $f^{-1}(W)$ is an LC_n-set.

I do not know whether each LC_n–measurable function $f : X \to Y$ is *finitely continuous* (= X admits a finite cover $\mathcal{C}$ such that for each $C \in \mathcal{C}$ the restriction $f|C$ is continuous).

REFERENCES

1. J.E. Jayne, C.A. Rogers, First level Borel functions and isomorphisms, J. Math. pures et appl. 61 (1982), 177–205.

2. K. Kuratovski, Topology I, Academic Press (1966).

3. A. Ostrovsky, LC_n–measurable functions, Darmstadt, 11th International Conference on Computability and Complexity in Analysis, Proceedings (CCA 2014) 48–50.

4. A. Ostrovsky, Luzin's Topological, Topol. Appl., (2017), 45–50.

5. V. A. Vinokurov, Strong regularizability of discontinuous functions, Dokl. Akad. Nauk SSSR 281 (1985) 265–269 (in Russian).

———————————————————————————

УДК 538.913

Сферические упаковки в оболочках вирусов, эпителиальных монослоях и коллоидных кристаллах[1]

Д. С. Рошаль (Россия, г. Ростов-на-Дону)
Южный Федеральный Университет
e-mail: rochal.d@yandex.ru

Spherical packings in viral capsids, epithelial monolayers and colloidal crystals

D. S. Roshal (Russia, Rostov-on-Don)
Southern Federal University
e-mail: rochal.d@yandex.ru

В начале двадцатого века, Дж.Дж. Томсон предложил свою модель атома, согласно которой электроны, удерживаясь на поверхности сферы, расталкиваются благодаря Кулоновскому

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 18-02-00549 А).

потенциалу. Задача о нахождении позиций электронов на сфере в состоянии равновесия была названа проблемой Томсона. Со временем стало ясно, что проблема Томсона возникает на различных уровнях организации материи. Интерес к ней не ослабевает, поскольку обнаруживаются все новые сферические 2D структуры, расположение структурных единиц в которых напоминает расположение электронов в атоме Томсона, например, сферические коллоидные кристаллы [1], вирусы [2-3], эпителиальные монослои, фуллерены. Также, проблема Томсона интересна, поскольку её решением являются плотнейшие сферические упаковки, что важно для применений. Например, в коллоидных кристаллах (системах плотноупакованных коллоидных частиц на границе раздела двух жидкостей) плотность упаковки частиц влияет на проницаемость получаемого из неё наноконтейнера для адресной доставки лекарств.

Целью данной работы является моделирование и изучение степени упорядоченности упаковок структурных единиц в коллоидных кристаллах, оболочках вирусов и эпителиальных монослоях. Также анализируются топологические дефекты на их поверхности.

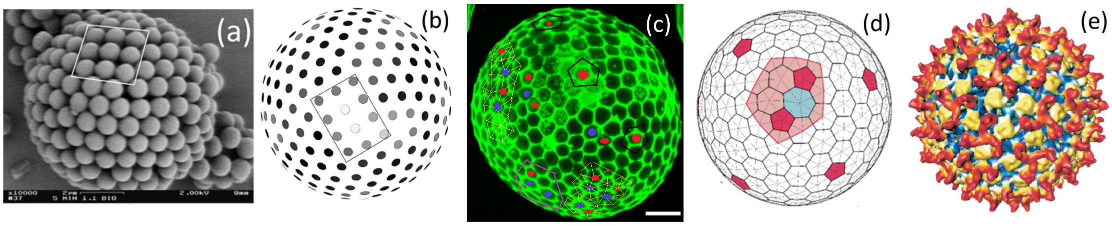


Рис. 18: Различные сферические упаковки. (a,b) - экспериментальная и модельная структура коллоидного кристалла. Прямоугольником показаны дефекты в виде областей квадратного порядка. (c,d) - экспериментальная и модельная структура сферического эпителиального монослоя. Структурные элементы, имеющие 5 соседей, показаны красным цветом, 7 соседей - синим. (e) - трехслойный капсид вируса BlueTongue.

Опишем типичный метод нахождения решений классической проблемы Томсона, соответствующих локальным минимумам энергии. Для начала частицы выбрасываются на сферическую поверхность (обычно случайным образом). Далее, при условии, что частицы удерживаются на поверхности сферы, по координатам частиц минимизируется Кулоновская энергия отталкивающихся одинаково заряженных частиц. Отметим, что если частицы выбрасываются случайным образом, то появление икосаэдрической симметрии, присущей многим вирусным капсидам, является возможным лишь для определенных малых значений числа частиц. Однако очень многие вирусные капсиды являются решением проблемы Томсона. Также описанным выше методом очень легко получить упаковки, похожие на различные структуры коллоидных кристаллов (см. рис.1).

Впервые был проведен анализ дефектности эпителиальных монослоев, в том числе HeLa, HCerEpiC, ciona insternalis, styela clava. Показано, что дефектность данных монослоев сильно выше, чем решений проблемы Томсона и упаковок коллоидных частиц в коллоидных кристаллах. На наш взгляд, это может быть связано с особенностями роста клеток, а также с разностью их размеров. Также было показано, что топологическая дефектность тканей из здоровых и пораженных раком клеток различна.

Также в данной работе проводится обобщение проблемы Томсона на случай размещения частиц на двух концентрических сферах с близкими радиусами. После случайного выброса (или икосаэдрически симметричного в случае моделирования вирусных капсидов) частиц на поверхность сфер минимизируется энергия системы по координатам частиц. Рассмотрена возможность получения высокосимметричных структур, соответствующих упаковкам белков в многослойных вирусных оболочках. Обнаружена соразмерность [3] оболочек в капсидах вирусного семейства Reoviridae. Проведено моделирование двухслойных низкосимметричных

Томсоновских упаковок с большим числом частиц. Рассмотрены закономерности взаимного расположения топологических дефектов в двухслойных оболочках. Найдены следы соразмерности гексагонального порядка и геометрии топологических дефектов в близкорасположенных оболочках. Показано, что топологические дефекты одной и той же оболочки стремятся расположиться как можно дальше друг от друга, а дефекты разных оболочек притягиваются. Данный факт может наблюдаться в недавно полученных экспериментально двухслойных коллоидных кристаллах.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Roshal D. S., Myasnikova A. E., Rochal S. B. Slightly broken icosahedral symmetry advances Thomson problem. // Phys. Lett. A. 2015. Vol. 379, p. 372.
2. Roshal D. S., Konevtsova O. V., Lošdorfer Božič A., Podgornik R., Roshal S. B. pH-induced morphological changes of proteinaceous viral shells. // Scientific Reports. 2019. Vol. 9, Article number: 5341.
3. Rochal S. B., Roshal D. S., Myasnikova A. E., Lorman V. L. Commensurability between protein nanotubes in contractile ejection nanomachines. Nanoscale. 2018. Vol. 10(2), pp. 758–764.

УДК 514.172.45

О выпуклых RR-многогранниках с нетреугольными гранями

В. И. Субботин (Россия, г. Новочеркасск)
Южно-Российский государственный политехнический университет (НПИ)
имени М. И. Платова
e-mail: geometry@mail.ru

On convex RR-polyhedrons with non-triangular faces

V. I. Subbotin (Russia, Novocherkassk)
Platov South-Russian State Polytechnic University (NPI)
e-mail: geometry@mail.ru

Работа относится к исследованию взаимосвязи условий симметрии, в частности, условий ромбичности или дельтоидности звёзд некоторых вершин многогранника, с его геометрией (см., например, [1]). Пусть у замкнутого выпуклого многогранника в E^3 существуют симметричные ромбические вершины и существуют грани, не принадлежащие ни одной звезде этих вершин; причём все грани, не входящие в звезду ромбической вершины, являются правильными многоугольниками одного типа. Тогда такой многогранник называется RR-многогранником (от слов “rombic"и “regular").

Здесь ромбической вершиной называется такая вершина V многогранника, звезда $StarV$ которой состоит только из равных и одинаково расположенных ромбов. Если количество ромбов равно n, то при условии, что прядок оси вращения $StarV$ равен n, вершина V называется симметричной.

Задача состоит в нахождении всех RR-многогранников. Заметим, что класс RR-многогранников не пуст: ему принадлежит, например, удлинённый ромбический додекаэдр — один из параллелоэдров Фёдорова. В данной работе найдены все RR-многогранники с двумя симметричными ромбическими вершинами без треугольных граней, а именно, доказана основная теорема:

Теорема 1. *Класс RR-многогранников без треугольных граней исчерпывается следующими двумя многогранниками:*

1) удлинённый ромбический додекаэдр с двумя симметричными ромбическими вершинами степени 4 и правильными 6-угольными гранями;

2) 20-гранник с двумя симметричными ромбическими вершинами степени 5, отделёнными десятью квадратами.

Замечание 1. *Доказательство существования многогранника 2) дано работе [1].*

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Субботин В. И. // XV Международная конференция «Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы и приложения», посвященная столетию со дня рождения доктора физико-математических наук, профессора Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова Коробова Николая Михайловича.: тезисы докладов международной конференции (Тула, 28-31 мая 2018 г.) — Тула, 2018. С. 215-218.

2. Субботин В. И. // Записки научных семинаров ПОМИ. 2018. Том 476. С. 153-164.

Секция 8. Теоретико-числовой метод в приближенном анализе и теория приближений

УДК 517.5

Уточнение оценок Левина–Любинского для констант Никольского[1]

Д. В. Горбачев (Россия, г. Тула)
Тульский государственный университет
e-mail: dvgmail@mail.ru
И. А. Мартьянов (Россия, г. Тула)
Тульский государственный университет
e-mail: martyanow.ivan@yandex.ru

Improving of Levin–Lubinsky estimates of Nikolskii constants

D. V. Gorbachev (Russia, Tula)
Tula State University
e-mail: dvgmail@mail.ru
I. A. Martyanov (Russia, Tula)
Tula State University
e-mail: martyanow.ivan@yandex.ru

Для $0 < p < \infty$ мы изучаем взаимосвязь между константой Никольского для тригонометрических полиномов порядка не больше n

$$\mathcal{C}(n,p) = \sup_{T_n \neq 0} \frac{\|T_n\|_\infty}{\|T_n\|_p}$$

и константой Никольского для целых функций экспоненциального типа не больше 1

$$\mathcal{L}(p) = \sup_{f \neq 0} \frac{\|f\|_\infty}{\|f\|_p}.$$

Недавно Е. Левин и Д. Любинский [1] доказали, что

$$\mathcal{C}(n,p) = \mathcal{L}(p) n^{1/p}(1 + o(1)), \quad n \to \infty.$$

М. Ганзбург и С. Тихонов [2] обобщили этот результат на случай констант Никольского–Бернштейна.

Теорема 1 ([3]). *Для $n \in \mathbb{Z}_+$ и $0 < p < \infty$ справедливы неравенства*

$$n^{1/p}\mathcal{L}(p) \leqslant \mathcal{C}(n,p) \leqslant (n + \lceil p^{-1} \rceil)^{1/p}\mathcal{L}(p).$$

Теорема 1 уточняют результат Левина и Любинского. Ее доказательство базируется на формуле суммирования Пуассона и свойствах интегрального ядра Фейера.

[1] Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 18-11-00199).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Levin E., Lubinsky D. L_p Chritoffel functions, L_p universality, and Paley–Wiener spaces // J. D'Analyse Math. 2015. Vol. 125. P. 243–283.

2. Ganzburg M., Tikhonov S. On Sharp constants in Bernstein–Nikolskii inequalities // Constr. Approx. 2017. Vol. 45, no. 3. P. 449–466.

3. Горбачев Д.В., Мартьянов И.А. О взаимосвязи констант Никольского для тригонометрических полиномов и целых функций экспоненциального типа // Чебышевский сборник. 2018. Том 19, № 2. С. 80–89.

Тульский государственный университет
Tula State University

———————————————————————————

УДК 511.3

Теоретико-числовой метод в эконометрике [1]

Л. П. Добровольская (Россия, г. Тула)
Институт экономики и управления
e-mail: dobrovolskaya.lar@yandex.ru
С. И. Шелобаев (Россия, г. Тула)
Институт экономики и управления
e-mail: si.shelobaev@yandex.ru

The number-theoretic method in econometrics

L. P. Dobrovolskay (Russia, Tula)
Institute of economics and management
e-mail: dobrovolskaya.lar@yandex.ru
S. I. Shelobaev (Russia, Tula)
Institute of economics and management
e-mail: si.shelobaev@yandex.ru

В работах [1] и [2] указывалось, что одно из возможных практических применений оптимальных коэффициентов в эконометрике связано с возможностью использования сложных эконометрических моделей. Такие модели возникают в самом простой ситуации, когда берется линейная комбинация нескольких моделей. Практическое применение таких линейных комбинаций встречает существенные трудности, так как классическое применение метода наименьших квадратов для вычисления параметров модели сразу приводит к сложной задаче либо решения трансцендентной системы уравнений, либо поиска минимума функции многих переменных. Поясним сказанное на примере производственной функции Кобба — Дугласа

$$Q = AK^{\alpha}L^{\beta} \text{ или } Q = AK^{\alpha}L^{\beta}e^{\gamma t},$$

где Q — объем производства; L — труд; K — капитал; A — технологический коэффициент; α — коэффициент эластичности по труду; β — коэффициент эластичности по капиталу; t — параметр времени; γ — параметр, характеризующий темп развития; $e^{\gamma t}$ — множитель технического прогресса.

[1] Исследование выполнено по гранту РФФИ №19-41-710004_р_а

Даже в простейшем случае этой производственной функции без множителя технического прогресса при объединении двух производств получим обобщение производственной функции Кобба — Дугласа

$$Q = A_1 K_1^{\alpha_1} L_1^{\beta_1} + A_2 K_2^{\alpha_2} L_2^{\beta_2},$$

которое нелинеаризируется логарифмированием. Получаем многопараметрическую задачу для метода наименьших квадратов.

Действительно, если есть совокупность наблюдаемых данных: Q_ν, $K_{1,\nu}$, $L_{1,\nu}$, $K_{2,\nu}$, $L_{2,\nu}$ $(\nu = 1, \ldots, N)$, то по методу наименьших квадратов необходимо минимизировать функцию

$$F(A_1, \alpha_1, \beta_1, A_2, \alpha_2, \beta_2) = \sum_{\nu=1}^{N} \left(A_1 K_{1,\nu}^{\alpha_1} L_{1,\nu}^{\beta_1} + A_2 K_{2,\nu}^{\alpha_2} L_{2,\nu}^{\beta_2} - Q_\nu \right)^2. \quad (1)$$

Необходимые условия стационарной точки приводят к нелинейной системе из 6 уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial A_1} = 2\sum\limits_{\nu=1}^{N} K_{1,\nu}^{\alpha_1} L_{1,\nu}^{\beta_1} \left(A_1 K_{1,\nu}^{\alpha_1} L_{1,\nu}^{\beta_1} + A_2 K_{2,\nu}^{\alpha_2} L_{2,\nu}^{\beta_2} - Q_\nu \right) = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial A_2} = 2\sum\limits_{\nu=1}^{N} K_{2,\nu}^{\alpha_2} L_{2,\nu}^{\beta_2} \left(A_1 K_{1,\nu}^{\alpha_1} L_{1,\nu}^{\beta_1} + A_2 K_{2,\nu}^{\alpha_2} L_{2,\nu}^{\beta_2} - Q_\nu \right) = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial \alpha_1} = 2\sum\limits_{\nu=1}^{N} A_1 K_{1,\nu}^{\alpha_1} L_{1,\nu}^{\beta_1} \ln K_{1,\nu} \left(A_1 K_{1,\nu}^{\alpha_1} L_{1,\nu}^{\beta_1} + A_2 K_{2,\nu}^{\alpha_2} L_{2,\nu}^{\beta_2} - Q_\nu \right) = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial \alpha_2} = 2\sum\limits_{\nu=1}^{N} A_2 K_{2,\nu}^{\alpha_2} L_{2,\nu}^{\beta_2} \ln K_{2,\nu} \left(A_1 K_{1,\nu}^{\alpha_1} L_{1,\nu}^{\beta_1} + A_2 K_{2,\nu}^{\alpha_2} L_{2,\nu}^{\beta_2} - Q_\nu \right) = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial \beta_2} = 2\sum\limits_{\nu=1}^{N} A_1 K_{1,\nu}^{\alpha_1} L_{1,\nu}^{\beta_1} \ln L_{1,\nu} \left(A_1 K_{1,\nu}^{\alpha_1} L_{1,\nu}^{\beta_1} + A_2 K_{2,\nu}^{\alpha_2} L_{2,\nu}^{\beta_2} - Q_\nu \right) = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial \beta_2} = 2\sum\limits_{\nu=1}^{N} A_2 K_{2,\nu}^{\alpha_2} L_{2,\nu}^{\beta_2} \ln L_{2,\nu} \left(A_1 K_{1,\nu}^{\alpha_1} L_{1,\nu}^{\beta_1} + A_2 K_{2,\nu}^{\alpha_2} L_{2,\nu}^{\beta_2} - Q_\nu \right) = 0 \end{cases} . \quad (2)$$

Решение такой нелинейной системы вызывает определенные сложности. В работах [1] и [2] рассмотрен простой общий универсальный подход, основанный на псевдо-случайном поиске с применением параллелепипедальных сеток.

В обоих случаях (решение трансцендентной системы уравнений или поиск минимума функции многих переменных) простой эффективный алгоритм поиска приближенного решения может опираться на псевдослучайный поиск.

Применительно к методу наименьших квадратов для обобщенной производственной функции Кобба — Дугласа получим следующую задачу.

Дана функция $F(A_1, \alpha_1, \beta_1, A_2, \alpha_2, \beta_2)$, заданная равенством (1) в прямоугольной области

$$(A_1, \alpha_1, \beta_1, A_2, \alpha_2, \beta_2) \in \prod_{j=1}^{6} [M_j; N_j],$$

требуется найти точку $(A_1^{(0)}, \alpha_1^{(0)}, \beta_1^{(0)}, A_2^{(0)}, \alpha_2^{(0)}, \beta_2^{(0)}) \in \prod_{j=1}^{6} [M_j; N_j]$ такую, что

$$F(A_1^{(0)}, \alpha_1^{(0)}, \beta_1^{(0)}, A_2^{(0)}, \alpha_2^{(0)}, \beta_2^{(0)}) = \min_{(A_1, \alpha_1, \beta_1, A_2, \alpha_2, \beta_2) \in \prod_{j=1}^{6} [M_j; N_j]} F(A_1, \alpha_1, \beta_1, A_2, \alpha_2, \beta_2).$$

Предположим, что априори есть оценка области изменения параметров прямоугольного вида: $\prod_{j=1}^{s}[M_j;N_j]$, тогда, используя параллелепипедальную сетку $M(\vec{a};N) = \{X_k|k = 0,\ldots,N-1\}$, где

$$X_k = \left(\frac{k}{N};\left\{\frac{a_1k}{N}\right\};\ldots;\left\{\frac{a_{s-1}k}{N}\right\}\right) \quad (k=0,\ldots,N-1),$$

получим сетку в прямоугольной области

$$X_k^* = \left(M_1+(N_1-M_1)\frac{k}{N};M_2+(N_2-M_2)\left\{\frac{a_1k}{N}\right\};\ldots;M_s+(N_s-M_s)\left\{\frac{a_{s-1}k}{N}\right\}\right)$$
$$(k=0,\ldots,N-1),$$

по которой можно вести псевдослучайный поиск приближенного решения. Таким образом, в качестве приближенного решения выбираем точку $X_{k_0}^*$, для которой выполнено соотношение

$$F(X_{k_0}^*) = \min_{0\leqslant k\leqslant N-1} F(X_k^*).$$

В работе [4] дан модифицированный алгоритм с использованием количественной меры качества оптимальных коэффициентов и его обоснование. Его преимущество связано с тем, что используются более простые для вычисления функции. При этом для специальной последовательности модулей, описанной выше, сохраняется трудоемкость вычисления набора оптимальных коэффициентов за $O(N)$ операций, но временные характеристики оказываются лучше.

В заключении отметим, что как указывал Н. М. Коробов трудоемкость вычисления оптимальных коэффициентов за $O(N)$ элементарных операций сравнима с трудоемкостью вычисления по квадратурной формуле или трудоемкостью проведения псевдослучайного поиска, а поэтому может считаться приемлемой.

В частности, это позволяет создавать системы интегрирования или псевдослучайного поиска, в которых, исходя из определенных дополнительных критериев, автоматически выбирается количество точек сетки, которая генерируется в процессе вычислений, а не берется из заранее составленных таблиц.

Далее заметим, что трудоемкость за $O\left(\ln^s N\right)$ при больших s на практике может оказаться лучше чем $O(N)$ только при очень больших значения $N > N_0(s)$, которые не доступны для реальной реализации.

Сделаем ещё одно важное замечание. В работе [3] рассмотрены основные классические теоретико-числовые сетки. Естественно, что можно при организации псевдо-случайного поиска использовать любую из них. Как нам известно, работ по сравнению эффективности применения той или иной сетки при организации псевдо-случайного поиска не проводилось. Внедрение конкретных методов моделирования и прогнозирования непосредственно оказывает влияние на формирование становящегося будущего. Оно становится более предсказуемым, если все пользуются одним и тем-же набором средств. Понятно, что это и хорошо и плохо одновременно. Необходимо отметить, что теоретико-числовые сетки зависят от параметров и их запас фактически неограничен, а поэтому можно при их использовании обеспечить некоторую независимость при моделировании поведения экономических объектов.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Добровольский Н. Н., Добровольская Л. П., , Серегина Н. К., Бочарова О. Е. Алгоритмы вычисления оптимальных коэффициентов: Моногр. Под. ред. Н. М. Добровольского. — Тула: Изд-во Тул. гос. пед. ун-та им. Л. Н. Толстого, 2016. – 223 с.

2. Добровольская Л. П. Псевдослучайный поиск и сложные эконометрические модели // Материалы XV Международной конференции Алгебра, теория чисел и дис- кретная геометрия: современные проблемы и приложения, посвященной столетию со дня рождения доктора физико-математических наук, профессора Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова Коробова Николая Михайловича. — Тула: Изд-во Тул. гос. пед. ун-та им. Л. Н. Толстого, 2018. – С. 300–303.

3. И. Ю. Реброва, В. Н. Чубариков, Н. Н. Добровольский, М. Н. Добровольский, Н. М. Добровольский. О классических теоретико-числовых сетках // Чебышевский сборник. 2018. Т. 19, вып. 4, С. 118–176.

4. Серегина Н. К. Алгоритмы численного интегрирования с правилом остановки // Известия ТулГУ. Естественные науки. 2013. Вып. 3. С. 193–201.

———————————————————————————

УДК 511.3

Дзета-функция моноидов натуральных чисел[1]

Н. Н. Добровольский (Россия, г. Тула)
Тульский государственный университет
Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого
e-mail: cheb@tspu.tula.ru, nikolai.dobrovolsky@gmail.com

Zeta function of monoids of natural numbers

N. N. Dobrovolskiy (Russia, Tula)
Tula State University
Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University
e-mail: cheb@tspu.tula.ru, nikolai.dobrovolsky@gmail.com

В докладе рассматривается новый класс рядов Дирихле — дзета-функции моноидов натуральных чисел. Изучаются обратные ряды Дирихле для дзета-функции моноидов натуральных чисел. Показано, что вопрос о существовании эйлерова произведения для дзета-функции моноида связан с однозначностью разложения на простые множители в этом моноиде.

Вводится понятие взаимно простых множеств натуральных чисел и показано, что для таких множеств имеет место мультипликативность минимальных моноидов и соответствующих дзета-функций моноидов.

Показано, что если все простые элементы моноида являются простыми числами, то характеристическая функция моноида будет мультипликативной функцией и в этом случае дзета-функция моноида будет обобщённой L-функцией.

Рассматриваются различные примеры моноидов и соответствующих дзета-функций моноидов. Изучена связь вопросов обращения дзета-функции моноида и обобщённой функции Мёбиуса на моноиде как частично упорядоченном множестве с помощью отношения делимости натуральных чисел. Получены ряд свойств дзета-функций моноидов натуральных чисел с однозначным разложением на простые множители.

Рассмотрен вопрос о логарифмировании эйлерова произведения, как функции комплексного аргумента. Показано, что непрерывная функция, задающая значение логарифма эйлерова произведения вблизи полюса пробегает все ветви бесконечно-значной функции логарифма.

[1]Исследование выполнено по гранту РФФИ №19-41-710005_р_а

Получены следствия о значения комплекснозначной функции специального вида вблизи особой точки. Из этих свойств вытекают утверждения о значениях дзета-функции Римана вблизи границы области абсолютной сходимости.

С помощью постулата Бертрана введены бесконечные экспоненциальные последовательности простых чисел. Показано, что соответствующие дзета-функции моноидов натуральных чисел абсолютно сходятся во всей полуплоскости с положительной действительной частью. Так как такие дзета-функции моноидов натуральных чисел во всей области абсолютной сходимости раскладываются в эйлерово произведение, то они во всей полуплоскости с положительной действительной частью не имеют нулей.

Данная тема исследований возникла в связи с изучением гиперболической дзета-функции решёток (см. [1, 2, 3]).

В работах [4]–[6] продолжены эти исследования. Достаточно простые соображения позволили нам доказать гипотезу о заградительном ряде для дзета-функции моноида с экспоненциальной последовательностью простых.

Рассмотрение модельной дзета-функции основного моноида и основного множества позволяют по-новому рассматривать вопрос о поведении соответствующих рядов Дирихле.

В работе [6] было дано определение специальных видов последовательностей простых чисел. Будем говорить, что бесконечная последовательность $\mathbb{P}_1$ простых чисел

$$p_1 < p_2 < \ldots < p_n < \ldots$$

является σ_0-последовательностью третьего рода, если дзета-функция $\zeta(\mathbb{P}_1|\alpha)$ имеет абсциссу абсолютной сходимости $\sigma_{\mathbb{P}_1} = \sigma_0$.

Из работ [4], [6] следует, что σ_0-последовательности третьего рода существуют для любого σ_0 из отрезка $[0; 1]$.

Из доказательства последней теоремы следует, что для любой 0-последовательности третьего рода $\mathbb{P}_1$ областью голоморфности дзета-функции $\zeta(M(\mathbb{P}_1)|\alpha)$ является полуплоскость $\sigma > 0$. Возникает вопрос об области голоморфности дзета-функции $\zeta(M(\mathbb{P}_1)|\alpha)$ для произвольного множества простых $\mathbb{P}_1$.

Следующий простой пример показывает, что полуплоскость $\sigma > 0$ без точки $\alpha = 1$ может быть областью голоморфности и для 1-последовательности простых чисел. Действительно, пусть $\mathbb{P}_1$ — произвольная 0-последовательность простых чисел, тогда $\mathbb{P}_2 = \mathbb{P} \setminus \mathbb{P}_1$ будет 1-последовательностью простых чисел. Очевидно, что

$$\zeta(M(\mathbb{P}_2)|\alpha) = \zeta(M(\mathbb{P})|\alpha)\zeta^{-1}(M(\mathbb{P}_1)|\alpha) = \frac{\zeta(\alpha)}{\zeta(M(\mathbb{P}_1)|\alpha)}.$$

Отсюда следует утверждение об области голоморфности.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Добровольский М. Н. Функциональное уравнение для гиперболической дзета-функции целочисленных решёток // Доклады академии наук 2007. Т. 412, № 3. С. 302–304.

2. Н. М. Добровольский, Н. Н. Добровольский, В. Н. Соболева, Д. К. Соболев, Л. П. Добровольская, О. Е. Бочарова О гиперболической дзета-функции Гурвица // Чебышевский сб. 2016. Т. 17, вып. 3. С. 72–105.

3. L. P. Dobrovolskaya, M. N. Dobrovolsky, N. M. Dobrovol'skii, N. N. Dobrovolsky. On Hyperbolic Zeta Function of Lattices. In: Continuous and Distributed Systems. Solid Mechanics and Its Applications. Vol. 211. 2014. P. 23–62. DOI:10.1007/978-3-319-03146-0_2.

4. Н. Н. Добровольский Дзета-функция моноидов натуральных чисел с однозначным разложением на простые множители // Чебышевский сб. 2017. Т. 18, вып. 4. С. 187–207.

5. Н. Н. Добровольский О моноидах натуральных чисел с однозначным разложением на простые элементы // Чебышевский сб. 2018. Т. 19, вып. 1. С. 79–105.

6. Н. Н. Добровольский Дзета-функция моноидов с заданной абсциссой абсолютной сходимости // Чебышевский сб. 2018. Т. 19, вып. 2. С. 142–150.

7. Н. Н. Добровольский, М. Н. Добровольский, Н. М. Добровольский, И. Н. Балаба, И. Ю. Реброва Гипотеза о "заградительном ряде" для дзета-функций моноидов с экспоненциальной последовательностью простых // Чебышевский сб. 2018. Т. 19, вып. 1. С. 106–123.

8. Н. Н. Добровольский, А. О. Калинина, М. Н. Добровольский, Н. М. Добровольский. О количестве простых элементов в некоторых моноидах натуральных чисел // Чебышевский сборник. 2018. Т. 19, вып. 2, С. 123–141.

9. Н. Н. Добровольский, А. О. Калинина, М. Н. Добровольский, Н. М. Добровольский. О моноиде квадратичных вычетов // Чебышевский сборник. 2018. Т. 19, вып. 3, С. 95–108.

———————————————————————

УДК 511.3

Моноиды натуральных чисел в теоретико-числовом методе в приближенном анализе[1]

Н. Н. Добровольский (Россия, г. Тула)
Тульский государственный университет
Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого
e-mail: cheb@tspu.tula.ru, nikolai.dobrovolsky@gmail.com
Н. М. Добровольский (Россия, г. Тула)
Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого
e-mail: dobrovol@tsput.ru
И. Ю. Реброва (Россия, г. Тула)
Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого.
e-mail: i_rebrova@mail.ru
А. В. Родионов (Россия, г. Тула)
Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого.
e-mail: rodionovalexandr@mail.ru

Monoids of natural numbers in the numerical-theoretical method in the approximate analysis

N. N. Dobrovolskiy (Russia, Tula)
Tula State University
Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University
e-mail: cheb@tspu.tula.ru, nikolai.dobrovolsky@gmail.com
N. M. Dobrovolskiy (Russia, Tula)

[1]Исследование выполнено по гранту РФФИ №19-41-710004_р_а

Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University
e-mail: dobrovol@tspu.tula.ru
I. Yu. Rebrova (Russia, Tula)
Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University
e-mail: i_rebrova@mail.ru
A. V. Rodionov (Russia, Tula)
Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University
e-mail: rodionovalexandr@mail.ru

В работе для каждого моноида M натуральных чисел определён новый класс периодических функций M_s^α, который является подклассом известного класса Коробова периодических функций E_s^α. Относительно нормы $\|f(\vec{x})\|_{E_s^\alpha}$ класс M_s^α является несепарабельным банаховым подпространством класса E_s^α.

Установлено, что класс M_s^α замкнут относительно действия интегрального оператора Фредгольма и на этом классе разрешимо интегральное уравнение Фредгольма второго рода. В работе получены оценки нормы образа интегрального оператора, которые содержат норму ядра и s-ю степень дзета-функции моноида M. Получены оценки на параметр λ, при которых интегральный оператор $A_{\lambda,f}$ является сжатием. Доказана теорема о представлении единственного решения интегрального уравнения Фредгольма второго рода в виде ряда Неймана.

В работе рассмотрены вопросы решения дифференциального уравнения с частными производными с дифференциальным оператором $Q\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_s}\right)$ в пространстве M_s^α, который зависит от арифметических свойств спектра этого оператора.

Пусть $q > 3^s$ и моноид $M = M_{q,1}$, состоящий из натуральных чисел сравнимых с 1 по модулю q:

$$M_{q,1} = \{m \,|\, m \equiv 1 \pmod q\}.$$

Рассмотрим квадратурную формулу с параллелепипедальной сеткой

$$\left(\frac{k}{q}, \left\{\frac{a_1 k}{q}\right\}, \ldots, \left\{\frac{a_{s-1} k}{q}\right\}\right) \quad k = 0, 1, \ldots, q-1$$

на классе M_s^α:

$$\int_0^1 \ldots \int_0^1 f(\vec{x}) d\vec{x} = \sum_{k=0}^{q-1} f\left(\frac{k}{q}, \left\{\frac{a_1 k}{q}\right\}, \ldots, \left\{\frac{a_{s-1} k}{q}\right\}\right) - R_q[f(\vec{x})], \quad f(\vec{x}) \in M_s^\alpha. \tag{1}$$

В работе обнаружен парадоксальный факт, что для моноида $M_{q,1}$ чисел сравнимых с 1 по модулю q квадратурная формула с параллелепипедальной сеткой для допустимого набора коэффициентов по модулю q точна на классе $M_{q,1,s}^\alpha$.

Теорема 1. *Для любого допустимого набора $(a_1, \ldots, a_{s-1})$ по модулю q квадратурная формула (1) точна на классе M_s^α.*

Более того, это утверждение остается верным и для класса $M_{q,a,s}^\alpha$ с $1 < a < q$, когда q — простое число. Так как функции из класса $M_{q,a,s}^\alpha$ с $1 < a < q$ не имеют нулевого коэффициента Фурье $C(\vec{0})$, то при простом q сумма значений функции по узлам соответствующей параллелепипедальной сетки будет нулевой.

Теорема 2. *Для любого оптимального набора $(a_1, \ldots, a_{s-1})$ по модулю q с*

$$q(\Lambda(a_1, \ldots, a_{s-1}; q)) > 1$$

квадратурная формула (1) точна на классе M_s^α.

Из рассмотренных материалов видно.

Во-первых, с каждым моноидом M натуральных чисел связывается класс периодических функций M_s^α, который вложен в хорошо известный класс E_s^α.

Оказалось, что класс периодических функций M_s^α замкнут относительно интегральных операторов Фредгольма и на нем разрешимо интегральное уравнение Фредгольма второго рода.

Во-вторых, для моноида $M = M_{q,1}$ справедлив парадоксальный результат о точности квадратурной формулы с параллелепипедальной сеткой с допустимым набором коэффициентов для всего класса M_s^α.

Нетрудно видеть, что если через $M_{q,a}$ обозначить класс вычетов $m \equiv a \pmod q$ при $2 \leqslant a \leqslant q-1$, то можно определить класс функций $M_{q,a,s}^\alpha$ следующим образом. Этот класс периодических функций состоит из функций $f(\vec{x})$, которые задаются многомерным рядом Фурье вида

$$f(\vec{x}) = \sum_{\substack{m_1,\ldots,m_s,\\ m_\nu \in M_{q,a},\, (\nu=1,\ldots,s)}} C(\vec{m})e^{2\pi i(\vec{m},\vec{x})} = \sum_{\substack{m_1,\ldots,m_s,\\ m_\nu \in M_{q,a},\, (\nu=1,\ldots,s)}} \frac{c(\vec{m})}{(\overline{m_1}\ldots\overline{m_s})^\alpha} e^{2\pi i(\vec{m},\vec{x})},$$

где коэффициенты Фурье удовлетворяют неравенствам

$$|C(\vec{m})| \leqslant \frac{\|f(\vec{x})\|_{E_s^\alpha}}{(\overline{m_1}\ldots\overline{m_s})^\alpha}$$

и

$$\|f(\vec{x})\|_{E_s^\alpha} = \sup_{\overline{m_\nu}\in M,\, (\nu=1,\ldots,s)} |C(\vec{m})|(\overline{m_1}\ldots\overline{m_s})^\alpha = \sup_{\overline{m_\nu}\in M,\, (\nu=1,\ldots,s)} |c(\vec{m})| < \infty.$$

Если $\sigma_{M_{q,a}}$ — абсцисса абсолютной сходимости дзета-функции

$$\zeta(M_{q,a}|\alpha) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{|qm+a|^\alpha}$$

класса вычетов $M_{q,a}$, то для любого $\alpha > \sigma_{M_{q,a}}$ ряд Фурье для функции $f(\vec{x}) \in M_{q,a,s}^\alpha$ абсолютно и равномерно сходится для любого $\vec{x} \in \mathbb{R}^s$.

Если модуль q — простое число, то для квадратурной формулы (1) теоремы 1 и 2 остаются справедливыми и для класса $M_{q,a,s}^\alpha$. Так как функции $f(\vec{x})$ из класса $M_{q,a,s}^\alpha$ имеют нулевое значение для нулевого коэффициента Фурье $C(\vec{0})$, то отсюда следует, что

$$\sum_{k=0}^{q-1} f\left(\frac{k}{q}, \left\{\frac{a_1 k}{q}\right\}, \ldots, \left\{\frac{a_{s-1}k}{q}\right\}\right) = 0, \quad f(\vec{x}) \in M_{q,a,s}^\alpha$$

при этих условиях.

В-третьих, вопрос о решении дифференциального уравнения с частными производными с дифференциальным оператором $Q\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_s}\right)$ в пространстве M_s^α зависит от арифметических свойств спектра этого оператора.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. С. С. Демидов, Е. А. Морозова, В. Н. Чубариков, И. Ю. Реброва, И. Н. Балаба, Н. Н. Добровольский, Н. М. Добровольский, Л. П. Добровольская, А. В. Родионов, О. А. Пихтилькова Теоретико-числовой метод в приближенном анализе // Чебышевский сб. 2017. Т. 18, вып. 4. С. 6–85.

2. Добровольский Н. М., Манохин Е. В. Банаховы пространства периодических функций // Изв. ТулГУ. Сер. Механика. Математика. Информатика. Т. 4, вып. 3. Тула, 1998. С. 56–67.

3. Добровольский Н. М., Манохин Е. В., Реброва И. Ю., Аккуратова С. В. О некоторых свойствах нормированных пространств и алгебр сеток // Известия ТулГУ. Сер. Математика. Механика. Информатика. Т. 5, вып. 1. Тула, 1999. С. 100–113.

4. Н. Н. Добровольский Дзета-функция моноидов натуральных чисел с однозначным разложением на простые множители // Чебышевский сб. 2017. Т. 18, вып. 4. С. 187–207.

5. Н. Н. Добровольский О моноидах натуральных чисел с однозначным разложением на простые элементы // Чебышевский сб. 2018. Т. 19, вып. 1. С. 79–105.

6. Н. Н. Добровольский Дзета-функция моноидов с заданной абсциссой абсолютной сходимости // Чебышевский сб. 2018. Т. 19, вып. 2. С. 142–150.

7. Н. Н. Добровольский, М. Н. Добровольский, Н. М. Добровольский, И. Н. Балаба, И. Ю. Реброва Гипотеза о "заградительном ряде" для дзета-функций моноидов с экспоненциальной последовательностью простых // Чебышевский сб. 2018. Т. 19, вып. 1. С. 106–123.

8. Н. Н. Добровольский, А. О. Калинина, М. Н. Добровольский, Н. М. Добровольский. О количестве простых элементов в некоторых моноидах натуральных чисел // Чебышевский сборник. 2018. Т. 19, вып. 2, С. 123–141.

9. Н. Н. Добровольский, А. О. Калинина, М. Н. Добровольский, Н. М. Добровольский. О моноиде квадратичных вычетов // Чебышевский сборник. 2018. Т. 19, вып. 3, С. 95–108.

10. Коробов Н. М. О приближенном решении интегральных уравнений // ДАН СССР. 1959. Т. 128, №2. С. 235–238.

11. Коробов Н. М. Теоретико-числовые методы в приближенном анализе. М.: Физматгиз, 1963.

12. Коробов Н. М. Теоретико-числовые методы в приближенном анализе. (второе издание) / М.: МЦНМО, 2004. 288 с.

13. Родионов А. В. О методе В. С. Рябенького — Н. М. Коробова приближенного решения уравнений с частными производными // Чебышевский сборник, 2009 Т. 10, вып. 3. С 84–96.

14. Рябенький В. С. Об одном способе получения разностных схем и об использовании теоретикочисловых сеток для решения задачи Коши методом конечных разностей // Тр. матем. ин-та им. В. А. Стеклова. 1961. Т. 60. С. 232 — 237.

15. Теоретико-числовой метод в приближённом анализе и его реализация в ПОИВС «ТМК»: Моногр. В 2 ч. / Реброва И. Ю., Добровольский Н. М., Добровольский Н. Н., Балаба И. Н., Есаян А. Р., Ребров Е. Д., Басалов Ю. А., Басалова А. Н., Лямин М. И., Родионов А. В.; Под. ред. Н. М. Добровольского. — Тула: Изд-во Тул. гос. пед. ун-та им. Л. Н. Толстого, 2016. – Ч. II. – 161 с.

УДК 511.3

Алгебра рядов Дирихле моноида натуральных чисел [1]

Н. Н. Добровольский (Россия, г. Тула)
Тульский государственный университет
Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого
e-mail: cheb@tspu.tula.ru, nikolai.dobrovolsky@gmail.com
М. Н. Добровольский (Россия, г. Москва)
Геофизический центр РАН
e-mail: m.dobrovolsky@gcras.ru
Н. М. Добровольский (Россия, г. Тула)
Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого
e-mail: dobrovol@tsput.ru
И. Н. Балаба (Россия, г. Тула)
Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого.
e-mail: ibalaba@mail.ru
И. Ю. Реброва (Россия, г. Тула)
Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого.
e-mail: i_rebrova@mail.ru

Dirichlet series algebra of a monoid of natural numbers

N. N. Dobrovolskiy (Russia, Tula)
Tula State University
Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University
e-mail: cheb@tspu.tula.ru, nikolai.dobrovolsky@gmail.com
M. N. Dobrovol'skii (Russia, Moscow)
Geophysical centre of RAS.
e-mail: m.dobrovolsky@gcras.ru
N. M. Dobrovolskiy (Russia, Tula)
Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University
e-mail: dobrovol@tspu.tula.ru
I. N. Balaba (Russia, Tula)
Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University
e-mail: ibalaba@mail.ru
I. Yu. Rebrova (Russia, Tula)
Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University
e-mail: i_rebrova@mail.ru

В работе для произвольного моноида натуральных чисел строятся основы алгебры рядов Дирихле либо над числовым полем, либо над кольцом целых чисел алгебраического числового поля.

Для любого числового поля $\mathbb{K}$ показано, что множество $\mathbb{D}^*(M)_\mathbb{K}$ всех обратимых рядов Дирихле из $\mathbb{D}(M)_\mathbb{K}$ является бесконечной абелевой группой, состоящей из рядов, у которых первый коэффициент отличен от нуля.

Вводится понятие целого ряда Дирихле моноида натуральных чисел, которые образуют алгебру над кольцом целых алгебраических чисел $\mathbb{Z}_\mathbb{K}$ алгебраического поля $\mathbb{K}$. Показано,

[1]Исследование выполнено по гранту РФФИ №19-41-710004_р_а

что для группы $\mathbb{U}_{\mathbb{K}}$ алгебраических единиц кольца целых алгебраических чисел $\mathbb{Z}_{\mathbb{K}}$ алгебраического поля $\mathbb{K}$ множество $\mathbb{D}(M)_{\mathbb{U}_{\mathbb{K}}}$ целых рядов Дирихле, у которых $a(1) \in \mathbb{U}_{\mathbb{K}}$, является мультипликативной группой.

Для любого ряда Дирихле из алгебры рядов Дирихле моноида натуральных чисел определены приведенный ряд, необратимая часть и дополнительный ряд. Найдена формула разложения произвольного ряда Дирихле в произведение приведенного ряда и конструкции из необратимой части и дополнительного ряда.

Для любого моноида натуральных чисел выделена алгебра рядов Дирихле, сходящихся на всей комплексной области. Также построена алгебра рядов Дирихле с заданной полуплоскостью абсолютной сходимости. Показано, что для любого нетривиального моноида M и для любого вещественного σ_0 найдется бесконечное множество рядов Дирихле из $\mathbb{D}(M)$ таких, что областью их голоморфности является α-полуплоскость $\sigma > \sigma_0$.

С помощью теоремы универсальности С. М. Воронина удалось доказать слабую форму теоремы универсальности для широкого класса дзета-функций моноидов натуральных чисел.

Из предыдущего видно, что теория дзета-функций моноидов натуральных чисел входит как составная часть в более общую теорию Алгебры рядов Дирихле моноида натуральных чисел.

Представляет интерес, например, исследование подалгебры рядов Дирихле, сходящихся на всей комплексной плоскости. Другая интересная алгебра образована рядами Дирихле, которые имеют аналитическое продолжение на всю комплексную плоскость.

Было бы интересно выяснить какие элементы доказательства С. М. Воронина непосредственно переносятся на этот класс дзета-функций моноидов натуральных чисел?

Интересно заметить, что как показано в работе [8] среди дзета-функций моноидов натуральных чисел, для которых справедлива слабая теорема универсальности, есть те, для которых область голоморфности совпадает со всей α-полуплоскостью $\sigma > 0$, кроме точки $\alpha = 1$, где у них полюс первого порядка. Таким образом, они продолжаются в лево от полуплоскости абсолютной сходимости, но не на всю плоскость. Если верна гипотеза Линника–Ибрагимова [13], то для них должна быть справедлива и сильная теорема универсальности.

В заключении рассмотрены актуальные задачи с дзета-функциями моноидов натуральных чисел, требующие дальнейшего исследования.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. С. М. Воронин Теорема об "универсальности" дзета-функции Римана // Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1975. — Т. 39, №3. — С. 475–486.

2. С. М. Воронин, А. А. Карацуба Дзета-функция Римана. — М.: Физ-матлит, 1994. — 376 с.

3. А. Гурвиц, Р. Курант Теория функций. — М.: Наука, 1968. — 618 с.

4. С. С. Демидов, Е. А. Морозова, В. Н. Чубариков, И. Ю. Реброва, И. Н. Балаба, Н. Н. Добровольский, Н. М. Добровольский, Л. П. Добровольская, А. В. Родионов, О. А. Пихтилькова Теоретико-числовой метод в приближенном анализе // Чебышевский сб. 2017. Т. 18, вып. 4. С. 6–85.

5. Н. Н. Добровольский Дзета-функция моноидов натуральных чисел с однозначным разложением на простые множители // Чебышевский сб. 2017. Т. 18, вып. 4. С. 187–207.

6. Н. Н. Добровольский О моноидах натуральных чисел с однозначным разложением на простые элементы // Чебышевский сб. 2018. Т. 19, вып. 1. С. 79–105.

7. Н. Н. Добровольский Дзета-функция моноидов с заданной абсциссой абсолютной сходимости // Чебышевский сб. 2018. Т. 19, вып. 2. С. 142–150.

8. Н. Н. Добровольский. Одна модельная дзета-функция моноида натуральных чисел // Чебышевский сборник. 2019. Т. 20, вып. 1. С. 101–116.

9. Н. Н. Добровольский, М. Н. Добровольский, Н. М. Добровольский, И. Н. Балаба, И. Ю. Реброва Гипотеза о "заградительном ряде" для дзета-функций моноидов с экспоненциальной последовательностью простых // Чебышевский сб. 2018. Т. 19, вып. 1. С. 106–123.

10. Н. Н. Добровольский, А. О. Калинина, М. Н. Добровольский, Н. М. Добровольский. О количестве простых элементов в некоторых моноидах натуральных чисел // Чебышевский сборник. 2018. Т. 19, вып. 2, С. 123–141.

11. Н. Н. Добровольский, А. О. Калинина, М. Н. Добровольский, Н. М. Добровольский. О моноиде квадратичных вычетов // Чебышевский сборник. 2018. Т. 19, вып. 3, С. 95–108.

12. А. Дубицкас, Р. Мацайтене Некоторые моменты из жизни Антанаса Лауринчикаса: в поисках Универсальности // Чебышевский сборник, 2019, т. 20, вып. 1, с. 6–43.

13. А. П. Лауринчикас, К. Матсумото, Й. Стеудинг, "Универсальность L-функций, связанных с новыми формами", Изв. РАН. Сер. матем., т. 67, №1 (2003), С. 83–98; Izv. Math., 67:1 (2003), P. 77–90.

14. Чандрасекхаран К. Введение в аналитическую теорию чисел. — М.: Мир, 1974. 188 с.

15. Н. Г. Чудаков Введение в теорию L-функций Дирихле. М. — Л.: ОГИЗ, 1947. 204 с.

УДК 517.5

Оценки констант Никольского на основе неравенств типа Левина–Любинского[1]

И. А. Мартьянов (Россия, г. Тула)
Тульский государственный университет
e-mail: martyanow.ivan@yandex.ru

Estimates of Nikolskii constants based on Levin–Lubinsky type inequalities

I. A. Martyanov (Russia, Tula)
Tula State University
e-mail: martyanow.ivan@yandex.ru

Пусть $0 < p < \infty$, $\mathcal{C}(n,p) = \sup_{T_n\neq 0} \frac{\|T_n\|_\infty}{\|T_n\|_p}$ — константа Никольского для тригонометрических полиномов порядка не больше n, $\mathcal{L}(p) = \sup_{f\neq 0} \frac{\|f\|_\infty}{\|f\|_p}$ — константа Никольского для целых функций экспоненциального типа не больше 1.

В [1] доказаны неравенства

$$n^{1/p}\mathcal{L}(p) \leqslant \mathcal{C}(n,p) \leqslant (n + \lceil p^{-1}\rceil)^{1/p}\mathcal{L}(p), \quad n \in \mathbb{Z}_+, \quad 0 < p < \infty,$$

[1]Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 18-11-00199).

уточняющие результаты Е. Левина и Д. Любинского, а также М. Ганзбурга и С. Тихонова. При $p = 1$ неравенство $n\mathcal{L}(1) \leqslant \mathcal{C}(n, 1) \leqslant (n + 1)\mathcal{L}(1)$ было доказано ранее в работе [2].

Неравенства типа Левина и Любинского позволяют оценить константу $\mathcal{L}(p)$, приближенно вычисляя $\mathcal{C}(n, p)$ для больших n. Для этого применяются недавние результаты В.В. Арестова и М.В. Дейкаловой [3], которые выразили $\mathcal{C}(n, p)$ через алгебраический полином, наименее уклоняющийся от нуля в пространстве $L^p[-1, 1]$ с весом $(1 - t)v(t)$, где $v(t) = (1 - t^2)^{-1/2}$ — вес Чебышева.

Теорема 1 ([1]). *Справедливы оценки*

$$1.081 < 2\pi\mathcal{L}(1) < 1.082.$$

Для сравнения предыдущие оценки были $1.081 < 2\pi\mathcal{L}(1) < 1.098$ (историю вопроса см. в [2]).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Горбачев Д.В., Мартьянов И.А. О взаимосвязи констант Никольского для тригонометрических полиномов и целых функций экспоненциального типа // Чебышевский сборник. 2018. Том 19, № 2. С. 80–89.

2. Горбачев Д.В. Интегральная задача Конягина и (C, L)-константы Никольского // Труды ИММ УрО РАН. 2005. Том 11, № 2. С. 72–91.

3. Arestov V., Deikalova M. Nikol'skii inequality between the uniform norm and L_q-norm with ultraspherical weight of algebraic polynomials on an interval // Comput. Methods Funct. Theory. 2015. Vol. 15, no. 4. P. 689–708.

УДК 517.948

Коэрцитивная разрешимость нелинейных систем дифференциальных уравнений второго порядка с матричными коэффициентами в весовом пространстве

О. Х. Каримов (Таджикистан, г. Душанбе)
Институт математики имени А.Джураева Академии наук Республики Таджикистан
e-mail: karimov_olim@mail.ru

Coercive solvability of nonlinear systems of differential equations of second order with matrix coefficients in the weight space

O. Kh. Karimov (Tajikistan, Dushanbe)
A.Juraev Institute of Mathematics, Academy of Sciences the Republic of Tajikistan
e-mail: karimov_olim@mail.ru

Доклад посвящен коэрцитивной разрешимости нелинейных систем дифференциальных уравнений второго порядка с матричными коэффициентами в весовом пространстве. В работах [1]-[6] и имеющихся там ссылках исследуется разделимость и коэрцитивная разрешимость.

Пусть $\rho(x)$ - положительная функция, определенная в R^n, l - некоторое натуральное число. Символом $L_{2,\rho}(R^n)^l$ - обозначим пространство вектор-функций

$$u(x) = (u_1(x), ..., u_l(x)), u_j(x) \in L_{2,\rho}(R^n), (j = \overline{1,\, l})$$

с конечной нормой

$$\|u; L_{2,\rho}(R^n)^l\| = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \int_{R^n} \rho(x)|u_j(x)|^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Пространство $L_{2,\rho}(R^n)^l$ является гильбертовым пространством, и в нём скалярное произведение определяется с помощью равенства

$$(u, \upsilon)_\rho = \sum_{j=1}^{l} \int_{R^n} \rho(x) u_j(x) \overline{\upsilon_j(x)} dx \quad .$$

Рассмотрим в пространстве $L_{2,\rho}(R^n)^l$ дифференциальный оператор

$$L[u] = -\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(a_{ij}(x) \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} \right) + V(x,u)u(x) = f(x), \quad (x \in R^n). \tag{1}$$

Предположим, что коэффициенты a_{ij} оператора являются квадратными матрицами порядка l с элементами из класса $C^1(R^n)$ и удовлетворяют следующим условиям:

$$a_{ij} \equiv a_{ji}, \quad Im a_{ij} \equiv 0,$$

$$|a_{ij}| \le \sigma_1, \quad \nabla a_{ij} \le \sigma_2, \quad (x \in R^n, i, j = \overline{1, n}),$$

$$\sum_{i=1}^{n} |s_i; C^l|^2 \le \chi_1 \sum_{i,j=1}^{n} \langle a_{ij}(x) s_i, s_j; C^l \rangle \quad ((x \in R^n), \forall s = (s_i)_{i=1}^n, s_i \in C^l),$$

а значения $V(x, \omega)$, $x \in R^n, \omega \in C^l$ являются квадратными положительно-определёнными эрмитовыми матрицами из $\operatorname{End} C^l$, константы σ_1,σ_2,χ_1 в этих условиях не зависят от x и s.

Определение 1. *Уравнение (1) и соответствующий ему дифференциальный оператор называются разделимыми в $L_{2,\rho}(R^n)^l$, если $\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(a_{ij}(x) \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} \right)$, $V(x, u(x))u(x) \in L_2(R^n)^l$ для всех $u(x) \in L_{2,\rho}(R^n)^l \cap W_{2,loc}^2(R^n)^l$ таких, что $f(x) \in L_{2,\rho}(R^n)^l$.*

Учитывая результат о разделимости оператора (1) (Теорема 1 [6]), получим следующий результат:

Теорема 1. *Пусть оператор (1) разделяется в пространстве $L_{2,\rho}(R^n)^l$, а весовая функция $\rho(x)$ и положительная функция $\Psi(x) \in C^1(R^n)$ удовлетворяют неравенствам с постоянными величинами δ_1, δ_2:*

$$\|\Psi^{-1}(x) \frac{\partial \Psi}{\partial x_i} V^{-\frac{1}{2}}\| < \delta_1,$$

$$\|\rho^{-1}(x) \frac{\partial \rho}{\partial x_i} V^{-\frac{1}{2}}\| < \delta_2.$$

Тогда при выполнении условий

$$n(\delta_1^2 + \delta_2^2) < 2\alpha, \quad n\alpha\sigma_1\chi_1 < 1, \quad \alpha > 0$$

система дифференциальных уравнения (1) при всех $f(x) \in L_{2,\rho}(R^n)^l$ имеет единственное решение в пространстве $L_{2,\rho}(R^n)^l$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Everitt W. N., Giertz M. Some properties of the domains of certain differential operators // London Math.Soc. 1971. V. 23, № 3, pp. 301-324.

2. Бойматов К. Х. О методе Эверитта и Гирца для банаховых пространств // Докл. РАН. 1997. Т. 356. № 1. С.10-12.

3. Бойматов К. Х. Теоремы разделимости, весовые просранства и их приложения // Труды МИАН СССР. 1984. Т. 170. С.37-76.

4. Отелбаев М. Коэрцитивные оценки и теоремы разделимости для эллиптических уравнений в R^n // Труды МИАН СССР. 1983. Т. 161. С.195-217.

5. Zayed E. M. Separation for an elliptic differential operator in a weighted Hilbert space with its application to an existence and uniqueness theorem // Dynamics of Contionuous. Discrete and Impulsive systems series A: Mathematical Analysis. Vol. 22. 2015. pp. 409-421.

6. Каримов О. Х. О разделимости нелинейных дифференциальных операторов второго порядка с матричными коэффицентами в весовом пространстве // Доклады Академии наук Республики Таджикистан. 2015. Т. 58. № 8. С.665-673.

УДК 511.3

Тригонометрические суммы сеток алгебраических решеток[1]

Е. М. Рарова (Россия, г. Тула)
Тульский государственный педагогический университет имени Л. Н. Толстого
e-mail: rarova82@mail.ru

Trigonometric sums of nets of algebraic lattices

E. M. Rarova (Russia, Tula)
Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University
e-mail: rarova82@mail.ru

Рассматриваются: единичные $s-$мерные кубы

$$\overline{G}_s = \{\vec{x} \,|\, 0 \leqslant x_\nu \leqslant 1,\, \nu = 1, 2, \ldots, s\}, \quad G_s = \{\vec{x} \,|\, 0 \leqslant x_\nu < 1,\, \nu = 1, 2, \ldots, s\};$$

непрерывные периодические функции с периодом равным единице по каждой из переменных x_ν $(\nu = 1, 2, \ldots, s)$, принадлежащие классу $E_s^\alpha(C)$, который состоит из периодических функций

$$f(\vec{x}) = \sum_{m_1,\ldots,m_s=-\infty}^{\infty} C(\vec{m}) e^{2\pi i(\vec{m},\vec{x})},$$

для которых

$$|C(\vec{m})| \leqslant \frac{C}{(\overline{m_1} \ldots \overline{m_s})^\alpha}, \quad (\alpha > 1)$$

и $\overline{m} = \max(1, |m|)$ для любого вещественного m.

[1]Исследование выполнено по гранту РФФИ №19-41-710004_р_а

Для произвольного вектора $\vec{x}$ его дробной частью называется вектор $\{\vec{x}\}=(\{x_1\},\ldots,\{x_s\})$. Отсюда следует, что всегда $\{\vec{x}\}\in G_s$.

Далее везде под произвольной решеткой $\Lambda\subset\mathbb{R}^s$ мы будем понимать только полные решетки, то есть

$$\Lambda=\{m_1\vec{\lambda}_1+\ldots+m_s\vec{\lambda}_s=\vec{m}\cdot A\,|\vec{m}=(m_1,\ldots,m_s)\in\mathbb{Z}^s\},$$

где $\vec{\lambda}_1=(\lambda_{1\,1},\ldots,\lambda_{1\,s})$,$\ldots$,$\vec{\lambda}_s=(\lambda_{s\,1},\ldots,\lambda_{s\,s})$ — система линейно-независимых векторов в $\mathbb{R}^s$, а матрица решётки A задана соотношениями

$$A=\begin{pmatrix}\lambda_{1\,1} & \ldots & \lambda_{1\,s}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \lambda_{s\,1} & \ldots & \lambda_{s\,s}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\vec{\lambda}_1\\ \vdots\\ \vec{\lambda}_s\end{pmatrix}.$$

Взаимная решетка $\Lambda^*=\{\vec{x}\,|\,\forall\vec{y}\in\Lambda\ (\vec{x},\vec{y})\in\mathbb{Z}\}$. Непосредственно из определения следует равенство $(q\Lambda)^*=\dfrac{1}{q}\Lambda^*$.

Определение 1. *Для произвольной решетки Λ обобщенной параллелепипедальной сеткой $M(\Lambda)$ называется множество $M(\Lambda)=\Lambda^*\cap G_s$. Сетка $M_1(\Lambda)=\Lambda^*\cap[-1;1)^s$.*

Обобщенной параллелепипедальной сеткой II рода $M'(\Lambda)$ называется множество

$$M'(\Lambda)=\{\vec{x}\,|\,\vec{x}=\{\vec{y}\},\vec{y}\in M_1(\Lambda)\}.$$

Определение 2. *Весовой функцией порядка r с константой B называется гладкая функция $\rho(\vec{x})$, удовлетворяющая условиям*

$$\sum_{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_s=-1}^{0}\rho(\vec{x}+(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_s))=1 \text{ при } \vec{x}\in G_s, \tag{1}$$

$$\rho(\vec{x})=0 \quad \text{при} \quad \vec{x}\notin(-1;1)^s, \tag{2}$$

$$\left|\int_{-1}^{1}\!\ldots\!\int_{-1}^{1}\rho(\vec{x})e^{2\pi i(\vec{\sigma},\vec{x})}d\vec{x}\right|\leqslant B(\overline{\sigma}_1\ldots\overline{\sigma}_s)^{-r} \quad \text{для любого} \quad \vec{\sigma}\in\mathbb{R}^s. \tag{3}$$

Если выполнены условия (1) и (2), то говорим просто о весовой функции $\rho(\vec{x})$.

Определение 3. *Квадратурной формулой с обобщенной параллелепипедальной сеткой II типа и весовой функцией $\rho(\vec{x})$ называется формула вида*

$$\int_0^1\!\cdots\!\int_0^1 f(\vec{x})d\vec{x}=(\det\Lambda)^{-1}\sum_{\vec{x}\in M'(\Lambda)}\rho_{\vec{x}}f(\vec{x})-R_{N'(\Lambda)}[f],$$

$$\text{где} \quad \rho_{\vec{x}}=\sum_{\vec{y}\in M_1(\Lambda),\{\vec{y}\}=\vec{x}}\rho(\vec{y}), \quad N'(\Lambda)=|M'(\Lambda)|,$$

$R_{N'(\Lambda)}[f]$ — погрешность квадратурной формулы.

Пусть $\vec{a}=(a_0,a_1,\ldots,a_{s-1})$ — целочисленный вектор такой, что многочлен

$$P_{\vec{a}}(x)=\sum_{\nu=0}^{s-1}a_\nu x^\nu+x^s \tag{4}$$

неприводим над полем рациональных чисел $\mathbb{Q}$ и все корни $\Theta_\nu\,(\nu = 1,\ldots,s)$ многочлена (4) действительные.

Обозначим через $T(\vec{a})$ матрицу степеней алгебраически сопряженных целых алгебраических чисел $\Theta_1,\ldots,\Theta_s$ — корней многочлена $P_{\vec{a}}(x)$:

$$T(\vec{a}) = \begin{pmatrix} 1 & \ldots & 1 \\ \Theta_1 & \ldots & \Theta_s \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \Theta_1^{s-1} & \ldots & \Theta_s^{s-1} \end{pmatrix}, \tag{5}$$

а через $\vec{\Theta} = (\Theta_1,\ldots,\Theta_s)$ — вектор полного набора алгебраически сопряженных чисел — корней многочлена $P_{\vec{a}}(x)$.

Для любого $t > 0$ решётка $\Lambda(t\cdot T(\vec{a}))$ называется алгебраической. Она имеет вид

$$\Lambda(t\cdot T(\vec{a}))=\left\{\vec{x}=\left(t\sum_{\nu=1}^{s}\Theta_1^{\nu-1}m_\nu,\ldots,t\sum_{\nu=1}^{s}\Theta_s^{\nu-1}m_\nu\right)=t\cdot\vec{m}\cdot T(\vec{a})\,\middle|\,\vec{m}\in\mathbb{Z}^s\right\}.$$

Таким образом, алгебраическая решётка $\Lambda(t\cdot T(\vec{a}))$ имеет базис $\vec{\lambda}_\nu = t\cdot(\Theta_1^{\nu-1},\ldots,\Theta_s^{\nu-1})$ $(\nu = 1,\ldots,s)$.

Совокупность $M\subset G_s$ точек $M_k = (\xi_1(k),\ldots,\xi_s(k))$ $\quad(k = 1\ldots N)$ называется *сеткой* M из N узлов, а сами точки — *узлами квадратурной формулы*. Величины $\rho_k = \rho(M_k)$ называются весами квадратурной формулы. В этой работе будем везде предполагать, что все веса вещественнозначные и являются значениями специальной весовой функции.

Лемма 1. *Для любого действительного σ выполняется неравенство*

$$\left|\int_{-1}^{1}(1-|x|)e^{2\pi i\sigma x}dx\right| \leqslant (\overline{\sigma})^{-2}, \tag{6}$$

где $\overline{\sigma} = \max(1,|\sigma|)$.

Лемма 2. *Пусть функция $\rho_r(x)$ определена равенствами*

$$\rho_r(x) = \begin{cases} 0, & \textit{при } |x|\geqslant 1, \\ 1-(2r-1)C_{2r-2}^{r-1}\sum\limits_{\nu=0}^{r-1}C_{r-1}^{\nu}\dfrac{(-1)^\nu}{r+\nu}x^{r+\nu}, & \textit{при } 0\leqslant x<1, \\ 1-(-1)^r(2r-1)C_{2r-2}^{r-1}\sum\limits_{\nu=0}^{r-1}C_{r-1}^{\nu}\dfrac{1}{r+\nu}x^{r+\nu}, & \textit{при } -1<x<0 \end{cases}. \tag{7}$$

Тогда для любого действительного числа σ и интеграла

$$I_r(\sigma) = \int_{-1}^{1}\rho_r(x)e^{2\pi i\sigma x}dx$$

выполняется оценка

$$|I_r(\sigma)| \leqslant \frac{B(r)}{\overline{\sigma}^{r+1}} \tag{8}$$

и функция $\rho_r(x)$ — весовая функция порядка $r+1$ с константой $B(r)$, где

$$B(r) = \frac{(2r-1)C_{2r-2}^{r-1}}{\pi(2\pi)^r}\sup_{|\sigma|>1}\left|\big(P_{r-1}(1)e^{2\pi i\sigma}-P_{r-1}(0)\big)-\int_0^1 P_{r-1,r}(x)e^{2\pi i\sigma x}dx\right|,$$

и при $0 \leqslant \nu \leqslant r-1$ *имеем:*

$$\left(((1-x)x)^{r-1}\right)^{(\nu)} = ((1-x)x)^{r-1-\nu} P_\nu(x),$$

где

$$P_0(x) = 1, \quad P_{\nu+1}(x) = \nu(1-2x)P_\nu(x) + x(1-x)P'_\nu(x) \quad (\nu = 0, \ldots, r-2),$$
$$P_{r-1}(x) = \sum_{\nu=0}^{r-1} (-1)^\nu C_{r-1}^\nu \prod_{k=0}^{r-2} (r-1+\nu-k) x^\nu,$$

и при $r \leqslant \nu \leqslant 2r-2$ *имеем:*

$$\left(((1-x)x)^{r-1}\right)^{(\nu)} = P_{r-1,\nu}(x), \quad P_{r-1,r}(x) = P'_{r-1}(x),$$
$$P_{r-1,\nu}(x) = \sum_{\mu=\nu+1-r}^{r-1} (-1)^\mu C_{r-1}^\mu \prod_{k=0}^{\nu-1} (r-1+\mu-k) x^{r-1+\mu-\nu} =$$
$$= P'_{r-1,\nu-1}(x) = P_{r-1}^{(\nu-r+1)}(x), \quad P_{r-1,2r-2}(x) = (-1)^{r-1}(2r-2)!.$$

Для произвольных целых $m_1,\ldots,m_s$ суммы $S_{M,\vec{\rho}}(m_1,\ldots,m_s)$, определённые равенством

$$S_{M,\vec{\rho}}(m_1,\ldots,m_s) = \sum_{k=1}^{N} \rho_k e^{2\pi i [m_1 \xi_1(k) + \ldots + m_s \xi_s(k)]}, \tag{9}$$

называются *тригонометрическими суммами сетки с весами.*

Пусть матрица $T = T(\vec{a})$ и $t > 0$. Рассмотрим алгебраическую сетку $M(t) = M'(t \cdot \Lambda(T))$ из $N'(t \cdot \Lambda(T))$ узлов $\vec{x}_k$ $(k = 1, \ldots, N'(t \cdot \Lambda(T)))$ с весами

$$\rho_k = \rho_{\vec{x}_k} = (\det(t \cdot \Lambda(T)))^{-1} \sum_{\{\vec{y}\} = \vec{x}_k,\, \vec{y} \in M_1(t \cdot \Lambda(T))} \rho(\vec{y})$$

и её тригонометрическую сумму с весами

$$S_{M(t),\vec{\rho}}(\vec{m}) = (\det(t \cdot \Lambda(T)))^{-1} \sum_{\vec{x} \in M(t)} \left(\sum_{\{\vec{y}\} = \vec{x},\, \vec{y} \in M_1(t \cdot \Lambda(T))} \rho(\vec{y}) \right) e^{2\pi i (\vec{m}, \vec{x})}.$$

Теорема 1. *Для алгебраической решётки* $\Lambda(t \cdot T(\vec{a}))$ *и произвольной весовой функции* $\rho(\vec{x})$ *справедливо равенство*[2]

$$S_{M(t),\vec{\rho}}(\vec{m}) = \delta(\vec{m}) + \sum_{\vec{x} \in \Lambda(t \cdot T(\vec{a}))}{}' \int_{-1}^{1} \ldots \int_{-1}^{1} \rho(\vec{y}) e^{2\pi i (\vec{y}, \vec{m} - \vec{x})} d\vec{y}, \tag{10}$$

где

$$\delta(\vec{m}) = \begin{cases} 1, & \text{при } \vec{m} = \vec{0}; \\ 0, & \text{при } \vec{m} \neq \vec{0},\ \vec{m} \in \mathbb{Z}^s. \end{cases}$$

С помощью леммы 1 доказываются следующие теоремы.

Теорема 2. *При* $t \to \infty$ *справедлива асимптотическая формула*

$$S_{M(t),\vec{\rho}_1}(\vec{0}) = 1 + O\left(\frac{\ln^{s-1} \det \Lambda(t)}{(\det \Lambda(t))^2} \right). \tag{11}$$

[2]Здесь и далее символ $\sum'$ означает, что из области суммирования исключена нулевая точка.

Теорема 3. *При $t \to \infty$ для произвольного вектора $\vec{m} \neq \vec{0}$ справедлива асимптотическая формула*

$$S_{M(t),\vec{\rho}_1}(\vec{m}) = O\left(\frac{(\overline{m_1}\ldots\overline{m_s})^2 \ln^{s-1}\det\Lambda(t)}{(\det\Lambda(t))^2}\right). \tag{12}$$

Из теоремы 1, используя лемму 2 вместо леммы 1, можно доказать следующие теоремы:

Теорема 4. *При $t \to \infty$ справедлива асимптотическая формула*

$$S_{M(t),\vec{\rho}_r}(\vec{0}) = 1 + O\left(\frac{\ln^{s-1}\det\Lambda(t)}{(\det\Lambda(t))^{r+1}}\right). \tag{13}$$

Теорема 5. *При $t \to \infty$ для произвольного вектора $\vec{m} \neq \vec{0}$ справедлива асимптотическая формула*

$$S_{M(t),\vec{\rho}_r}(\vec{m}) = O\left(\frac{(\overline{m_1}\ldots\overline{m_s})^{r+1} \ln^{s-1}\det\Lambda(t)}{(\det\Lambda(t))^{r+1}}\right). \tag{14}$$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Рарова Е. М. Разложение тригонометрической суммы сетки с весами в ряд по точкам решетки // Изв. ТулГУ. Естественные науки. 2014. Вып. 1. Ч. 1. С. 37–49.
2. Рарова Е. М. Тригонометрические суммы сетки с весами для целочисленной решётки // Известия Тульского государственного университета. Естественные науки. 2014. № 3. С. 34-39.
3. Рарова Е. М. Тригонометрические суммы алгебраических сеток // В сборнике: Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы и приложения Материалы XIII Международной конференции, посвященной восьмидесятипятилетию со дня рождения профессора Сергея Сергеевича Рышкова. Тульский государственный педагогичекий университет им. Л.Н. Толстого. 2015. С. 356-359.

УДК 511.9

О рациональных приближениях алгебраических сеток[1]

А. В. Родионов (Россия, г. Тула)
Тульский государственный педагогический университет имени Л. Н. Толстого
e-mail: rodionovalexandr@mail.ru
А. В. Михляева (Россия, г. Оренбург)
Оренбургский государственный университет
e-mail: white.background.invisible@mail.ru

On rational approximations of algebraic nets

[1]Исследование выполнено по гранту РФФИ №19-41-710004_р_а

A. V. Rodionov (Russia, Tula)
Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University
e-mail: rodionovalexandr@mail.ru
A. V. Mikhlyaeva (Russia, Orenburg)
Orenburg State University
e-mail: white.background.invisible@mail.ru

Для произвольного вектора $\vec{x}$ его дробной частью называется вектор $\{\vec{x}\}=(\{x_1\},\ldots,\{x_s\})$.

Далее везде под произвольной решеткой $\Lambda\subset\mathbb{R}^s$ мы будем понимать только полные решетки, то есть

$$\Lambda=\{m_1\vec{\lambda}_1+\ldots+m_s\vec{\lambda}_s=\vec{m}\cdot A\,|\vec{m}=(\,m_1,\ldots,m_s)\in\mathbb{Z}^s\},$$

где $\vec{\lambda}_1=(\lambda_{1\,1},\ldots,\lambda_{1\,s})$,...,$\vec{\lambda}_s=(\lambda_{s\,1},\ldots,\lambda_{s\,s})$ — система линейно-независимых векторов в $\mathbb{R}^s$, а матрица решётки A задана соотношениями

$$A=\begin{pmatrix}\lambda_{1\,1}&\ldots&\lambda_{1\,s}\\ \vdots&\ddots&\vdots\\ \lambda_{s\,1}&\ldots&\lambda_{s\,s}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\vec{\lambda}_1\\ \vdots\\ \vec{\lambda}_s\end{pmatrix}.$$

Взаимная решетка $\Lambda^*=\{\vec{x}\,|\,\forall\vec{y}\in\Lambda\ (\vec{x},\vec{y})\in\mathbb{Z}\}$. Непосредственно из определения следует равенство $(q\Lambda)^*=\dfrac{1}{q}\Lambda^*$.

Определение 1. *Для произвольной решетки Λ обобщенной параллелепипедальной сеткой $M(\Lambda)$ называется множество $M(\Lambda)=\Lambda^*\cap G_s$.*

Сетка $M_1(\Lambda)=\Lambda^*\cap[-1;1)^s$.

Обобщенной параллелепипедальной сеткой II рода $M'(\Lambda)$ называется множество

$$M'(\Lambda)=\{\vec{x}\,|\,\vec{x}=\{\vec{y}\},\vec{y}\in M_1(\Lambda)\}.$$

Пусть $\vec{a}=(a_0,a_1,\ldots,a_{s-1})$ — целочисленный вектор такой, что многочлен

$$P_{\vec{a}}(x)=\sum_{\nu=0}^{s-1}a_\nu x^\nu+x^s \tag{1}$$

неприводим над полем рациональных чисел $\mathbb{Q}$ и все корни $\Theta_\nu\,(\nu=1,\ldots,s)$ многочлена (1) действительные.

Обозначим через $T(\vec{a})$ матрицу степеней алгебраически сопряженных целых алгебраических чисел Θ_1,...,Θ_s — корней многочлена $P_{\vec{a}}(x)$:

$$T(\vec{a})=\begin{pmatrix}1&\ldots&1\\ \Theta_1&\ldots&\Theta_s\\ \vdots&\vdots&\vdots\\ \Theta_1^{s-1}&\ldots&\Theta_s^{s-1}\end{pmatrix}, \tag{2}$$

а через $\vec{\Theta}=(\Theta_1,\ldots,\Theta_s)$ — вектор полного набора алгебраически сопряженных чисел — корней многочлена $P_{\vec{a}}(x)$.

Для любого $t>0$ решётка $\Lambda(t\cdot T(\vec{a}))$ называется алгебраической. Она имеет вид

$$\Lambda(t\cdot T(\vec{a}))=\left\{\vec{x}=\left(t\sum_{\nu=1}^{s}\Theta_1^{\nu-1}m_\nu,\ldots,t\sum_{\nu=1}^{s}\Theta_s^{\nu-1}m_\nu\right)=t\cdot\vec{m}\cdot T(\vec{a})\,\middle|\,\vec{m}\in\mathbb{Z}^s\right\}.$$

Таким образом, алгебраическая решётка $\Lambda(t\cdot T(\vec{a}))$ имеет базис $\vec{\lambda}_\nu = t\cdot(\Theta_1^{\nu-1},\ldots,\Theta_s^{\nu-1})$ $(\nu=1,\ldots,s)$.

Естественной научной проблемой является вопрос о приближении алгебраической сетки рациональной сеткой. Из теории обобщенных параллелепипедальных сеток и квадратурных формул с этими сетками возникает следующая постановка.

Дана алгебраическая решётка $\Lambda(t\cdot T(\vec{a}))$ и натуральном t требуется найти целочисленную решётку $\Lambda_{\mathbb{Z}}(t\cdot T(\vec{a}))$ такую, чтобы величина гиперболического параметра решётки $\Lambda_{\mathbb{Z}}(t\cdot T(\vec{a}))$ была наибольшей, когда

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\Lambda_{\mathbb{Z}}(t\cdot T(\vec{a}))=\Lambda(T(\vec{a})).$$

Вопрос о приближении алгебраической решётки Λ(t,F) целочисленной решёткой Λ(t) можно ставить так:

Найти целочисленную решётку Λ(t) такую, что расстояние ρ(Λ(t), Λ (t, F)) минимальное для заданного натурального t.

Теория гиперболической дзета-функции решёток показывает, что наиболее важны те решётки Λ, для которых отношение гиперболического параметра решётки q(Λ) к det Λ наибольшее.

В связи с этим можно дать следующее определение наилучшего приближения алгебраической решётки Λ (t, F) целочисленной решёткой Λ(t).

Целочисленная решётка Λ(t) называется наилучшим приближением алгебраической решётки Λ (t, F) с показателем β, если для любого натурального $t_1<t$ выполняется неравенство

$$\frac{q(\Lambda(t))\cdot\ln^\beta\det\Lambda(t)}{\det\Lambda(t)}>\frac{q(\Lambda(t_1))\cdot\ln^\beta\det\Lambda(t_1)}{\det\Lambda(t_1)}$$

Такая постановка является новой и ранее не встречалась в литературе.

Принципиальный вопрос, который связан с такой постановкой заключается в следующем.

Какое минимальное значение β допустимо в определении наилучшего приближения алгебраической решётки целочисленной?

Если окажется, что $\beta>0$, то это означает, что для наилучших приближений алгебраических решёток имеется аналог теоремы Туэ для приближения алгебраических чисел.

В работе [6] рассматривались вопросы приближения алгебраических решёток в случае квадратичных полей, а в работе [7] сделаны попытки рассмотреть общие подходы в этой тематике.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Л. П. Добровольская, М. Н. Добровольский, Н. М. Добровольский, Н. Н. Добровольский Многомерные теоретико-числовые сетки и решётки и алгоритмы поиска оптимальных коэффициентов / Тула: Изд-во Тул. гос. пед. ун-та им. Л. Н. Толстого, 2012. — 283 с. http://elibrary.ru/item.asp? id=20905960

2. Л. П. Добровольская, М. Н. Добровольский, Н. М. Добровольский, Н. Н. Добровольский Гиперболические дзета-функции сеток и решёток и вычисление оптимальных коэффициентов // Чебышевский сборник 2012. Т. 13, вып. 4(44). С. 4–107.

3. Коробов Н. М. Теоретико-числовые методы в приближенном анализе. (второе издание) М.: МЦНМО, 2004. 288 с.

4. Родионов А. В., Чуприн С. Ю. О гиперболических параметрах решётки линейного сравнения // Известия ТулГУ. Естественные науки. Вып. 1. Ч. 1. — Тула: Изд-во ТулГУ, 2014. С. 50–62.

5. Фролов К. К. Оценки сверху погрешности квадратурных формул на классах функций // ДАН СССР. 1976. Т. 231. № 4. С. 818–821.

6. Е. И. Климова, Н. Н. Добровольский Квадратичные поля и квадратурные формулы // Материалы XV Международной конференции Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы и приложения, посвященной столетию со дня рождения доктора физико-математических наук, профессора Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова Коробова Николая Михайловича. — Тула: Изд-во Тул. гос. пед. ун-та им. Л. Н. Толстого, 2018. С. 308–310.

7. А. В. Родионов О рациональных приближениях алгебраических сеток // Материалы XV Международной конференции Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы и приложения, посвященной столетию со дня рождения доктора физико-математических наук, профессора Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова Коробова Николая Михайловича. — Тула: Изд-во Тул. гос. пед. ун-та им. Л. Н. Толстого, 2018. С. 321–310.

———————————————————————————————————————

УДК 511.3

О количественной мере качества одной обобщенной параллелепипедальной сетки[1]

Н. К. Серегина (Россия, г. Москва)
e-mail: sereginank@cityadm.tula.ru
Н. Н. Добровольский (Россия, г. Тула)
Тульский государственный университет
Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого
e-mail: cheb@tspu.tula.ru, nikolai.dobrovolsky@gmail.com

On the quantitative measure of the quality of a generalized parallelepipedal net

N. K. Seregina (Russia, Moscow)
e-mail: sereginank@cityadm.tula.ru
N. N. Dobrovolskiy (Russia, Tula)
Tula State University
Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University
e-mail: cheb@tspu.tula.ru, nikolai.dobrovolsky@gmail.com

В работе [1] в связи с рассмотрением вопросов приближения квадратичных решеток целочисленными решетками и соответствующих алгебраических сеток рациональными возник

[1]Исследование выполнено по гранту РФФИ №19-41-710005_р_а

следующий интересный класс двумерных параллелепипедальных сеток

$$M_1(\Lambda_m(F)) = \left\{ \left(\frac{n}{2Q_m} + \frac{\sqrt{p}k}{2pQ_m}, \frac{n}{2Q_m} - \frac{\sqrt{p}k}{2pQ_m} \right) \middle| k \in A(n), |n| \leqslant 2Q_m - 1 \right\},$$

$$A(n) = \left\{ k \middle| \begin{array}{ll} -2P_m < k < 2P_m, & \text{при } n = 0, \\ -2P_m + \frac{P_m n}{Q_m} < k < 2P_m - \frac{P_m n}{Q_m}, & \text{при } n = 1, \dots 2Q_m - 1, \\ -2P_m - \frac{P_m n}{Q_m} < k < 2P_m - \frac{P_m n}{Q_m}, & \text{при } n = -1, \dots - 2Q_m + 1; \end{array} \right\},$$

$$M(\Lambda_m(p)) = \left\{ \left(\frac{n}{2Q_m} + \frac{k}{2P_m}, \frac{n}{2Q_m} - \frac{k}{2P_m} \right) \middle| k \in B(n), 0 \leqslant n \leqslant 2Q_m - 1 \right\},$$

$$B(n) = \left\{ k \middle| \begin{array}{ll} k = 0, & \text{при } n = 0, \\ -\frac{P_m n}{Q_m} \leqslant k \leqslant \frac{P_m n}{Q_m}, & \text{при } n = 1, \dots Q_m - 1, \\ -2P_m + \frac{P_m n}{Q_m} < k < 2P_m - \frac{P_m n}{Q_m}, & \text{при } n = Q_m, \dots 2Q_m - 1; \end{array} \right\}$$

По нашему мнению, заслуживает внимание рассмотрение следующего общего класса рациональных двумерных параллелепипедальных сеток из $2PQ$ точек:

$$M(P, Q) = \left\{ \left(\frac{n}{2Q} + \frac{k}{2P}, \frac{n}{2Q} - \frac{k}{2P} \right) \middle| k \in B(n), 0 \leqslant n \leqslant 2Q - 1 \right\},$$

$$B(n) = \left\{ k \middle| \begin{array}{ll} k = 0, & \text{при } n = 0, \\ -\frac{Pn}{Q} \leqslant k \leqslant \frac{Pn}{Q}, & \text{при } n = 1, \dots Q - 1, \\ -2P + \frac{Pn}{Q} < k < 2P - \frac{Pn}{Q}, & \text{при } n = Q, \dots 2Q - 1; \end{array} \right\}$$

при $(P, Q) = 1$.

Для определения качества соответствующих квадратурных формул можно использовать граничную функцию класса $E_s^2\left(\cdot, \frac{\pi^2}{6}\right)$ для параллелепипедальных сеток, которой является функция $h(x, y) = 9(1 - 2\{x\})^2(1 - 2\{y\})^2$, поэтому для оценки качества сетки $M(P, Q)$ можно использовать функцию

$$H(M(P, Q)) = \frac{9}{2PQ} \sum_{n=0}^{2Q-1} \sum_{k \in B(n)} \left(1 - 2\left(\frac{n}{2Q} + \frac{k}{2P} \right) \right)^2 \left(1 - 2\left(\frac{n}{2Q} - \frac{k}{2P} \right) \right)^2.$$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Е. И. Климова, Н. Н. Добровольский Квадратичные поля и квадратурные формулы // Материалы XV Международной конференции Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы и приложения, посвященной столетию со дня рождения доктора физико-математических наук, профессора Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова Коробова Николая Михайловича. — Тула: Изд-во Тул. гос. пед. ун-та им. Л. Н. Толстого, 2018. С. 308–310.

2. Коробов Н. М. Теоретико-числовые методы в приближенном анализе. (второе издание) М.: МЦНМО, 2004.

3. Добровольский Н. Н., Добровольская Л. П., , Серегина Н. К., Бочарова О. Е. Алгоритмы вычисления оптимальных коэффициентов: Моногр. Под. ред. Н. М. Добровольского. — Тула: Изд-во Тул. гос. пед. ун-та им. Л. Н. Толстого, 2016. – 223 с.

УДК 511.42

Структура гладкого многообразия на пространстве решеток и пространстве сдвинутых решеток

Е. Н. Смирнова (Россия, г. Оренбург)
Оренбургский государственный университет
e-mail: helenash@mail.ru
О. А. Пихтилькова (Россия, г. Оренбург)
Оренбургский государственный университет
e-mail: opikhtilkova@mail.ru

The structure of a smooth manifold on the space of lattices and the space of shifted lattices

E. N. Smirnova (Russia, Orenburg)
Orenburg State University
e-mail: helenash@mail.ru
O. A. Pikhtilkova (Russia, Orenburg)
Orenburg State University
e-mail: opikhtilkova@mail.ru

Ранее нами было дано новое общее определение алгебраической решётки. Было доказыно, что любое рациональное преобразование алгебраической решётки снова будет алгебраической решёткой. Показано, что взаимная решётка к алгебраической решётки также будет алгебраической решёткой, соответствующей тому же чисто-вещественному алгебраическому полю F_s над полем рациональных чисел $\mathbb{Q}$.

Следуя за Б. Ф. Скубенко, изучались фундаментальные системы из чисто-вещественного алгебраического поля F_s над полем рациональных чисел $\mathbb{Q}$. Показана связь между фундаментальными системами алгебраических чисел и алгебраическими решётками.

В работе доказаны оценки для норм матрицы перехода от произвольной невырожденной матрицы к рациональной приближающей матрицы. С помощью леммы об оценки нормы матрицы перехода и обратной матрицы перехода, связывающих произвольную невырожденную матрицу и невырожденную рациональную приближающую матрицу, в работе показано, что множество алгебраических решёток всюду плотно в метрическом пространстве решёток.

Доказанная теорема является частным случаем более общей теоремы о том, что для любой решётки $\Lambda \in PR_s$ множество всех решёток рационально связанных с решёткой Λ всюду плотно в PR_s.

Аналогом данной теоремы является утверждение что для произвольной точки общего положения из $\mathbb{R}^s$ соответствующее s-мерное рациональное арифметическое пространство будет всюду плотно в s-мерном вещественном арифметическом пространстве $\mathbb{R}^s$.

Как известно (см. [2], стр.165) множество всех s-мерных решёток образуют полное метрическое пространство относительно метрики $\rho(\Lambda, \Gamma)$, которая задана равенствами

$$\rho(\Lambda,\Gamma) = \max(\ln(1+\mu), \ln(1+\nu)), \quad \mu = \inf_{\Lambda = A\cdot\Gamma} \|A - E_s\|, \quad \nu = \inf_{B\cdot\Lambda=\Gamma} \|B - E_s\|,$$

$$E_s = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = (\delta_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant s}, \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{при } i = j, \\ 0, & \text{при } i \neq j, \end{cases} \quad \|A\| = s \cdot \max_{1\leqslant i,j\leqslant s} |a_{ij}|.$$

Наряду с операциями сложения и вычитания векторов из $\mathbb{R}^s$ рассмотрим операции покоординатного умножения двух векторов и деления вектора на вектор общего положения:

$$\vec{x}\cdot\vec{y}=(x_1y_1,\dots,x_sy_s),\quad \frac{\vec{x}}{\vec{y}}=\left(\frac{x_1}{y_1},\dots,\frac{x_s}{y_s}\right)\quad (y_1\neq 0,\dots,y_s\neq 0).$$

Добавление операции покоординатного умножения превращает $\mathbb{R}^s$ в коммутативное кольцо с единицей $\vec{e}=(1,\dots,1)$ и, кроме того, в алгебру над $\mathbb{R}$ ранга s.

Так как для стандартного базиса $\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_s$ справедливы равенства $\vec{x}\cdot\vec{e}_j=x_j\cdot\vec{e}_j$ $(j==1,\dots,s)$, то умножение на $\vec{x}$ задаёт линейное преобразование пространства $\mathbb{R}^s$. Матрицей этого линейного преобразования в стандартном базисе является диагональная матрица $D(\vec{x})$, которая невырожденная только для точек $\vec{x}$ общего положения. Обозначим через $D_s^{(0)}(\mathbb{R})$ множество всех диагональных матриц, содержащее как подмножество $D_s(\mathbb{R})$ — множество всех невырожденных диагональных матриц, так и подмножество вырожденных диагональных матриц, т. е. диагональных матриц, у которых на диагонали есть хотя бы один ноль. Соответствие $\vec{x}\to D(\vec{x})$ задаёт *регулярное $\mathbb{R}$-представление* пространства $\mathbb{R}^s$ в стандартном базисе. Таким образом всё $\mathbb{R}^s$ отображается взаимно однозначно на $D_s^{(0)}(\mathbb{R})$, а множество точек общего положения — на $D_s(\mathbb{R})$. При переходе к другим базисам регулярное представление меняется.

Согласно Б. Н. Делоне и Д. К. Фаддееву [1] *решёткой, повторяющейся умножением,* называется всякая решётка замкнутая относительно операции покоординатного умножения точек. Таким образом, если решётка Λ, повторяется умножением, то для любого $\vec{x}\in\Lambda$ справедливо соотношение

$$\vec{x}\cdot\Lambda=\{(x_1y_1,\dots,x_sy_s)\,|\,\vec{y}\in\Lambda\}\subset\Lambda\cdot\Lambda\subset\Lambda.$$

Ясно, что если $\vec{x}$ — точка общего положения, то $\vec{x}\cdot\Lambda$ — подрешётка, повторяющаяся умножением, решётки Λ, так как свойства дискретности и замкнутости относительно сложения, вычитания и умножения для $\vec{x}\cdot\Lambda$ сохраняются, кроме того линейно независимая система векторов переходит в линейно независимую.

Таким образом, с алгебраической точки зрения всякая решётка Λ, повторяющаяся умножением является, с одной стороны, коммутативным кольцом, а с другой стороны $\mathbb{Z}$-модулем.

Определение 1. *Точка $\vec{x}\neq\vec{0}$ называется делителем нуля, если у неё есть координаты равные* 0.

Определение 2. *Решётка не содержащая делителей нуля называется неприводимой.*

Определение 3. *Назовём вектор $\vec{\lambda}=(\lambda^{(1)},\dots,\lambda^{(s)})\in\mathbb{R}^s$ целым алгебраическим, если многочлен*

$$f_{\vec{\lambda}}(x)=(x-\lambda^{(1)})\dots(x-\lambda^{(s)})\in\mathbb{Z}[x].$$

Вектор $\vec{\lambda}=(\lambda^{(1)},\dots,\lambda^{(s)})$ назовём алгебраическим, если найдется натуральное число n такое, что вектор $\vec{\lambda}_1=n\vec{\lambda}$ будет целым алгебраическим вектором.

Определение 4. *Решётка $\Lambda\in PR_s$ называется алгебраической, если любой вектор $\lambda\in\Lambda$ будет алгебраическим вектором и Λ содержит неприводимую подрешётку Λ_1, повторяющуюся умножением.*

Важным свойством алгебраических решёток является тот факт, что норменный минимум $N(\Lambda)$, который определяется равенством

$$N(\Lambda)=\inf_{\vec{x}\in\Lambda,\,\vec{x}\neq\vec{0}}|x_1\dots x_s|,$$

строго больше 0: $N(\Lambda) > 0$.

Пусть F_s — чисто-вещественное алгебраическое поле степени s над полем рациональных чисел $\mathbb{Q}$ и $F_s^{(1)} = F_s$, $F_s^{(2)}$, ..., $F_s^{(s)}$ — его алгебраически сопряжённые поля. Обозначим через $\mathbb{A}(F_s)$ множество всех алгебраических решёток Λ таких, что координаты любого вектора $\vec{x} \in \Lambda$ являются алгебраически сопряженными числами из поля F_s, то есть $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_s)$ и $x_j = \theta^{(j)}$ $(j = 1, \ldots, s)$, где $\theta^{(1)} = \theta$, $\theta^{(2)}$, ..., $\theta^{(s)}$ — полный набор алгебраически сопряженных чисел $\theta^{(j)} \in F_s^{(j)}$ для алгебраического числа $\theta \in F_s$.

Целью данной работы является доказательство следующей основной теоремы о плотности множества алгебраических решёток $\mathbb{A}(F_s)$ в метрическом пространстве PR_s.

Теорема 1. *Для любого чисто-вещественного алгебраического поля F_s степени s над полем рациональных чисел $\mathbb{Q}$ множество алгебраических решёток $\mathbb{A}(F_s)$ всюду плотно в метрическом пространстве PR_s.*

Множество алгебраических, линейно независимых чисел λ_1, ..., λ_s из F_s согласно Б. Ф. Скубенко называется фундаментальной системой (см. [3]), а если среди чисел фундаментальной системы есть единица, то такая система называется приведенной фундаментальной системой.

Лемма 1. *Пусть λ_1, ..., λ_s из F_s — произвольная фундаментальная система из F_s, а $\lambda \in F_s$ — произвольное алгебраическое число, тогда имеется однозначное представление*

$$\lambda = m_1\lambda_1 + \ldots + m_s\lambda_s, \quad m_j \in \mathbb{Q} \quad (1 \leqslant j \leqslant s).$$

Лемма 2. *Пусть λ_1, ..., λ_s из F_s — произвольная фундаментальная система из F_s и вектора $\vec{\lambda}_j$ заданы равенствами*

$$\vec{\lambda}_j = (\lambda_j^{(1)}, \ldots, \lambda_j^{(s)}), \quad \lambda_j^{(\mu)} \in F_s^{(\mu)} \quad (1 \leqslant j, \mu \leqslant s),$$

тогда решётка $\Lambda = \Lambda(\vec{\lambda}_1, \ldots, \vec{\lambda}_s) \in \mathbb{A}(F_s)$ — алгебраическая решётка.

Обозначим через $\mathfrak{M}_s(\mathbb{Q})$ множество всех рациональных квадратных матриц порядка s, а через $\mathfrak{M}_s^*(\mathbb{Q})$ — подмножество невырожденных матриц.

Лемма 3. *Для любой рациональной, невырожденной матрицы $M \in \mathfrak{M}_s^*(\mathbb{Q})$ и алгебраической решётки $\Lambda \in \mathbb{A}(F_s)$ решётка $\Lambda_1 = M\Lambda$ — алгебраическая: $\Lambda_1 \in \mathbb{A}(F_s)$.*

Рассмотрим произвольную решётку $\Lambda \in PR_s$. Согласно Б. Н. Делоне и Д. К. Фаддееву [1] *решётка Λ и решётка Λ_1 рационально связаны, если $\Lambda_1 = M \cdot \Lambda$, $\Lambda = M^{-1} \cdot \Lambda_1$ и $M \in \mathfrak{M}_s^*(\mathbb{Q})$.* Множество всех решёток Λ_1 рационально связанных с решёткой Λ обозначим через $\mathfrak{Q}(\Lambda)$.

Дословно повторяя доказательство основной теоремы можно доказать следующее утверждение.

Теорема 2. *Для любой решётки $\Lambda \in PR_s$ множество всех решёток рационально связанных с решёткой Λ всюду плотно в PR_s.*

Другими словами: $\mathfrak{Q}(\Lambda)$ всюду плотно в PR_s.

Пусть $(\alpha_1, \ldots, \alpha_s) \in \mathbb{R}^s$ — произвольная точка общего положения, то есть $\alpha_j \neq 0$ $(1 \leqslant j \leqslant s)$. Рассмотрим рациональное s-мерное арифметическое пространство $\mathbb{Q}(\alpha_1, \ldots, \alpha_s) \subset \subset \mathbb{R}^s$ над полем рациональных чисел $\mathbb{Q}$, которое определяется равенством

$$\mathbb{Q}(\alpha_1, \ldots, \alpha_s) = \{(m_1\alpha_1, \ldots, m_s\alpha_s) | \vec{m} = (m_1, \ldots, m_s) \in \mathbb{Q}^s\}.$$

Нетрудно видеть, что справедлива следующая теорема

Теорема 3. *Рациональное s-мерное арифметическое пространство $\mathbb{Q}(\alpha_1, \ldots, \alpha_s)$ всюду плотно в s-мерном вещественном арифметическом пространстве $\mathbb{R}^s$.*

Понятие гладкого многообразия является одним из основных понятий современной математики. Это формализации объекта, независимо возникшего во многих математических дисциплинах, а также в приложениях математики — математической физике, механике и других науках. Практика показывает, что освоение гладких многообразий связано, для многих людей с трудностями, проистекающими из сложности формального определения.

Исследования многообразий были начаты во второй половине XIX века, они естественно возникли при изучении дифференциальной геометрии и теории групп Ли. Тем не менее, первые точные определения были сделаны только в 30-х годах XX века.

Целью нашего исследования является построение структуры гладкого многообразия на пространстве решеток и пространстве сдвинутых решеток.

Задачами исследования является: рассмотрение метрического пространства решёток и метрического пространства сдвинутых решёток как гладких многообразий;

изучение важнейших функций на пространстве решёток таких как: норменный минимум, гиперболический параметр решёток, гиперболическая дзета-функция решёток как функций на гладком многообразии;

изучение дифференциальных свойств этих функций.

Одно из направлений исследований связано с осмыслением результатов Б. Ф. Скубенко из работ [1]–[4] с точки зрения свойств гладкого многообразия решёток.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Б. Н. Делоне, Д. К. Фаддеев Теория иррациональностей третьей степени // Тр. Матем. ин-та им. В. А. Стеклова, 1940. Т. 11. С. 3–340.

2. Касселс Д. Введение в геометрию чисел. М.: Мир, 1965. 422 с.

3. Б. Ф. Скубенко К совместным приближениям алгебраических иррациональностей // Целочисленные решетки и конечные линейные группы, Зап. научн. сем. ЛОМИ, 116, Изд-во «Наука», Ленинград. отд., Л., 1982, С. 142–154; J. Soviet Math., 26:3 (1984), 1922–1930.

Секция 9. История математики

УДК 372.851

Основы формирования у учащихся исследовательских умений при обучении решению задач в процессе изучения математики

М. М. Абдуразаков (Россия, г. Москва)
e-mail: abdurazakov@inbox.ru
Д. Д. Гаджиев (США, Форт-Пирс)
Индиан Ривер Колледж, Государственный Университет штата Флорида
e-mail: dgadjiev@irsc.edu
Г. В. Токмазов (Россия, Новороссийск)
«Государственный Морской Университет имени адмирала Ф.Ф. Ушакова»
e-mail: tokmazov@mail.ru

Basics of formation of students ' research skills in teaching problem solving in the study of mathematics

M. M. Abdurazakov (Russia, Moscow)
e-mail: abdurazakov@inbox.ru
D. D. Gadjiev (United States, Fort Pierce)
Indian river College, Florida State University
e-mail: dgadjiev@irsc.edu
G. V. Tokmazov (Russia, Novorossiysk)
Admiral Ushakov State Maritime University
e-mail: tokmazov@mail.ru

Введение

В последние десятилетия значением математики в общей системе знаний значительно возросло, с одной стороны, а, с другой стороны, причина происходящих в сфере российского образования изменений заключается в том, что математические методы и модели проникают в разнообразные сферы жизнедеятельности людей, знания основ (и не только) математики все больше востребованы в жизнедеятельности.

В полноте раскрыть различные тенденции развития школьного математического образования за последние десятилетие не представляется возможным из-за ограничений требований к формату статьи. Однако анализ исследований последних лет [3, 6, 8, 9] позволил выделить три основных направления: развитие математического мышления, организация учебно-познавательной и исследовательской деятельности школьников [1, 2, 5,]; изучение путей реализации межпредметных связей математики с другими учебными дисциплинами (физикой, биологией, химией, экономикой и т.д.); включение практико-ориентированных задач в отдельные разделы школьного курса математики. Последнее для нас имеет важное значение, поскольку речь идет решение задач при обучении математике.

В государственные стандарты, как основного, так и общего образования включены требования формирования методологических знаний, исследовательских умений. К примеру, формирование исследовательских умений при решении математических задач динамического характера "может послужить основой деятельности по уточнению и упрочению знаний одними учащимися класса, по упрочению знаний и расширению области их применения – другими, по углублению знаний – третьими" [7, с.40].

В национальной образовательной инициативе «Наша новая школа» подчеркнута необходимость исследовательского обучения, «чтобы научиться изобретать, понимать и осваивать новое, выражать собственные мысли, принимать решения» [4]. Однако анализ сложившейся в современном среднем образовании ситуации показывает, что многие учителя испытывают затруднения при организации исследовательской деятельности учащихся (ИДУ).

Результаты государственной итоговой аттестации учащихся 9-х и 11-х классов свидетельствуют о низком уровне сформированности умений использовать математические знания и методы для решения практико-ориентированных задач. Половина школьников до конца не усваивает материал по математике, около половины учеников до конца не усваивают школьную программу по математике. К такому выводу пришли исследователи электронной базы олимпиад «Знаника». Они проанализировали почти 300 тыс. заданий по математике, выполненных 13 тыс. учеников 5?9 классов из 62 регионов России, то есть обнаруживается явный пробел в области базовых математических знаний для профильных классов. Среди основных причин проблем с школьной программой эксперты называют недостаточное внимание обучению школьников к решению практико-ориентированных задач.

Не секрет, что крайне мало необходимых современных учебно-методических пособий для школьников, содержание которых ориентировано на формирование исследовательских умений при обучении математике на основной и старшей ступенях общего образования. Недостаточно разработаны методические аспекты обучения школьников решению задач динамического характера с различной вариативностью заданий и нет смысловой и методической ясности в вопросе о том, в какой форме и объеме практико-ориентированные задачи целесообразно включить в обязательную программу школьного курса математики.

Решение математических задач является одной из главных составляющих содержания учебного предмета математики, который включает также и теоретический материал. Но и теоретический материал обучающиеся усваивают в процессе решения задач. Таким образом, решение задач является основной деятельностью при обучении математике и необходимость, в этой связи, обеспечения перехода от предметно-ориентированного обучения к практико-ориентированному, реализующему системно-деятельностный подход как требование ФГОС [10, 11], предполагающий подготовку школьника к профессиональной и общественной жизни, мы считаем актуальной.

В нашем исследовании под математической задачей будем называть «практико-ориентированные задачи, направленные на формирование элементов исследовательских умений с различной вариативностью заданий», учитывая их целевое назначение в процессе обучения.

При разработке методики формирования элементов исследовательской деятельности обучающихся в процессе решения задач по математике в старших классах средней школы, следует, прежде всего, указать, что одной из основных проблем при этом является отбор по каждой теме соответствующих типов задач, наиболее целесообразных с точки зрения формирования исследовательских умений и, вместе с тем, доступных обучающимся.

При решении задач с целью эффективности управления учебно-познавательной деятельностью обучающихся необходимо осуществлять пооперационная обратная связь, переходящая в промежуточную обратную связь и связь по конечному результату. Не менее важны и указания на то, что в обучении математике ученик последовательно изучает одну дидактическую единицу материала за другой.

Оптимальность процесса формирования элементов исследовательской деятельности осуществляется за счет повышения эффективности усвоения его по времени, что достигается за счет приемов совместного усвоения обучающимися учебного материала, связанного с усвоением содержания, например, формул полной вероятности и Байеса.

Основу задач динамического характера составляют серии взаимосвязанных проблем, основанных на обобщенных связях, которые раскрывают в диалектическом единстве теоретических и практических знаний, с внутрипредметными и межпредметными связями, способствующие формированию элементов исследовательской деятельности обучающихся. Такие задачи связаны с определенной спецификой каждого из четырех этапов решения задачи: анализ, поиск способа решения, решение задачи и анализ задачи после его решения.

Работа по составлению задач динамического характера дает большой простор творчеству учителя, при реализации методики формирования элементов исследовательской деятельности учащихся. Он должен видеть динамику процесса решения любой предлагаемой задачи, а стало быть предварительная "заготовка" к уроку, требующая в первое время значительного времени, не должна его смущать.

Выводы

В процессе работы над задачей динамического характера появляется возможность разобрать различные способы решения ее, увидеть "изюминки" в ее решении, рассмотреть частные случаи, вытекающие из решения задачи, представляющие интерес, а также многое другое, являющееся творческим материалом для учащихся.

Необходимо отметить, что в зависимости от контингента обучающихся при дифференцируемом подходе к обучению можно предлагаемые задачи разбить на три группы, установить естественную сложность и трудность задач для каждой из них с учетом следующих принципиальных условий такого отбора:

Первый этап. Выбранная задача анализируется с точки зрения ее доступности для самостоятельного решения обучающимися с учетом условий:

- наблюдаемый математический объект при решении задач должен быть посильным и принятым учащимися;

- возможные гипотезы для обучающихся должны быть сравнительно простым, достаточно очевидными и опираться на имеющийся у них запас знаний и умений;

- каждая задача должна носить свой целенаправленный точно определенный характер, исходя из особенностей подросткового возраста.

Второй этап. На основе проведенного анализа первоначальное задание детализируется. Обучающиеся не сразу приступают к нему, а сначала они должны рассмотреть серию подготовительных заданий, которые представляют собой различные формы представления одной и той же выбранной задачи первого этапа. На этом этапе важно, чтобы методы проверки гипотез, возникших при решении задач, были достаточно простыми, доступными и состояли частично из знакомых учащимся приемов, с которыми они встречались ранее, чтобы доказательство проблемы можно было бы вести различными способами;

Третий этап. Обучающиеся приступают к решению, выбрав любую из предложенных форм предъявления по своему усмотрению, в процессе решения которого они должны увидеть к из форм предъявления можно свести все остальные:

- деланные выводы при решении задач должны находиться в ряду известных обучающимся теоретических положений;

- по полученным выводам, сделанным общими усилиями учеников или с помощью учителя, целесообразно сделать заключение по выяснению их сферы практического применения. Если с этим обучающиеся не справляются, то целесообразно еще более легализировать задание путем наводящих вопросов, как это сделано ниже в четвертом этапе.

Четвертый этап. Наводящие вопросы должны учитывать разную степень подготовленности обучающихся, что предполагает предусмотреть несколько вариантов вопросов:

- вариант A - для менее подготовленных обучающихся, которые нуждаются в подробных подсказках;

- вариант B - для обучающихся, предпочитающих получить помощь, оставляющую простор для собственного творчества;

- вариант C - для обучающихся, нуждающихся не в помощи, а в раскрытии перспектив применения тех методов, которые использовались в рассмотренном задании.

Обучающимся предлагается задача в трех различных формах предъявления, с различной вариативностью заданий, обеспечивающих реализацию принципа убывания помощи обучающемуся в процессе его учебной деятельности. Вариативные вопросы служат направлением к действию, к посильному поиску, которые адекватны их возможностям, помогает им понять суть учебной деятельности.

Заключение

Вариативные задачи охватывают все 4 этапа решения задачи. Динамическая задача может формироваться в двух направлениях: от основного задания - к серии взаимосвязанных проблем и от цепочки взаимосвязанных проблем - к формулировке основного задания.

Проблемы внутри каждой задачи расположены в порядке возрастания сложности и трудности. В ряде задач использовался принцип "наведения открытия" того или иного математического факта.

Изложенное выше требования к построению системы задач могут воплощаться в любом учебном материале, который представляет естественное поле деятельности обучающегося, вызывает у них определенный интерес.

Сказанное выше позволяет составить систему задач, которая ориентирована на формирование универсальных умственных действий при освоении практические любого учебного содержания.

Задача с одной формой предъявления

Задача №1.

Условие: Имеется две урны. В первой урне 6 белых и 4 черных шара, во второй - 8 белых и 2 черных шара. Из первой урны наугад выбирается шар и перекладывается во вторую урну. После из второй урны наудачу выбирается шар.

Задание: Определить вероятность извлечения белого шара из второй урны.

Решение

Пусть A – событие, означающее, что извлекли белый шар из урны в выборе белого шара.

Событие A наступает совместно с одной из *гипотез*:

H_1 – событие, означающее, что переложили белый шар из первой урны во вторую;

H_2 – событие, означающее, что переложили белый шар из первой урны во вторую.

Исходя из условий задачи, необходимо определить вероятность гипотез $P(H_1)$, $P(H_2)$, $P(A/H_1)$, $P(A/H_2)$ по формулам непосредственного подсчета вероятностей, а затем подсчитаем $P(A)$.

Результаты оформим следующим образом:

$$P\left(H_1\right) = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}; P\left(\frac{A}{H_1}\right) = \frac{9}{11}$$

$$P\left(H_2\right) = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}; P\left(\frac{A}{H_1}\right) = \frac{8}{11}$$

По формуле полной вероятности находим вероятность события A:

$$P\left(A\right) = P\left(H_1\right)\ P\left(\frac{A}{H_1}\right) + P\left(H_2\right)\ P\left(\frac{A}{H_2}\right) = \frac{3}{5}\cdot\frac{9}{11} + \frac{2}{5}\cdot\frac{8}{11} = \frac{43}{55}$$

Ответ: $\frac{43}{55}$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гальперин П.Я. Развитие исследований по формированию умственных действий // Психологическая наука в СССР. – М., 1959. – Т.1. – С.441-469.

2. Гурова Л.Л. Психологический анализ решения задач. — Воронеж: Изд-во Воронежского ун-та, 1976. — 314 с.
3. Крупич В.И. Теоретические основы обучения решению школьных математических задач: Дисс. ... доктора пед. наук. — М., 1992. — 395 с.
4. Национальная образовательная инициатива «Наша новая школа»

   http://news.kremlin.ru/news/6683 (дата обращения 14.04.2011)
5. Талызина Н.Ф. Управление процессом усвоения знаний: Психологические основы. – 2-е изд., доп. и испр. – М.: МГУ, 1984. – 344 с.
6. Терешин Н.А. Прикладная направленность школьного курса математики: Кн. для учителя. М.: Просвещение, 2014. 96 с.
7. Технология обучения в классах с малой наполняемостью сельских школ: из опыта работы учителей Нижегородской области: сб. методических статей / Научный ред. М.И. Зайкин. –Арзамас: Н.-Новгород, 1995. – 85 с.
8. Токмазов Г.В. Задачи динамического характера // Математика в школе. — 1994, № 5. — С. 9 — 12.
9. Токмазов Г.В. Базисные условия формирования исследовательских умений в процессе изучения математики. Компетентность специалиста. Высшее образование сегодня. № 7. 2015. –С. 11-15.
10. Федеральный государственный образовательный стандарт основного общего образования [Электронный ресурс]. URL: https://fgos.ru/fgos_ru_osnov.pdf.pdf_(дата обращения: 08.04.2019).
11. Федеральный государственный образовательный стандарт среднего общего образования [Электронный ресурс]. URL: fgos_ru_sred.pdf.pdf (дата обращения: 08.04.2019).
12. Шамова Т.И. Активизация учения школьников. – М.: Педагогика, 1982. – 203 с.

УДК 51(091)

Влияние Дж. Сильвестра и А. Кэли на развитие комбинаторики

В. Г. Алябьева (Россия, г. Пермь)
Пермский государственный национальный исследовательский университет
e-mail: vgalyabeva@gmail.com

Influence of J. Sylvester and A. Cayley on development of combinatorics

V. G. Alaybieva (Russia, Perm)
Perm State University
e-mail: vgalyabeva@gmail.com

Выдающиея английские математики XIX в. Дж. Сильвестр (James Joseph Sylvester, 1821–1897) и А. Кэли (Arthur Cayley, 1821–1895) известны своими результатами в различных разделах математики. Кэли — алгебраист, аналитик и геометр. Важнейшие из его работ относятся к алгебре матриц, неевклидовой и n-мерной геометрии. Сильвестр известен своими работами по теории инвариантов, теории чисел и комбинаторике.

Искусство комбинаторики в широком смысле Лейбниц [1] понимал как Искусство Изобретения. Сильвестр также высоко оценивал значимость комбинаторного искусства [2]. Исследованию комбинаторных проблем Сильвестр посвятил несколько статей, начиная со статьи 1844 г. «Элементарные исследования в анализе комбинаторных агрегатов» [3], в которой он обсудил правила образования различных наборов из элементов данного n-множества. Сильвестр подчёркивал, что решаемые им проблемы относятся к новой математической дисциплине, предметом которой является расположение элементов друг относительно друга. О желании построить такую новую математическую дисциплину много писал Лейбниц. Он предлагал назвать её *analysis situs*.

В своей статье Сильвестр писал: «Число, положение, комбинация — представляются мне тремя пересекающимися, но различными сферами мысли, к которым имеют отношение все математические идеи». Сильвестр строит всевозможные системы пар, троек, иных комбинаций из элементов данного множества, удовлетворяющие различным ограничениям на вхождение элементов, формулирует правила построения таких систем, вводит многочисленные оригинальные термины. Так, термином *syntheme* он именует «любой агрегат комбинаций, в котором все элементы данного множества появляются один и только один раз». Полный набор независимых *syntheme*, содержащий все пары элементов данного множества, он называет *total of dual syntheme*. Аналогично строятся полные системы независимых наборов троек, четвёрок и т.д. Для множества из шести элементов *total of dual syntheme* содержит следующие пять пар развбиений на пары: ((a, b), (c, d), (e, f)), ((a, d),(c, f), (e,b)), ((a, c), (d,e), (f, b)), ((a,f), (b,d), (c,e)), ((a,e), (d, f), (b, c)).

К идеям, изложенным в статье 1844 г., Сильвестр вернулся в статьях 1861 г. В статье «Заметка об исторических источниках несимметричных шестизначных функций от шести переменных» [4] он писал: «Я дал общее название *Тактика* математической науке, сферой которой является порядок подобно тому, как сферой других наук является число и пространство». Значимость новой науки он оценил так: «Тактика представляется мне основным стержнем, из которого выводятся все остальные (ветви математики), включая даже арифметику. Ключ к успеху в решении проблем этой зарождающейся науки необходимо искать в построении меткой и выразительной нотации и в открытии языка, силой которого ум может производить самые сложные операции и превратить их в легко передаваемые мысли» [5]. Учению о тактике Сильвестр предрекал большое будущее.

Артур Кэли разделял взгляды Сильвестра на тактику. Практический вклад самого Кэли в развитие комбинаторики достаточно велик. Он исследовал магические и латинские квадраты, ориентированные графы, системы троек. в 1864 г. в статье «О понятиях и границах алгебры» [6] Кэли предлагал различать в алгебре два вида операций: тактические и логистические. *Тактическая* операция связана с расположением множества вещей некоторым образом, *логистическая* (арифметическая) операция представляет собой вычисление для получения в результате числа. Каждая алгебраическая теорема основывается в конечном счёте на тактических основаниях. Однако нельзя абсолютно резко разделять тактические и логистические операции. Во всякой серии логистических операций есть тактический элемент, во многих тактических операциях, например, при разбиении чисел, есть кое-что логистическое. Таким образом, по мысли Кэли, *Алгебра имеет два больших раздела: Тактику и Логистику.*

Термины «тактический», «тактическая операция», позднее — «тактическая конфигурация» — прижились и используются до сих пор. В Европе чаще используется термин «комбинаторная конфигурация». Термин «Тактическая конфигурация» ввёл в 1896 г. американский математик Элиаким Гастингс Мур (Eliakim Hastings Moore, 1862–1932) в статье «Tactical memoranda» [7]. Пусть задано n множеств, для элементов которых задано отношение инцидентности. Эти множества образуют тактическую конфигурацию, когда для любых двух множеств g и h кажый элемент из множества g инцидентен с одним и тем же числом элементов из множества h. Конфигурация нвзывается геометрической, если для элементов принадлежащих ей множеств можно ввести геометрическую терминологию. В своей статье Мур рассматривает многочисленные примеры тактических систем и доказывает их свойства.

Обобщением понятия «тактическая конфигурация» в XX в. явилось понятие блок-схемы. В 1935–1940 гг. в статьях Р. Фишера и в работах его сотрудников появился сначала термин *block arrangement*, затем — *block design*. Широкова С. А. в 1966 г. предложила перевести на русский язык термин *block design* как «блок-схема». Этот перевод в русской литературе утвердился.

Под блок-схемой понимается система, состоящая из подмножеств конечного множества, удовлетворяющих некоторым условиям, относящимся к частоте появления пар элементов в подмножествах системы. Блок-схема задаётся парой множеств $(V,\ B)$. Элементы множества V называются *элементами блок-схемы*, а элементы множества B — её *блоками*. Если все блоки состоят из одинакового количества k элементов, если каждый элемент входит в одно и то же число r блоков и если число блоков, которым принадлежит любая пара элементов, постоянно, то схема называется *уравновешенной неполной*. Слово «уравновешенная» характеризует одинаковую частоту появления элементов и пар элементов, а слово «неполный» служит указанием на то, что, вообще говоря, не все k-элементные подмножества входят в схему.

Частным видом тактических конфигураций являются конечные проективные и аффинные геометрии, которые были аксиоматически определены в конце XIX — начале XX в.

Теория разбиений. Разбиением натуральных чисел на суммы занимался Лейбниц. Эйлер сделал в этой области глубокие открытия. В дальней разработке этой теории активное участие принимали Гаусс, Лагранж, Лежандр, Литлвуд, Рамануджан, Сильвестр, Харди, Шур, Якоби. Сильвестр последовательно использовал графический метод для решения задач развиения чисел.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Алябьева В. Г. Математика Петербурга в исторической ретроспективе и в лицах // Чебышевский сборник. 2018. Том 19, № 2. С. 7-14.

2. Алябьева В. Г. Комбинаторно-геометрические конфигурации и их группы автоморфизмов // XV Международная конференция «Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы и приложения», посвященная столетию со дня рождения доктора физико-математических наук, профессора Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова Коробова Николая Михайловича.: тезисы докладов международной конференции (Тула, 28-31 мая 2018 г.) — Тула, 2018. С. 314-317.

3. Sylvester J. J. Elementary researches in the analysis of combinatorial aggregation // The London, Edinburgh, and Dublin magazine and journal of science. 1844. V. 24. P. 285 - 296.

4. Sylvester J. J. Note on the historical origin of unsymmetrical Six valued Function of six Letters // Philosophical magazine. 1861. Ser. 4. V. 21. № 14. P. 369-377.

5. Sylvester J. J. Concluding paper on Tactic // Philosophical magazine. 1861. Ser. 4. V. 22. P. 45-54.

6. Cayley A. On the notion and boundaries of algebra // Quarterly journal of pure and applied mathematics. 1864. V. 6. P. 382-384.

7. Moore E. H. Tactical memoranda. I - III // American journal of mathematics. 1896. V. 18. P. 264-303.

8. Sylvester J. J., Franklin F. A constructive theory of partitions, arranged in the three acts, an interact and exodion // American journal of mathematics. 1882. V. 5. № 1. P. 231 - 330.

—————————————————————————————————

УДК 51(091)

Краткая история ПИ-теоремы

П. Н. Антонюк (Россия, г. Москва)
МГУ им. М. В. Ломоносова
e-mail: pavera@bk.ru

A brief history of the pi-theorem

P. N. Antonyuk (Russia, Moscow)
Lomonosov Moscow State University
e-mail: pavera@bk.ru

Геометрическое подобие рассматривали Евклид и другие древнегреческие математики. Обобщением геометрического подобия является физическое подобие. Подобие в физике впервые стали рассматривать Галилео Галилей («Беседы и математические доказательства, касающиеся двух новых наук») и Исаак Ньютон («Математические начала натуральной философии»). Жан-Батист Жозеф Фурье в 1822 году впервые сопоставил физическим величинам их размерности («Аналитическая теория тепла»). А в 1878 году, используя размерности Фурье, Жозеф Луи Франсуа Бертран публикует статью, в которой появляется теорема, объясняющая физическое подобие Галилея и Ньютона. В начале XX века эту теорему стали называть пи-теоремой. Пи – греческая буква, обозначающая знак произведения, введенный Гауссом в 1812 году. Пи-теорема – это теорема о произведениях.

На рубеже XIX и XX веков появляется много работ физиков, посвященных пи- теореме. Подводя итог многочисленным публикациям, в 1922 году Перси Уильямс Бриджмен публикует книгу «Анализ размерностей», в которой подробно рассматривает пи-теорему и ее многочисленные приложения в физике. В 1946 году Бриджмен становится лауреатом Нобелевской премии по физике. Позже пи-теореме посвящают свои работы такие известные ученые как Леонид Иванович Седов, Андрей Николаевич Колмогоров, Николай Григорьевич Чеботарев, Гаррет Биркгоф и Хасслер Уитни.

Сегодня пи-теорема – это важный инструмент решения многих сложных задач математической физики. Академик РАН Александр Иванович Леонтьев недавно сказал: «Пи-теорема – одно из величайших достижений человеческого разума».

—————————————————————————————————

УДК 51, 539.3, 622.016

Труды Гурия Васильевича Колосова и применение метода Колосова—Мусхелишвили для решения задач теории упругости

С. В. Анциферов (Россия, Тула)
Тульский государственный университет
e-mail: antsser@mail.ru
И. И. Демидова (Россия, Санкт-Петербург)
Санкт-Петербургский государственный университет
e-mail: maria_ib@mail.ru
А. С. Саммаль (Россия, Тула)
Тульский государственный университет
e-mail: assammal@mail.ru

The works of Gury Vasilyevich Kolosov and application of the method Kolosov—Muskhelishvili for the solution of problems of elasticity

S. V. Antsiferov (Russia, Tula)
Tula state University
e-mail: antsser@mail.ru
I. I. Demidova (Russia, S.-Petersburg)
St. Petersburg State University
e-mail: maria_ib@mail.ru
A. S. Sammal (Russia, Tula)
Tula state University
e-mail: assammal@mail.ru

Выдающийся русский ученый Гурий Васильевич Колосов (1867 - 1936) высказал идею о том, что математический метод исследования приложим к изучению всех явлений, окружающих человека. Он имел прекрасное образование, получив в 1889 году диплом первой степени за выпускную работу «О кручении призм» при окончании обучения в Петербургском университете.

С 1902 года Колосов Г.В. работал приват-доцентом в Юрьевском (Дерптском) университете, в мае 1903 года защитил магистерскую диссертацию «О некоторых видоизменениях начала Гамильтона в применении к решению вопросов механики твердого тела».

Докторскую диссертацию «Об одном приложении теории функции комплексной переменной к плоской задаче теории упругости» защитил в 1909 году. С 1913 года и до конца жизни Гурий Васильевич являлся заведующим кафедрами теоретической механики Петербургского Электротехнического института и Петроградского (Ленинградского) университета. В 1931 году Колосов Г.В. за свои выдающиеся заслуги был избран членом-корреспондентом АН СССР.

Труды Колосова Г.В. были посвящены решению задач механики деформируемого твердого тела и, начиная с 1908 г., теории упругости. По мнению Мусхелишвили Н.И., результаты, полученные Колосовым Г.В. по развитию методов решения задач теории упругости, имеют гораздо большее значение, чем его работы в области динамики твердого тела.

Теорией упругости Колосов Г.В. занялся ввиду важности задач, возникающих при развитии технического прогресса. Живо интересуясь вопросами техники, Колосов Г.В. разработал ряд чисто теоретических положений, которые могут иметь и уже имеют в настоящее время громадное практическое применение.

В работе [6] Макеев Н. Н. привел краткую справку применения методов ТФКП в различных областях механики. Колосов Г.В. расширил круг исследований, проводимых методами ТФКП. С точки зрения Черепанова Г.П. [11], исследования гениального Колосова связали "важные практические проблемы механики материалов с мощным математическим аппаратом теории функций комплексного переменного, позволившим найти эффективные решения практических проблем". Полученные ученым результаты относятся, в основном, к плоской задаче теории упругости. Колосовым Г.В. было обосновано получение решения задачи с применением двух независимых друг от друга аналитических функций комплексного переменного, что дало возможность применения к плоской задаче хорошо разработанной теории аналитических функций.

Колосов Г.В. не ограничился нахождением общего выражения решения задачи, им был предложен ряд методов для решения краевых задач, которые и представляли наибольший интерес. Результаты, полученные Колосовым Г.В., опередили зарубежную науку практически на 50 лет, что является почти беспрецедентным случаем в настоящее время.

Гурий Васильевич опубликовал работы по аналитической механике, по математической физике, по теории упругости и по применению ТФКП в теории упругости [4]. Колосов Г.В. руководил научной работой студентов и был убежден в том, что «студента необходимо в науке возможно скорее выводить на позиции туда, где стреляют» [8].

Практически неизвестными были его работы по биомеханике [3]. Во введении своей монографии [4], вышедшей в 1935 году и посвященной применению ТФКП в теории упругости, Колосов Г.В. подчеркнул значимость закона Мейера - Вольфа о росте живых конструкций по линиям главных напряжений - «с линиями главных напряжений мы часто встречаемся в природе при вырабатывании каким-нибудь организмом или растением наиболее прочного материала». В этой монографии автор привел картины изостат (линии равных напряжений) в кости [4]. Он считал, что его способ определения напряжённого состояния возможно применить и для биоконструкций.

В 80-х годах прошлого века в Тульском государственном университете (ТулГУ) образовалась и успешно функционирует в настоящее время научная школа геомехаников, работы которых посвящены развитию теории и разработке новых аналитических методов расчета конструкций подземных сооружений. Результатом исследований основоположников этой научной школы заслуженных деятелей науки и техники РФ докт. техн. наук, проф. Фотиевой Н.Н. и докт. техн. наук, проф. Булычева Н.С. и их учеников стал целый ряд строгих аналитических методов расчета конструкций обделок (крепи) тоннелей (горных выработок) транспортного, гидротехнического, коммунального назначения [2, 10], разработанных на единой научной и методологической основах. В основу этих методов расчета положены современные достижения геомеханики, механики подземных сооружений, механики сплошной среды, полученные не только в России, но и за рубежом [1, 9], а также идеи, методы и решения, автором которых является Колосов Г.В., а впоследствии существенно развитые Мусхелишвили Н.И. и содержащиеся в работах [4, 5, 7].

Следуя основному принципу механики подземных сооружений [2] о совместной работе обделки и окружающего массива как элементов единой деформируемой системы, удалось реализовать самые различные расчетные схемы для расчета конструкций подземных сооружений на действие различных видов нагрузок, например, вызванных собственным весом пород, тектоническими силами или гидростатическим давлением грунтовых вод, в качестве нагрузки выступает вес зданий или сооружений на поверхности, вес массивного оборудования или транспортных средств, расположенных внутри тоннеля, воздействия сейсмических волн при землетрясениях и др.

Это позволило выполнить постановки новых задач теории упругости, учитывающие влияние различных технологических и конструктивных факторов на напряженно-деформированное состояние элементов системы «массив пород - подземное сооружение», и находить аналитические решения этих задач с использованием математического аппарата теории функций комплексного переменного и формул Колосова-Мусхелишвили. Полученные решения были положены в основу методов расчета большинства видов конструкций обделок, включая замкнутые монолитные бетонные и сборные железобетонные, набрызгбетонные и анкерные, многослойные и комбинированные обделки кругового и произвольного поперечного сечения как для одиночных, так и для близко расположенных параллельных тоннелей глубокого и мелкого заложения.

Решения задач получены с использованием представлений комплексных потенциалов, характеризующих напряженно-деформированное состояние областей, моделирующих обделки и окружающий массив пород, в виде рядов Лорана, свойств интегралов типа Коши, рядов Фурье, конформного отображения, полиномов Фабера, аналитического продолжения комплексных потенциалов через прямолинейную границу для полубесконечной среды [1, 5, 7, 9]. Методы расчета конструкций подземных сооружений, базирующиеся на полученных решениях, реализованы в виде соответствующего компьютерного программного обеспечения.

Разработанные методы использовались ведущими проектными и научно-исследовательскими организациями страны при обосновании возможности строительства и практическом проектировании большого числа подземных объектов, в том числе уникальных, сооружаемых в сложнейших горно-геологических условиях как в России, так и в странах ближнего и дальнего зарубежья - тоннели Байкало-Амурской магистрали, Санкт-Петербургского метрополитена, подземные сооружения Рогунской, Байпазинской и Днестровской ГЭС, транспортные тоннели в Крыму и Сочи, коммуникационные тоннели в Воронеже, Рязани, Чебоксарах, вертикальные стволы шахт Усть-Яйвинского, Котельнического и Нивенского месторождений калийных и магниевых солей, комплекс подземных сооружений гидроузла Мрича на р. Сераю (Центральная Ява), ирригационные тоннели водохранилищ Хантуман и Северный Кебир в Сирии, железнодорожные тоннели Мале Леднице и Полом в Чехии и др.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Анциферов С.В. Метод расчета многослойных обделок параллельных тоннелей кругового поперечного сечения мелкого заложения: монография/ Тула: Изд-во ТулГУ, 2014. 298 с.

2. Булычев Н.С. Механика подземных сооружений/ Учеб. для вузов. - 2-е изд., перераб. и доп. - М.: Недра,1994. 382 с.

3. Демидова И. И. Биомеханическое направление в трудах Г.В. Колосова// Вестник Елецкого государственного университета им. И.А. Бунина. Серия «Педагогика». Елец, 2017. С.23 - 28.

4. Колосов Г.В. Применение комплексной переменной к теории упругости. Л. - М., 1935. 224 с.

5. Макеев Н. Н. Гурий Васильевич Колосов (к 145-летию со дня рождения)// Вестник Пермского университета. 2013. Вып.3(22). Мат. Мех. Информ. С. 119 - 129.

6. Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1969. 700 с.

7. Мусхелишвили Н.И. Гурий Васильевич Колосов. Некролог//Успехи математических наук. 1938. С. 279 - 281

8. Саммаль А.С., Анциферов С.В., Деев П.В. Аналитические методы расчета подземных сооружений: монография/ Тула: Изд-во ТулГУ, 2013. 111 с.

9. Фотиева Н.Н., Козлов А.Н. Расчет крепи параллельных выработок в сейсмических районах. М.: Недра, 1992. 231 с.

10. Черепанов Г. П. Г.В. Колосов - русский первопроходец. [Электронный ресурс], Режим доступа http://vmkiso.narod.ru/kolos.htm

---

УДК 16.167

Есть ли закономерности развития математики?

Н. Г. Баранец (Россия, г. Ульяновск)
Ульяновский государственный университет
e-mail: n_baranetz@mail.ru
А. Б. Верёвкин (Россия, г. Ульяновск)
Ульяновский государственный университет
e-mail: a_verevkin@mail.ru

Is there any objective laws of development of mathematics?

N. G. Baranetz (Russian Federation, Ulyanovsk)
Ulyanovsk State University
e-mail: n_baranetz@mail.ru
A. B. Verevkin (Russian Federation, Ulyanovsk)
Ulyanovsk State University
e-mail: a_verevkin@mail.ru

Есть ли закономерности в развитии математических идей и дисциплин? Вопрос может показаться устаревшим, если вспомнить, что о развитии науки много рассуждали в советском марксизме. Не оспаривая содержательность нижеприведённого мнения, отметим, что на практике историки математики редко держались заявленных идей, особенно в спорных темах, требующих исторического и историографического расследования, с учётом логики накопления приёмов и методов решения математических проблем: "Маркс показал, что новая математическая теория может возникнуть и развиться, когда внутри существующих математических теорий созданы для этого необходимые предпосылки. Она "становится на собственные ноги", когда её основные понятия и методы приобретают только им присущие особенности, которыми не обладали их эмбриональные формы в исходных математических теориях" [1].

Для математической работы не важно – признаёт или нет математик наличие внутренних закономерностей в развитии науки. Рефлексия об этом напрямую не связана с математическими поисками и, как правило, внешне детерминирована (например, идеологизацией жизни научного сообщества) или порождена философско-математическими дискуссиями.

Из советских математиков о закономерностях развития математики отчасти определённо высказались А. Н. Колмогоров и А. Д. Александров. Они активно участвовали в написании идейно идентифицирующих энциклопедических статей и представительских докладов на конференциях по философии математики и естествознания.

Рассмотрим суждения А. Д. Александрова из коллективной монографии "Математика, её содержание, метод и значение" (1956). Часть отмеченных им закономерностей науки определены идеологическим контекстом обсуждаемого вопроса, заданным обретёнными математическими рукописями К. Маркса, но другие – фиксируют объективные причинные зависимости в логике развития математических идей.

Напомним идеологические закономерности, выделенные Александровым. Новые теории включают в себя предшествующие достижения, уточняя, дополняя и обобщая их, но развитие математики ещё “включает существенные, качественные изменения”. Накопление результатов внутри математики ведёт к новым абстракциям, к новым обобщающим понятиям. Коренное противоречие в сущности математики является причиной её развития и заключается в том, что математика, имея своим предметом реальные формы и отношения действительности, для изучения их должна совершенно отделиться от их содержания.

Но форм вне содержания не существует. Общественная практика определяет развитие математики в трёх отношениях: ставит перед математикой новые проблемы, стимулирует её развитие в том или ином направлении и даёт критерий истинности её выводов. Потребности производства побуждают развитие математики, а содержание развития определяется её предметом.

Исходя из внутренней логики развития математики, Александров сформулировал закон преемственности идей: “Старые теории, порождая новые и глубокие задачи, как бы перерастают сами себя и требуют тогда для дальнейшего развития новых форм, новых идей. Эти новые формы и идеи для своего возникновения могут требовать иных условий. В античном обществе не было и не могло быть условий для перехода к высшей математике; они наступили с развитием естествознания, в новое время, а это развитие в свою очередь было обусловлено в XVI–XVII вв. новыми потребностями техники и промышленности. . . ” [2]. Закон развития теории – это количественный рост теории необходимо порождающий задачу её лучшего обоснования, систематизации, критического выбора её основ. Математика определяется Александровым как метод количественного выражения законов естествознания, как средство для разработки его теорий.

Заметим интересную подробность, демонстрирующую идеологизацию этой темы. В американском переводе шеститомного издания “Математика, её содержание, метод и значение” были изъяты два параграфа “Сущность математики” и “Законы развития математики”. “Эти разделы опущены в переводе из тех соображений, что в них с позиций диалектического материализма в деталях обсуждаются те взгляды, которые были изложены в предыдущих главах” [3]. Это неудивительно, ведь в англо-американской эпистемологии принято отрицать историзм (в терминологии К. Поппера – историцизм), то есть – общие закономерности развития общества, и, кроме того, в 1950–70-е годы наличествовала идеологическая неприязнь к концепту “революция”, обусловленная опасениями “красной угрозы”.

В “Очерках по вопросам обоснования математики” (1958) и “Очерках по философским вопросам математики” (1969) В. Н. Молодший коснулся внутренних закономерностей развития математики. Он интересовался причинами опережения математикой запросов практики: “в силу объективности законов логики и данных естествознания и математики и благодаря практической направленности их теорий естествознание и математика обладают внутренними возможностями и стимулами развития, т.е. обладают относительной самостоятельностью развития. . . . Каждая новая математическая теория должна быть развита на базе существующих математических теорий и примкнуть к ним” [4]. Внутренними стимулами развития математики, по его мнению, является логика развития принципов, понятий и утверждений математических теорий.

Эти ритуально повторяемые идеи стали настолько общепринятыми, что по их поводу перестали размышлять, и, следовательно, руководствоваться в историко-математических исследованиях. В результате сложилась практика исторической реконструкции в презентистском модернистском ключе.

Какие закономерности развития выделяли историки математики? Как они их учитывали при исторических реконструкциях? Возьмём аспекты трансляции и приращения знания. Что в развитии математики увидят кумулятивист и антикумулятивист? Что они примут как определяющую тенденцию – непрерывное накопление идей или революционные скачки, трансформирующие науку? Как показывает анализ многих историко-математических исследований – реконструкция истории научных идей будет зависеть от такого выбора.

В конце 1960-х – начале 1970-х годов вопрос о преемственности или революционности научного поиска занимал не только советских философов и историков науки. В 1967 году в Праге прошёл международный симпозиум "Научная революция XVII в. и математические и физические науки". На нём гарвардский профессор Б. Коэн заявил, что сдвиги в науке могут оказаться не внезапными и драматическими откровениями, но последовательными преобразованиями, революционное значение которых осознаётся только в последующих завершающих достижениях. Он предложил "формулу" передачи и появления научных идей: "непрерывность – преобразование – новшество".

Его идее возразил советский историк математики И. Б. Погребысский в статье "О непрерывности в эволюции механики в XVII веке". На примере восприятия "Математических начал натуральной философии" Ньютона он показал, что непрерывность в истории науки бывает разная. Он разобрал реакцию учёных современников Ньютона на первую книгу "Законы движения", где изложена общая механика, и на третью книгу "Система мира", обосновывающую небесную механику и закон всемирного тяготения. Небесная механика Ньютона "была поистине революционной". Но она встретила сопротивление многих "передовых учёных", потому что, казалось, возрождала "скрытые качества" схоластической аргументации.

Понадобились десятилетия, чтобы очевидная эффективность новой небесной механики примирила с необъяснимостью физического механизма тяготения. Погребысский пишет, что, вопреки распространённому мнению, до середины XIX века "Начала" Ньютона не считались основой механики, так как обобщения Ньютона, зафиксированные в первой книге "Начал", были "вполне в духе преобладавшего тогда строя мышления".

Различие в непрерывности развития и принятия идей Погребысский иллюстрирует с помощью математической аналогии: "Если ввести некую условную функцию от времени, описывающую интересующие нас здесь исторические процессы, то её можно считать непрерывной в обоих случаях. Но во втором случае это – гладкая функция, а в первом на графике такой функции можно усмотреть угловую точку: изменяется направление развития, так как успех расчётов, основанных на законе всемирного тяготения, заставляет изменить систему физических понятий, лежащих в основе новой науки" [5].

Погребысский обозначил важный вопрос для историка науки – об объективной новизне научной концепции и метода (с точки зрения их влияния на данную дисциплину), и как они оцениваются современниками, то есть, – о готовности дисциплинарного сообщества к принятию новации.

На упомянутом пражском симпозиуме также выступил английский учёный Дж. Раветц. В докладе "Эволюция науки и её история" он отрицал революции в естествознании, относя революцию XVII в. к натурфилософии, а не естествознанию. Его позиция может считаться кумулятивистской – области знания, где произошли революционные преобразования, были не созданы вновь, а развивались с эпохи эллинизма, и были только трансформированы новыми методами и средствами.

Раветц заявлял, что революции бывают в политике и философии, но не в естественных науках. Он представлял Галилея, Декарта и Бойля не естествоиспытателями, а идеологами и философами.

Советские историки математики [6] критиковали данную позицию. В СССР научные революции считались неотъемлемой компонентой развития науки, как это сформулировал Б.М. Кедров: "под революцией в естествознании следует понимать прежде всего коренную ломку самого подхода к изучению и истолкованию явлений природы, самого строя мышления, позволяющего познавать (отражать) изучаемый объект" [7].

Но в математике, утверждали И. А. Тюлина и Н. А. Киселёва, революционное преобразование происходит не в виде “взрыва или скачка”, а в виде постепенного “перехода в новое качество”.

Удивительно, что советские историки математики мало пользовались концептом “научная революция”, в то время как в англо-американской науке были попытки применить идею научных революций к математике. В результате вышел сборник “Революции в математике” (1992, издатель Д. Джиллс – преподаватель истории и философии науки в Королевском колледже Лондона).

Разброс мнений отражают две позиции – М. Кроу и Г. Мертенса.

Кроу держался кумулятивной модели развития математического знания, поскольку в ней, будто бы, не отбрасываются принятые ранее математические методы и теории.

Мертенс допускал лишь метафорическое применение концепта “научная революция” для описания смены доминирующих традиций, своего рода эпистемологического разрыва, и не более того.

Д. Даубен признавал возможность научных революций в математике, кардинально меняющих её облик (например, изобретение исчисления бесконечно малых).

Недавно отечественный философ математики А.В. Родин воскресил термин “перманентная революция”, позволяющий совместить новации и накопительный рост знания. “Открывая или созидая новое в математике, мы не забываем, а только переформулируем старое” [8]. По-сути, это несколько уточнённый и избавленный от явных идеологических влияний образ развития математики, созданный советскими историками ещё в 1960–70-е годы. Приступая к реконструкции, они признавали внутренние закономерности в развитии науки.

На наш взгляд, иллюзия кумулятивности математики и отсутствия скачков в её развитии связана со специфическим, глубоко теоретическим идеалом математического знания. Однажды опровергнутые мнения здесь не просто вытесняются более адекватными, но удаляются из математического реестра как бесполезные. История математики охотно хранит память о новаторах. Но сведения об учёных ретроградах скудны, их аргументация не воспроизводится, память о них полностью стирается, если они не оставили важного следа в ином математическом разделе.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Молодший В. Н. “Математические рукописи” К. Маркса и развитие истории математики в СССР // Историко-математические исследования. Вып. 26. — М.: Наука, 1982. С. 9-16.

2. Александров А. Д. Общий взгляд на математику // Математика. Её содержание, методы и значение. Том 1. — М., 1956. С. 5-78.

3. Мейдер В. А. Ф. Энгельс и методологические проблемы математики. — Саратов: Изд-во Саратовского ун-та, 1985. 112 с.

4. Молодший В. Н. Очерки по философским вопросам математики. — М.: Просвещение, 1969. 304 с.

5. Погребысский И. Б. О непрерывности и эволюции механики в XVII веке // История и методология естественных наук. Вып. 11. Математика. Механика. — М.: Изд-во МГУ, 1971. С. 227-231.

6. Киселёва Н. А., Тюлина И. А. О понятии научной революции // История и методология естественных наук. Вып. 9. Математика, механика. — М.: Изд-во МГУ, 1971. С. 3-20.

7. Кедров Б. М. Ленин и революция в естествознании XX в. // Философия естествознания. — М.: Наука, 1969. 394 с.

8. Родин А. В. Концепция перманентной революции и основания математики (возвращаясь к спору между Кроу и Даубеном) // Революция и эволюция: модели развития в науке, культуре, социуме: сборник научных статей / Под общей ред. И. Т. Касавина, А. М. Фейгельмана. — Н. Новгород: Изд-во Нижегородского госуниверситета им. Н. И. Лобачевского, 2017. С. 34-36.

———————————————————————————

УДК 51 (091)

Об истории теории конусов и полуупорядоченных пространств[1] (в контексте развития нелинейного функционального анализа)

Е. М. Богатов (Россия, г. Старый Оскол)
Старооскольский технологический институт им. А.А. Угарова (филиал) Национального исследовательского технологического университета «МИСИС»
e-mail: embogatov@inbox.ru

On the history of the theory of cones and semi-ordered spaces (in the context of the development of nonlinear functional analysis)

E. M. Bogatov (Russia, Stary Oskol
Stary Oskol Technological Institute of National Research University of Science and Technology “MISIS”
e-mail: embogatov@inbox.ru

Нелинейный функциональный анализ стал проявлять себя, как инструмент для исследования нелинейных операторных уравнений с 1930-х гг. Каждый новый метод, позволяющий проводить такие исследования обогащал арсенал математика-теоретика, а порой и давал возможность для выхода на приложения. Теория полуупорядоченных пространств (и, в частности, теория конусов) не явились исключением.

Началом отсчёта в истории теории конусов можно считать работу О. Перрона [2] (1907) о положительных собственных значениях матриц с положительными элементами, результаты которой были развиты в исследованиях его соотечественника Ф. Г. Фробениуса [3] (1908). Интерес представляет теорема о существовании наибольшего по модулю положительного собственного значения матрицы $A = \{a_{ij} \geq 0\}$, которому соответствует собственный вектор с положительными координатами:

$$Ax = \lambda x. \tag{1}$$

Начало XX в. ознаменовалось интересом к линейным интегральным уравнениям с точки зрения аналогии с матричными уравнениями. Исследования Фредгольма, Гильберта и Шмидта (1903-1907) открывали дорогу для обобщения т. Перрона-Фробениуса на уравнения Фредгольма 2-го рода:

$$y(s) = \lambda \int_a^b K(s,t)y(t)dt.$$

[1]Работа является продолжением исследований, проведённых в [1].

Указанное обобщение было выполнено учеником Фробениуса, немецким математиком Р. Ентчем (1912). Соответствующая теорема была доказана в предположении о непрерывности и положительности ядра $K(s,t)$ в области $(a \leq s,t \leq b)$ [4, с. 235].

В 1918 г. к теме положительных решений задач на собственные значения для *нелинейных* интегральных уравнений обратился московский математик П. Урысон. Не будучи, по-видимому, знаком с результатами Ентча, он рассмотрел условия положительной разрешимости уравнения

$$y = \mu A y \tag{2}$$

с нелинейным оператором $Ay(x) = \int\limits_a^b K(x,s,y(s))ds$, отталкиваясь от некоторых (доказанных им) свойств линейных положительных интегральных операторов[2][5, §1].

Используя в качестве основного инструмента метод последовательных приближений, Урысон доказывает теорему о положительной разрешимости уравнения (2) при определённых условиях на ядро $K(x,s,y(s))$, оценивая спектральный интервал оператора A через наибольшие собственные значения *линейных* операторов P и Q, являющихся мажорантой и минорантой производной $K_y(x,s,y)$ соответственно [5, с. 238].

Дальнейшее развитие теории положительных операторов связано с именем одесского математика М. Крейна. Исследуя проблему моментов в контексте теории банаховых пространств E он ввёл в E понятие конуса K и позитивного (линейного) функционала в K (1937).

Параллельно (1935-1937) в Ленинграде усилиями Л.В. Канторовича создавалась теория полуупорядоченных пространств Y (К-пространств[3]). В её рамках был, в частности, разработан общий принцип метода мажорант (восходящего к О. Коши) для доказательства существования решений функциональных уравнений и установления сходимости метода последовательных приближений. Это позволило ответить на вопрос о положительной разрешимости *нелинейных* операторных уравнений вида

$$y = Ay + y_0; \quad y, y_0 \in Y$$

в более общей (чем у всех перечисленных выше математиков) постановке [6, §9].

Теория конусов в банаховых пространствах получила продолжение в работе аспиранта М. Крейна - одесского математика М. Рутмана (1938-1940). Он рассмотрел вопросы существования и единственности решений уравнений вида (1) с бесконечномерными, линейными, вполне непрерывными, *положительными в конусе*[4] K операторами, отталкиваясь от топологической теоремы Шаудера о неподвижной точке[5], доказанной в 1930 г.

Получение абстрактного аналога т. Ентча для нелинейных операторов, заданных в гильбертовом пространстве H, является заслугой немецкого учёного Э. Роте (1944). Он взял за основу топологическую идею П.С. Александрова и Х. Хопфа, применивших т. Брауэра о неподвижной точке для обобщения т. Перрона-Фробениуса. В своей известной монографии «Topologie» (1935) Александров и Хопф рассмотрели конечномерный оператор А, оставляющего октант $K(x_i > 0)$ инвариантным, и доказали существование неподвижной точки (нелинейного) оператора F:

$$F(x) = \frac{Ax}{f(Ax)}, \tag{3}$$

[2]Данная статья опередила своё время и осталась незамеченной до середины XX в.

[3]К-пространства вводятся аксиоматически и обладают многими свойствами вещественных чисел [6, §1].

[4]Оператор A называется *положительным в конусе* K , если $AK \subset K$.

[5]*Непрерывный оператор, оставляющий инвариантным ограниченное множество банахова пространства E, имеет неподвижную точку.*

преобразующего симплекс[6] S в себя.

Роте рассмотрел спектральную задачу (2) для нелинейных вполне непрерывных операторов, заданных на сфере S положительных функций H, опираясь на соотношение вида (3), т. Шаудера и некоторые факты, связанные с геометрией гильбертова пространства [7].

Подход Александрова-Хопфа-Роте показался перспективным М. Крейну и Рутману. Поскольку геометрия банаховых пространств E являлась одним из приоритетных направлений научной деятельности М. Крейна, оказалось возможным обобщить и углубить результаты Роте. Была проделана значительная работа по развитию теории конусов в E и теории *линейных* положительных операторов, результатом которой явилась большая статья [8] (1948), где, в частности, была дана классификация конусов; проведено обобщение и дополнение т. Перрона-Фробениуса и Ентча.

Кроме того, Крейн и Рутман предложили использовать при доказательстве торемы о неподвижной точке для оператора вида (3) теорему Тихонова[7] вместо теоремы Шаудера, что, в частности, позволяло рассматривать *слабо непрерывные* операторы A в банаховом пространстве E (вместо вполне непрерывных).

Для доказательства аналога теоремы Роте для нелинейных операторов Рутману пришлось наложить дополнительное требование монотонности на оператор A:
$(x \succ y \Rightarrow Ax \succ Ay \ \forall x, y \in K)$[8], а также ввести условие вида

$$A(tu) \succ ctu \ \forall t \in [0, \varepsilon].$$

При таких ограничениях на оператор A задача (2) всегда имеет положительное решение ($\lambda > 0, x \in K$), причём норма элемента x может быть выбрана произвольной.

В конце 1930-х гг. к работе в области полуупорядоченных пространств активно подключился американский математик Гаррет Биркгоф. В середине 1950-х гг. он заинтересовался обобщением т. Ентча на положительные *линейные* операторы, заданные на *банаховых решётках*[9] . Используя проективную псевдометрику, предложенную Гильбертом в 1903 г. и опираясь на метод сжимающих отображений, Биркгоф доказал теорему о том, что *любой равномерно положительный*[10] *линейный оператор P, преобразующий банахову решётку L в себя, имеет единственный положительный единичный вектор x , такой, что* [9, с.224]

$$Px = \gamma x, \quad \gamma > 0.$$

Все вышеперечисленные результаты, несмотря на их значимость, не внесли системообразующий вклад в нелинейный функциоональный анализ. Этот вклад был сделан советским математиком М.А. Красносельским, который разрабатывал топологические методы теории нелинейных интегральных уравнений с конца 1940-х гг. и был хорошо знаком с конусной тематикой по семинарам М.Г. Крейна, проводимым в НИИ математики АН УССР в Киеве. Отправными точками исследований Красносельского были вышеописанные результаты Урысона, а также задачи нелинейной механики, описываемые в терминах уравнений вида (2).

В рамках созданной в Красносельским в начале 1950-х гг. школы функционального анализа (г. Воронеж) удалось превратить теорию конусов (и операторов в них) в удобный инструмент для исследования качественных свойств решений нелинейных операторных уравнений вида $Ay = \lambda y$. Это включало в себя, помимо доказательства теорем существования и единственности, в частности, определение новых типов операторов и функционалов, выяснение

[6] Симплекс S задается пересечением гиперплоскости $f(x) = 1$ с октантом K.

[7] Доказана в 1935 г.

[8] Здесь $x \succ y$ равносильно тому, что $x - y \in K$.

[9] Разновидность полных нормированных К-пространств с монотонной нормой: $|x| < |y| \Rightarrow \|x\| \leq \|y\|$.

[10] Положительный линейный оператор P называется *равномерно положительным*, если проективный диаметр образа PK конуса K, задающего порядок в L, конечен.

структуры спектра A и условий сходимости метода последовательных приближений; описание условий применимости операторных производных при замене исходных уравнений на мажорантные и другие вопросы [10]. Заложенные Красносельским традиции позволили советским математикам удерживать лидирующие позиции в теории конусов до начала 1970-х гг.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Богатов Е. М. Об истории метода неподвижной точки и вкладе советских математиков (1920-е-1950-е гг.) // Чебышевский сборник. 2018. Том 19 (2). С. 30–55.
2. Perron O. Zur Theorie der Matrices // Mathematische Annalen. 1907. Vol. 64 (2), S. 248–263.
3. Frobenius G. Über Matrizen aus positiven Elementen, 1 // Sitzungsber. Königl. Preuss. Akad. Wiss. 1908. s. 471–476.
4. Jentzsch R. Über Integralgleichungen mit positivem Kern // Journal für die reine und angewandte Mathematik. 1912. Vol.141, S. 235-244.
5. Урысон П. С. Об одном типе нелинейных интегральных уравнений // Математический сборник. 1923. Том 31:2. С. 236–255.
6. Канторович Л. В. О полуупорядоченных пространствах // Известия АН СССР. Серия математическая. 1937. Том 1:1. С. 91–110.
7. Rothe E. On non-negative functional transformations // American Journal of Mathematics. 1944. Vol. 66 (2). P. 245-254.
8. Крейн М. Г., Рутман М. А. Линейные операторы, оставляющие инвариантным конус в пространстве Банаха // Успехи математических наук. 1948. Том 3:1(23). С. 3–95.
9. Birkhoff G. Extensions of Jentzsch's theorem // Transactions of AMS. 1957. Vol. 85 (1). P. 219-227.
10. Красносельский М. А. Положительные решения операторных уравнений. – М.: ФИЗМАТГИЗ, 1962. 394 с.

УДК 16.167

Математики об эпистемологии истории точных наук в начале XX в.

А. Б. Верёвкин (Россия, г. Ульяновск)
Ульяновский государственный университет, доцент кафедры прикладной математики
e-mail: a_verevkin@mail.ru
Н. Г. Баранец (Россия, г. Ульяновск)
Ульяновский государственный университет, профессор кафедры философии
e-mail: n_baranetz@mail.ru

Mathematicians about epistemology of history of exact sciences at the beginning of the XX century

A. B. Verevkin (Russian Federation, Ulyanovsk)
Ulyanovsk State University, Associate Professor
e-mail: a_verevkin@mail.ru
N. G. Baranetz (Russian Federation, Ulyanovsk)
Ulyanovsk State University, Professor of Chair of Philosophy
e-mail: n_baranetz@mail.ru

Эпистемология истории науки как самостоятельное направление исследований в отечественной философии науки находится в фазе становления. Её тематическое поле охватывает многие проблемы: возможность познания истории науки; достоверность историко-научных реконструкций; объяснение и понимание научных идей и теорий, существенно отстоящих по времени от нынешнего периода; влияние концепций науки на интерпретацию фактов. Важно знать, что в начале XX века некоторые отечественные учёные, занявшиеся исследованием истории науки своей дисциплины, стали задумываться и анализировать обозначенные выше темы. Любопытная особенность состоит в том, что математики, писавшие очерки истории математики и шире – точных наук, не только касались этого предмета, но и пытались последовательно выработать правила историко-научного исследования и исторической реконструкции. Стоит подумать над следующими вопросами: какими были философско-методологические основания их исследовательского интереса, и какие проблемы эпистемологии истории науки привлекали учёных в большей степени?

Виктор Викторович Бобынин (1849–1919) – первый в России математик, посвятивший свою жизнь профессиональному изучению истории математики. Он собрал и опубликовал огромный фактический материал, указал на важность изучения закономерностей развития математики и выявил важные принципы деятельности историка науки, такие как – необходимость работы с первичными источниками и тщательной перепроверки источников вторичных. Он заметил, что историко-научные исследования обусловлены не только внутренними потребностями дисциплинарного сообщества, рефлексирующего над спецификой своей предметной области и её методами, но и посторонними идеологическими соображениями.

Бобынин тяготел к антикваризму, указывая, что для адекватного восстановления работ древних математиков необходимы усилия специалистов, знакомых с историей науки. Математик, не учитывающий уровень развития математических знаний в изучаемый период, вместо правильной реконструкции исторической проблемы получит современное её разрешение.

Примером такого рода презентистских (в наших терминах) попыток являлись опыты восстановления способа приближенного извлечения квадратного корня, которым пользовался Архимед в сочинении "Об измерении окружности": "При выборе средств для достижения своей цели авторы многих из этих попыток не стеснялись даже фактом несуществования во время Архимеда избираемых ими средств. Так, некоторые из них употребляли в своих работах даже непрерывные дроби. Понятно, что с такими средствами достигнуть своей цели они оказались не в состоянии" [1].

Георгий Николаевич Попов (1878–1930) написал несколько исторических сочинений, среди которых особенно интересна "История математики" (1920). Его исследовательская программа в историографии науки может быть определена как "история идей". Историк науки, полагал Попов, должен описать эволюцию идей и преемственные связи между ними. Это непростая задача, поскольку основательных исследований, учитывающих историческую специфику стадии донаучного и раннего периодов развития математических наук, ещё не проведено. Поэтому есть потребность масштабного анализа и интерпретации самих источников. Развитие идей необходимо изучать с учётом общих условий и причин, в которых могло произойти появление данного артефакта математической культуры. Естественна неполнота связей и лакуны, которые при отсутствии промежуточных звеньев приходится логически реконструировать. Такое приближённое решение проблемы имеет меньшую ценность из-за субъективных привнесений. Ещё труднее задача экстраполяции – полноценного и системного предсказания пути развития науки, пока для этого нет достаточных сведений.

Попов указал профессиональные достоинства историка науки: “Беспристрастие и объективность – качества, неотделимые от критики, дают возможность исследователю, считаясь с анализом научных фактов и разбором трудов деятелей науки, установить степень и ценность, роль и место в истории и содействовать искоренению заблуждений и ошибочных мнений, широко распространяемых под влиянием доверия к основательности суждений тех писателей, которых “авторитетность” ставится вне сомнений авторами, пользующимися материалом из вторых рук” [2].

Достоверность реконструкции математических доказательств интересовала некоторых математиков, читавших историко-математические курсы в 1920-е годы. Неоднократно к этой теме возвращался профессор и методист, редактор журнала “Математическое образование” Иоасаф Иванович Чистяков (1870–1942). Например, в статье “О новейших исследованиях в области древнеегипетской математики” он продемонстрировал идеологию презентистского подхода в реконструкции математических источников, приписывающей древним египтянам недоступную им математику [3].

Тема логики развития математических идей была предметом отдельных исследований в начале XX века. Прекрасный пример этого – доклад в 1911 году выдающегося математика Сергея Натановича Бернштейна на Первом Всероссийском съезде преподавателей математики “Исторический обзор развития понятия о функции” [4]. В книге “Вопросы обоснования геометрии” (1913) С. А. Богомолов объясняет – почему геометрия Римана исторически следует за геометрией Лобачевского (Лобачевский в геометрии Евклида изменил только одну аксиому и исчерпал две возможности относительно параллельных, а Риман провёл более глубокие изменения в аксиоматике и осуществил третью возможность, отрицающую существование параллельных линий).

В связи с тем, что отечественные математики в начале XX века живо интересовались проблемами методики преподавания математических дисциплин как в школе, так и вузах, они большое внимание уделяли вопросам истории развития математических идей. Поэтому они обращались к вопросам, связанным с адекватностью исторических реконструкций доказательств и развития математических теорий. Это интересный пример того, как проводимые исследования по истории науки стимулировали философскую рефлексию по проблемам эпистемологии истории математических наук.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бобынин В. В. Естественные и искусственные пути восстановления историками математики древних доказательств и выводов // Вестник опытной физики и элементарной математики, 1910. N. 515. С. 277-281.

2. Попов Г. Н. История математики. Выпуск первый. — М.: Типо-Лит. Московск. Картоиздательского Отдела Корп. Воен. Топогр., 1920. 236 с.

3. Чистяков И. И. О новейших исследованиях в области древнеегипетской математики // Математическое образование. 1928. N. 4. С. 141-150.

4. Бернштейн С. Н. Исторический обзор развития понятия о функции // Труды Первого Всероссийского съезда преподавателей математики. Т. 3. — СПб, 1913. С. 33-42.

УДК 37.026.1

Формирование у будущих учителей математики и информатики ИКТ-компетенций на этапах решения задачи с использованием компьютера

Д. Д. Гаджиев (США, Форт-Пирс)
Индиан Ривер Колледж, Государственный Университет штата Флорида
e-mail: dgadjiev@irsc.edu
М. М. Абдуразаков (Россия, г. Москва)
e-mail: abdurazakov@inbox.ru
Н. В. Гусева (Россия, Нижний-Новгород)
«Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им Н. И. Лобачевского»
e-mail: soleilfun@mail.ru

The formation of the future teachers of mathematics and computer science of ICT skills on the stages of the problem solution using the computer

D. D. Gadjiev (United States, Fort Pierce)
Indian river College, Florida State University
e-mail: dgadjiev@irsc.edu
M. M. Abdurazakov (Russia, Moscow)
e-mail: abdurazakov@inbox.ru
N. V. Guseva (Russia, Nizhni Novgorod)
N.I. Lobachevsky State University of Nizhni Novgorod – National Research University, .
e-mail: soleilfun@mail.ru

Введение

Как отмечает один из идеологов науки Нового времени Т. Гоббс "знание есть только путь к силе. Теоремы служат только решению проблем. И всякое умозрение, в конечном счете, имеет целью какое-нибудь действие или практический успех". Он настаивает, что признание ограниченности чувственного познания, которое дает лишь «знание факта», тогда как «наука есть знание связей и зависимостей фактов» [4, т.2, с. 80]. Теория Т. Гоббса не потеряла своей актуальности и сегодня.

Необходимость обеспечения конкурентоспособности России в мире определяет приоритеты в структуре и содержании образования. Приоритетной государственной задачей является обеспечение качественного базового уровня математических и естественнонаучных знаний у всех выпускников школы, не только будущих ученых и преподавателей, но и будущих квалифицированных рабочих, максимально используя существующий потенциал и российские традиции, дополняя их последними научными достижениями, современными образовательными технологиями.

Обучение информатике и использование методов и средств информатики в образовании зависит от способности преподавателя по-новому организовать информационно-образовательную среду (ИОС), интегрировать новые информационные и педагогические технологии для того, реализовать учебные проекты, проводить факультативные занятия по интересам и другие новаторские методы, позволяющие «объединить теорию и практику в единый комплекс, сформировать творческое отношение к решению нестандартных задач, придать диалогичность процессу обучения» [1, с. 73]. Но «...интеграция не может осуществляться искусственно, она должна «созреть»; должна быть понята и доказана предметная и образовательная общность соответствующих компонентов» [6, с. 83].

Среди множеств причин, которые мешают образовательным организациям, преподавателям, методистам, специалистам IT-образования в полной мере использовать дидактические возможности ИКТ, на первом месте стоит отсутствие понимания как эффективно интегрировать ИКТ, какое влияние они оказывают на функционал преподавателя в информационно-образовательной среде, какие новые методы организации обучения должны быть использованы в профессионально-педагогической деятельности и т.д.

Характеристика проблемного поля

Критический анализ традиционных методов школьного обучения математике и информатике, содержащийся во многих работах отечественных ученных, учителей, методистов ([1, 3, 5, 7] - лишь несколько примеров таких работ), выявляет ряд существенных недостатков этих методов, в частности:

а) недостаточное изучение и использование математического языка и математических структур, к тому же устаревшего;

б) обучение математике как уже готовой, логически организованной теории (хотя и на низком логическом уровне) вместо обучения различным аспектам математической деятельности, в том числе логической организации математического материала и функционирования информационных технологий, ресурсов информационных продуктов учебного назначения;

в) устаревшую трактовку многих понятий в условиях реализации распределенного контента.

Проблема исследования

Процесс интеграции информационных и педагогических технологий должны способствовать реализации принципов системно-деятельностного подхода в образовании. На самом деле, данная проблема еще? шире и глубже, упирается в проблему соответствия, вернее, существующего несоответствия информатики и математики как дифференцированных научных систем. В научном и педагогическом сообществе сложилось несколько искажённое представление об этих науках как, с одной стороны, своеобразная *информатизация математики*, а с другой стороны, *математизация информатики*.

Принцип системности[1], реализующий системно-деятельностный подход, обуславливает протекание интеграционных процессов в сферах классических методик, поэтому информационные технологии должны использовать, а не игнорировать дидактический потенциал ИКТ в направлении формирования знаний, умений и ИКТ-компетенций в предметной области.

Содержание

1. Концепция школьного курса математики уже не отвечает социальному заказу современного общества. Дело даже не в том, что элементы математического анализа в той или иной степени входят в программу школьного курса математики или факультативных курсов. Дело в том, что идеи и методы анализа в явной или неявной форме пронизывают, например, весь школьный курс алгебры 7-11, одной из приоритетных содержательно-методических линий которого является функционально-графическая линия. Но традиционно сложилось так, что исследователи, занимающиеся проблемами профессионально-ориентированной постановки курса математического анализа в педвузах, уделяют внимание лишь начальным разделам анализа (функция, предел, производная, интеграл).

2. Сегодня отчетливей стала видна роль методов и средств информатики в формировании современной научной картины мира, фундаментальный характер основных понятий, законов и универсальность методологии информатики, а информационные процессы – фундаментальная реальность окружающего мира, определяющий компонент современной информационной

[1] Из принципа системности вытекает, в частности, принцип саморазвития как следствие, поскольку проектируемые системы информационных и педагогических технологий открыты для последующего совершенствования, развития, модернизации и универсализации.

цивилизации. Информатика имеет очень большое число междисциплинарных связей как на понятийном уровне, так и на уровне инструментария.

3. Системный характер содержания определяется тремя сквозными направлениями: информация и информационные процессы; моделирование, информационные модели; области применения методов и средств информатики. Данные направления отражают в применении к информатике общую схему познания, характерную для естественно-научных дисциплин:

"*объект познания-инструмент познания-область применения*",

а общий прием решения задачи:

"познание – моделирование – алгоритм - информационные технология"

4. Необходимость формирования ИКТ-компетентности продиктовано тем, что ФГОС [8, 9] для общего образования содержит в качестве требования к условиям образовательного процесса профессиональные ИКТ-компетенций преподавателя, в частности работу в информационной образовательной среде.

Подход, реализованный в нашем исследовании, состоит в следующем. На практике решение задач, обеспечивается содержанием предметной области, сопровождаемое беседой, дает возможность проследить, как обучающиеся сравнивают и различают отдельные факты, проводят анализ и синтез, делают обобщения, обнаруживают связь понятий между собой. Процессы творческого мышления и воображения при решении задач позволяют выявить знание обучающимися связей между явлениями и умение это знание применить. Применение знаний требует проведения ряда операций, объяснения возникающих явлений. При решении задач обучающиеся оперируют определенной системой понятий, а умение применить эти понятия, провести соответствующее обоснование при помощи логических операций говорит об уровне математического развития обучающихся.

Содержание этих задач, разумеется, самое разное, однако, как показано исследователями, последовательность этапов решения (алгоритм решения), для широкого класса задач одна и та же. Принципиальный момент заключается в том, что фундаментальный характер ИКТ-компетенций является умение осуществлять полный цикл решения задачи с использованием ИКТ на каждом этапе. И как вследствие этого, каждый этап решения определяет вполне определенные знания, умения и опыт, которые в совокупности и определяют инвариантное ядро ИКТ-компетенций [2; 10; 11], которое в настоящее время приобретает особое значение для подготовки учителей [11].

Последовательность полного цикла решения задачи содержит следующие шаги: постановки задачи; построение и анализ моделей рассматриваемых в задаче объектов и процессов; выбора метода решения задачи; формализации; реализации выбранного метода, в том числе программной; анализа полученных результатов, коррекция моделей и метода решения; использовании полученных результатов. Каждый этап решения определяет вполне определенные знания, умения и опыт, которые в совокупности и определяют инвариантное ядро ИКТ-компетенций.

Заключение

Таким образом, основной *целью* обучения является освоения этапов решения задачи, что позволит обеспечить единство в достижения предметных и метапредметных результатов обучения; цель формирования ИКТ-компетенций должно одновременно способствовать формированию универсальных учебных действий и достижению предметных результатов в рамках выбранной предметной области, в данном случае области «Математика и информатика». Содержание задач, реализующих этапы решения задач, извлекается из предметной области «Математика и информатика». При этом математика и информатика – это два разных учебных предмета, однако имеют очень схожую метапредметную составляющую. На этапах решения задачи математические знания, необходимые для изучения тем информатики, и наоборот, методы и средства информатики при изучении тем математики, могут быть перенесены в готовом виде.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Абдуразаков М.М., Мухидинов М.Г. Модель подготовки к профессиональной деятельности учителя информатики. Педагогика. -№ 5. -2016. –С. 71-79.

2. Абдуразаков М.М. Пути оптимизации содержания общеобразовательного курса информатики в основной школе. / Современные информационные технологии и ИТ-образование. - М.: МГУ им. М.В. Ломоносова, 2015. - С. 284-291.

   https://elibrary.ru/download/elibrary_25024595_29365823.pdf

3. Асмолов А.Г., Семенов А.Л., Уваров А.Ю. Российская школа и новые информационные технологии: взгляд в следующее десятилетие. - М.: Изд-во «НексПринт», 2010. - 84 с.

4. Гоббс Т. Избранные произведения в 2-х т. М., 1964.

5. Журавлев Ю.И. Фундаментально-математический и общекультурный аспекты школьной информатики // Вопросы образования. 2005. №3. С.192-200.

6. Лазебникова А. Ю., Коротенков Ю. Г. и др. Информатизация образования как социальный процесс. - М.: ИСМО РАО. – 2010. – 60 с.

7. Кузнецов А.А., Монахов В.М., Абдуразаков М.М. Методические рекомендации учителю по проектированию основной образовательной программы по информатике в соответствии с требованиями ФГОС второго поколения. [Текст]. / Информатика и образование. № 10 (279). 2016. –С. 9-17.

8. Федеральный государственный образовательный стандарт основного общего образования. 2012. Режим доступа: http://минобрнауки.рф/

9. Федеральный государственный образовательный стандарт начального общего образов http://минобрнауки.рф.

10. Хеннер Е.К. Формирование ИКТ-компетентности учащихся и преподавателей в системе непрерывного образования. [Текст] /Е.К.Хеннер. – М.: Бином, -2008. -188 с.

11. Dzamyhov A.Kh., Aslanova M.T. (2018). Formation of teachers' ICT-competencies in the field "Computer Science and Mathematics". The European Proceedings of Social & Behavioural Sciences EpSBS. Pp. 1-10. DOI: https://dx.doi.org/10.15405/epsbs.2018.09.02.22

УДК 539.21:621.785

Из истории эффекта сверхпластичности металлических систем[1]

А. Е. Гвоздев (Россия, г. Тула)
Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого
e-mail: gwozdew.alexandr2013@yandex.ru
А. Н. Сергеев (Россия, г. Тула)
Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого
e-mail: ansergueev@mail.ru
А. Н. Чуканов (Россия, г. Тула)
Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого
e-mail: alexchukanov@yandex.ru
С. Н. Кутепов (Россия, г. Тула)
Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого
e-mail: kutepov.sergei@mail.ru
Д. В. Малий (Россия, г. Тула)
Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого
e-mail: maliydmitriy@yandex.ru
Е. В. Цой (Россия, г. Тула)
Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого
e-mail: aspiring94@yandex.ru

Excerpts on the history of superplasticity effect of metal systems

A. E. Gvozdev (Russia, Tula)
Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University
e-mail: gwozdew.alexandr2013@yandex.ru
A. N. Sergeev (Russia, Tula)
Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University
e-mail: ansergueev@mail.ru
A. N. Chukanov (Russia, Tula)
Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University
e-mail: alexchukanov@yandex.ru
S. N. Kutepov (Russia, Tula)
Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University
e-mail: kutepov.sergei@mail.ru
D. V. Maliy (Russia, Tula)
Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University
e-mail: maliydmitriy@yandex.ru
E.V. Tsoy (Russia, Tula)
Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University
e-mail: aspiring94@yandex.ru

[1]Работа выполнена в рамках реализации федеральной целевой программе «Исследование и разработки по приоритетным направлениям развития научно-технологического комплекса России на 2014-2020 годы» (уникальный идентификатор проекта RFMEF 157717X0271).

Наиболее ярким примером самых ранних исследований сверхпластичности (СП) металлических сплавов учеными-механиками являются опыты Анри Эдуарда Треска (Tresca H.) с 1864 по 1872 гг. по течению твердых тел [1]. Краткое описание этих опытов приводится в книге Дж. Ф. Белла [2]. За 8 лет Треска провел необычайно большое число экспериментов по пластическому деформированию множества твердых тел, – от свинца и меди до льда, парафина и керамической пасты. Он продемонстрировал, что существуют измеримые и воспроизводимые параметры, которые могли создать основу для теории больших пластических деформаций в твердых телах. Большую часть опытов Треска выполнил на свинце. Он выбивал из листов цилиндрические элементы при помощи закаленного стального стержня (пуансона) меньшего диаметра; выдавливал цилиндрические образцы через круглые, треугольные и прямоугольные сквозные отверстия и в тупиковые углубления; сжимал цилиндрические образцы кругового сечения, помещенные между закаленными плитами; исследовал обратную экструзию сплошных цилиндров различной толщины при наличии и отсутствии бокового стеснения и т. п. Для того, чтобы наблюдать течение, он создал образцы в виде пакета отдельных пластин. Измерения состояли в фиксации приложенного давления и соответствующих изменений в форме и положении отдельных пластин. Поперечные разрезы пакета, производившиеся в конце каждого из опытов, позволяли ему детально описать, где каждое сечение тела текло в процессе эксперимента данного типа. Для более мягких материалов (глина, парафин и др.) он использовал слоистые маркеры различных цветов, чтобы проследить путь течения.

Основными открытиями А.Э. Треска Дж. Белл считал следующие выводы:

1) твердые тела при достаточных уровнях давления могут течь подобно жидкостям;

2) существует промежуточная область пластического упрочнения, имеющая место за пределом упругости и до того, как начинается постоянное течение;

3) существует характеристика материала (коэффициент K), выражающая максимальное касательное напряжение, при котором *независимо от типа опыта* твердое тело течет;

4) при пробивке цилиндрическим пуансоном цилиндрического блока длина выбиваемой части L связана с радиусом штампа R_1 и радиусом образца R зависимостью: $L = R_1 \times [1 + lg(R/R_1)]$;

5) пластическое течение твердых тел происходит без изменения объема (является изохорическим).

Несмотря на то, что один из создателей теории пластичности Барре де Сен-Венан сразу признал и восторженно описал как выдающееся достижение третье из этих открытий, продемонстрировавшее важность критерия предельного касательного напряжения при построении теории пластичности [3, 4]. Сам же А.Э. Треска, по-видимому, считал своим наибольшим достижением формулу для длины выбиваемой части стержня [5].

Первые научные сообщения металловедов об удивительной способности некоторых металлических материалов к большим пластическим деформациям появились, в 10-30-х гг. нынешнего столетия. Наиболее ранним сообщением является, опубликованная в 1912 г. работа Г. Д. Бенгаха (*Bengough G.D.*) [5], в которой на образцах из латуни при температуре 700 °С была достигнута относительная деформация 163%. В 1920 г. известный английский металловед Розенгейн (*Rosenghain*) [6] исследовал поведение сплава цинка, алюминия и меди, прокатанного при 250 °С. Он установил, что величина удлинения до разрыва образцов, изготовленных из этого материала, существенно зависит от скорости нагружения. При быстром нагружении образцы проявляли обычное поведение. При медленном – квазистатическом нагружении до небольших значений нагрузки они начинали вести себя так, как если бы были изготовлены из смолы или дегтя. Были достигнуты удлинения в сотни процентов, что для того времени было совершенно новым и удивительным фактом.

Никто тогда не мог и предположить, что металлический сплав может вести себя, как вязкая жидкость. Этот факт требовал своего объяснения.

Розенгейн предположил, что такое удивительное изменение свойств кристаллического материала как СП является следствием прокатки – она частично аморфизирует структуру материала. Не соглашаясь с этой точкой зрения, З. Джеффри и Р. С. Арчер (*Jeffries Z. and Archer R. S.*) [7], одними из первых обратили внимание на то, что кажущаяся аморфизация структуры материала связана с имеющим место при прокатке измельчением зерна, что приводит к резкому усилению влияния границ зерен.

С.Н. Дженкинс (*Jenkins C.N.*) [8] в 1928 г. при растяжении образцов, изготовленных из предварительно прокатанных сплавов кадмий-цинк и олово-свинец, установил, что удлинение до разрыва сильно зависит от скорости приложения нагрузки и ее величины. Для сплава олово-свинец были достигнуты удлинения вплоть до 400%. Ф. Харгривс (*Hargreaves F.*) [9, 10], исследуя методом Бринелля твердость легкоплавких эвтектических сплавов, установил, что она может быть существенно уменьшена посредством предварительной ковки.

В 1934 г. была опубликована работа преподавателя металлургии в Армстронг-Колледже (Великобритания) С.Е. Пирсона (*Pearson C.E.*) [11], которая сейчас признана классической, несмотря на то, что она была полностью забыта в конце 30-х гг. Известный польский исследователь Мацей Грабский приписывает Пирсону в своей книге [12] честь открытия явления СП. Пирсон исследовал механическое поведение сплавов на основе олова: олово-свинец (*Sn-Pb*) и олово-висмут (*Sn-Bi*). Из слитков методом обратного выдавливания Пирсон получал пруток. Цилиндрические образцы испытывались на растяжение при различных условиях нагружения и разном времени выдержки после экструзии. Из полученных результатов следовало, что величина удлинения до разрыва растет по мере снижения нагрузки и уменьшения времени выдержки после экструзии.

Для достижения еще больших удлинений Пирсон предложил проводить испытание при постоянном напряжении течения. С этой целью он уменьшал величину приложенной к образцу нагрузки по мере уменьшения площади его поперечного сечения, что позволило достичь рекордного значения удлинения в 1950% для сплава *Sn-Bi*. Для того чтобы сфотографировать полученный в итоге образец, длина которого составила 82,1 дюйма (при исходной длине рабочей части 4 дюйма), его пришлось свернуть в спираль. Эта фотография стала классическим примером СП и приводится теперь во многих учебниках.

Несомненной заслугой С. Е. Пирсона является и то, что он впервые провел систематические микроструктурные исследования. С.Е. Пирсон отметил, что, несмотря на чрезвычайно большие удлинения (вплоть до 2 000%), он не обнаружил при микроскопическом исследовании полос сдвига внутри зерен. Кроме того, размер зерен не менялся в ходе деформации. Все это позволило не только подтвердить гипотезу З. Джеффри и Р.С. Арчера [7] о том, что предварительная обработка (прокатка или экструзия) измельчает зерно, но также и выдвинуть гипотезу о том, что основным механизмом деформации является зернограничное скольжение (ЗГС). С.Е. Пирсон установил, что наблюдаемая "вязкая"деформация не является ньютоновским течением. Напряжение не было прямо пропорционально скорости деформации и материал вел себя так, как если бы его вязкость уменьшалась с увеличением напряжения течения. В этом смысле поведение исследуемых сплавов напоминает поведение коллоидных растворов и некоторых дисперсных систем, например, суспензий частиц микроскопических размеров.

Как и всякая классическая работа, статья С.Е. Пирсона и сейчас, спустя 60 лет, не утратила своего значения и представляет несомненный практический интерес для всех исследователей, изучающих явление СП.

А. А. Бочвар и З. А. Свидерская обнаружили очень странное поведение литых сплавов цинка с 15-20% алюминия (Zn-22% Al ("цинкаль")) при дилатометрическом анализе: закаленные образцы при нагреве до температур выше 150 °С становились такими мягкими, что спрессовывались под действием пружинок оптического дилатометра. При этом твердость сплава монотектоидного состава оказалась на порядок меньше, чем у чистых компонентов сплава:

цинка и алюминия, а относительное удлинение достигло 450%, что было совершенно необычно для литого материала [13].

А. А. Бочвар был первым, кто понял, что перечисленные факты указывают на существование нового явления, названного им «сверхпластичностью». Этот термин стал международным. Чтобы объяснить экспериментально наблюдаемые большие деформации при исчезающе малых напряжениях, предложил теорию [13, 14], суть которой заключалась в том, что в двухфазных материалах типа цинкаля изменение формы образца может осуществляться за счет направленного диффузионного переноса массы. А. А. Бочвар первым указал на то, что при сверхпластической деформации (СПД) должен протекать еще один процесс, который был назван им «залечиванием» очагов разрушения при перемещениях.

Таким образом, в работах А. А. Бочвара в 40-е годы XX века было вновь открыто явление СП. Нашими соотечественниками было введено в науку само это понятие, сформулированы основные требования к структуре двухфазных сверхпластичных сплавов и выдвинута гипотеза о механизме СПД, которая была подтверждена результатами более поздних исследований.

Классическое определение сверхпластичности было дано учеником А. А. Бочвара профессором И. И. Новиковым [15]. Сверхпластичность – это способность металлических тел квазиравномерно удлиняться с высокой скоростной чувствительностью напряжения течения ($m > 0{,}2\ldots0{,}3$).

Эта тема была продолжена А. А. Пресняковым. В конце 50-х – начале 60-х годов А. А. Пресняков с сотрудниками обнаружил СП во многих системах. Им было опубликовано множество работ, в частности книга [16], переизданная в 1976 г. в Великобритании. Он одним из первых сформулировал и стал неутомимо пропагандировать представление о механизме и сути того, как, происходит само деформирование при СП. Он утверждал, что при больших пластических деформациях, несмотря на то, что достигаются удивительно большие относительные удлинения вплоть до нескольких тысяч процентов, происходит локализация деформации. Концепция получила название "бегающей шейки" при растяжении.

Вплоть до начала 1960-х гг. большинство исследователей относилось к СП, как к экзотическому явлению, которое может наблюдаться только у крайне ограниченного числа материалов, в чрезвычайно узком температурном диапазоне; в связи с чем СП может рассматриваться не более, как некий «фокус», довольно занимательный, но вряд ли имеющий какое-либо практическое значение. Положение коренным образом изменилось после того, как в 1964 г. группа исследователей под руководством В.А. Бекофена (*Backofen W.A., Turner G.R., Avery D.H.*) из Массачусетского технологического института опубликовала работу [17], в которой исследовалась сверхпластичность цинкаля в плане ее практического освоения. С этой целью из листовой заготовки толщиной 0,76 мм через матрицу диаметром 100 мм методом свободного выдувания были отформованы купола большего диаметра, чем диаметр матрицы. Стало очевидным, что явление СП может быть использовано в технологических процессах обработки металлов давлением. Это привело к бурному развитию исследований природы и механизмов СП; в периодической печати стало появляться столько публикаций по СП, что к концу 60-х гг. ситуация приобрела характер информационного «взрыва». Значение работы [19] настолько велико, что М. Грабский называет ее "вторым открытием сверхпластичности"(напомним, что честь первого открытия сверхпластичности, по его мнению, принадлежит Пирсону) [12].

В 1964 В. А. Бэкофен с сотрудниками большое сопротивление образованию шейки при растяжении сверхпластичного материала объяснили высокой чувствительностью напряжения течения к скорости деформации. В этой же работе сообщалось о сенсационном эксперименте с выдувкой под небольшим газовым давлением куполообразной детали из сплава Zn – 22% Al [18]. Вскоре после этой публикации появились многочисленные предложения технологического использования сверхпластичности: пневмоформовка из листа изделий сложной формы (по аналогии с формованием изделий из термопластиков), объемная изотермическая штамповка труднодеформируемых сплавов и др.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Tresca H. Memoire sur lecoulement des corps solides sourmis a ‘des fortes pressions // Comptes Rendus de L’Academie des Sciences. Paris, 1864. vol .59.

2. Белл Дж. Ф. Экспериментальные основы механики деформируемых твердых тел: В 2 ч. / Пер. с англ. М.: Наука, 1984. Ч.1. 596 с.; Ч.2. 431 с.

3. Сен-Венан Б. Об установлении внутренних движений, возникающих в твердых пластических телах за пределами упругости / Теория пластичности. М.: ИЛ, 1948. С. 11-19.

4. Сен-Венан Б. Дифференциальные уравнения внутренних движений, возникающих в твердых пластических телах, и граничные условия для этих тел. Некоторые приложения / Теория пластичности. М.: ИЛ, 1948. С.24-33.

5. Bengough G.D. J. Inst. Metals. 1912. vol.7. P.123.

6. Rosenghain, Haughton, and Bingham // J. Inst. Metals. 1920. V.23. P.261144. Superplasticity in advanced materials / Ed.by Shigenori Hori, Masahary Tokizane, Norio Furushiro, JSRS, Japan. Osaka, June 3-6, 1991.

7. Jeffries Z. and Archer R.S. The science of metals. N.Y.: McGraw- Hill. 1924. 76 p.

8. Jenkins C.N. // J.Inst.Metals. 1928. vol. 40. P.21.

9. Hargreaves F. // J. Inst. Metals, 1928. vol. 38. P.315; vol. 39. P. 301.

10. Hargreaves F. and Hills R.J. // J. Inst. Metals, 1928. vol. 40. P. 41; 1929. vol. 41. P. 257.

11. Pearson C.E. The viscous properties of extruded eutectic alloys of lead-tin and bismuth-tin // J. Inst. Metals. 1934. vol. 54. P.111-123.

12. Грабский М.В. Структурная сверхпластичность металлов / Пер. с польск. М.: Металлургия, 1975. 272 с.

13. Бочвар А.А. О разных механизмах пластичности в металлических сплавах // Изв. АН СССР. ОТН. 1948. №5. С. 649-653.

14. Бочвар А.А., Свидерская З.А. Явление сверхпластичности в сплавах цинка с алюминием // Изв. АН СССР. ОТН. 1945, № 9. С. 821-824.

15. Новиков И.И. Теория термической обработки металлов. М.: Металлургия, 1986. 480 с.

16. Пресняков А.А. Сверхпластичность металлов и сплавов. Алма-Ата: Наука, 1969. 203 с.

17. Backofen W.A., Turner G.R., Avery D.H. Superplasticity in an Al-Zn alloy // Trans. Americ. Soc. Metals. 1964. vol. 57. P. 980 – 990.

18. Бэкофен В. Процессы деформации. М.: Металлургия, 1977. 288 с.

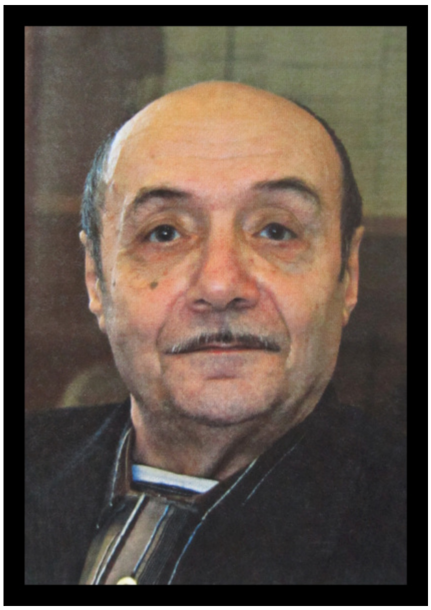
УДК 511.32

Жизнь и научная деятельность Альберта Рубеновича Есаяна

И. В. Денисов (Россия, г. Тула)
Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого
e-mail: den_tspu@mail.ru
Н. М. Добровольский (Россия, г. Тула)
Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого
e-mail: dobrovol@tsput.ru

The life and scientific activities of Albert Rubenovich Yesayan

I. V. Denisov (Russia, Tula)
Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University
e-mail: den_tspu@mail.ru
N. M. Dobrovolsky (Russia, Tula)
Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University
e-mail: dobrovol@tsput.ru



Альберт Рубенович Есаян родился 10 ноября 1937 г. в г. Душанбе (город с 1929-го по 1961 год назывался Сталинабад). Здесь он окончил школу и в 1960 году - Таджикский государственный университет им. В. И. Ленина с присуждением квалификации "Математик. Учитель математики средней школы". Был оставлен на кафедре дифференциальных уравнений, где работал ассистентом в 1960–1961 гг. Параллельно в 1961–1962 гг. возглавлял станцию визуальных наблюдений искусственных спутников Земли.

В 1962 г. А. Р. Есаян поступил в аспирантуру Воронежского государственного университета. Это было время расцвета воронежской математической школы. А. Р. Есаян обучался по специальности "Функциональный анализ" под руководством профессора М. А. Красносельского. В 1964 г. досрочно защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по теме "Оценки спектра линейных положительных операторов". В том же году А. Р. Есаян вернулся в Душанбе и продолжил работу в Таджикском государственном университете им. В. И. Ленина уже в должности старшего преподавателя кафедры дифференциальных уравнений и заместителя декана физико-математического факультета.

Научная деятельность А. Р. Есаяна протекала в рамках активно развивающейся теории полуупорядоченных пространств и пространств с конусом. Характеристика этого направления подробно изложена в [1]. В основу многочисленных работ советских и зарубежных математиков легли фундаментальные исследования Л. В. Канторовича, предложившего в 1935 г. развернутую аксиоматику полуупорядоченных пространств. М. Г. Крейн и его ученики установили ряд интересных и важных фактов для линейных положительных операторов в пространствах с конусом. Были выделены различные классы положительных операторов, имеющих, по крайней мере, один собственный вектор в конусе; классы операторов, у которых такой собственный вектор единственен; исследована кратность соответствующего собственного числа; проведено сравнение с другими собственными значениями. Новые классы операторов изучались, в частности, в работах А. Р. Есаяна.

Теория полуупорядоченных пространств получила свое развитие как в направлении решения внутренних задач этой теории, так и в направлении применений ее к самым различным задачам. В Душанбе А. Р. Есаян, С. Н. Мухтаров и другие применяли методы теории конусов для получения оценок спектральных радиусов операторов и для решения других задач.

В 1965 г. А. Р. Есаян получил диплом кандидата физико-математических наук и возглавил кафедру функционального анализа и дифференциальных уравнений Душанбинского государственного университета. В 1966 г. А. Р. Есаяну присвоено ученое звание доцента.

В 1966 г. А. Р. Есаян участвовал в работе Международного конгресса математиков в г. Москве, где совместно с В. Я. Стеценко представил научное сообщение по теме "Локализация спектра линейного оператора".

В 1968 г. А. Р. Есаян уезжает из Душанбе, и на этом заканчивается первый период его научной деятельности, связанный с оценками спектров операторов. В этот период с 1963 по 1967 г., согласно [2], им опубликовано 25 научных работ.

С сентября 1968 года начинается тульский период жизни и деятельности А. Р. Есаяна, который продолжался до сентября 2018 года. В 1968 г. он поступает на должность доцента кафедры элементарной математики Тульского государственного педагогического института им. Л. Н. Толстого. С 1969 г. — доцент кафедры высшей алгебры и геометрии, с 1972 г. — заведующий кафедрой алгебры и вычислительной математики.

Тульский период связан с подготовкой учителей математики и информатики. В 1986 г. А. Р. Есаяном была создана кафедра информатики и вычислительной техники, разработан курс вычислительной математики и программирования, а позже курс "Основы информатики и вычислительной техники". В 1991 г. им было опубликовано учебное пособие для студентов, изданное в издательстве "Просвещение" [3].

В 1994 г. при кафедре информатики и вычислительной техники была открыта аспирантура по специальности 13.00.02 — теория и методика обучения и воспитания (информатика). Долгое время А. Р. Есаян руководил семинаром по информационным технологиям для учителей г. Тулы и области.

В 1991 г. Альберту Рубеновичу было присвоено звание профессора. В 2001 г. он успешно защитил диссертацию на соискание ученой степени доктора педагогических наук по теме "Теория и методика обучения алгоритмизации на основе рекурсии в курсе информатики педагогического вуза" по специальности 13.00.02 — теория и методика обучения и воспитания (информатика). В том же году он стал действительным членом Академии информатизации образования.

В последние годы научные интересы А. Р. Есаяна были связаны с исследованием возможностей использования современных вычислительных систем типа Maple, Mathematica, PTC

Mathcad Prime, MATLAB, Maxima и др. в обучении информатике и математике в школе и в вузе, а также с гнездовыми массивами и рекурсивными методами решения задач. С 2002 г. по 2018 г. А. Р. Есаян являлся ведущим исполнителем ряда проектов, поддержанных грантами РФФИ. В рамках выполнения этих проектов им был написан целый ряд учебных пособий и монографий по математическим пакетам (см. [4]), которые пользуются большим спросом среди преподавателей и студентов различных вузов страны. А. Р. Есаян был членом Диссертационного совета при Московском городском педагогическом университете.

С июня 2015 г. А. Р. Есаян работал также ведущим научным сотрудником Центра теории и методики обучения математике и информатике ФГБНУ ИСРО РАО.

4 декабря 2018 г. Альберт Рубенович ушел из жизни. Он умер в с. Ромашково Одинцовского района Московской области, похоронен в г. Туле.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. История отечественной математики. В четырех томах. Том 4, книга 1. 1917 – 1967. Киев, 1970.
2. Математика в СССР 1958-1967. Том 2. Биобиблиография. Выпуск 1.
3. Есаян А.Р., Ефимов В.И., Пащенко Э.А., Добровольский Н.М., Лапицкая Л.П. Информатика. Учебное пособие для педагогических институтов. – Москва: Просвещение, 1991.
4. АЛЬБЕРТ РУБЕНОВИЧ ЕСАЯН (к семидесятипятилетию). Добровольский Н.М., Лапицкая Л.П., Мартынюк Ю.М., Реброва И.Ю., Торина Е.Г., Чубариков В.Н. Чебышевский сборник. 2012. Т. 13. № 3 (43). С. 106-110.

———————————————————————————————

УДК 510

Диагональный метод в теории множеств, метаматематике и теории вычислимости

В. В. Задорин (Россия, г. Волгоград)
Волгоградский институт управления — филиал РАНХиГС
e-mail: formessage16@mail.ru

Diagonal method in theory of sets, metamathematics and theory of computability

V. V. Zadorin (Russia, Volgograd)
Volgograd Institute of management
e-mail: formessage16@mail.ru

1. Введение

Стремление обстоятельно изучить генезис диагонального метода в контексте математических теорий, интерпретации его апологетов и критиков, а также построить его программную (а затем и программно-аппаратную с использованием программируемых логических устройств) реализацию зародилось в ходе обсуждения с Э. Ф. Караваевым, Д. Ангеловой и О.В. Черкашиной выступления [1] на конференции «Современная логика: проблемы и перспективы». Было предположено, что такая реализация позволит, используя производительность цифровых устройств, более производительно решать специфические задачи из области математической физики и метаматематики. Эта уверенность только возросла после знакомства с работой Р. Грея [2].

2. Диагональный метод в теории множеств

В монографии «Развитие теории множеств в XIX веке» Ф. А. Медведев [3] отмечает, что диагональный метод впервые встречается в работе Дюбуа–Раймона «Новая теория сходимости и расходимости рядов с положительными членами» (1873), в переписке Дедекинда и Кантора декабря того же года и в заметке Кантора «Об одном свойстве совокупности всех действительных алгебраических чисел» (1874). В этой небольшой работе Кантор ставит себе целью доказать утверждение, что «если по какому-нибудь закону задана бесконечная последовательность отличных друг от друга числовых величин $\omega_1, \omega_2, ..., \omega_\nu, ...(4)$, то во всяком заданном интервале $(\alpha, ..., \beta)$ можно определить число η (а значит, и бесконечно много таких чисел), которое не содержится в последовательности (4)» [4]. Для доказательства он использует прием, который Медведев называет «методом вложенных отрезков», но при этом несколько ранее говорит, что «В этом доказательстве мы видим применение того же самого диагонального метода, которым за год до того пользовался Дюбуа-Раймон при построении функции, возрастающей быстрее любой из заданной последовательности все более быстро возрастающих функций» [3]. Термин *метод вложенных отрезков* представляется более созвучным канторовской мысли, поскольку усмотреть в этом приеме некоторую *диагональ* гораздо сложнее.

Диагональ наглядным образом используется для пересчета положительных рациональных чисел (схема высечена на надгробии Кантора) и для доказательства существования несчетных бесконечных множеств, наиболее обстоятельно представленного в работе Кантора 1890-91 годов «Об одном элементарном вопросе учения о многообразиях». Диагональю здесь является последовательность $E_0 = (b_1, b_2, b_3, ...)$, где каждая координата $b_\nu = m$, когда соответствующая координата $a_{\nu,\nu}$ из последовательности E_ν (где $\nu \neq 0$), есть w, и, наоборот, $b_\nu = w$, когда $a_{\nu,\nu}$ есть m. Координата $a_{1,1}$ – это первая координата первой последовательности E_1, координата $a_{2,2}$ – вторая координата последовательности E_2 и т.д. Последовательности E_1, E_2, ..., $E_n, ...$, где n - целое положительное число, являются, во-первых, элементами совокупности M, и, во-вторых, каждая из них описывается бесконечно многими координатами $x_1, x_2, ..., x_n, ...$, где m и w - взаимно исключающие признаки. Взаимная замена признаков m и w при образовании диагональной последовательности E_0 дает основание Кантору заявить о существовании множеств, не являющихся счетно бесконечными [5]. Именно на этот результат ссылается Клини в своей метаматематической программе.

3. Диагональный метод в метаматематике и теории вычислимости

Во «Введении в метаматематику» Клини пользуется канторовским диагональным методом для эвристических рассуждений, предшествующих метаматематическому доказательству теорем Гёделя [6], а Ю. Л. Ершов в обобщенной теории вычислимости в произвольных допустимых множествах с праэлементами – для «изучения Σ-предикатов и Σ-функцией на Ω ... [посредством] «кодирования» пар, троек,..., всех конечных последовательностей натуральных чисел натуральными числами с помощью Σ-функций на Ω»[7]. Пусть объекты формальной системы индексируется натуральными числами («гёделевская нумерация»). Тогда окажется, что с помощью данной индексации можно построить «замкнутую формулу A, которая с точки зрения лица, знающего эту нумерацию, выражает собственную недоказуемость» [6]. Данная формула не может быть доказуемой, поскольку это допущение приведет нас к парадоксу Эпименида – мы не можем доказать, что формула недоказуема, подобно тому, как невозможно определить истинностное значение высказывания, утверждающего собственную ложность. В известном смысле, можно сказать, что формальная система с автонимным использованием формальных объектов и строится в том числе для того, чтобы избежать этого парадокса.

Для прояснения исторической динамики формальных систем, соотношения метаматематики и теории вычислимости представляется весьма целесообразным изложить постулаты формальной системы, существенным образом опираясь на «Введение в метаматематику».

Постулаты группы A1 (исчисления высказываний):

1a. $A\supset(B\supset A)$; 1b.$(A\supset B)\supset((A\supset(B\supset C))\supset(A\supset C)$

$$2.\frac{A, A \supset B}{B}$$

3. $A \supset(B\supset A\&B)$; 4a. $A\&B \supset A$; 4b. $A\&B \supset B$

5a. $A \supset A\vee B$; 5b. $B \supset A\vee B$; 6. $(A \supset C) \supset ((B\supset C)\supset(A\vee B\supset C))$

7.$(A \supset B) \supset ((\neg A\supset B)\supset\neg A)$; 8° $\neg\neg A\supset A$; 8^1. $\neg A\supset (A \supset B)$

Дополнительные постулаты группы A2(исчисления предикатов):

$$9.\ \frac{C\supset A(x)}{C\supset \forall x A(x)}$$

10. $\forall x A(x)\supset A(t)$; 11. $A(t)\supset \exists x A(x)$;

$$12.\frac{A(x)\supset C}{\exists x A(x)\supset C}$$

Дополнительные постулаты группы B (арифметики): 13. $A(0)\&\forall x(A(x)\supset A(x'))\supset A(x)$; 14. $a'=b'\supset a=b$; 15. $\neg a'=0$; 16. $a=b\supset(a=c\supset b=c)$; 17. $a=b\supset a'=b'$; 18. $a+0=a$; 19. $a+b'=(a+b)'$; 20. $a\cdot 0=0$; 21. $a\cdot b'=a\cdot b+a$.

Исчисление, содержащее только первые семь постулатов (Иогансон, 1936), принято называть *минимальным исчислением*. Формальная система с постулатом 8° называется *классической*, а 8^1 – *интуиционистской*. Также следует учесть, что в формальной системе строго определяются именно понятия «доказательство» и «теорема», а не понятие «недоказуемая формула». Нельзя считать формулу недоказуемой только потому, что в данный момент мы не можем привести ее доказательства. Вместе с тем, в силу простой непротиворечивости исчисления высказываний, достаточно доказать формулу A, чтобы утверждать, что ¬A недоказуема. И, наоборот, для доказательства недоказуемости некоторой формулы необходимо и достаточно доказать, что ее отрицание – теорема. Остается предположить, что данная формула будет истинной, не являясь доказуемой. Это возможно в некоторых метаматематических рассуждениях о формальной системе или при построении исчисления высказываний в теории моделей в его логической интерпретации (когда элементарные формулы должны быть проинтерпретированы на значениях «истина» и «ложь»), так как возникает возможность введения высказывания, утверждающего собственную ложность, тогда как в формальной системе этого не может быть именно в силу отсутствия интерпретаций.

4. Заключение

Ближайшие перспективы развития данной темы, как нам представляется, лежат в области метаматематики, теории чисел и математической физики, например, при изучении теоретико-доказательственных аспектов моделирования кибер-физических систем, а также свойств движения физических объектов любых масштабов во всюду плотном n-мерном пространстве. Так, для точек двухмерного пространства используем формулу из [7]: $C(x,y) = \frac{(x+y)(x+y+1)}{2} + x$ и обобщим её для n-мерного пространства, где z_n - точка, следующим образом:

$$z_2 = C(z_1, z_0) = \frac{(z_1 + z_0)(z_1 + z_0 + 1)}{2} + z_1$$

и

$$z_n = C(z_{n-1}, z_{n-2}) = \frac{(z_{n-1} + z_{n-2})(z_{n-1} + z_{n-2} + 1)}{2} + z_{n-1}$$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Задорин В. В. К вопросу о пересчете множеств диагональным методом // Логико-философские штудии. Том 16 (№ 1–2), 2018. С.179-180.
2. Gray R. Georg Cantor and transcendental numbers // The American Mathematical Monthly. – 1994. – Т. 101. – №. 9. – С. 819-832.
3. Медведев Ф. А. Развитие теории множеств в XIX веке. М.: Наука, 1965.
4. Кантор Г. Об одном свойстве совокупности всех действительных алгебраических чисел // Труды по теории множеств. М.: Наука, 1985. С.18-22.
5. Кантор Г. Об одном элементарном вопросе учения о многообразиях // Труды по теории множеств. М.: Наука, 1985. С.170-172.
6. Клини С. К. Введение в метаматематику. Пер. с англ./Под ред. В.А.Успенского. Изд. 2-е. М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2009.
7. Ершов Ю. Л. Определимость и вычислимость. Новосибирск: Научная книга, 1996.

———————————————————————————

УДК 51(091)

Великий швейцарский математик Иоганн Бернулли (к 350–летию со дня рождения)

Л. В. Коновалова (Россия, г. Санкт-Петербург)
Санкт-Петербургский государственный архитектурно-строительный университет
e-mail: larisavkon@mail.ru

The great Swiss mathematician Jogann Bernoulli (for 350 years since date of borth)

L. V. Konovalova (Russia, г. Saint-Petersburg)
Saint-Petersburg State University of Architecture and Civil Engineering
e-mail: larisavkon@mail.ru

1. На протяжении более столетия, начиная с конца XVII века, выдающуюся роль в развитии математики, механики, физики играли представители рода Бернулли. Несколько поколений этого уникального рода демонстрировали самоотверженное служение науке. Их выдающиеся результаты позволяют причислить их к тем учёным, о которых Эйнштейн писал: "Для человечества они означают то же, что органическая жизнь для материи: они являются носителями более высокого сознания" [1].

Первые сведения о роде Бернулли связаны с антверпенским хирургом лютеранином Леоном Бернулли, скончавшемся в 1561 году. Его сын–торговец Якоб Бернулли в 1570 году эмигрировал во Франкфут на Майне, где и приобрёл гражданство. Внук Якоба, тоже Якоб (1598—1634), переехал в 1620 году в Базель и через два года стал его гражданином. Решение Якоба Бернулли обосноваться в Базеле, культурном центре Европы, в какой-то мере предопределило судьбу будущего знаменитого семейства. Сын Якоба Бернулли Николай (1623—17080), родившийся уже гражданином Швейцарии в Базеле, получил хорошее образование. Во второй половине жизни Николай занимал высокие правительственные посты [2].

27 декабря 1654 г. в семье Николая Бернулли родился первенец—сын, названный в честь деда Якобом, будущий великий математик. 27 июля 1667 г. родился третий из четырёх сыновей и десятый ребёнок в семье—Иоганн Бернулли. В 1682 г. Иоганн окончил школу и в 1683 г. поступил в университет, по окончании которого получил степень бакалавра. В 1685 г. он защитил ещё одну диссертацию и получил степень магистра искусств. В том же 1685 г. Иоганн, по совету старшего брата Якоба, начитает заниматься математикой. За два года он изучил труды древних и новых математиков, включая "Геометрию" Декарта. Итог—Иоганн сравнивается с братом по знанию математики.

Старший брат Иоганна Якоб Бернулли к 1687 году был уже известным математиком, профессором математики в Базельском университете. Эту должность он занимал до конца своей жизни. Заметим, что 1687 год стал поворотным как в судьбе братьев Бернулли, так и в истории новой математики, в истории дифференциального и интегрального исчисления. Якоб Бернулли, просматривая литературу по математике, вышедшую за последние годы, прочёл статью Лейбница, опубликованную в 1684 году, в которой Лейбниц дал очерк нового исчисления в очень краткой форме. По словам Иоганна Бернулли эта статья представляла собой скорее загадку, чем объяснение. Якоб обратился к Лейбницу за разъяснениями и написал ему в Ганновер письмо, но ответ получил только через три года. Лейбниц не ответил сразу, так как путешествовал по Германии и Италии. Братья Бернулли совместно начали разбирать статью Лейбница. По возвращению в Ганновер в 1690 году Лейбниц прочёл письмо Якоба Бернулли. Однако к этому времени братья уже не нуждались в помощи Лейбница. Они не только поняли все, что содержалось в его статье, но и продвинули новое исчисление значительно дальше.

2. В 1690 году Иоганн Бернулли отправляется в путешествие сначала в Женеву, затем в Париж. Осенью 1691 года двадцати трёх летний Иоганн приезжает в Париж. Он появляется в знаменитом салоне Мальмбрамша, завсегдатаями которого были наиболее видные учёные и философы Парижа, и знакомится там с маркизом Лопиталем [3]. Между ними завязываются оживлённые беседы на математические темы и выясняется поразительная для Лопиталя вещь: те задачи, которые он считал трудными и даже неразрешимыми, этот юнец из Швейцарии решает легко. Лопиталь просит Иоганна прочитать ему несколько лекций по новому исчислению и получает согласие. Затем Лопиталь высказывает новую просьбу, а именно, Иоганн Бернулли должен передать ему свои лекции в письменном виде. Тот соглашается и на это предложение. Перед отъездом из Парижа в 1692 году Иоганн Бернулли оставил маркизу рукопись целого курса дифференциального и интегрального исчисления.

В 1692 году Иоганн Бернулли вернулся в Базель. Он не мог целиком посвятить себя математике, так как должен был продолжить изучение медицины. В 1694 году Иоганн Бернулли успешно защищает диссертацию на степень доктора медицины. Это была чисто математическая работа, все задачи решались с помощью нового исчисления, то есть составлялись дифференциальные уравнения, интегралы которых давали искомые кривые. Работы в родном Базеле не было, и в 1695 году Иоганн Бернулли с семьёй уехал в Гронинген, где прожил десять лет до 1705 года.

3. В 1696 году Иоганн Бернулли в июньском номере "Acta Eruditorum" поставил задачу: найти кривую, соединяющую две не лежащие на одной вертикали точки, обладающую

свойством–тяжёлое тело, движущееся по этой кривой из верхней точки в нижнюю, затратит на перемещение наименьшее время. Новая кривая была названа брахистохроной. Кроме решения Иоганна Бернулли было прислано ещё четыре решения этой задачи, авторами которых были Ньютон, Лейбниц, Лопиталь и Якоб Бернулли. Решение Якоба Бернулли было самым интересным. Отметим, что задача о брахистохроне, предложенная Иоганом Бернулли, дала толчок развитию вариационного исчисления.

В 1697 году Иоганн Бернулли дал математикам свой знаменитый метод решения линейных дифференциальных уравнений первого порядка, который излагается и по сей день во всех учебниках по дифференциальным уравнениям. Он изобрёл этот метод, решая проблему, поставленную в конце 1695 года его братом Якобом в IV томе "Acta Eruditorum". Проблема состояла в следующем: найти способ разделения переменных для дифференциального уравнения первого порядка, которое мы называем теперь уравнением Бернулли. Лейбниц в следующем томе журнала за 1696 год поместил статью, содержащую буквально несколько строк. Он сообщил, что это уравнение может быть сведено к линейному, которое путём разделения переменных интегрируется в квадратурах. Как разделить переменные Лейбниц не уточняет. В 1697 году в VI томе "Acta Eruditorum" [4] Иоганн Бернулли показав, как реализуется путь, указанный Лейбницем, подробно изложил свой метод. Кроме того, в первом томе "Комментариев Петербургской Академии наук" за 1726 год Иоганн Бернулли опубликовал способ разделения переменных и для дифференциальных уравнений первого порядка, названных им однородными.

4. 16 августа 1705 года ушёл из жизни Якоб Бернулли. Со смертью старшего брата для Иоганна был разрешён самый мучительный вопрос его жизни–кто из них был более талантлив, их соперничество закончилось. Иоганн вернулся в Базель и занял место заведующего кафедрой математики в университете. Закончились и его семейные трудности, он мог полностью посвятить себя любимому делу–математике.

Главный предмет его занятий–приложение математического анализа к вопросам механики и физики. В 1717 году Иоганн Бернулли дал первую строгую формулировку принципа возможных перемещений. Значительным его вкладом в механику была самоотверженная защита введённого Лейбницем понятия "живой силы". Иоганн Бернулли занимался и механикой жидкости. К великому сожалению, его "Гидравлика" во многом была написана, основываясь на результатах, полученных его сыном Даниилом. Завистливый ревнивый характер, огромное самомнение привели к такому противоестественному поступку. Иоганн Бернулли принял активное участие в споре с англичанами о приоритете в создании нового исчисления. Ведь сам Лейбниц признавал, что братья Бернулли его соавторы.

Иоганн вёл очень активную научную жизнь, читал лекции, руководил кафедрой, выступал на диспутах, вёл переписку с учёными. Он дважды был ректором Базельского университета. Последним крупным предприятием Иоганна Бернулли было издание его переписки с Лейбницем. Осенью 1747 года великолепное здоровье Иоганна Бернулли стало резко ухудшаться, однако, он продолжал ежедневно работать до полуночи. Первого января 1748 года великий математик скончался на 81 году жизни.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Эйнштейн А. Собрание трудов. — Москва: изд-во Наука, 1967. Т.4. 239 с.

2. Фрейман Л. С. Творцы высшей математики.— Москва: изд-во Наука, 1968. 216 с.

3. Авторский коллектив. История математики с древнейших времён до начала XIX столетия. — Москва: изд-во Наука, 1970. Т.2. 299 с.

4. Berhoulli J. De conoidibus et sphaeroidibusquxdam. Solusio a lytica Aequationis. //Acta eruditorum. — Lipsiensia, 1697. T.VI. P.113-118.

УДК 511.32

Развитие идей Лейбница о Геометрической характеристике в математике XVIII -– XIX веков

З. А. Кузичева (Россия, г. Москва)
МГУ, мехмат ф-т
e-mail: zakuzicheva@mail.ru

The development of the ideas of Leibniz on the geometrical characteristic in mathematics of XVIII-XIX centuries

Z. A. Kuzicheva (Russia, Moscow)
MSU, Department of Mechanics and Mathematics
e-mail: zakuzicheva@mail.ru

Основной текст тезисов.

В 1666 Лейбниц защитил диссертацию на степень лиценциата, озаглавленную «Арифметические рассуждения о соединениях». Она была опубликована с дополнениями в том же году под заголовком «Комбинаторное искусство» (Dissertatio de arte combinatoria) [1]. В этой работе Лейбниц высказал идею создания так называемой «универсальной характеристики».

«Универсальная характеристика» – это не просто «всеобщий язык», алфавит которого составляют специально разработанные символы, но и логика, включающая методы не только доказательства уже высказанных «истин», но и открытия новых истин в любой области знания.

Все последующее творчество Лейбница, так или иначе, связано с попытками реализовать этот проект. Поскольку в общем объеме решить проблему не удавалось, Лейбниц полагал, — что в силу ее обширности и трудоемкости, — он пытался приблизиться к ней, так сказать, по частям. На этом пути он получил свой вариант дифференциального и интегрального исчисления, вместе с удобными обозначениями дифференциала и интеграла, фрагменты, относящиеся к логике, называемой теперь математиче6ской логикой, и многие другие свои открытия. Одной из таких частных разделов математики оказалась идея «геометрической характеристики», — «геометрического анализа», — о которой он сообщал в письмах к Гюйгенсу (сентябрь 1679), Лопиталю (декабрь 1694). Неоконченные варианты «геометрической характеристики» имеются и в рукописных материалах Лейбница. Наброски, которые можно отнести если не к геометрическому анализу, то к геометрической характеристике, содержится уже в его «Комбинаторном искусстве» как попытки выразить посредством числовых комбинаций основные геометрические понятия и отношения, например, отношение *лежать между* [1].

В письме к Гюйгенсу Лейбниц описывает в общих чертах свой "анализ":

«Я полагаю, что нам нужен еще иной, чисто геометрический, или линейный, анализ, непосредственно выражающий для нас положение (situm), как Алгебра выражает величину (magnitudinem)... Я думаю, что располагаю таким средством и что фигуры и даже машины и движения можно было бы представлять с помощью знаков (en caracteres), как Алгебра представляет числа и величины" [2].

Он полагает, что в этом "анализе" следует исходить из взаимного расположения объектов и отношения конгруэнтности вместо равенства. Это отношение он обозначает символом $\propto$, повернутым на 90° (за неимением лучшего, ниже для обозначения конгруэнции использую знак *). Пусть даны точки a и b; сфера радиуса ax с центром a запишется в виде: $ab{*}ax$, длина ax равна длине ab. «Место» всех таких точек x, что $ax{*}bx$, – плоскость, перпендикулярная ab, поскольку каждая из точек x конгруэнтна и a, и b. Выразительные возможности отношения конгруэнтности Лейбниц иллюстрирует на примерах. Однако ни в этом письме, ни в других вариантах, содержащих его соображения о "геометрической характеристике", нет намеков на структуру этой теории, все ограничивается разбором примеров. Хотя общая идея понятна — теория должна заниматься геометрическими объектами и учитывать их взаимное расположение, на основании чего решать конкретные задачи теории, но даже плана ее он не приводит.

В дальнейшем развитие шло по двум направлениям, одно из них связано с темой взаимного расположения геометрических объектов, оно привело к созданию топологии. Другое, более геометрическое, направление привело к созданию, например, векторного исчисления. Но это, конечно, слишком упрощенная картина. История создания топологии достаточно отражена в отечественной историко-научной литературе, поэтому мы ограничимся лишь кратким напоминанием. В XVIII и начале XIX вв. рассматриваемое направление в том виде, как его представлял Лейбниц, не получило существенного развития. Заметные сдвиги наблюдаются в построении проективной геометрии. Примером топологической задачи и ее решения может служить знаменитая задача Эйлера о Кенигсбергских мостах, которую он сам относил к геометрии положения. Более активно темы, связанные с идеями Лейбница разрабатывались в XIX в. Отчетливо выделилось топологическое направление, появился и термин "топология", у Б. Листинга (1848 г.). Подробнее, чем можно отразить в тезисах, изыскания в топологическом направлении изложены в написанной Б.А. Розенфельдом главе "Геометрия" книги [3].

Из всех разделов классической математики, пожалуй, самые существенные изменения в XIX веке произошли в геометрии. Настолько существенные, что термин *геометрия* без дополнительного разъяснения почти утратил определенность. Теперь мы говорим "евклидова геометрия" и "неевклидова геометрия", чаще всего подразумевая при этом геометрию Лобачевского, "аналитическая геометрия", "проективная геометрия", "дифференциальная геометрия" и т.д. На первый взгляд здесь такой разнобой, что вряд ли возможно найти то общее, что объединяет эти "геометрии" и каковы особенности, присущие каждой из них в отдельности.

И *это общее* предоставила, как известно, *алгебра*, а именно понятие группы, группы движения. Это понятие положил в основу классификации систем геометрии Ф. Клейн в своей "Эрлангенской программе" 1872 года. Наука о свойствах пространственных объектов, инвариантных относительно движения, и есть геометрия. Так говорил К.А. Рыбников в своих лекциях по истории математики.

О том, что его "геометрическая характеристика" может охватывать и движение, Лейбниц писал в упомянутом выше письме к Гюйгенсу (см. выше), конечно, в ином смысле. Стремление отразить движение не только в виде функциональной зависимости, оказало свою роль в формировании Гамильтоном такого представителя геометрического направление, как "кватернион". Поскольку движение в трехмерном пространстве некоммутативно, на множестве кватернионов ему пришлось отказаться от коммутативности умножения. Непосредственно с идеей Лейбница о "геометрической характеристике" связана работа Германа Грассмана [4].

Свой вариант «Геометрического анализа» Г. Грассман представил на конкурс, объявленный обществом князя Яблоновского в связи с 200-летним юбилеем Лейбница (Лейпциг, 1846). Это сравнительно небольшое сочинение, объемом около 60 компьютерных страниц, опубликовано в 1847 году [4]. Построение собственного «геометрического анализа» Грассман предваряет кратким описанием «геометрической характеристики» Лейбница, отмечает, что основным отношением Лейбниц полагает конгруэнцию, и показывает, как в обозначениях Лейбница выглядят некоторые геометрические объекты такие, как прямая, окружность, сфера. Он показывает достоинства отношения конгруэнтности, но вынужден отметить, что для построения теории одной конгруэнтностью обойтись невозможно. Свое построение Грассман начинает с того,что вводит в свою систему отношение коллинеации, описывает его свойства, затем переходит к описанию объектов и операций на их множестве. Теперь требуется разъяснительное отступление, чтобы стало понятно, почему он создал такой "анализ" какой мы видим в его работе.

Дело в том, что в 1844 году Г. Грассман опубликовал свое сочинение, по достоинству оцененное математиками с трагическим для автора опозданием [6]. Не встретив понимания у математиков, Г.Грассман переключился на лингвистику, достиг больших успехов в изучении санскрита, перевел "Ригведу" попутно составив обширный словарь. Не у математиков, а у лингвистов он снискал признание. Именно потому, что сочинение 1844 года не было понято коллегами, геометрический анализ Г.Грассман связал с идеями и методами "Учения о протяженностях".

Теперь кратко о сути подхода Г. Грассмана. В силу того, что он оперирует с «протяженностями», его анализ можно считать геометрическим. В качестве объектов, для определенности, он берет точки, отрезки, (прямые) линии, поверхности и т.д. Разница между отрезком и ограниченной линией в том, что явно указываются концы отрезка и его направление, т.е. отрезок, это, по сути, вектор. Грассман из общих соображений в качестве иллюстрации теории экстенсивных величин вводит скалярное и векторное умножение "отрезков". Вводит он операции и над друими "протяженными величинами". Вводил он операции и над точечными величинами, предварительно снабжая их весами, поскольку оперировать с нулевыми величинами невозможно. Однако в целом имеет в виду произвольно большие "размерности за что его слегка укорял Ганкель, хотя относился к Грассману с пониманием, большим уважением и сочувствием. Ганкель полагал, что чрезмерная общность подхода Грассмана оказалась трудной для восприятия современников. Введенные им операции Грассман, как и в сочинении 1844 года, использует для решения задач механики, статики. При этом в целом не подразумевается никакая координатная система, координаты вводятся локально, например, для того чтобы алгебраическую функцию, аргументами которой являются точки, превратить в алгебраическую же функцию, зависящую от числовых аргументов.

Что касается связи его "геометрического анализа" то Грассман с полной уверенностью утверждает, что все пожелания, высказанные Лейбницем, реализованы в рассматриваемом сочинении. Позволю себе привести несколько цитат из заключительной части рассматриваемого нами сочинения Грассмана [6]:

"Я надеюсь также, что изложенного мною достаточно, чтобы показать, как верно Лейбниц предугадал преимущества чисто геометрического анализа. Он подчеркивал, что решение геометрической задачи средствами этого анализа доставляет одновременно решение, построение и доказательство, т.е. именно естественный способ и такие пути решения с необходимостью диктуются самим этим анализом. Далее, так как любое равенство в данном анализе является геометрическим соотношением, выраженным средствами этого анализа, высказанным четко и ясно, и оно может быть воспринято непосредственно, поскольку это соотношение не отягчено произвольными величинами обычного анализа, например, величинами, зависящими от координат". И далее:

"Итак, чтобы новый анализ удовлетворял полностью всем требованиям, необходимо еще было бы развить теорию уравнений, т.е. указать способы элиминировать из уравнений неизвестные величины. Но как это можно осуществить, ясно из того, какие принципы положены в основу построения всей теории".

И последняя цитата (здесь он упоминает себя в третьем лице):

"На самом деле, все понятия и законы нового анализа можно изложить, независимо от пространственной наглядности, связывая их с абстрактным понятием постепенного (непрерывного) перехода, как это и происходит сплошь и рядом в Учении о протяженностях Грассмана. Если воспринять эту идею чисто абстрактно истолкованного непрерывного перехода, то легко можно обнаружить, что развитые в данном сочинении законы допускают трактовку, свободную от пространственной наглядности".

Таким образом, ясно, что "Геометрический анализ" Грассмана органически связан не только, а возможно, и не столько, с идеями Лейбница, сколько с его "Учением о протяженных величинах" и возможностями этого учения.

Теперь имя Г. Грассмана хорошо известно математикам разных специальностей. Здесь мы говорили о геометрическом направлении. Но ведь мы знаем и об *алгебре Грассмана*, которая явилась результатом его исследования "протяженных величин", заняться которыми его натолкнула, в числе прочего, и задача "о приливах и отливах", которую он получила на одном из экзаменов на право преподавания в средней школе.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Leibniz G. W. Dissertatio de arte combinatoria // Opera Philosophica, quae exant latina, gallica, germanica omnia. 1840. Pars 1. C. 6 — 44.

2. Лейбниц Г. В. Избранные отрывки из математических сочинений // Успехи математических наук. 1948. Том III, № 1(23). С. 165 - 204.

3. Колмогоров А.Н., Юшкевич А.П. (ред). Математика XIX века. Геометрия. Теория аналитических функций. — Москва: Изд-во Наука, 1981. 270 с.

4. Grassmann H. Geometrische Analyse, geknüpft an die von Leibniz erfundene geometrische Charakteristik // Hermann Grassmann gesammelte mathematische Werke. Band 1, Theil 1 — New York, 1969. S. 321 — 399.

5. Грассман Г. Геометрический анализ, основанный на открытой Лейбницем геометрической характеристике // Грассман Г., Грассман Р. Логика и философия математики. Избранное. Пер. с нем. Москва: Изд-во Наука, 2008. С. 101 — 132; 2-е изд. Москва: Изд-во URSS, 2019. С. 89 — 120.

6. Grassmann H. Die lineale Ausdehnungslehre, ein neuer Zweig der Mathematik darstellt und durch Anwendungen auf die übrige Zweige der Mathematik, wie auch auf die Statik, Mechanik, die Lehre von Magnetismus und die Krystallonomie erlätert // Hermann Grassmann gesammelte mathematische Werke. Band 1, Theil 1 — New York, 1969. S. 1 — 319.

———————————————————————————————————————

УДК 51(091)

О методах исследования диофантовых уравнений в XIX веке: из предыстории арифметики эллиптических кривых

Т. А. Лавриненко (Россия, г. Москва)
Российский экономический университет имени Г. В. Плеханова
e-mail: tatiana_lavrinenko@mail.ru
Г. А. Михно (Россия, г. Тверь)
Тверской государственный университет
e-mail:g.mikhno@yandex.ru

On methods of investigation of Diophantine equations in XIXth century: selected topics from the early history of elliptic curve arithmetic

T. A. Lavrinenko (Russia, Moscow)
Plekhanov Russian University of Economics
e-mail: Lavrinenko.TA@rea.ru
G. A. Mikhno (Russia, Tver)
Tver State University
e-mail: g.mikhno@yandex.ru

Принято считать, что начала арифметики алгебраических кривых в той её части, в которой изучается структура множества рациональных точек на таких кривых, были заложены А. Пуанкаре в его мемуаре «Об арифметических свойствах алгебраических кривых» [1], опубликованном в 1901 году. После выхода в свет работы [1] задача решения неопределенных уравнений в рациональных числах включается в проблематику алгебраической геометрии. В качестве основы для классификации неопределенных уравнений в [1], по-видимому, впервые используется понятие бирационального изоморфизма соответствующих кривых. Пуанкаре изучает структуру множества рациональных точек на кривых рода 0 и закладывает основы для изучения арифметики кривых рода 1, или эллиптических. Новая точка зрения на предмет диофантова анализа, предложенная Пуанкаре, когда проблема решения неопределенных уравнений в рациональных числах формулируется как задача изучения множества рациональных точек на алгебраических кривых, а для её исследования привлекаются понятия и методы развитой теории, дала мощный толчок для дальнейшего развития диофантова анализа.

Вплоть же до конца XIX века в диофантовом анализе преобладала чрезвычайно длительная и устойчивая традиция, восходящая к Диофанту, трактовать рассматриваемую проблему чисто алгебраически, когда для нахождения рациональных решений диофантовых уравнений в основном использовался алгебраический аппарат замен, подстановок и преобразований. Мы покажем, что тем не менее уже в XIX веке начинается отход от такой чисто алгебраической трактовки решения диофантовых уравнений.

Наша цель — отметить некоторые узловые моменты, связанные с расширением средств исследования диофантовых уравнений в XIX веке и с изменением точки зрения на сам предмет исследования.

К концу XVIII века диофантов анализ уже располагал некоторыми общими методами нахождения рациональных решений неопределенных уравнений. Так, был известен восходящий к Диофанту метод получения всех рациональных решений общего уравнения 2-ой степени с двумя неизвестными (с рациональными коэффициентами) по одному известному рациональному решению. В сочинении Эйлера «Vollständige Anleitung zur Algebra» [2], вышедшем в 1770 году, были выделены основные типы неопределенных уравнений 3-ей и 4-ой степеней

$$f_3(x) \equiv ax^3 + bx^2 + cx + d = y^2, \tag{1}$$

$$f_3(x) \equiv ax^3 + bx^2 + cx + d = y^3, \tag{2}$$

$$f_4(x) \equiv ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = y^2, \tag{3}$$

где $a, b, c, d, e \in \mathbb{Q},\ a \neq 0$, для которых к концу XVIII века существовали методы, позволяющие по одному или двум известным рациональным решениям таких уравнений находить ещё одно рациональное решение. По существу, это были хорошо сейчас известные «метод касательной» и «метод секущей» для нахождения рациональных точек на плоских эллиптических кривых, полученные чисто алгебраическим путем, без использования геометрического языка (подробнее об этом см. [3]). Кроме того, использовался также «метод парабол». Методы нахождения рациональных решений уравнений (1)-(3), изложенные Эйлером в [2], были основаны на использовании линейных и квадратичных подстановок, подбираемых по виду этого уравнения. Так, «метод касательной» для уравнения (1) и для уравнения (2) рассматривался как два разных приема, поскольку предназначался для уравнений разных видов, хотя общность рассуждений в обоих случаях очевидна.

Первые попытки перейти к более общему рассмотрению произвольного уравнения 3-ей степени с двумя неизвестными относятся ещё к последней четверти XVIII века. В 1777 году Ж. Л. Лагранж в работе «Sur quelques problèmes de l'analyse de Diophante» [4] излагает метод нахождения нового рационального решения по одному известному рациональному решению для общего уравнения 3-ей степени с двумя неизвестными

$$f_3(x,y) \equiv a + bx + cy + dx^2 + exy + fy^2 + gx^3 + hx^2y + kxy^2 + ly^3 = 0. \tag{4}$$

В своем исследовании Лагранж основывается на тех же самых алгебраических соображениях, которые применялись и для уравнений (1) и (2). Хотя в промежуточных выкладках он использует средства математического анализа, это использование играет чисто вспомогательную роль. В результате в диофантов анализ был введен «метод касательной» для общего уравнения (4) в его чисто алгебраическом выражении, без апелляции к его геометрическому смыслу. Если по средствам исследования работа Лагранжа вполне традиционна для конца XVIII века, то по общности постановки задачи она знаменует переход к новому этапу, на котором неопределенные уравнения начинают трактоваться с гораздо более общих позиций.

В 1826 году была опубликована большая работа Коши «Sur la résolution de quelques équations indéterminées en nombres entiers» [5], содержащая по существу первую попытку построения общей теории однородных неопределенных уравнений. Работа состоит из пяти параграфов, в первом из которых рассматривается тривиальный случай однородного уравнения n-ой степени с двумя неизвестными, а остальные параграфы посвящены изучению однородных уравнений n-ой степени общего вида с тремя неизвестными при $n = 1, 2, 3$. Оставаясь в целом в рамках алгебраического подхода к исследованию неопределенных уравнений, Коши стремится провести это исследование с общих позиций. В последнем параграфе своей работы он приходит к методам нахождения нового целочисленного решения по одному и, соответственно, по двум известным целочисленным решениям для общего неопределенного уравнения 3-ей степени

$$F(x,y,z) \equiv Ax^3 + By^3 + Cz^3 + Dyz^2 + Ezx^2 + Fxy^2 + + Gzy^2 + Hxz^2 + Iyx^2 + Kxyz = 0. \tag{5}$$

Изучая уравнение (5), Коши помимо алгебраических средств использует только, как и Лагранж, при преобразовании многочлена в результате подстановок частные производные этого многочлена. Нетрудно увидеть, что методы Коши для уравнения (5) представляют собой сформулированные чисто аналитически методы касательной и секущей для нахождения рациональных точек на кривой 3-го порядка. Действительно, однородное уравнение (5) и подстановки, осуществляемые Коши в этом уравнении, задают на проективной плоскости соответственно кривую 3-го порядка и прямые – в одном случае касательную, проведенную к кривой в её известной рациональной точке, в другом случае прямую, проходящую через две известные рациональные точки кривой. Однако в самой работе такой геометрической интерпретации методов нет: следует учесть, что общие однородные проективные координаты были введены Плюккером в его «Аналитико-геометрических исследованиях» (1828 г., 1831 г.) позже и только после этого стало возможным рассматривать алгебраические кривые на проективной плоскости. В работе [5] изучение проблемы о рациональных решениях диофантовых уравнений было поставлено на новый уровень общности. При этом были получены чисто алгебраическим путем методы касательной и секущей для нахождения рациональных точек на эллиптических кривых 3-го порядка в наиболее общей ситуации.

К. Г. Якоби был, по-видимому, первым, кто указал на возможность выйти за рамки алгебраического подхода при трактовке проблемы решения неопределенных уравнений в рациональных числах. В своей статье 1835 года «De Usu Theoriae Integralium Ellipticorum et Integralium Abelianorum in Analysi Diophantea» [6] он обращается к одной из поздних работ Эйлера, увидевшей свет только в 1830 году. Якоби отмечает аналогию между рассуждениями этой работы, приводящими Эйлера к бесконечной процедуре последовательного нахождения рациональных решений уравнения вида (3) по одному или двум его известным рациональным решениям, и рассуждениями, с помощью которых Эйлер получает теорему сложения эллиптических интегралов. Установив связь между проблемой решения в рациональных числах уравнения (3) и теоремами сложения эллиптических интегралов вида $\Pi(x) = \int\limits_0^x \frac{dx}{\sqrt{f_4(x)}}$, Якоби предлагает для нахождения рациональных решений уравнения (3) по нескольким известным рациональным решениям использовать эти теоремы сложения. По существу в [6] был дан эскиз исследования множества рациональных точек эллиптической кривой с помощью аналитического аппарата теории эллиптических интегралов и эллиптических функций без детальной проработки рассматриваемых там вопросов. Также в [6] было предложено использовать теорему сложения абелевых интегралов для изучения диофантовых уравнений видов $f_5(x) = y^2$ и $f_6(x) = y^2$, задающих кривые рода 2 (подробный анализ результатов Якоби см. в [7]). Благодаря статье Якоби открылся новый путь, приводящий к принципиальному расширению средств исследования неопределенных уравнений. Но вплоть до 1880 года новых результатов в этом направлении, по-видимому, получено не было.

К середине XIX века в диофантов анализ начинают проникать геометрические представления. Например, Дж. Дж. Сильвестр в небольшой работе [8] 1847 года, посвященной решению в целых числах уравнения

$$x^3 + y^3 + Az^3 = Mxyz \tag{6}$$

с целыми A и M, вводит в рассмотрение кривую

$$X^3 + Y^3 + 1 = \frac{M}{\sqrt[3]{A}}XY. \tag{7}$$

Говоря о различиях в трактовке диофантова уравнения (6) в случае, если $27A - M^3 > 0$, и в случае, если $27A - M^3 < 0$, он объясняет их разными свойствами кривой (7) в этих двух случаях: если $27A - M^3 > 0$, то кривая (7) «является непрерывной кривой, простирающейся в обе стороны до бесконечности», а если $27A - M^3 < 0$, то помимо этой непрерывной ветви она включает «замкнутую ветвь», или «овал» [8, с. 470].

О попытках Сильвестра исследовать диофантовы уравнения с помощью геометрических средств свидетельствует и его письмо к А. Кэли от 23.10.1856 [9, с. 93]. Высказывая идею о связи между решением в рациональных числах уравнений, задаваемых с помощью кубической формы от трех переменных и с помощью кубической формы от четырех переменных, Сильвестр формулирует свои соображения на геометрическом языке, говоря о рациональных кривых и о рациональных точках на кубической поверхности.

В работе Сильвестра 1858 года, называемой «Note on the Algebraical Theory of Derivative Points of Curves of the Third Degree» [10], мы снова встречаем геометрический язык при рассмотрении неопределенных уравнений. В [10] сообщается о получении некоторых результатов относительно общего однородного уравнения третьей степени (5), одно решение которого $x = a,\ y = b,\ z = c$ известно, и дается описание этих результатов, которые Сильвестр называет «теорией деривации», в общих чертах, без точных формулировок. Вначале условие целочисленности на коэффициенты уравнения (5) и на само решение (a, b, c) не накладывается. Рассматривая далее вопрос о «связи между этой теорией деривации и арифметикой уравнений третьей степени с тремя неизвестными с целыми коэффициентами», Сильвестр трактует целочисленные решения таких уравнений как точки «на кривой, соответствующей данной кубике» [10, с. 118]. Он формулирует два геометрических способа нахождения нового целочисленного решения (5) по известному целочисленному решению:

1) с помощью проведения касательной к кривой (5), т.е. «метод касательной»;

2) с помощью проведения коники, касающейся (5), т.е. «метод конических сечений», частным случаем которого является «метод парабол».

По-видимому, Сильвестр был одним из первых математиков, кто пытался привлечь для исследования диофантовых уравнений геометрические средства. Однако в его работах 1847-1858 годов, посвященных неопределенным уравнениям, не было подробного изложения результатов и эффективность геометрического подхода к трактовке диофантовых уравнений будет показана им значительно позже, в 1880 году.

В 1878 году в печати появляется статья французского математика Э. Люка «Sur l'Analyse indéterminée du troisième degré...», в которой однородное уравнение (5) 3-ей степени интерпретируется как уравнение кривой в однородных координатах на проективной плоскости и формулируются, причем вполне современным образом, процедуры нахождения рациональных (или целочисленных, что в данном случае одно и то же) точек на такой кривой - «метод касательной» и «метод секущей» [11]. Хотя, как мы видели, Сильвестр и до этого прибегал к геометрическому языку при рассмотрении методов нахождения целочисленных решений уравнения (5), тем не менее четкие геометрические формулировки методов касательной и секущей как двух основных методов отыскания целочисленных решений уравнения (5) по одному или двум известным целочисленным решениям появились впервые в печати именно в работе Люка.

В 1879-1880 годах была опубликована работа Дж. Дж. Сильвестра [12], в которой в качестве основы для исследования неопределенных уравнений 3-ей степени, задающих плоские эллиптические кривые, используется теория алгебраических кривых. Разработав на этой основе некую «теорию индексов», Сильвестр смог перейти от рассмотрения отдельных рациональных точек на кубической кривой, как это было до него, к изучению всего множества рациональных точек, порожденного одной рациональной точкой с помощью методов касательной и секущей, и исследованию его структуры. Это были первые общие результаты о структуре множества рациональных решений уравнения (5).

В том же 1880 году У. Э. Стори существенно упростил теорию индексов Сильвестра, применив аналитический аппарат теории эллиптических кривых [13]. В своем исследовании он использовал параметризацию неособой кубики (5) с помощью эллиптических функций.

В 1890 году аппарат теории алгебраических кривых был применен Д. Гильбертом и А. Гурвицем для изучения структуры множества рациональных точек плоской кривой рода 0 [14]. В [14] было установлено, что это множество униформизируемо в рациональных функциях.

Наконец, в 1901 году выходит в свет мемуар А. Пуанкаре [1], положивший начало новому этапу в развитии диофантова анализа.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Poincaré H. Sur les propriétés arithmétiques des courbes algébriques // Journal des mathématiques pures et appliqées. 1901. V. 7. P. 161-233. (Русский перевод: Пуанкаре А. Об арифметических свойствах алгебраических кривых. Избранные труды. Т.2. М., 1972. С. 901-960.)

2. Euler L. Vollständige Anleitung zur Algebra. Petersbourg, 1770.

3. Лавриненко Т. А. Неопределенные уравввнения в работах Л. Эйлера и математиков XIX века. : дис. канд. физ. -мат. наук: 07.00.10. М., 1984. 166 с.

4. Lagrange J. L. Sur quelques problèmes de l'analyse de Diophante // Nouveaux Mémoires de l'Ac. royale des sc. et belle-lettre de Berlin, 1777; Oeuvres. Paris,1869. T. 4. P. 377-398.

5. Cauchy A. Sur la resolution de quelques équations indéterminées en nombres entiers // Cauchy A. Exercices de mathématiques. Paris, 1826; Cauchy A. Ouevres complètes (II). Paris, 1887. T.6. P. 286-315.

6. Jacobi C. De Usu Theoriae Integralium Ellipticorum et Integralium Abelianorum in Analysi Diophantea // Crelle Journal für die Reine und Angewandte Mathematik. 1835. V. 13. P. 353-355.

7. Башмакова И. Г. Арифметика алгебраических кривых (от Диофанта до Пуанкаре) // Историко-математические исследования. 1975. Вып. 20. С. 104-124.

8. Sylvester J.J. On the General Solution (in Certain Cases) of the Equation $x^3 + y^3 + Az^3 = Mxyz$ & c. // Phil. Mag. 31(1847). P.467-471 // Sylvester J.J. Collected Mathematical Papers. V.1. Cambridge Univ. Press. P.114-118.

9. Parshall K. James Joseph Sylvester: Life and Work in Letters. Oxford: Oxford University Press, 1998.

10. Sylvester J.J. Note on the Algebraical Theory of Derivative Points of Curves of the Third Degree. Phil. Mag. 16(1858) P.116-119 // Sylvester J.J. Collected Mathematical Papers. V.2. Cambridge Univ. Press. P.107-109.

11. Lucas E. Sur l'Analyse indéterminée du troisième degré et sur la question 802 (Sylvester) // Nouv. ann. math.. 2e série, 17. 1878. P.507-514.

12. Sylvester J.J. On Certain Ternary Cubic-Form Equations // Amer. J. Math. 2 (1879), p.280-285 and p.357-393; 3 (1880), p.58-88 and p.179-189 // Sylvester J.J. Collected Mathematical Papers. V.3. Cambridge Univ. Press. P.312-391.

13. Story W.E. On the Theory of Rational Derivation on a Cubic Curve // Amer. J. Math. (3) 1880. P.356-387.

14. Hilbert D., Hurwitz A. Über die diophantischen Gleichungen vom Geschlecht Null // Acta Mathematica. 1890. V. 14. P. 217-224.

УДК 51(091)

Дискретная геометрия мутакаллимов

И. О. Лютер (Россия, Москва)
Институт истории естествознания и техники им. С. И. Вавилова РАН
e-mail: bastet_13@list.ru

Discrete geometry of mutakallimun

I. O. Lyuter (Russia, Moscow)
S. I. Vavilov Institute for the History of Science and Technology, RAS
e-mail: bastet_13@list.ru

1. Калам — одно из основных направлений арабо-мусульманской философии, опиравшееся на логико-философские положения, в рамках которого разрабатывалась спекулятивная теология ислама [1]. Зародившийся во второй половине VIII в. калам отличается от традиционного богословия тем, что предмет этого учения включает кроме богословских тем (например, природа и атрибуты Бога, пророчества, откровения) собственно философские логику, эпистемологию, космологию, антропологию и др. Сочинения мутакаллимов (приверженцев калама) VIII–IX вв. по физической теории калама сохранились лишь фрагментарно. Поэтому особенно значимыми для исследователей оказываются тексты мутакаллимов X–XI вв. (например, представителей мутазилитской школы калама Ибн Маттавайха (XI) и Абу Рашида ан-Нисабури (XI), а также тексты представителей ашаритской школы калама Абу ал-Махали ал-Джувайни (ум. 1085) и Ибн Фурака (ум. 1015)).

2. Отличительной чертой космологии калама стал атомизм. Атом мутакаллимов представляет собой физически и концептуально неделимую (следовательно, минимальную) частицу; обладает величиной, которая рассматривалась как его существенное свойство; имеет форму, подобную кубу. Все атомы однородны.

Наделенный величиной атом, однако, не имел длины, ширины и глубины. Измерения, по мнению мутакаллимов, образовывались только при соединении атомов. Концепция безразмерных атомов, соединяющихся для образования тела, имеющего размеры, характерна только для калама.

В X в. мутазилит из Басры Абу Хашим ал-Джубба'и (ум. 933) определил атом, как то, что занимает пространство. Из этого определения, а также аргументов выдвинутых мутакаллимами в поддержку тезисов о том, что атом имеет величину и его форма напоминает куб, следовало, что атом должен быть как-то протяжен. Таким образом, атом не является телом, не имеет длины, ширины и глубины, но он по-своему протяжен, а его протяженность является принципом телесности.

3. В античности и средневековье любое различие между геометрическим и физическим пространством было невозможно (так, дискретное физическое пространство означало дискретное геометрическое пространство). В таком случае, понятия «неделимое», «измерение», «величина» и «тело» мутакаллимов должны рассматриваться с позиций геометрии минимальных частиц – дискретной геометрии. Тогда точка, не имеющая частей, будет эквивалентна неделимому атому калама; линия, концы которой две точки, в дискретной геометрии будет состоять как минимум из двух неделимых (то есть два атома составляют наименьшую линию, образуют измерение «длина»). С учетом этих обстоятельств отдельный атом калама не может иметь длину, ширину и глубину, но имеет минимальную величину как неделимый дискретной геометрии.

4. Если атом минимальная частица и с позиций дискретной геометрии он безразмерен, как тогда можно сказать, что он имеет величину? Не все мутакаллимы соглашались с тем, что атом имеет величину. Те, кто принимал это, исходили из того, что протяженное тело образуется с помощью соединения атомов, а его величина определяется тем, что составляющие его атомы по своей природе имеют величину. Отрицающие величину атома, считали, что величина тела происходит благодаря акциденциям сцепления, которые должны присутствовать в этих атомах, когда они объединяются и формируют тело. Однако, в конечном счете, все разногласия сводились к значению термина «величина». Одни считали, что величина – это знание длины, ширины и глубины. Другие, по сообщению Ибн Маттавайха, говорили о значении термина «величина» следующее: «Хотя атом имеет величину, он не имеет длины и

ширины... Это потому, что длина является особым видом соединения [атомов]... поскольку существование акциденции сцепления в отдельных изолированных атомах невозможно, атом не может иметь ни длины, ни ширины» [2, с.111].

Точку зрения о том, что атом не имеет ни длины, ни ширины, ни глубины, разделяли все мутакаллимы. Эти измерения, по их мнению, требуют соединения, по крайней мере, двух атомов в определенном направлении, которое, в рамках дискретной геометрии, составляет измерение длины, поскольку результат соединений теперь имеет как минимум два края в этом измерении. Хотя атом и является минимальной частью, следовательно, наименьшим протяженным объектом, в дискретной геометрии эта протяженность недостаточна для образования длины, ширины и глубины. Признавая, что атом занимает пространство, подобно телу, мутакаллимы полагают, что атом не может, в рамках дискретной геометрии, которой они неявно придерживаются, иметь длину, ширину и глубину. Таким образом, использование ими понятий «величина» или «размер» отличается от использования ими понятий «длина», «ширина», «глубина» и «измерение».

5. Несколько аргументов, сформулированных последователями Абу Хашима ал-Джубба'и в поддержку предпосылки, что атом имеет внутреннюю величину.

Первый аргумент: пусть величина тела есть результат соединения непротяженных атомов; тогда, если тело длиной в двадцать атомов разрезать вдоль на двадцать частей, длина уничтожится, потому что акциденции сцепления между двадцатью частями будут упразднены; опыт свидетельствует, что это не так; следовательно, величина тела не может быть получена из акциденций сцепления, присущих составляющим его атомам.

Второй аргумент: в круге с атомом C в центре и атомом N рядом с атомом C, длина CP, где P – пересечение, образованное линией CN с окружностью круга, должна быть больше, чем длина NP; это верно только потому, что атомы по своей природе имеют величину.

Третий аргумент: должна быть возможность различать существование объекта и его небытие; если бы атом мог существовать, не будучи в то же время занимающим пространство объектом, невозможно было бы утверждать что он является объектом, посредством которого происходит занятие пространства.

Из этих аргументов следует: величина атома есть его существенное свойство, тождественное его свойству занимать место в пространстве; каждый атом должен иметь величину прежде, чем он будет добавлен к другому атому; в результате, когда атом прилагается к телу, тело становится больше. Несмотря на то, что акциденция сцепления не влияет на величину тела, увеличение его величины происходит от внутренней природы атома и не производится акциденцией сцепления.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Frank R. The Science of Kalam // Arabic Sciences and Philosophy. 1992. No 2. P. 7–37.

2. Dhanani A. The Physical Theory of Kalam: Atoms, Space, and Void in Basrian Mu'tazili Cosmology. Leiden: E. J. Brill, 1994.

УДК 51(091)

Ученый и педагог. К 80-летнему юбилею Владислава Ивановича Рыбакова (13.12.1939–27.09.2016)

Е. В. Манохин (Россия, г. Тула)
Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации

e-mail: emanfinun@mail.ru
А. Е. Устян (Россия, г. Тула)
Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого
e-mail: ustyan37@mail.ru
Г. В. Кузнецов (Россия, г. Тула)
Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации
e-mail: tula@fa.ru

Scholar and teacher. TO the 80th anniversary Vladislav Ivanovich Rybakov (13.12.1939–27.09.2016)

E. V. Manokhin (Russia, Tula)
Financial University under the Government of the Russian Federation
e-mail: emanfinun@mail.ru
A. E. Ustyan (Russia, Tula)
Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University
e-mail: ustyan37@mail.ru
G. V. Kuznetsov (Russia, Tula)
Financial University under the Government of the Russian Federation
e-mail: tula@fa.ru

1. Основные факты биографии

Рыбаков Владислав Иванович родился 13 декабря 1939 г. в г. Томске. В 1940 г. жил в г. Красноярске, где в 1957 году окончил среднюю школу, поступил на факультет математики и черчения. Окончил в 1962 году, получил специальность преподаватель математики средней школы.

С 1962 по 1964 гг. работал учителем восьмилетней школы г. Черногорск Красноярского края.

В 1964 поступил в аспирантуру при кафедре математического анализа Московского государственного педагогического института им. В. И. Ленина. Закончил аспирантуру в 1967 году.

Защитил кандидатскую диссертацию в 1968 году на тему: «Некоторые вопросы интегрирования векторнозначных функций».

В 1967–1968 учебном году работал старшим преподавателем Тюменского techинститута, откуда уехал по состоянию здоровья.

В 1968–1969 учебном году работал в Шуйском пединституте. В январе 1969 года В. И. Рыбаков был назначен и. о. зав. кафедрой математики. В период работы в институте он преподавал математический анализ, дополнительные главы математического анализа, математическую логику, вёл спецкурс по теории меры и интеграла. Вёл спецсеминар по функциональному анализу.

Владислав Иванович все виды учебных занятий вёл на высоком научно-методическом уровне.

С сентября 1969 г. по август 1974 г. — доцент кафедры математического анализа Тульского пединститута.

С сентября 1974 г. по август 1976 г. — старший научный сотрудник кафедры математического анализа Тульского пединститута.

С сентября 1976 г. — доцент кафедры математического анализа Тульского пединститута. Был требователен к себе и к студентам. Оказывал большую помощь студентам, желающим более глубоко овладеть математическими дисциплинами.

Рыбаков Владислав Иванович вёл систематическую и очень плодотворную научную работу. Под его руководством вели научную работу отдельные студенты, которые впоследствии стали кандидатами физико-математических наук.

Успешно работал в качестве куратора академической группы.

Являлся научным руководителем студенческого научного общества (СНО) математического факультета. В последние годы, несмотря на болезни, Владислав Иванович не прекращал заниматься любимым делом, которому посвятил всю жизнь. До последнего дня он не снижал научный активности. Рыбаков Владислав Иванович умер 27 сентября 2016 г. в Туле.

2. Научная работа

Работы В. И. Рыбакова оказали значительное влияние на развитие функционального анализа.

Особо отмечаются исследования В. И. Рыбакова по теории меры и интеграла.

Владиславом Ивановичем Рыбаковым получены глубокие, содержательные научные результаты. Например, о «the classical theorem of Rybakov» можно прочитать в монографиях и статьях, опубликованных в международной математической печати.

Пусть X — нормированное пространство, (S, Σ, μ) — пространство с конечной неотрицательной мерой (Σ — σ-алгебра подмножеств множества S). Функцию $m : \Sigma \to X$ называем векторной мерой, если m счетно аддитивна (иногда векторную меру для краткости будем называть мерой).

В 1968 году вышли работы ([1], [2]). В первой работе рассматривались векторные меры, имеющие σ-конечную вариацию, со значениями в вещественном банаховом пространстве. Изучалась возможность представления их интегралом (в смысле Гельфанда) от векторной функции по скалярной мере. Показано, что в случае, когда X рефлексивно, векторная мера представляется интегралом Петтиса от сепарабельнозначной функции, значения которой принадлежат X.

Далее, на примере показано, что если X нерефлексивно, то, вообще говоря, это не имеет места. В работе [2] рассмотрено обобщение теоремы Радона–Никодима на случай, когда обе меры являются векторными (со значениями в банаховом пространстве). В заключение были даны необходимые и достаточные условия для представления векторной меры интегралом Бохнера.

Работа [3] 1970 года содержит ту самую "the classical theorem of Rybakov" (название взято нами, например, из англоязычной работы [4] 1998 года), которую мы изложим в формулировке из работы [4].

Теорема 1. *Banach spaces have the Rybakov property.*

Математические идеи Владислава Ивановича живут и развиваются, например, в работе A. Fernandez and F. Naranjo [5], а в работе [4] ее автор доказывает

Предложение 1. *A Frechet space X has Rybakov's property if and only if it does not contain an isomorphic copy of ω.*

A Frechet space X is said to have Rybakov's property [5] if for every X-valued vector measure m there is $x' \in X'$ such that $m \ll |\langle m, x' \rangle|$. Let $m : \sigma \to X$ be a vector measure and $\mu : \Sigma \to [0, \infty)$ be a finite measure.

Результаты Владислава Ивановича хорошо цитировались и не только в многочисленных статьях, но и в книгах, выходивших за рубежами нашей страны, см., например, ([6]-[8]). Один из авторов статьи, ученик Владислава Ивановича, учившийся в аспирантуре у М. И. Кадеца, вспоминает, как М. И. Кадец, который сам был великим математиком, чувствуя уважение к Владиславу Ивановичу, показывал ему, своему аспиранту толстый фолиант на английском языке, содержащий теорему Рыбакова.

3. Заключение

Математика и педагогика — для Владислава Ивановича Рыбакова это были главные ценности, которым он посвятила свою жизнь и творчество. Открытость и дружелюбность Владислава Ивановича, неизменное внимание к каждому, кто встречался на его пути, высокий профессионализм, определили отношение коллег, у которых Владислав Иванович пользовался огромным уважением. Чувство глубокой благодарности за добрые дела и светлая память о выдающемся ученом, педагоге, научном руководителе и просто замечательном человеке сохраняется в сердцах его коллег, учеников, друзей и близких.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. В. И. Рыбаков. О векторных мерах // Изв. вузов. Матем. 1968., № 12. С. 92–101.

2. В. И. Рыбаков. Теорема Радона–Никодима и представление векторных мер интегралом // Докл. АН СССР. 1968.,Том 180, № 2. С. 282–285.

3. В. И. Рыбаков. К теореме Бартла–Данфорда–Шварца о векторных мерах // Матем. заметки. 1970.,Том 7, № 2. С. 247–254.

4. W. J. Ricker. Rybakov s theorem in Frechet spaces and completeness of L1-spaces // Austral. Math. Soc. (Series A). 1998., № 64. С. 247-252.

5. A. Fernandez and F. Naranjo. Rybakov's theorem for vector measures in Frechet spaces // Indag. Math. (New Series). 1997., № 8. С. 33-42.

6. Vector and Operator Valued Measures and Applications. Editors Don H. Tucker (Department of Mathematics, University of Utah, Salt Lake City, Utah),Hugh B. Maynard (Department of Mathematics, University of Utah, Salt Lake City, Utah), 1973, Pages 474.

7. Notas de Matemática (58): Vector Measures and Control Systems, Series: North-Holland Mathematics Studies, Year: 1975, Volume 20, Page 169.

8. Handbook of Measure Theory, Volume I, 2002, Pages 249.

УДК 51(091)

З. И. Халилов — один из основоположников функционального анализа

М. Дж. Марданов (Азербайджан, г. Баку)
Институт математики и механики НАН Азербайджана
e-mail: misirmardanov@yahoo.com
Р. М. Асланов (Азербайджан, г. Баку)
Институт математики и механики НАН Азербайджана
e-mail: r_aslanov@list.ru
Т. Х. Гасанова (Азербайджан, г. Баку)
Институт математики и механики НАН Азербайджана
e-mail: q.tamilla@gmail.com

Z. I. Khalilov — one of the founders of functional analysis

M. J. Mardanov (Azerbaijan, Baku)
Institute of Mathematics and Mechanics of the National Academy of Sciences of Azerbaijan
e-mail: misirmardanov@yahoo.com
R. M. Aslanov (Azerbaijan, Baku)
Institute of Mathematics and Mechanics of the National Academy of Sciences of Azerbaijan
e-mail: r_aslanov@list.ru
T. Kh. Hasanova (Azerbaijan, Baku)
Institute of Mathematics and Mechanics of the National Academy of Sciences of Azerbaijan
e-mail: q.tamilla@gmail.com

Можно с уверенностью сказать, что после Насиреддина Туси, а точнее после девятивекового перерыва, не считая каких-то незначительных фрагментов в истории науки Азербайджана, З. И. Халилов вместе со своими соратниками — А. И. Гусейновым, И. И. Ибрагимовым и М. И. Джавадовым — являются основоположниками современной математической науки в Азербайджане.

Заид Исмаил оглы Халилов родился 14 января 1911 г. в г. Тбилиси. Начальное и среднее образование получил в г. Тбилиси, где в 1929 г. окончив Педагогический техникум им. Нариманова, переезжает в г. Баку, поступает на математическое отделение Азербайджанского педагогического института им. В.И.Ленина.

В 1930 году З. И. Халилов начал педагогическую деятельность в должности преподавателя математики на рабфаке Азербайджанского Краснознаменного нефтяного института. А в 1932 году, после окончания математического отделения Азербайджанского педагогического института им. В. И. Ленина, он получает место доцента на кафедре высшей математики и теоретической механики Тбилисского института инженеров железнодорожного транспорта им. В. И. Ленина. Молодой ученый параллельно читал лекции в Закавказском институте инженеров электросвязи и в Тбилисском государственном университете.

Современники отмечают, что на раннем этапе трудовой деятельности З. И. Халилов проявил себя как разносторонний преподаватель с глубокими знаниями в области разных наук. Кроме лекций по математике, он с большим мастерством вел курсы физики, механики и теоретической электротехники. В своей дальнейшей научной и педагогической деятельности З. И. Халилов сохранил интерес к прикладным направлениям науки.

Пытливый ум и исключительная эрудиция З. И. Халилова выделяли его среди других членов Тбилисской математической школы. Его руководитель — академик Николай Иванович Мусхелишвили — оценил упорство молодого ученого и ввел его в свой ближний круг.

З. И. Халилов вместе с многочисленными учениками Н. И. Мусхелишвили активно участвовал в научных семинарах по математической теории упругости, интегральным и дифференциальным уравнениям, теории функций комплексного переменного и т. д.

В 1937 г. З. И. Халилов поступает в аспирантуру Тбилисского математического института его научным руководителем был известный немецкий математик Стефан Бергман. Под его руководством молодой ученый начал исследования в области теории функций многих переменных. После выезда С. Б. Бергмана из Советского Союза, научным руководителем З. И. Халилова стал академик Николай Иванович Мусхелишвили.

В апреле 1940 г. З. И. Халилов успешно защищает кандидатскую диссертацию на тему «Задача Клебша и ее обобщение», которая была высоко оценена крупными советскими учеными. После защиты кандидатской диссертации воодушевленный первыми крупными успехами, Заид Халилов с двойной энергией принимается за новую работу «Исследование динамической устойчивости эллиптической плоско-упругой пластины, находящейся под действием продольных периодических сил».

По приглашению Азербайджанского государственного университета им. С. М. Кирова и Азербайджанского педагогического института им. В. И. Ленина З. И. Халилов в 1940 г. переезжает на постоянную работу в Баку, где до 1959 г. работал сначала доцентом, затем заведующим кафедрой теоретической механики университета.

В январе 1942 г. З. И. Халилов приступает к работе в Азербайджанском филиале Академии наук СССР. В то время он был единственным математиком в секторе физики. В апреле 1942 г. он назначается руководителем секции теоретической физики и математики, одной из сильнейших во всем филиале. Уже тогда, с первых дней руководства, З. И. Халилов развернул в имеющемся формате большие научно-исследовательские работы в области теории дифференциальных уравнений, современной алгебры, теоретической физики и дифференциальной геометрии.

В 1944 г. секция была преобразована в самостоятельный сектор филиала Академии наук СССР. По сути это был первый в советском Азербайджане математический центр.

Получив оперативный простор в руководстве, З. И. Халилов проявил себя как исключительно талантливый организатор.

В начальный период его работы выделились и оформились основные направления исследований. К их числу относился линейный и нелинейный функциональный анализ с приложениями к дифференциальным и интегральным уравнениям, теория функций и неевклидова геометрия.

Результаты научных исследований З. И. Халилова и его коллег стали началом развития нового математического направления функционального анализа и его применения. Первый в СССР учебник «Основы функционального анализа», был издан З.И. Халиловым в 1949 году в городе Баку в издательстве Азербайджанского государственного университета.

В книге академика З.И. Халилова затронуты основные вопросы функционального анализа, которые входят в программу по функциональному анализу для математических факультетов университетов. В каждой главе (всего 11) по указанным пространствам и операторам приведены оригинальные примеры, принадлежащие самому автору. Заметим, что при изложении тех или иных проблем автор указывает первоначальный источник, кем решена и в каком журнале опубликована.

Эта книга З. И. Халилова в корне перевернула представления ученых в этой области.

Отметим, что в 2018 году по инициативе Института математики и механики Национальной академии наук Азербайджана в Москве в издательстве «URSS» в серии физико-математическое наследие (математика- функциональный анализ) было издано второе издание исправленное и дополненное, книги З.И. Халилова «Основы функционального анализа».

Помимо функционального анализа, З. И. Халилов внес значительный вклад в область классической теории дифференциальных уравнений. Им были проведены качественные исследования в полигармонических уравнениях и их применение в решении различных задач теории упругости и математической физики.

З. И. Халилов также исследовал зависимость решения краевых задач от параметра, входящего в коэффициенты уравнений и граничные условия; рассмотрел применение к общей задаче об изгибе опертых упругих пластин.

Эти исследования вошли в докторскую диссертацию З. И. Халилова, с успехом защищенную им 3 июня 1946 г. на ученом совете Тбилисского государственного университета им. И. В. Сталина. Научные результаты этой диссертации вошли в золотой фонд математической литературы по краевым задачам и являются ценным вкладом в теорию краевых задач.

В 1943–1950 гг. З. И. Халилов исследовал общую краевую задачу для изотропной упругой плоской пластинки с опертыми краями. В 1953 году эта революционная статья была переведена на английский язык и издана в Нью-Йорке Американским математическим обществом. До сегодняшнего дня результаты З. И. Халилова по решению математической задачи изгиба и колебания опертых пластин остаются наиболее полными. Они легли в основу трудов многих советских математиков. В 1954 году вышла монография академика Н. И. Мусхелишвили «Некоторые математические задачи теории упругости», а в 1956 году — монография В. Б. Болотина «Динамическая устойчивость упругих систем». Обе монографии строились и на результатах З. И. Халилова.

В 1947 году после слияния руководимого им сектора математики и Института физики ученый был назначен руководителем Отдела математики Института физики и математики.

Три года спустя, в 1950 г., Заид Халилов был назначен директором Института физики и математики Академии наук Азербайджанской ССР. Под его руководством научная тематика института становится максимально конкретной: фундаментальные исследования и важнейшие прикладные задачи. Проверенный еще при реформировании секции рецепт и организационный талант руководителя вновь привел ученого к успеху. Под руководством З. И. Халилова Институт физики и математики АН АзССР стал одним из крупнейших научных центров Советского Союза.

В 1947–1950 гг. З. И. Халилов и его коллеги разработали абстрактную теорию сингулярных уравнений, которая как частный случай содержит теорию одномерных сингулярных интегральных уравнений, получившую большое развитие в исследованиях грузинских математиков. Используя эту работу, математик из Британии Ф. В. Аткинсон разработал теорию нормальной разрешимости линейных уравнений в нормированных пространствах.

В 1946–1950 гг. З. И. Халиловым была создана и развита теория линейных уравнений с не вполне непрерывными операторами в нормированных кольцах и банаховых пространствах, обобщающая классическую теорию линейных сингулярных интегральных уравнений. В частности, им была построена абстрактная теория Нётер и дана общая теория регуляторов. Эти исследования Заида Халилова стали основным содержанием его монографии «Линейные уравнения в линейных нормированных пространствах», изданной в 1949 г. издательством Академии наук Азербайджанской ССР в городе Баку и получившей широкий отклик в исследованиях советских и зарубежных ученых.

Эта монография содержит самые лучшие достижения мировой литературы по теории уравнений в абстрактных пространствах. В дальнейшем теория линейных сингулярных уравнений З. И. Халилова была развита в работах математиков: М. А. Гольдмана, И. Ц. Гохберга, Ю. И. Черского, Х. Шефера.

В 1950–1952 гг. З. И. Халилов исследовал задачу Коши для операторных дифференциальных уравнений относительно функции со значениями из произвольного пространства Банаха. Ею занимаются крупнейшие математики мира.

В 1952–1954 гг. З. И. Халилов показал метод решения смешанных задач для гиперболических и параболических уравнений с неразделяющимися переменными.

В 1953 г. З. И. Халилов решил краевую задачу для уравнения смешанного типа (уравнение Лаврентьева—Бицадзе) методом сеток. Конечно-разностный метод З. И. Халилова для уравнения смешанного типа является мощным орудием ученых, работающих в области прикладной математики. В дальнейшем он был развит другими исследователями, в частности профессором Ленинградского университета им. А. А. Жданова О. А. Ладыженской и В. Г. Кармановым в их кандидатских диссертациях. Полученные результаты приводятся в известной монографии А. В. Бицадзе «Уравнения смешанного типа» М.: Издательство Академии наук СССР, 1959. 164 с.

В 1954 г. З. И. Халиловым рассмотрены несамосопряженные операторы, «близкие» к самосопряженным; изучена структура спектра таких операторов. Результаты З. И. Халилова по спектральной теории несамосопряженных операторов имеют выход как в теорию линейных интегральных уравнений, так и в спектральную теорию дифференциальных уравнений. Результаты этих исследований были представлены в Москве на III Всесоюзном математическом съезде в 1956 году.

З. И. Халилов в своих математических исследованиях всегда учитывал их прикладное значение. Им была решена общая задача теории фильтрации газа и газированной нефти, возникшая в связи с потребностями нефтяной промышленности республики. Найдены условия, при которых процесс последовательных приближений решения сходится. Полученные З. И. Халиловым результаты были представлены на Всесоюзном совещании по вторичным методам добычи нефти в Баку в мае 1954 г. Следует отметить, что задача фильтрации газированной нефти приводит к задаче об определении двух функций, связанных двумя уравнениями.

Позднее, в 1955 г. З. И. Халиловым была предложена конечно-разностная схема для решения задачи фильтрации газированной нефти. В числе работ Заида Исмаил оглы Халилова есть одна, дающая приближенный метод решения задач расчета потока газа — потока, имеющего скорость вплоть до сверхзвуковой. Эта работа имеет важное значение для теории современной скоростной и сверхскоростной авиации, строительства мощных турбин и т. д.

В 1955–1959 гг. З. И. Халилов исследовал обобщенное решение смешанной задачи для гиперболических уравнений, а также установил условия, при которых обобщение решения задачи становится классическим. В 1958 г. эти результаты были представлены З.И. Халиловым на Всесоюзном совещании по дифференциальным уравнениям.

В 1959 г. З. И. Халилов возвращается к исследованию операторных дифференциальных уравнений в банаховых пространствах и получает весьма интересные результаты. Свои выводы математик обнародовал в 1959 г. на V Всесоюзной конференции по функциональному анализу и его применениям, которая проходила в городе Баку.

Во второй половине 1960-х годов внимание З. И. Халилова было привлечено к задачам, связанным с применением методов теории дифференциальных уравнений в абстрактных пространствах к задачам оптимального управления системами, описываемыми уравнениями в частных производных.

В последние годы Заид Халилов проводил исследования в области глобального анализа: им получены результаты по применению принципа неподвижной точки Смейла к нелинейным сингулярным операторам специального вида. Указанные исследования этого периода изложены в рукописи монографии «Теория линейных и нелинейных сингулярных уравнений на многообразиях», завершению которой помешала неумолимая смерть.

В 1955 году по представлению крупнейших советских ученых — академиков В. И. Смирнова, Н. И. Мусхелишвили, С. Л. Соболева, И. Н. Векуа и многих других видных математиков, а также ряда научных и общественных организаций З. И. Халилов был избран действительным членом Академии наук Азербайджанской ССР (ныне НАН Азербайджана). В 1957 г. академик З. И. Халилов избирается вице-президентом Академии наук Азербайджанской ССР. С 1962 по 1967 гг. являлся президентом АН Азербайджанской ССР. С 1967 года и до конца своей жизни работал директором Института математики и механики АН Азербайджанской ССР, созданного им в свое время. З. И. Халилов активно участвовал во всех важнейших событиях математической жизни СССР.

Организаторский талант З. И. Халилова был высоко оценен не только в родной республике, но и за ее пределами. Он являлся бессменным членом редколлегии всесоюзного журнала «Функциональный анализ и его приложения», был членом (с момента их создания) национальных комитетов советских математиков и механиков, являлся членом ВАКа, президентом Азербайджанского математического общества.

В советское время он был первым азербайджанским математиком, основоположником школы функционального анализа в Азербайджане. Заид Исмаил оглы Халилов на 64-м году жизни скоропостижно скончался 4 февраля 1974 г. в городе Баку. Он похоронен на аллее Почётного захоронения в городе Баку. Его именем названа улица города Баку, где находится Бакинский государственный университет - улица З. Халилова, 23, в котором работают и его ученики.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. М.Дж. Марданов, Р.М. Асланов «Предшественники современной математики Азербайджана». Историко-математические очерки. М.: издательство «Прометей», 2016, 516 стр.

2. Халилов З.И. Основы функционального анализа, М.: издательство «URSS», 2018. 256с.

УДК 51(091)

Метафизика московской математической школы на рубеже XIX–XX веков

Р. А. Мельников (Россия, г. Елец)
ЕГУ им. И.А. Бунина
e-mail: roman_elets_08@mail.ru
О. А. Саввина (Россия, г. Елец)
ЕГУ им. И.А. Бунина
e-mail: oas5@mail.ru

Metaphysics of the moscow mathematical school on the border of XIX–XX centuries

R. A. Melnikov (Russia, Yelets)
Bunin Yelets State University
e-mail: roman_elets_08@mail.ru
O. A. Savvina (Russia, Yelets)
Bunin Yelets State University
e-mail: oas5@mail.ru

В истории взаимоотношений науки и религии были разные периоды, в том числе, доходившие до крайностей (инквизиция, отлучение от церкви (анафема); научный атеизм и т.п.). Известно немало свидетельств тому, что многие философы (они же математики, физики, естествоиспытатели и др.) либо сами были монахами, либо происходили из благочестивых семей, где традиции веры свято чтились несколькими поколениями предков.

Известно, что религиозное мировосприятие сказалось на текстах научных работ создателей математического анализа И. Ньютона и Г. В. Лейбница.

Немало таких примеров можно найти и в истории отечественной математической науки. Более того, в годы гонений на Русскую Православную Церковь пострадали за веру математик Д. Ф. Егоров; философ, математик и богослов П. А. Флоренский; механик В. Н. Щелкачев и др. Их объединяла принадлежность к Московской математической школе (все они были наставниками или воспитанниками этой школы).

Религиозность, свойственную ученым-математикам, русский философ Н. О. Лосский объяснял так: «математическая форма познания мира задействует сферу чистой интуиции познающего субъекта, интуиция же, связана со сферой религиозности» [2].

Это утверждение, понятно, противоречит материалистическому взгляду на математику, по инерции перенесенному и в XXI век. Однако после снятия марксистско-ленинских оков с методологии отечественной науки вскрылся ряд противоречий материалистической интерпретации научного знания в советский период. Стали появляться работы, раскрывающие *метафизический подход* к объяснению математики и её истории. Так, В. Н. Катасонов показал, что математика XVI—XVII столетий — это не «некая «чистая» наука, «которой нет дела до остального мира, нет дела до истории с ее трагическими мировоззренческими коллизиями, а как наука в глубокой степени «ангажированная», непосредственно вовлеченная в эти коллизии, наука, совершающая в этих коллизиях свой выбор, свое самоопределение. Это самоопределение математики есть, конечно, самоопределение человека, для которого наука всегда есть не только орган открытия истины, но и один из способов утверждения её» [1].

Факт о том, что религиозное мировоззрение оказывает влияние на математический стиль мышления, подтверждает изучение научного и философского наследия, оставленного представителями Московской математической школы на рубеже XIX—XX вв.

Уклад математической жизни в Москве на долгие годы вперёд был предопределен появлением Московского математического общества, у истоков которого стояли Н. Е. Брашман, В. Я. Цингер, Н. В. Бугаев и др.

Мировоззренческие взгляды Н. Д. Брашмана наиболее полно отражены в его речи «О влиянии математических наук на развитие умственных способностей», произнесенной ученым на торжественном собрании Императорского Московского университета в 1841 г.

Так, с позиций православного христианина Н. Д. Брашман пояснял специфику математического творчества: «... математики не предполагают открывать первоначальных причин явлений: они известны одному Создателю...» [3]. Отсюда следует, что математик выступает не как творец законов Создателя, а как их интерпретатор.

Стремясь привлечь молодежь к науке, Н. Д. Брашман не жалел личного времени и вокруг него постепенно собралась группа начинающих ученых, которые под его руководством объединились в 1864 г. в *Московское математическое общество*.

Активным членом Общества и одним из его президентов был Василий Яковлевич Цингер. Философия вошла в круг интересов В. Я. Цингера после защиты им докторской диссертации. В 1874 г. на Торжественном заседании Московского университета В. Я. Цингер сделал доклад «Точные науки и позитивизм», в котором пух и прах разнес позитивизм. Исходя из математических рассуждений, он пылко и доказательно показал, что применение идей позитивизма часто искажает научные истины.

В Москве в последней трети XIX века начала формироваться философско-математическая школа. Основное ядро этой группы ученых составляли Н. В. Бугаев, П. А. Некрасов, П. А. Флоренский и др.

Оригинальные философские идеи Николая Васильевича Бугаева и его учеников получили признание еще в начале XX века. С восхищением отзывались о работах Н. В. Бугаева, как отечественные, так и западные ученые. Известно, что пленарный доклад «Математика и научно-философское миросозерцание», сделанный русским математиком на Первом Международном математическом конгрессе, имел огромный успех и был встречен бурными аплодисментами [4]. Дореволюционный публицист и математик М. Ф. Таубе обратил внимание на сходство учения Н. В. Бугаева и основных принципов славянофильства [5].

Введение Н. В. Бугаевым в математический оборот понятий аритмологии и прерывных (разрывных) функций было для того времени очень смелым шагом. Как свидетельствуют исследователи Л. Грэхэм и Ж.-М. Кантор, многие математики в то время считали разрывные функции «ужасными и отвратительными», французский математик Эрмит называл их «монстрами» [6].

Одним из первых философскую направленность исследований Н.В. Бугаева и его последователей подчеркнул П. А. Некрасов, назвав этот феномен *Московской философско-математической школой*. Это наименование оказалось настолько удачным, что утвердилось и широко используется в современных научных исследованиях.

После защиты докторской диссертации П. А. Некрасов начал проявлять интерес к теории вероятностей и использовать аритмологические идеи Н. В. Бугаева, многие из которых в дальнейшем легли в основу построения им социальных процессов. Он склонялся к мысли, что при течении многих, в том числе социальных явлений, прослеживается непредельный аритмологизм (революции, катастрофы и т.п.), поэтому разного рода реформаторам следует считаться с этим, когда они делают выбор между эволюцией и революцией.

В философско-математическом осмыслении и научном развитии понятия прерывности дальше всех учеников Н. В. Бугаева продвинулся П. А. Флоренский. Проведя глубокий анализ возникновения и амплификации концепции непрерывности, он пришел к мысли, что: «... идея непрерывности овладела всеми дисциплинами от богословия до механики, и, казалось, что протестовать против ее захватов значило впадать в ересь. Но вполне естественно было ожидать, что виновница такого соблазна – математика – захочет поправить односторонность, которую она вызвала, хотя и не преднамеренно ... можно было ждать, что критика такой идеи уничтожит односторонность, если она незаконна, и санкционирует ее, если она необходима» [7]. П. А. Флоренский обращал внимание на то, что в основе суждений аритмологов лежат два постулата: 1) вера в закон и 2) вера в математическую выражаемость закона. Принцип непрерывности с ними несовместим. Поэтому вполне понятно, почему математические интересы П. А. Флоренского были сосредоточены в области теории множеств. Его перу принадлежит первая опубликованная в России работа по этой теории — «О символах бесконечности (очерк идей Г. Кантора)».

Особняком в Московской математической школе стоит фигура Д. Ф. Егорова. Он не имел философско-математических работ. Однако религиозное мировоззрение Д. Ф. Егорова, очевидно, предопределило его интерес к чистой математике (дифференциальные уравнения в частных производных, дифференциальная геометрия и пр.) и сочувствие имяславию.

В советское время проведение научных исследований московских математиков возглавил талантливый ученик Н. В. Бугаева и Д. Ф. Егорова Николай Николаевич Лузин.

Что касается миросозерцания Н. Н. Лузина, то надо учитывать время и обстоятельства, при которых он жил. Его публичные высказывания не следует считать единственным источником для характеристики внутреннего мира ученого. Этот вопрос довольно сложный и требует детального изучения всех доступных материалов. Так, например, в «Лекциях об аналитических множествах и их приложениях», опубликованных в 1930 г. в Париже, Н. Н. Лузин замечал, что, если актуальная бесконечность имеет место, то оно не в математике, а в богословии. Время расцвета научной и педагогической деятельности Н. Н. Лузина связывают с чтением им факультативного курса по теории функций действительного переменного и сопровождающего его семинара, на основе которых и выросла знаменитая *Московская школа теории функций*, давшая миру множество новых имен математиков — учеников Лузина.

Таким образом, в эволюции идей московских математиков-мыслителей XIX начала XX века можно выделить общую тенденцию: они прошли путь от математики к философии и снова вернулись к математике. Из Московского математического общества выросла Московская философско-математическая школа, а последняя послужила импульсом к образованию Московской школы теории функций. Мировоззренческие убеждения Н. В. Бугаева и его последователей сказались и на формировании их педагогических взглядов, поэтому философское наследие Московской математической школы представляет интерес не только для историков философской науки, но и для математиков и педагогов.

Мировоззренческие идеи представителей Московской математической школы оказали влияние и на характер математического творчества московских математиков, специфическими чертами которого стали: 1) коллективный характер, генерирование новых направлений в науке и горячее желание делиться ими с другими учеными; 2) сосредоточенность на поиске общих методов и закономерностей; 3) склонность к созерцанию, предпочтение теоретических исследований, а не практических (область научных интересов – теория чисел, теория множеств, теория функций и пр.).

Феномен Московской математической школы позволяет констатировать, что для большинства людей, которые в течение жизни знали дорогу в храм, были, несомненно, открыты и врата учености. Такое качество русской веры, как соборность, нашло отражение в том, что для русской математики характерно коллективное (научные школы), а не индивидуальное научное творчество.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Катасонов В. Н. Метафизическая математика XVII века. Москва: Либроком, 2011. 144 с.
2. Лосский Н. О. Чувственная, интеллектуальная и мистическая интуиция. Москва: Республика, 1995. 400 с.
3. Брашман Н. Д. О влиянии математических наук на развитие умственных способностей. Москва: Университетская типография, 1841. 89 с.
4. Бугаев Н. В. Математика и научно-философское миросозерцание // Математический сборник, 25:2. Москва, 1905. С. 349-369.
5. Таубе М. Ф. Московская философско-математическая школа, основанная проф. Бугаевым, и славянофильство Хомякова. Харьков: Мирный труд, 1908. 91 с.
6. Graham L., Kantor J. Naming Infinity. A True Story of Religious Mysticism and Mathematical Creativity. London: Belknap Press of Harvard University Press, 2009. 239 pp.
7. Флоренский П. А. Введение к диссертации «Идея прерывности как элемент миросозерцания» // Историко-математические исследования. Выпуск XXX. Москва, 1986. С. 159–170.

УДК 51 (091)

Из истории динамических систем: проблема классификации

Р. Р. Мухин (Россия, г. Старый Оскол)
Старооскольский технологический институт им. А.А. Угарова (филиал) Национального исследовательского технологического университета «МИСИС»
e-mail:mukhiny@mail.ru

From the history of dynamic systems: the problem of classification

R. R. Mukhin (Russia, Stary Oskol)
Stary Oskol Technological Institute of National Research University of Science and Technology “MISIS”
e-mail:mukhiny@mail.ru

Фундамент современной теории динамических систем был заложен А. Пуанкаре (1879-1912) [1]-[2]. Синтез его идей и методов и их дальнейшее развитие был проведен Дж. Биркгофом (1927) [3], и основным объектом исследования становится *динамическая система*. Представление о динамической системе претерпело длительную эволюцию от механической системы с конечным числом степеней свободы до произвольной системы, описываемой автономной системой обыкновенных дифференциальных уравнений, безотносительно к ее происхождению. Для динамической системы однозначно определяется понятие *состояния*, задаваемой координатами в n-мерном фазовом пространстве, и закона эволюции начального состояния. Движение системы как однопараметрическое семейство преобразований фазового пространства образует группу и на этой основе можно определить абстрактную динамическую систему (А. А. Марков, мл., 1931).

В классификации динамических систем первый и фундаментальной важности шаг был сделан Пуанкаре [1]. Принципиальная ограниченность возможностей интегрирования дифференциальных уравнений натолкнула Пуанкаре на изучение функций, определяемых дифференциальными уравнениями, самих по себе, не пытаясь сводить их к более простым функциям. Такое качественное исследование выявляет топологию всего множества решений.

Биркгоф выдвинул программу изучения динамических систем в полной общности - дать общую классификацию типов движения динамических систем, как консервативных, так и неконсервативных [3]. Но такую грандиозную задачу вряд ли можно решить в полной общности. Классифицируя динамические системы, Биркгоф разделяет их на неэргодические и эргодические. Как оказалось, эргодичность представляет слабейшую степень нерегулярности и следующим классом по усилению этого свойства являются системы с *перемешиванием*, также пришедших из физики (Дж. Гиббс, 1902).

После относительного затишья, в 1950-е гг. начинается новый взлет теории динамических систем. А. Н. Колмогоров сформулировал проблему программного характера (1954). При этом он выделил неконсервативные системы, для которых характерны асимптотически устойчивые движения (такие, как точки покоя и предельные циклы), и консервативные системы. Для последних не существует асимптотически устойчивых движений, и эти системы рассматривают с метрической точки зрения, позволяющей изучать свойства основной массы движений. Колмогоров ставит задачу анализа качественного характера движения в системах, имеющих важное значение для приложений. Здесь Колмогоров значительно сужает задачу, поставленную в программе Пуанкаре-Биркгофа об изучении поведения динамических систем во всей общности. Он предлагает исходить из эргодической теории, которая подготовила для этой цели целый набор понятий, обладающей очень большой физической убедительностью.

Колмогоров сам сделал следующий важнейший шаг в реализации предложенного им подхода. Центральной проблемой эргодической теории является проблема изоморфизма: когда два преобразования с инвариантной мерой относятся к одному метрическому типу, в частности, для автоморфизмов Бернулли? Это привело Колмогорова к энтропийной теории динамических систем и к “квазирегулярнным” системам (K-системами), которые соответствуют случайным процессам с самыми слабыми свойствами регулярности [4].

Итак, складывается иерархия динамических систем - от полностью интегрируемых систем или их аналогов с выраженным простым поведением, далее эргодические системы, затем по мере дальнейшего усиления нерегулярности идут системы с перемешиванием, перемешиванием n-го порядка, системы Бернулли, K-системы.

Для диссипативных систем не удается ввести строгого понятия интегрируемости, для них более адекватно понятие качественного интегрирования – определение наиболее характерных черт системы при помощи геометрического построения интегральных кривых, что позволяет получить качественную картину поведения системы. К самым простым случаям можно отнести системы с одним простым аттрактором – положением равновесия, предельным циклом, двумерным тором.

Другая классификация общих динамических систем, без разделения их на консервативные и диссипативные возможна на основе гиперболической теории (С. Смейл, Д. В. Аносов). Здесь первостепенное значение имеет понятие *грубости* (А. А. Андронов, Л. С. Понтрягин, 1937). Андронов также выдвинул программу исследований динамических систем (1933): как при изменении параметров меняется топологическая структура разбиения фазовой плоскости на интегральные кривые и каковы бифуркационные значения параметров? Эта программа была исчерпывающим образом реализована для двумерных систем на основе понятия грубости, для которых она представляет типичное свойство.

Напрашивается задача распространения программы Андронова на многомерный случай, и Смейлом была выдвинута гипотеза (1961) [5] о существовании грубых систем в пространстве многомерных динамических систем ($n \geq 3$). Такие системы известны как системы Морса-Смейла, и они относятся к системам с «простым поведением». Таким образом, устройство многомерных динамических систем в главном выглядело подобно устройству двумерных систем. Однако в многомерном случае системы Морса-Смейла не составляют плотного множества (С. Смейл, 1966) [6]. Для многомерных систем типичны гомоклинические структуры (С. Смейл, 1961) .

В сложно устроенных многомерных системах определяющую роль играют гиперболические множества. Понятие гиперболичности является одним из способов выражения на математическом языке свойства локальной неустойчивости траекторий. При гиперболичности происходит сближение траекторий в одном направлении и разбегание в другом с экспоненциальной скоростью. Целый ряд физических систем (рассеивающие биллиарды, система Лоренца и др.) проявляли черты, аналогичные свойствам гиперболичности. Наиболее сильный вариант гиперболичности проявляется в системах Аносова (1967) [7] (пример - геодезические потоки на компактных поверхностях постоянной отрицательной кривизны).

Предложенные классификации представляют лишь грубое приближение. Каждый элемент приведенных выше классификационных схем представляет собой сложно устроенное множество. Это относится к интегрируемым гамильтоновым системам. Само пространство систем Морса-Смейла имеет сложное строение, и их классификация представляет нетривиальную и неоднозначную задачу. В гамильтоновых системах положение осложняется из-за неоднородности реальных систем, это системы с разделенным фазовым пространством, с очень сложной топологией. В них имеет место сосуществование областей с регулярным и нерегулярным движением (Г.М. Заславский, Б.В.Чириков, 1969). Для диссипативных систем характерны *квазиаттракторы* (В. С. Афраймович, Л. П. Шильников, 1983) [8], содержащих гиперболические множества и устойчивые периодические движения. Существуют системы со «смешанной динамикой», когда устойчивые элементы (например, устойчивые периодические траектории) сосуществуют с неустойчивыми, и они неотделимы друг от друга (Л. П. Шильников и др., 1997) [9].

Ситуация является еще более затруднительной. При переходе от систем Морса-Смейла к системам с гомоклинической структурой изменения не локализуются, а затрагивают фазовое пространство в целом. Рассмотрение таких глобальных бифуркаций приводит к весьма распространенным системам с гомоклиническими касаниями, представляющих негрубые гомоклинические траектории, которые всюду плотны в областях Ньюхаса. При этом был получен обескураживающий результат: в системах с гомоклиническими касаниями невозможен полный качественный анализ в общем случае (Л. П. Шильников и др., 1972-1973) [10].

Классификация динамических систем представляет своеобразный ракурс, под которым можно рассматривать всю теорию динамических систем. Но с надеждой полной классификации приходится расстаться. Возможно создать упорядоченные схемы лишь для отдельных классов динамических систем. Это само по себе является весьма значительным достижением, поскольку каждая такая схема представляет важный шаг в установлении строения отдельных классов динамических систем. Что касается неразрешимости проблемы в общем случае, подобная ситуация имеет место и в других разделах математики, например, в топологии и в теории групп. Невозможность полной классификации свидетельствует о неисчерпаемости математических теорий. Если справедливо, что каждой динамической системе, так или иначе, найдется соответствие в какой-то физической, механической, биологической, экономической, социальной модели, то невозможность полной классификации динамических систем является отражением факта бесконечного разнообразия природы.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Пуанкаре А. О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями. — М.: ГИТТЛ, 1947. 392 с.
2. Пуанкаре А. Новые методы небесной механики. Т. 1-2. — М.: Наука, 1971-1972. 1772 с.
3. Birkhoff G.D. Dynamical Systems. — AMS, 1927. 306 p.
4. Колмогоров А.Н. Новый метрический инвариант транзитивных динамических систем и автоморфизмов пространств Лебега // ДАН СССР, 1958. Том 119. С. 861-864. .
5. Smale S. On gradient dynamical systems // Ann. Math. 1961. Vol. 74. P. 199-206.
6. Smale S. Structurally stable systems are not dense // Amer. J. Math. 1966. Vol. 88, P. 491-496.
7. Аносов Д.В. Геодезические потоки на замкнутых римановых многообразиях отрицательной кривизны // Труды МИАН. М.: Наука, 1967. С.3-209.
8. Afraimovich V.A., Shilnikov L.P. On strange attractors and quasiattractors // Nonlinear dynamics and turbulence. — Boston: Pitman, 1983. P. 1-34.
9. Гонченко С.В., Тураев Д.В., Шильников Л.П. Об областях Ньюхауса двумерных диффеоморфизмов, близких к диффеоморфизму с негрубым гетероклиническим контуром // Труды МИАН. М.: Наука, 1997. Том 216. С. 76-125.
10. Гаврилов Н.К., Шильников Л.П. О трехмерных динамических системах, близких к системам с негрубой гомоклинической кривой I, II // Матем. сб. 1972. Том 88, № 4. С. 475-492; 1973. Том 90, № 1. С. 139-156.

———————————————————————————

УДК 51(092)

Взгляд Н. Н. Лузина на проблему обоснования математики

В. Я. Перминов (Россия, г. Москва)
Московский Государственный Университет имени М.В. Ломоносова
e-mail: perminov_v@list.ru

N. N. Luzin's view on the problem of foundation of mathematics

V. Ya. Perminov (Russia, Moscow)
M.V. Lomonosov Moscow State University
e-mail: perminov_v@list.ru

Главная тема, которая стоит на первом плане в философских размышлениях Лузина — это проблема обоснования математики. Эта тема была значимой для многих математиков конца 19-го — начала 20-го веков, и мы знаем, что здесь появились принципиальные расхождения. Для Лузина эта проблема представлялась крайне важной, так как она затрагивала вопрос о самом существовании трансфинитных множеств.

Лузин классифицирует подходы к обоснованию математики по тому, в какой мере они принимают и оправдывают понятие трансфинитного множества. По аналогии с демоном Максвелла, который пропускает или не пропускает в определенную часть сосуда молекулы с высокой энергией, Лузин говорит о математическом демоне, который допускает или не допускает определенные типы бесконечности в основания теории множеств. В этом отношении он выделяет пять демонов и, соответственно, пять вариантов ограничения на понятие бесконечного множества в основаниях математики:

1. Демон Брауэра, ограничивающий всю математику математикой натуральных чисел, не превышающих определенной конечной величины. Понятие актуальной бесконечности полностью исключается.

2. Демон Бэра, ограничивающий математику областью целого конечного числа без указания верхнего предела. Понятие актуальной бесконечности также полностью исключается.

3. Демон Бореля, ограничивающий математику областью счетной бесконечности.

4. Демон Лебега, ограничивающий математику областью континуума.

5. Демон Цермело, включающий в математику все бесконечные множества.

Существует, говорит Лузин, в действительности, пять программ обоснования математики, но только две крайние — интуиционизм Брауэра и формализм Гильберта — приобрели широкую известность.

Лузин убежден в том, что интуиционизм и формализм не указывают нам реального пути к обоснованию математики. Интуиционизм недопустимо ограничивает математику, он фактически ее разрушает: ни один математик, говорит Лузин, заинтересованный в решении реальных проблем, не будет стеснять себя жесткими принципами брауэровского интуиционизма. Формалистская программа обоснования также не может считаться удовлетворительной. Гильберт выдвигает на первый план понятие непротиворечивости. По мнению Лузина, это требование может служить отрицательным определением математики ("все, что противоречиво — не математика"), но оно не может быть ее положительным определением. Чтобы выделить математические теории из всего множества непротиворечивых языковых систем, мы должны указать позитивные критерии математики. Эти признаки, считает Лузин, должны относиться не к логической структуре математики, но к ее предмету.

Признак качественности математического знания Лузин находит в понятии эффективного множества, введенного Э. Борелем. Борель считал, что аксиома выбора применима только к тем множествам, в которых каждый элемент может быть индивидуализирован, а именно, выделен и охарактеризован посредством конечного количества слов. Исходя из этой установки, он допускал, что операции с исходными множествами (это операции объединения, пересечения и дополнения) могут быть либо конечными, либо счетно-бесконечными, ибо только в этом случае на производные множества можно распространить свойство измеримости, присущее исходным множествам. Он не допускал в качестве законных элементов математического рассуждения использование трансфинитной индукции и операций, характеризующихся мощностью выше счетной.

Но Борель не следует за Брауэром. Брауэр принимал в качестве первичных элементов математического рассуждения только натуральные числа, Борель берет в качестве исходных элементов объекты более сложного типа, а именно, замкнутые и открытые точечные множества. Брауэр отбрасывал закон исключенного третьего как неприменимый к бесконечным множествам. Борель снимает этот запрет: закон исключенного третьего, по его мнению, не менее надежен, чем закон тождества и должен прилагаться с одинаковой необходимостью к любым понятиям математики, включая и бесконечные множества.

Брауэр полностью отвергал неконструктивную математику как законную, Борель считал, что трансфинитная математика, выходящая за пределы эффективных операций, должна рассматриваться как сфера гипотетических математических построений, которая при определенных обстоятельствах может доказать свою полную надежность и быть включенной в сферу эффективной математики.

С другой стороны, эффективизм существенно ограничивает сферу теоретико-множественной математики. Борель не признает аксиомы выбора и трансфинитной индукции в качестве способов введения новых математических объектов. Канторовские трансфиниты, начиная со второго числового класса, устраняются полностью. Эффективизм Бореля может быть понят в качестве особой программы обоснования математики, которая на место брауэровского конструктивизма ставит определенного рода теоретико-множественный конструктивизм, т.е. получение производных объектов только через использование определенного и ограниченного множества надежных операций.

Обосновать математику с точки зрения Бореля означает, что мы должны указать систему строго определенных исходных объектов и систему надежных операций, заведомо исключающих противоречия при логическом развертывании теории. Требование непротиворечивости не отбрасывается, но предполагается, что в непротиворечивости мы убеждаемся не из анализа ее аксиоматики, а из анализа предметного основания математической теории, из надежности допустимых в ней внутренних операций.

Принятие этой основы, считал Борель, обеспечивает строгое построение всех значимых объектов математики, а также и непротиворечивость самой математической теории, построенной на этой основе. Свою программу обоснования математики Борель называл эффективизмом или реализмом. Слово реализм в данном случае означает то обстоятельство, что вся структура математического знания строится на хорошо определенных, “реальных” множествах, которыми являются эффективные множества или множества, измеримые по Борелю. Здесь основная обосновательная идея Бореля согласуется с брауэровским интуиционизмом: Брауэр также говорил о своей математике как реальной, исходящей из интуитивно данных объектов и не имеющей ничего общего с мертвым символизмом логицизма и формализма.

В целом Лузин разделял взгляд Бореля на логику обоснования математики. Как и Борель, он считал, что в основе математики должны лежать хорошо определенные объекты, которые не оставляют сомнений в том, что все допустимые конструкции, произведенные на их основе, не приведут к каким-либо неясностям и противоречиям.

Но Лузин не был уверен в том, что В-измеримые множества — это в точности та совокупность множеств, которая может быть положена в основу математического здания.

Важным достижением Лузина является здесь то, что он предпринял попытку определенного рода математической критики универсальности В-измеримых множеств. Он построил множества, которые он назвал проективными, которые получаются из В-измеримых множеств, если к ним поочередно применять операцию дополнения и операцию проектирования. Оказалось, что проективные множества высших порядков обладают рядом качеств, не приемлемых для борелевской надежной математики. Лузин показал, что к высшим проективным множествам не применима аксиома выбора, не применим закон исключенного третьего, и не является логически определенным требование их измеримости: положение об измеримости этих множеств не может быть ни доказано, ни отвергнуто в приемлемых теоретико-множественных рассуждениях.

Мы входим, таким образом, в определенное противоречие с основной идеей Бореля. Хотя операция проектирования не входит в определение В-множества, она, считает Лузин, совершенно элементарна и не может быть устранена из реальной математики. Но это значит, что область объектов, выбранная Борелем в качестве основания надежного математического мышления, посредством элементарных и реальных операций приводит нас к объектам, не согласующихся с логикой надежного мышления.

Возможны различные выводы из этой ситуации. Можно утверждать, что борелевская эффективистская программа обоснования математики неверна, поскольку она приводит к множествам, не обладающим необходимыми свойствами реальных множеств. Можно поставить вопрос о корректности операции проектирования. Можно, наконец, расширить эффективистскую теорию множеств, приняв проективные множества в качестве допустимых. Лузин соглашается с возможностью первого и второго подходов к решению этого затруднения, но он не считает проективные множества приемлемыми для реальной и обоснованной математики: он считает их необоснованными, находящими за пределами приемлемой математики и совершенно бесполезными для математики.

Математическая наука, говорил Лузин, не должна превратиться в скопище бесполезных слов, но, принимая проективные множества и подобные им объекты, мы неизбежно становимся на путь недопустимой деградации математического мышления.

Мы можем теперь сравнить два подхода к обоснованию математики и два понимания ее отношения к нематематическому знанию, которые намечаются соответственно в парадигме Кантора-Гильберта и в парадигме Бореля-Лузина. Мы имеем здесь формальный и содержательный подходы к проблеме обоснования.

Подход Кантора-Гильберта считает целью обоснования математики доказательство ее непротиворечивости.

Подход Бореля-Лузина видит обоснование математики в содержательном оправдании надежности ее фундамента.

Фактически, это старая декартовская методология. Чтобы обосновать надежность научного рассуждения, считал Декарт, нужно показать, что все исходные суждения определены с полной надежностью как безусловно истинные (данные нашему разуму с аподиктической очевидностью) и делать выводы из этих суждений не отклоняясь от самоочевидных правил логики.

Эффективисты хотели бы построить надежное здание математики, исходя из реальных (эффективно определенных) множеств как ее исходного и надежного основания. Факт логической непротиворечивости теории здесь не доказывается, он должен следовать из логики построения теории.

Кантор и Гильберт, напротив, исходят из идеального основания математики. Математика, по Гильберту, это симфония бесконечности, но бесконечности нет в реальном мире: бесконечность — это только идея разума. Вместо реальных множеств в основание математики кладутся высшие идеализации разума. С этой точки зрения канторовская теория множеств принимается в полном объеме и без всяких ограничений.

Подход Бореля-Лузина подчеркивает факт реальности оснований математики: множества, принятые за основу реальны, так как они заданы в непреложной геометрической интуиции.

Подход Кантора-Гильберта подчеркивает свободу математического мышления и допустимость всех мысленных конструкций при условии их непротиворечивости.

Эффективизм не допускает произвольных конструкций (даже при условии их непротиворечивости!) и видит причину приложимости математики не в ее внутренней свободе, а в реальности ее исходных понятий и принципов.

Ясно, что мы имеем здесь два существенно различных образа математики. Если математика Кантора-Гильберта зиждется на глубинных идеализациях разума, то математика Бореля-Лузина — скорее на геометрических и предметных интуициях, близких к физическому мышлению. Лорен Грэхэм и Жан-Мишель Кантор видят здесь различие немецкого и французского духа в математике. Французские математики, вышедшие в основном из Высшей нормальной школы, были прежде всего физиками и не воспринимали математических абстракций отдельно от физических представлений. Это тенденция к отождествлению математических и физических идеализаций присутствует и у Лузина: он не видит математических абстракций как существующих в отрыве от их реализаций в более осязаемых конкретных объектах. В своей статье “Ньютонова теория пределов” Лузин приводит мнение Якоби о высших абстракциях математического анализа. “И, как далекую цель, мы не должны забывать о страстном видении безграничного оптимизма Якоби, уверенного в наступлении такого порядка вещей, когда из каждой теоремы математического анализа будет вытекать предложение теории чисел (натуральных), и всякая теорема теории чисел повлечет предложение математического анализа. Имеющееся в настоящее время разъединение этих великих дисциплин служит свидетельством не силы их, а слабости".

УДК 51(091)+(092)

Возникновение и развитие теоретико-числовых методов в приближенном анализе[1]

И. Ю. Реброва (Россия, г. Тула)
Тульский государственный педагогический университет имени Л. Н. Толстого
e-mail: i_rebrova@mail.ru

The emergence and development of numerical-theoretical methods in approximate analysis

I. Yu. Rebrova (Russia, Tula)
Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University
e-mail: i_rebrova@mail.ru

Теоретико-числовой метод приближенного анализа был создан в конце 50-ых — начале 60-ых годов XX столетия в рамках работы семинара под руководством Н. С. Бахвалова, Н. М. Коробова и Н. Н. Ченцова (семинар **трёх К**). Этот семинар был организован по предложению Н. Н. Ченцова, который работал в группе И. М. Гельфанда по математическому обеспечению отечественного атомного проекта.

Выделение класса E_s^α периодических функций с быстро сходящимися рядами Фурье позволило, используя средства гармонического анализа и аналитической теории чисел, получить оптимальные результаты в теории многомерных квадратурных формул. В этой области работали многие известные математики в нашей стране и за рубежом: Н. М. Коробов [13]–[36], Н. С. Бахвалов [1]–[4], Н. Н. Ченцов [42], Хуа Ло Кен [45], Э. Главка [43]–[44], К. К. Фролов [38]–[41], В. А. Быковский [5]–[10] и многие другие.

Вопросы построения многомерных квадратурных формул тесно связаны с теорией равномерного распределения, основанной Г. Вейлем [51]. В этой области хорошо известны фундаментальные работы К. Рота по оценке квадратичного отклонения [46]–[47] и В. Шмидта по оценке q-ого отклонения [48]–[49].

Теоретико-числовые алгоритмы численного интегрирования имеют существенное значение при расчете интегралов взаимодействия в квантовой химии [37] и при расчете наноразмерных ферромагнитных гетеросистем. Другой класс интегралов, где применимы эти методы, возникает в физике высоких энергий.

За рубежом аналог метода оптимальных коэффициентов Н. М. Коробова был предложен на три года позже (1962 г.) Е. Главкой [43]. Он назвал параллелепипедальные сетки с оптимальными коэффициентами сетками с "хорошими точками". В результате, один и тот же объект вошел в позднейшие публикации и вычислительную практику с различными названиями и ссылками на разных авторов, хотя в последнее время даже австрийские математики ссылаются на работы Н. М. Коробова, восстанавливая историческую справедливость.

Результаты работы семинара **трех К** за первые шесть лет работы были отражены в монографии Н. М. Коробова в 1963 г. [23] (второе издание вышло в 2004 г. [36]). За рубежом этой проблеме были посвящены различные монографии [44], [45], [50].

[1]Исследование выполнено по гранту РФФИ №19-41-710004_р_а

Таким образом, мы видим, что мотивом организации научной деятельности по разработке новых многомерных квадратурных формул было решение жизненно важных проблем вычислительной практики, возникших в ходе выполнения отечественного атомного проекта. Поэтому история развития теоретико-числового метода в приближенном анализе делится на две части.

Первая часть — это открытая теоретическая часть, в которой и были получены первые результаты, и которая продолжала успешно развиваться все прошедшие 60 лет.

И вторая часть — это прикладная, закрытая часть, о которой можно только догадываться.

На первый взгляд, мы сталкиваемся с парадоксальной ситуацией разрыва связи между мотивирующей причиной исследований и самими исследованиями. Но здесь вступает в силу общий методологический закон научных исследований — внутренняя логика предметной области является движущей силой дальнейшего развития.

Дело всё в том, что были достаточно быстро выделены фундаментальные проблемы, с которыми связано решение основных задач, стоящих перед теоретико-числовым методом в приближенном анализе, многие из которых остаются открытыми и по настоящее время.

Отметим ещё один важный методологический момент истории становления теоретико-числового метода в приближенном анализе. Семинар **трех К** был эффективной формой организации исследований. Сейчас трудно судить об административно-организационных аспектах функционирования данного семинара. Вопрос о существовании или отсутствии в архивах Математического института соответствующих документов остается открытым, а участников тех событий практически не осталось, но можно и по тем крохам доступной информации делать вывод, что по современным понятиям семинар был успешной формой организации инновационной деятельности. Надо отметить, что такая организация исследований была и остается типичной формой организации научных исследований как на мехмате МГУ, так и в Математическом институте им. В. А. Стеклова.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бахвалов Н. С. О приближенном вычислении кратных интегралов // Вестн. Моск. ун-та, 1959. № 4. С. 3–18.

2. Бахвалов Н. С. Оценка в среднем остаточного члена квадратурных формул // Журн. вычислит. математики и математической физики. 1960. № 1. С. 64–77.

3. Бахвалов Н. С. Об оптимальных на классах функций способах интегрирования с заданным числом узлов. / Дис....док. физ.-мат. наук. Москва. Мгу 1964.

4. Бахвалов Н. С., Коробов Н. М., Ченцов Н. Н. Применение теоретико-числовых сеток к задачам приближенного анализа // Труды Четвертого Всесоюзного математического съезда. Л.: Наука, 1964. Т. II. С. 580–587.

5. Быковский В. А. О правильном порядке погрешности оптимальных кубатурных формул в пространствах с доминирующей производной и квадратичных отклонениях сеток. / Препринт ДВНЦ АН СССР. Владивосток, 1985, с. 31.

6. Быковский В. А. Дискретное преобразование Фурье и циклическая свертка на целочисленных решетках // Математический сборник, 136(178), 4(8), 1988, С. 451–467.

7. Быковский В. А. Экстремальные кубатурные формулы для анизотропных классов. / Хабаровск, 1995. с. 13. (Препринт.)

8. Быковский В. А. Оценки отклонений оптимальных сеток в Lp-норме и теория квадратурных формул. // Analysis Mathematica, 22(1996), pp. 81–97.

9. Быковский В. А. Теоретико-числовые решетки в эвклидовых пространствах и их приложения. / Дис....док. физ.-мат. наук. Хабаровск. ИПМ ДВО АН СССР, 1990.

10. Быковский В. А. О погрешности теоретико-числовых квадратурных формул // Чебышевский сборник Тула. 2002. Т.3 вып. 2(4) С. 27–33.

11. С. С. Демидов, Е. А. Морозова, В. Н. Чубариков, И. Ю. Реброва, И. Н. Балаба, Н. Н. Добровольский, Н. М. Добровольский, Л. П. Добровольская, А. В. Родионов, О. А. Пихтилькова Теоретико-числовой метод в приближенном анализе // Чебышевский сборник. 2017. Том 18 № 4(64). С. 6-85.

12. Н. М. Добровольский О современных проблемах теории гиперболической дзета-функции решёток // Чебышевский сб. 2015. Т. 16, вып. 1. С. 176–190.

13. Коробов Н. М. Приближенное вычисление кратных интегралов с помощью методов теории чисел // ДАН СССР. 1957. 115. № 6. С. 1062–1065.

14. Коробов Н. М. О приближенном вычислении кратных интегралов // ДАН СССР. 1959. Т. 124, № 6. С. 1207–1210.

15. Коробов Н. М. О приближенном решении интегральных уравнений // ДАН СССР. 1959. Т. 128, № 2. С. 235–238.

16. Коробов Н. М. О некоторых теоретико-числовых методах приближенного вычисления кратных интегралов. Резюме докл. на заседании Моск. мат. об-ва. // УМН. 1959. Т. 14, вып. 2 (86). С. 227–230.

17. Коробов Н. М. Вычисление кратных интегралов методом оптимальных коэффициентов // Вестн. Моск. ун-та, 1959. № 4. С. 19–25.

18. Коробов Н. М. Свойства и вычисление оптимальных коэффициентов // ДАН СССР 132. 1960. № 5. С. 1009–1012.

19. Коробов Н. М. Применение теоретико-числовых сеток в интегральных уравнениях и интерполяционных формулах // Сборник статей. Посвящается академику Михаилу Алексеевичу Лаврентьеву к его шестидесятилетию, Тр. МИАН СССР, 1961. Т. 60, Изд-во АН СССР, М., С. 195–210.

20. Коробов Н. М. О применении теоретико-числовых сеток // Вычислительные методы и программирование: // Сб. Моск. ун-т. 1962. С. 80–102.

21. Коробов Н. М. О теоретико-числовых методах в приближенном анализе // Вопросы вычислительной математики и вычислительной техники. М.: Машгиз. 1963.

22. Коробов Н. М. О некоторых задачах теории чисел, возникающих из потребностей приближенного анализа: Сообщение на IV математическом съезде (не опубл.).

23. Коробов Н. М. Теоретико-числовые методы в приближенном анализе. / М.: Физмат-гиз, 1963.

24. Коробов Н. М. О некоторых вопросах теории диофантовых приближений // УМН. 1967. Т. 22, 3 (135). С. 83 — 118.

25. Коробов Н. М. О вычислении оптимальных коэффициентов // ДАН СССР. 267. 1982. N2. С. 289 — 292.

26. Коробов Н. М. Об одной оценке А. О. Гельфонда // Вестн. МГУ. Сер.1. Математика, механика. 1983. N3. С. 3 — 7.

27. Коробов Н. М. О некоторых вопросах теории диофантовых приближений // Тезисы докладов всесоюзной конференции „Теория трансцендентных чисел и ее приложения“. 1983. С. 62.

28. Коробов Н. М. Тригонометрические суммы и их приложения. М.: Наука, 1989.

29. Коробов Н. М. Квадратурные формулы с комбинированными сетками // Математические заметки. 1994. Т. 55. Вып. 2. С. 83 — 90.

30. Коробов Н. М. О теоретико-числовых методах приближенного интегрирования // Историко-матем. исследования. СПб., 1994. Вып. XXXV. С. 285—301.

31. Коробов Н. М. Специальные полиномы и их приложения // Диофантовы приближения. Матем. записки. 1996. Т. 2. С. 77-89.

32. Коробов Н. М. О конечных цепных дробях // УМН. 1998. Т. 52. 3. С. 167-168.

33. Коробов Н. М. О теоретико-числовых интерполяционных формулах // Историко-матем. исследования. М.: „Янус // К“. 2001. Вып. 6 (41). С. 266-276.

34. Коробов Н. М. О некоторых свойствах специальных полиномов // Труды IV Международной конференции „Современные проблемы теории чисел и ее приложения“ Чебышевский сборник. Тула. 2001. Т. 1. С. 40 – 49.

35. Коробов Н. М. Об одной оценке в методе оптимальных коэффициентов // Тезисы IV Всероссийской конференции „Современные проблемы математики, механики, информатики “ Тула. 2002. с. 39–40.

36. Коробов Н. М. Теоретико-числовые методы в приближенном анализе. (второе издание) / М.: МЦНМО, 2004.

37. Ю. А. Кругляк, Г. С. Гордадзе, Л. М. Подольская, С. Б. Цинаури, Г. Б. Шарашидзе Численный расчет молекулярных интегралов с функциями от межэлектронного расстояния I-II. - Тбилиси: Издательство Тбилисского университета, 1971. - 136 с.

38. Фролов К. К. Оценки сверху погрешности квадратурных формул на классах функций // ДАН СССР. 231. 1976. № 4. С. 818 — 821.

39. Фролов К. К. О связи квадратурных формул и подрешеток решетки целых векторов // ДАН СССР. 232. 1977. № 1. С. 40 — 43.

40. Фролов К. К. Квадратурные формулы на классах функций. / Дис. ... канд. физ.-мат. наук. М.: ВЦ АН СССР. 1979.

41. Фролов К. К. Оценка сверху дискрепанса в метрике L_2 // ДАН СССР. 252. 1980. № 4. С. 805 — 807.

42. Ченцов Н. Н. О квадратурных формулах для функций бесконечно большого числа переменных // Журн. вычислит. математики и матем. физики. 1961. № 3.

43. Hlawka E. Zur angenäherten Berechnung mehrfacher Integrale // Monatshefte f ur Math. 66, 2. 1962, p. 140–151.

44. Hlawka E., Firneis F., Zinterhof P. Zahlentheoretiscne Methoden in der numerischen Matematik. / Wien, Mūnchen, Oldenbourg, 1981.

45. Hua Loo Keng, Wang Yuan Applications of Number Theory to Numerical Analysis, – Springer–Verlag Berlin, 1981.

46. Roth K. F. On irregularities of distribution // Mathematika. 1. 1954, P. 73–79.

47. Roth K. F. On irregularities of distribution – IV, // Acta Arithm. 37. 1980. P. 65–75.

48. Schmidt Wolfgang M. Irregularities of distribution – VII, // Acfa Arithm. 21. 1972. P. 45–50.

49. Schmidt Wolfgang M. Irregularities of distribution – X // Number Theory and Algebra (H.Zassenhaus ed.) New York: Academic Press. 1977. P. 311–329.

50. Wang Yuan О методах приближенного интегрирования // Тр. ин-та матем. Акад. наук КНР 1962

51. Weyl H.Über die Gleichverteilung von Zahlen mod. Eins. // Math. Ann. 1916. Bd. 77. S. 313 — 352 (пер. в кн.: Вейль Г. Математика. Теоретическая физика. М.: Наука, 1984)

———————————————————————————————

УДК 514.185.2

О Геометрической бригаде ИОНХ АН СССР до 1941 года

А. В. Селиверстов (Россия, г. Москва)
Институт проблем передачи информации им. А. А. Харкевича Российской академии наук
e-mail: slvstv@iitp.ru

On the geometric brigade of the Institute of General and Inorganic Chemistry of the Academy of Sciences of the USSR until 1941

A. V. Seliverstov (Russia, Moscow)
Institute for Information Transmission Problems of the Russian Academy of Sciences (Kharkevich Institute)
e-mail: slvstv@iitp.ru

Цель доклада — напомнить об одном из эпизодов развития многомерной начертательной геометрии в первой половине XX века. Основы классической начертательной геометрии создал Гаспар Монж в конце XVIII века. Пространства размерности выше трёх рассматривал его современник Жозеф Луи Лагранж, но многомерная геометрия развивалась медленно. Быстрее развивались алгебраические методы, но не графические. Одним из первых графические методы для изображения многомерных пространств применил Евграф Степанович Федоров.

В 1918 году Николай Семёнович Курнаков создаёт в Петрограде Институт физико-химического анализа (ИФХА). В 1924 и 1926 годах в Известиях ИФХА опубликованы работы В. Н. Лодочникова об изображении многокомпонентных систем. В 1930 году в Ленинграде образована Лаборатория общей химии АН СССР. Здесь с 1931 года работал Вячеслав Петрович Радищев (праправнук А. Н. Радищева), а с 1933 года работал Виктор Яковлевич Аносов.

28 марта 1934 года общее собрание АН СССР приняло решение об объединении нескольких институтов в один Институт общей и неорганической химии (ИОНХ). 14 июня 1934 года СНК СССР включил ИОНХ в число учреждений АН СССР, переводимых в Москву.

В 1935 году в ИОНХ создана Геометрическая бригада, которая занималась применением геометрических и топологических методов к изучению химического равновесия, в частности, методами изображения диаграмм состав–свойство для многокомпонентных систем [1, стр. 74]. В 1936 году В. Я. Аносов предложил метод спиральных координат, а В. И. Николаев — метод 60-градусных координат для изображения диаграмм. Но удобнее оказался чертёж, который В. П. Радищев разработал для описания многокомпонентных систем. Например, об описании пятикомпонентной системы было доложено на заседании Геометрической бригады ИОНХ АН СССР 11 апреля 1937 года [2].

Чертёж Радищева применяется и сегодня [3, 4]; основы многомерной геометрии изучаются студентами технических университетов на факультативных занятиях [5]. Современное описание чертежа Радищева для изображения четырёхмерного пространства дано в книге [6, стр. 203]. Альтернативный подход к изображению четырёхмерного пространства основан на применении гиперэпюра Наумович [6, стр. 198]. В свою очередь изображение таких проекций может быть выполнено разными способами. Н. В. Наумович работала вместе с Д. Д. Мордухай-Болтовским; результаты были представлены на семинаре Н. Ф. Четверухина [7].

Деятельность Геометрической бригады не ограничивалась начертательной геометрией. Весной 1941 года А. Б. Млодзеевский, работавший в Московском институте тонкой химической технологии, опубликовал в Известиях сектора физико-химического анализа статью Термодинамические поверхности однокомпонентных систем [8], применив методы дифференциальной геометрии; там же опубликована статья В. П. Радищева о шестикомпонентных системах.

Журнал, в котором опубликованы обе статьи [2, 8], снабжён оглавлением на французском языке. В то же время в журнале Математический сборник вплоть до 1946 года статьи на русском языке снабжались аннотациями на иностранных языках. В 1930-е годы аннотации писались на французском, немецком, английском или итальянском [9]. В Математическом сборнике, Известиях Академии наук СССР и других журналах также публиковались статьи на иностранных языках, но чаще на французском или немецком [10].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Соловьев Ю. И. Институт общей и неорганической химии им. Н.С. Курнакова Российской академии наук. — М.: Наука, 1993. 191 с.

2. Радищев В. П. Методы изображения шестикомпонентных и более сложных систем в проекциях правильных многомерных фигур // Известия сектора физико-химического анализа. 1941. Т. 14. С. 153–174.

3. Луцык В. И., Воробьева В. П., Зеленая А. Э. Визуализация пятикомпонентных систем в проекциях пентатопа // International Conference Graphicon 1998 Proceedings. — Москва, 1998. С. 256–257.

4. Lutsyk V. I., Zelenaya A. E., Nasrulin E. R. 4D space models of quaternary systems for the phase diagrams graphics correction // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. 2016. V. 123, № 1 (012036). P. 1–6.

5. Бойков А. А. О построении моделей объектов пространства четырех и более измерений в учебном процессе // Геометрия и графика. 2018. Т. 6, № 4. С. 54–71.

6. Пеклич В. А. Высшая начертательная геометрия. — М.: АСВ, 2000. 344 с.

7. Мордухай-Болтовской Д. Д. Параллельность и перпендикулярность прямых, плоскостей и гиперплоскостей в трёхмерном и четырёхмерном пространствах Лобачевского // Успехи математических наук. 1951. Т. 6, № 4(44). С. 176–183.

8. Млодзеевский А. Б. Термодинамические поверхности однокомпонентных систем // Известия сектора физико-химического анализа. 1941. Т. 14. С. 145–152.

9. Демидов С. С., Петрова С. С., Токарева Т. А., "Математический сборник" в контексте отечественной истории: к 150-летию создания журнала // Математический сборник. 2018. Т. 209, № 7. С. 178–196.

10. Одинец В. П. Иммиграция в СССР: профили математиков. Ч. 2 // Вестник Сыктывкарского университета. Серия 1: Математика. Механика. Информатика. 2018. № 3(28). С. 76–90.

УДК 666.982.24

Развитие методов защиты арматурного проката от коррозионно-механического разрушения[1]

Н. Н. Сергеев (Россия, г. Тула)
Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого
e-mail: ansergueev@gmail.com
А. Н. Сергеев (Россия, г. Тула)
Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого
e-mail: ansergueev@mail.ru
А. Е. Гвоздев (Россия, г. Тула)
Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого
e-mail: gwozdew.alexandr2013@yandex.ru
С. Н. Кутепов (Россия, г. Тула)
Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого
e-mail: kutepov.sergei@mail.ru
Д. В. Малий (Россия, г. Тула)
Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого
e-mail: maliydmitriy@yandex.ru

Development of protection methods of reinforcing bars from corrosion-mechanical destruction

N. N. Sergeev (Russia, Tula)
Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University
e-mail: ansergueev@gmail.com
A. N. Sergeev (Russia, Tula)
Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University
e-mail: ansergueev@mail.ru
A. E. Gvozdev (Russia, Tula)
Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University
e-mail: gwozdew.alexandr2013@yandex.ru

[1]Работа выполнена в рамках реализации федеральной целевой программе «Исследование и разработки по приоритетным направлениям развития научно-технологического комплекса России на 2014-2020 годы» (уникальный идентификатор проекта RFMEF 157717X0271).

S. N. Kutepov (Russia, Tula)
Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University
e-mail: kutepov.sergei@mail.ru
D. V. Maliy (Russia, Tula)
Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University
e-mail: maliydmitriy@yandex.ru

1. Введение

Хрупкое разрушение высокопрочных металлов и сплавов применяемых на предприятиях химической и нефтеперерабатывающей промышленности, вызванное воздействием агрессивных водородсодержащих сред, представляет собой серьезную научную проблему, актуальность которой за последние десятилетия резко возросла в связи с открытием аномального воздействия водорода на комплекс свойств металлов и сплавов (аномальная пластическая автодеформация железа, структурно-фазовые превращения, синергетические эффекты микропластичности, эффект обратимой потери формы в аморфных металлических сплавах и многие другие) [1, 2]. Значительное количество источников водорода (коррозия в водных растворах, абсорбция водорода при производстве сварочных операций и нанесении технологических защитных покрытий или при катодной защите подземных трубопроводов) вызывает значительные трудности при описании процессов водородной деградации металлических материалов. Деградация проявляется различными способами, такими как: водородное растрескивание (ВР) высокопрочных сталей; участие водорода в процессе коррозионного растрескивания под напряжением (КРН) нержавеющих сталей; растрескивание труб ядерных реакторов, выполненных из циркониевых сплавов и охрупчивание титановых сплавов путем образования гидрида, деградация GaAs монолитных СВЧ-интегральных схем на спутниках и др.

Вредное влияние водорода на механические свойства впервые было отмечено Джонсоном в 1875 г. С того времени ученые добились многих успехов в разработке металлов с оптимальными параметрами прочности и пластичности. Различные взгляды на микромеханизмы ВР и КРН были обсуждены и подробно рассмотрены в научной литературе [3-7]. Несмотря на многолетние исследования проблема взаимодействия систем металл-водород остается открытой в связи с разнообразием подходов и методик к оценке охрупчивающего воздействия водорода и водородсодержащих сред [9]. Так вплоть до настоящего времени не удалось создать единый механизм взаимодействия водорода с металлическими материалами, который позволил бы объяснить всю совокупность явлений, проявлению которых водород может способствовать в дефектной металлической матрице.

На этом этапе мы вынуждены признать, что большая часть исследований ВР и КРН была проведена в условиях лабораторных испытаний, на образцах, имеющих различный химический состав и физико-механические характеристики, что затрудняет создание стройной теории ВР, единой базы данных испытаний, разработку стандартизированных методов исследования и рекомендаций по производству и обработке применяемых металлов и сплавов. Еще одним фактором, затрудняющим процесс феноменологического описания процессов ВР и КРН является отсутствие систематических данных испытаний натурных образцов и их корреляции с лабораторными испытаниями.

В этой связи особенно актуальной проблемой является создание комплексной методики исследования процессов ВР и КРН включающей в себя проведение испытаний точеных и натурных образцов, позволяющей определять сравнительную стойкость металлов и сплавов к растрескиванию в водородсодержащих средах. Использование полученных результатов позволит определять долговечность и корректировать процессы изготовления и обработки металлов и сплавов с целью создания металлических конструкционных материалов с оптимальными физико-механическими характеристиками и химическим составом стойких к ВР и КРН.

2. Методика исследования водородного растрескивания и коррозионно-механического разрушения металлических сплавов

Для повышения долговечности и исследования влияния внутренних и внешних факторов на чувствительность арматурных сталей к коррозионно-механическому разрушению коллективом авторов ТГПУ им. Л. Н. Толстого под руководством Н. Н. Сергеева была разработана комплексная методика ускоренных испытаний на КМР высокопрочных сталей, сущность которой изложена ниже:

1. Исследование стойкости высокопрочных сталей к ВР и КРН проводили на точеных и натурных образцах арматурных сталей марок: Ст3, Ст5, 18ГС, 20ГС, 20ГС2, 22ГСРМ, 30ГСТ, 35ГС, 20ХГ2Ц, 22Х2Г2АЮ, 23Х2Г2Т, 80С гладкокатанного и периодического профиля Ш6...22 мм и $l = 100 \ldots 400$ мм, как в исходном (горячекатанном или термоупрочненном состоянии), так и прошедших последующую термическую обработку. При выборе водородсодержащей среды для ускоренных лабораторных испытаний исходили из того, что ее действие должно соответствовать действию среды в реальных условиях работы конструкции (характер разрушения в лабораторных и эксплуатационных условиях должен быть одинаковым), и, вместе с тем, она должна обеспечивать сокращение длительности лабораторных испытаний. В связи с этим, в качестве среды вызывающей КРН использовали кипящий раствор нитратов (60% в.ч $Ca(NO_3)_2$ + 5% в.ч. NH_4NO_3 + 35% в.ч. H_2O) при температурах 70; 90; 110 ℃; а для исследования ВР использовали водный раствор серной кислоты с добавлением роданистого аммония (4,5% H_2SO_4 + 2,5% NH_4CNS) при комнатной температуре с катодной поляризацией при плотности тока $D_K = 60$ А/м^2, так и без нее. Испытания проводили с использованием коррозионных камер и рычажных установок, разработанных Н. Н. Сергеевым [8] в условиях статического нагружения (при постоянной растягивающей нагрузке) при напряжениях $\sigma_Э = (0{,}1 \ldots 0{,}9)\sigma_B$. Стойкость стали против коррозионно-механического разрушения (КМР) оценивали временем до разрушения по результатам испытаний 4...6 образцов на каждую экспериментальную точку графика. Сталь считали стойкой к растрескиванию если она не разрушилась после 200 часов испытаний при величине статических растягивающих напряжений не менее 75% от критического разрушающего напряжения [9-11].

2. Для исследования влияния наводороживания, уровня растягивающих напряжений, длительности коррозионных процессов на субмикроструктурные изменения высокопрочной стали при испытаниях на длительную прочность применяли метод внутреннего трения (ВТ), позволяющий судить о характеристиках локального напряженного состояния металла. Измерения температурных зависимостей внутреннего трения (ТЗВТ) проводили на натурных образцах ($d = 8$, 10 и 12 мм; $l = 200$ мм) сталей (гладкокатанных и периодического профиля). Исследования кинетики процесса КМР производили в следующей последовательности: предварительно образцы подвергали комплексному и раздельному влиянию различных факторов – коррозионной среды, растягивающих напряжений, катодной поляризации от внешнего источника тока при различном времени выдержки вплоть до момента предразрушения. Затем из натурных образцов вырезали образцы $l = 200$ мм и определяли ТЗВТ. Время между подготовкой образцов и измерением ВТ не превышало 1 часа. Измерения ТЗВТ проводили при различных температурах (20...500 ℃) при f ˜ 10^3 с$^{--1}$ по резонансной методике [12]. Наблюдали изменение высоты пика Кестера под влиянием вышеуказанных факторов. Измеряли также величину низкотемпературного фона ВТ ˜ 150 ℃, который связан с наличием в материале субмикропустот. По резонансной частоте определяли величину модуля упругости.

3. Исследовали влияние температуры отпуска на механические свойства и стойкость про-

тив растрескивания в водородсодержащих средах. Отпуск осуществляли с электронагрева в диапазоне температур 150...600 ℃ с интервалом в 50 ℃. Скорость электронагрева составляла 10...15 ℃/сек. Превращения, происходящие при отпуске, оценивали по изменению высоту пика Кестера, природу которого связывают с взаимодействием примесных атомов с дислокациями, а также с обусловленным этим взаимодействием уровнем внутренних локальных (пиковых) микронапряжений.

3. Результаты и их обсуждение

Проведение большого числа сравнительных испытаний наиболее широко распространенных марок арматурных сталей показало, что при высоком уровне приложенных растягивающих напряжений (0,9...0,7σ_B) практически все стали обладают высокой чувствительностью к КМР. Несмотря на большую разницу в абсолютных значениях стойкости образцов, испытываемых в различных средах, и характера зависимости времени до разрушения от уровня приложенных напряжений – имеется идентичность в определении порядка стойкости при проведении сравнительных испытаний.

Установлено, что увеличение уровня приложенных растягивающих напряжений приводит к сокращению инкубационного периода развития микротрещин при водородном растрескивании. Зарождение и развитие трещин при этом происходит преимущественно в объеме образца в местах локализации растягивающих напряжений на дефектных участках структуры и субструктуры.

Исследование влияния внутренних и внешних факторов на кинетику процесса КМР позволило установить, что длительная прочность термически упрочненного арматурного проката в значительной степени определяется релаксационной способностью структуры – релаксация остаточных пиковых микронапряжений, локализующихся у границ зерен и субструктурных границ способствует снижению чувствительности к растрескиванию.

Анализ результатов испытаний на коррозионное растрескивание в растворах нитратов показал, что стержневая арматура периодического профиля из стали 80С в состоянии поставки при механических свойствах класса прочности А600 имеет достаточно высокую стойкость против КРН. Наилучшие коррозионные и механические свойства для арматуры, изготовленной из стали 80С обеспечивают структуры сорбита и тонкого перлита. Арматура из стали марки 20ХГ2Ц в состоянии поставки при сложившейся технологии производства отличается большой нестабильностью стойкости против КРН при изменении химического состава (в основном углерода) в пределах марочного. Высокую коррозионную стойкость арматура из стали 20ХГ2Ц имеет только при содержании углерода на нижнем пределе марочного состава, что обеспечивается структурой однородного бейнита при механических свойствах на уровне класса прочности А600. При более высоких механических свойствах арматура из стали 20ХГ2Ц имеет более низкую коррозионную стойкость.

Исследование влияния химического состава и температуры отпуска на чувствительность стали 23Х2Г2Т к КРН позволило установить, что контролируя химический состав (и прежде всего содержание углерода и хрома) и технологические режимы получения данной стали можно не только резко повысить ее сопротивляемость растрескиванию, но и получить гарантированный комплекс высоких эксплуатационных свойств – механических и коррозионных. Наибольшую устойчивость против КРН при практически неизменной прочности для арматуры из стали 23Х2Г2Т обеспечивает 2-х часовой отпуск в интервале температур 350...400 ℃. Полученные данные об изменении высоты 200° пика на ТЗВТ при отпуске стали 23Х2Г2Т в интервале температур 150...400 ℃, позволяют предполагать, что снижение чувствительности стали 23Х2Г2Т к КРН при отпуске обусловлено протеканием релаксационных процессов. Проведенные исследования показывают, что влияние микроструктуры и термической обработки на чувствительность арматурной стали 23Х2Г2Т к КРН в растворах нитратов, сводится к изменению уровня и распределения остаточных напряжений в структуре стали и особенностям распределения примесей внедрения (C и N) по объему зерен.

По-видимому, наличие примесей (C и N) на границах зерен является необходимым условием для возникновения коррозионного процесса, а его скорость определяется напряженным состоянием, способностью структуры к релаксации напряжений и концентрацией агрессивной среды.

Таким образом, для повышения стойкости арматурной стали 23Х2Г2Т к КРН необходимо обеспечивать такой состав и условия термической обработки, в результате которых примеси внедрения (C и N) будут удерживаться преимущественно в объеме зерен, а структура стали будет отличаться однородностью и повышенной стойкостью к релаксации напряжений.

4. Выводы

Разработана методика сравнительных испытаний, которая позволяет достаточно экспрессно определять стойкость против коррозионно-механического разрушения арматурных сталей. Установлено влияние термической обработки на механические и коррозионные свойства арматурного проката. Выявлены кинетические закономерности процессов разрушения высокопрочных сталей в условиях воздействия механических, тепловых, концентрационных полей и агрессивных сред, необходимые для повышения и прогнозирования долговечности арматурного проката из высокопрочных сталей в композиционных железобетонных конструкциях и сооружениях. Предложены физико-химические комплексные методы защиты черных и цветных металлов и сплавов от коррозионно-механического разрушения, которые могут обеспечить повышение долговечности высокопрочных сталей, эксплуатируемых в агрессивных водородсодержащих средах и ресурс композиционных железобетонных конструкций со стальными арматурными стержневыми высокопрочными наполнителями.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Шашкова Л.В. Фрактально-синергетические аспекты локальной микроповреждаемости и разрушения диффузионно-активированной водородом стали: дис. ... д-ра физ.-мат. наук: 01.04.07 / Шашкова Лидия Владимировна. – М., 2014. – 336 с.

2. Шаповалов В.И. Легирование водородом. Днепропетровск.: Журфонд, 2013. 385 с.

3. Birnbaum H.K. Mechanisms of hydrogen related fracture of metals / Hydrogen effects on materials behavior; N.R. Moody and A.W Thompson (eds). TMS. Warrendale, PA. 1990. P. 639-658.

4. Lynch S.P. Chapter 1: Mechanistic and fractographic aspects of stress-corrosion cracking (SCC) // Stress Corrosion Cracking. Woodhead Publishing Limited, 2011. P. 3-89.

5. Lynch S.P. Chapter 2: Hydrogen embrittlement (HE) phenomena and mechanisms // Stress Corrosion Cracking. Woodhead Publishing Limited, 2011. P. 90-130.

6. Анализ теоретических представлений о механизмах водородного растрескивания металлов и сплавов / Н.Н. Сергеев, А.Н. Сергеев, С.Н. Кутепов, А.Е. Гвоздев, Е.В. Агеев // Известия Юго-Западного государственного университета. 2017. Т. 21, № 3 (72). С. 6-33.,

7. Механизмы водородного растрескивания металлов и сплавов, связанные с усилением дислокационной активности / Н.Н. Сергеев, С.Н. Кутепов, А.Е. Гвоздев, Е.В. Агеев // Известия Юго-Западного государственного университета. 2017. Т. 21, № 2 (71). С. 32-47.

8. Сергеев, Н. Н. Механические свойства и внутреннее трение высокопрочных сталей в коррозионных средах: монография / Н. Н. Сергеев, А. Н. Сергеев. – Тула: Изд-во ТулГУ, 2018. – 430 с.

9. ГОСТ Р 9.915-2010. Металлы, сплавы, покрытия и изделия: Методы испытаний на водородное охрупчивание. – М.: Стандартинформ, 2011. – 36 с.

10. ASTM F519-17. Standard Test Method for Mechanical Hydrogen Embrittlement Evaluation of Plating/Coating Processes and Service Environments / in: Annual Book of ASTM Standards, ASTM International, West Conshohocken, PA, USA, 2017.

11. ГОСТ 9.901.1-89. Единая система защиты от коррозии и старения. Металлы и сплавы. Общие требования к методам испытаний на коррозионное растрескивание. – М.: Издательство стандартов, 1993. – 21 с.

12. ГОСТ 25156-82. Металлы. Динамический метод определения характеристик упругости. – М.: Издательство стандартов, 1982. – 21 с.

УДК 51(091)

Н. Н. Лузин о преподавании математических дисциплин в педагогических институтах

Г. С. Смирнова (Россия, г. Москва)
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
e-mail: galiafr@mail.ru

N. N. Luzin about teaching mathematics in pedagogical institutes

G. S. Smirnova (Russia, Moscow)
Moscow State University
e-mail: galiafr@mail.ru

В Архиве РАН были найдены программы некоторых курсов, читанных Н. Н. Лузиным в Московском университете в разные годы, а также его проект программы курса по математическому анализу для педагогических институтов. К сожалению, точной даты обнаруженных документов установить пока не удалось, но в соответствии с данными архива можно утверждать, что программы основных курсов по анализу для студентов Московского университета относятся к самому началу педагогической деятельности Лузина 1914–1924 гг.

В 1908 г. Н. Н. Лузин сдал магистерские экзамены по математике. К 1909 г. он прочел на физико-математическом факультете Московского университета две пробные лекции и получил право преподавания в университете. Однако несмотря на то, что в 1909 г. им был объявлен курс по теории интегральных уравнений, читать этот курс ему не пришлось, поскольку он получил возможность отправиться в научную командировку в Геттинген и Париж, из которой вернулся в Москву весной 1914 г.

Ситуация на факультете в это время была тяжелая: в 1911 г. в ответ на циркуляры тогдашнего министра просвещения Л. А. Кассо «О надзоре за учащимися высших учебных заведений», «О временном недопущении публичных и частных студенческих заведений» и др., фактически уничтожавшие университетскую автономию, около 130 преподавателей и сотрудников Московского университета подали в отставку и были уволены. Физико-математический факультет лишился профессоров Б. К. Млодзеевского, В. К. Церасского, П. Н. Лебедева, С. А. Чаплыгина, Н. А. Умова и стал перед труднейшей задачей обеспечить чтение хотя бы основных учебных курсов. Н. Н. Лузину сразу пришлось читать лекции и работать над составлением совершенно новых для него курсов — ему было поручение чтение основного курса по аналитической геометрии и высшей алгебры.

Десятилетие с 1914 по 1924 г. стало периодом блестящего расцвета научной и педагогической деятельности Н. Н. Лузина. Он также стал читать факультативный курс по теории функций действительного переменного и вести специальный исследовательский семинар, из которых выросла знаменитая Московская школа теории функций — замечательный памятник славной научной деятельности Н. Н. Лузина.

Часть найденных документов этого периода написана самим Лузиным и представляет перечень тем курсов дифференциального исчисления, интегрального исчисления, с их приложениями, а также курса дифференциальных уравнений. Для этих курсов указано необходимое число часов для отработки каждой темы. Также имеется рукописный список вопросов к экзаменам по дифференциальному и интегральному исчислениям с указанием параграфов из некоторого учебника. Проведенное сравнение текстов Лузина и Оглавления второго издания (1922 г.) учебника «Элементы дифференциального и интегрального исчислений» американского математика В. Грэнвиля (William Anthony Granville, 1863–1943) не позволяет утверждать, что именно этим учебником Н.Н. Лузин пользовался при составлении своего списка экзаменационных вопросов.

Программа по аналитической геометрии представлена копией машинописного текста с указанием 27 пунктов, по-видимому, представляющих материал соответствующих лекций. В этой программе явно указано пособие, которым необходимо пользоваться: «Виноградов. Краткий курс Аналитической геометрии, Дифференциального и Интегрального исчисления». Речь идет о книге «С. П. Виноградов. Краткий курс аналитической геометрии и дифференциального и интегрального исчислений», второе издание которой вышло в свет в 1915 г.

Проект программы курса по математическому анализу для педагогических институтов датируется сотрудниками архива как 1930е — начало 1940х гг. и представляет собой машинописный текст с исправлениями, внесенными рукой Н. Н. Лузина. Так же, как и в программах курсов анализа для студентов университета, все темы указываются с числом часов, необходимых для их изучения.

По мнению Н. Н. Лузина, этот курс должен состоять из следующих дисциплин:

1 курс: Функции одного переменного (120 часов лекций и 100 часов упражнений).

2 курс 1 семестр: Ряды (40 ч. лекций и 20 ч. упражнений).

2 курс 2 семестр: Функции многих переменных (40 часов лекций и 20 часов упражнений).
2 курс 2 семестр: Дифференциальные уравнения (80 часов лекций и 40 часов упражнений).

3 курс 1 семестр: Дескриптивная теория функций действительного переменного (52 часа лекций).

3 курс 1 семестр: Метрическая теория функций действительного переменного (28 часов лекций).

3 курс 2 семестр: Уравнения математической физики (40 часов лекций).

4 курс 1 семестр: Теория аналитических функций (60 часов лекций).

Интересно отметить, что эта программа сильно отличалась от реальных программ по анализу в различных педагогических институтах страны. Например, студенты физико-технического отделения математической секции Ярославского пединститута (физико-математический факультет) в 1932/33 учебном году изучали неперово число e, натуральные логарифмы, дифференцирование показательной и логарифмической функций лишь в первом семестре

2 курса, в то время как по программе Лузина этот материал должен был быть пройден уже в первом семестре 1 курса. По мнению Лузина, на изучение основ дифференциального и интегрального исчисления функций одного переменного студентам 1 курса необходимо выделить 120 лекционных часов и 100 часов на упражнения, а в Ярославле курс анализа для студентов 2 курса в упомянутый год состоял в общей сложности из 66 часов лекций и упражнений. Теория рядов (40 часов лекций и 20 часов упражнений в первом семестре 2 курса по мнению Лузина) преподавалась в Ярославле 36 часов во втором семестре 2 курса. И т.д.

По-видимому, проект программы по математическому анализу, обнаруженный в архивных бумагах Лузина, явился одним из результатов выполнения программы по реорганизации высшего педагогического образования в СССР. В 1930–1931 гг. все педагогические факультеты в университетах преобразовывались в педагогические институты, в которых сокращалось число общеобразовательных предметов (с 22 в 1927 г. до 9-10 в 1931 г.), увеличивалось число часов на предметный блок учебного плана (в том числе на математические дисциплины), а также на педагогическую практику. На основе постановления ЦИК СССР от 19 сентября 1932 г. «Об учебных программах и режиме в высшей школе и техникумах» пересматривались учебные планы и программы, в которых на общенаучные и специальные предметы отводилось не менее 80-85 процентов учебного времени. Кроме обязательных вводились факультативные дисциплины, имеющие отношение к будущей специальности, запрещались коллективные зачеты, вводилась дифференцированная форма оценок знаний, устанавливались две зачетные сессии в учебном году, экзамены и дипломные работы.

В 1936 г. была принята новая широкая программа мер по дальнейшему развитию высшего образования, которая нашла выражение в развернутом постановлении “О работе высших учебных заведений и о руководстве высшей школой”, регламентирующих работу вузов; основные положения этого постановления сохраняют свою силу до сих пор.

———————————————————————————

УДК 372.851; 510.21

Дискретность и непрерывность в математике и математическом образовании: исторические и методологические аспекты

В. А. Тестов (Россия, Вологда)
Вологодский государственный университет
e-mail: vladafan@inbox.ru

Discreteness and continuity in mathematics and mathematical education: historical and methodological aspects

V. A. Testov (Russia, Vologda)
Vologda State University
e-mail: vladafan@inbox.ru

В настоящее время при изучении математики материал во многих случаях не складывается в систему знаний, а самостоятельно обучающийся полученные знания чаще всего не в состоянии осмыслить и структурировать. Поэтому необходимо учитывать при обучении особенности формирования у обучающихся основных математических понятий [2]. Для формирования целостного представления о математике необходимо стремиться к единению различных взглядов на природу математики, взаимодействию в обучении различных типов математических моделей.

Однако, свою науку большинство математиков рассматривают с различных точек зрения, поэтому им трудно согласовать свои позиции. Как образно выразился М. Клайн, «каждое крыло здания математики претендует на роль единственно истинного храма, где хранятся жемчужины математической мысли» [1].

Как известно, особой формой систематизации знаний, целостной системой представлений о закономерностях и свойствах объективного мира, является научная картина мира, которая представляет обобщение и синтез различных научных теорий. Поэтому обучение должно быть направлено на формирование научной картины мира, в частности, на формирование математической картины мира.

В математической картине мира важное место занимают представления о дискретности и непрерывности математических объектов и их взаимосвязи с реальным миром. В истории математики прослеживаются острые дискуссии разных взглядов на природу математики, на соотношение в ней дискретных и непрерывных моделей. Как среди философов, так и среди математиков и в настоящее время нет полного единства по этим вопросам.

Первобытная математика была дискретной. Соотношение между дискретностью и непрерывностью было одной из основных проблем во времена Древней Греции и в философии, и в математике. Демокрит в частности считал, что мир дискретен. Но большинство ученых — современников Демокрита — отвергли дискретное, атомистическое истолкование мира. Платон был яростным противником дискретности. Аристотель тоже был против атомистического истолкования мира.

Сложность вопроса о соотношении непрерывности и дискретности мира наглядно показали знаменитые апории Зенона. В более позднее время среди математиков была распространено мнение, что с созданием теории бесконечно малых и предельного перехода апории Зенона были разрешены. Однако это «разрешение» являлось очередным заблуждением. Вместо утверждения «стрела никогда не долетит до цели», которое не принималось разумом, появился тезис «переменная никогда не достигнет своего предела», который всех устраивал.

Дискретные и непрерывные модели соперничали и в первый период создания дифференциального и интегрального исчисления. Лейбниц основывался на дискретных представлениях, он ввел величины, названные им инфинитезиальными, или бесконечно малыми, которые отличны от нуля, но меньше любого другого положительного числа. Самым уязвимым местом его теории было противоречие с аксиомой Архимеда. Это противоречие было значительно позднее разрешено Робинсоном, во второй половине XX столетия.

В XIX в создатели математического анализа Коши, Дедекинд, Вейерштрасс и другие изгнали идеи дискретности из математического анализа, что придало фундаментальным математическим понятиям большую строгость, но отдалило математику от реальности.

Вместе с тем идеи дискретности высказывались отдельными математикам даже в этот период господства парадигмы непрерывной математики. Так во 2-й половине XIX в. русский математик Н.В. Бугаев, используя аналогии между операциями теории чисел и математического анализа, пытался построить науку о «прерывных» функциях — которая им была названа «аритмологией». Он подчеркивал взаимосвязь и одновременно взаимодополняемость двух подходов: аналитического и аритмологического.

Вопросами взаимосвязи непрерывности и дискретности в математике занимался и ученик Бугаева — П. А. Флоренский. В 1903 г. он утверждал, что «есть чисто фактические данные, помимо отвлеченных, указывающие на прерывность многих сторон действительности». Распространение непрерывных методов он объясняет плодотворностью дифференцирования и интегрирования.

В начале XX в. происходят перемены в теоретической физике, носившие революционных характер, что привело к усилению интереса к взаимосвязи непрерывных и дискретных процессов. В это время. М. Планк выдвинул гипотезу о дискретности физического действия. Затем А. Эйнштейн ввел дискретность в световые явления.

Дискретность возникла и при разработке теории информации. Академик А. Н. Колмогоров считал, что в живых организмах в процессах, связанных с управлением и переработкой информации, ведущими являются дискретные механизмы. Но математики предпочитают непрерывную модель лишь потому, что она проще. Именно поэтому математические модели были в основном непрерывными.

Эту же мысль хорошо сформулировал американский специалист по дискретной математике Д. Зайлбергер: «Непрерывный анализ и геометрия являются только вырожденными аппроксимациями дискретного мира. ... Хотя дискретный анализ концептуально проще непрерывного, технически он, как правило, значительно сложнее. Поэтому в отсутствие компьютеров непрерывная геометрия и анализ были необходимыми упрощениями, позволявшими исследователям добиваться успехов в естественных науках и математике».

Истории развития науки показывает, что имелись неоднократные попытки нарушения баланса между дискретностью и непрерывностью, свести математику к одной их этих компонент, что, в свою очередь, приводило к разрушению целостности математической картины мира. Таким образом, происходящие процессы в науке, самой математике приводят к необходимости новой, сбалансированной точки зрения на природу математики, отражающей ее целостность, синергию в ней непрерывного и дискретного.

Основой нового мышления может стать тринитарная методология, которая в последнее время все шире используется в постнеклассическом мировоззрении. Для решения проблемы противоречия между дискретностью и непрерывностью в качестве третьего элемента, как мера их компромисса, может рассматриваться фрактальность. Характеристическим свойством фрактальности, как известно, является самоподобие.

Один из создателей теории множеств Георг Кантор первым построил фрактальное множество из непрерывного объекта — отрезка путем выбрасывания из этого отрезка бесконечное число раз интервалов разной длины. В результате получается дискретный объект — канторова пыль.

Дискретный объект — треугольник Паскаля превращается во фрактальный объект — треугольник Серпинского, если в нем закрашивать нечетные числа в один цвет, а четные — в другой цвет, а число строк в этом треугольнике стремить к бесконечности.

Но большинство из фрактальных множеств в докомпьютерную эпоху оставались невидимыми для глаз, поскольку подходящей техники для реализации свойства самоподобия, которым обладают все фракталы, еще не находилось.

Фрактальная геометрия — это не только новый раздел математики, это одна из важнейших составных частей математической картины мира. Фрактальность можно рассматривать в качестве третьего элемента, необходимого для решения проблемы противоречия между дискретностью и непрерывностью в математике. Это средство интеграции дискретных и непрерывных моделей в обучении математики, с помощью этого нового научного направления предоставляется возможность обеспечить единение дискретных и непрерывных моделей, сформировать у обучающихся целостную систему представлений о математической картине мира [3].

Кроме того, фрактальность, как показано автором, — это одна из сторон, наряду с симметрией, красоты в математике и в математическом образовании [4].

Все эти факторы определяют значение фрактальной геометрии для обучения, необходимость ее рассмотрения как в вузе, так и в школе.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Клайн М. Математика. Утрата определенности. — М.: Мир, 1984.

2. Тестов В. А. Особенности формирования у школьников основных математических понятий в современных условиях // Научно-методический электронный журнал «Концепт»: http://e-koncept.ru/issue/104/, 2014, № 12. С. 1-9.

3. Тестов В. А. Интеграция дискретности и непрерывности при формировании математической картины мира обучающихся //Интеграция образования. 2018. Т. 22, No 3. С. 480–492. DOI: 10.15507/1991-9468.092.022.201803.480-492

4. Тестов В. А. Красота в математическом образовании: синергетическое мировидение // Образование и наука. 2019; 21(2): С. 9-26. DOI.10.17853/1994-5639-2019-2-9-26

УДК 51

К истории ТГПУ им. Л. Н. Толстого и математического факультета

А. Е. Устян (Россия, г. Тула)
Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого
e-mail: ustyan37@mail.ru

The history of TSPU them. L. N. Tolstoy and mathematics faculty

A. E. Ustyan (Russia, Tula)
Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University
e-mail: ustyan37@mail.ru

«Народ не знающий или забывший свое прошлое, не имеет будущего» (Древнегреческий философ Платон)
«История – свидетель прошлого, свет истины, живая память, учитель жизни, вестник старины»
(Древнеримский политический деятель, оратор и философ Марк Туллий Цицерон)

Педагогический институт в Туле был открыт вскоре после образования Тульской области в сентябре 1937 года, когда Тула стала областным центром. До революции в Туле не было высших учебных заведений.

В 1921 году в Туле появился Механический институт, а еще раньше, в 1918 г., институт народного образования, существовавший недолго.

В Туле и окружающих ее районах была острая потребность в квалифицированных учителях школ с самых первых лет существования советской власти: число учащихся в школах стремительно росло с каждым годом. Эту потребность частично удовлетворял институт народного образования, а с 1931 года вечерний пединститут – филиал Московского пединститута, который в 1938 году превратился вечернее отделение вновь созданного Тульского государственного института.

Тульский государственный педагогический институт был организован в 1938 году на основании Постановления ВЦИК СССР № 45 от 26 июля 1938г. как самостоятельное высшее учебное заведение.

Постановление Совнаркома об открытии Тульского педагогического института вышло 19 сентября 1938 года.

Преподавательский коллектив института составлял 21 человек, работавших на 5 кафедрах вуза.

В развитии института (ныне университета) существенный вклад внесли

Ректоры:

1. Карп Илларионович Чирва с 1938 по 1939г

Он родился 30-го мая 1894 г. в станице Васюринская Кубанской области Краснодарского края, деятель народного образования. Из семьи кубанских казаков.

15 ноября 1938 года в Тульском педагогическом институте, на всех факультетах начались учебные занятия.

2. Богданов Алексей Моисеевич с 1939 по 1951 г.

Алексей Моисеевич родился 17. 04.1900 г, в с. Солдатское Горшеченского уезда Курской губернии.

В 1919 г. окончил учительскую семинарию в Воронеже. 1939 г.-Воронежский университет. Кандидат исторических наук, доцент.

Богданов Алексей Моисеевич возглавлял Тульский пединститут в период становления, в тяжелые годы войны, первые послевоенные годы до 1953 года.

Под его руководством проходило становление и развитие Тульского педагогического института довоенное время. Организовал эвакуацию института осенью 1941 г на восток и его возвращение в 1942 г.

Умер 28.04. 1958 г. в Туле.

3. Куклин Тимофей Фомич, 1951 по 1956.

Примечание

С 26.06.1956 по 31.07.1962 гг. — Куклин Тимофей Фомич возглавлял Орловский, Новозыбковский педагогические институты, с 1956 г. — Архангельский пединститут.

4.Шмараков Николай Иванович с 1956 по 1972 г.

Шмараков Николай Иванович родился 19 мая 1917 г., д. Мерлиновка, ныне Ленинского района Тульской области, в семье Тульских оружейников. Кандидат исторических наук, доцент. Умер 23 марта 1972 г.

18 июля 1958 года Совет Министров РСФСР принял Постановление №819 о присвоении Тульскому государственному педагогическому институту имени великого русского писателя Л. Н. Толстого

5. Молчанов Владимир Николаевич

Молчанов Владимир Николаевич родился 28 июля 1925 г. в Туле. Кандидат исторических наук, доцент. Умер в 1992 г. в Туле.

6. Буравихин Виктор Анатольевич с 1978 по 1981 г.

Виктор Анатольевич Буравихин родился 24 августа 1931 года в с. Усть – Ануй Быстро-Истокского района Алтайского края. Из семьи крестьян. Член-корреспондент Академии педагогических наук, доктор физико-математических наук, профессор. Умер 22 июня 1999 г. в Москве.

7. Сапогов Евгений Георгиевич с 1981 по 1992 г.

Евгений Георгиевич Сапогов родился 2 декабря 1932 года в с. Белавка Воронежского района Горьковской области. Кандидат филологических наук, профессор. Евгений Георгиевич Сапогов скоропостижно скончался 13 сентября 1992 года в Туле.

Шайденко Надежда Анатольевна с 1992 по 2011 г.

Надежда Анатольевна Шайденко родилась 23 ноября 1952 года в Туле. Доктор педагогических наук, профессор, почетный гражданин города-героя Тулы.

Приказом Государственного комитета Российской Федерации по высшему образованию №1268 от 29 декабря 1994 года и приказом Министерства образования Российской Федерации №7 от 10 января 1995 года вузу присвоен статус Тульского государственного педагогического университета имени Л.Н.Толстого.

9. Панин Владимир Алексеевич ректор с 2011 г.

Владимир Алексеевич родился 21 января 1957 года в Туле. Доктор физико-математических наук, профессор. Прежде всего благодаря Панину в Туле сформировался коллектив физиков-теоретиков, работающих в области физики плазмы.

Физико-математический факультет был создан одновременно с созданием самого института осенью 1938 года. Кроме него в первые годы существования института имелись еще только два факультета (исторический факультет и факультет русского языка и литературы).

На всех факультетах института было только 5 кафедр, в том числе единственная физико-математическая кафедра на физико-математическом факультете (факультет готовил учителей, которые могли преподавать и математику и физику).

Штат преподавателей физмата в первом учебном году еще не был стабильным. Некоторые приезжали из Москвы. Не было стабильным ввиду этого и расписание. Физико-математической кафедрой, а также и факультетом в этом году руководил физик, доцент Пальгунов Петр Петрович, приезжавший из Москвы.

Осенью 1939 года штат работников физмата ТГПИ стабилизировался. На факультет были приглашены из Самаркандского университета питомцы МГУ, молодые ученые, кандидаты физико-математических наук, супруги Павел Васильевич Соловьев и Гущина Валентина Михайловна.

Павел Васильевич Соловёв родился 25 ноября 1906 года в деревне Криворезово Дугненского района Тульской области в крестьянской семье. Начальное образование получил в деревне, а затем учился в школе II ступени г. Алексина, которую закончил в 1926 году и поступил на педагогический факультет Второго Московского государственного университета, который закончил в 1930 году. Несколько позже Второй Московский университет был преобразован в Московский педагогический институт имени Владимира Ильича Ленина. По окончании института, в течение года(с 1930 по 1931), Павел Васильевич Соловёв преподавал аналитическую геометрию на физическом факультете МГУ.

В 1931 году стал аспирантом МГУ. Им были опубликованы статьи:

-«Решение некоторых нелинейных интегральных уравнений»

-«Решение некоторых граничных задач уравнения теплопроводности»

-«Решение уравнений эллиптического и параболического типа для малых областей».

За свои научные работы Павел Васильевич Соловьёв в 1938 году был удостоен премии на Всесоюзном соревновании молодых научных работников при ЦК ВЛКСМ.

На совещании было принято следующее сообщение. Предлагается выписка из постановления:

«Отмечая, что работы представляют собой обобщение известных уже результатов, представляющих значительный интерес - отнести их к III категорий с премированием автора 900 рублями.

Председатель Всесоюзного комитета по
соревнованию молодых научных работников при
ЦК ВЛКСМ
Президент Академии наук СССР
Академик – Владимир Леонтьевич Комаров.
Москва, июнь 1938 г.

В начале первого, то есть 1938-39 учебного года в дневном педагогическом институте было 175 студентов, к концу их осталось 155, в том числе 55 студентов физмата (2 группы).

В становлении и развитии факультета существенную роль сыграли:

Кандидат физико-математических наук, доцент Петрушкин Николай Павлович
Кандидат физико-математических наук, доцент Подсыпанин Владимир Дмитриевич
Кандидат физико-математических наук, доцент Добровольский Михаил Николаевич
Кандидат физико-математических наук, доцент Залманович Зоя Ивановна
Доктор физико-математических наук, профессор Левин Виктор Иосифович
Кандидат физико-математических наук, доцент Антропова Варвара Ивановна
Доктор физико-математических наук, профессор Выгодский Марк Яковлевич

Доктор физико-математических наук, профессор Гриндлингер Мартин Давидович
Доктор физико-математических наук, профессор Безверхний Владимир Николаевич,
Доктор физико-математических наук Добрынина Ирина Васильевна
Доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой алгебры, математического анализа и геометрии Добровольский Николай Михайлович
Доктор педагогических наук, профессор Есаян Альберт Рубенович
Кандидат физико-математических наук, доцент Рыбаков Владислав Иванович
Доктор педагогических наук, профессор Симонов Александр Сергеевич
Кандидат физико-математических наук, доцент Рабинович Самуил Израилевич
Кандидат физико-математических наук, доцент Чернов Виктор Михайлович
Доктор физико-математических наук, профессор Головнёв Юрий Филиппович
Доктор физико-математических наук, профессор Северьянов Владимир Владимирович
Кандидат педагогических наук, доцент Куперман Генрих Борисович
Доцент Сотский Николай Николаевич и многие другие.

———————————————————————————

УДК 51(091)

Из истории ЦАГИ (к столетию со дня основания)

В. Н. Чиненова (Россия, г. Москва)
Механико-математический факультет МГУ им. М. В. Ломоносова
e-mail: v.chinenova@yandex.ru

From the history of TsAGI (on the centenary of its founding)

V. N. Chinenova (Russia, Moscow)
Faculty of Mechanics and Mathematics, Lomonosov Moscow State University
e-mail: v.chinenova@yandex.ru

Во время первой мировой войны (1914 г.) выяснилось, что авиация играет исключительную роль. К весне 1916 г. относятся первые попытки постройки в России самолетов. Военно-техническое управление обратилось к Н. Е. Жуковскому с предложением дать заключение о проекте строившегося самолета (двухмоторного биплана) Слесарева. Н. Е. Жуковский и его коллеги по аэродинамической лаборатории провели проверочные расчеты и выяснили, что самолет Слесарева сможет летать с грузом до 6.5 тонны, и комиссия Жуковского дала блестящий отзыв о бомбардировщике «Святогор».

В связи с этой работой Н. Е. Жуковский возбудил перед Военно-техническим управлением ходатайство на отпуск средств для организации при МВТУ авиационного расчетно-испытательного бюро для проведения опытных и теоретических исследований, связанных с конструкцией новых самолетов. «После обычной бюрократической волокиты такое бюро и было организовано при МВТУ; руководителем его был Жуковский, а работниками – ученики Николая Егоровича, из которых большинство ранее было членами руководимого им студенческого авиационного кружка при МВТУ.

Расчетно-испытательное бюро впоследствии превратилось в руководящую в Советском Союзе научную авиационную организацию – Центральный аэродинамический институт, организаторами и первыми сотрудниками которого были работники расчетно-испытательного бюро» [1, с. 89].

Основатель ЦАГИ — профессор Императорского технического училища и Московского государственного университета Н. Е. Жуковский — обладал глубокими познаниями в высшей математике и инженерных науках. Неудивительно, что вокруг этого человека сплотился коллектив студентов, одержимых идеей практического воздухоплавания. Его теоретические работы в области авиации, практический опыт создания аэродинамических труб в МГУ, ИМТУ и Кучино и проводившиеся в этих лабораториях исследования послужили фундаментом для развития авиационной науки в России.

В связи с потребностями, выдвигаемыми войной, Николай Егорович работал над рядом теоретических вопросов, связанных с авиацией. Результатом этих исследований были сообщения о бомбометании с аэропланов в Московском Математическом обществе и в Отделении физических наук и напечатана работа «Бомбометание с аэроплана».

4 ноября 1918 г. Николай Егорович устроил у себя на квартире совещание об организации научного центра по авиации. В этом совещании приняли участие ученики и сотрудники Жуковского, – немногие в то время специалисты-инженеры, работавшие в области авиации. Разработанный на этом совещании проект организации института был представлен на утверждение правительства (15 декабря 1918 г. он был утвержден), и новый научно-исследовательский комплексный центр, который вскоре занял одно из первых мест среди авиационных научно-исследовательских институтов всего мира – Центральный аэрогидродинамический институт (сокращенно — ЦАГИ) начал свое официальное существование. По инициативе Н. Е. Жуковского руководящим органом Института стала Коллегия, которую он и возглавил.

После смерти Н. Е. Жуковского в 1921 г. ЦАГИ возглавил его соратник и один из ближайших учеников — С. А. Чаплыгин (1869–1942), крупнейший ученый в области механики и оказавший исключительное влияние на развитие техники, впоследствии академик (1929), внесший важнейший вклад в формирование научного облика института.

Сергей Алексеевич Чаплыгин, создатель оригинальных методов научных исследований в основных и наиболее трудных областях аэродинамики: теории профиля крыла самолета, аэродинамики больших скоростей, теории неустановившихся движений. Он окончил Московский университет в 1890 году, стал профессор Московского университета с 1903 г. В 1911 г. Чаплыгин в числе группы профессоров и преподавателей добровольно покинул университет в связи с «делом А. А. Кассо». В университет он вернулся только после февральской революции 1917 г. и возглавлял кафедру механики до 1924 г., когда он покинул университет, посвятив себя целиком научной деятельности и работе по руководству ЦАГИ. Первые научные труды относятся к области гидромеханики. Затем он занимался струйными течениями («О газовых струях», докторская диссертация, 1902 г.) и вопросами теории профиля крыла самолета; он – создатель оригинальных методов научных исследований в основных и наиболее трудных областях аэродинамики.

В период научной и организаторской деятельности в ЦАГИ (1918–1942 г.) С. А. Чаплыгин являлся членом (с 1920 г.), а с 1921 года — председателем Коллегии ЦАГИ. В то же время он непосредственно руководил также и строительной Комиссией института. Под руководством С. А. Чаплыгина была построена аэродинамическая лаборатория, лаборатория испытания материалов, винтомоторная, гидроканал, опытный завод. В должности директора института он работал с 1928 по 1931 год, когда по состоянию здоровья оставил этот пост. Однако, являясь начальником общетеоретической группы продолжал возглавлять научную жизнь института и вместе с тем, с 1939 г. возглавлял одну из крупнейших лабораторий ЦАГИ. С. А. Чаплыгин создал школу механиков-аэродинамиков, в состав которой вошли крупнейшие ученые страны: Н. Е. Кочин, М. А. Лаврентьев, С. А. Христианович, Л. И. Седов, В. В. Голубев, М. В. Келдыш, Б. А. Ушаков, Ф. И. Франкль, Л. Г. Лойцянский и др.

С самого основания ЦАГИ была развернута обширная работа по составлению проектов строительства лабораторий и по разработке планов научно-исследовательской работы.

В 1921 г. в ЦАГИ были созданы и успешно прошли испытания аэросани. Никаких лабораторий в то время ЦАГИ не имел; все экспериментальные работы велись в лаборатории Высшего технического училища.

Одним из учеников и последователей Н. Е. Жуковского и ближайшим коллегой С. А. Чаплыгина был А. И. Некрасов (1883–1957), который принял активное участие в организации ЦАГИ. А. И. Некрасов – будущий академик, выдающийся ученый в области аэрогидромеханики и математики, заведующий кафедрой теоретической механики механико-математического факультета МГУ (1933–1938, 1943–1957), профессор МВТУ им. Н. Э. Баумана, автор замечательного учебника по теоретической механики.

Основные исследования А. И. Некрасова посвящены фундаментальным проблемам аэро- и гидродинамики и математики, в особенности теории волн и струй, теории флаттера, линейным и нелинейным интегральным уравнениям. Большая часть жизни А. И. Некрасова была связана с ЦАГИ. На самом трудном раннем этапе строительства ЦАГИ он занимался оснащением его лабораторий современной измерительной техникой, налаживанием производства, устройством полигонов для испытаний самолетов. В 1923 г. А. И. Некрасов был введен ученым-консультантом в руководящую группу сотрудников, в Коллегию. С 1922 по 1929 г. он занимал ответственные должности в Народном комиссариате просвещения РСФСР, был заместителем заведующего Главпрофобром. В 1929 г. А. И. Некрасов был переведен из Наркомпроса в ЦАГИ в общетеоретический отдел на должность старшего инженера, а в мае 1930 г. он был назначен на должность заместителя начальника ЦАГИ по научной части.

В 1931 г. в связи с новыми задачами, поставленными перед ЦАГИ, институт разделился на два основных сектора – Научно-исследовательский и Конструкторско-производственный. В 1933 г. в состав Научно-исследовательского сектора входили экспериментально-аэродинамический, экспериментально-гидродинамический и другие отделы. В этом же году был создан новый отдел особых конструкций.

С 1938 по 1943 гг. А. И. Некрасов был репрессирован по делу А. Н. Туполева.

С 1932 по 1938 гг. Александр Иванович был постоянным участником семинара общетеоретической группы ЦАГИ, которой руководил академик С. А. Чаплыгин. С именами участников этого семинара – выдающихся ученых А. И. Некрасова, М. В. Келдыша, Н. Е. Кочина, М. А. Лаврентьева, Л. И. Седова и др. связан важный этап в развитии теоретической аэрогидродинамики. В их исследованиях были получены фундаментальные результаты, позволившие решать различные задачи самолетостроения, учета сжимаемости воздуха и др. Экспериментальная база института позволила в довоенный период проводить исследования по аэродинамике, гидродинамике, динамике полета и прочности летательных аппаратов.

В ЦАГИ под руководством А. Н. Туполева в период 1924–1936 гг. были созданы такие этапные для отечественной авиации самолеты, как ТБ-1, ТБ-3 и другие. До 1936 г. ОКБ А. Н. Туполева входило в структуру ЦАГИ, где под его руководством разрабатывались торпедные катера и самолеты разного назначения. Интенсивная работа института, направленная в предвоенные годы, в первую очередь, на прогресс самолетостроения, проходила в тесном сотрудничестве с ОКБ и заводами.

Для помощи конструкторам в ЦАГИ в 1937 г. был выпущен первый том «Справочника для конструкторов», в котором были систематизированы требования по аэродинамике самолета. «Гидромеханика гидросамолета» и «Прочность самолета» были изданы II и III томами в 1938–1939 гг. В условиях военного времени в 1943 г. ЦАГИ выпустил фундаментальное издание — «Руководство для конструкторов». Так результаты фундаментальных исследований внедрялись в повседневную работу конструкторов и проектантов, закладывая прочную основу научного подхода к самолетостроению.

Появление в середине 1930-х гг. высокоскоростных самолетов-монопланов потребовало расширения экспериментальной базы института. Площадку для строительства нового комплекса экспериментальных установок выбрали в пойме Москвы-реки неподалеку от дачной платформы Отдых. Первый камень в основание нового ЦАГИ был заложен в 1935 г., а уже через четыре года в строй вступил блок больших труб Т-101 и Т-104. Совершенно новой установкой стала аэродинамическая труба переменного давления Т-106, позволявшая получать большие околозвуковые скорости [2].

За большой вклад в развитие авиационно-космической науки и техники ЦАГИ награжден орденами Трудового Красного Знамени (1926 г.), Красного Знамени (1933 г.), орденом Ленина (1945 г.), за инновационные исследования, направленные на повышение тактико-технических характеристик советских боевых самолетов, в годы Великой Отечественной войны.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Голубев В. В. «Жуковский». — Москва: Институт Компьютерных Исследований, 2002. 216 с.
2. Некрасов А. И. «К пятнадцатилетию ЦАГИ (Обзор деятельности института)» // Фронт науки и техники. 1933. № 12. С. 18-25.

УДК 539.21:621.785

Исторические аспекты математического анализа диаграмм деформации металлических материалов[1]

А. Н. Чуканов (Россия, г. Тула)
Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого
e-mail: alexchukanov@yandex.ru
А. Е. Гвоздев (Россия, г. Тула)
Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого
e-mail: gwozdew.alexandr2013@yandex.ru
А. Н. Сергеев (Россия, г. Тула)
Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого
e-mail: ansergueev@mail.ru
С. Н. Кутепов (Россия, г. Тула)
Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого
e-mail: kutepov.sergei@mail.ru
П. Н. Медведев (Россия, г. Тула)
Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого
e-mail: medvedeff_82@mail.ru
Д. В. Малий (Россия, г. Тула)
Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого
e-mail: maliydmitriy@yandex.ru
А. А. Яковенко (Россия, г. Тула)
ООО «Металлург-Туламаш»
e-mail: alexyakovenk@gmail.com
И. Ф. Широкий (Россия, г. Тула)

[1]Работа выполнена в рамках реализации федеральной целевой программе «Исследование и разработки по приоритетным направлениям развития научно-технологического комплекса России на 2014-2020 годы» (уникальный идентификатор проекта RFMEF 157717X0271).

Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого
e-mail: skyshiroky@list.ru

Historical aspects of mathematical analysis of metal material deformation diagrams

A. N. Chukanov (Russia, Tula)
Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University
e-mail: alexchukanov@yandex.ru
A. E. Gvozdev (Russia, Tula)
Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University
e-mail: gwozdew.alexandr2013@yandex.ru
A. N. Sergeev (Russia, Tula)
Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University
e-mail: ansergueev@mail.ru
S. N. Kutepov (Russia, Tula)
Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University
e-mail: kutepov.sergei@mail.ru
P. N. Medvedev (Russia, Tula)
Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University
e-mail: medvedeff_82@mail.ru
D. V. Maliy (Russia, Tula)
Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University
e-mail: maliydmitriy@yandex.ru
A. A.Yakovenko (Russia, Tula)
Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University
e-mail: alexyakovenk@gmail.com
I. F. Shiroky (Russia, Tula)
OOO Metallurg-Tulamash" Ltd
e-mail: skyshiroky@list.ru

1. Введение

Диаграммы деформации (**ДД**), полученные при испытаниях на одноосное растяжение по ГОСТ 1497-84, являются основной базой экспериментальных результатов, для анализа свойств и структуры материалов и изделий из них. Методика анализа ДД и их математическое описание уходят корнями в XVII-XVIII века к работам Л. да Винчи, Р. Гука, И. Ньютона. С опытов Леонардо начался экспериментальный период в развитии строительной механики. Галилей впервые указал на необходимость построения собственной науки — сопротивления материалов. С появлением понятия «напряжения» (σ) и диаграмм «напряжение-деформация» (σ=$f(\varepsilon)$) оформились понятия «условной» (σ=$f(\varepsilon)$) и «истинной» (S=$f(e)$) ДД. Выделилось математически обоснованное направление анализа ДД с использованием перестроения в координатах, разных моделей процесса деформационного упрочнения (**ДУ**) [1]. Вначале (XVIII-XIX вв.) это были феноменологические модели. В XX в., по мере совершенствования представлений о дефектах строения, техники металлофизического эксперимента был осуществлён переход к физически обоснованным и инструментально подтвержденным теориям ДУ Дж. Тейлора, Н.Ф. Мотта, Е. Орована, Я.И. Френкеля, Я.Б. Фридмана, А. Зегера, А. Коттрелла, Дж. Рида [2]. Историография методик математического анализа ДД отражает эволюцию взглядов на процессы упрочнения при деформировании материалов. Для металлических материалов зачастую при анализе условных и истинных $\sigma - \varepsilon$ или истинной $S - e$ ДД используют модели аппроксимации Людвика$S = S_0 + Ke^n$, Холломона$S = S_0 \cdot e^n$, Жауля-Крюссара ${dS}/{de} = D_0 \cdot e^{n-1}$ ($D_0 = n \cdot S_0$). Однако, описывая изменения ДД они не отражают процесс деструкции (накопления повреждений) в деформируемом металле.

2. Цель работы:

оценить применимость перечисленных моделей для анализа ДД с учетом процесса деструкции. В качестве объектов использовали малоуглеродистую сталь Ст3 с протяженной областью равномерной и сосредоточенной деформации, удобной для графического и аналитического анализа структурной деградации. Наибольшее применение при анализе стадийности ДУ малоуглеродистых сталей имеют следующие аналитические зависимости:

$$S = S_0 + K_1 \cdot e^m; \tag{1}$$

$$S = K_2 \cdot e^n, \tag{2}$$

где S и e — истинные напряжение и деформация; S_0, K_1, K_2, m, n — постоянные.

3. Основная идея

Параметры выражений (1) и (2), не имеют строгого физического смысла. Величины m и n трактуют как показатели или коэффициенты ДУ, а коэффициенты K_1 и K_2 - как показатели скорости ДУ. Данные о преимуществах того или иного уравнения в литературе противоречивы. По мнению [3], более достоверным является уравнение (1), по мнению авторов [4,5] - уравнение (2). Кроме того, при описании ДД металлов используют также параболическое уравнение (3) [6,7]:

$$S = S_{\text{н}} + qe^{1/2}, \tag{3}$$

где $S_{\text{н}}$ и q - постоянные. В отличие от (1) и (2) уравнение (3) можно вывести теоретически [6]. В представленной работе провели экспериментальную проверку выражений (2)–(3). Машинные кривые перестраивали в истинных координатах в соответствии с методикой [8]. На рис.1 представлена типичная ДД стали Ст3 в истинных координатах. Явно фиксируется площадка текучести. Часть диаграммы за ней может быть описана одним из представленных выше параболических выражений. Для аппроксимации ДД и вычисления параметров, входящих в уравнения (1)–(3), истинные диаграммы линеаризировали. Достоверность выражения (3) проверяли перестройкой ДД в координатах $S - e^{1/2}$ (рис. 1).

Экспериментальные точки хорошо укладывались на три прямолинейных отрезка с разными значениями параметров S_0 и q [14], что свидетельствует о стадийности ДУ. Переход от одной стадии к другой происходит при деформациях $e_{:@}\approx$ 6,3 и 10 %. Для линеаризации уравнение (2) преобразовывали к виду $\ln S = \ln K_2 + n \cdot \ln e$. На рис.2 представлена ДД в координатах $\ln S - \ln e$. Экспериментальные точки не укладываются на одну прямую, подтверждая, не постоянство nи зависимость от степени деформации. Анализ выявил три стадии с разными значениями постоянных [14]. В работе [8] на мелкозернистой углеродистой стали 30 выделяли только две стадии. Переход от одной стадии упрочнения к другой происходил при тех же значениях $e_{:@}$, что и в случае использования уравнения (3). На ДД крупнозернистых образцов этой стали выделяли три стадии. Обработку ДД уравнением (1) проводили двумя способами. В первом случае предполагали, что величина S_0известна и выражение (1)

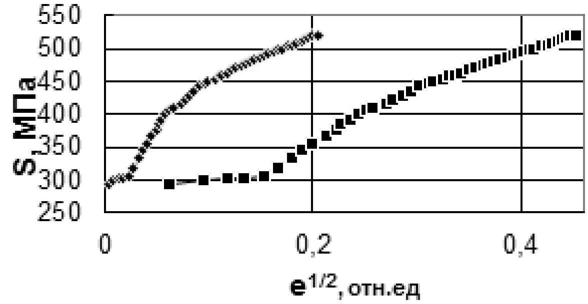


Рис. 19: Диаграммы деформации стали Ст. 3 в координатах $S - e$ и $S - e^{\frac{1}{2}}$

преобразовывали к виду $\ln(S - S_0) = \ln K_1 + m \cdot \ln e$. Параметр S_0 определяли экстраполяцией ДД к нулевой пластичности в координатах $S - e^{1/2}$ [4,5]. При этом $S_0 = S_{\text{н}}$. Зависимость $\ln(S - S_0) - \ln e$ представлена на рис.2. На начальном участке первой стадии параметр $m =$ 0,5, а $K_1 = q_1$, затем кривая наклоняется подобно зависимости $\ln S = f[\ln(e)]$и параметры K_1 и m приобретают другие значения. Если в выражение (1) вместо S_0 использовать $S_{=\text{i}}$, вычисленные по уравнению (3), то участки прямых $\ln(S - S_0) = f[\ln(e)]$ размещаются под наклоном 0,5, а величина K_1 равна параметру q на всех трех стадиях [14]. Второй способ предполагает, что величина S_0 является постоянной. В этом случае уравнение (1) преобразовывали к виду $\ln({}^{dS}/_{de}) = \ln(K_1 m) + (m - 1)\ln e$. Величину ${}^{dS}/_{de}$ (коэффициент ДУ) определяли численным дифференцированием ДД, полагая ${}^{dS}/_{de} \approx {}^{\Delta S}/_{\Delta e}$. Рассеяние данных (рис.3) вызвано тем, что изменение напряжения течения в рассмотренных диапазонах деформаций сравнимо с точностью их определения (±1 МПа). Рассчитанные значения хорошо укладывались на три прямолинейных участка (рис.3) с наклоном $(m - 1)$, равным -0,5 [14]. Таким образом, при описании ДД уравнениями (1)-(3) наблюдали общие закономерности. Упрочнение изученных сталей происходит в три стадии. Интенсивность упрочнения с каждой последующей стадией снижается. Между (1) - (3) имеются существенные различия, особенно между (2) и (3). Так, для описания ДД выражением (2) ее необходимо представить в двойных логарифмических координатах, что затрудняет выявление стадийности упрочнения.

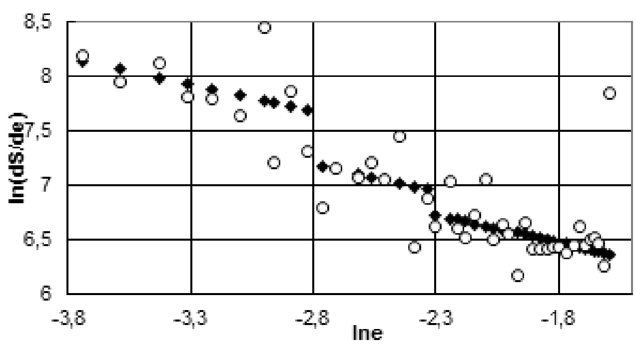


Рис. 20: Диаграммы деформации в координатах $\ln S = f[\ln(e)]$ и $\ln(S - S_0) = f[\ln(e)]$

Более точно коэффициент ДУ определяли дифференцированием выражения (4), с учетом того, что параметр q на каждой стадии упрочнения принимает разные значения.

$$ {}^{dS}/_{de} = {}^{q}\Big/_{e^{1/2}} \cdot 2. \tag{4} $$

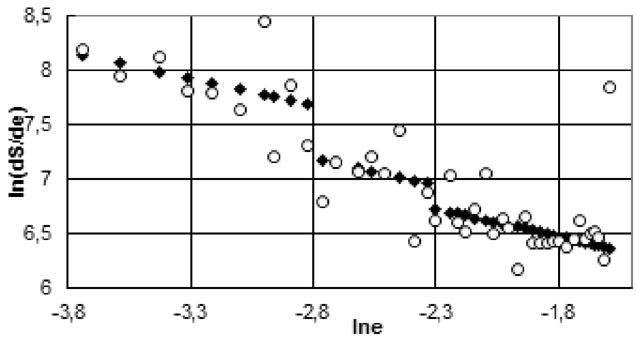


Рис. 21: Зависимость коэффициентов ДУ, рассчитанных численным дифференцированием (a) и по уравнению (4) -(b)

В работе подтвердили, что при статическом деформировании параметры ДУ, входящие в уравнения (2) и (3), изменяют свои значения в соответствии со стадийностью (ранее полагали, что n монотонно изменяется с деформацией [9]). Для двух стадий ДУ выражения (2) и (3) можно было записать как (5- 8):

$$S = K_2' \cdot e^{n'}; \tag{5}$$

$$S = K_2'' \cdot e^{n''}; \tag{6}$$

$$S = S_н' + q' \cdot e^{\frac{1}{2}}; \tag{7}$$

$$S = S_н'' + q'' \cdot e^{\frac{1}{2}}. \tag{8}$$

Уравнения (7) и (8) являются параболами с разными значениями коэффициентов, что указывает на единый механизм упрочнения. Выражения (5) и (6), также являясь параболами, отличаются не только коэффициентами (табл., строка 1), но и функционально. В соответствии с ними механизм ДУ на первой и второй стадиях подчиняется разным закономерностям, что при изученных степенях деформации маловероятно. Это позволяет говорить о наложении на дислокационный механизм пластического течения дополнительного (деструкционного) процесса [1]. В выражении (2) отсутствует физический смысл входящих в него постоянных. Параметры же $S_{\text{н}}$ и q в (3) имеют строгий физический смысл. Для металла с постоянным размером зерна величина q описывается как (9) [10]:

$$q = \alpha G b \sqrt{\rho/_{\varepsilon}}, \tag{9}$$

где α — геометрический фактор; G - модуль сдвига; b — вектор Бюргерса; ρ — плотность дислокаций. Из (9) следует, что q определяется интенсивностью накопления дислокаций в ходе деформации. Параметр $S_{\text{н}}$ характеризует начальное напряжение, которое имело бы место при упрочнении с данной интенсивностью от нулевой деформации. В данном исследовании анализ выражений (1)–(3) выявил во всех случаях резкое снижение (в 1,6 раза) интенсивности ДУ при переходе ко второй стадии при почти двукратном росте $S_{\text{н}}$.

4. Заключение

Описанное изменение параметров ДУ объяснимо лишь наложением на пластическую деформацию деструктивного процесса (повреждаемостью). Это подтверждает удовлетворительное выполнение уравнений (1)–(3) на первой стадии упрочнения и резкое изменение параметров упрочнения на второй и третьей стадиях. Подобное трудно объяснимо для дислокационных моделей ДУ. Изменение параметров ДУ не может быть объяснено только изменением дислокационного ансамбля и созданием ячеистой структуры [11]. Переход ко второй стадии ДУ отражает не только изменение вклада различных систем скольжения, но и развитие дефектов поврежденности (субмикротрещин) [10]. Металлография, электронная микроскопия [12,13], а также оцененное в данной работе изменение параметров деструкции подтверждают, что резкое снижение интенсивности ДУ, связанно с выходом дислокаций на развивающиеся внутренние поверхности (микротрещины) [14,15].

5. Выводы

Широко используемые модельные представления анализа ДД Людвика, Холломона, Жауля-Крюссара должны быть дополнены параметрами, учитывающими развивающийся в образцах при испытаниях процесс деструкции. Только комплексный учет ДУ и деструкции материала образцов позволит аргументированно описать ДУ и его стадийность.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Чуканов А.Н. Физико-механические закономерности формирования предельного состояния и развития локального разрушения в металлических материалах. / Диссертация на соиск. уч. степени доктора техн. наук: Тула, ТулГУ, 2001. - 381 с.

2. Физика конденсированного состояния: дефекты строения и создание теорий упрочнения материалов: учеб. пособие / А.Н. Чуканов, Н.Н. Сергеев, А.Е. Гвоздев, А.Н. Сергеев, П.Н. Медведев, Ю.С. Дорохин, С.Н. Кутепов, А.А. Яковенко, Д.В. Малий. - Тула: Изд-во ТулГУ, 2017. - 298 с.

3. Бабич В.К., Пирогов В.А., Вакуленко И.А. Влияние содержания углерода и структурного состояния на характеристики деформационного упрочнения углеродистых сталей // Проблемы прочности. - 1984. - № 4. - С. 52-55.

4. Поляков С.Н., Кудлай А.С., Наугольникова Л.М., Нечипоренко И.Г. Методы построения и анализа истинных диаграмм растяжения // Завод. лабор. - 1966.- № 6. - С. 741-744.

5. Поляков С.Н., Наугольникова Л.М., Кудлай А.С. О методике анализа истинных диаграмм растяжения // Завод. лабор. -1969. -№ 3. -С. 347-349.

6. Conrad H., Fenerstein S., Rice L. Effect of grain size on the dislocation density and flow stress of niobium // Mater. Sci. Eng. - 1967.- № 3.- P. 157-168.

7. Van den Beukel A. Grain size dependence of the dislocation in cold worked metals // Scripta met. - 1978. № 9. P. 809-813.

8. Прусаков Б.А., Сурин А.И., Тронза Е.И. Методика определения деструкционных характеристик механических свойств металлических материалов // Завод. лабор. -1991. С. 69-71.

9. Гриффитс А.А. Явления разрушения и течения в твердых телах // МиТОМ. - 1995. - № 1.- С. 9-14.

10. Калачев М.И. Деформационное упрочнение металлов -Минск: Наука и техника. - 1980.- 256 с.

11. Деформационное упрочнение и разрушение поликристаллических металлов / Трефилов В. И., Моисеев В. Ф., Печковский Э. П. и др.;/ Под ред. Трефилова В. И. – Киев: Наук. думка. - 1987. -248с.

12. Меренкова Р.Ф., Кошелев П.Ф. Микроструктурная картина пластического и квазихрупкого разрушения армко-железа // Проблемы прочности. - 1975. - № 9. - С. 73-77.

13. Одинг И.А., Либеров Ю.М. Накопление дефектов и образование субмикротрещин при статическом растяжении армко-железа // Изв. АН СССР. Металлургия и горное дело. - 1964. - № 1. - С. 113-116.

14. Чуканов А.Н., Солдатова Е.И. Аналитическое описание диаграмм деформации и накопление повреждаемости малоуглеродистой стали//Изв. ТулГУ. Серия: Материаловедение. - 2000. - вып. 1. -С. 151 - 155.

15. Chukanov A.N., Levin D.M., Yakovenko A.A. Use and Prospects for the Internal Friction Method in Assessing the Degradation and Destruction of Iron-Carbon Alloys // ISSN1062-8738. Bulletin of the Russian Academy of Sciences. Physics, 2011,Vol. 75, No 10, pp. 1340-1344.

———————————————————————————

УДК 51.

Математические методы и средства анализа данных [1]

С. И. Шелобаев (Россия, г. Тула)
Институт экономики и управления
e-mail: si.shelobaev@yandex.ru
Л. П. Добровольская (Россия, г. Тула)
Институт экономики и управления
e-mail: dobrovolskaya.lar@yandex.ru
И. С. Шелобаева (Россия, г. Тула)
Тульский филиал Финуниверситета
e-mail: Irinash.2012@yandex.ru

Mathematical methods and means of data analysis

S. I. Shelobaev (Russia, Tula)
Institute of economics and management
e-mail: si.shelobaev@yandex.ru
L. P. Dobrovolskay (Russia, Tula)
Institute of economics and management
e-mail: dobrovolskaya.lar@yandex.ru
I. S. Shelobaeva (Russia, Tula)
Tula branch of the Financial University
e-mail: Irinash.2012@yandex.ru

[1]Исследование выполнено по гранту РФФИ №19-41-710004_р_а

На протяжении всей истории развития две научные дисциплины, экономика и математика, были неразрывны. Экономика невозможна без расчетов, вычислений, без математики. А математика, как наука, и возникла в связи с потребностями человека в решении прикладных задач. Применение математических методов в экономике имеет богатую историю, разработкой их занимались крупнейшие ученые своего времени.

Уже давно стало распространенным утверждение об универсальности математических методов. Как правило, оно иллюстрируется целым рядом задач, в решении которых применение математических методов сыграло основную роль. Сегодня математика, в целом, продолжает завоевывать все новые и новые области применения в экономике.

Эффективным средством обучения решению этих задач является метод визуализации. Он помогает найти путь решения, способствует более глубокому усвоению алгоритмов решения, осознанию всех связей присутствующих в задаче, помогает увидеть взаимосвязь понятий, что позволяет на более высоком уровне оценить их роль и значение для задачи в частности и соответствующей экономической теории вообще.

Так, например, о роли наглядности в математике говорил крупнейший математик Д. Гильберт: «В математике встречаются две тенденции: тенденция к абстракции – она пытается выработать логическую точку зрения на основе различного материала и привести этот материал в систематическую связь, другая тенденция – тенденция к наглядности, которая в противоположность этому стремиться к живому пониманию объектов и их внутренних отношений».

Применение математических методов, в том числе и методов математического моделирования, в экономике в целом имеет длительную историю и большую наглядность. Родоначальники математической школы рассматривали математические методы, математическое моделирование связей между элементами экономической системы как методы исследования. Изложение же выводов, полученных математически, может быть дано и на обычном языке, как методы изложения, иллюстраций экономических положений и законов, так и в математической форме.

Исторически первой модели общественного производства называют экономическую таблицу Ф. Кене (1694–1774). В 1758 г. он опубликовал первый вариант своей «Экономической таблицы», второй вариант — «Арифметическая формула» — был опубликован в 1766 году. К. Маркс высоко оценил таблицу Ф. Кенэ. «Это попытка, — писал Маркс, — сделанная во второй трети XIII столетия, в период детства политической экономии, была в высшей степени гениальной идеей, бесспорно самой гениальной из всех, какие только выдвинула до сего времени политическая экономия».

Особой наглядность обладают задачи линейного программирования — лауреатом Нобелевской премии по экономике 1975 г. Л. В. Канторовичем была разработана новая область прикладной математики — линейное программирование. О нём шла речь в работе Л. В. Канторовича «Математические методы организации и планирования производства», опубликованной в 1939 г. В этой работе автор описал опыт применения линейного программирования для решения разнообразных задач (распределение работ между видами оборудования, раскрой материалов, составление плана перевозок, распределение посевных площадей между культурами и т. д.).

В конце 40-х гг. в США линейное программирование было открыто заново Дж. Данцигом. Однако в настоящее время приоритет Л. В. Канторовича признан во всём мире.

В XX веке математические методы моделирования применялись очень широко, с их использованием связаны практически все работы, удостоенные Нобелевской премии по экономике (Д. Хикс, Р. Солоу, В. Леонтьев, П. Самуэльсон и др.). Развитие микроэкономики, макроэкономики, прикладных дисциплин связано со все более высоким уровнем их формализации. Основу для этого заложил прогресс в области прикладной математики.

Сильная продвинутость математических теорий (линейная алгебра, математический анализ, теория вероятностей, корреляционный и регрессионный анализ, дифференциальные уравнения и т. д.) предоставляет к нашим услугам очень мощный и развитый математический аппарат, который позволяет решать многовариантные задачи с большим числом параметров, связанных сложными зависимостями, найти значения этих параметров, удовлетворяющие разнообразным критериям оптимальности.

Применение наглядности при обучении математике имеет корни в теории познания и согласуется с методикой математики. Роль наглядности экономических задач заключается в том, что она дает возможность показать учащимся глубинные связи между свойствами математических объектов, создать правильный образ.

———————————————————————————

Секция 10. Семинар по развитию Чебышевского сборника

УДК 51(091)

Чебышёвский сборник — проблемы и достижения[1]

В. Н. Чубариков (Россия, г. Москва)
МГУ имени М. В. Ломоносова
e-mail: chubarik2009@live.ru
Н. М. Добровольский (Россия, г. Тула)
Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого
e-mail: dobrovol@tsput.ru

Chebyshevskii sbornik — problems and achievements

V. N. Chubarikov (Russia, Moscow)
Lomonosov Moscow State University
e-mail: chubarik2009@live.ru
N. M. Dobrovolskiy (Russia, Tula)
Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University
e-mail: dobrovol@tspu.tula.ru

1. Немного истории

В 1993 году в сентябре месяце в г. Туле на базе Тульского государственного педагогического института имени Л. Н. Толстого прошла 1-ая международная научная конференция "Современные проблемы теории чисел и её приложения". Это было непростое время для страны. Тем не менее конференция прошла успешно и заложила традицию проведения таких конференций в новой России. Успех конференции в значительной степени был обусловлен огромной организационной работой, которую провёл программный комитет под руководством своего председателя — доктора физико-математических наук, профессора Сергея Борисовича Стечкина. Сергей Борисович в то время был главным редактором журнала "Математические заметки" и избранные труды конференции были изданы в 1994 году во 2-ом выпуске 55 тома "Математических заметок".

Вторая конференция прошла в 1995 году в городе Воронеж. Сергей Борисович по состоянию здоровья не смог присутствовать на конференции и его представлял доктор физико-математических наук, будущий академик РАН Сергей Владимирович Конягин. Вскоре С. Б. Стечкин скончался и труды конференции не были изданы, только небольшой сборник тезисов.

В 1996 году была снова проведена конференция в городе Туле, теперь уже III международная. Эстафету по руководству программным комитетом взял на себя доктор физико-математических наук, профессор В. Н. Чубариков, который был в это время заместителем

[1]Семинар проводится при финансовой поддержке Минобрнауки России в рамках государственного контракта № 14.597.11.0035. Проект "Продолжение конкурсной поддержки программ развития научных журналов с целью их вхождения в международные наукометрические базы данных" в рамках ФЦП "ИССЛЕДОВАНИЯ И РАЗРАБОТКИ ПО ПРИОРИТЕТНЫМ НАПРАВЛЕНИЯМ РАЗВИТИЯ НАУЧНО-ТЕХНОЛОГИЧЕСКОГО КОМПЛЕКСА РОССИИ НА 2014—2020 ГОДЫ".

декана механико-математического факультета по науке. Надо отметить, что хотя декан факультета доктор-физико математических наук, профессор Олег Борисович Лупанов сам лично не принимал участия в конференциях по теории чисел, но он вникал во все вопросы по организации этих конференций и оказывал существенную помощь. Конференция прошла на хорошем научном и организационном уровне, был издан неплохой сборник тезисов, но сборника трудов конференции не издавали. В кулуарах конференции многие сетовали на отсутствие специализированного журнала по теории чисел в России, в котором, в частности, можно было бы печатать труды конференции.

Наступил 2001 год и снова в г. Туле на базе Тульского государственного педагогического университета им. Л. Н. Толстого собралась, теперь уже IV-ая, международная конференция по теории чисел. Во время работы конференции 11 сентября произощёл чудовищный террористический акт в США, который потряс всё человечество, но участники конференции смогли достойно завершить работу конференции и принять очень важное решение об издании трудов конференции. Именно с целью издания трудов IV-ой международной конференции "Современные проблемы теории чисел и её приложения", посвящённой 180-ой годовщине со дня рождения академика Пафнутия Львовича Чебышёва и 110-ой годовщине со дня рождения академика Ивана Матвеевича Виноградова, и был организован Чебышёвский сборник.

Названия будущего журнала родилось само собой, наверное, потому, что Пафнутий Львович Чебышёв был организатором первого в России математического журнала – «Математический сборник».

2. Этапы становления

Восемнадцать лет тому назад, в 2001 году вышли первые два тома Чебышёвского сборника, в которых были изданы труды конференции. В 2002 году третий том вышел в двух выпусках и была принята сквозная нумерация выпусков. Начиная с 2003 года журнал стал выходить в 4 выпусках в каждом томе. Всего вышло 19 томов в 68 выпусках. Только что завершилась работа над первым выпуском 20 тома, а избранные труды данной конференции выйдут во втором выпуске 20 тома, который будет 70-м выпуском журнала.

В становлении журнала сыграли важную роль многие отечественные математики: во-первых, это академик О. Б. Лупанов, который своим авторитетом поддержал саму идею издания регулярного журнала по теории чисел. От бюро Математики Российской академии наук на первоначальном этапе становления журнала важную роль сыграл тогдашний ученый секретарь бюро — Игорь Андреевич Лавров. Неоценимую лепту в будущую судьбу журнала внёс Сергей Владимирович Конягин, который по своим научным связям обеспечил реферирование журнала в «Mathematical Reviews» (США, American Mathematical Society), что повлекло включение его в базу данных MathSciNet, а через десяток лет это стало автоматическим фактором внесения журнала в список ВАК.

Для становления журнала определяющей была роль Российского фонда фундаментальных исследований. Дело в том, что первые два тома журнала были изданы из средств гранта РФФИ на проведение конференции, а затем эта финансовая поддержка продолжалась на протяжении всех пятнадцати лет издания журнала. С 2002 года Тульская школа теории чисел постоянно выигрывала исследовательские гранты РФФИ и часть средств из этих грантов выделяла на издание результатов своих исследований. Из этих средств финансировалось издание всех номеров Чебышёвского сборника на протяжении четырнадцати лет. В последние годы финансирование журнала взял на себя учредитель — Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого.

Практически сразу ответственный секретарь редколлегии журнала доктор физико-математических наук, профессор Пихтильков разработал сайт Журнала http://cheb.tsput.ru/, который он поддерживал вплоть до 2009 года, когда он переехал жить и работать в город Оренбург. В 2010 году заработала новая версия сайта Журнала, которая была разработана выпускницей факультета математики, физики и информатики ТГПУ им. Л. Н. Толстого. У Е. В. Зеленцовой это было темой её дипломной работы, но она и сама публиковалась в журнале.

В настоящее время фирмой "Некоммерческое партнерство «Национальный Электронно-Информационный Консорциум» (НП «НЭИКОН»)" разработан новый сайт журнала http://www.chebsbornik.ru/jour в соответствии с международными требованиями. Эта работа была выполнена в связи с подачей заявки на включение в Scopus. Так как международные требования были выполнены, то журнал с 2017 года стал индексироваться в Scopus.

Необходимо отметить, что журнал достаточно хорошо представлен в отечественном Интернете: электронная версия журнала размещена в открытом доступе на Общероссийском портале (http://www.mathnet.ru) и в Научной электронной библиотеке (http://elibrary.ru). Журнал также представлен в научной библиотеке открытого доступа «КИБЕРЛЕНИНКА» http://cyberleninka.ru/.

Ещё одно новшество связано с организацией "Библиотеки Чебышёвского сборника", которая стала неотъемлемой частью журнала. В этом разделе, например, размещаются Труды и сборники материалов конференций по математики и физике, которые проводятся на базе Тульского государственного педагогического университета им. Л. Н. Толстого.

С самого начала функционирования первого сайта журнала на нём были организованы странички международных конференций по теории чисел, проводимых в ТГПУ им. Л. Н. Толстого. Это естественная организация работы, так как журнал первоначально организовывался по решению конференции с целью отражения научной жизни в области теории чисел.

Ещё одним начинанием, связанным с журналом, является направление ПОИВС, с которым вы все хорошо знакомы.

3. Редколлегия журнала

Формирование редколлегии в 2001 году взял на себя будущий ответственный секретарь редколлегии Сергей Алексеевич Пихтильков. В неё вошли: В. А. Артамонов, Г. И. Архипов, В. Н. Безверхний, М. М. Глухов, Е. С. Голод, Н. М. Добровольский, А. М. Зубков, В. И. Иванов, В. Н. Латышев, Д. А. Митькин, Ю. В. Нестеренко, А. Л. Шмелькин. Ответственным редактором первого тома был В. Н. Чубариков. Редактором второго тома был В. Н. Безверхний. Первый том содержал 8 статей по теории чисел, а второй том — 5 по алгебре, одну по теории алгоритмов, три по теории чисел и одну по теории функций.

Первые два тома вышли как "научные труды по математике". Регулярный выпуск Чебышёвского сборника как научного журнала начался уже в 2002 году с выхода третьего тома в двух выпусках. Расширился состав редакционной коллегии. Появились должности — главный редактор (В. Н. Чубариков), заместители главного редактора (Н. М. Добровольский, А. В. Михалёв), ответственный секретарь (С. А. Пихтильков). В члены редколлегии от ТГПУ вошёл профессор А. Р. Есаян.

С 2003 года журнал стал выходить регулярно — один том в 4 выпусках.

В 2007 году редколлегия понесла первую тяжёлую утрату. После продолжительной, тяжёлой болезни скончался доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой теории чисел МПГУ, председатель диссертационного совета Дмитрий Алексеевич Митькин. Он относился к числу активных организаторов науки, принимал активное участие в организации математических конференций, был активным автором Чебышёвского сборника.

В 2010 в редакционной коллегии был добавлен ещё один заместитель главного редактора, представитель МПГУ профессор Нижников А. И., который в то время являлся первым проректором МПГУ. В конце 2012 года была проведена работа по расширению состава редколлегии и 1 выпуск 14 тома вышел с расширенным международным составом. Из России вошли профессора: В. А. Быковский, С. А. Гриценко, В. Г. Дурнев, В. К. Карташов, М. А. Королёв, В. Н. Кузнецов, С. П. Мищенко, А. А. Фомин, В. Г. Чирский; из Беларусии В. И. Берник, из Франции М. Деза, из Украины П. О. Касьянов, из Литвы А. Лауринчикас, из Таджикистана З. Рахмонов. В 2015 году в редколлегию вошли ректор ТГПУ им. Л. Н. Толстого профессор В. А. Панин, из Азербайджана М. Дж. Марданов. В 2016 году в редколлегию вошёл представитель Израиля А. Я. Белов.

К сожалению в последние годы редакционная коллегия понесла непоправимые утраты.

14 марта 2013 года не стало Геннадия Ивановича Архипова — доктора физико-математических наук, профессора, ведущего научного сотрудника Математического института РАН им. В. А. Стеклова, который стоял у истоков журнала и внёс неоценимый вклад в организацию традиционных международных конференций по теории чисел в России.

В конце 2015 года в декабре месяце ушли сразу два члена редколлегии: профессора А. Л. Шмелькин и С. А. Пихтильков. А через год трагически погиб в Париже профессор М. Деза.

В прошлом году в декабре не стало сразу двух старейших членов редколлегии: профессора Михаила Михайловича Глухова и профессора Альберта Рубеновича Есаяна.

Начиная с января 2016 года обязанности ответственного секретаря выполняет Н. Н. Добровольский. В настоящее время решается непростая задача приведения журнала к международным требованиям. Начиная с 4 выпуска 17 тома всем статья в журнале присваивается номера DOI. Все выполняемые работы направлены на то, чтобы в ближайшее время подать заявку на включение журнала в Web of Science.

В прошлом году в члены редколлегии вошли академик Ю. В. Матиясевич и профессор С. В. Востоков. Процесс обновления состава редколлегии продолжается.

4. Наукометрические показатели

«Чебышёвский сборник» включен в международные базы данных Американского математического общества MathSciNet (MSN), реферативную базу данных по математике Zentralblatt MATH (zbMATH) FIZ Карлсруэ Института информационной инфраструктуры Лейбница (FIZ Karlsruhe, дистрибьютер – компания Springer).

Полные тексты статей журнала представлены на Общероссийском математическом портале Math-Net.Ru и в Научной электронной библиотеке eLibrary.ru.

В 2015 году «Чебышёвский сборник» был включен в состав российской коллекции Russian Science Citation Index (RSCI) на платформе Web of Science.

Высокие наукометрические показатели журнала в Российском индексе научного цитирования свидетельствуют о его востребованности и авторитетности в научном сообществе. Журнал имеет двухлетний Импакт-фактор РИНЦ 2017 равный 0,391 и занимает 50 место в рейтинге SCIENCE INDEX по тематике «Математика» из 84 изданий, представленных в РИНЦ. Заметим, что количество математических изданий сократилось с 103 до 84.

5. Заключение

Анализируя краткую историю создания и развития журнала Чебышёвский сборник, можно констатировать, что журнал стал научным явлением в математической научной жизни России. Пройден достаточно непростой путь. Редколлегия с оптимизмом смотрит в будущее и уверена что вместе с корпусом авторов и научных рецензентов сможет и дальше вносить существенный вклад в развитие отечественной и мировой математики.

УДК 51(091)

Семинар по развитию Чебышевского сборника

Н. Н. Добровольский (Россия, г. Тула)
Тульский государственный университет
e-mail: nikolai.dobrovolsky@gmail.com, cheb@tsput.ru
И. Ю. Реброва (Россия, г. Тула)
Тульский государственный педагогический университет имени Л. Н. Толстого
e-mail: i_rebrova@mail.ru

Seminar on the development of the Chebyshevskii Sbornik

N. N. Dobrovolsky (Russia, Tula)
Tula State University
e-mail: nikolai.dobrovolsky@gmail.com, cheb@tsput.ru
I. Yu. Rebrova (Russia, Tula)
Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University
e-mail: i_rebrova@mail.ru

В 2018 году научно-теоретический журнал «Чебышевский сборник» был отобран в 100 научных журналов-победителей для участия в проекте МИНОБРНАУКИ «Поддержка программ развития научных журналов с целью их вхождения в международные наукометрические базы данных» в рамках Федеральной целевой программы «Исследования и разработки по приоритетным направлениям развития научно-технологического комплекса России на 2014—2020 годы». И в прошлом году прошёл первый семинар по развитию журнала Чебышевский сборник в рамках проведения XV Международной конференции «Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы и приложения», посвященной столетию со дня рождения доктора физико-математических наук, профессора Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова Коробова Николая Михайловича.

В 2019 году «Чебышевский сборник» вошел в перечень 70 журналов-победителей для продолжения поддержки реализации программы развития журнала. Мы теперь проводим второй семинар по развитию журнала Чебышевский сборник в рамках проведения XVI Международной конференции «Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы, приложения и проблемы истории», посвященной 80-летию со дня рождения профессора Мишеля Деза.

Признание журнала стало возможным благодаря последовательному достижению целей, одной из которых является создание информационной площадки для публикации и обсуждения передовых научных результатов, как отечественных, так и зарубежных ученых. Это позволило журналу в 2015 году войти в список рецензируемых научных изданий ВАК, а в 2017 начать индексироваться в международной научной базе данных Scopus.

Коллектив ученых, создавших журнал, по мере его развития ставит перед собой все новые цели и задачи. Обратимся к истории журнала.

Журнал издается с 2001 года по решению IV международной конференции «Современные проблемы теории чисел и её приложения», которая поставила перед журналом основную цель — создание информационной площадки для публикации и обсуждения передовых научных результатов, связанных с тематикой конференции.

Другая, не столь явная, цель — поддержка интеллектуальной эстафеты поколений. Именно поэтому в журнале достаточно много места отводится мемориальным материалам и статьям по истории математики и её приложений.

Изменение критериев оценки научных исследований в России (Перечень ВАК, индексация журналов в международных научных базах данных (МНБД)) определили новую цель — повышение качества журнала для соответствия требованиям МНБД. Развитие журнала, включая увеличение числа статей, качество издания, наличие сайта и многое другое, поставили перед редакционной коллегией еще одну цель — переход на самоокупаемость.

МИНОБРНАУКИ выделяет следующие основные задачи, способствующие развитию журналов:

- Увеличение числа опубликованных статей за год;
- Повышение процента иностранных членов в составе редакционной коллегии;
- Увеличение среднего числа ссылок в списке литературы;
- Увеличение среднего процента ссылок в списке литературы на статьи из иностранных научных журналов и других иностранных источников;
- Повышение процента иностранных авторов.

Семинар по развитию Чебышевского сборника направлен на формирование обратной связи между редакцией, редколлегией и авторами, читателями, чтобы учитывать их мнение и пожелания при изменениях в политике журнала, правилах публикаций, процессе рецензирования.

СОДЕРЖАНИЕ

Научное издание

АЛГЕБРА, ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ И ДИСКРЕТНАЯ ГЕОМЕТРИЯ: СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ, ПРИЛОЖЕНИЯ И ПРОБЛЕМЫ ИСТОРИИ

Материалы XVI Международной конференции, посвященной 80-летию со дня рождения профессора Мишеля Деза

Подготовка оригинал-макета – Н. М. Добровольский.
Технический редактор – И. Е. Агапова.
Художественный редактор – Е. А. Свиридова.

Подписано в печать 06.05.2019. Формат 60×90/8.
Бумага офсетная. Печать трафаретная.
Усл. печ. л. 52,5. Тираж 200 экз. Заказ 19/009. «С» 1803.

Тульский государственный педагогический
университет им. Л. Н. Толстого. 300026, Тула, просп. Ленина, 125.

Отпечатано в ТГПУ им. Л. Н. Толстого.
300026, Тула, просп. Ленина, 125.