JOURNAL OF COMBINATORIAL THEORY (B) **16**, 166–167 (1974)

Solution d'Un Problème de Erdös-Lovász

M. DEZA

31, rue P. Borghese, 92200 Neuilly-sur-Seine, France

Communicated by C. Berge

Received November 13, 1973

On démontre une conjecture de Erdös-Lovász selon laquelle pour toute famille d'ensembles $\{A_1, ..., A_m\}$ telle que les nombres $|A_i \cap A_j|$ sont égaux et que

$$m \geqslant \max_{1 \leqslant i \leqslant m} |A_i|^2 - \max_{1 \leqslant i \leqslant m} |A_i| + 2,$$

on a

$$A_i \cap A_j = \bigcap_{1 \leqslant g \leqslant m} A_g$$

pour tout $i \neq j$.

Le 8 janvier 1973, au séminaire du prof. C. Berge, à Paris, le prof. P. Erdös a posé le problème suivant:

Une famille d'ensembles $A = \{A_1, ..., A_m\}$ s'appelle:

un *Δ-système faible*, si les nombres $|A_i \cap A_j|$ sont les mêmes $(1 \leqslant i < j \leqslant m)$;

un *Δ-système fort*, si $A_i \cap A_j = \bigcap_{1 \leqslant g \leqslant m} A_g$ pour $1 \leqslant i < j \leqslant m$.

La conjecture de Erdös-Lovász énonce que *pour* $m \geqslant n^2 - n + 2$, *tout Δ-système faible est un Δ-système fort, où* $n = \max |A_i|$.

Montrons que la justesse de cette conjecture découle presque immédiatement du théorème 1 de [2]. Appelons $(m, 2k)$-*code* une (0, 1)-matrice de m lignes telle que deux lignes quelconques distinctes ne coïncident pas exactement dans $2k$ positions. Sans restreindre la généralité, on peut supposer que la première ligne n'est pas formée que de zéros. On appelle $(m, 2k)$-*code trivial* un $(m, 2k)$-code dans lequel toute colonne contient 0, 1, $m - 1$ ou m unités. Des propositions (2), (2′), (3) du théorème 1 de [2] (ces résultats ont été également exposés en 1969 et le résumé de l'exposé a été publié dans [1]) découle le résultat suivant:

THÉORÈME 1. *Pour tous les entiers* $m > k \geqslant 1$, *il existe un entier* $f(k)$

tel que, pour $m > f(k)$, *tout* $(m, 2k)$*-code est trivial. Plus précisément, on a* $4 \leqslant f(k) \leqslant k^2 + k + 2$.

Remarquons à ce propos que $f(k) = k^2 + k + 2$ si le plan projectif $PG(2, k)$ existe; J. H. van Lint a démontré que $f(k) < k^2 + k + 2$ si $PG(2, k)$ n'existe pas.

THÉORÈME 2. *Pour* $m \geqslant n^2 - n + 2$, *tout* Δ*-système faible* $A = \{A_1, \ldots, A_m\}$, *où* $n = \max |A_i|$, *est un* Δ*-système fort.*

En effet, posons $t = |A_i \cap A_j|$ $(1 \leqslant i < j \leqslant m)$ et $k = \max(t, n - t)$; $T(A)$ dénote une $(0, 1)$-matrice de $m + 1$ lignes et de

$$\left| \bigcup_{1 \leqslant i \leqslant m} A_i \right| + 2k - n$$

colonnes définie de la façon suivante: à la matrice d'incidence de famille A (aux ensembles A_i correspondent les lignes), adjoignons $k - t$ fois une matrice d'identité d'ordre m, puis $n - |A_i|$ colonnes (pour $1 \leqslant i \leqslant m$) avec 1 uniquement à la i-ième position, puis, adjoignons $k - (n - t)$ fois une colonne $(1, \ldots, 1)$ et enfin, adjoignons une ligne $(0, \ldots, 0)$. Il est clair que $T(A)$ est un $(m + 1, 2k)$-code. De plus, $T(A)$ est un $(m + 1, 2k)$-code trivial si et seulement si A est un Δ-système fort. Pour $t = 0, n$, A est toujours un Δ-système fort. Pour $0 < t < n$, on a $k \leqslant n - 1$, d'où $f(k) \leqslant f(n - 1)$. Comme $f(n - 1) \leqslant n^2 - n + 2 \leqslant m$ (l'inégalité de gauche découle du théorème 1, l'inégalité de droite est une condition donnée), nous obtenons $m + 1 > f(k)$, et par conséquent, (en vertu du théorème 1) $T(A)$ est un $(m + 1, 2k)$-code trivial; c'est-à-dire A est un Δ-système fort. C.Q.F.D.

RÉFÉRENCES

1. M. DEZA, Lineïnié métritcheskié svoïstva dvoïitchnykh kodov (en russe), Résumés des exposés de la 4° conférence soviétique sur la théorie du codage, Moscou-Tachkent (1969).
2. M. DEZA, Une propriété extrémale des plans projectifs finis dans une classe de codes équidistants, *Discrete Math.* **6** (1973), 343–352.