Библиотека Чебышевского сборника

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Министерство просвещения Российской Федерации
Российская академия наук
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
Математический институт им. В. А. Стеклова РАН
Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В. А. Стеклова РАН
Санкт-Петербургский государственный университет
Институт истории естествознания и техники им. С. И. Вавилова РАН
Московский педагогический государственный университет
Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого
Математический центр мирового уровня МИАН
Тульский государственный университет

Алгебра, теория чисел, дискретная геометрия и многомасштабное моделирование: современные проблемы, приложения и проблемы истории

Материалы XXII Международной конференции, посвященной 120-летию со дня рождения академика А. Н. Колмогорова и 60-летию со дня открытия школы-интерната № 18 при Московском университете

Тула, 26–29 сентября 2023 года

Тула 2023

ББК 22.1
УДК 51
А45

Алгебра, теория чисел, дискретная геометрия и многомасштабное моделирование: Современные проблемы, приложения и проблемы истории: Материалы XXII Международной конференции, посвященной 120-летию со дня рождения академика А. Н. Колмогорова и 60-летию со дня открытия школы-интерната № 18 при Московском университете. —

Тула: Тул. гос. пед. ун-т им. Л. Н. Толстого, 2022. – 380 с.
ISBN 5–87954–388–9

ББК 22.1
УДК 51

ISBN 5–87954–388–9

Пленарные доклады

УДК 51

Точная разрешимость уравнений Эйлера — Пуассона как АнтиКАМ-теория

Д. Л. Абраров (Россия, г. Москва)
Российский государственный университет нефти и газа имени И. М. Губкина
e-mail: abrarov@yandex.ru

Exact solvability of Euler–Poisson equations as Anti-KAM theory

D. L. Abrarov (Russia, Moscow)
Gubkin University
e-mail: abrarov@yandex.ru

Полноценный учет аналитической симметрии обратимости по формальному аффинному времени общих уравнений Эйлера — Пуассона реализуется конструктивным эквивариантным аналитическим продолжением классических решений в бесконечность формального комплексного времени и, в итоге (монография [1]), приводит к их каноническому общему решению в виде экспоненты дзета-функции канонической параболической автоморфной формы веса 12. Специализацией параметров общего решения является пространство экспонент L-функций эллиптических кривых с рациональными коэффициентами, представляющих полное пространство частных решений исходных уравнений над комлексным временем.

Основной задачей на этом этапе становится весьма объемное сопоставление новых аналитических решений с известными общими и частными классическими решениями, консолидированными в монографии [2] с дополнениями в [4], а также с эквивариантной КАМ-теорией — эффектами неинтегрируемости и хаотизации при возмущении отдельных интегрируемых случаев динамики волчков, полученными в монографии [3].

Результаты такого сопоставления интерпретируются как АнтиКАМ-теория — набор динамических эффектов, имеющих антиподальный смысл по отношению к утверждениям исходной КАМ-теории: [1],[4].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Абраров Д.Л. Точная разрешимость уравнений Эйлера-Пуассона: дзета-функции и глобальная динамика. - Москва: Научный мир, 2021, 614 С.

2. Гашененко И.Н., Горр Г.В., Ковалев А.М. Классические задачи динамики твердого тела. НАН Украины, Институт прикладной математики и механики, серия "Задачи и методы: математика, механика, кибернетика том 7. - Киев: Наукова Думка, 2012. 402 С.

3. Козлов В.В. Методы качественного анализа в динамике твердого тела. - Москва: Изд-во Моск. ун-та, 1980, 232 с.

4. Abrarov D.L. General solution of the Euler-Poisson equations as a generator of universal perturbation theory in the context of the Langlands program and applications to problems of the theory of elementary particles and optimal control in real physical time.

   https://www.IntellectualArchieve.com/getfile.php?file=1tWZu2JLWQs&orig_file=EPEgenPertThLanglandsGrav.pdf

---

УДК 514.8,531.1,531.8

О механизмах с останавливающимися шарнирами[1]

М. Д. Ковалёв (Россия, г. Москва)
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
e-mail: mdkovalev@mtu-net.ru

About mechanisms with stopping hinges

M. D. Kovalev (Russia, Moscow)
Lomonosov Moscow State University
e-mail: mdkovalev@mtu-net.ru

1. Геометрическое определение шарнирного механизма

Мы отталкиваемся от определения, данного Давидом Гильбертом в его лекциях по наглядной геометрии [1]: "Плоским шарнирным механизмом называется всякая плоская система жестких стержней, частично соединенных между собой или скрепленных с неподвижными точками плоскости, вокруг которых они могут вращаться, так что вся система еще сохраняет подвижность в ее плоскости".

Механики определяют механизм как совокупность тел, предназначенных для преобразования движения. Мы считаем, что механизм можно непрерывно переводить из одного его положения в любое другое. Что означает связность его конфигурационного пространства. Математические определения шарнирно-рычажного механизма появились в конце прошлого века [2, 3, 4]. Приведём данное в [2]. Считаем рассматриваемые плоские шарнирно-рычажные конструкции составленными из прямолинейных стержней (рычагов), несущих на концах шарниры. Шарниры могут быть двух видов: свободные и закреплённые в плоскости (стойке). Первые обозначены на рисунке кружочками, вторые — крестиками. В шарнире разные рычаги так соединяются между собой и стойкой, что возможно их произвольное проворачивание относительно один другого и стойки. Структуру конструкции задаём *шарнирной структурной схемой (ШСС)* — конечным абстрактным связным графом $G(V,E)$ без петель и кратных рёбер, вершины которого отвечают шарнирам, а рёбра — рычагам. Множество V вершин графа распадается на два подмножества: $V = V_1 \sqcup V_2$, где V_1,— отвечает свободным шарнирам, и V_2— отвечает закреплённым шарнирам. Граф $G(V,E)$ удовлетворяет условиям:

1. граф $G(V,E)$ и его подграф на множестве V_1 свободных вершин связны,
2. в $G(V,E)$ нет рёбер, соединяющих вершины из V_2 между собой.

Последнее условие означает, что излишне связывать рычагами закреплённые в стойке шарниры. Первое же условие накладываем для того, чтобы сосредоточиться на изучении одной индивидуальной конструкции. Если оно не выполнено, то конструкция распадается на несколько кинематически не связанных между собой частей, которые можно изучать по отдельности.

Заметим, что в работах [3, 4] на граф $G(V,E)$ не накладывается каких-либо (кроме 2.) ограничений, за исключением разве лишь отсутствия петель и конечности. В частности, не требуется связности $G(V,E)$.

---

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке программы Московского центра фундаментальной и прикладной математики по соглашению № 075-15-2022-284

Выберем в плоскости декартову прямоугольную систему координат Oxy. *Закрепленной шарнирной схемой (ЗШС)* назовем ШСС, каждой закрепленной вершине $v_i \in V_2$ которой сопоставлена точка $p_i = (x_i, y_i) \in R^2$, — положение закреплённого шарнира в плоскости. Пусть m — число свободных шарниров, r — число всех рычагов. Бросим свободные шарниры в плоскость, что определит отображение: $F : R^{2m} \to \mathcal{R}^r$, задающееся формулами $d_{ij} = (p_i - p_j)^2, v_i v_j \in E$. Это отображение сопоставляет положениям свободных шарниров квадраты длин рычагов, и называется *рычажным.* Оно играет ключевую роль в геометрии шарнирных конструкций. Точки $\{d_{ij}\} = \mathbf{d} \in \mathcal{R}^r$ назовём *кинематическими шарнирными схемами (КШС). Шарнирником* мы называем точку $\mathbf{p} \in R^{2m}$. Полный прообраз $F^{-1}(\mathbf{d})$ точки-КШС называем *конфигурационным пространством КШС* $\mathbf{d}$. При таком подходе каждой компоненте связности множества $F^{-1}(\mathbf{d})$ отвечает определённое *шарнирное устройство*, непрерывно не переводимое в другое устройство. Если компонента связности одноточечна, — то это устройство неизгибаемый шарнирник, или как говорят механики *шарнирная ферма.* В противном случае компонента связности есть множество положительной размерности — *конфигурационное пространство K шарнирного механизма.*

Отвлечённые математики [3, 4] называют конфигурационным пространством шарнирного механизма множество $F^{-1}(\mathbf{d})$. Таким образом, у них оно может состоять из разных устройств, в том числе включать и фермы. Это в корне отлично от традиционного понимания механизма.

2. Примеры необычных механизмов

1. Шарнирный ромб, изображённый сплошными линиями на рисунке 1 справа, — это четырёхзвенник $p_7p_1p_2p_5$, длины рычагов которого одинаковы и равны расстоянию между закреплёнными шарнирами p_7 и p_5. Его можно непрерывно двигать так, чтобы он оставался по форме ромбом. Но если совместить свободный шарнир p_1 с закреплённым шарниром p_5, то можно будет вращать часть этого механизма, состоящую из слившихся рычагов p_1p_2 и p_2p_5, вокруг совпавших шарниров p_1 и p_5. При этом шарнир p_1 останавливается.

Допустим, множество положений шарнира p_i механизма одномерно. Назовём такой шарнир p_i *останавливающимся*, если возможно непрерывное движение механизма, когда шарнир p_i покоится. У шарнирного ромба каждый из двух его свободных шарниров останавливающийся. Но множество остановившихся в данный момент движения механизма шарниров либо пусто, либо состоит лишь из одного шарнира. Рассмотрим класс Q плоских механизмов, у которых все свободные шарниры подвижны и множество положений каждого свободного шарнира одномерно. В связи с возможностью остановки шарниров возникает естественный вопрос: непременно ли у механизма из класса Q есть положения, вблизи которых все его свободные шарниры движутся с ненулевыми скоростями при движении механизма? Следующий пример [5]показывает, что это не так.

2. На рисунке 1 слева сплошной линией показана траектория середины среднего звена (далее это шарнир p_3) шарнирного ромба со стороной a, закреплённого в обозначенных крестиками точках. В точках соприкосновения окружностей происходит ветвление пути середины среднего звена. Добавим в середину среднего звена (Рис. 1) шарнирного ромба $p_7p_1p_2p_5$ шарнир p_3[1] , и соединим его с закреплённым шарниром p_6 двуповодковой группой $p_3p_4p_6$. Возьмём шарнир p_6, лежащим посередине между закреплёнными шарнирами p_5 и p_7, а длины рычагов p_3p_4 и p_4p_6 равными $\dfrac{a}{4}$. Получим механизм, шарнир p_3 которого может двигаться лишь в пределах круга, ограниченного пунктирной окружностью. Эти движения отвечают либо остановившемуся в точке p_7 шарниру p_2, либо остановившемуся в точке p_5 шарниру p_1. То есть, в любом положении нашего механизма имеется его остановившийся шарнир.

[1]Этого можно достичь, закрепив его рычагами p_1p_3 и p_2p_3.

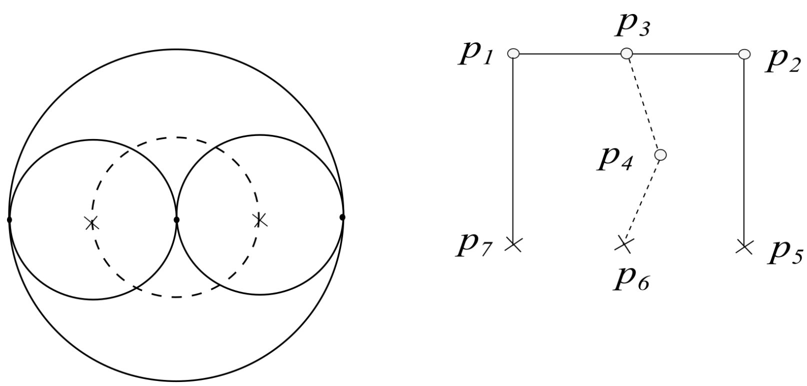


Рис. 1: Механизм с остановившимся шарниром.

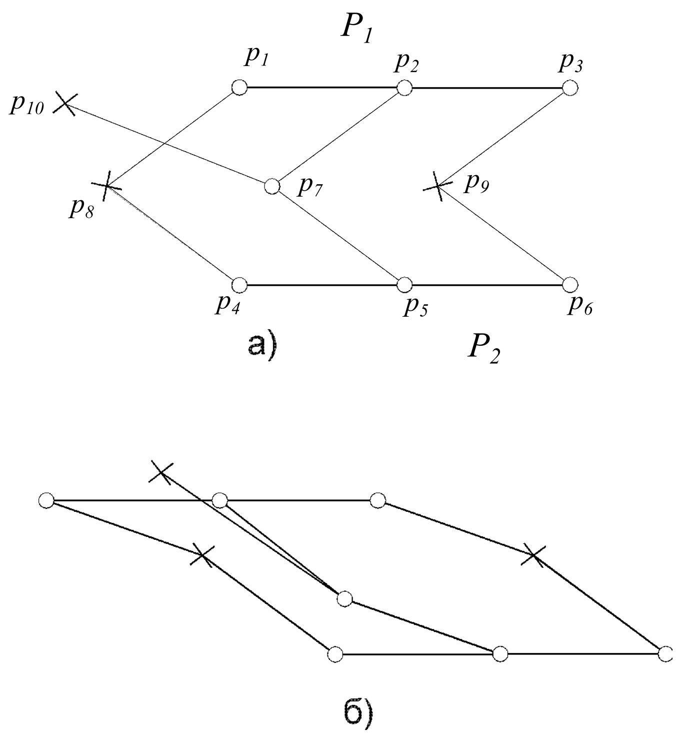


Рис. 2: Механизм с переменным числом степеней свободы.

3. Шарнирный механизм с переменным числом степеней свободы [2]. Этот механизм (Рис.2) содержит 13 рычагов, 7 свободных $p_1, \ldots, p_7$ и 3 закрепленных p_8, p_9, p_{10} шарнира. Он построен из двух одинаковых шарнирных параллелограммов P_1: p_8, p_1, p_3, p_9 и P_2: p_8, p_4, p_6, p_9. Шарниры p_2 и p_5 лежат посередине рычагов p_1p_3 и p_4p_6 соответственно. Длины дополнительных рычагов p_2p_7 и p_5p_7 равны длинам боковых рычагов p_1p_8 и p_4p_8 параллелограммов. Длина рычага $p_{10}p_7$ подобрана так, что шарнир p_7 может оказаться посередине отрезка p_8p_9, как и показано на Рис. 2 а). Когда шарнир p_7 находится в указанном положении, параллелограммы P_1 и P_2 можно двигать независимо один от другого с одной степенью свободы каждый, и поэтому число степеней свободы всего механизма в этих положениях равно двум. Если же механизм привести в положение, когда рычаги p_2p_7 и p_7p_5 лягут на прямую $p_{10}p_7$, то шарнир p_7 можно будет сдвинуть со своего места. В положениях, когда шарнир p_7 не лежит посередине отрезка p_8p_9 (Рис.2 б)), число степеней свободы механизма равно единице. Опираясь на этот пример Карл Вольхарт (Wohlhart) построил пример шарнирного механизма с числом степеней свободы,

меняющимся от 1 до произвольного натурального $n > 2$.

3. Передача движения в механизмах

Множество положений свободного шарнира p_i механизма класса Q есть плоская компактная кусочно-гладкая кривая. Если при движении шарнира p_i его ненулевая скорость однозначно определяет ненулевую скорость шарнира p_j, то будем говорить о передаче движения от p_i к p_j.

Теорема 1. *В каждом за исключением конечного числа положений плоского шарнирного механизма класса Q без останавливающихся шарниров происходит передача движения от произвольного его свободного шарнира p_i к произвольному другому свободному шарниру p_j. Конфигурационное пространство такого механизма одномерно.*

В конечном числе положений может происходить ветвление движения, и ненулевой скорости одного шарнира отвечать нулевая скорость другого.

4. Теоремы о механизмах с переменным числом степеней свободы

Пусть M — совокупность остановившихся шарниров, а G_M подграф графа $G(V, E)$, получающийся из него удалением вершин, отвечающих шарнирам из M и закреплённым шарнирам, и смежных им рёбер. И пусть k есть наибольшее число компонент связности графа G_M по всем совокупностям M.

Теорема 2. *Размерность конфигурационного пространства шарнирного механизма класса Q с останавливающимися шарнирами равна k.*

Необходимое и достаточное условие одномерности конфигурационного пространства плоского шарнирного механизма даёт следующая теорема.

Теорема 3. *Конфигурационное пространство плоского шарнирного механизма одномерно в том и только том случае, когда множество положений каждого подвижного шарнира есть кривая, и у механизма либо нет останавливающихся шарниров, либо $k = 1$.*

5. Заключение

В теории механизмов обычно предполагают, что в каждом положении механизма происходит передача движения от ведущего шарнира к любому другому незакреплённому в стойке шарниру, который называют ведомым. Однако, имеется класс механизмов, для которых это предположение нарушается. Это механизмы с останавливающимися шарнирами. Среди них есть механизмы, каждый свободный шарнир которых движется по кривой, а число степеней свободы механизма может быть переменным и достигать произвольно больших значений.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гильберт Д., Кон-Фоссен С. Наглядная геометрия. — Москва: Наука, 1981.
2. Ковалёв М.Д. Геометрическая теория шарнирных устройств // Известия РАН Серия математическая, 1994, Т.58, № 1, С.45–70.
3. Kapovich M., Millson J. J. Universality theorems for configurations of planar linkages // Topology. 2002. v.41, №6, P. 1051 – 1107.

4. King Henry C. Planar Linkages and Algebraic Sets // arXiv.org:math/9807023 Preprint July 4, 1998, 22 p.

5. Ковалёв М.Д. Конфигурационные пространства шарнирных механизмов и их проекции // Матем. сб., 2022, Т.213, № 4 С.74 – 99.

———————————————————————————————

УДК 511.3

Синдетические подмножества множества натуральных чисел и большие расстояния между соседними элементами подмножеств

С. В. Конягин (Россия, г. Москва)
Математический институт им. В. А. Стеклова Российской академии наук
e-mail: konyagin23@gmail.com

Syndetic subsets of the set of natural numbers and large distances between neighboring elements of subsets

S. V. Konyagin (Russia, Moscow)
Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences
e-mail: konyagin23@gmail.com

Пусть $\mathcal{A} = \{a_1 < a_2 < \dots\}$– бесконечное подмножество множества $\mathbb{N}$ натуральных чисел. Множество $\mathcal{A}$ называется синдетическим, если $\sup_i(a_{i+1}-a_i) < \infty$. Мы полагаем, что конечное подмножесво не является синдетическим.

Пусть $\mathcal{A} = \{a_1 < a_2 < \dots\}$– подмножество множества $\mathbb{N}$ (не обязательно бесконечное) и $x > 0$. Рассмотрим следующую величину, которая для бесконечных $\mathcal{A}$ характеризует, насколько велики расстояния между соседними элементами подмножества

$$\rho(x;\mathcal{A}) = \max\{\beta-\alpha :\ 0 \leqslant \alpha < \beta \leqslant x,\ (\alpha,\beta)\cap\mathcal{A} = \emptyset\}.$$

Очевидно, множество $\mathcal{A}$ является синдетическим тогда и только тогда, когда $\lim_{x\to\infty}\rho(x;\mathcal{A}) < \infty$.

В докладе мы обсудим нижние оценки величины $\rho(x;\mathcal{A})$ для различных подмножеств $\mathcal{A}$. По существу единственный новый результат– недавно полученная совместно А.Б. Калмыниным и докладчиком оценка снизу величины $\rho(x;\mathcal{A})$ для множества $\mathcal{A}$, образованного суммами двух неотрицательных полноквадратных чисел.

———————————————————————————————

УДК 511.32

Об одном тождестве Рамануджана и его обобщениях[1]

М. А. Королёв (Россия, г. Москва)
Математический институт им. В. А. Стеклова Российской академии наук
e-mail: hardy_ramanujan@mail.ru

[1]Исследование выполнено в Математическом институте им. В. А. Стеклова Российской академии наук за счет гранта Российского научного фонда No 19-11-00001, https://rscf.ru/project/19-11-00001/

An identity of Ramanujan and its generalizations

M. A. Korolev (Russia, Moscow)
Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences
e-mail: hardy_ramanujan@mail.ru

В 2020 г. студент Московского физико-технического института А.Т. Даниярходжаев обнаружил следующее замечательное тождество:

$$\sum_{\nu_1,\ldots,\nu_r=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{\nu_1+\ldots+\nu_r}}{(\nu_1+0.5)\ldots(\nu_r+0.5)} \cdot \frac{1}{\operatorname{ch}\frac{\pi}{2}\sqrt{(\nu_1+0.5)^2+\ldots+(\nu_r+0.5)^2}} = \frac{1}{r+1}\left(\frac{\pi}{2}\right)^r \tag{1}$$

Здесь $r \geqslant 1$ - произвольное целое число, $\operatorname{ch} z = \frac{1}{2}(e^z+e^{-z})$ - гиперболический косинус. В случае $r=1$ тождество (1) принимает вид

$$\sum_{\nu=0}^{+\infty} \frac{(-1)^\nu}{(\nu+0.5)\operatorname{ch}\pi(\nu+0.5)} = \frac{\pi}{4} \quad \text{или, иначе,} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\chi_4(n)}{n} \cdot \frac{1}{\operatorname{ch}\frac{\pi n}{2}} = \frac{\pi}{8}, \tag{2}$$

где χ_4 - неглавный характер Дирихле по модулю 4, $\chi_4(n) = \pm 1$ при $n \equiv \pm 1 \pmod 4$ и $\chi_4(n) = 0$ при $n \equiv 0 \pmod 2$. В свою очередь, тождество (2) является частным случаем одного из тождеств Рамануджана, найденного в его записных книжках (см. [1, Ch. 14, Entry 15]).

Один из способов «угадать» тождество (1) состоит в рассмотрении следующей краевой задачи. Дан однородный $(r+1)$-мерный единичный куб $0 \leqslant x_i \leqslant 1$, $i = 1, 2, \ldots, r+1$, одна из граней которого (скажем, $x_{r+1} = 1$) имеет температуру T_0, а все прочие грани $x_i = 0, 1$ - нулевую температуру. Требуется найти температуру в центре куба в установившемся режиме. Формальное решение соответствующего уравнения теплопроводности, имеющего вид

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2 T}{\partial x_{r+1}^2} = 0,$$

методом разделения переменных и подстановка значений $x_1 = \ldots = x_{r+1} = \frac{1}{2}$ приводит к (1).

Попытка строгого обоснования законности этих действий наталкивается на серьёзные трудности. Поиск строгого доказательства (1) привёл к появлению работы в основе которой лежит следующее простое тождество: пусть a_n, b_n, $1 \leqslant n \leqslant N$ - произвольные последовательности, причём $b_n > 0$. Тогда

$$\sum_{n_1,\ldots,n_r=1}^{N} a_{n_1}\ldots a_{n_r} \cdot \frac{b_{n_r}}{b_{n_1}+b_{n_2}+\ldots+b_{n_r}} = \frac{1}{r}\left(\sum_{n=1}^{N} a_n\right)^r. \tag{3}$$

Правая часть (3) не зависит от выбора последовательности b_n, что открывает широкие возможности для вывода новых числовых тождеств. Эти возможности расширяются ещё более если дополнить их результатами из теории преобразования Фурье. Это обстоятельство было отмечено в и продемонстрировано на простейших примерах. Цель настоящего сообщения - ознакомить с некоторыми новыми результатами, полученными в этом направлении.

Пусть $r = 2$. Полагая $a_n = \chi_4(n)/n$, $b_n = n^4$ и переходя к пределу при $N \to +\infty$, получим:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4}\right)^2 = \sum_{m,n=1}^{+\infty} \frac{\chi_4(m)\chi_4(n)m^4}{mn(m^4+n^4)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\chi_4(n)}{n} S(n), \quad S(n) = \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{\chi_4(m)m^3}{m^4+n^4}.$$

Воспользовавшись тождеством
$$\frac{m^3}{m^4+n^4}=\int_0^{+\infty}\exp\left(-\frac{my}{\sqrt{2}}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{my}{\sqrt{2}}\right)\cos(ny)\,dy,$$
будем иметь:
$$S(n)=\int_0^{+\infty}\left\{\sum_{m=1}^{+\infty}\chi_4(m)\exp\left(-\frac{my}{\sqrt{2}}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{my}{\sqrt{2}}\right)\right\}\cos(ny)dy=$$
$$=2\Im\left\{e^{\pi i/4}\int_0^{+\infty}\frac{\cos(ny)}{\operatorname{ch}(ye^{-\pi i/4})}\,dy\right\}.$$
Последний интеграл вычисляется в явном виде (см. формулу 3.981.10 из [3]. Так находим:
$$S(n)=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{\operatorname{ch}\frac{\pi n}{2\sqrt{2}}\cos\frac{\pi n}{2\sqrt{2}}}{\operatorname{ch}\frac{\pi n}{\sqrt{2}}+\cos\frac{\pi n}{\sqrt{2}}},\qquad \frac{\pi}{16}=\sum_{\nu=0}^{+\infty}\frac{(-1)^\nu}{2\nu+1}\,\frac{\operatorname{ch}\frac{\pi}{\sqrt{2}}\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\cos\frac{\pi}{\sqrt{2}}\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}{\operatorname{ch}\frac{\pi}{\sqrt{2}}(2\nu+1)+\cos\frac{\pi}{\sqrt{2}}(2\nu+1)}.\tag{4}$$
Обобщение этого рассуждения на случай нечётных характеров по произвольному модулю приводит нас к следующему утверждению. Пусть $q\geqslant 3$, χ_q - нечётный характер по модулю q, $m\geqslant 0$ - целое число, $q_1=\left[(q-1)/2\right]$, $m_1=[(m-1)/2]$. Тогда
$$L^2(2m+1,\chi_q)=\frac{2\pi}{q(m+1)}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\chi_q(n)}{n^{4m+1}}\sum_{r=1}^{q_1}\chi_q(r)\left(\sin\frac{2\pi r}{q}\right)\left\{2\sum_{k=0}^{m_1}A_k(n)+\delta_m A(n)\right\},\tag{5}$$
где
$$A_k(n)=\Re\frac{\omega_k^2}{\operatorname{ch}\left(\frac{2\pi n}{q}\,\omega_k\right)-\cos\frac{2\pi r}{q}},\quad A(n)=\frac{1}{\operatorname{ch}\frac{2\pi n}{q}-\cos\frac{2\pi r}{q}},$$
$$\omega_k=\sin\varphi_k+i\cos\varphi_k,\quad \varphi_k=\frac{\pi(2k+1)}{2(m+1)},\quad \delta_m=\begin{cases}1, & m\equiv 0\pmod 2,\\ 0, & m\equiv 1\pmod 2\end{cases}$$
(при $m_1<0$ сумма по k в (5) пуста). Отметим частный случай формулы (5), отвечающий $m=0$:
$$L^2(1,\chi_q)=\frac{2\pi}{q}\sum_{r=1}^{q_1}\chi_q(r)\left(\sin\frac{2\pi r}{q}\right)\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\chi_q(n)}{n}\cdot\frac{1}{\operatorname{ch}\frac{2\pi n}{q}-\cos\frac{2\pi r}{q}}.\tag{6}$$
Из (6) и равенств $L(1,\chi_3)=\pi/\sqrt{27}$, $L(1,\chi_4)=\pi/4$ получаются формулы
$$\pi=18\sqrt{3}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\chi_3(n)}{n}\,\frac{1}{2\operatorname{ch}\frac{2\pi n}{3}+1}=8\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\chi_4(n)}{n}\frac{1}{\operatorname{ch}\frac{\pi n}{2}}$$
(здесь $\chi_3(n)=\pm 1$ для $n\equiv\pm 1\pmod 3$, $\chi_3(n)=0$ для $n\equiv 0\pmod 3$). Подобным же образом выводятся соотношения
$$\frac{\pi}{4\sqrt{3}}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\chi_6(n)}{n}\,\frac{1}{2\operatorname{ch}\frac{\pi n}{3}-1},\qquad \frac{\pi^5}{1024}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\chi_4(n)}{n^5}\cdot\frac{\operatorname{sh}\frac{\pi n}{2\sqrt{2}}\,\sin\frac{\pi n}{2\sqrt{2}}}{\operatorname{ch}\frac{\pi n}{\sqrt{2}}+\cos\frac{\pi n}{\sqrt{2}}}$$
и др. (здесь $\chi_6(n)=\pm 1$ для $n\equiv\pm 1\pmod 6$, $\chi_3(n)=0$ в остальных случаях).

Пользуясь теми же средствами, можно вывести аналоги формулы (5) для чётных неглавных характеров. Но они оказываются более громоздкими, и по этой причине их общий вид здесь не приводится. Более просто выглядят аналоги (5) для квадратов значений дзета-функции Римана в нечётных очках. Именно, если $m \geqslant 1$ - целое число, то

$$\zeta^2(2m+1) = \frac{1}{m+1}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^{4m+1}}\sum_{r=0}^{2m+1}\varepsilon_{m,r}^2\psi\big(n\varepsilon_{m,r}\big), \quad \text{где} \quad \varepsilon_{m,r} = \exp\left(\frac{\pi i(2r+1)}{2(m+1)}\right), \tag{7}$$

а $\psi(z) = \Gamma'(z)/\Gamma(z)$ - дигамма-функция. Частными случаями (7) оказываются равенства

$$\zeta^2(3) = \frac{i}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^5}\Big(\psi\big(ne^{\pi i/4}\big) + \psi\big(-ne^{\pi i/4}\big) - \psi\big(ne^{-\pi i/4}\big) - \psi\big(-ne^{-\pi i/4}\big)\Big),$$

$$\zeta^2(5) = \frac{i}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^9}\big(\varepsilon^2\psi(n\varepsilon) + \varepsilon^2\psi(-n\varepsilon) + \overline{\varepsilon}^2\psi(-n\overline{\varepsilon}) + \overline{\varepsilon}^2\psi(n\overline{\varepsilon}) - \psi(ni) - \psi(-ni)\big),$$

где $\varepsilon = e^{\pi i/6}$. Подобно тождеству (7) доказывается при целом $m \geqslant 1$ и равенство

$$\zeta^2(2m) + \zeta(4m) = \frac{\pi}{m}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^{4m-1}}\sum_{k=0}^{m-1}\Re\big\{\varpi_k \operatorname{cth}(\pi n\varpi_k)\big\}, \tag{8}$$

в котором

$$\varpi_k = \sin\varphi_k + i\cos\varphi_k, \quad \varphi_k = \frac{\pi(2k+1)}{2m}, \quad \operatorname{cth} z = \frac{\operatorname{ch} z}{\operatorname{sh} z} - \text{ гиперболический котангенс.}$$

Подстановка $m = 1, 2$ в (8) даёт:

$$\zeta^2(2) + \zeta(4) = \pi\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\operatorname{cth}\pi n}{n^3}, \; \zeta^2(4) + \zeta(8) = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^7}\,\frac{\operatorname{sh}(\pi n\sqrt{2}) + \sin(\pi n\sqrt{2})}{\operatorname{sh}^2\frac{\pi n}{\sqrt{2}} + \sin^2\frac{\pi n}{\sqrt{2}}}. \tag{9}$$

В свою очередь, первое из равенств (9) приводит к тождеству Лерха

$$\zeta(3) = \frac{1}{\pi}\big(\zeta^2(2) + \zeta(4)\big) - 2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^3(e^{2\pi n}-1)} = \frac{7\pi^3}{180} - 2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^3(e^{2\pi n}-1)}$$

(см. [4], а также [1, Ch. 14, Entry 25(i)]).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Berndt B.C., Ramanujan's Notebooks. Part II. Springer-Verlag New York Inc., 1989.

2. Даниярходжаев А.Т., Королёв М.А., Об одном тождестве Рамануджана и его обобщениях // Математические заметки. 2021. Том 110, № 4. С. 524–536.

3. Градштейн И.С., Рыжик И.М., Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Изд. 4-е. М.: ГИФМЛ, 1962.

4. Lerch M., Sur la fonction $\zeta(s)$ pour valeurs impaires de l'argument // Jornal de sciencias mathematicas e astronomicas, publicado pelo Dr. F. Gomes Teixeira. 1900. Vol. XIV, № 1. P. 65-69.

———————————————————————————————————

УДК 512.542.74+512.543.1

Представление подстановок произведениями специальных инволюций

Ф. М. Малышев (Россия, г. Москва)
Математический институт им. В. А. Стеклова Российской академии наук
e-mail: malyshevfm@mi-ras.ru

Representation of permutation by products of special involutions

F. M. Malyshev (Russia, Moscow)
Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences
e-mail: malyshevfm@mi-ras.ru

1. Введение

В начале 70-х годов прошлого века А.И. Кострикин высказал предположение, что любой элемент простой конечной группы представляется произведением не более 4 её инволюций. В работе [1] его ученика Петрова Н.Т. показано, что для этого заведомо достаточно $L \leqslant 20$ инволюций. В настоящих тезисах рассматривается множество инволюций $P_n \subset S_{2n}$ в симметрической группе S_{2n}, $n \geqslant 3$, у которых нет неподвижных точек. Это так называемые парноцикловые подстановки. Множество P_n составляет один класс сопряжённости инволюций, далеко не самый большой по мощности. Например, уже число инволюций ровно с двумя неподвижными точками больше $|P_n|$ в n раз.

Исследуется возможность представления подстановки π степени $2n$, $n \geqslant 3$, произведением трёх парноцикловых подстановок, все циклы которых имеют длину 2. При чётном n этот вопрос правомерен для чётных подстановок, а при нечётных n для нечётных. Доказывается, что такое представление имеет место почти всегда, например, для подстановок $\pi \in S_{2n}$, в цикловой структуре которых имеется цикл длины не меньше 6 или два цикла длиной не меньше 4. Для $n (\operatorname{mod} 6) \in \{0, 1, 4, 5\}$ приводится исчерпывающий список подстановок π, непредставимых произведением трёх парноцикловых подстановок. Упорядоченная тройка парноцикловых подстановок задаёт естественное вложение соответствующего кубического графа с рёбрами в виде 2-циклов в двумерный полиэдр, состоящий из вершин, отрезков и замкнутых ориентированных поверхностей.

В статье [2] доказывается, что любая чётная подстановка представляется произведением четырёх парноцикловых подстановок, причём имеются чётные подстановки, которые не представляются произведением трёх парноцикловых подстановок. Там же показывается, что любая нечётная подстановка реализуется (при нечётном n) произведением пяти парноцикловых подстановок и имеются нечётные подстановки, которые не реализуются произведением трёх парноцикловых подстановок. Оказывается, что почти все чётные (соответственно, нечётные) подстановки при чётном (соответственно, нечётном) $n \geqslant 3$ реализуются произведением трёх парноцикловых подстановок. Исключения содержатся среди пяти семейств подстановок, явно задаваемых их цикловой структурой.

2. Формулировка основного результата

Обозначаем парноцикловые подстановки через p, $p_i \in S_{2n}$, $i \in \mathbb{N}$. Подстановку π называем *l-представимой*, если $\pi = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_l$.

Подстановки будем обозначать перечислением в скобках длин их циклов, используя верхний индекс для числа одинаковых. Например, $p = (2^n)$, $p \in P_n$, $(2n)$ представляет все $(2n-1)!$ полноцикловых подстановок, а $(n, n) = (n^2)$ – подстановки, представимые двумя циклами длины n каждый, (1^{2n}) – тождественная подстановка.

Теорема. *Пусть $\pi \in A_{2n}$ при чётном $n > 3$ или $\pi \in S_{2n} \diagdown A_{2n}$ при нечётном $n \geqslant 3$. Тогда, если подстановка π не является 3-представимой, то она содержится среди подстановок одного из следующих пяти семейств:*
a) (532^i), где $i \geqslant 0$,
b) (51^i), где $i \equiv 3 \pmod 4$,
c) (431^i), где $i \equiv 3 \pmod 4$,
d′) (32^j1^k), где $k \equiv 1 \pmod 4$, $j \geqslant 0$ при $k = 1$ и $j \in \{0, 1\}$ при $k \geqslant 5$,
d″) (3^i2^j1), где $i \equiv 1 \pmod 4$, $i \geqslant 5$, $j \in \{0, 1\}$.
Обратно, если подстановка $\pi \in S_{2n}$ одной чётности с n принадлежит одному из семейств a), b), c), d′), то она не является 3-представимой.

Для подстановок π семейства d''), возможных для $n \in \{6k+2,\, 6k+3 |\, k \geqslant 1\}$, вопрос о 3-представимости открыт.

3. Предварительные утверждения

3.1. *Состоящее из трёх подстановок (22) множество P_2 вместе с тождественной подстановкой (1^4) образует группу из 4 элементов. В этой группе произведение двух различных элементов из P_2 равно третьему элементу из P_2. Произведение всех трёх элементов из P_2 равно единице группы.*

3.2. *Если множество циклов подстановки $\pi \in S_{2n}$ разбивается на два непустых подмножества циклов с чётной суммой их длин в каждом подмножестве, то они образуют подстановки $\pi_1 \in S_{2n_1}$, $\pi_2 \in S_{2n_2}$, $n_1 + n_2 = n$, $n_1 \geqslant 1$, $n_2 \geqslant 1$, причём, если π_1, π_2 являются l-представимыми подстановками, то и π будет l-представимой подстановкой для всех $l \geqslant 1$.*

3.3. *Чётная инволюция является 2-представимой подстановкой.*

3.4. *Для любых парноцикловых подстановок $p_1, p_2 \in P_n$ их произведение p_1p_2 представляется несколькими парами циклов одинаковой длины в каждой паре. Обратно, если циклы подстановки $\pi \in S_{2n}$ можно разбить на пары одинаковой длины (в отдельных парах), то $\pi = p_1p_2$ для некоторых $p_1, p_2 \in P_n$.*

3.5. *При нечётном $n \in \mathbb{N}$ цикл $(2n)$ является 3-представимой подстановкой.*

Две подстановки $\pi_1, \pi_2 \in S_{2n}$ будем считать *близкими*, если $\pi_1 p = \pi_2$ для некоторой парноцикловой подстановки $p \in P_n$. Это отношение удобно представлять неориентированным графом, но некоторые возможные при этом рёбра могут не указываться.

3.6. *В обозначениях утверждения 3.2 подстановки $\pi, \pi' \in S_{2n}$ близки, если близкими являются отвечающие им пары подстановок $\pi_1, \pi_1' \in S_{2n_1}$ и $\pi_2, \pi_2' \in S_{2n_2}$.*

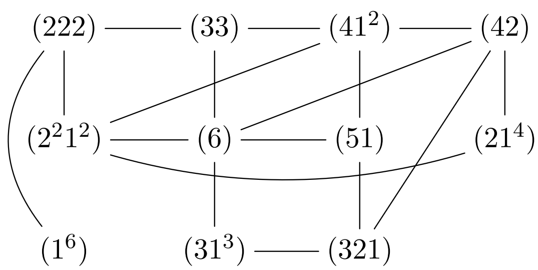
3.7. *Имеют место близости:* (2^n) —— (n, n) *для* $n \geqslant 1$,

$(2n)$ —— (n, n) *для нечётных* $n \geqslant 1$, $(2n)$ —— $(2n)$ *для чётных* $n \geqslant 2$.

3.8. *При $n = 1$ графом близости является* (1^2) —— (2) *, а при $n = 2$ –*

(1^4) —— (22) $\qquad$ (31) $\qquad$ (21^2) —— (4) $\qquad$.

3.9. *При $n = 3$ имеет место граф близости*



В утверждениях 3.10 – 3.18 циклы могут иметь сколь угодно большую длину. "Погружения" больших циклов подстановки $\pi \in S_{2n}$ в среду из транспозиций парноцикловой подстановки $p \in P_n$ будут осуществляться путём сближения двух длинных участков циклов так, чтобы они были разнонаправлены, а соответствующие пары вершин из разных участков образовывали бы 2-цикл подстановки p. Тогда в подстановке πp будет подавляющее число циклов длины 2, причём можно добиться, чтобы длины остальных циклов не превосходили 4.

3.10. *Для $k \geqslant 2$ имеем* $(42^{k-2}) \overset{a}{\text{———}} (2k) \overset{b}{\text{———}} (1^2 2^{k-1})$.

3.11. $(1^3 52) \text{———} (55)$.

3.12. *Для $k_1 \geqslant 2$, $k_2 \geqslant 2$ имеем* $(41^2 2^{k_1+k_2-2}) \overset{a}{\text{———}} (2k_1+1, 2k_2+1) \overset{b}{\text{———}} (4^2 2^{k_1+k_2-3})$.

3.13. *Для $k \geqslant 2$ имеем* $(62^{k-1}) \overset{a}{\text{———}} (2k+1, 3) \overset{c}{\text{———}} (41^2 2^{k-1})$,

а для $k \geqslant 4$: $(2k+1, 3) \overset{b}{\text{———}} (4^2 1^4 2^{k-4})$.

3.14. *Для $k \geqslant 2$ имеем* $(312^{k-1}) \overset{a}{\text{———}} (2k+1, 1) \overset{b}{\text{———}} (41^2 2^{k-2})$,

а для $k \geqslant 3$: $(2k+1, 1) \overset{c}{\text{———}} (4^2 2^{k-3})$.

3.15. *Для $k_1 \geqslant 1$, $k \geqslant 2$, $k_2 \geqslant 1$ имеем* $(2k_1+1, 2k, 2k_2+1) \text{———} (4^2 1^2 2^{k_1+k+k_2-4})$.

3.16. *Для $k \geqslant 3$ имеем* $(1, 2k, 3) \text{———} (4^2 1^2 2^{k-3})$.

3.17. *Для $k \geqslant 2$ имеем* $(1, 2k, 1) \text{———} (332^{k-2})$.

3.18. $(422) \overset{a}{\text{———}} (143) \overset{b}{\text{———}} (61^2)$.

4. Структура доказательства теоремы

Циклы подстановки $\pi \in S_{2n}$, $n \geqslant 1$, будем различать по их длинам l. Выделяем семь типов l-циклов. Прежде всего, циклы конкретной длины $l \in \{1, 5, 3\}$ и ещё четыре типа определяются вычетами $l \,(\mathrm{mod}\, 4)$. Число циклов в подстановке π длины $4k$, $k \geqslant 1$, обозначаем ν_o. Называем их *o-циклами.* Число циклов в подстановке длины $2(2k+1)$, $k \geqslant 0$, обозначаем ν'_o и называем их *o'-циклы.* Число циклов длины $4k+1$, $k \geqslant 2$, обозначаем ν_α, а длины $4k-1$, $k \geqslant 2$, – ν_β. Называем их соответственно *α- и β-циклы.* Символами ν_5, ν_3, ν_1 обозначаем число 5-, 3-, 1-циклов соответственно.

В утверждениях 4.1 – 4.8 выделяются некоторые специальные совокупности циклов, называемых *блоками*, которые образуют 3-представимые подстановки.

Основная часть доказательства теоремы заключается в обосновании 3-представимости подстановок, в совокупности циклов которых нет блоков. Такие подстановки называем *приведёнными.*

Для числа циклов в приведённых подстановках справедливы следующие условия: $\nu_0 \in \{0,1\}$; $\nu'_0 = 0$; $\nu_\alpha \leqslant 3$; $\nu_\beta \leqslant 3$; $\nu_i \leqslant 3, i = 1,5,3$; $\nu_\alpha \in \{1,2,3\} \Rightarrow \nu_\beta = \nu_3 = 0$; $\nu_\beta \in \{1,2,3\} \Rightarrow \nu_\alpha = \nu_1 = \nu_5 = 0$. Согласно этим требованиям, при $\nu_0 = 0$ в приведённых подстановках будет не 7, а только 4 и менее типов циклов, поэтому их можно задавать либо строками $\nu_1\nu_5\nu_\alpha\nu_3$, либо строками $\nu_1\nu_5\nu_\beta\nu_3$, в которых каждая компонента не превосходит трёх. Таким заданием приведённых подстановок можно пользоваться и при $\nu_0 = 1$.

Заметим, что 3-представимость подстановки π равносильна наличию близкой к ней 2-представимой подстановки. Основным инструментом при доказательстве 3-представимостей будет утверждение 3.6. Каждый раз доказательство 3-представимости подстановки π или семейства подстановок осуществляется по следующей схеме. Вначале всю совокупность циклов исследуемой подстановки разбиваем на отдельные непересекающиеся подмножества, к каждому из которых применяем одно из утверждений 3.8 – 3.18. Применяя эти утверждения, подбираем такие варианты близких подстановок, чтобы вся совокупность их циклов (получаемая путём объединения по всем исходным подмножествам циклов подстановки π) образовывала бы 2-представимую подстановку (у которой циклы разбиваются на пары одинаковой длины).

4.1–4.8. *3-представимыми являются подстановка: из двух o-циклов, из одного o'-цикла, из 4 α-циклов, из 4 β-циклов, из 4 циклов одинаковой длины, из α-цикла и β-цикла, из 3-цикла и α-цикла, из двух циклов, один из которых либо 5-цикл либо 1-цикл, а другой β-цикл.*

4.9. *Если приведённая подстановка π с $\nu_o = 0$ задаётся строкой $\nu_1\nu_5\nu_\alpha\nu_3$ или $\nu_1\nu_5\nu_\beta\nu_3$, в которой две компоненты нулевые, а другие компоненты равны 2 каждая, то эта подстановка является 3-представимой.*

4.10. *За исключением трёх подстановок* $3100 = (1^35)$, $0101 = (53)$, $1001 = (13)$ *все остальные чётные приведённые подстановки являются 3-представимыми.*

4.11. *За исключением единственной подстановки* (1^334) *все остальные нечётные приведённые подстановки являются 3-представимыми.*

Утверждения 4.1 – 4.8 предоставляют 11 типов блоков: 1) пара o-циклов, обозначаемая (o^2), 2) один o'-цикл – (o'), 3) четыре α-цикла – (α^4), 4) четыре β-цикла – (β^4), 5) (1^4), 6) (3^4), 7) (5^4), 8) α- и β-циклы – (α,β), 9) 3- и α-циклы – $(\alpha,3)$, 10) 1- и β-циклы – $(\beta,1)$, 11) 5- и β-циклы – $(\beta,5)$. В обозначениях (o^2), (α^4), (β^4) длины циклов одного типа не обязаны иметь одинаковые длины. Для всех 44 видов подстановок π, состоящей из одного из 11 блоков и одной из исключительных приведённых подстановок (53), (1^35), (41^33), (13) проверяется 3-приводимость π в случае, когда она не содержится ни в одном из 5 исключительных семейств $a)$, $b)$, $c)$, $d')$, $d'')$. Этим завершается доказательство первой части теоремы.

При доказательстве второй части теоремы используется то обстоятельство, что в подстановках семейств $a)$, $b)$, $c)$, $d')$ не более двух циклов длины большей двух, причём непревосходящей 5. Это позволяет при погружении циклов подстановки π в среду из 2-циклов парноцикловой подстановки p обозревать все возможности взаимного расположения циклов π и p. Для этого придерживаемся модели, когда циклы подстановки π зафиксированы, неподвижны, а 2-циклы подстановки p свободно плавают. Среди близких подстановкам семейств $a)$, $b)$, $c)$, $d')$ не обнаруживается 2-представимых подстановок.

5. Тройка парноцикловых подстановок $p_0, p_1, p_2 \in S_{2n}$ задаёт кубический граф G на $2n$ вершинах с рёбрами в виде 2-циклов этих подстановок [3]. Определённую надежду исследовать проблемное семейство $d'')$ подстановок (3^i2^j1), $i \equiv 1 \pmod 4$, $i \geqslant 5$, $j \in \{0,1\}$, даёт естественная конструкция вложения графа G в двумерный полиэдр из вершин, отрезков, сфер и сфер с ручками [4], на которых возникает карта из областей с границами, задаваемыми циклами подстановки $\pi = p_0p_1p_2$. В случае подстановок семейства $d'')$ области могут быть 9-угольниками числом $i - 2l$, $0 \leqslant 2l \leqslant i$, и $2l$ парами из 5-угольников и 2-угольников, соединённых отрезком, одна область треугольная (отвечающая неподвижной точке подстановки π), а при $j = 1$ возможна ещё одна 6-угольная область или два соединённые отрезком 2-угольника.

Для примера, равенство $(3^4) = p_0p_1p_2$ в одном случае задаёт карту из четырёх 9-угольников на сфере с двумя ручками, а в другом – карту из четырёх 5-угольников на сфере в виде тетраэдра с 4 дополнительными вершинами на двух парах противоположных рёбер и две карты в виде двух 2-угольников на двух сферах с вершинами в полюсах, соединённых отрезками с парой дополнительных вершин тетраэдра на противоположных рёбрах.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Петров Н.Т. О длине простых групп. Докл. АН СССР, **208**:3 (1973), 537–540.
2. Малышев Ф.М. Реализация чётных подстановок чётной степени произведениями четырёх инволюций без неподвижных точек. Дискрет. матем. **35**:2 (2023), 18–33.
3. Bonnington C.P., Little C.H.C. The Foundations of Topological Graph Theory. Springer, 1995, 178 p.
4. Понтрягин Л.С. Основы комбинаторной топологии. 2-е изд. М.: Наука, 1976, 136 с.

———————————————————————————

УДК 511.32

Асимптотическая формула в проблеме Варинга с почти пропорциональными слагаемыми

З. Х. Рахмонов (Таджикистан, г. Душанбе)
Институт математики им. А. Джураева Национальной академии наук Таджикистана
e-mail: zarullo-r@rambler.ru

The asymptotic formula in Waring's problem with almost proportional summands

Z. Kh. Rakhmonov (Tajikistan, Dushanbe)
A. Dzhuraev Institute of Mathematics, National Academy of Sciences of Tajikistan
e-mail: zarullo-r@rambler.ru

Проблему Варинга с почти пропорциональными слагаемыми впервые исследовал М.Е. Райт [1]. При положительных фиксированных чисел μ_i, $i = 1, \dots, r$ удовлетворяющим условию $\mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_r = 1$, для числа представлений достаточно большого числа N в виде

$$x_1^n + x_2^n + \ldots + x_r^n = N, \tag{1}$$

где $x_1, x_2, \dots, x_r$ — натуральные числа и $|x_i^n - \mu_i N| \leqslant N^{1-\theta}$, он нашёл асимптотическую формулу при

$$r \geqslant (n-2)2^{n-1} + 5,$$

и $\theta = \theta(n,r)$, где $\theta(n,r)$ определяется из соотношения

$$\theta(n,r) = \frac{1}{n}\min\left(\frac{(r-2^n)(2^{n-1}+1)}{(nr+n-2^n-3)2^{n-1}+r}, \frac{r-(n-2)2^{n-1}-4}{r+2^{n-1}-4}, \frac{r-2^{n-1}}{nr-2^{n-1}+n-1}\right).$$

Отсюда, в частности, следует

$$\theta(3,9) = \frac{1}{51}, \qquad \theta(4,21) = \frac{1}{100}, \qquad \theta(5,53) = \frac{1}{325}, \qquad \theta(6,133) = \frac{1}{966}.$$

Согласно теореме Дирихле о приближении действительных чисел рациональными числами, каждое α из промежутка $[-æ, 1-æ]$, $æ\tau = 1$ представимо в виде

$$\alpha = \frac{a}{q} + \lambda, \quad (a,q) = 1, \qquad 1 \leqslant q \leqslant \tau, \qquad |\lambda| \leqslant \frac{1}{q\tau}.$$

Для некоторого η, $\eta < 0,1\tau$ через $\mathfrak{M}(\eta)$ обозначим числа α, для которых $q \leqslant \eta$, через $\mathfrak{m}(\eta)$ обозначим оставшиеся α. $\mathfrak{M}(\eta)$ и $\mathfrak{m}(\eta)$ соответственно называются большими и малыми дугами.

После создания метода тригонометрических сумм И. М. Виноградова вывод асимптотических формул для количества решений в классических аддитивных проблемах, к которым относится проблема Варинга, тернарная проблема Гольдбаха, проблема Варинга-Гольдбаха, проблема Эстермана, сводится к двум следующим задачам:

- исследованию поведения тригонометрических сумм Г. Вейля вида

  $$T_n(\alpha, x) = \sum_{m \leqslant x} e(\alpha m^n), \qquad\qquad S_n(\alpha, x) = \sum_{p \leqslant x} e(\alpha p^n),$$

  в больших дугах $\mathfrak{M}(\eta)$,

- получение нетривиальных оценок этих сумм в малых дугах $\mathfrak{m}(\eta)$.

Вывод асимптотических формул для количества решений в классических аддитивных проблемах становится гораздо труднее, если требовать, что все слагаемые почти пропорциональны или все они почты равны (аддитивная задача с почти пропорциональными слагаемыми при $\mu_1 = \ldots = \mu_r$ превращается в задачу с почти равными слагаемыми), так как вместо тригонометрических сумм Г. Вейля $T_n(\alpha, x)$ и $S_k(\alpha, x)$ возникают короткие тригонометрические суммы Г. Вейля вида

$$T_n(\alpha; x, y) = \sum_{x-y<m \leqslant x} e(\alpha m^n), \qquad\qquad S_n(\alpha; x, y) = \sum_{x-y<p \leqslant x} e(\alpha p^n),$$

причём, если $n > 1$, то длина и границы коротких тригонометрических сумм зависят от чисел μ_i. Это означает, что каждой из r слагаемых соответствует своя короткая тригонометрическая сумма, а в случае аддитивных задач с почти равными слагаемыми все эти суммы совпадают. Более конкретно решения этих классических аддитивных проблем с почти пропорциональными слагаемыми сводятся к трём следующим задачам:

- исследование поведения коротких тригонометрических сумм $T_n(\alpha; x, y)$ и $S_n(\alpha; x, y)$ в малых окрестностях центра больших дуг $\mathfrak{M}(\eta)$;

- нахождение нетривиальных оценок этих сумм в больших дугах $\mathfrak{M}(\eta)$ за исключением малых окрестностей их центров;

- получение нетривиальных оценок этих сумм в малых дугах $\mathfrak{m}(\eta)$.

Поведение коротких тригонометрических сумм Г. Вейля $T_n(\alpha; x, y)$ для фиксированного n в больших дугах было исследовано в работах [2, 3]. Воспользовавшись этими результатами в сочетании с нетривиальными оценками сумм $T_n(\alpha; x, y)$ в малых дугах [4], были доказаны асимптотические формулы для количества решений в следующих аддитивных задачах с почти равными слагаемыми:

- в проблеме Варинга с почти равными слагаемыми для $n = 3, 4, 5$ [5, 6, 7, 3], то есть для количества решений диофантова уравнения (5) с условиями
$$\left| x_i - \left(\frac{N}{2^n+1}\right)^{\frac{1}{n}} \right| \leqslant H, \qquad i = 1, \ldots, 2^n+1, \qquad H \geqslant N^{\frac{1}{n}-\theta(n)+\varepsilon},$$
при
$$\theta(3) = \frac{1}{30}, \qquad \theta(4) = \frac{1}{108}, \qquad \theta(5) = \frac{1}{340}.$$
- в обобщении [2, 8] тернарной проблемы Эстермана с почти равными слагаемыми о представлении достаточно большого натурального числа в виде
$$p_1 + p_2 + m^n = N,$$
при $n = 2, 3, 4$, в простых числах p_1, p_2 и натурального m, с условиями
$$\left| p_i - \frac{N}{3} \right| \leqslant H, \quad i = 1, 2, \qquad \left| m^n - \frac{N}{3} \right| \leqslant H, \qquad H \geqslant N^{1-\theta(n)}\mathscr{L}^{c_n},$$
соответственно при
$$\theta(2) = \frac{1}{4}, \quad c_2 = 2; \qquad \theta(3) = \frac{1}{6}, \quad c_3 = 3; \qquad \theta(4) = \frac{1}{12}, \quad c_4 = \frac{40}{3}.$$

Развивая методы работ [2, 3, 4, 5, 6, 7], автор доказал, что теорема Е. М. Райта об асимптотической формуле в обобщении проблемы Варинга с почти пропорциональными слагаемыми имеет место при условии
$$\theta(n, r) = \frac{2}{((r+1)(n^2-n)} + \varepsilon, \qquad r = 2^n + 1.$$

Теорема 1. *Пусть N — достаточно большое натуральное число, $n \geqslant 3$ — натуральное число, $r = 2^n + 1$, $\mu_1, \ldots, \mu_r$ — положительные фиксированные числа, удовлетворяющие условию*
$$\mu_1 + \ldots + \mu_r = 1,$$
$J_{n,r}(N, H)$ — число решений диофантова уравнения (1) с условиями
$$|x_i^n - \mu_i N| \leqslant H, \qquad i = 1, \ldots, r \qquad \theta(n, r) = \frac{2}{(r+1)(n^2-n)}. \tag{2}$$
Тогда при $H \geqslant N^{1-\theta(n,r)+\varepsilon}$ справедлива асимптотическая формула:
$$J_{n,r}(N, H) = \frac{2^r \gamma(n, r)}{n^r} \prod_{i=1}^{r} \mu_i^{-1+\frac{1}{n}} \mathfrak{S}(N) \frac{H^{r-1}}{N^{r-\frac{r}{n}}} + O\left(\frac{H^{r-1}}{N^{r-\frac{r}{n}}\mathscr{L}}\right),$$
где $\gamma(n, r)$ — абсолютная постоянная, которая определяется соотношением
$$\gamma(n, r) = \frac{r^{r-1} - \frac{r}{1!}(r-2)^{r-1} + \frac{r(r-1)}{2!}(r-4)^{r-1} - \frac{r(r-1)(r-2)}{3!}(r-6)^{r-1} + \ldots}{2^r(r-1)!},$$
$\mathfrak{S}(N)$ – особый ряд, сумма которого превосходит некоторое положительное постоянное, а постоянное под знаком O зависит от чисел $\mu_1, \ldots, \mu_9$.

Отсюда, в частности, имеем
$$\theta(3, 9) = \frac{1}{51}, \qquad \theta(4, 17) = \frac{1}{108}, \qquad \theta(5, 33) = \frac{1}{340}, \qquad \theta(6, 65) = \frac{1}{990}.$$

Из теоремы 1 следует асимптотическая формула в обобщении проблемы Варинга с почти равными слагаемыми.

Следствие 1. *Пусть N — достаточно большое натуральное число, $n \geqslant 3$ — натуральное число, $r = 2^n + 1$, $J_{n,r}(N,H)$ — число решений диофантова уравнения (1) с условиями*

$$\left|x_i^n - \frac{N}{r}\right| \leqslant H, \qquad i = 1, \ldots, r \qquad \theta(n,r) = \frac{2}{(r+1)(n^2-n)}.$$

Тогда при $H \geqslant N^{1-\theta(n,r)+\varepsilon}$ справедлива асимптотическая формула:

$$J_{n,r}(N,H) = \frac{2^r r^{r-\frac{r}{n}} \gamma(n,r)}{n^r} \mathfrak{S}(N) \frac{H^{r-1}}{N^{r-\frac{r}{n}}} + O\left(\frac{H^{r-1}}{N^{r-\frac{r}{n}} \mathscr{L}}\right).$$

Автору также удалось обобщить теорему Хуа Ло-кена ([9], лемма 2.5), то есть оценку

$$\int_0^1 |T_n(\alpha, x)|^{2^k} \ll x^{2^k - k + \varepsilon}, \qquad 1 \leqslant k \leqslant n,$$

для коротких тригонометрических сумм Г. Вейля $T_n(\alpha; x, y)$, которой воспользуемся при доказательстве теоремы 1.

Теорема 2. *Пусть x и y — натуральные числа, $\sqrt{x} < y \leqslant x\mathscr{L}^{-1}$, тогда имеет место оценка*

$$\int_0^1 |T_n(\alpha; x, y)|^{2^k} \, d\alpha \ll y^{2^k - k + \varepsilon}, \qquad 1 \leqslant k \leqslant n.$$

Теорема 1 доказывается круговым методом Харди-Литтлвуда-Рамануджана в форме тригонометрических сумм И. М. Виноградова. Наряду с теоремой 2 мы также используем:

- асимптотическую формулу для коротких тригонометрических сумм Г. Вейля $T_3(\alpha; x, y)$ в малой окрестности центра больших дуг (следствие 2.1 в [2] или следствие 1 в [3] при $n = 3$);
- нетривиальную оценку для коротких тригонометрических сумм Г. Вейля $T_3(\alpha; x, y)$ в больших дугах за исключением малой окрестности их центров (следствие 2.2 в [2] или следствие 2 в [3] при $n = 3$);
- нетривиальную оценку коротких тригонометрических сумм Г. Вейля $T_n(\alpha; x, y)$ в малых дугах [4] при $n = 3$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Wright E. M. Proportionality conditions in Waring's problem // Mathematische Zeitschrift. 1934. V. 38. P. 730 – 746.
2. Рахмонов З. Х. Кубическая задача Эстермана с почти равными слагаемыми // Математические заметки. 2014. Т. 95. вып. 3. С. 445 – 456.
3. Рахмонов З. Х., Назрублоев Н. Н., Рахимов А. О. Короткие суммы Г.Вейля и их приложения // Чебышевский сборник. 2015. Т. 16. В. 1(53). С. 232 – 247.
4. Рахмонов З. Х., Азамов А. З., Назрублоев Н. Н. Короткие тригонометрические суммы Г. Вейля в малых дугах // Доклады Академии наук Республики Таджикистан. 2018 г. Т. 61. № 7-8. С. 609–614.

5. Рахмонов З. Х., Мирзоабдугафуров К. И. Проблема Варинга для кубов с почти равными слагаемыми // Доклады Академии наук Республики Таджикистан, 2008. Т. 51. № 2. С. 83 – 86.

6. Рахмонов З. Х., Азамов А. З. Асимптотическая формула в проблеме Варинга для четвертых степеней с почти равными слагаемыми // Доклады Академии наук Республики Таджикистан. 2011. Т. 54. № 3. С. 34 – 42.

7. Рахмонов З. Х., Назрублоев Н. Н. Проблема Варинга для пятых степеней с почти равными слагаемыми // Доклады Академии наук Республики Таджикистан. 2014. Т. 57. № 11 – 12. С. 823 – 830.

8. Рахмонов Ф. З., Рахимов А. О. Об одной аддитивной задаче с почти равными слагаемыми // Исследования по алгебре, теории чисел, функциональному анализу и смежным вопросам. Издательство: Саратовский национальный исследовательский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского. ISSN: 1810-4134. 2016. № 8. С. 87 – 89.

9. Вон Р. Метод Харди–Литтлвуда. — Мир, М., 1985.

———————————————————————————

УДК 512.543

Об аппроксимируемости свободных конструкций групп относительно равенства и вхождения[1]

Е. В. Соколов (Россия, г. Иваново)
Ивановский государственный университет
e-mail: ev-sokolov@yandex.ru

On the approximability of free constructions of groups with respect to equality and occurrence

E. V. Sokolov (Russia, Ivanovo)
Ivanovo State University
e-mail: ev-sokolov@yandex.ru

Напомним, что группа X называется *аппроксимируемой классом групп $\mathcal{C}$ относительно отношения θ* (или, более коротко, *$\mathcal{C}$-аппроксимируемой относительно θ*), если для любых своих элементов и подмножеств элементов, не состоящих в отношении θ, она обладает гомоморфизмом на группу из класса $\mathcal{C}$, при котором образы указанных элементов и подмножеств по-прежнему не состоят в отношении θ. Наибольшую известность получило свойство аппроксимируемости относительно равенства элемента едининце, при упоминании о котором слова об отношении обычно опускают. Если группа X аппроксимируется классом $\mathcal{C}$ относительно вхождения элемента в заданную подгруппу, то говорят, что эта подгруппа *$\mathcal{C}$-отделима в группе X*. Очевидно, что отделимость единичной подгруппы равносильна аппроксимируемости группы относительно равенства. Напомним также, что аппроксимируемость классом всех конечных групп (относительно любого отношения) принято называть *финитной*.

[1]Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22-21-00166, `https://rscf.ru/project/22-21-00166/`

В настоящей работе изучается аппроксимируемость *корневыми классами групп*, т. е. классами, содержащими неединичные группы и замкнутыми относительно взятия подгрупп и декартовых сплетений. Легко проверить, что корневыми являются, например, классы всех конечных групп, конечных p-групп (где p — простое число), периодических $\mathfrak{P}$-групп конечного периода (где $\mathfrak{P}$ — непустое множество простых чисел), всех разрешимых групп и всех групп без кручения, а также всевозможные их нетривиальные пересечения.

Бóльшая часть результатов об аппроксимируемости (относительно равенства) свободных конструкций групп (обобщенных свободных и древесных произведений, HNN-расширений, фундаментальных групп произвольных графов групп) получена с помощью так называемого *фильтрационного подхода*. Первоначально он был предложен в [1] для изучения финитной аппроксимируемости обобщенных свободных произведений двух групп, а затем распространен на другие конструкции и аппроксимирующие классы. В [2] выполнено обобщение всех имевшихся до этого вариантов данного подхода, позволяющее исследовать аппроксимируемость произвольным корневым классом групп фундаментальной группы любого графа групп.

Всюду далее будем считать, что Γ — непустой связный граф с множеством вершин $\mathcal{V}$ и множеством ребер $\mathcal{E}$ (допустимы петли и кратные ребра); $\mathcal{G}(\Gamma)$ — граф групп над Γ, в котором каждой вершине $v \in \mathcal{V}$ сопоставлена некоторая группа G_v, а каждому ребру $e \in \mathcal{E}$ — группа H_e и инъективные гомоморфизмы $\varphi_{+e}\colon H_e \to G_{e(1)}$, $\varphi_{-e}\colon H_e \to G_{e(-1)}$ (где $e(1)$ и $e(-1)$ — вершины графа $\mathcal{G}(\Gamma)$, являющиеся концами ребра e); $\mathfrak{G}$ — фундаментальная группа графа групп $\mathcal{G}(\Gamma)$. Группы G_v $(v \in \mathcal{V})$ будем называть *вершинными*, подгруппы $H_{+e} = H_e\varphi_{+e}$ и $H_{-e} = H_e\varphi_{-e}$ — *реберными*. Также для любых класса групп $\mathcal{C}$ и группы X через $\mathcal{C}^*(X)$ будем обозначать семейство всех нормальных подгрупп группы X, фактор-группы по которым принадлежат классу $\mathcal{C}$. Основу обобщенного фильтрационного подхода составляет следующее утверждение, вытекающее из теорем 1, 3 и предложения 2 статьи [2].

Теорема 1. *Пусть $\mathcal{C}$ — корневой класс групп.*

I. *Группа $\mathfrak{G}$ $\mathcal{C}$-аппроксимируема, если выполняются следующие условия*:

(i^1) $\forall v \in \mathcal{V}$ $\bigcap_{N \in \mathcal{C}^*(\mathfrak{G})}(N \cap G_v) = 1$;

(ii^1) $\forall e \in \mathcal{E},\ \varepsilon = \pm 1$ $\bigcap_{N \in \mathcal{C}^*(\mathfrak{G})} H_{\varepsilon e}(N \cap G_{e(\varepsilon)}) = H_{\varepsilon e}$.

II. *Пусть справедливо утверждение* $(*)$: *для любых $v \in \mathcal{V}$, $M \in \mathcal{C}^*(G_v)$ существует подгруппа $N \in \mathcal{C}^*(\mathfrak{G})$ такая, что $N \cap G_v \leqslant M$. Тогда группа $\mathfrak{G}$ $\mathcal{C}$-аппроксимируема, если выполняются следующие условия*:

(i^2) *все группы G_v $(v \in \mathcal{V})$ $\mathcal{C}$-аппроксимируемы*;

(ii^2) *для любых $e \in \mathcal{E}$, $\varepsilon = \pm 1$ подгруппа $H_{\varepsilon e}$ $\mathcal{C}$-отделима в группе $G_{e(\varepsilon)}$.*

Отметим, что условия (i^1) и (ii^1) являются слабейшими из тех, при которых идея из [1] может быть применена, и потому имеют место всякий раз, когда аппроксимируемость группы $\mathfrak{G}$ доказывается с помощью фильтрационного подхода. Однако, они зависят не только от свойств вершинных групп и содержащихся в них реберных подгрупп, но и от того, как устроена группа $\mathfrak{G}$ в целом. Если выполняется утверждение $(*)$, то указанные условия превращаются в более понятные и не связанные с группой $\mathfrak{G}$ требования (i^2) и (ii^2). При этом утверждению $(*)$ можно дать и другую, более простую с точки зрения его доказательства формулировку (см. [2]). Вместе с тем, указанное утверждение, по-видимому, не следует из ограничений (i^1), (ii^1) и потому полностью отказаться от использования последних, вообще говоря, нельзя.

Переходя к обсуждению свойства отделимости подгрупп, напомним прежде всего, что подгруппа Y группы X называется *$\mathfrak{P}'$-изолированной* в этой группе для некоторого множества простых чисел $\mathfrak{P}$, если для каждого элемента $x \in X$ и для каждого простого числа $q \notin \mathfrak{P}$ из включения $x^q \in Y$ следует, что $x \in Y$. Очевидно, что если $\mathfrak{P}$ совпадает с множеством всех простых чисел, то любая подгруппа оказывается $\mathfrak{P}'$-изолированной. Для каждого класса групп $\mathcal{C}$ через $\mathfrak{P}(\mathcal{C})$ будем обозначать множество всех простых делителей порядков элементов групп из класса $\mathcal{C}$, если этот класс состоит из периодических групп, и множество всех простых чисел в противном случае. Хорошо известно и нетрудно показать, что всякая $\mathcal{C}$-отделимая подгруппа должна быть $\mathfrak{P}(\mathcal{C})'$-изолированной. Обратное не всегда верно, и мы будем говорить, что подгруппа Y *$\mathcal{C}$-дефектна* в группе X, если она $\mathfrak{P}(\mathcal{C})'$-изолирована в X, но не является $\mathcal{C}$-отделимой в этой группе.

Оказалось, что методы, подобные фильтрационному подходу, могут использоваться при исследовании отделимости конечно порожденных абелевых подгрупп свободных конструкций групп. Впервые данная идея была применена в [3, 4] для доказательства финитной отделимости всех циклических подгрупп обобщенного свободного произведения двух групп и HNN-расширения с одной проходной буквой. В [5, 6] указанный подход был адаптирован для изучения отделимости классом конечных p-групп и распространен на случай, когда не обязательно все подгруппы свободных множителей или базовой группы являются отделимыми. Наконец, в [7, 8] показано, как использовать тот же метод для доказательства финитной отделимости всех конечно порожденных абелевых подгрупп двух указанных выше конструкций. В настоящей работе перечисленные идеи объединяются с результатами из [2] для получения описания конечно порожденных абелевых подгрупп фундаментальной группы произвольного графа групп, отделимых наперед заданным корневым классом групп.

Пусть $\mathcal{C}$ — некоторый класс групп и (X, Y) — пара подгрупп группы $\mathfrak{G}$. Рассмотрим следующий набор условий:

$(\lambda^0_{\mathcal{C}})$ X — конечно порожденная абелева подгруппа некоторой группы G_v $(v \in \mathcal{V})$, $Y = 1$;

$(\mu^0_{\mathcal{C}})$ X — конечно порожденная абелева подгруппа некоторой группы $H_{\varepsilon e}$ $(e \in \mathcal{E},\ \varepsilon = \pm 1)$, Y — бесконечная циклическая подгруппа, $Y \cap G_{e(\varepsilon)} = 1$ и $[X, Y] = 1$;

$(\lambda^1_{\mathcal{C}})$ $= (\lambda^0_{\mathcal{C}})$ + подгруппа X $\mathfrak{P}(\mathcal{C})'$-изолирована в группе G_v, но $\bigcap_{N \in \mathcal{C}^*(\mathfrak{G})} X(N \cap G_v) \neq X$;

$(\mu^1_{\mathcal{C}})$ $= (\mu^0_{\mathcal{C}})$ + подгруппа X $\mathfrak{P}(\mathcal{C})'$-изолирована в группе $G_{e(\varepsilon)}$, но $\bigcap_{N \in \mathcal{C}^*(\mathfrak{G})} X(N \cap G_{e(\varepsilon)}) \neq X$;

$(\lambda^2_{\mathcal{C}})$ $= (\lambda^0_{\mathcal{C}})$ + подгруппа X $\mathcal{C}$-дефектна в группе G_v;

$(\mu^2_{\mathcal{C}})$ $= (\mu^0_{\mathcal{C}})$ + подгруппа X $\mathcal{C}$-дефектна в группе $G_{e(\varepsilon)}$.

Обозначим через $\mathfrak{D}^k_{\mathcal{C}}(\mathfrak{G})$ $(0 \leqslant k \leqslant 2)$ семейство всех пар подгрупп группы $\mathfrak{G}$, удовлетворяющих условию $(\lambda^k_{\mathcal{C}})$ или $(\mu^k_{\mathcal{C}})$, и положим $\mathfrak{A}^k_{\mathcal{C}}(\mathfrak{G}) = \{XY \mid (X, Y) \in \mathfrak{D}^k_{\mathcal{C}}(\mathfrak{G})\}$. *$\mathcal{C}$-дефектом группы* будем называть семейство всех ее $\mathcal{C}$-дефектных конечно порожденных абелевых подгрупп.

Если группа задана образующими и определяющими соотношениями, то $\mathfrak{P}(\mathcal{C})'$-изолированность ее подгруппы обычно проверяется проще, чем $\mathcal{C}$-отделимость. Поэтому для получения удобного в применении критерия $\mathcal{C}$-отделимости конечно порожденной абелевой подгруппы группы $\mathfrak{G}$ достаточно описать $\mathcal{C}$-дефект последней. В случае произвольного корневого аппроксимирующего класса $\mathcal{C}$ такое описание дает

Теорема 2. *Пусть $\mathcal{C}$ — корневой класс групп.*

I. *Подгруппа группы $\mathfrak{G}$ является конечно порожденной абелевой тогда и только тогда, когда она сопряжена с некоторой подгруппой из семейства $\mathfrak{A}^0_{\mathcal{C}}(\mathfrak{G})$.*

II. *Если выполняются условия* (i^1), (ii^1) *из формулировки теоремы* 1, *то $\mathcal{C}$-дефект группы $\mathfrak{G}$ состоит из подгрупп, сопряженных с подгруппами из семейства $\mathfrak{A}^1_{\mathcal{C}}(\mathfrak{G})$.*

III. *Пусть справедливо утверждение* $(*)$ *и выполняются условия* (i^2), (ii^2) *из формулировки теоремы* 1. *Тогда $\mathcal{C}$-дефект группы $\mathfrak{G}$ состоит из подгрупп, сопряженных с подгруппами из семейства $\mathfrak{A}^2_{\mathcal{C}}(\mathfrak{G})$. В частности, если каждая вершинная группа не имеет $\mathcal{C}$-дефекта, то тем же свойством обладает и группа $\mathfrak{G}$.*

Приведенная теорема утверждает, что если аппроксимируемость группы $\mathfrak{G}$ корневым классом $\mathcal{C}$ установлена путем проверки условий теоремы 1 (а в очень многих случаях именно так и происходит), то «бесплатным» дополнением к ней оказывается то или иное описание $\mathcal{C}$-дефекта данной группы. В некоторых случаях условия (i^1), (ii^1) или (i^2), (ii^2) равносильны

$\mathcal{C}$-аппроксимируемости группы $\mathfrak{G}$, и тогда критерий $\mathcal{C}$-отделимости конечно порожденной абелевой подгруппы этой группы вытекает из ее $\mathcal{C}$-аппроксимируемости вне зависимости от того, каким способом последняя была доказана. Например, имеет место

Теорема 3. *Пусть для любых $e \in \mathcal{E}$, $\varepsilon = \pm 1$ подгруппа $H_{\varepsilon e}$ лежит в центре группы $G_{e(\varepsilon)}$ и $G_{e(\varepsilon)} \neq H_{\varepsilon e}$. Если группа $\mathfrak{G}$ аппроксимируется корневым классом $\mathcal{C}$, то ее $\mathcal{C}$-дефект состоит из подгрупп, сопряженных с подгруппами из семейства $\mathfrak{A}^1_{\mathcal{C}}(\mathfrak{G})$.*

Отметим, что данная теорема не накладывает на граф групп практически никаких ограничений, кроме центральности реберных подгрупп. Однако, в ее формулировке фигурирует весьма сложно устроенное семейство $\mathfrak{A}^1_{\mathcal{C}}(\mathfrak{G})$. Приводимые далее теоремы 4 и 5 предъявляют к графу групп больше требований, но дают более простые в применении критерии отделимости, основанные на использовании семейства $\mathfrak{A}^2_{\mathcal{C}}(\mathfrak{G})$.

Пусть для любых $e \in \mathcal{E}$, $\varepsilon = \pm 1$ подгруппа $H_{\varepsilon e}$ лежит в центре группы $G_{e(\varepsilon)}$ и $G_{e(\varepsilon)} \neq H_{\varepsilon e}$. Будем говорить, что удовлетворяющий этим условиям граф групп $\mathcal{G}(\Gamma)$ имеет тип (1), если граф Γ является деревом, и тип (2), если для любой вершины $v \in \mathcal{V}$ подгруппа $H_v = \operatorname{sgp}\{H_{\varepsilon e} \mid e \in \mathcal{E},\ \varepsilon = \pm 1,\ v = e(\varepsilon)\}$ представляет собой прямое произведение порождающих ее подгрупп. Будем говорить также, что группа X *$\mathcal{C}$-регулярна* по своей подгруппе Y, если для любой подгруппы $M \in \mathcal{C}^*(Y)$ существует подгруппа $N \in \mathcal{C}^*(X)$, удовлетворяющая условию $N \cap Y = M$.

Теорема 4. *Пусть $\mathcal{C}$ — корневой класс групп, замкнутый относительно взятия фактор-групп, и выполняется хотя бы одно из следующих условий:*

1) $\mathcal{G}(\Gamma)$ — конечный граф групп типа (1) и для любых $e \in \mathcal{E}$, $\varepsilon = \pm 1$ группа $G_{e(\varepsilon)}$ $\mathcal{C}$-регулярна по подгруппе $H_{\varepsilon e}$;

2) $\mathcal{G}(\Gamma)$ — конечный граф групп типа (2) и для любой вершины $v \in \mathcal{V}$ группа G_v $\mathcal{C}$-регулярна по подгруппе H_v.

Если группа $\mathfrak{G}$ $\mathcal{C}$-аппроксимируема, то ее $\mathcal{C}$-дефект состоит из подгрупп, сопряженных с подгруппами из семейства $\mathfrak{A}^2_{\mathcal{C}}(\mathfrak{G})$.

Пусть $\mathcal{C}$ — произвольный класс групп. Будем говорить, что абелева группа *$\mathcal{C}$-ограничена*, если в любой ее фактор-группе каждая примарная компонента периодической части, соответствующая числу из множества $\mathfrak{P}(\mathcal{C})$, имеет конечный период и мощность, не превосходящую мощности некоторой $\mathcal{C}$-группы. Нильпотентную группу назовем *$\mathcal{C}$-ограниченной*, если она обладает хотя бы одним конечным центральным рядом с $\mathcal{C}$-ограниченными абелевыми факторами. Легко видеть, что если класс $\mathcal{C}$ является корневым, то ввиду его замкнутости относительно взятия расширений не существует целого числа, ограничивающего сверху порядки всех $\mathcal{C}$-групп, и потому любая конечно порожденная нильпотентная группа $\mathcal{C}$-ограничена.

Теорема 5. *Пусть $\mathcal{C}$ — корневой класс групп, состоящий из периодических групп, $\mathcal{G}(\Gamma)$ — конечный граф групп типа (1) или (2) и каждая группа G_v ($v \in \mathcal{V}$) является $\mathcal{C}$-ограниченной нильпотентной. Если группа $\mathfrak{G}$ $\mathcal{C}$-аппроксимируема, то она не имеет $\mathcal{C}$-дефекта.*

Отметим, что критерии $\mathcal{C}$-аппроксимируемости группы $\mathfrak{G}$, справедливые при выполнении условий теорем 4 и 5, получены в [9] и [10] соответственно.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Baumslag G. On the residual finiteness of generalized free products of nilpotent groups // Trans. Amer. Math. Soc. 1963. Vol. 106, № 2. P. 193–209.

2. Соколов Е. В. Об аппроксимируемости корневыми классами фундаментальных групп графов групп // Сиб. мат. журн. 2021. Т. 62, № 4. С. 878–893.

3. Kim G. Cyclic subgroup separability of generalized free products // Can. Math. Bull. 1993. Vol. 36, № 3. P. 296–302.

4. Kim G. Cyclic subgroup separability of HNN extensions // Bull. Korean Math. Soc. 1993. Vol. 30, № 2. P. 285–293.

5. Sokolov E. V. On the cyclic subgroup separability of free products of two groups with amalgamated subgroup // Lobachevskii J. Math. 2002. Vol. 11. P. 27–38.

6. Гайворонская М. Ю., Соколов Е. В. О финитной отделимости циклических подгрупп HNN-расширений групп // Вестн. Иван. гос. ун-та. Сер.: Естественные, общественные науки. 2010. Вып. 2. С. 90–97.

7. Zhou W., Kim G. Abelian subgroup separability of certain HNN extensions // Int. J. Algebra Comput. 2018. Vol. 28, № 3. P. 543–552.

8. Zhou W., Kim G. Abelian subgroup separability of certain generalized free products of groups // Algebra Colloq. 2020. Vol. 27, № 4. P. 651–660.

9. Соколов Е. В. Об аппроксимируемости корневыми классами фундаментальных групп некоторых графов групп с центральными реберными подгруппами // Сиб. мат. журн. 2021. Т. 62, № 6. С. 1382–1400.

10. Sokolov E. V. On the separability of subgroups of nilpotent groups by root classes of groups // J. Group Theory, 2023. DOI: 10.1515/jgth-2022-0021.

УДК 511.3

Арифметические суммы с простыми числами

В. Н. Чубариков (Россия, г. Москва)
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
e-mail: chubarik2020@mail.ru

Arithmetic sums with prime numbers

V. N. Chubarikov (Russia, Moscow)
Lomonosov Moscow State University
e-mail: chubarik2020@mail.ru

Настоящее сообщение посвящено асимптотическому распределению арифметических функций по модулю единица. Постановки подобных задач берут начало в исследованиях Кронекера по поведению дробных долей линейных форм с целыми переменными. Начальный период развития современной теории равномерного распределения значений функций связан с именами Боля (Bohl), Серпинского (Sierpinski), Вейля (Weyl), Бореля (Borel), Ф.Бернштейна (F.Bernstein), Харди (Hardy) и Литтлвуда (Littlewood). Само понятие **равномерного распределения по модулю единица** предложено в 1914 г. и в 1916 г. Г.Вейлем и ему принадлежат разные формы критерия равномерного распределения [1]. Он обратил внимание пользу анализа Фурье в данном им критерии.

В 1924 - 1928 г.г. И.М.Виноградов использовал анализ Фурье и конечные тригонометрические суммы для асимптотической оценки числа решений уравнения в проблеме Варинга. В

1934 г. он нашел новый мощный метод оценок тригонометрических сумм, который позволил существенно уточнить предыдущие результаты в проблеме Варинга [2]. Конечные тригонометрические суммы с многочленом в экспоненте стали называться **суммами Г.Вейля**. В дальнейшее развитие метода тригонометрических сумм внесли существенный вклад А.Г.Постников [3], Н.М.Коробов, А.А.Карацуба, Г.И.Архипов [4] и др.

Рассмотрим арифметическую сумму по простым числам вида

$$\sum_{p\le N} e^{2\pi i\frac{t}{p}};\quad \sum_{p\le N} B_s\left(\left\{\frac{t}{p}\right\}\right);$$

где p пробегает простые числа, $B_s(\{x\})$ — функция Бернулли с номером s от дробной части вещественного числа x.

Первые нетривиальные оценки тригонометрических сумм с простыми числами от значений многочленов и соответствующие фундаментальные постановки задач в теории простых чисел принадлежат И.М.Виноградову [5].

В основе оценок этих сумм по простым лежат оценки при некоторых $v\ge 1$ сумм, скрученных с многомерной функцией делителей числа, имеющих вид

$$\sum_{n\le N}\tau_k(n)e^{2\pi i\frac{t}{n}},\quad \sum_{n\le N}\tau_k(n)B_s\left(\left\{\frac{t}{n}\right\}\right),$$

где $\tau_k(n)$ — многомерная функция делителей числа n, обозначающая число решений уравнения $n_1\dots n_k=n$ в натуральных числах $n_1,\dots,n_k$.

Первым шагом здесь являются оценки кратных тригонометрических сумм с равноправными промежутками изменения переменных суммирования,

$$M_s<M_s'\le M_s, M_1\le M_s\le 2M_1, s=1,\dots,r,$$

т.е. сумм вида

$$\sum_{M_1<n_1\le M_1'}\cdots\sum_{M_r<n_r\le M_r'} e^{2\pi i\frac{t}{n_1\dots n_r}},\quad \sum_{M_1<n_1\le M_1'}\cdots\sum_{M_r<n_r\le M_r'} B_s\left(\left\{\frac{t}{n_1\dots n_r}\right\}\right).$$

Отметим, что полученные здесь результаты подобны теореме И.М.Виноградова для дзетовых сумм [5]-[7](см. также [8, 9]).

Здесь мы продолжаем наши исследования по кратным тригонометрическим суммам с простыми числами [11, 12].

1. Формулировка основных утверждений

Теорема 1. *Пусть $n\ge 25, r$ — натуральные числа,*

$$M_s\le M_s'<2M_s(1\le s\le r), 1\le M_1\le M_2,\dots,M_r\le cM_1, c\ge 1,$$

$$t=M_1^{n-\theta}, 0\le\theta\le 1,$$

$$S=\sum_{m_1=M_1}^{M_1'}\cdots\sum_{m_r=M_r}^{M_r'} e^{2\pi i F(m_1\dots m_r)}, F(x)=\frac{t}{x}.$$

Тогда найдётся положительная постоянная γ такая, что

$$S\ll M_1\dots M_r M_1^{-\rho}, \rho=\frac{\gamma}{m_0}, m_0=r\binom{n+r}{r+1}.$$

Теорема 2. *Пусть* $r, M_1, M_1', \dots, M_r, M_r',$ — *натуральные числа,*

$$M_s \le M_s' < 2M_s (1 \le s \le r), 1 \le M_1 \le M_2 \le \dots \le M_r,$$

и пусть при некотором $k, 1 \le k \le r$, *имеем*

$$t_k = \frac{t}{M_1 \dots M_{k-1}} = M_k^{n_k - \theta_k}, 0 \le \theta_k < 1,$$

$$S = \sum_{x_1 = M_1}^{M_1'} \dots \sum_{x_r = M_r}^{M_r'} e^{2\pi i F(x_1 \dots x_r)}, F(x) = \frac{t_k}{x}.$$

Тогда найдётся положительная постоянная γ_k *такая, что*

$$S(\mathbf{M}) \ll M_1 \dots M_r M_k^{-\rho_k}, \rho_k = \frac{\gamma_k}{m_0}, m_0 = m_0(n_k) = (r-k+1)\binom{n_k + r - k + 1}{r - k + 2}.$$

где $\mathbf{M} = (M_1, \dots, M_r)$.

Теорема 3. *Пусть* $n \ge 25, r$ — *натуральные числа,* $k \ne 0$ — *целое,*

$$M_s \le M_s' < 2M_s (1 \le s \le r), 1 \le M_1 \le M_2, \dots, M_r \le 2M_1,$$

$$t = M_1^{n-\theta}, 0 \le \theta \le 1,$$

$$T = \sum_{m_1 = M_1}^{M_1'} \dots \sum_{m_r = M_r}^{M_r'} B_s(t/(m_1 \dots m_r)).$$

Тогда найдётся положительная постоянная γ *такая, что*

$$T \ll M_1 \dots M_r M_1^{-\rho}, \rho = \frac{\gamma}{m_0}, m_0 = r\binom{n+r}{r+1}.$$

Сформулируем необходимые вспомогательные утверждения.

Пусть $J = J(P; n, k, r)$ обозначает число решений системы диофантовых уравнений вида

$$\sum_{j=1}^{2k} (-1)^j x_{1j}^{t_1} \dots x_{rj}^{t_r} = 0, \quad 0 \le t_1 + \dots + t_r \le n, \quad t_1, \dots, t_r \ge 0,$$

где каждое неизвестное x_{ij} принимает все целые значения от 1 до P, причём $P \to \infty$, а постоянные n, k, r являются натуральными числами. Очевидно, что

$$J = J(P; n, k, r) = \int \dots \int_{\Omega} |S(\Omega)|^{2k} \, d\Omega,$$

где

$$S(\Omega) = S(\Omega; P; n, k, r) = \sum_{x_1}^{P} \dots \sum_{x_r = 1}^{P} \exp\{2\pi i f(x_1, \dots, x_r)\},$$

причём

$$f(x_1, \dots, x_r) = \sum_{\substack{t_1 = 0 \\ t_1 + \dots t_r \le n}}^{n} \dots \sum_{t_r = 0}^{n} \alpha(t_1, \dots, t_r) x_1^{t_1} \dots x_r^{t_r},$$

символ Ω обозначает куб размерности $m = \binom{n+r}{r}$ следующего вида

$$0 \le \alpha(t_1, \dots, t_r) < 1, \quad 0 \le t_1, \dots, t_r, t_1 + \dots + t_r \le n.$$

Лемма. *Пусть $0 \le \tau$ — целое число, $k \ge m\tau, P \ge 1$. Тогда для величины $J = J(P; n, k, r)$ имеем оценку*

$$J \le D(\tau) P^{2rk - \Delta(\tau)},$$

где

$$\Delta(\tau) = r\binom{n+r}{r+1} - r\binom{n+r}{r+1}(1 - 1/n)^\tau, \quad D(\tau) = k^{2m\tau} 4^{mr^2 n\tau} (nr)^{2nr\Delta(\tau)}.$$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Вейль Г. ; в сб.: *Избранные труды*, 58–93. — М.: Наука, 1984.
2. Виноградов И.М. : *Избранные труды* . — М.: Изд-во АН СССР, 1952.
3. Постников А. Г. , *Избранные труды.* —М.:Наука, 2014.
4. Архипов Г. И., *Избранные труды.* — М.: Наука, 2013.
5. Виноградов И. М. Метод тригонометрических сумм в теории чисел. 2-е изд., исправленное и дополненное — М.: Физматлит. 1980, 144 с.
6. Виноградов И. М. Новая оценка функции $\zeta(1+it)$// Изв. АН СССР, сер.матем., 1958, **22,** *No*2, 161–164.
7. Виноградов И. М. К вопросу об оценке тригонометрических сумм// Изв. АН СССР, сер.матем., 1965, **29,** *No*3, 493–504.
8. Коробов Н. М. Оценки тригонометрических сумм и их приложения// Успехи матем.наук, 1958, **13,** *No*4, 185–192.
9. Walfisz A. Weylsche Exponentialsummen in der Neueren Zahlentheorie. — VEB Deutscher Verlag der WissenSchaften: Berlin. 1963, S. 231.
10. Архипов Г. И., Карацуба А. А., Чубариков В. Н. Теория кратных тригонометрических сумм. — М.: Наука. Гл. ред.физ.-мат. лит. 1987, 368 с.
11. Чубариков В. Н. Кратные тригонометрические суммы с простыми числами// Докл. АН СССР, 1984, **278,** *No*2, 302–304.
12. Чубариков В. Н. Оценки кратных тригонометрических сумм с простыми числами// Изв. АН СССР, сер.матем., 1985, **49,** *No*5, 1031–1067.

———————————————————————————

Секция 1. Группы

УДК 511.32

Многообразия представлений одного HNN расширения бесконечной циклической группы

А. Н. Адмиралова (Беларусь, г. Минск)
Белорусский государственный университет
e-mail: al.admiralova@gmail.com
В. В. Беняш-Кривец (Беларусь, г. Минск)
Белорусский государственный университет
e-mail: benyashvv@gmail.com

Representation varieties of an HNN extension of an infinite cyclic group

A. N. Admiralova (Belarus, Minsk)
Belarusian State University
e-mail: al.admiralova@gmail.com
V. V. Beniash-Kryvets (Belarus, Minsk)
Belarusian State University
e-mail: benyashvv@gmail.com

Пусть $G = \langle g_1, \ldots, g_m \rangle$ — конечно порожденная группа, K — алгебраически замкнутое поле нулевой характеристики. Тогда любое линейное представление $\rho : G \to GL_n(K)$ однозначно определяется набором элементов $\rho(g_1), \ldots, \rho(g_m)$. Эти элементы удовлетворяют всем определяющим соотношениям группы G и, таким образом, имеет место вложение $\rho \mapsto (\rho(g_1), \ldots, \rho(g_m))$ множества $\hom(G, GL_n(K))$ в $GL_n(K)^m$. Образ $\hom(G, GL_n(K))$ относительно этого вложения является аффинным K-многообразием $R_n(G) \subset GL_n(K)^m$, и это многообразие называют многообразием n-мерных представлений группы G ([1]).

О структуре многообразий $R_n(G)$ в общем случае известно немного. Однако для некоторых классов групп такие описания получены. В статьях [2] и [3] описаны многообразия представлений фундаментальных групп компактных ориентируемых и неориентируемых поверхностей. В работе [4] исследованы многообразия представлений групп Баумслага-Солитера для взаимно простых p и q, в [5] результаты работы [4] расширены на случай не взаимно простых показателей p и q. В статье [6] описаны структура и свойства многообразий представлений групп, имеющих копредставление

$$H = \langle x_1, y_1, \ldots, x_g, y_g, t \mid t([x_1, y_1] \ldots [x_g, y_g])^p t^{-1} = ([x_1, y_1] \ldots [x_g, y_g])^q \rangle,$$

где $g \geqslant 2$, а p и q взаимно просты. В статье [7] исследованы многообразия представлений двух классов групп. Первый класс состоит из групп с копредставлением

$$G = \langle a_1, \ldots, a_s, b_1, \ldots, b_k, x_1, \ldots, x_g \mid \\ a_1^{m_1} = \ldots = a_s^{m_s} = x_1^2 \ldots x_g^2 W(a_1, \ldots, a_s, b_1, \ldots, b_k) = 1 \rangle,$$

где $g \geqslant 3$, $m_i \geqslant 2$ для $i = 1, \ldots, s$ и $W(a_1, \ldots, a_s, b_1, \ldots, b_k)$ — элемент в нормальной форме в свободном произведении циклических групп $H = \langle a_1 \mid a_1^{m_1} \rangle * \ldots * \langle a_s \mid a_s^{m_s} \rangle * \langle b_1 \rangle * \ldots * \langle b_k \rangle$.

Второй класс состоит из групп с копредставлением

$$G(p,q) = \langle a_1, \dots, a_s, b_1, \dots, b_k, x_1, \dots, x_g, t \mid a_1^{m_1} = \dots = a_s^{m_s} = 1,\ tU^p t^{-1} = U^q \rangle,$$

где p и q — целые числа, такие, что $p > |q| \geq 1$, $(p,q) = 1$, $m_i \geqslant 2$ для $i = 1, \dots, s$, $g \geqslant 3$, $U = x_1^2 \dots x_g^2 W(a_1, \dots, a_s, b_1, \dots, b_k)$ и $W(a_1, \dots, a_s, b_1, \dots, b_k)$ — элемент, определенный выше. Найдены неприводимые компоненты многообразий представлений $R_n(G)$ и $R_n(G(p,q))$, вычислены их размерности и доказано, что каждая неприводимая компонента является рациональным многообразием.

В предлагаемом сообщении мы рассматриваем следующую группу

$$G = \langle a, b \mid aba^{-1} = b^{-1} \rangle.$$

Описание многообразий представлений этой группы — первый шаг к описанию многообразий представлений групп Баумслага-Солитера вида $\langle a, b \mid ab^m a^{-1} = b^{-m} \rangle$.

Для формулировки основных результатов нам понадобятся следующие обозначения. Для любых двух целых чисел s и t таких, что $0 \leq s \leq \frac{n}{2}$, $0 \leq t \leq n - 2s$, обозначим через $\varphi_{s,t}$ морфизм

$$\varphi_{s,t} : K^s \times K^{n-2s} \times GL_2(K)^s \times GL_n(K) \to GL_n(K) \times GL_n(K),$$

переводящий точку $(a_1, \dots, a_s, b_1, \dots, b_{n-2s}, Z_1, \dots, Z_s, A)$ в точку (X, Y), где $a_i, b_i \in K^*$, $Z_i \in GL_2(K)$, $A \in GL_n(K)$ и

$$X = Adiag(a_1, -a_1, \dots, a_s, -a_s, b_1, \dots, b_{n-2s})A^{-1},$$

$$\begin{aligned} Y = A\mathrm{diag}(&Z_1 \mathrm{diag}(a_1, -a_1) Z_1^{-1}, \dots, Z_s \mathrm{diag}(a_s, -a_s) Z_s^{-1}, \\ &-b_1, \dots, -b_t, b_{t+1}, \dots, b_{n-2s})A^{-1}. \end{aligned}$$

Обозначим также через $V_{s,t}$ замыкание $\overline{\mathrm{Im}\varphi_{s,t}}$ в топологии Зарисского. Справедливы следующие теоремы.

Теорема 1. *Каждая неприводимая компонента многообразия представлений $R_n(G)$ бирегулярно изоморфна некоторому многообразию $V_{s,t}$.*

Теорема 2. *Для размерностей неприводимых компонент справедлива формула* $\dim V_{s,t} = n^2 + s$. *Число неприводимых компонент многообразия представлений $R_n(G)$ равно $(n+2)^2/4$, если n — четно, и $(n+1)(n+3)/4$, если n — нечетно.*

Теорема 3. *Все неприводимые компоненты $V_{s,t}$ многообразия представлений $R_n(G)$ являются $\mathbb{Q}$-рациональными многообразиями.*

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Lubotzky A., Magid A. Varieties of representations of finitely generated groups // Memoirs AMS. 1985. V. 58, № 336. P. 1-116.

2. Benyash-Krivetz V.V., Rapinchuk A.S., Chernousov V.I. Representation varieties of the fundamental groups of compact orientable surfaces // Israel J. Math. 1996. V. 93. P. 29-71.

3. Беняш-Кривец В.В., Черноусов В.И. Многообразия представлений фундаментальных групп компактных неориентируемых поверхностей // Матем. сборник. 1997. Том 188, № 7. С. 47-92.

4. Беняш-Кривец В.В., Говорушко И.О. Многообразия представлений и характеров групп Баумслага-Солитера. // Алгебра, геометрия и теория чисел. Сборник статей. К 75-летию со дня рождения академика Владимира Петровича Платонова. Труды МИАН. 2016. Том 292. МАИК, М. С. 26-42.

5. Беняш-Кривец В.В., Говорушко И.О. Многообразия представлений групп Баумслага-Солитера в случае не взаимно простых показателей // Весці НАН Беларуси. Сер. фiз.-мат. навук. 2016. № 1. С. 52-56.

6. Адмиралова А. Н., Беняш-Кривец В. В. О многообразиях представлений и характеров одного класса групп с одним соотношением. // Вестник БГУ, сер. 1. 2016. № 3. С. 166-172.

7. А.Н. Адмиралова, В.В. Беняш-Кривец. О многообразиях представлений некоторых свободных произведений циклических групп с одним соотношением // Чебышевский сборник. 2020. Том 21, № 1. С. 62-81.

УДК 512.54

О проблеме вхождения в свободных конструкциях групп

В. Н. Безверхний (Россия, г. Москва)
Российская таможенная академия
e-mail: vnbezv@rambler.ru
Н. Б. Безверхняя (Россия, г. Москва)
Московский технический университет связи и информатики
e-mail: vnbezv@rambler.ru

On the problem of occurrence in free constructions of groups

V. N. Bezverkhnii (Russia, Moscow)
Russian Customs Academy
e-mail: vnbezv@rambler.ru
N. B. Bezverhnyaya (Russia, Moscow)
Moscow Technical University of Communications and Informatics
e-mail: vnbezv@rambler.ru

Определение 1. *Будем говорить, что в группе G разрешима проблема вхождения, если существует алгоритм, позволяющий для любой конечнопорожденной подгруппы $H < G$ и любого элемента $w \in G$ установить принадлежит ли элемент w подгруппе H или нет.*

Из разрешимости проблемы вхождения в группе G следует разрешимость проблема равенства слов.

Из результата П. С. Новикова [1], [2] «Об алгоритмической неразрешимости проблемы тождества в теории групп» следует, что проблема вхождения в классе конечноопределенных групп алгоритмически неразрешима.

Определение 2. *Будем говорить, что группа G обладает свойством Хаусона, если пересечение конечнопорожденных подгрупп $H_i < G$, $i = \overline{1,2}$, есть конечнопорожденная подгруппа.*

Определение 3. *Будем говорить, что в группе G разрешима проблема пересечения конечнопорожденных подгрупп, если существует алгоритм, позволяющий для любых двух конечнопорожденных подгрупп $H_1,\ H_2$ выписать образующие их пересечения $H_1 \cap\ H_2$.*

Определение 4. *В группе G разрешима проблема пересечения смежных классов конечнопорожденных подгрупп, если существует алгоритм, позволяющий для любых двух подгрупп $H_1,\ H_2$ группы G и любого элемента $w \in G$ установить: пусто или не пусто пересечение $wH_1 \cap\ H_2$.*

Теорема 1. *[3]. Пусть в группах G_1 и G_2 разрешима проблема вхождения, тогда в группе $G = G_1 * G_2$, являющейся свободным произведением групп G_1 и G_2 разрешима проблема вхождения.*

Теорема 2. *[4]. Пусть группы G_1 и G_2 обладают свойством Хаусона и в них разрешимы:*

1. *проблема вхождения;*
2. *проблема пересечения подгрупп;*
3. *проблема пересечения смежных классов конечнопорожденных подгрупп*

тогда в свободном произведении $G = G_1 * G_2$ разрешима проблема пересечения подгрупп.

Теорема 3. *[3], [4], [5] Пусть $G = \langle G_1 * G_2; relG_i,\ \phi(U_1) = U_2 \rangle$, где $U_1 < G_1,\ U_2 < G_2$. U_1, U_2 - изоморфные подгруппы, $U_i,\ i = \overline{1,2},$ обладает свойством максимальности, тогда*

1. *если в $G_i,\ i = \overline{1,2}$, разрешима проблема вхождения;*
2. *разрешима проблема пересечения любой конечнопорожденной подгруппы $H_i < G_i,\ \ i = \overline{1,2}$ с подгруппой $U_i,\ i = \overline{1,2};$;*
3. *разрешима проблема пересечения смежного класса подгруппы $H < G_i,\ \ i = \overline{1,2}$ с подгруппой $U_i,\ i = \overline{1,2}$*

тогда в группе G разрешима проблема вхождения.

Условия максимальности, налагаемое на объединяемые подгруппы является существенным. [8]

Теорема 4. *[9]. Пусть $G^* = \left\langle G,\ t; relG,\ \ t^{-1}U_1 t = \phi(U_1) \right\rangle$, HNN-расширение группы G с помощью изоморфных ассоциированных подгрупп $U_1,\ U_2$ и конструктивного изоморфизма ϕ.*

Тогда если

1. *в G разрешима проблема вхождения;*
2. *ассоциированные подгруппы обладают свойством максимальности;*
3. *в G разрешима проблема пересечения любой конечнопорожденной подгруппы H с подгруппой $U_i,\ i = \overline{1,2}$.*
4. *в G разрешима проблема пересечения смежного класса конечнопорожденных подгрупп с подгруппой $U_i,\ i = \overline{1,2};$*

тогда в группе G^* разрешима проблема вхождения.

Теорема 5. *[9], [10] Пусть группа* $G = \langle \prod_{i=1}^{n} *G_i; relG_1,\ relG_2,\ \ \phi_{ij}(U_{ij}) = U_{ji} \rangle$ *– древесное произведение групп* $G_i,\ 1 \leqslant i \leqslant n$, *объединенных по изоморфным подгруппам* $U_{ij} < G_i, U_{ji} < G_j$ *с помощью фиксированного набора конструктивных изоморфизмов* $\{\phi_{ij}\},\ \phi_{ij}(U_{ij}) = U_{ji}$.

Тогда если подгруппы U_{ij} *и* $U_{ji},\ i \in I_1,\ j \in I_2$ *обладают условием максимальности и в сомножителях* $G_i,\ 1 \leqslant i \leqslant n$ *разрешимы:*

1. *проблема вхождения;*
2. *проблема пересечения в каждом сомножителе любой конечнопорожденной подгруппы* $H < G_i$ *с подгруппами* U_{ij}*;*
3. *проблема пересечения смежного класса любой конечнопорожденной подгруппы* $H < G_i$ *с подгруппами* U_{ij}*,*

то в группе разрешима проблема вхождения.

Пусть $S = \{G_1,\ G_2,\ \ldots, G_n,\ \ldots\}$ множество групп. Образуем множество групп Т, замкнутое относительно применения к ним основных свободных конструкций, а именно:

1. если $G_{\alpha_1} \in T,\ G_{\alpha_2} \in T$, то группа $G_{\alpha_1} *\ G_{\alpha_2} \in T$;
2. если $G_{\alpha_1},\ G_{\alpha_2} \in T$, то группа G= $G_{\alpha_1} *_C\ G_{\alpha_2} \in T$, где G – свободное произведение групп $G_{\alpha_1},\ G_{\alpha_2}$, объединенных по изоморфным циклическим группам;
3. если $G_\alpha \in T$, то $G^* = \left\langle G_\alpha,\ t;; relG_\alpha,\ \ t^{-1}U_\alpha t = V_?\right\rangle \in T$, где G^* — HNN-расширение группы $G_?$, с помощью изоморфных циклических подгрупп.

Теорема 6. *Если в каждой из групп* $G_i \in S$ *разрешимы проблемы:*

1. *вхождения;*
2. *пересечения любой конечнопорожденной подгруппы* $H < G_i$ *с любой циклической подгруппой;*
3. *пересечения смежного класса любой конечнопорожденной подгруппы* $H < G_i$ *с любой циклической подгруппой;*

то в любой группе $G_\alpha \in T$ *разрешима проблема вхождения.*

Данный результат непосредственно следует из вышеуказанных теорем и следующей леммы.

Лемма 1. *В группах* G_α, G_β *и разрешимы проблемы 1)-3)*

Тогда в группах $G = G_\alpha * G_\beta,\ G = G_\alpha *_C\ G_\beta$, *где C- циклическая подгруппа,* $G^* = \left\langle G_\alpha * G_\beta,\ t; relG_\alpha, relG_\beta,\ \ t^{-1}U_\alpha t = \phi(U_\beta)\right\rangle$, *где* $U_\alpha \in G_\alpha,\ U_\beta \in G_\beta$. $U_\alpha,\ U_\beta$*- изоморфные циклические подгруппы,* ϕ *– конструктивный изоморфизм, разрешимы проблемы 1)-3).*

Из основной теоремы получаем

Следствие. В древесном произведении групп $G_i \in S$ в каждой из которых разрешимы проблемы 1)-3) с циклическим объединением разрешима проблема вхождения.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. П.С. Новиков. Об алгоритмической неразрешимости проблемы тождества. //Докл. АН СССР, Т. 85, С. 709-719.

2. П.С. Новиков. Об алгоритмической неразрешимости проблемы тождества в теории групп. //Труды МИАН СССР, Т.44, С. 3-143.

3. К.Л. Михайлова. Проблема вхождения для свободных произведений групп. // Мат. сб. №75, С. 199-210.

4. В.Н. Безверхний, Э.В. Роллов. О подгруппах свободного произведения групп. // Совр. алгебра, Т.6, вып. 1, Л, 1974, С. 16-31.

5. В.Н. Безверхний. Решение проблемы вхождения в некоторых классах групп. //Вопросы теории групп и гомологической алгебры. Ярославль. 1991, С. 122-142.

6. В.Н. Безверхний. Решение проблемы вхождения для одного класса групп. // Вопросы теории групп и полугрупп. Тул. гос. пед. ин-т 1972, С. 3-86.

7. В.Н. Безверхний. Решение проблем вхождения в некотором классе групп // Вопросы теории групп и гомологической алгебры. Ярославль. 1990 С. 49–53.

8. В.Н. Безверхний. Неразрешимость проблемы вхождения в группах Артина конечного типа. // Сиб. мат. журнал Т. XVI, №5, 1985, С. 21-42.

9. В.Н. Безверхний. Решение проблемы вхождения в классе HNN- групп. // алгоритмические проблемы теории групп и полугрупп и их применение, Тула, 1981, С. 26-61.

10. В.Н. Безверхний. Решение вхождения в некоторых классах групп с одним определяющим соотношением // Алгоритмические проблемы теории групп и полугрупп. Тула. 1986. С. 3–25.

11. В.Н. Безверхний, В.А. Гринблат Проблема вхождения в группах Артина конечного типа. // Сиб. мат. журнал Т. XIII, №6, 1982, С. 19-28.

12. В.Н. Безверхний. О неразрешимости проблемы вхождения для некоторого класса групп. // Научные труды кафедры высшей математики, Тула, изд-во Тульского ПИ, 1974, С. 17-21.

УДК 512.54

Решение проблемы степенной сопряженности слов и проблемы степени в группах с малым сокращением

В. Н. Безверхний (Россия, г. Москва)
Российская таможенная академия
e-mail: vnbezv@rambler.ru
Н. Б. Безверхняя (Россия, г. Москва)
Московский технический университет связи и информатики
e-mail: vnbezv@rambler.ru

Solving the problem of power conjugacy of words and degree problems in groups with small reduction

V. N. Bezverkhnii (Russia, Moscow)
Russian Customs Academy
e-mail: vnbezv@rambler.ru
N. B. Bezverhnyaya (Russia, Moscow)
Moscow University of Technical Communications and Informatics
e-mail: vnbezv@rambler.ru

Группы с малым сокращением были определены Р. Линдоном [1], решившим в данном классе групп проблему равенства слов.

К данному классу групп относятся группы $C\,(4)\,\&T\,(4)$, $C\,(6)\,\&T\,(3)$, $C\,(3)\,\&T\,(6)$, которые будем обозначать как группы с условием $C\,(p)\,\&T\,(q)$ [1].

П. Шупп решил в данных классах групп проблему сопряженности слов. [1].

При решении проблемы равенства слов Р. Линдон использует полученный им метод диаграмм. [1]. Для решения проблемы сопряженности слов П. Шуппом были введены кольцевые диаграммы. [1].

В. Н. Безверхним [2]. было определено понятие специального сокращения слов для групп с условием $C\,(p)\,\&T\,(q)$. Данное понятие позволило значительно упростить решение проблем равенства и сопряженности слов в классах групп $C\,(p)\,\&T\,(q)$, а также позволило описать структуру диаграмм, соответствующих равенству слов и кольцевые диаграммы. Также позволило решить проблему обобщённой сопряженности слов и доказать, что централизатор конечнопорожденной подгруппы $H < G$, где G есть подгруппа с условием $C\,(p)\,\&T\,(q)$, конечно порожден и некоторые другие проблемы.

Определение 1. *Будем говорить, что в группе G разрешима проблема степенной сопряженности слов, если существует алгоритм, позволяющий для любых двух слов $v,\ w \in G$ установить, существует ли $z \in G$ и $k,\ m \in \mathbb{Z}$ удовлетворяющие уравнению*

$$z^{-1} w^k z = v^m. \tag{1}$$

Определение 2. *Будем говорить, что в группе G разрешима проблема степени, если существует алгоритм, позволяющий для любых двух слов $v,\ w \in G$ установить, существует ли $k,\ m \in \mathbb{Z}$ удовлетворяющие уравнению*

$$w^k = v^m. \tag{2}$$

Предварительно рассмотрим основные виды сокращения слов в классах групп $C\,(p)\,\&T\,(q)$.

Пусть группа G имеет следующее копредставление

$$G = \langle a_1, a_2, \ldots, a_n;\ r_1, r_2, \ldots, r_m \rangle$$

где множество $\mathcal{R} = \{r_1, r_2, \ldots, r_m\}$ - является симметризованным и обладает свойством $C\,(p)\,\&T\,(q)$.

Из теории ван Кампена следует, что если слово $w \in G$ равно единице в группе G и $w \neq 1$ в свободной группе, то существует связная, односвязная, ограниченная диаграмма M над $\mathcal{R}$, такая что метка каждой области $D \in M$ есть некоторое определяющее соотношение $r_j \in \mathcal{R}$, а метка граничного цикла ∂M есть слово w.

В случае, когда слова $v,\ w$ сопряжены в G так как было указано выше, существует кольцевая диаграмма M над $\mathcal{R}$ с граничными метками $\phi(\gamma) = w,\ \phi(\delta) = v$, где $\gamma,\ \delta$ граничные циклы M.

Через $d(D)$ обозначим число ребер области D, через $i(D)$число внутренних ребер области D.

Пусть группа G удовлетворяет условию $C\,(4)\,\&T\,(4)$.

Определение 3. *Граничную область $D \in M$ назовем деновской, если $i(D) \in \{0,1\}$, причем $\partial D \cap \partial M$ есть правильная последовательная часть ∂M. [1]*

Определение 4. *Удаление $\partial D \cap \partial M$ назовем $\mathcal{R}$- сокращением диаграммы M и, соответственно, $\mathcal{R}$- сокращением слова w.*

Определение 5. [2]. *Поддиаграмма $\Pi = \bigcup_{i=1}^{m} D_i$ диаграммы M над группой с условием $C\,(4)\,\&T\,(4)$ называется специальной полосой, если она удовлетворяет следующим условиям:*

1. *Множество $\partial\Pi \cap \partial M$ является правильной последовательной частью ∂M;*
2. *Множество $\partial D_j \cap \partial M$, $1 \leqslant j \leqslant m$, связно и является правильной последовательной частью ∂M;*
3. $i\,(D_1) = i\,(D_m) = 2; i(D_2) = i(D_3) = \ldots = i(D_{n-1}) = 3$
4. $\partial D_j \cap \partial D_{j+1} = e_j$ *– ребро,* $1 \leqslant j < m$;
5. $\partial D_j \cap \partial D_i = \emptyset$, *при* $|i - j| > 1$.

Определение 6. [2]. *Удаление пути $\partial\Pi \cap \partial M$ называется специальным $\mathcal{R}$- сокращением и обозначается $\mathcal{R}^*$.*

Пусть слово w записано по границе окружности, тогда $\mathcal{R}$ и $\mathcal{R}^*$- сокращения циклического слова w назовем циклическим $\mathcal{R}$ и $\mathcal{R}^*$- сокращением.

Обозначим через $\|w\|$ - число кусков в записи слова w.

Если среди граничных областей D_j, $1 \leqslant j \leqslant m$ диаграммы M с $\partial M = \gamma, \phi(\gamma) = w$ содержится область D_j с $i\,(D_j) = 2$ и для любой другой области $D_i, i \neq j$, $i\,(D_i) = 3$, $\partial D_i \cap \partial D_{i+1} = e_i$, $1 \leqslant i < m$, $\partial D_1 \cap \partial D_m = e_m$, то удалив границу $\gamma = \partial M$ получим диаграмму $M', \partial M' = \gamma'$ и $||\phi(\gamma')|| < \|\phi\,(\gamma)\|$. Данное преобразование назовем циклическим сокращением w и обозначим $\mathcal{R}_c$

Лемма 1. *Пусть v, $w \in G$, где G группа с условием $C\,(p)\,\&T\,(q)$, причем слова v и w $\mathcal{R}$ и $\mathcal{R}^*$- несократимы, и $v = w$ в группе G, тогда $\|w\| = \|v\|$.*

Лемма 2. *Пусть v, $w \in G$, где G группа с условием $C\,(p)\,\&T\,(q)$, причем слова v и w $\mathcal{R}_c$, $\mathcal{R}$ и $\mathcal{R}^*$- несократимы, и пусть $v^n = w^M$, тогда $m = n$.*

Лемма 3. *Пусть v, $w \in G$, где G группа с условием $C\,(p)\,\&T\,(q)$, причем слова v и w $\mathcal{R}_c$, $\mathcal{R}$ и $\mathcal{R}^*$- несократимы, и пусть v, w удовлетворяют соотношениям: $\|w\| = \|v\|$ и $z^{-1}w^m\,z = v^n$, где $z \in G$ и n, $m \in \mathbb{Z}$, тогда $m = n$.*

Если $\|w\| \neq \|v\|$, то этот случай сводится к рассмотренному выше.

Таким образом, решение уравнения (1) сводится к решению уравнения вида

$$z^{-1}w^n\,z = v^n \tag{3}$$

Теорема 1. *Существует алгоритм, позволяющий для любых слов v, $w \in G$, где группа G удовлетворяет условию $C\,(4)\,\&T\,(4)$, установить сопряжены ли некоторые степени этих слов в G.*

Теорема 2. *В группах с условием $C\,(4)\,\&T\,(4)$ разрешима проблема степени.*

Пусть группа G удовлетворяет условию $C\,(6)\,\&T\,(3)$.

Определение 7. *Граничную область $D \in M$ назовем деновской, если $i(D) \in \{0,1,2\}$, причем $\partial D \cap \partial M$ есть правильная часть ∂M.*

Определение 8. [2]. *Поддиаграмма $\Pi = \bigcup_{i=1}^{m} D_i$ диаграммы M над группой с условием $C\,(6)\,\&T\,(3)$ называется специальной полосой, если она удовлетворяет следующим условиям:*

1. *Множество $\partial\Pi \cap \partial M$ является правильной последовательной частью ∂M;*
2. *Множество $\partial D_j \cap \partial M$, $1 \leqslant j \leqslant m$, связно и является правильной последовательной частью ∂M;*
3. $i\,(D_1) = i\,(D_m) = 3i(D_2) = i(D_3) = i(D_{m-1}) = 4$;
4. $\partial D_j \cap \partial D_{j+1} = e_j$ *– ребро,* $1 \leqslant j < m$;
5. $\partial D_j \cap \partial D_i = \emptyset$, *при* $|i-j| > 1$.

Сокращения $\mathcal{R}_c$, $\mathcal{R}$ и $\mathcal{R}^*$ и циклические $\mathcal{R}_c$, $\mathcal{R}$ и $\mathcal{R}^*$ сокращения определяются аналогично группам с условием $C\,(4)\,\&T\,(4)$.

Используя указанные выше типы сокращений и леммы 1-3 можно доказать следующие теоремы.

Теорема 3. *В группах G с условием $C\,(6)\,\&T\,(3)$ разрешима проблема степенной сопряженности слов.*

Теорема 4. *В группах с условием $C\,(6)\,\&T\,(3)$ разрешима проблема степени.*

Пусть группа G удовлетворяет условию $C\,(3)\,\&T\,(6)$.

Определение 9. *Граничную область $D \in M$ назовем деновской, если $i(D) \in \{0,1\}$, причем $\partial D \cap \partial M$ есть правильная последовательная часть ∂M.*

Определение 10. [2]. *Поддиаграмма $\Pi = \bigcup_{i=1}^{m} D_i$ диаграммы M над группой с условием $C\,(3)\,\&T\,(6)$ называется специальной полосой, если она удовлетворяет следующим условиям:*

1. *Множество $\partial\Pi \cap \partial M$ является правильной последовательной частью ∂M;*
2. *Множество $\partial D_j \cap \partial M$, $1 \leqslant j \leqslant m$, связно и является правильной последовательной частью ∂M;*
3. $\partial D_j \cap \partial D_{j+1} = e_j$ *– ребро,* $1 \leqslant j < m$;
4. *при* $n = 3$, $i\,(D_1) = i\,(D_2) = i\,(D_3) = 2$
5. *при* $n > 3$, *и,* $n = 2k+1$, $i\,(D_1) = i\,(D_2) = i\,(D_{k-1}) = i\,(D_k) = 2$, $i\,(D_3) = i\,(D_5) = \cdots = i\,(D_{k-2}) = 3$, $(D_4) = i\,(D_6) = \cdots = i\,(D_{k-3}) = 2$;
6. $\partial D_j \cap \partial D_i = \emptyset$, *при* $|i-j| > 1$.

Специальной полосе соответствует специальное сокращение граничного цикла ∂M и, соответственно, $\mathcal{R}^*$- сокращение слов $w \in G$.

Заметим, что меткой любого ребра диаграммы над $\mathcal{R}$, удовлетворяющей условию $C(3)\,\&T(6)$ является образующий группы G [3].

Сокращения $\mathcal{R}_c$, $\mathcal{R}$ и $\mathcal{R}^*$ и циклические $\mathcal{R}_c$, $\mathcal{R}$ и $\mathcal{R}^*$ сокращения определяются аналогично группам с условием $C(4)\,\&T(4)$.

Пусть $D_1, D_2, \ldots, D_M$ - граничные области диаграммы M с $\partial M = \gamma$, где $\phi(\gamma) = w$. Пусть $\partial D_1 \cap \partial D_2 = e_1, \ldots, \partial D_1 \cap \partial D_m = e_m \;\; i(D_1) = \; i(D_2) = 2, \;\; i(D_3) = \; i(D_5) = \cdots = i(D_m) = 3, \;\; i(D_4) = \; i(D_6) = \cdots = i(D_{m-1}) = 2$

тогда удаление границы γ назовем R_c-сокращением диаграммы M, и, соответственно R_c - сокращением слова w.

Выполним $\mathcal{R}_c$ сокращение слова w, сопрягая слово w элементом $?\,(e_m)$, где $e_m = \; \partial D_1 \cap \partial D_M$.

Теорема 5. *В группах G с условием $C(3)\,\&T(6)$ разрешима проблема степенной сопряженности слов.*

Теорема 6. *В группах с условием $C(3)\,\&T(6)$ разрешима проблема степени.*

Таким образом из вышеизложенного следует

Теорема 7. *В группах с условием $C(p)\,\&T(q)$ разрешимы проблемы степенной сопряженности слов и проблемы степени.*

Теоремы 3 и 4 могут быть применены к решению проблем степенной сопряженности и степени в группах Кокстера и Артина большого типа.

Группой Артина называется группа, заданная конечным множеством образующих σ_1, $\sigma_2, \ldots, \sigma_n$ и конечной системой определяющих соотношений, $\langle \sigma_i \sigma_j \rangle^{m_{ij}} = \langle \sigma_j \sigma_i \rangle^{m_{ji}}$, где $\langle \sigma_i \sigma_j \rangle = \sigma_i \sigma_j \sigma_i \sigma_j \ldots$. слово из чередующихся образующих σ_i, σ_j длины m_{ij}; m_{ij} - число матрицы Кокстера $M = (m_{ij})$ соответствующей данной группе $m_{ij} \in \{2, \; 3, \ldots, \; n, \; \ldots\}$ причем $\forall i, \; m_{ii} = 1$

Таким образом копредставление группы Артина имеет следующий вид:

$$G = \left\langle \sigma_1, \; \sigma_2, \ldots, \sigma_n; \langle \sigma_i \sigma_j \rangle^{m_{ij}} = \langle \sigma_j \sigma_i \rangle^{m_{ji}}, \; i, j \in \overline{1, n} \; \right\rangle$$

Каждой группе Артина соответствует группа Кокстера, имеющая копредставление

$$G = \left\langle \sigma_1, \; \sigma_2, \ldots, \sigma_n; \langle \sigma_i \sigma_j \rangle^{m_{ij}} = \langle \sigma_j \sigma_i \rangle^{m_{ji}}, ?_i{}^2 = 1, \;\; i, j \in \overline{1, n} \; \right\rangle$$

Группа Артина (Кокстера) называется группой большого (экстрабольшого) типа если $m_{ij} \geqslant 3, \;\; (m_{ij} > 3)$.

Теорема 8. *В группах Кокстера большого (экстрабольшого) типа разрешимы проблемы степенной сопряженности слов и проблемы степени.*

Теорема 9. *В группах Артина большого (экстрабольшого) типа разрешимы проблемы степенной сопряженности слов и проблемы степени.*

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Р. Линдон, П. Шупп. Комбинаторная теория групп // М. Мир, 1980.

2. В. Н. Безверхний О нормализаторах элементов в $C(p)\,\&T(q)$ группах/ Алгоритмические проблемы теории групп и полугрупп // Тула, 1994, С.4-58.

3. S. M. Gersten, H. Short Small cancellation theory and automatic groups // Invent. Math.1990, Vol. 102, P. 305-334.
4. В. Н. Безверхний Решение проблемы обобщенной сопряженности слов в $C(p)\,\&T(q)$ группах /Извест. Тульского гос. университета, сер. «Математика» // Тула, 1998, С. 5-13.
5. В. Н. Безверхний Решение проблемы сопряженности слов в группах Артина и Кокстера большого типа/ Алгоритмические проблемы теории групп и полугрупп // Тула, 1986, С. 24-61.
6. В. Н. Безверхний Решение проблемы обобщенной сопряженности слов в группах Артина большого типа // Фундаментальная и прикладная математика, 1999, Т.5, №1, С. 1-38.
7. V.N. Bezverkhnii, N. B. Bezverkhnyaya Solution of the problem of equality and conjugacy of word in certain class of Artin groups // Journal of Mathematical Science, 2021. Vol. 257. P. 751-764

———————————————————————————

УДК 519.4

Решение проблемы сопряженности подгрупп в древесном произведении свободных групп с циклическим объединением

В. Н. Безверхний (Россия, г. Москва)
Российская таможенная академия
e-mail: vnbezv@rambler.ru
Е. С. Логачева (Россия, г. Тула)
Центр образования № 38
e-mail: Logacheva-es@mail.ru

The problem of conjugacy subgroups in a tree product of free groups with cyclic amalgamation

V. N. Bezverkhniy (Russia, Moscow)
Russian Customs Academy
e-mail: vnbezv@rambler.ru
E. S. Logacheva (Russia, Tula)
Education Center № 38
e-mail: Logacheva-es@mail.ru

Проблема сопряженности подгрупп в конечно определенных группах является обобщением проблемы сопряженности слов.

П.С. Новиков доказал, что в классе конечно определенных групп проблема сопряженности слов решена. [1] Проблема сопряженности подгрупп в классе конечно определенных групп также алгоритмически разрешима. Поэтому возникает интерес выделения класса групп, в которых данная проблема разрешима.

В.Н. Ремесленников в 19967 году доказал, что в свободных группах проблема сопряженности подгрупп алгоритмически разрешима. [2]

В 1970 году В.Н. Безверхним было получено положительное решение данной проблемы в группах торического узла. [3] В свободном произведении групп было доказано, что данная проблема имеет положительное решение, если в сомножителях разрешима проблема вхождения и сопряженности подгрупп. [4]

В. Н. Безверхний доказал, что в группе G, являющейся свободным произведением конечнопорожденных свободных групп с циклическим объединением, разрешима проблема сопряженности подгрупп [5], а также им был построен пример свободного произведения двух свободных групп с объединением по изоморфным подгруппам ранга четыре, в которой проблема сопряженности подгрупп алгоритмически неразрешима. [6]

В древесном произведении бесконечных циклических групп с объединением Е.С. Логачевой было доказано положительное решение рассматриваемой проблемы. [7]

Основной целью нашей работы является исследование проблемы сопряженности подгрупп в древесном произведении свободных групп с циклическим объединением.

Определим основные понятия, которые будем использовать.

Определение 1. *В группе G разрешима проблема вхождения, если существует алгоритм, позволяющий для любой конечнопорожденной подгруппы $H < G$ и любого элемента $w \in G$, установить принадлежит ли w подгруппе H.*

Определение 2. *Будем говорить, что в группе G разрешима проблема пересечения любых двух конечнопорожденных подгрупп H_1 и H_2, если существует алгоритм, позволяющий выписать образующие их пересечения.*

Определение 3. *В группе G разрешима проблема персечения смежных классов конечнопорожденных подгрупп, если существует алгоритм, позволяющий для любых конечнопорожденных подгрупп H_1 и H_2 из G и любого элемента $w \in G$ установить, пусто или не пусто пересечение $wH_1 \cap H_2$.*

Определение 4. *Будем говорить, что в группе G разрешима проблема сопряженности подгрупп, если существует алгоритм позволяющий для любых конечнопорожденных подгрупп H_1 и H_2 ответить сопряжены ли они в G, то есть существует ли элемент $z \in G$, такой что $z^{-1}H_1z = H_2$.*

Пусть
$$G_\Gamma = \langle \prod\nolimits_{i=1}^{n} * F_i; u_{ij}^{p_{ij}} = v_{ji}^{q_{ji}} \rangle - \tag{1}$$
древесное произведение свободных групп $F_i, i = \overline{1,n}$, с циклическим объединением, где $u_{ij} \in F_i$, $v_{ji} \in F_j$.

В группе G_Γ разрешима проблема вхождения [8]; Γ - дерево-граф соответствующий группе G_Γ. Пусть v_n - конечная вершина графа Γ и F_n - свободная группа соответствующая v_n , и v_{n-1} - вершина Γ, соединенная с v_n ребром $(v_{n-1}; v_n)$, F_{n-1} соответствует вершине v_{n-1} и пусть $u_{n,n-1}^{p_{n,n-1}} = v_{n-1,n}^{q_{n-1,n}}$, где $u_{n-1} \in F_{n-1}$,$v_n \in F_n$. Обозначим через Γ' - граф, полученный из Γ удалением вершины v_n. $G_{\Gamma'}$ - группа, соответствующая графу Γ'. Тогда имеем
$$G_\Gamma = \langle G_{\Gamma'} * F_n; u_{n,n-1}^{p_{n,n-1}} = v_{n-1,n}^{q_{n-1,n}} \rangle. \tag{2}$$

Лемма 1. *[9] В группе G_Γ алгоритмически разрешима проблема пересечения любой циклической подгруппы F_i группы G_Γ.*

Лемма 2. *[9] В группе G_Γ алгоритмически разрешима проблема пересечения смежных классов любой циклической подгруппы H, $H < G_\Gamma$.*

Важным понятием, используемым при решении проблемы сопряженности подгрупп в группе G_Γ, является понятие специального множества слов, определенное Безверхним В.Н. в [10].

В статье [8] доказана:

Теорема 1. [8] *Пусть* $G = \langle \prod_i * G_i; relG_i, \phi_{ij}(U_{ij}) = U_{ji}\rangle$, *где* $U_{ij} < G_i$, $U_{ji} < G_j$, ϕ_{ij} *- изоморфизм подгрупп* U_{ij}, U_{ji}, *есть древесное произведение групп* $G_i, i = \overline{1,n}$ *с объединением по циклическим подгруппам* $U_{ij}, U_{ji}, i \in I_1, j \in I_2$. *Тогда если:*

1) объединяемые подгруппы U_{ij}, U_{ji} *обладают свойством максимальности;*

2) в сомножителях $G_i, i = \overline{1,n}$, *разрешима проблема вхождения;*

3) в каждом сомножителе $G_i, i = \overline{1,n}$, *разрешима проблема пересечения смежных классов любой конечнопорожденной подгруппы* $H, H < G_i$ *с подгруппой* U_{ij}*;*

4) в $G_i, i = \overline{1,n}$, *разрешима проблема пересечения любой конечнопорожденной подгруппы* $H, H < G_i$ *с подгруппой* U_{ij}.

Тогда в группе G *разрешима проблема вхождения и существует алгоритм, преобразующий систему образующих подгруппы* H *в специальное множество, порожденное* H.

Пусть образующие подгруппы H являются специальными образующими, тогда она имеет следующее представление: $H = gp(M_0, S)$, где $\langle M_0\rangle$ - свободная группа, S - порождено подгруппами:

$$(M_1) \leq (M_2) \leq ... \leq (M_k),$$

где $(M_i) = g_i C_i g_i^{-1}$, C_i - подгруппа, содержащаяся в одном из сомножителей $G_i, i = \overline{1,n}$, группы G.

Подгруппу H, порожденную специальным множеством будем обозначать $H = gp(M_0, S)$.

Лемма 3. *Пусть подгруппа* H *порождена различными специальными множествами:* $H = gp(M_0, S)$, $H = gp(M_0', S')$, *где*

$$S : (M_1) \leq (M_2) \leq ... \leq (M_{k_1}),$$

$$S' : (M_1') \leq (M_2') \leq ... \leq (M_{k_2}').$$

Тогда для любой подгруппы (M_i) *существует подгруппа* (M_j') *и слово* $w_{ij} \in H$ *такие, что* $w_{ij}(M_i)w_{ij}^{-1} = (M_j')$.

Используя данные предыдущей леммы, получаем

Лемма 4. *Пусть подгруппы* H_1 *и* H_2 *сопряжены в* G *, то есть существует* $z \in G$, *что* $z^{-1}H_1z = H_2$, *и пусть* H_1 *имеет представление* $H_1 = gp(M_0, S_1)$, $S_1 : (M_1) \leq (M_2) \leq ... \leq (M_{k_1})$*;* H_2 *имеет представление* $H_2 = gp(M_0', S_1')$, $S_1' : (M_1') \leq (M_2') \leq ... \leq (M_{k_2}')$. *Тогда существуют* i, j *и слово* $w \in H_2$, *такие что* $w_{-1}z^{-1}(M_i)zw = (M_j')$.

Теорема 2. *Пусть в любой группе* G_1, *являющейся древесным произведением свободных групп* $F_i, 1 \leq i \leq m$, *где* $m < n$, *с циклическим объединением, разрешима проблема сопряженности подгрупп. Тогда в группе* G_Γ, G_Γ *- древесное произведение свободных групп* F_j, $1 \leq j \leq n$, *с циклическим объединением, разрешима проблема сопряженности подгрупп.*

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Новиков П. С. Неразрешимость проблемы сопряженности в теории групп. — Из. АНССЗ. сер. мат. Т.18, 1954 с. 485-524

2. Ремесленников В. Н. Сопряженность подгрупп в нильпотентных группах. // Алгебра и логика, 1967, Т.6 №2. С.61-76.

3. Безверхний В. Н. Проблема сопряженности подгрупп для групп торического узла. // Ученые записки математических кафедр ТГПИ. Тула, 1970. с.168-185.

4. Безверхний В. Н. Решение проблемы сопряженности подгрупп свободного произведения групп. // Материалы XI Всесоюзного алгебраического коллоквиума. Тезисы доклада. Кишинев, 1971. с. 21-22.

5. Безверхний В. Н. Решение проблемы сопряженности подгрупп для свободного одного класса групп. // Современная алгебра. 1977. Вып. 6. с. 16-33.

6. Безверхний В. Н. Неразрешимость проблемы сопряженности подгрупп для свободного произведения групп с объединением. // Научные труды кафедры высшей математики. Тула, Изд.ТулПИ, 1975. с. 90-94

7. Логачева Е. С. Проблема сопряженности подгрупп в свободном произведении бесконечных циклических групп. // Известия Тул. гос. университета. Естественные науки, 2013. В. 2, Ч.1. с.19-39.

8. Безверхний В. Н. Решение проблемы вхождения в некоторых классах групп с одним определяющим соотношением. // Алгоритмические основы теории групп и полугрупп. Тула, 1986. с. 3-25.

9. Безверхний В. Н., Логачева Е. С. Проблема сопряженности слов в древесном произведении свободных групп с циклическим объединением.// Дискретная математика, 2016. Т. 28, Вып. 1. с. 3-18.

10. Безверхний В. Н. Решение проблемы вхождения для одного класса групп. // Вопросы теории групп и полугрупп. Тула, Изд. ТГПИ, 1972. с.3-86.

———————————————————

УДК 512.54

О некотором классе гиперболических групп HNN-расширений двупорожденных свободных групп

Н. Б. Безверхняя (Россия, г. Москва)
Московский технический университет связи и информатики
e-mail: vnbezv@rambler.ru

On a certain class of hyperbolic groups of HNN extensions of two-generated free groups

N. B. Bezverhnyaya (Russia, Moscow)
Moscow University of Technical Communications and Informatics
e-mail: vnbezv@rambler.ru

Вопрос об описании гиперболических групп в классе групп с одним определяющим соотношение является весьма важным, так как гиперболические группы обладают рядом ценных алгоритмических и комбинаторных свойств, которые несправедливы в классе конечно представленных групп в общем. Например, в гиперболических группах разрешимы проблемы равенства и сопряженности слов. Геометрическое доказательство этих факторов дал М. Громов, а алгебраическое И. Г. Лысенок. В классе гиперболических групп без кручения З. Селом решена проблема изоморфизма. Р.И. Григорчук и Г. Ф. Курчанов дали описание решений квадратичных уравнений в гиперболических группах. А.Ю. Ольшанский доказал, что все неэлементарные гиперболические группы являются SQ-универсальными.

Пусть $G = \langle A; R \rangle$ – конечноопределенная группа со множеством образующих A и множеством определяющих соотношений R. Слово $w \in F(A)$, где $F(A)$-свободная группа, равно единице в G тогда и только тогда, когда

$$w = \sum_{i=1}^{n} S_i^{\epsilon_i} R_i^{\epsilon} S_i^{-\epsilon_i} \qquad (1)$$

в свободной группе $F(A)$, где $S_i \in F(A), \epsilon_i,\ \epsilon \in \{\pm 1\},\ R_i \in R$ и $i \in \{1,\ 2,\ \ldots,\ n\}$.

Через $L(w)$ обозначим наименьшее целое n для которого слово w представимо в виде (1). Конечноопределенную группу G назовем гиперболической [1], если $L(w)$ ограничена сверху линейной функцией $c|w|$, зависящей от длины слова w и константы c.

Рассмотрим группу $G^* = \langle a,\ b,\ t;\ t^{-1}at = v,\ t^{-1}bt = w \rangle$, являющуюся HNN-расширением свободной группы $F = \langle a,\ b \rangle$. $v = v(a,b),\ w = w(a,b)$, причем слова $v,\ w$ удовлетворяют условию: $v,\ w$ - циклически несократимы и

в произведениях $v^{\epsilon}w^{\delta}, w^{\delta}v^{\epsilon}, \epsilon, \delta \in \{\pm 1\}$ нет сокращений. (*)

Теорема 1. *Пусть $F = \langle a,\ b \rangle$ свободная группа, пусть слова $v,\ w$ удовлетворяют условию (*), тогда если слова $v,\ w$ имеют вид 1)-5)*

1. $v = u^k,\ w = w(a,\ b) -$ *произвольное слово от образующих $a,\ b$ удовлетворяющее условию (*);*
2. $v = (xy)^k x,\quad w = (yx)^p y$, *то есть* $vw = (xy)^{k+p+1} = u^s$*;*
3. $v = (xy)^k x,\quad w = (yx)^l v^p (xy)^l$*;*
4. $v = xy,\quad w = yv^p x$*;*
5. $v = (xy)^k,\quad w = (yx)^p$*;*

то группа $G^* = \langle a,\ b,\ t;;\ t^{-1}at = v,\ t^{-1}bt = w \rangle$ не является гиперболической, в остальных случаях группа G^* является гиперболической.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. M. Gromov. Hyperbolic groups// Essays in group theory ed. S.M. Gertsen M.S.P.I. Publ. 8. Springer. 1987. P. 75-263.
2. I. Kapovich. A non-quasiconvex subgroup of a hyperbolic groups with an exotic limit set// New York J. Math. 1994/95. P 184-195.
3. Н. Б. Безверхняя. Гиперболичность некоторых 2-порожденных групп с одним определяющим соотношением. Дискр. Матем. Москва, 2002 г., т. 14, №3, С. 54-70.
4. Н. Б. Безверхняя. Описание гиперболических и негиперболических групп, являющихся некоторыми HNN-расширениями свободных групп. Чебышевский сборник, Т3, Вып. 1, 2002, С.17-31.

УДК 512.541

Изоморфизмы неразложимых p-локальных групп без кручения

С. В. Вершина (Россия, г. Москва)
Московский педагогический государственный университет
e-mail: svetlanavershina@gmail.com

Isomorphisms of indecomposable torsion-free p-local groups

S. V. Vershina (Russia, Moscow)
Moscow Pedagogical State University
e-mail: svetlanavershina@gmail.com

Локальные абелевы группы без кручения A и B определяются с точностью до изоморфизма p-адическими матрицами $A_W = (\alpha\ \beta)$ и $B_W = (p\alpha\ \beta)$ относительно некоторых максимальных линейно независимых систем W в данных группах. В [1] (см. также [2], Предложение 1.1 или [3], Предложение 25.7) показано, что если множество $\{\alpha, \beta\}$ алгебраически независимо над полем рациональных чисел $\mathbb{Q}$, то неразложимые p-локальные группы без кручения A и B квазиизоморфны, но не изоморфны.

Абелева группа без кручения называется *жесткой*, если её эндоморфизмы являются умножениями на рациональные числа. Жесткие группы являются сильно неразложимыми группами.

Предложение 1. *Если p-локальная группа без кручения A (или B) является жёсткой, то группы A и B квазиизоморфны, но не изоморфны.*

С использованием леммы 1.2.3 из [4] доказана следующая теорема:

Теорема 1. *Существуют изоморфные неразложимые p-локальные группы без кручения A и B с p–адическими матрицами $A_W = (\alpha\ \alpha^2)$ и $B_W = (p^2\alpha\ \alpha^2)$, где p-адическое число α является корнем минимального полинома 3-ей степени над $\mathbb{Q}$.*

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Arnold D. M. A duality for torsion-free modules of finite rank over a discrete valuation ring // Proc. London Math. Soc. 1972, 24, No. 3, 204–216.

2. Arnold D. M., Dugas M. Co-purely indecomposable modules over discrete valuation rings // Journal of Pure and Applied Algebra. 2001, Volume 161, Issues 1–2, pp. 1-12.

3. Крылов П. А., Туганбаев А. А. Модули над областями дискретного нормирования. — Москва: Факториал Пресс, 2007. 384 с.

4. Ершов Ю. Л. Кратно нормированные поля. — Новосибирск: Научная книга, 2000. 340 с.

УДК 512.542

О характеризации инъекторов в конечной группе[1]

Е. Д. Волкова (Беларусь, г. Витебск)
Витебский государственный университет им. П. М. Машерова
e-mail: ekaterina.lancetova@gmail.com

On the characterization of injectors in a finite group

E. D. Volkova (Belarus, Vitebsk)
Masherov Vitebsk State University
e-mail: ekaterina.lancetova@gmail.com

В работе все рассматриваемые группы конечны. В определениях и обозначениях следуем [1]. *Классом групп* называют всякую совокупность групп, содержащую вместе с каждой своей группой G и все группы, изоморфные G. Класс групп $\mathfrak{F}$ называется *классом Фиттинга*, если $\mathfrak{F}$ замкнут относительно взятия нормальных подгрупп и произведений нормальных $\mathfrak{F}$-подгрупп. Если $\mathfrak{F}$ — непустой класс Фиттинга, то в любой группе G существует наибольшая нормальная $\mathfrak{F}$-подгруппа, которую называют *$\mathfrak{F}$-радикалом* G и обозначают $G_{\mathfrak{F}}$. Подгруппу V группы G называют *$\mathfrak{F}$-инъектором*, если $V \cap N$ является максимальной из подгрупп G, принадлежащих $\mathfrak{F}$, для любой субнормальной подгруппы N группы G.

Основополагающим результатом в теории классов Фиттинга разрешимых групп является теорема Гашюца, Фишера и Хартли [2], которая обобщает классические теоремы Силова и Холла и состоит в следующем: *для любого класса Фиттинга $\mathfrak{F}$ в каждой группе G существуют $\mathfrak{F}$-инъекторы и любые два из них сопряжены в G.* Развитие теоремы Гашюца-Фишера-Хартли осуществлялось в двух направлениях. Во-первых, ослабление условия разрешимости, во-вторых, описание структуры инъекторов и их характеризация. Решению первой задачи были посвящены работы Л. А. Шеметкова [3], В. Го и Н. Т. Воробьева [4].

Во многих случаях определяющим в решении указанных задач является локальный метод изучения разрешимых групп посредством радикалов и классов Фиттинга, который впервые был предложен Б. Хартли [5]. В серии работ А. Н. Скибы [6, 7] был предложен оригинальный метод исследования групп и их классов при помощи наличия у них σ-свойств, который был дуализирован для локальных классов Фиттинга в [8] и состоит в следующем.

Пусть $\mathbb{P}$ — множество всех простых чисел, $\pi \subseteq \mathbb{P}$ и $\pi' = \mathbb{P} \setminus \pi$. Символом $\pi(n)$ обозначим множество всех простых делителей числа n, $\pi(G) = \pi(|G|)$ — множество всех простых делителей группы G. Пусть σ — некоторое разбиение $\mathbb{P}$, т.е. $\sigma = \{\sigma_i : i \in I\}$, $\mathbb{P} = \cup_{i \in I} \sigma_i$ и $\sigma_i \cup \sigma_j = \emptyset$ для всех $i \neq j$; $\sigma(n) = \{\sigma_i : \sigma_i \cap \pi(n) \neq \emptyset\}$ и $\sigma(G) = \sigma(|G|)$.

Напомним, что *произведением* $\mathfrak{F}\mathfrak{H}$ *классов групп* $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ называют класс групп $(G : \exists N \trianglelefteq G$, $N \in \mathfrak{F}$ и $G/N \in \mathfrak{H})$; *произведением* $\mathfrak{F} \diamond \mathfrak{H}$ *классов Фиттинга* $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ называют класс групп $(G : G/G_{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{H})$. Хорошо известно, что если $\mathfrak{H}$ замкнут относительно взятия гомоморфных образов, то $\mathfrak{F}\mathfrak{H} = \mathfrak{F} \diamond \mathfrak{H}$ (см. [1, стр. 566]). Более того, произведение двух любых классов Фиттинга является классом Фиттинга и операция умножения классов Фиттинга ассоциативна [1, теорема IX.1.12(a), (c)].

Всякое отображение вида $h : \sigma \to \{$ классы Фиттинга$\}$ называется *σ-функцией Хартли* или просто *H_σ-функцией* [8]. Если h — H_σ-функция, то символом $Supp(h)$ обозначают носитель h, т.е. множество всех $\sigma_i \in \sigma$ таких, что $h(\sigma_i) \neq \emptyset$.

Пусть $\Pi = Supp(h)$ и $LH_\sigma(h) = \cap_{\sigma_i \in \Pi} h(\sigma_i)\mathfrak{E}_{\sigma_i'}\mathfrak{E}_{\sigma_i}$ для всех $\sigma_i \in \Pi$, где $\mathfrak{E}_{\sigma_i}$ и $\mathfrak{E}_{\sigma_i'}$ — классы всех σ_i-групп и всех σ_i'-групп соответственно.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Государственной программы научных исследований Республики Беларусь "Конвергенция-2025"и при поддержке гранта Министерства образования Республики Беларусь

Определение 1. Класс Фиттинга $\mathfrak{H}$ назовем *σ-классом Хартли*, если $\mathfrak{H} = LH_\sigma(h)$ для некоторой H_σ-функции h. В частности, если $\sigma = \sigma^1 = \{\{2\},\{3\},\{5\},\dots\}$, то $\mathfrak{H}$ называют *классом Хартли* [4].

Пусть $\mathfrak{H} = LH_\sigma(h)$ и $\Pi = Supp(h)$. Тогда H_σ-функцию h назовем:
(1) *приведенной*, если $h(\sigma_i) \subseteq \mathfrak{H}$ для всех $\sigma_i \in \Pi$;
(2) *устойчивой*, если $h(\sigma_i) \subseteq h(\sigma_j)\mathfrak{E}_{\sigma_j'}$ для всех $i \neq j$ и $\sigma_i, \sigma_j \in \Pi$;
(3) *постоянной*, если $h(\sigma_i) = h(\sigma_j)$ для всех $\sigma_i, \sigma_j \in \Pi$.

Лемма 1. *Каждый σ-класс Хартли $\mathfrak{H}$ определяется устойчивой приведенной H_σ-функцией.*

Пусть G — группа и h — H_σ-функция с носителем Π. Подгруппу $G_h = \prod_{\sigma_i \in \Pi} G_{h(\sigma_i)}$ назовем *h_σ-радикалом G*.

Напомним, что группу G называют:

1) Π-*группой*, если для любого $\Pi \subseteq \sigma$ верно включение $\pi(G) \subseteq \Pi$;

2) *σ-примарной*, если G является σ_i-группой для некоторого $\sigma_i \in \sigma$;

3) *σ-нильпотентной* или *σ-разложимой* если $G = G_1 \times G_2 \times \dots \times G_n$ для некоторых σ-примарных групп $G_1, G_2, \dots, G_n$;

4) *σ-разрешимой*, если каждый главный фактор G σ-примарен.

Символом $\mathfrak{N}_\Pi$ будем обозначать класс всех Π-разложимых групп, т.е. класс всех σ-нильпотентных Π-групп.

Если $\mathfrak{F}$ — непустой класс Фиттинга, то группу G называют *$\mathfrak{F}$-скованной*, если $C_G(G_\mathfrak{F}) \leq G_\mathfrak{F}$. В частности, если $\mathfrak{F} = \mathfrak{N}_\Pi$ и $C_G(G_{\mathfrak{N}_\Pi}) \leq G_{\mathfrak{N}_\Pi}$, группу G назовем Π-*скованной*.

Лемма 2. *Пусть $\mathfrak{H} = LH_\sigma(h)$ — σ-класс Хартли для некоторой устойчивой приведенной H_σ-функции h, $\Pi = Supp(h)$. Если G такая группа, что фактор G/G_h Π-скован и $G_\mathfrak{H} \leq V$, то $V \in \mathfrak{H}$ в том и только том случае, если фактор $V/G_h \in \mathfrak{N}_\Pi$.*

Лемма 3. *Пусть $\mathfrak{H} = LH_\sigma(h)$ — σ-класс Хартли для некоторой устойчивой приведенной H_σ-функции h и $\Pi = Supp(h)$. Если фактор G/G_h Π-скован и V/G_h — $\mathfrak{N}_\Pi$-инъектор G/G_h, то V — $\mathfrak{H}$-инъектор G.*

Лемма 4. *Пусть $\Pi \subseteq \sigma$, $\mathfrak{N}_\Pi$ — класс Π-разложимых групп и группа G Π-скована. Тогда в любой группе G существуют $\mathfrak{N}_\Pi$-инъекторы и любые два из них сопряжены.*

Представляет интерес задача существования и сопряженности $\mathfrak{H}$-инъекторов для σ-класса Хартли в Π-скованных группах. Ее решение представляет следующая

Теорема 1. *Пусть $\mathfrak{X}$ — непустой класс Фиттинга, h — H_σ-функция такая, что $h(\sigma_i) = \mathfrak{X}$ для любого $\sigma_i \in \Pi = Supp(h)$ и G — группа. Если $\mathfrak{H} = LH_\sigma(h)$ и фактор $G/G_\mathfrak{X}$ Π-скован, то справедливы следующие утверждения:*

1) подгруппа V группы G является $\mathfrak{F}$-инъектором G в точности тогда, когда $V/G_\mathfrak{X}$ — $\mathfrak{N}_\Pi$-инъектор $G/G_\mathfrak{X}$;

2) в G существуют $\mathfrak{H}$-инъекторы и любые два из них сопряжены.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Doerk K., Hawkes E. Finite soluble groups. — Berlin ; New York : Walter de Gruyter, 1992. 891 p.

2. Fischer B. Injectoren endlicher auflösbarer Gruppen / B. Fischer, W. Gaschütz, B. Hartley // Math. Z. 1967. Vol. 102. P. 337-339.

3. Шеметков Л. А. Некоторые свойства инъекторов в конечных группах // Изв. Гомельск. гос. ун-та им. Ф. Скорины. Вопросы алгебры. 1999. № 1 (15). С. 5–13.

4. Guo W. On Injectors of Finite Soluble groups / W. Guo, N. T. Vorob'ev // Comm. in Algebra. 2008. Vol. 36. P. 3200–3208.

5. Hartley B. On Fischer's dualization of formation theory // Proc. London Math. Soc. 1969. Vol. 3, № 2. P. 193–207.

6. Skiba A. N. On σ-properties of Finite groups I // Problems of Physics, Mathematics and Technics. 2014. № 4 (21). P. 89–96.

7. Skiba A. N. On σ-properties of Finite groups II // Problems of Physics, Mathematics and Technics. 2015. № 3 (24). P. 70–83.

8. Guo W. On σ-local Fitting classes / W. Guo, L. Zhang, N. T. Vorob'ev // J. Algebra. 2020. Vol. 542, № 15. P. 116–129.

УДК 512.542

О проблеме существования и сопряженности инъекторов в конечной группе[1]

Н. Т. Воробьев (Беларусь, г. Витебск)
Витебский государственный университет им. П. М. Машерова
e-mail: ntvorobyov@mail.ru

On existence and conjugance problem of injectors in a finite group

N. T. Vorob'ev (Belarus, Vitebsk)
Masherov Vitebsk State University
e-mail: ntvorobyov@mail.ru

Основополагающим результатом в теории конечных групп является теорема Силова о том, что в любой группе существуют силовские p-подгруппы и любые две из них сопряжены. Развитию силовской теории в универсуме всех конечных разрешимых групп была посвящена работа Гашюца, Фишера и Хартли [1], в которой было найдено оригинальное обобщение теорем Силова (в разрешимых группах) и Холла в терминах классов Фиттинга. Напомним, что класс групп $\mathfrak{F}$ называют классом Фиттинга, если $\mathfrak{F}$ замкнут относительно взятия нормальных подгрупп и произведений нормальных $\mathfrak{F}$-подгрупп. При этом подгруппу V группы G называют $\mathfrak{F}$-инъектором G, если $V \cap N$ является максимальной из подгрупп G принадлежащих $\mathfrak{F}$ для любой субнормальной подгруппы N группы G. В [1] было доказано, что для любого класса Фиттинга $\mathfrak{F}$ в любой конечной разрешимой группе G существуют $\mathfrak{F}$-инъекторы и любые два из них сопряжены. Понятно, что из указанной теоремы как следствия мы получаем теоремы Холла и Силова, если $\mathfrak{F}$ — класс всех разрешимых π-групп и $\mathfrak{F}$ — класс всех разрешимых p-групп соответственно.

Дальнейшие исследования в этом направлении обуславливают два следующих вопроса:

[1]Исследование выполнено в рамках Государственной программы научных исследований Республики Беларусь «Конвергенция—2025» (№ государственной регистрации 20210495).

(1) верно ли, что если класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ состоит из конечных разрешимых групп, то в любой конечной разрешимой группе G существуют $\mathfrak{F}$-инъекторы? (см. [2], вопрос 11.117)
(2) в случае существования $\mathfrak{F}$-инъекторов в конечной группе G (в общем случае неразрешимой) каковы классы Фиттинга, для которых любые два $\mathfrak{F}$-инъектора сопряжены в G?

Решение вопроса (1) нами получено для случая конечных обобщенно нильпотентных групп, решение вопроса (2), если класс Фиттинга является классом Хартли [3] произвольных конечных групп. Для этой цели мы используем σ-метод исследования групп и их классов, предложенный А.Н. Скибой (см., например, [4, 5]), который состоит в следующем. Пусть σ — некоторое разбиение множества всех простых чисел $\mathbb{P}$, т. е. $\sigma = \{\sigma_i \mid i \in I\}$, $\mathbb{P} = \bigcup_{i\in I} \sigma_i$ и $\sigma_i \cap \sigma_j = \varnothing$ для всех $i \neq j$; $\sigma(n) = \{\sigma_i \mid \sigma_i \cap \pi(n) \neq \varnothing\}$ и $\sigma(G) = \sigma(|G|)$, где $\pi(n)$ — множество всех простых делителей числа n. Группу G называют σ-примарной, если G является σ_i-группой для некоторого $\sigma_i \in \sigma$; σ-нильпотентной, если $G = G_1 \times G_2 \times \ldots \times G_n$ для некоторых σ-примарных групп $G_1, G_2, \ldots, G_n$; σ-разрешимой, если каждый главный фактор G σ-примарен. Очевидно, что в случае разбиения $\sigma = \{\{2\}, \{3\}, \{5\}, \ldots\}$ σ-нильпотентная и σ-разрешимая группы являются нильпотентной и разрешимой соответственно.

Всякое отображение $h : \sigma \to \{$непустые классы Фиттинга$\}$ назовем σ-функцией Хартли или просто H_σ-функцией [6]. Напомним, что произведением $\mathfrak{F}\mathfrak{H}$ называется класс групп $(G \mid G/G_{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{H})$, где $G_{\mathfrak{F}}$ — наибольшая нормальная $\mathfrak{F}$-подгруппа группы G. Класс Фиттинга $\mathfrak{H}$ назовем σ-классом Хартли, если $\mathfrak{H} = \bigcap_{\sigma_i\in\sigma} h(\sigma_i)\mathfrak{E}_{\sigma_i'}\mathfrak{E}_{\sigma_i}$, где $\sigma_i' = \mathbb{P}\setminus\sigma$, $\mathfrak{E}_{\sigma_i'}$ и $\mathfrak{E}_{\sigma_i}$ — классы всех σ_i'-групп и σ_i-групп соответственно. Пусть $\mathfrak{N}_\sigma$ — класс всех конечных σ-нильпотентных групп и $F_\sigma(G)$ — наибольшая нормальная σ-нильпотентная подгруппа группы G. Группу G назовем $\mathfrak{N}_\sigma$-скованной или просто σ-скованной, если $C_G(F_\sigma(G)) \leqslant F_\sigma(G)$. Если h — H_σ-функция, то подгруппу $G_h = \prod_{\sigma_i\in\sigma} h(\sigma_i)$ назовем h_σ-радикалом группы G.

Доказана следующая

Теорема 1. *Справедливы следующие утверждения*:

1) *в любой конечной группе существуют σ-нильпотентные инъекторы*;

2) *если $\mathfrak{H}$ — σ-класс Хартли и группа G такова, что фактор G/G_h σ-скован (в частности, фактор G/G_h σ-разрешим), то в G существуют $\mathfrak{H}$-инъекторы и любые два из них сопряжены.*

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Fischer B., Gaschütz W., Hartley B. Injectoren endlicher auflösbarer Gruppen // Math. Z. 1967. Bd. 102. S. 337–339.

2. Коуровская тетрадь. Нерешенные вопросы теории групп. – 18-е изд., доп., включающее Архив решенных задач / Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН ; сост.: В.Д. Мазуров, Е.И. Хухро. – Новосибирск : изд-во Института математики им. С.Л. Соболева СО РАН, 2014. 253 с.

3. Hartley B. On Fischer's dualization of formation theory // Proc. London Math, Soc. 1969. Vol. s3-19, no. 2. P. 193-207.

4. Skiba A. N. On σ-properties of finite groups I // Problems of Physics, Mathematics and Technics. 2014. No. 4 (21). P. 89–96.

5. Skiba A. N. A generalization of a Hall theorem // J. Algebra Appl. 2016. Vol. 15, no. 5. P. 1650085 (13 pages).

6. Guo W., Zhang Li, Vorob'ev N. T. On σ-local Fitting classes // J. Algebra. 2020. Vol. 542, no 1. P. 116–129.

———————————————————————————————————

УДК 512.542

Индуктивные решетки σ-локальных классов Фиттинга[1]

Н. Н. Воробьев (Беларусь, г. Витебск)
Витебский государственный университет им. П. М. Машерова
e-mail: vornic2001@mail.ru
И. И. Стаселько (Беларусь, г. Витебск)
Витебский государственный университет им. П. М. Машерова
e-mail: mars17906@mail.ru

Inductive lattices of σ-local Fitting classes

N. N. Vorob'ev (Belarus, Vitebsk)
Masherov Vitebsk State University
e-mail: vornic2001@mail.ru
I. I. Staselka (Belarus, Vitebsk)
Masherov Vitebsk State University
e-mail: mars17906@mail.ru

Все рассматриваемые группы конечны. Мы будем использовать терминологию, принятую в [1, 2, 3, 4, 5].

Напомним, что класс групп $\mathfrak{F}$, замкнутый относительно нормальных подгрупп и произведений нормальных $\mathfrak{F}$-подгрупп, называется классом Фиттинга.

Следуя Л.А. Шеметкову [1], символом σ обозначается некоторое разбиение множества всех простых чисел $\mathbb{P}$, т.е. $\sigma = \{\sigma_i \mid i \in I\}$, где $\mathbb{P} = \bigcup_{i\in I} \sigma_i$ и $\sigma_i \cap \sigma_j = \varnothing$ для всех $i \neq j$. Если n — целое число, то через $\pi(n)$ обозначается множество всех простых чисел, делящих n; $\sigma(n) = \{\sigma_i \mid \sigma_i \cap \pi(n) \neq \varnothing\}$; $\sigma(G) = \sigma(|G|)$.

Напомним, что для произвольного класса групп $\mathfrak{F} \supseteq (1)$, где (1) — класс всех единичных групп, символом $G^{\mathfrak{F}}$ обозначается пересечение всех нормальных подгрупп N таких, что $G/N \in \mathfrak{F}$. Символами $\mathfrak{G}_{\sigma_i}$ и $\mathfrak{G}_{\sigma_i'}$ обозначают соответственно класс всех σ_i-групп и класс всех σ_i'-групп.

Пусть f — произвольная функция вида

$$f : \sigma \to \{\text{классы Фиттинга}\}, \tag{1}$$

называемая *σ-функцией Хартли* (или, более кратко, *H_σ-функцией*).
Следуя [5] рассмотрим класс групп

$$LR_\sigma(f) = \Big(G \mid G = 1 \text{ или } G \neq 1 \text{ и } G^{\mathfrak{G}_{\sigma_i}\mathfrak{G}_{\sigma_i'}} \in f(\sigma_i) \text{ для всех } \sigma_i \in \sigma\big(G\big)\Big).$$

Если класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ таков, что $\mathfrak{F} = LR_\sigma(f)$ для некоторой H_σ-функции f вида (1), то $\mathfrak{F}$ называется *σ-локальным классом Фиттинга*, а f — *σ-локальным* заданием класса Фиттинга $\mathfrak{F}$ (см. [5]).

Совокупность классов Фиттинга Θ называется *полной решеткой классов Фиттинга* [3], если классы $\varnothing$ и $\mathfrak{G}$ принадлежат Θ и пересечение любого множества классов из Θ снова

[1]Исследование выполнено в рамках Государственной программы научных исследований Республики Беларусь «Конвергенция—2025» (№ государственной регистрации 20210495). Помимо этого исследования выполняются по гранту Министерства образования Республики Беларусь (№ государственной регистрации 20230466).

принадлежит Θ. Относительно включения $\subseteq$ множество всех σ-локальных классов Фиттинга l_σ образует полную решетку.

Символ $l_\sigma\mathrm{fit}(\mathfrak{X})$ обозначает пересечение всех σ-локальных классов Фиттинга, содержащих совокупность групп $\mathfrak{X}$, а $\mathrm{fit}(\mathfrak{X})$ — пересечение всех классов Фиттинга, содержащих совокупность групп $\mathfrak{X}$.

Пусть $\{\mathfrak{F}_j \mid j \in J\}$ — непустая совокупность σ-локальных классов Фиттинга. Следуя [2] будем полагать

$$\vee_\sigma(\mathfrak{F}_j \mid j \in J) = l_\sigma\mathrm{fit}\Bigl(\bigcup_{j\in J}\mathfrak{F}_j\Bigr).$$

Пусть $\{f_j \mid j \in J\}$ — совокупность H_σ-функций, где f_j — некоторая H_σ-функция класса Фиттинга $\mathfrak{F}_j$. Тогда через $\vee(f_j \mid j \in J)$ обозначается такая H_σ-функция f, что

$$f(\sigma_i) = \mathrm{fit}\Bigl(\bigcup_{j\in J} f_j(\sigma_i)\Bigr)$$

для всех i, если по крайней мере один из классов Фиттинга $f_j(\sigma_i) \neq \varnothing$. Если же $f_j(\sigma_i) = \varnothing$ для всех $j \in J$, то полагают, что $f(\sigma_i) = \varnothing$.

H_σ-Функция f называется Θ-*значной*, если каждое ее непустое значение принадлежит решетке Θ. Для произвольной полной решетки классов Фиттинга Θ символом Θ^{σ_l} обозначается совокупность всех таких классов Фиттинга, которые обладают Θ-значной H_σ-функцией. H_σ-Функция f называется *внутренней*, если $f(\sigma_i) \subseteq LR_\sigma(f)$ для всех i.

Пусть Θ — полная решетка классов Фиттинга. Тогда верхняя грань произвольной совокупности $\{\mathfrak{F}_j \mid j \in J\}$ элементов из Θ^{σ_l} обозначается через $\vee_{\Theta^{\sigma_l}}(\mathfrak{F}_j \mid j \in J)$. Решетка Θ^{σ_l} называется *индуктивной* (см. [2, 6]), если для любого набора $\{\mathfrak{F}_j = LR_\sigma(f_j) \mid j \in J\}$ классов Фиттинга $\mathfrak{F}_j \in \Theta^{\sigma_l}$ и для всякого набора $\{f_j \mid j \in J\}$ Θ-значных H_σ-функций f_j, где f_j — внутренняя H_σ-функция класса Фиттинга $\mathfrak{F}_j$, имеет место

$$\vee_{\Theta^{\sigma_l}}(\mathfrak{F}_j \mid j \in J) = LR_\sigma\bigl(\vee_\Theta(f_j \mid j \in J)\bigr),$$

где символ $\vee_\Theta(f_j \mid j \in J)$ обозначает такую H_σ-функцию f, что $f(\sigma_i)$ является верхней гранью для $\{f_j(\sigma_i) \mid j \in J\}$ в Θ, если $\bigcup\limits_{j\in J} f_j(\sigma_i) \neq \varnothing$, и $f(\sigma_i) = \varnothing$ в противном случае.

Основной результат представляет следующая

Теорема 1. *Решетка всех σ-локальных классов Фиттинга l_σ индуктивна.*

В случае, когда $\sigma = \sigma^1 = \{\{2\}, \{3\}, \dots\}$ из теоремы получаем

Следствие 1. *Решетка всех локальных классов Фиттинга l индуктивна.*

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Шеметков Л. А., Формации конечных групп. — М. : Наука. Гл. ред. физ.-матем. лит., 1978. 272 с. (Соврем. алгебра).

2. Скиба А. Н., Алгебра формаций. — Мн.: Беларуская навука, 1997. 240 с.

3. Скиба А. Н., Шеметков Л. А. Кратно ω-локальные формации и классы Фиттинга конечных групп // Матем. труды. 1999. Том 2, № 2. С. 114–147.

4. Chi Z., Safonov V. G., Skiba A. N. On n-multiply σ-local formations of finite groups // Comm. Algebra. 2019. Vol. 47, no. 3. P. 957–968.

5. Guo W., Zhang Li, Vorob'ev N. T. On σ-local Fitting classes // Journal of Algebra. 2020. Vol. 546. P. 116–129.

6. Воробьев Н. Н., Скиба А. Н. О дистрибутивности решетки разрешимых тотально локальных классов Фиттинга // Матем. заметки. 2000. Том 67, № 5. С. 662–673.

УДК 512.5

О порождении групп $\mathbf{SL_n}(\mathbb{Z}+\mathbf{i}\mathbb{Z})$ и $\mathbf{PSL_n}(\mathbb{Z}+\mathbf{i}\mathbb{Z})$ тремя инволюциями, две их которых перестановочны[1]

М. А. Всемирнов (Россия, г. Санкт-Петербург)
Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В. А. Стеклова Российской академии наук
e-mail: vsemir@pdmi.ras.ru
Р. И. Гвоздев (Россия, г. Красноярск)
Сибирский федеральный университет
e-mail: gvozdev.rodion@bk.ru
Я. Н. Нужин (Россия, г. Красноярск)
Сибирский федеральный университет
e-mail: nuzhin2008@rambler.ru
Т. Б. Шаипова (Россия, г. Красноярск)
Красноярский научный центр Сибирского отделения Российской академии наук
e-mail: 663431@mail.ru

On generation of the groups $\mathbf{SL_n}(\mathbb{Z}+\mathbf{i}\mathbb{Z})$ and $\mathbf{PSL_n}(\mathbb{Z}+\mathbf{i}\mathbb{Z})$ by three involutions, two of which commute

M. A. Vsemirnov (Russia, Saint-Petersburg)
St. Petersburg Department of the Steklov Mathematical Institute of the Russian Academy of Sciences
e-mail: vsemir@pdmi.ras.ru
R. I. Gvozdev (Russia, Krasnoyarsk)
Siberian Federal University
e-mail: gvozdev.rodion@bk.ru
Ya. N. Nuzhin (Russia, Krasnoyarsk)
Siberian Federal University
e-mail: nuzhin2008@rambler.ru
T. B. Shaipova (Russia, Krasnoyarsk)
Krasnoyarsk Scientific Center of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences
e-mail: 663431@mail.ru

Группу, порожденную тремя инволюциями, две из которых перестановочны, будем называть $(2\times 2,2)$-*порожденной*. Класс таких групп замкнут относительно гомоморфных образов, если по определению единичную группу считаем таковой и не исключаем совпадения двух или всех трех инволюций. М. К. Тамбурини и П. Цукка [1] доказали $(2\times 2,2)$-порожденность некоторых классических групп достаточно большой размерности n, зависящей от параметра d, над

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (грант 22-21-00733).

определенными d-порожденными областями целостности. В частности, они доказали $(2\times 2,2)$-порожденность специальной линейной группы $SL_n(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})$ над кольцом целых гауссовых чисел $\mathbb{Z}+i\mathbb{Z}$ при $n \geq 14$. Д. В. Левчук и Я. Н. Нужин [2, 3] установили $(2\times 2,2)$-порожденность проективной специальной линейной группы $PSL_n(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})$ при $n \geq 7$. Доказательство в [2, 3] состояло в том, что порождающие тройки указывались в явном виде, более того, при $n \neq 4k+2$ они выбирались из группы $SL_n(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})$. Следовательно, для таких размерностей справедлив более сильный результат. При $n \geq 7$ и $n \neq 4k+2$ группа $SL_n(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})$ является $(2\times 2,2)$-порожденной. Поэтому в силу работ [1, 2, 3] ответ о $(2\times 2,2)$-порожденности групп SL_n и PSL_n над кольцом $\mathbb{Z}+i\mathbb{Z}$ не был известен к 2010 году только при $n=3,4,5,6,10$ для SL_n и только при $n=2,3,4,5,6$ для PSL_n.

В [4] доказано, что для любой области целостности D характеристики отличной от 2 группа $SL_6(D)$, в частности, $SL_6(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})$, не является $(2\times 2,2)$-порожденной, а в [5] установлено, что при $n \leq 4$ группы $PSL_n(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})$, а следовательно, и $SL_n(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})$ не являются $(2\times 2,2)$-порожденными. Таким образом, оставались нерассмотренными только случаи SL_5, PSL_6 и SL_{10}. Случай PSL_5 выпал из списка, поскольку при нечетном n группы SL_n и PSL_n над кольцом $\mathbb{Z}+i\mathbb{Z}$ совпадают.

Основным результатом статьи является

Теорема 1. *Группы $SL_5(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})$, $PSL_6(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})$ и $SL_{10}(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})$ порождаются тремя инволюциями, две из которых перестановочны.*

Доказательство теоремы конструктивное, то есть порождающие тройки инволюций указываются явно, и в установлении порождаемости данной тройкой инволюций мы существенно используем компьютерные вычисления.

Объединяя теорему 1 с отмеченными выше результатами статей [1, 2, 3, 4, 5], получаем два следствия.

Следствие 1. *Группа $SL_n(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})$ тогда и только тогда порождается тремя инволюциями, две из которых перестановочны, когда $n \geq 5$ и $n \neq 6$.*

Следствие 2. *Группа $PSL_n(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})$ тогда и только тогда порождается тремя инволюциями, две из которых перестановочны, когда $n \geq 5$.*

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Tamburini M. C., Zucca P. Generation of Certain Matrix Groups by Three Involutions // J. of Algebra. 1997. Vol. 195, № 2. P. 650–661.

2. Levchuk D. V., Nuzhin Ya. N. On generation of the group $PSL_n(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})$ by three involutions, two of which commute // Журн. СФУ. Сер. Матем. и физ. 2008. Том 1, № 2. С. 133–139.

3. Левчук Д. В. О порождаемости группы $SL_7(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})$ тремя инволюциями, две из которых перестановочны // Вестник НГУ. 2009. Том 9, № 1. С. 35-38.

4. Нужин Я. Н. Тензорные представления и порождающие множества инволюций некоторых матричных групп // Труды ИММ УрО РАН. 2020. Том 26, № 3. С. 133-141.

5. Гвоздев Р. И., Нужин Я. Н., Шаипова Т ,Б. О порождении групп $SL_n(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})$ и $PSL_n(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})$ тремя инволюциями, две их которых перестановочны // Известия ИГУ, Серия Математика. 2022. Том 40, С. 49-62.

6. Стейнберг Р. Лекции о группах Шевалле — М. Изд-во Мир, 1975. 263 с.

7. Кострикин А. И. Введение в алгебру. — М. Изд-во Наука, 1977. 495 с.

8. Супруненко Д. А. Группы матриц. — М. Изд-во Наука, 1972. 351 с.

УДК 512.542

О решетках $\bar{\omega}$-веерных формаций конечных групп

А. А. Горепекина (Россия, г. Брянск)
Брянский государственный университет имени академика И. Г. Петровского
e-mail: nastya3296@mail.ru
М. М. Сорокина (Россия, г. Брянск)
Брянский государственный университет имени академика И. Г. Петровского
e-mail: mmsorokina@yandex.ru

On lattices of $\bar{\omega}$-fibered formations of finite groups

A. A. Gorepekina (Russia, Bryansk)
Bryansk State Academician I. G. Petrovski University
e-mail: nastya3296@mail.ru
M. M. Sorokina (Russia, Bryansk)
Bryansk State Academician I. G. Petrovski University
e-mail: mmsorokina@yandex.ru

Рассматриваются только конечные группы и классы конечных групп. Формацией называется класс групп, замкнутый относительно гомоморфных образов и подпрямых произведений [1]. Решеточный подход к изучению формаций групп впервые был предложен А.Н. Скибой в 1986 году [2]. Ключевые свойства решеток всех локальных и всех ω-локальных формаций, где ω — непустое подмножество множества $\mathbb{P}$ всех простых чисел, изложены соответственно в монографиях [1] и [3]. ω-Веерные формации [4] были построены В.А. Ведерниковым в 1999 году в качестве обобщения ω-локальных формаций. Решеточные свойства ω-веерных формаций исследовались, например, в [5]. В 2013 году А.Н. Скиба ввел в рассмотрение σ-концепцию изучения конечных групп, где σ — произвольное разбиение множества $\mathbb{P}$ (см., напр., [6]), и в дальнейшем с помощью ее методов определил σ-локальные формации. В [7] на основе σ-методов А.Н. Скибы были построены $\bar{\omega}$-веерные формации, являющиеся обобщением ω-веерных формаций, где $\bar{\omega}$ — произвольное разбиение множества ω. В теореме 1 изучаются решеточные свойства $\bar{\omega}$-веерных формаций конечных групп.

Используемая терминология стандартна (см., напр., [1]). Через $\pi(G)$ обозначается совокупность всех простых делителей порядка группы G; $\mathfrak{G}$ — класс всех конечных групп; form$\mathfrak{X}$ — формация, порожденная совокупностью групп $\mathfrak{X}$, т.е. пересечение всех формаций, содержащих $\mathfrak{X}$; для классов групп $\mathfrak{F}_1$ и $\mathfrak{F}_2$ полагают $\mathfrak{F}_1\mathfrak{F}_2 = \{G \in \mathfrak{G} \mid$ существует $N \lhd G$ такая, что $N \in \mathfrak{F}_1$ и $G/N \in \mathfrak{F}_2\}$. Пусть ω — непустое подмножество множества $\mathbb{P}$ всех простых чисел; $\bar{\omega} = \{\omega_i \mid i \in I\}$ — произвольное разбиение множества ω, т.е. $\omega = \cup_{i\in I}\omega_i$, $\omega_i \neq \varnothing$ для любого $i \in I$, и $\omega_i \cap \omega_j = \varnothing$ для любых $i, j \in I$, $i \neq j$. Для любого $\omega_i \in \bar{\omega}$ полагаем $\mathfrak{G}_{\omega_i} = \{G \in \mathfrak{G} \mid \pi(G) \subseteq \omega_i\}$, $\mathfrak{G}_{\omega_i'} = \{G \in \mathfrak{G} \mid \pi(G) \cap \omega_i = \varnothing\}$. Для любой группы G полагаем $\bar{\omega}(G) = \{\omega_i \in \bar{\omega} \mid \omega_i \cap \pi(G) \neq \varnothing\}$.

Функция $f : \bar{\omega} \cup \{\bar{\omega}'\} \to$ {формации групп}, где $f(\bar{\omega}') \neq \varnothing$, называется *$\bar{\omega}F$-функцией*; функция $\gamma : \bar{\omega} \to$ {непустые формации Фиттинга групп}, удовлетворяющая условию $\mathfrak{G}_{\omega_i'} \subseteq \gamma(\omega_i)$ для любого $\omega_i \in \bar{\omega}$, называется *$\bar{\omega}FR$-функцией*. Формация $\mathfrak{F} = \{G \in \mathfrak{G} \mid G/O_\omega(G) \in f(\bar{\omega}')$ и $G/G_{\gamma(\omega_i)} \in f(\omega_i)$ для любого $\omega_i \in \bar{\omega}(G)\}$ называется *$\bar{\omega}$-веерной формацией с направлением* γ (кратко, $\bar{\omega}\gamma$-веерной формацией) и $\bar{\omega}$-спутником f и обозначается $\mathfrak{F} = \bar{\omega}F(f,\gamma)$ [7], где $O_\omega(G)$ — наибольшая нормальная ω-подгруппа группы G; $G_{\gamma(\omega_i)}$ — наибольшая нормальная подгруппа группы G, принадлежащая формации $\gamma(\omega_i)$. Направление γ $\bar{\omega}$-веерной формации называется *p-направлением*, если $\gamma(\omega_i) = \mathfrak{G}_{\omega_i'}\gamma(\omega_i)$ для любого $\omega_i \in \bar{\omega}$; *$b$-направлением*, если $\gamma(\omega_i)\mathfrak{G}_{\omega_i} = \gamma(\omega_i)$ для любого $\omega_i \in \bar{\omega}$ [7].

Непустая совокупность формаций Θ называется *полной решеткой формаций*, если пересечение любой совокупности формаций из Θ принадлежит Θ и в Θ имеется такая формация $\mathfrak{F}$, что $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{F}$ для любой формации $\mathfrak{M} \in \Theta$ [1]. Пусть γ — произвольная $\bar{\omega}FR$-функция, $\Theta_{\bar{\omega}\gamma}$ — совокупность всех $\bar{\omega}\gamma$-веерных формаций. В [7] установлено, что $\mathfrak{G} \in \Theta_{\bar{\omega}\gamma}$ и пересечение любой совокупности $\bar{\omega}\gamma$-веерных формаций является $\bar{\omega}\gamma$-веерной формацией, тем самым установлено, что $\Theta_{\bar{\omega}\gamma}$ является полной решеткой формаций. Пусть $\Theta = \Theta_{\bar{\omega}\gamma}$ и $\{\mathfrak{F}_j, j \in J\} \subseteq \Theta$. В соответствиии с [1], через $\vee_{\Theta_{j\in J}}\mathfrak{F}_j$ обозначается решеточное объединение формаций $\mathfrak{F}_j$, $i \in J$, т.е. $\vee_{\Theta_{j\in J}}\mathfrak{F}_j$ — наименьшая $\bar{\omega}\gamma$-веерная формация, содержащая $\cup_{j\in J}\mathfrak{F}_j$. Для совокупности $\bar{\omega}F$-функций $\{f_j, j \in J\}$ через $\vee_{j\in J} f_j$ обозначается такая $\bar{\omega}F$-функция f, что для любого $x \in \bar{\omega} \cup \{\bar{\omega}'\}$ имеет место: $f(x) = \mathrm{form}(\cup_{j\in J} f_j(x))$, если $f_k(x) \neq \varnothing$ для некоторого $k \in J$, и $f(x) = \varnothing$, если $f_j(x) = \varnothing$ для любого $j \in J$. В теореме 1 получено описание строения минимального $\bar{\omega}$-спутника $\bar{\omega}\gamma$-веерной формации, являющейся решеточным объединением некоторой совокупности $\bar{\omega}\gamma$-веерных формаций.

Теорема 1. *Пусть Θ — полная решетка всех $\bar{\omega}$-веерных формаций с bp-направлением γ, $\{\mathfrak{F}_j, j \in J\} \subseteq \Theta$, f_j — минимальный $\bar{\omega}$-спутник формации $\mathfrak{F}_j$, $j \in J$, и $\mathfrak{F} = \vee_{\Theta_{i\in I}}\mathfrak{F}_i$. Тогда $f = \vee_{j\in J} f_j$ — минимальный $\bar{\omega}$-спутник $\bar{\omega}\gamma$-веерной формации $\mathfrak{F}$.*

В случае, когда $\bar{\omega}$ — наименьшее разбиение множества ω (т.е. для любого $\omega_i \in \bar{\omega}$ множество ω_i одноэлементно (см., напр., [6])), в качестве следствия из теоремы 1 вытекает известный результат для ω-веерных формаций [5].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Скиба А. Н. Алгебра формаций. — Минск: Изд-во Беларуская навука, 1997. 240 с.

2. Скиба А. Н. О локальных формациях длины 5. В кн. Арифметическое и подгрупповое строение конечных групп. — Минск: Изд-во Наука и техника, 1986. С. 135-149.

3. Воробьев Н. Н. Алгебра классов конечных групп. — Витебск: Изд-во ВГУ им. П. М. Машерова, 2012. 322 с.

4. Ведерников В. А. О новых типах ω-веерных формаций конечных групп // Український математичный конгресс — 2001. Київ: Праці, Секція 1, 2002. С. 36-45.

5. Максаков С. П., Сорокина М. М. Об алгебраичности решеток ω-веерных формаций конечных групп // Дискретная математика. 2022. Том 34, № 1. С. 23-35.

6. Skiba A. N. On σ-properties of finite groups I // Problems of Physics, Mathematics and Technics. 2014. № 4(21). С. 89-96.

7. Сорокина М. М., Горепекина А. А. $\bar{\omega}$-Веерные формации конечных групп // Чебышевский сборник. 2001. Том 22, № 3(79). С. 233-246.

УДК 512.54

О π-изоляторах в группах Кокстера с древесной структурой

И. В. Добрынина (Россия, г. Москва)
Московский технический университет связи и информатики
e-mail: dobrynirina@yandex.ru
А. С. Угаров (Россия, г. Тула)
Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого
e-mail: ugarovas@tsput.ru

On π-insulators in Coxeter groups with a tree structure

I. V. Dobrynina (Russia, Moscow)
Moscow Technical University of Communications and Informatics
e-mail: dobrynirina@yandex.ru
A. S. Ugarov (Russia, Tula)
Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University
e-mail: ugarovas@tsput.ru

Пусть G — конечно порожденная группа Кокстера, заданная копредставлением $G = \langle a_1, \ldots, a_n; (a_i a_j)^{m_{ij}} = 1, i, j = \overline{1,n} \rangle$, где m_{ij} — элементы симметрической матрицы Кокстера: $\forall i, j \in \overline{1,n}$, $m_{ii} = 1$, $m_{ij} \geq 2$, $i \neq j$ [1].

Группы Кокстера введены Х. С. М. Кокстером в 1934 году. Понятие группы Кокстера возникло в теории дискретных групп, порождаемых отражениями относительно гиперплоскостей.

В алгебраическом аспекте данные группы стали изучаться с работ Ж. Титса (1962-1964).

Если группе G соответствует конечный дерево-граф Γ такой, что вершинам графа Γ соответствуют образующие $a_i, i = \overline{1,n}$, а всякому ребру e, соединяющему вершины с образующими a_i и a_j, соответствует соотношение $(a_i a_j)^{m_{ij}} = 1$, то мы имеем группу Кокстера с древесной структурой [2].

Данный класс групп введен в рассмотрение В. Н. Безверхним в 2003 году [3].

Группу Кокстера G с древесной структурой можно представить как древесное произведение двупорожденных групп Кокстера, объединенных по циклическим подгруппам.

Теорема 1. *[2] Пересечение двух конечно порожденных подгрупп группы Кокстера с древесной структурой конечно порождено и существует алгоритм, выписывающий образующие данного пересечения.*

Будем говорить, что в группе G разрешима проблема пересечения классов смежности конечно порожденных подгрупп, если для любых конечно порожденных подгрупп $H_1, \ldots, H_s$ группы G и любых слов $w_1, \ldots, w_s \in G$ существует алгоритм, позволяющий установить, пусто или нет пересечение $w_1 H_1 \cap \ldots \cap w_s H_s$.

Теорема 2. *[4] В группе Кокстера с древесной структурой разрешима проблема пересечения классов смежности конечно порожденных подгрупп.*

Будем говорить, что группа G удовлетворяет условию максимальности, если всякая возрастающая последовательность ее подгрупп $H_1 \leq H_2 \leq \ldots$ стабилизируется, то есть существует такое натуральное число N, что для любого n, $n > N$, $H_n = H_{n+1} = \ldots$.

Определение 1. *Под проблемой вхождения будем понимать проблему нахождения алгоритма, позволяющего для всякой конечно порожденной подгруппы H конечно определенной группы G определить, принадлежит ли произвольно выбранный элемент группы G подгруппе H или нет.*

П. Шуппом показана неразрешимость проблемы вхождения в классе групп Кокстера.

Теорема 3. *[5] Пусть группа $G = \langle \prod_{s=1}^{n} *G_s; relG_1, \ldots, relG_n, \varphi_{ji}(U_{ij}) = U_{ji}\rangle$ есть древесное произведение групп, объединенных по изоморфным подгруппам $U_{ij} < G_i$ и $U_{ji} < G_j$ с помощью фиксированного набора конструктивных изоморфизмов $\{\varphi_{ji}\} : \varphi_{ji}(U_{ij}) = U_{ji}$. Тогда если подгруппы U_{ij} и U_{ji} обладают условием максимальности и в сомножителях разрешимы:*

1) проблема вхождения;

2) проблема пересечения классов смежности любой конечно порожденной подгруппы $H < G_i$ с подгруппой $U_{ij} < G_i$;

3) существует алгоритм, выписывающий образующие пересечения любой конечно порожденной подгруппы $H < G_i$ с подгруппой $U_{ij} < G_i$,

то в группе G разрешима проблема вхождения.

Группа Кокстера с древесной структурой, рассматриваемая как древесное произведение двупорожденных групп Кокстера, объединенных по конечным циклическим подгруппам, удовлетворяет условиям данной теоремы, поэтому для данного класса групп справедливо следующее следствие.

Следствие 1. *[5]. В группах Кокстера с древесной структурой разрешима проблема вхождения.*

Понятия изолированной подгруппы и изолятора определим, следуя работе П. Г. Конторовича [6].

Определение 2. *[6] Подгруппа A группы G называется изолированной в группе G, если для любого элемента g из G из того, что g^k принадлежит A, $g^k \neq 1$, следует, что g принадлежит A.*

Определение 3. *[6] Подгруппа, равная пересечению всех изолированных в группе G подгрупп, содержащих подгруппу A, называется изолятором или корневым замыканием подгруппы A в G.*

Т. Макдоноу показал, что в классе конечно порожденных свободных групп изолятор конечно порожденной подгруппы конечно порожден и указал алгоритм построения такой подгруппы [7].

В. Н. Безверхний, В. А. Гринблат доказали, что если $G = A_1 * A_2$ — свободное произведение подгрупп A_1, A_2, обладающих свойством: изолятор всякой конечно порожденной подгруппы конечно порожден, то для любой конечно порожденной подгруппы A из G изолятор конечно порожден [8].

И. С. Безверхняя доказала, что если $G = A_1 *_H A_2$ — свободное произведение подгрупп A_1 и A_2 с объединением по изолированной подгруппе H, обладающей свойством максимальности и множители A_1 и A_2 обладают свойством: изолятор всякой конечно порожденной подгруппы конечно порожден, то для любой конечно порожденной подгруппы A из G ее изолятор конечно порожден [9].

Теорема 4. *[10] В группах Кокстера с древесной структурой изолятор всякой конечно порожденной подгруппы конечно порожден. Существует алгоритм, выписывающий его образующие.*

Пусть P — множество простых чисел, а π — некоторое его подмножество.

Определение 4. *[11] Подгруппа A группы G называется π-изолированной в группе G, если для любого элемента g из G из того, что g^p принадлежит A для некоторого числа $p \notin \pi$, $g^p \neq 1$, следует, что g принадлежит A.*

Определение 5. *[11] Подгруппа, равная пересечению всех π-изолированных в группе G подгрупп, содержащих подгруппу A, называется π-изолятором подгруппы A в G.*

Если π — пустое множество, то понятия π-изолированной подгруппы и π-изолятора совпадают с понятиями изолированной подгруппы и изолятора соответственно.

В. Н. Безверхний доказал конечную порожденность π-изолятора конечно порожденной подгруппы свободной группы и указал алгоритм его построения [11], обобщив тем самым результат Т. Макдоноу.

Теорема 5. *[12] Пусть $G = A_1 *_H A_2$ — свободное произведение подгрупп A_1 и A_2 с объединением по изолированной подгруппе H, обладающей свойством максимальности. Если A_1 и A_2 обладают свойством: π-изолятор всякой конечно порожденной подгруппы конечно порожден, то для любой конечно порожденной подгруппы A из G ее π-изолятор конечно порожден.*

Теорема 6. *В группах Кокстера с древесной структурой π-изолятор всякой конечно порожденной подгруппы конечно порожден.*

Теорема 7. *Пусть π — рекурсивно. Существует алгоритм, выписывающий образующие π-изолятора конечно порожденной подгруппы группы Кокстера с древесной структурой.*

Доказательство теорем 6, 7 проводится по индукции.

Рассматривается конечно порожденная группа Кокстера G с древесной структурой, представленная в виде свободного произведения двупорожденных групп Кокстера, объединенных по конечным циклическим подгруппам:

$$G =< \prod_{s=1}^{n} *G_s; relG_1, \ldots, relG_s, a_j = a'_j > .$$

В этом случае группе Кокстера G соответствует дерево - граф $\overline{\Gamma}$: вершинам графа $\overline{\Gamma}$ соответствуют группы Кокстера на двух образующих $G_{ij} =< a_i, a_j; a_i^2 = a_j^2 = 1, (a_i a_j)^{m_{ij}} = 1 >$ и $G_{jk} =< a_j, a_k; a_j^2 = a_k^2 = 1, (a_j a_k)^{m_{jk}} = 1 >$, а всякому ребру $\overline{e}$, соединяющему вершины, соответствующие G_{ij} и G_{jk} — циклическая подгруппа $< a_j; a_j^2 = 1 >$.

Рассматривается база индукции.

Опираясь на результат В. Н. Безверхнего, строится π-изолятор конечно порожденной подгруппы в группе

$$\overline{G} = G_{ij} *_{<a_j;\ a_j^2=1>} G_{jk},$$

являющейся свободным произведением двупорожденных групп Кокстера

$$G_{ij} =< a_i, a_j; a_i^2 = a_j^2 = 1, (a_i a_j)^{m_{ij}} = 1 >$$

и

$$G_{jk} =< a_j, a_k; a_j^2 = a_k^2 = 1, (a_j a_k)^{m_{jk}} = 1 >,$$

объединенных по циклической подгруппе $< a_j; a_j^2 = 1 >$.

Далее рассматривается древесное произведение $n-1$ сомножителей, которому соответствует связный дерево-граф $\overline{\Gamma}_{n-1}, \overline{\Gamma}_{n-1} \subset \overline{\Gamma}$. Группу, соответствующую графу $\overline{\Gamma}_{n-1}$, обозначим через $\overline{G}_{n-1}$. Пусть n-ый сомножитель, подгруппа G_{xy}, соответствует вершине дерева-графа $\overline{\Gamma}$, которая связана с графом $\overline{\Gamma}_{n-1}$ ребром e_t. При этом ребру e_t соответствует циклическая подгруппа второго порядка $< a_x; a_x^2 = 1 >$. Таким образом, группа G представляется как свободное произведение двух групп $\overline{G}_{n-1}$ и G_{xy}, объединенных по циклической подгруппе порядка два $< a_x; a_x^2 = 1 >$, то есть

$$G = \overline{G}_{n-1} *_{<a_x;\ a_x^2=1>} G_{xy}.$$

Используя предположение индукции для группы $\overline{G}_{n-1}$, доказывается справедливость теорем 6, 7 для группы G.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. K. Appel, P. Schupp, Artins groups and infinite Coxter groups // Ivent. Math. 1983. V. 72. P. 201-220.

2. Безверхний В. Н., Инчено О. В. Проблема пересечения конечно порожденных подгрупп в группах Кокстера с древесной структурой //Известия ТулГУ. Естественные науки. 2009. № 2. С. 16–31.

3. Безверхний В. Н. О группах Артина, Кокстера с древесной структурой // V международная конференция «Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения»: тезисы докладов международной конференции — Тула, 2003. С. 33-34.

4. Инчено О. В. О проблеме пересечения классов смежности конечно порожденных подгрупп в группе Кокстера с древесной структурой // Чебышевский сборник. Т. 17, № 2. С. 146-161.

5. Безверхний В. Н. Решение проблемы вхождения в некоторых классах групп с одним определяющим соотношением // Алгоритмические проблемы теории групп и полугрупп. — Тула: Изд-во ТГПИ, 1986. С. 3-22.

6. Конторович П. Г. Группы с базисом расщепления. III // Математический сборник. 1948. Т. 21, № 1. С. 79-100.

7. McDonough T. P. Root-closure in free groups // J. London Math. Soc. 1970. V. 2. P. 191-192.

8. Безверхний В. Н., Гринблат В. А. О корневом замыкании в свободном произведении групп // Алгебраические действия и упорядоченность. — Л.: Изд-во РГПИ, 1983. С. 3-20.

9. Безверхняя И. С. О конечной порожденности изолятора подгруппы в свободном произведении групп с объединением // Алгоритмические проблемы теории групп и полугрупп. — Тула: Изд-во ТГПИ, 1983. С. 81-112.

10. Добрынина И. В., Угаров А. С. Об изоляторах конечно порожденных подгрупп в группах Кокстера с древесной структурой // Алгебра, теория чисел, дискретная геометрия и многомасштабное моделирование: современные проблемы, приложения и проблемы истории. Материалы XXI Международной конференции. — Тула, 2022. С. 58-61.

11. Безверхний В. Н. О π-изоляторах свободной группы // Алгоритмические проблемы теории групп и полугрупп. — Тула: Изд-во ТГПИ, 1990. С. 3-13.

12. Безверхний В. Н. О π-изоляторах в HNN-группах // Известия ТулГУ. Серия Математика. Механика. Информатика. 1996. Т. 2. С. 7-44.

УДК 512.542

О локальном задании множеств Хартли конечной группы

Т. Б. Караулова (Беларусь, г. Витебск)
Витебский государственный университет им. П. М. Машерова
e-mail: tatyana.vasilevich.1992@mail.ru

On the local specification of Hartley sets of a finite group

T. B. Karaulova (Belarus, Vitebsk)
Masherov Vitebsk State University
e-mail: tatyana.vasilevich.1992@mail.ru

Все рассматриваемые группы конечны. В определениях и обозначениях мы следуем [1]. Локальный метод изучения конечных разрешимых групп с помощью радикалов и классов Фиттинга был предложен Хартли [2]. Идея локализации Хартли состоит в изучении классов групп в терминах p-групп и радикалов, определяемых отображениями (локальными H-функциями или функциями Хартли) множества $\mathbb{P}$ всех простых чисел во множества классов Фиттинга. Благодаря развитию локального метода Гашюцом, Фишером и Хартли в [3] были обобщены классические теоремы Силова и Холла. Ими было установлено, что если $\mathfrak{F}$ — непустой класс Фиттинга, то разрешимая группа имеет точно один класс сопряженных $\mathfrak{F}$-инъекторов.

Классом Фиттинга называют класс групп $\mathfrak{F}$, замкнутый относительно нормальных подгрупп и произведений нормальных $\mathfrak{F}$-подгрупп. Из определения класса Фиттинга следует, что для каждого непустого класса Фиттинга $\mathfrak{F}$ любая группа G имеет единственную максимальную нормальную $\mathfrak{F}$-подгруппу, которую называют $\mathfrak{F}$-радикалом G и обозначают $G_{\mathfrak{F}}$.

Если $\mathfrak{F}$ — непустой класс Фиттинга, то подгруппа V группы G называется:

(1) $\mathfrak{F}$-максимальной, если $V \in \mathfrak{F}$ и $U = V$ при условии, что $V \leq U \leq G$ и $U \in \mathfrak{F}$;

(2) $\mathfrak{F}$-инъектором, если $V \cap K$ является $\mathfrak{F}$-максимальной подгруппой K для всякой субнормальной подгруппы K группы G.

Следуя [4], множество $\mathcal{F}$ подгрупп группы G называют фиттинговым множеством G, когда выполняются следующие условия: (1) если $T \trianglelefteq S \in \mathcal{F}$, то $T \in \mathcal{F}$; (2) если $S, T \in \mathcal{F}$ и $S, T \trianglelefteq ST$, то $ST \in \mathcal{F}$; (3) если $S \in \mathcal{F}$ и $x \in G$, то $S^x \in \mathcal{F}$.

Понятие $\mathcal{F}$-инъектора группы для фиттингова множества группы G определяется аналогично как и для класса Фиттинга.

Следуя [5], функцию $h : \mathbb{P} \longrightarrow \{$фиттинговы множества группы $G\}$ назовем функцией Хартли (или кратко H-функцией) группы G. Напомним, что произведением $\mathcal{F} \circ \mathfrak{X}$ фиттингова множества группы G и класса Фиттинга $\mathfrak{X}$ [6] называется множество подгрупп $\{H \leq G : H/H_{\mathcal{F}} \in \mathfrak{X}\}$.

Символы $\mathfrak{E}_{p'}$, $\mathfrak{N}_p$ обозначают соответственно класс всех p'-групп, всех нильпотентных p-групп.

Пусть $\mathbb{P}$ — множество всех простых чисел, а π — некоторое подмножество множества $\mathbb{P}$. Дополнение к π во множестве $\mathbb{P}$ обозначим через π', то есть $\pi' = \mathbb{P} \setminus \pi$.

Следует отметить, что идея локализации состоит в изучении фиттинговых множеств группы G, определяемых локальными H-функциями. Фиттингово множество $\mathcal{F}$ группы G называется локальным [7], если $\mathcal{F} = \cap_{p\in\pi} h(p) \circ (\mathfrak{N}_p\mathfrak{E}_{p'})$ для некоторой H-функции h группы G.

Пусть $\varnothing \neq \pi \subseteq \mathbb{P}$, h — функция Хартли группы G и $HS(h) = \cap_{p\in\pi} h(p) \circ (\mathfrak{E}_{p'}\mathfrak{N}_p)$. Фиттингово множество $\mathcal{H}$ группы G назовем множеством Хартли группы G, если $\mathcal{H} = HS(h)$ для некоторой h-функции h.

Основной результат работы следующая

Теорема 1. *Каждое множество Хартли $\mathcal{H}$ группы G является локальным фиттинговым множеством.*

Нетрудно показать, что обратное неверно.

Теорема 2. *Существует локальное фиттингово множество, которое не является множеством Хартли $\mathcal{H}$ группы G.*

Пусть V — $\mathcal{H}$-инъектор группы G. Заметим, что для доказательства теоремы 2 достаточно указать некоторые примеры групп, для которых фактор $V/G_{\mathcal{H}}$ не нильпотентен.

Если $\mathfrak{H}$ — класс Фиттинга всех p-замкнутых групп и фиттингово множество $\mathcal{H} = \{H \leq G : H \in \mathfrak{H}\}$ — след класса Фиттинга $\mathfrak{H}$ в группе G, то $G_{\mathfrak{H}} = G_{\mathcal{H}}$ и $Inj_{\mathfrak{H}}(G) = Inj_{\mathcal{H}}(G)$. Поэтому для построения примера не нильпотентного фактора можно взять класс $\mathfrak{H} = \mathfrak{N}_p\mathfrak{S}_{p'}$ [2].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Doerk K., Hawkes T. Finite soluble groups. — Berlin; New York: Walter de Gruyter, 1992. 891 p.
2. Hartley B. On Fischer's dualization of formation theory // Proc. London Math. Soc. 1969. Vol. 3(19), № 2. P. 193-207.
3. Gaschütz W., Fischer B., Hartley B. Injektoren endlicher auflösbarer Gruppen // Math. Z. 1967. Vol. 102, № 5. S. 337-339.
4. Anderson W. Injectors in finite solvable groups // J. Algebra. 1975. Vol. 36, № 3. P. 333-338.
5. Воробьёв Н. Т. О предположении Хоукса для радикальных классов // Сиб. матем. журн. 1996. № 37(6). С. 1296-1302.
6. Семёнов М. Г. Формула инъектора конечной π-разрешимой группы // Проблемы физики, математики и техники. 2014. Т. 21, № 4. С. 77-88.
7. Yang N. On $\mathcal{F}$-injectors of Fitting set of a finite group // Comm. Algebra. 2018. Vol. 46, № 1. P. 217-229.

УДК 512.542

О конечных группах со слабо субнормальными подгруппами Шмидта

В. Н. Князина (Беларусь, г. Гомель)
Гомельский государственный университет имени Ф. Скорины
e-mail: knyagina@inbox.ru

On finite groups with weakly subnormal Schmidt subgroups

V. N. Kniahina (Belarus, Gomel)
Francisk Skorina Gomel State University
e-mail: knyagina@inbox.ru

Рассматриваются только конечные группы. Группой Шмидта называют конечную ненильпотентную группу, все собственные подгруппы которой нильпотентны. Группам Шмидта посвящены отдельные параграфы многих монографий по теории групп. Подробный обзор результатов о свойствах групп Шмидта, существовании подгрупп Шмидта в конечных группах и их приложениях в теории классов конечных групп содержится в статье В. С. Монахова [1].

Группы с субнормальными $\{p, q\}$-подгруппами Шмидта, p и q — различные фиксированные простые числа, исследовались в [2]. В частности, для группы G, в которой субнормальны все pd-подгруппы Шмидта, установлена p-разложимость фактор-группы $G/F(G)$, а в случае, когда субнормальны все подгруппы Шмидта — $G/F(G)$ абелева. В. А. Ведерников [3] для группы G, в которой все подгруппы Шмидта субнормальны, доказал, что $G/H(G)$ является прямым произведением групп Фробениуса конкретных типов, откуда вытекает цикличность $G/F(G)$. Здесь $F(G)$ и $H(G)$ — подгруппа Фиттинга и гиперцентр группы G соответственно. Эти результаты для σ-субнормальных и К$\mathfrak{F}$-субнормальных подгрупп Шмидта развивались в работах других авторов, например, в [4]–[6].

Определение 1. *Подгруппа H называется полунормальной в группе G, если существует подгруппа B такая, что $G = AB$ и AX — подгруппа для каждой подгруппы X из B.*

Группы с полунормальными $\{p, q\}$-подгруппами Шмидта, p и q — различные фиксированные простые числа, исследовались в [7]. В частности, установлена разрешимость группы, в которой полунормальны все $\{2, 3\}$-подгруппы Шмидта и все 5-замкнутые $\{2, 5\}$-подгруппы Шмидта.

А. Н. Скиба [8] предложил понятие слабо субнормальной подгруппы.

Определение 2. *Подгруппа H называется слабо субнормальной в G, если $H = \langle A, B\rangle$ для некоторой субнормальной в G подгруппы A и полунормальной подгруппы B из G.*

Каждая слабо субнормальная подгруппа в простой группе полунормальна, а в нильпотентной группе — субнормальна. Ясно, что все субнормальные и все полунормальные подгруппы слабо субнормальны. Обратное не всегда выполняется.

Пример 1. В группе $G = A_4 \times D_{10}$, $A_4 = \langle a, b, c\rangle$, $|a| = 2$, и $D_{10} = \langle k, h\rangle$, $|k| = 2$, подгруппа $H = \langle a\rangle \times \langle k\rangle$ является слабо субнормальной в G, но H не полунормальна и не субнормальна. Здесь A_4 — знакопеременная группа степени 4, а D_{10} — группа диэдра порядка 10.

Мы исследовали строение конечных групп с фиксированными слабо субнормальными подгруппами Шмидта. Получены следующие результаты.

Теорема 1. *Пусть H — слабо субнормальная подгруппа Шмидта группы G.*
(1) *Если подгруппа H^G неразрешима, то $H/Z(H) \cong A_4$.*
(2) *Если подгруппа H^G простая, то $H \cong A_4$ и $H^G \cong SL(2, 4)$.*

Теорема 2. *Если в группе G все $\{2, 3\}$-подгруппы Шмидта слабо субнормальны, то группа G 3-разрешима.*

Следствие 1. *Если в группе G слабо субнормальны все $\{2, 3\}$-подгруппы Шмидта и все 5-замкнутые $\{2, 5\}$-подгруппы Шмидта, то группа G разрешима.*

Пример 2. (1) В $PSL(2,3^3)$ нет $S_{<5,2>}$-подгрупп и $S_{<3,2>}$-подгрупп, поэтому условие слабой субнормальности $S_{<2,3>}$-подгрупп в следствии 1 не является лишним.

(2) В $SL(2,8)$ нет $S_{<5,2>}$-подгрупп и $S_{<2,3>}$-подгрупп, поэтому группы со слабо субнормальными $S_{<5,2>}$-подгруппами и $S_{<2,3>}$-подгруппами могут быть неразрешимыми, а условие слабой субнормальности $S_{<3,2>}$-подгрупп в следствии 1 не является лишним.

(3) В $Sz(8)$ нет $\{2,3\}$-подгрупп Шмидта, поэтому группы со слабой субнормальными $\{2,3\}$-подгруппами Шмидта могут быть неразрешимыми и условие слабой субнормальности 5-замкнутых $S_{<5,2>}$-подгрупп в следствии 1 не является лишним.

Теорема 3. *Если в группе G каждая подгруппа Шмидта слабо субнормальна, то ее коммутант нильпотентен.*

Пример 3. Пусть D_n — диэдральная группа порядка n и

$$G = D_6 \times D_{10} = ([\langle x\rangle]\langle a\rangle) \times ([\langle y\rangle]\langle b\rangle), |x| = 3, |y| = 5, |a| = |b| = 2.$$

Ясно, что $F(G) = \langle x\rangle \times \langle y\rangle$ и $G/F(G) \cong \langle a\rangle \times \langle b\rangle$ — нециклическая группа. В G каждая подгруппа Шмидта изоморфна D_6 или D_{10}. В группе G каждая подгруппа Шмидта полунормальна, а значит и слабо субнормальна. Поэтому в теореме 3 фактор-группа $G/F(G)$ может быть нециклической.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Монахов В. С. Подгруппы Шмидта, их существование и некоторые приложения // Труды Укр. матем. конгресса 2001. Киев: Институт математики НАН Украины. 2002, секция № 1. С. 81–90.

2. Княгина В. Н., Монахов В. С. О конечных группах с некоторыми субнормальными подгруппами Шмидта // Сиб. матем. журн. 2004. Том 45, № 6. С. 1316-1322.

3. Ведерников В. А. Конечные группы с субнормальными подгруппами Шмидта // Алгебра и логика. 2007. Том 44, № 6. С. 669-687.

4. Yi X., Kamornikov S. F. Finite groups with σ-subnormal Schmidt subgroups // J. Algebra. 2020. Vol. 560. P. 181-191.

5. Guo W., Safonova I. N., Skiba A. N. On σ-subnormal subgroups of finite groups // Southeast Asian Bull. Math. 2021. Vol. 45. P. 813-824.

6. Hu B., Huang J., Song D., Safonova I. N. Finite groups with K-$\mathfrak{F}$-subnormal Schmidt subgroups // Comm. Algebra. 2021. Vol. 49 (10). P. 4513-4518.

7. Княгина В. Н., Монахов В. С. Конечные группы с полунормальными подгруппами Шмидта // Алгебра и логика. 2007. Том 46, № 4. С. 448-458.

8. Хуан Ц., Ху Б., Скиба А. Н. Конечные группы со слабо субнормальными и частично субнормальными подгруппами // Сиб. матем. журн. 2021. Том 62, № 1. С. 210-220.

УДК 512.5

Вложение элементарной сети в промежуток сетей над полем частных дедекиндовой области[1]

В. А. Койбаев (Россия, г. Владикавказ)
Северо-Осетинский государственный университет им. К. Л. Хетагурова; Южный математический институт ВНЦ РАН
e-mail: koibaev-K1@yandex.ru

Embedding of an elementary net into a gap of nets over a field of fractions of a Dedekind domain

V. A. Koibaev (Russia, Vladikavkaz)
North-Ossetian State University after K. L. Khetagurov; Southern Mathematical Institute VSC RAS
e-mail: koibaev-K1@yandex.ru

Настоящая работа продолжает исследование [1], в которой дается описание неприводимых сетей над полем частных области главных идеалов.

Система $\sigma = (\sigma_{ij})$, $\quad 1 \leq i, j \leq n$, аддитивных подгрупп σ_{ij} поля K называется *сетью (ковром)* [2, 3] над полем K порядка n, если $\sigma_{ir}\sigma_{rj} \subseteq \sigma_{ij}$ при всех значениях индексов i, r, j. Сеть, рассматриваемая без диагонали, называется элементарной сетью. Ясно, что, вычеркнув диагональ из произвольной сети, мы получим элементарную сеть. С другой стороны, элементарная сеть $\sigma = (\sigma_{ij})$ называется дополняемой, если ее можно дополнить диагональю до (полной) сети. Сеть $\sigma = (\sigma_{ij})$ мы называем *неприводимой*, если все аддитивные подгруппы σ_{ij} отличны от нуля, далее, сеть $\sigma = (\sigma_{ij})$ называется D-сетью, если $1 \in \sigma_{ii}$, $1 \leq i \leq n$. Из сетевого условия следует, что все диагональные аддитивные подгруппы σ_{ii} D-сети σ являются кольцами с единицей. Через $D(n, K)$ обозначим группу обратимых диагональных $n \times n$ матриц над полем K. По сети σ и любой матрице $d = diag(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ из $D(n, K)$ можно определить сопряженную сеть $\pi = d\sigma d^{-1}$, где $\pi_{ij} = \varepsilon_i \sigma_{ij} \varepsilon_j^{-1}$. Для элементарной сети (или сети) $\sigma = (\sigma_{ij})$ через $E(\sigma)$ обозначается элементарная сетевая группа:

$$E(\sigma) = \langle t_{ij}(\sigma_{ij}) : 1 \leq i \neq j \leq n \rangle.$$

Назовем элементарную сеть σ замкнутой (допустимой) [5, 4, вопрос 15.46], если элементарная сетевая подгруппа $E(\sigma)$ не содержит новых элементарных трансвекций: если из включения $t_{ij}(\alpha) \in E(\sigma)$ следует, что $\alpha \in \sigma_{ij}$ для всех $i \neq j$. Замкнутыми являются, например, дополняемые элементарные сети (см., например, [1]).

Пусть K – поле частных области R. R-модуль A поля K называется дробным идеалом кольца R, если существует ненулевой элемент x из K, такой что $xA \subseteq R$ [6]. Идеал A называется целым, если он содержится в R. Ясно, что целый идеал, в частности, является дробным идеалом. Для дробного идеала A кольца R, $R \subseteq K$, множество всех элементов $x \in K$ со свойством $xA \subseteq R$ обозначается символом $(R : A)$. Множество $(R : A)$ также является дробным идеалом кольца R. Дробный идеал A называется обратимым [6], если $(R : A)A = R$. В этом случае идеал $(R : A)$ называется обратным к идеалу A.

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования РФ, соглашение № 075-02-2023-939

Пусть K – поле частных области R. Область целостности R называется дедекиндовой областью ([6], теорема 9.8), если любой ненулевой дробный идеал кольца R обратим. Отметим, что дедекиндова область является нетеровой одномерноой областью (то есть всякий ненулевой простой идеал максимален).

Пусть R – дедекиндова область. Для двух дробных идеалов A, B можно определить их произведение AB как множество всех конечных сумм $\sum_{i=1}^{n} a_i b_i, \ \ a_i \in A, b_i \in B$. Произведение AB также является дробным идеалом. Из определения дедекиндовой области R следует, что ненулевые дробные идеалы кольца R обратимы, они образуют группу по умножению. Эта группа называется *группой идеалов кольца* R; обозначим ее через I ([6], гл.9). Подгруппа $P = \{uR : \ u \in K^*\}$ главных дробных идеалов группы I называется группой главных дробных идеалов. Факторгруппа $H = I/P$ называется *группой классов идеалов кольца* R. Известно, например, что когда K – поле алгебраических чисел (конечное расширение поля рациональных чисел $\mathbb{Q}$), то кольцо целых $\mathfrak{D}$ поля K (кольцо целых чисел поля алгебраических чисел K) является дедекиндовой областью, причем группа классов идеалов кольца $\mathfrak{D}$ конечна и ее порядок называется числом классов поля алгебраических чисел K [6].

Пусть R – область целостности и K – ее поле частных. Мы говорим [7], что кольцо R обладает QR-свойством (QR-property), если всякое промежуточное подкольцо, лежащее между R и K является кольцом частных (quotient ring) кольца R.

Лемма 1. *([7], следствие 2.6). Если R нетерова область то следующие условия эквивалентны:*

(1) R обладает (QR)-свойством;

(2) R – дедекиндова область и группа классов идеалов кольца R периодическая.

Для элементарной сети $\sigma = (\sigma_{ij})$ определяются две (полные) сети: производная сеть $\omega = (\omega_{ij})$ и сеть $\Omega = (\Omega_{ij})$, ассоциированная σ [8].

Предложение 1. *Пусть R – дедекиндова область и группа классов идеалов кольца R периодическая, K – поле частных области R, $\sigma = (\sigma_{ij})$ — неприводимая элементарная сеть аддитивных подгрупп σ_{ij} порядка $n \geq 3$ над полем частных K дедекиндовой области R, причем для любых i, j подгруппы σ_{ij} являются R-модулями. Пусть, далее, $\omega = (\omega_{ij})$ и $\Omega = (\Omega_{ij})$ производная (полная) сеть и (полная) сеть, ассоциированная с элементарной группой $E(\sigma)$ соответственно. Тогда для некоторого промежуточного подкольца P, $R \subseteq P \subseteq K$ с точностью до сопряженности диагональной матрицей из $D(n, K)$ справедливы включения (на недиагональных позициях) $\omega \subseteq \sigma \subseteq \Omega$, причем $\omega_{ii} = \Omega_{ii} = P$, $i = 1, \ldots, n$. Далее, ω_{ij} и Ω_{ij} являются дробными идеалами кольца P для всех i, j, причем при $i < j$ эти идеалы являются целыми идеалами, а при $i > j$ они содержат кольцо P.*

Теорема 1. *Пусть R – дедекиндова область и группа классов идеалов кольца R периодическая, K – поле частных области R, $\sigma = (\sigma_{ij})$ — неприводимая элементарная сеть аддитивных подгрупп σ_{ij} порядка $n \geq 3$ над полем частных K дедекиндовой области R, причем для любых i, j подгруппы σ_{ij} являются R-модулями. Тогда элементарная сеть σ является замкнутой.*

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Дряева Р. Ю., Койбаев В. А., Нужин Я. Н. Полные и элементарные сети над полем частных кольца главных идеалов // Зап.научн.сем. ПОМИ РАН. 2017. Том 455. С. 42-51.

2. Боревич З. И. О подгруппах линейных групп, богатых трансвекциями // Зап.научн.сем. ПОМИ РАН. 1978. Том 75. С. 22-31.

3. Левчук В. М. Замечание к теореме Л. Диксона // Алгебра и логика. 1983. Том 22, № 4. С. 421-434.

4. Коуровская тетрадь. Нерешенные вопросы теории групп. Новосибирск. 2010. Издание 17-е.

5. Koibaev V. A. Closed nets in linear groups // Vestnik St. Petersburg University: Mathematics. 2013, Vol. 46, № 1, pp. 14-21.

6. Атья М., Макдональд И. Введение в коммутативную алгебру. – М: "Мир". 1972. 160 с.

7. Gilmer R., Ohm J. Integral domains with quatient overrings // Math. Ann. 1964. Bd. 153, № 2, pp. 97-103.

8. Джусоева Н. А., Итарова С. Ю., Койбаев В. А. Теорема о вложении элементарной сети // Владикавк. матем. журн. 2018. Том 20, № 2. С. 57-61.

УДК 512.54

Конечные факторизуемые группы со слабо $\mathbb{X}$-субнормальными подгруппами

С. И. Ленденкова (Беларусь, г. Гомель)
Гомельский государственный университет имени Ф. Скорины
e-mail: slendenkova@mail.ru

Finite factorized groups with weakly $\mathbb{X}$-subnormal subgroups

S. I. Lendenkova (Belarus, Gomel)
Francisk Skorina Gomel State University
e-mail: slendenkova@mail.ru

В работе рассматриваются только конечные группы. Все обозначения и терминология соответствуют [1].

Пусть $\mathbb{N}$ и $\mathbb{P}$ — множества всех натуральных и всех простых чисел соответственно.

Определение 1. *Пусть $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{N}$. Подгруппа H называется $\mathbb{X}$-субнормальной подгруппой группы G, если $H = G$ или существует цепочка подгрупп*

$$H = G_0 < G_1 < \ldots < G_{n-1} < G_n = G,\ |G_i : G_{i-1}| \in \mathbb{X},\ \forall i.$$

При $\mathbb{X} = \mathbb{P}$ получаем понятие $\mathbb{P}$-субнормальности, введенное А. Ф. Васильевым, Т. И. Васильевой и В. Н. Тютяновым [2].

Следуя [3] для фиксированных $t \in \mathbb{N}$ и $r \in \mathbb{P}$ положим

$$\mathbb{P}^t = \{p^k \mid p \in \mathbb{P},\ k \in \{0\} \cup \mathbb{N},\ k \leqslant t\};$$

$$\mathbb{P}^t_r = \{p^k \mid p \in \mathbb{P} \setminus \{r\},\ k \in \{0\} \cup \mathbb{N}\} \cup \{r^k \mid k \in \{0\} \cup \mathbb{N},\ k \leq t\};$$

$$\mathbb{P}^\infty = \{p^k \mid p \in \mathbb{P},\ k \in \{0\} \cup \mathbb{N}\};$$

$$\mathbb{L} = \{2, 4\} \cup \{2n - 1 \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

Факторизуемые группы $G = AB$ с $\mathbb{X}$-субнормальными сомножителями A и B исследовались в работах [2]–[5].

Предложенные А. Н. Скибой [6] понятия слабо субнормальной и частично субнормальной подгруппы, связаны с порождением подгруппы двумя подгруппами, одна из которых субнормальна в группе, а другая обладает определенными свойствами. Используя эту идею введем следующее определение.

Определение 2. *Пусть G — группа и $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{N}$. Подгруппу H группы G будем называть слабо $\mathbb{X}$-субнормальной в группе G, если $H = \langle H_1, H_2\rangle$, подгруппа H_1 субнормальна в G, а H_2 $\mathbb{X}$-субнормальна в G.*

Полученные в работах [4]–[5] признаки частичной разрешимости группы $G = AB$ с $\mathbb{X}$-субнормальными подгруппами A и B переносятся на факторизуемые группы со слабо $\mathbb{X}$-субнормальными сомножителями. В частности, доказаны следующие теоремы.

Теорема 1. *Пусть A и B слабо $\mathbb{X}$-субнормальные подгруппы в группе $G = AB$. Если A и B r-разрешимы, то G r-разрешима в каждом из следующих случаев:*
(1) $\mathbb{X} = \mathbb{P}_2^2$;
(2) $\mathbb{X} = \mathbb{P}^\infty$ *и* $r \in \pi(G) \setminus \{2, 3, 7\}$

Теорема 2. *Если A и B — слабо $\mathbb{P}_2^2$- или $\mathbb{L}$-субнормальные подгруппы группы $G = AB$, то G разрешима.*

Следствие 1. *Пусть A и B слабо $\mathbb{P}^2$-субнормальные подгруппы в группе $G = AB$. Если A и B сверхразрешимы, то в G существует нормальная $\{2, 3\}'$-холлова подгруппа H и H дисперсивна по Оре.*

Для разрешимых групп справедлива

Лемма 1. *Если G — разрешимая группа и $\pi(G) \subseteq \mathbb{X}$, то каждая слабо $\mathbb{X}$-субнормальная в G подгруппа будет $\mathbb{X}$-субнормальной.*

В случае когда $\mathbb{X} = \mathbb{P}$ доказательство леммы 1 нам сообщила И. Л. Сохор.

Теоремы 1 и 2 вместе с леммой 1 позволяют устанавливать признаки сверхразрешимости факторизуемой группы со слабо $\mathbb{X}$-субнормальными сомножителями. Например, справедливо

Предложение 1. *Пусть A и B — сверхразрешимые слабо $\mathbb{P}$-субнормальные подгруппы группы $G = AB$. Тогда G сверхразрешима в каждом из следующих случаев:*
(1) *коммутант G' нильпотентен;*
(2) $|G : A| = r^\alpha$, $r \in \pi(G)$, *группа G r-замкнута;*
(3) $|G : A| = r^\alpha$, $r = \max \pi(G)$,
(4) *B нильпотентна и нормальна в G;*
(5) *B нильпотентна и* $|G : B| \in \mathbb{P}$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Монахов В. С. Введение в теорию конечных групп и их классов — Минск: Вышэйшая школа, 2006. 207 с.

2. Васильев А. Ф., Васильева Т. И., Тютянов В. Н. О произведениях $\mathbb{P}$-субнормальных подгрупп в конечных группах // Сиб. мат. журн. 2012. Том 53, № 1. С. 59-67.

3. Тютянов В. Н., Княгина В. Н. Факторизации конечных групп r-разрешимыми подгруппами с заданными вложениями // Укр. мат. журн. 2014. Том 66, № 10. С. 1431-1435.

4. Княгина В. Н., Монахов В. С. Конечные факторизуемые группы с разрешимыми $\mathbb{P}^2$-субнормальными подгруппами // Сиб. мат. журн. 2013. Том 54, № 1. С. 77-85.

5. Monakhov V., Kniahina V. Finite factorised groups with partially solvable $\mathbb{P}$-subnormal subgroups // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2015. Vol 36, No. 4. pp. 441-445.

6. Хуан Ц., Ху Б., Скиба А. Н. Конечные группы со слабо субнормальными и частично субнормальными подгруппами // Сиб. мат. журн. 2021. Том 62, № 1. С. 210-220.

УДК 512.542

Группы с субмодулярными силовскими подгруппами[1]

В. С. Монахов (Беларусь, г. Гомель)
Гомельский государственный университет имени Ф. Скорины
e-mail: victor.monakhov@gmail.com
И. Л. Сохор (Беларусь, г. Гомель)
Гомельский государственный университет имени Ф. Скорины
e-mail: irina.sokhor@gmail.com

Groups with submodular Sylow subgroups

V. S. Monakhov (Belarus, Gomel)
Francisk Skorina Gomel State University
e-mail: victor.monakhov@gmail.com
I. L. Sokhor (Belarus, Gomel)
Francisk Skorina Gomel State University
e-mail: irina.sokhor@gmail.com

Рассматриваются только конечные группы. Принятые обозначения стандартны и соответствуют [1]. Группа называется примарной, если ее порядок есть степень простого числа, и бипримарной, если ее порядок делится в точности на два различных простых числа.

Расширением понятия нормальности является понятие модулярности, пришедшее из теории решеток. Подгруппа H группы G называется модулярной, если H является модулярным элементом решетки подгрупп группы G, а значит, подгруппа H удовлетворяет следующим соотношениям:

(1) $\langle A, H\rangle \cap B = \langle A, H \cap B\rangle$ для всех $A, B \leq G$ таких, что $A \leq B$;

(2) $\langle A, H\rangle \cap B = \langle H, A \cap B\rangle$ для всех $A, B \leq G$ таких, что $H \leq B$.

Модулярным подгруппам посвящена монография Р. Шмидт [2]. Модулярность, как и нормальность, не обладает свойством транзитивности, т. е. подгруппа, модулярная в модулярной подгруппе группы, может быть не модулярна в группе. Расширением понятия модулярности является понятие субмодулярности, которое является транзитивным отношением.

Определение 1. *Подгруппа H группы G называется субмодулярной в G, если существует цепочка подгрупп*

$$H = H_0 \leq \ldots \leq H_i \leq H_{i+1} \leq \ldots \leq H_n = G \qquad (1)$$

такая, что подгруппа H_i модулярна в H_{i+1} для каждого i.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (Ф23РНФ-237)

Группы с субмодулярными подгруппами впервые изучались в [3]. Напомним основные свойства субмодулярных подгрупп.

Лемма 1. *Пусть G — группа, H, K, N — подгруппы группы G, причем H субмодулярна в G, а N нормальна в G. Тогда справедливы следующие утверждения.*

(1) *H^x субмодулярна в G для любого $x \in G$.*

(2) *$H \cap K$ субмодулярна в K.*

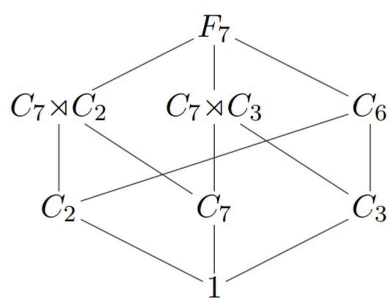
(3) *Если K субмодулярна в H, то K субмодулярна в G.*

(4) *HN/N субмодулярна в G и HN субмодулярна в G.*

(5) *Если K/N субмодулярна в G/N, то K субмодулярна в G.*

(6) *Если K субнормальна в G, то K субмодулярна в G.*

Пример 4. В группе Фробениуса F_7 порядка 42 максимальная подгруппа C_6 порождается подгруппами C_2 и C_3, каждая из которых субмодулярна в F_7. При этом подгруппа C_6 не модулярна в F_7.



Таким образом, множество субмодулярных подгрупп группы не образует решетку.

В [3, 4] исследовались группы, в которых каждая силовская подгруппа субмодулярна. Класс таких групп будем обозначать через $\mathfrak{Z}$. Каждая группа из класса $\mathfrak{Z}$ имеет силовскую башню сверхразрешимого типа. Кроме того, в [3, 4] найдены критерии субмодулярности силовских подгрупп в произвольной группе.

Установлены новые характеризации групп из класса $\mathfrak{Z}$.

Теорема 1. *Для группы G следующие утверждения эквивалентны.*

(1) *Каждая силовская подгруппа группы G субмодулярна в G, т. е. $G \in \mathfrak{Z}$.*

(2) *$G/\Phi(G) \in \mathfrak{Z}_1$.*

(3) *$A/\Phi(A) \in \mathfrak{U}_1$ для каждой метанильпотентной подгруппы A группы G.*

(4) *$B/\Phi(B) \in \mathfrak{U}_1$ для каждой бипримарной подгруппы B группы G.*

Здесь $\mathfrak{Z}_1$ — класс всех групп из $\mathfrak{Z}$ экспоненты свободной от квадратов, $\mathfrak{U}_1$ — класс всех сверхразрешимых групп экспоненты свободной от квадратов.

Данный результат уточнен для метанильпотентных групп.

Следствие 1. *Если каждая силовская подгруппа метанильпотеной группы G субмодулярна в G, то группа G сверхразрешима и экспонента $G/F(G)$ свободна от квадратов. Обратно, если группа G сверхразрешима и экспонента $G/F(G)$ свободна от квадратов, то каждая силовская подгруппа группы G субмодулярна в G.*

Установлена взаимосвязь между субмодулярностью и формационной субнормальностью примарных подгрупп в группе.

Теорема 2. *Примарная подгруппа P группы G субмодулярна в G тогда и только тогда, когда подгруппа P $\mathrm{K}\mathfrak{U}_1$-субнормальна в G.*

Пусть $\mathfrak{F}$ — формация. Напомним, подгруппа H группы G называется K$\mathfrak{F}$-субнормальной в G, если существует цепочка подгрупп (1) такая, что либо подгруппа H_i нормальна в H_{i+1}, либо $\mathfrak{F}$-корадикал подгруппы H_{i+1} содержится в H_i для каждого i.

Пример 5. В группе Фробениуса F_7 порядка 42 подгруппа C_6 K$\mathfrak{U}_1$-субнормальна, но не субмодулярна. Таким образом, K$\mathfrak{U}_1$-субнормальная непримарная подгруппа группы может быть несубмодулярной в группе.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Huppert B. Endliche Gruppen I. — Berlin ; Heidelberg ; New York : Springer, 1967. 793 p.
2. Schmidt R. Subgroup Lattices of Groups. — Berlin ; New York : De Gruyter, 1994. 572 p.
3. Zimmermann I. Submodular subgroups in finite groups // Math. Z., 1989. Vol. 202. P. 545–557.
4. Васильев В. А. Конечные группы с субмодулярными силовскими подгруппами // Сиб. матем. журн. 2015. Том 56, № 6. С. 1277–1288.

УДК 512.542

О классе конечных групп, являющихся произведением субнормальных сверхразрешимых подгрупп[1]

В. С. Монахов (Беларусь, г. Гомель)
Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины
e-mail: victor.monakhov@gmail.com
Д. А. Ходанович (Беларусь, г. Гомель)
Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины
e-mail: hodanovich@gsu.by

On the class of finite groups that are a product of subnormal supersoluble subgroups

V. S. Monakhov (Belarus, Gomel)
Francisk Skorina Gomel State University
e-mail: victor.monakhov@gmail.com
D. A. Hodanovich (Belarus, Gomel)
Francisk Skorina Gomel State University
e-mail: hodanovich@gsu.by

Все обозначения и терминология теории групп и их классов соответствуют [1]. Рассматриваются только конечные группы.

Поскольку произведение нормальных нильпотентных подгрупп является нильпотентной подгруппой, то класс $\mathfrak{N}$ всех нильпотентных групп является радикальным классом (:= классом Фиттинга). Класс $\mathfrak{S}$ всех разрешимых групп также радикален. Классы $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{U}$ всех абелевых и сверхразрешимых групп не радикальны. На нерадикальность класса $\mathfrak{A}$ указывает неабелева

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования Республики Беларусь, грант 20211780 «Конвергенция-2025».

группа порядка p^3, p — любое простое число. Первый пример, поясняющий нерадикальность класса $\mathfrak{U}$, построил Хупперт [2]. Признаки сверхразрешимости факторизуемой группы $G = AB$ с нормальными сверхразрешимыми подгруппами A и B установили Бэр [3], А. Ф. и Т. И. Васильевы [4]. Такие факторизации изучались в работах [5]–[6].

В работе [7] исследована группа $G = AB$ с субнормальными сверхразрешимыми подгруппами A и B. В частности, установлено, что сверхразрешимый корадикал такой группы совпадает с нильпотентным корадикалом коммутанта группы. Получены также новые признаки сверхразрешимости факторизуемой группы с субнормальными сверхразрешимыми сомножителями.

Обозначим через $\mathfrak{H}$ класс всех групп, являющихся произведением двух субнормальных сверхразрешимых подгрупп. Ясно, что $\mathfrak{U} \subset \mathfrak{H}$ и любая несверхразрешимая группа с единственной нормальной максимальной подгруппой (например, знакопеременная группа A_4) не принадлежит $\mathfrak{H}$. Пример Хупперта подтверждает, что включение $\mathfrak{U} \subset \mathfrak{H}$ собственное.

Обозначим через $\mathfrak{D}$ класс всех групп с силовскими башнями сверхразрешимого типа, а $\mathcal{A}$ — класс всех групп с абелевыми силовскими подгруппами. Класс $\mathfrak{D}$ является наследственной насыщенной радикальной формацией, а класс $\mathcal{A}$ — наследственная формация, но она не насыщенная и не радикальная.

Свойства класса $\mathfrak{H}$ перечислены в следующей лемме.

Лемма 1. (1) $\mathfrak{U} \subset \mathfrak{H} \subset \mathfrak{D}$.

(2) *$\mathfrak{H}$ — гомоморф, т. е. если $G \in \mathfrak{H}$ и $N \lhd G$, то $G/N \in \mathfrak{H}$.*

(3) *$\mathfrak{H}$ замкнут относительно прямых произведений, т. е. если $G_i \in \mathfrak{H}$, $i = 1, 2$, то $G_1 \times G_2 \in \mathfrak{H}$.*

(4) *$\mathfrak{H}$ замкнут относительно холловых подгрупп, т. е. если $G \in \mathfrak{H}$, то $G_\pi \in \mathfrak{H}$ для всех $\pi \subseteq \pi(G)$.*

(5) *$\mathfrak{H}$ — насыщенный класс, т. е. если $G/\Phi(G) \in \mathfrak{H}$, то $G \in \mathfrak{H}$.*

(6) *$\mathfrak{H}$ не является классом Шунка и не является формацией.*

(7) *Минимальная несверхразрешимая группа $G \in \mathfrak{H}$ тогда и только тогда, когда G — бипримарная минимальная несверхразрешимая группа с нециклическими силовскими подгруппами.*

В терминах теории классов групп признаки сверхразрешимости группы $G = AB$ с субнормальными сверхразрешимыми подгруппами A и B, полученные в [7, теорема 3], можно записать следующим образом.

Предложение 1. *$\mathfrak{H} \cap \mathfrak{N}\mathcal{A} = \mathfrak{H} \cap \mathfrak{N}\mathfrak{A} = \mathfrak{U}$.*

Группой Шмидта называют ненильпотентную группу с нильпотентными собственными подгруппами. В работе [8] введены и изучены классы групп $\mathrm{sh}\mathfrak{U}$ и $\mathrm{sh}\overline{\mathfrak{U}}$, состоящие из всех групп, в которых каждая подгруппа Шмидта сверхразрешима и несверхразрешима соответственно. Оба класса являются наследственными насыщенными радикальными формациями и полностью описаны группы из этих двух классов. В частности, справедливо

Предложение 2. [8, теорема 1] *Для группы G следующие утверждения эквивалентны:*

(1) *$G \in \mathrm{sh}\mathfrak{U}$;*

(2) *$G \in \mathfrak{D}$ и для каждой пары простых чисел $p > q$, q не делит $p - 1$, бипримарная $\{p, q\}$-холлова в G подгруппа нильпотентна.*

Наш основной результат — следующая теорема.

Теорема 1. *$\mathfrak{H} \subseteq \mathrm{sh}\mathfrak{U} \cap \mathfrak{N}^2 \cap \mathfrak{N}\mathfrak{A}^2$.*

Следствие 1. *В группе $G = AB$ с субнормальными сверхразрешимыми подгруппами A и B любая подгруппа Шмидта сверхразрешима.*

Радикальная насыщенная формация $\mathrm{sh}\mathfrak{U}$ содержит насыщенный гомоморф $\mathfrak{H}$ и три нерадикальные насыщенные формации $\mathfrak{U}$, $\mathrm{w}\mathfrak{U}$ и $\mathrm{v}\mathfrak{U}$, причем $\mathfrak{U} \subset \mathrm{w}\mathfrak{U} \subset \mathrm{v}\mathfrak{U} \subset \mathrm{sh}\mathfrak{U}$, [9]. Соотношения между ними описывает

Следствие 2. $\mathfrak{U} = \mathfrak{H} \cap \mathrm{w}\mathfrak{U} \subset \mathfrak{H} \cap \mathrm{v}\mathfrak{U}$.

Включение в этом следствии собственное. Несверхразрешимая группа $C_5^2 \rtimes Q$ является произведением двух нормальных сверхразрешимых подгрупп, изоморфных $C_5^2 \rtimes C_4$. Здесь C_n — циклическая группа порядка n, Q — группа кватернионов порядка 8, C_5^2 — элементарная абелева группа порядка 25. Группа $C_5^2 \rtimes Q_8$ принадлежит разности $\mathfrak{H} \cap \mathrm{v}\mathfrak{U} \setminus \mathrm{w}\mathfrak{U}$, [9, пример 3].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Doerk K., Hawkes T. Finite soluble groups. Berlin ; New York : Walter de Gruyter. 1992.
2. Huppert B. Monomialle Darstellung endlicher Gruppen // Nagoya Math. J. 1953. Vol. 3. P. 93–94.
3. Baer R. Classes of finite groups and their properties // Illinois J. Math. 1957. Vol. 1. P. 115–187.
4. Васильев А. Ф., Васильева Т. И. О конечных группах, у которых главные факторы являются простыми группами // Изв. вузов. Матем. 1997. № 11 (426). С. 10–14.
5. Guo W., Kondrat'ev A. S. Finite minimal non-supersolvable groups decomposable into the product of two normal supersolvable subgroups // Commun. Math. Stat. 2015. Vol. 3. P. 285–290.
6. Тан С., Е Ю., Го В. Конечные группы, являющиеся произведением нормальных сверхразрешимых подгрупп // Сиб. матем. журн. 2017. Том 58, № 2. С. 417–429.
7. Монахов В. С., Чирик И. К. О сверхразрешимом корадикале произведения субнормальных сверхразрешимых подгрупп // Сиб. матем. журн. 2017. Том 58, № 2. С. 353–364.
8. Монахов В. С. О конечных группах с заданными наборами подгрупп Шмидта // Матем. заметки. 1995. Том 58, № 5. С. 717–722.
9. Монахов В. С. О трех формациях над $\mathfrak{U}$ // Матем. заметки. 2021. Том 110, № 3. С. 358–367.

УДК 511.32

Расширенная специальная линейная группа и матричные уравнения над $SL_2(\mathbb{F})$

Р. Скуратовский
e-mail: ruslcomp@mail.ru

Extended special linear group and matrix equation in $SL_2(\mathbb{F})$

R. Skuratovskii
e-mail: ruslcomp@mail.ru

In this research we continue our previous investigation [5, 6, 7, 8]. Let $SL_2(\mathbb{F}_p)$ denotes the special linear group of degree 2 over a finite field of order p and $\mathbb{F}$ is arbitrary field.

Definition 1. *The set of matrices*

$$\{M_i : Det(M_i) = \pm 1, M_i \in GL_2(\mathbb{F}_p)\}$$

forms ***extended special linear group*** *in $GL_2(\mathbb{F}_p)$ and is denoted by $\mathtt{ESL}_2(\mathbb{F}_p)$.*

As it is studied by us, $ESL_2(\mathbb{F}_p) \cong SL_2(\mathbb{F}_p) \rtimes \mathcal{C}_2$, where $\mathcal{C}_2$ is generated by reflection $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. The involution from the top-subgroup $\mathcal{C}_2 \simeq \left\langle \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ induces the sign of automorphism in $Aut\,(SL_2(F_p))$.

Matrices with determinant -1 correspond to the elements changing Euclidean space orientation.
Recall the **definition** of $\mathbf{TI-subgroup}$ [3]. Let G be a group and $A < G$, then A is called $\mathbf{TI}-$subgroup iff $A \cap A^g = e$ for each $g \in G \setminus N_G(A)$.

In view of $\mathcal{C}_2$ is one generated then its centralizer coincides with its normalizer. One easy can verify that centralizer consists of all diagonal matrices from $ESL_2(\mathbb{F}_p)$. For the rest of elements condition of $A \cap A^g = e$ for each $g \in ESL_2(\mathbb{F}_p) \setminus N_{ESL_2(\mathbb{F}_p)}(\mathcal{C}_2)$ holds. Thus, $\mathcal{C}_2$ is $\mathbf{TI-subgroup}$, hence $\mathcal{C}_2$ is antinormal subgroup.

We briefly introduce the minimal set of generators and new relations in $ESL_2(\mathbb{Z})$ [4] i.e. this group over integer ring. Each relation of $SL_2(\mathbb{Z})$ holds. We denote $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ by s and $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ as t they generate $SL_2(\mathbb{Z})$, new generator $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ is denoted by i. Then new relation is $isi^{-1} = s^{-1}$. The second relation is $iti^{-1} = t^{-1}$ and the rest of them are $t^4 = i^2 = e$. The order of s is ∞ because s is shift.

Theorem 1. *Let A be simple matrix and $A \in SL_2(\mathbb{F})$ [2], then for A there is a solution $B \in SL_2(\mathbb{F})$ of the matrix equation*

$$X^2 = A \tag{1}$$

if and only if

$$trA + 2 \tag{2}$$

is quadratic element in $\mathbb{F}$ or 0, where $\mathbb{F}$ is a field.

If $X \in ESL_2(\mathbb{F})$ then the matrix equation (1) has a solutions iff

$$trA \pm 2 \tag{3}$$

is a quadratic element in $\mathbb{F}$ or 0.

This solution $X \in ESL_2(\mathbb{F}) \setminus SL_2(\mathbb{F})$ iff $(trA - 2)$ is quadratic element or 0 in $\mathbb{F}$ but $(trA + 2)$ is not. Conversely $X \in SL_2(\mathbb{F}_p)$ iff $(trA + 2)$ is quadratic element. Solutions belong to $ESL_2(\mathbb{F})$ and $SL_2(\mathbb{F})$ iff $(trA + 2)$ and $(trA - 2)$ are quadratic elements.

In the case $A \in GL_2(\mathbb{F})$ this condition (2) takes form:

$$trA \pm 2\sqrt{detA} \tag{4}$$

is quadratic element in $\mathbb{F}$ or 0 and $detA$ is is quadratic too.

For case $\mathbb{F} = \mathbb{F}_p$ our criterion can be formulated in terms of Legendre symbol.

Corollary 1. *Let A be simple matrix and $A \in SL_2(\mathbb{F}_p)$ [2], then for matrix $A \in SL_2(\mathbb{F}_p)$ there is a solution $B \in SL_2(\mathbb{F}_p)$ of the matrix equation*

$$X^2 = A \tag{5}$$

if and only if

$$\left(\frac{trA+2}{p}\right) \in \{0,1\}. \tag{6}$$

If $X \in ESL_2(\mathbb{F}_p)$ then the matrix equation (5) *has a solution iff*

$$\left(\frac{trA\pm 2}{p}\right) \in \{0,1\}. \tag{7}$$

This solution $X \in ESL_2(\mathbb{F}_p) \setminus SL_2(\mathbb{F}_p)$ iff $\left(\frac{trA-2}{p}\right) = 1$ or 0, but $\left(\frac{trA+2}{p}\right) = -1$. Conversely $X \in SL_2(\mathbb{F}_p)$ iff $\left(\frac{trA+2}{p}\right) = 1$. Solutions $X_i \in ESL_2(\mathbb{F})$ and $SL_2(\mathbb{F})$ iff $\left(\frac{trA+2}{p}\right) = 1$ and $(trA-2) = 1$.

In the case $A \in GL_2(\mathbb{F}_p)$ this condition (2) *takes form:*

$$\left(\frac{trA\pm 2\sqrt{detA}}{p}\right) \in \{0,1\}, \ \left(\frac{detA}{p}\right) \in \{1\}. \tag{8}$$

Corollary 2. *If $A \in GL(F_2)$ the condition 2 takes form:*

$$\left(\frac{trA}{p}\right) \in \{0,1\}.$$

Theorem 3. *If a matrix $A \in GL_2(\mathbb{F}_p)$ is semisimple [1, 2] with different eigenvalues and at least one an eigenvalue $\lambda_i \in \mathbb{F}_{p^2} \setminus \mathbb{F}_p$, $i \in \{1,2\}$, $p > 2$, then $\sqrt{A} \in GL_2(\mathbb{F}_p)$ iff of A satisfies:*

$$(\frac{\lambda_i}{p}) = 1 \textit{ in the square extention that is } \mathbb{F}_{p^2}.$$

Furthermore we find some way to compute such roots.

Proposition 1. *If a simple matrix $A \in SL_2(\mathbb{F}_p)$ and $\left(\frac{Tr(A)+2}{p}\right) = 1$, then*

$$\sqrt{A} = \frac{1}{\pm\sqrt{trA \pm 2}}\left(A \pm E\right),$$

where E is identity element of $SL_2(\mathbb{F}_p)$, in case of sign '-' in $(A \pm E)$ roots $\sqrt{A} \in ESL_2(\mathbb{F}_p)$. Namely for $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ in a coordinate form in case $\sqrt{A} \in SL_2(\mathbb{F}_p)$ we have $\sqrt{A} = \frac{1}{\pm\sqrt{tr(A)+2}}\begin{pmatrix} a+1 & b \\ c & d+1 \end{pmatrix}$.

Corollary 3. *The formula of 4-th power root is the following*

$$\sqrt[4]{A} = \frac{A \pm E \pm \sqrt{trA \pm 2}}{\pm\sqrt{\pm\sqrt{trA\pm 2} \pm 2}}.$$

Proposition 2. *If matrix A do not admits diagonal form over F_2 then A is not square in $GL_2\left(F_2\right)$ over F_2.*

Theorem 2. *Under conditions* $(\frac{\lambda}{p}) = 1$ *in* F_p *and matrix* A *is similar to a Jordan block of the form*

$$J_A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \tag{9}$$

a square root B *of* A *exists in* $SL_2(F_p)$.

Proposition 3. *If* $B \in SL_2(\mathbb{F}_p)$ *is root of equation* $X^3 = A$*, then*

$$B = \frac{A + tr(\sqrt[3]{A})\sqrt[3]{\det(A)}}{tr\left(\sqrt{A}\right)^2 - \sqrt[3]{\det(A)}},$$

where $A \in SL_2(\mathbb{F}_p)$.

REFERENCES

1. Nering, Evar D., Linear Algebra and Matrix Theory (2nd ed.), (1970), *New York: Wiley, LCCN 76091646*

2. Jцrg LiesenVolker Mehrmann. *Linear Algebra.Springer Undergraduate Mathematics Series. Springer International Publishing Switzerland 2015 (2015).* DOI https://doi.org/10.1007/978-3-319

3. N. D. Zyulyarkina, “On the commutation graph of cyclic TI-subgroups in linear groups”, // Proc. Steklov Inst. Math. (Suppl.), 279, suppl. 1 (2012), 175–181.

4. V. Ya. Bloshchitsyn. The canonical form of automorphisms of the group SL_2 over rings, close to fields, // Mat. notes, 1986, volume 39, issue 2, 175–181.

5. Skuratovskii R.V. On the verbal width in the alternating group A_n and Matieu groups1 // Modern problems in mathematics and its applications International (53rd National) Youth School-Conference, 2022, Yekaterinburg from January 31 to February 4 section Group theory, pp. 1-2. https://sopromat.imm.uran.ru.

6. Skuratovskii R.V. On the verbal width in the alternating group A_n and Matieu groups. // International Algebraic Conference, dedicated to the 90th anniversary of the birth of A.I. Starostin. Book of Abstracts. 05 October 2021 - 09 October 2021. pp. 107-108.

7. Skuratovskii R.V. Square root in matrix groups $SL_2(F_p), ESL_2(F_p) and GL_2(F_p)$. // International Conference "Algebra and dynamical systems"dedicated to the 70th anniversary of A.A. Makhnev. July 9 - 15, 2023.

8. Ruslan Skuratovskii Extended Special Extended Special Linear group and square root in matrix groups $SL_2(F_p), SL_2(Z), ESL_2(F_p), ESL_2(Z)$. Source: [https://arxiv.org/pdf/2307.13873v2.pdf]

———————————————————————————

УДК 512.542

Группы с абсолютно $\mathfrak{F}$-субнормальными n-максимальными подгруппами[1]

И. Л. Сохор (Беларусь, г. Гомель)
Гомельский государственный университет имени Ф. Скорины
e-mail: irina.sokhor@gmail.com

Groups with absolutely $\mathfrak{F}$-subnormal n-maximal subgroups

I. L. Sokhor (Belarus, Gomel)
Francisk Skorina Gomel State University
e-mail: irina.sokhor@gmail.com

Рассматриваются только конечные группы. Принятые обозначения стандартны и соответствуют [1]. Будем писать $A \lessdot B$, если A — максимальная подгруппа в B.

Строение группы во многом определяется способ вложения ее подгрупп. В частности, субнормальные подгруппы имеют определяющее значение в строении непростых групп. Обобщением теоретико-группового понятия субнормальности является понятие формационной субнормальности.

Определение 1. *Пусть $\mathfrak{F}$ — формация. Подгруппа H группы G называется $\mathfrak{F}$-субнормальной, если существует такая цепочка подгрупп*

$$H = H_0 \lessdot H_1 \lessdot \ldots \lessdot H_i \lessdot H_{i+1} \lessdot \ldots \lessdot H_n = G,$$

что $\mathfrak{F}$-корадикал подгруппы H_{i+1} содержится в H_i для всех i.

Группы с формационно субнормальными n-максимальными подгруппами для различных n исследовались в работах многих авторов, см., например, [2, 3, 4] и литературу в них. Напомним, подгруппа M называется n-максимальной подгруппой группы G, если существует цепочка подгрупп

$$M = M_n \lessdot M_{n-1} \lessdot \ldots \lessdot M_1 \lessdot M_0 = G.$$

Определение 2 ([5]). *Подгруппа H группы G называется абсолютно $\mathfrak{F}$-субнормальной в G, если любая содержащая ее подгруппа $\mathfrak{F}$-субнормальна в G.*

Понятно, что если $\mathfrak{F}$ — наследственная формация и группа $G \in \mathfrak{F}$, то в группе G каждая подгруппа абсолютно $\mathfrak{F}$-субнормальна.

Изучены группы, в которых каждая n-максимальная подгруппа абсолютно $\mathfrak{F}$-субнормальна, для наследственной насыщенной формации $\mathfrak{F}$, содержащей все нильпотентные группы. В частности, установлено

Теорема 1. *Пусть $\mathfrak{F}$ — наследственная насыщенная формация, содержащая все нильпотентные группы, и пусть G – группа, каждая n-максимальная подгруппа которой абсолютно $\mathfrak{F}$-субнормальна, тогда*

(1) *при $n \le 2$ группа $G \in \mathfrak{F}$;*

(2) *при $3 \le n \le 4$ либо группа $G \in \mathfrak{F}$, либо G — разрешимая группа, длина главного ряда которой не превосходит $n-1$;*

(3) *при $n \ge 5$ либо группа $G \in \mathfrak{F}$, либо G — разрешимая группа, длина главного ряда которой не превосходит $n-1$, либо G — неразрешимая группа, для которой $3 \le \lambda(G) \le n-1$.*

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования Республики Беларусь (ГПНИ «Конвергенция-2025», № гос. рег. 20211467)

Здесь $\lambda(G)$ — глубина группы G — минимальная длина цепочек подгрупп вида

$$1 = M_k \lessdot M_{k-1} \lessdot \ldots \lessdot M_1 \lessdot M_0 = G,$$

которые могут быть построены для группы G.

Следствие 1. *Пусть $\mathfrak{F}$ — наследственная насыщенная формация, содержащая все нильпотентные группы, и $n \leq 4$. Если G — неразрешимая группа, в которой каждая n-максимальная подгруппа абсолютно $\mathfrak{F}$-субнормальна, то $G \in \mathfrak{F}$.*

Таким образом, установлен критерий принадлежности группы с абсолютно $\mathfrak{F}$-субнормальными n-максимальными подгруппами наследственной насыщенной формации $\mathfrak{F}$, содержащей все нильпотентные группы.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Huppert B. Endliche Gruppen I. — Berlin ; Heidelberg ; New York : Springer, 1967. 793 p.

2. Ковалева В. А., Скиба А. Н. Конечные разрешимые группы, у которых все n-максимальные подгруппы $\mathfrak{U}$-субнормальны // Сиб. матем. ж. 2013. Т. 54, № 1. P. 86–97.

3. Kovaleva V. A., Skiba A. N. Finite soluble groups with all n-maximal subgroups F-subnormal // J. Group Theory. 2014. Vol. 17. P. 273–290.

4. Konovalova M. N., Monakhov V. S., Sokhor I. L. Finite groups with formational subnormal strictly 2-maximal subgroups // Comm. Algebra. 2022. Vol. 50, № 4. P. 1606–1612.

5. Васильев А. Ф., Мельченко А. Г. Конечные группы с абсолютно формационно субнормальными силовскими подгруппами // Проблемы физ., матем. и техн. 2019. № 4 (41). С. 44–50.

УДК 512.542

Конечные группы, факторизуемые условно полунормальными подгруппами[1]

А. А. Трофимук (Беларусь, г. Брест)
Брестский государственный университет имени А. С. Пушкина
e-mail: alexander.trofimuk@gmail.com

Finite groups factorized by conditionally seminormal subgroups

A. A. Trofimuk (Belarus, Brest)
Brest State A. S. Pushkin University
e-mail: alexander.trofimuk@gmail.com

Рассматриваются только конечные группы. Используемая терминология соответствует [1].
Напомним, что подгруппа A называется *полунормальной* [2] в группе G, если в G существует подгруппа B такая, что $G = AB$ и AX — подгруппа для каждой подгруппы X из B.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке БРФФИ (грант №Ф23РНФ-237).

Группы с полунормальными подгруппами исследовались в работах многих авторов, см., например, литературу в [3]. Кроме того, в работе [3] изучено строение группы $G = AB$ с полунормальными сверхразрешимыми подгруппами A и B.

Подгруппы A и B группы G называются *перестановочными*, если $AB = BA$. Заметим, что равенство $AB = BA$ равносильно тому, что $AB \leq G$. Более слабое условие перестановочности было приведено в работе [4]: подгруппы A и B группы G называются cc-*перестановочными в* G, если A перестановочна с B^g для некоторого элемента $g \in < A, B >$.

Вполне естественно рассмотреть следующее

Определение 1. *Подгруппа A группы G называется условно полунормальной подгруппой в G, если в G существует подгруппа T такая, что $G = AT$ и A cc-перестановочна с каждой подгруппой из T.*

Очевидно, что всякая полунормальная подгруппа является условно полунормальной подгруппой. Обратное неверно. Примером является полупрямое произведение $G = Z_5 \rtimes Z_4$, в котором существует подгруппа порядка 2, которая является условно полунормальной подгруппой в G, но не является полунормальной подгруппой в G.

В настоящей работе установлены признаки сверхразрешимости группы, факторизуемой сверхразрешимыми условно полунормальными подгруппами. Доказана следующая

Теорема 1. *Пусть A и B — сверхразрешимые условно полунормальные подгруппы группы G и $G = AB$. Тогда G сверхразрешима в каждом из следующих случаев:*

(1) *коммутант G' нильпотентен;*

(2) $(|A|, |B|) = 1$*;*

(3) *G метанильпотентна и* $(|G : A|, |G : B|) = 1$*;*

(4) *G метанильпотентна и* $(|A/A^{\mathfrak{N}}|, |B/B^{\mathfrak{N}}|) = 1$.

Здесь $\mathfrak{N}$ — формация всех нильпотентных групп, а $H^{\mathfrak{N}}$ — $\mathfrak{N}$-корадикал группы H.

Пример 6. *Несверхразрешимая группа $G = E_{7^2} \rtimes S_3$, ([5], IdGroup=[294,7]), факторизуется сверхразрешими условно полунормальными подгруппами $A \simeq Z_7 \times D_{14}$ и $B \simeq E_{7^2} \rtimes Z_3$ такими, что $(|G : A|, |G : B|) = 1$ и $(|A/A^{\mathfrak{N}}|, |B/B^{\mathfrak{N}}|) = 1$, так как $A^{\mathfrak{N}} \simeq Z_7$ и $B^{\mathfrak{N}} \simeq E_{7^2}$. Поэтому условие метанильпотентности группы G в п. 3–4 теоремы 1 убрать нельзя.*

Следствие 1. ([3, теорема 2.2]) *Пусть A и B — полунормальные сверхразрешимые подгруппы группы G и $G = AB$. Если коммутант G' нильпотентен, то группа G сверхразрешима.*

Следствие 2. ([6, теорема C]) *Предположим, что $G = AB$, где A и B — сверхразрешимые подгруппы группы G. Пусть либо коммутант G' нильпотентен, либо $(|A|, |B|) = 1$. Если подгруппа A cc-перестановочна с каждой подгруппой из подгруппы B и подгруппа B cc-перестановочна с каждой подгруппой из подгруппы A, то G сверхразрешима.*

Представленные выше результаты также развивают исследования, проведенные в работе [7]. В ней было введено понятие tcc-подгруппы (подгруппа A группы G называется tcc-*подгруппой в* G, если в G существует подгруппа T такая, что $G = AT$ и каждая подгруппа A cc-перестановочна с каждой подгруппой из T). Кроме того, в [7] были изучены группы, факторизуемые tcc-подгруппами. В частности, доказано, что формация всех сверхразрешимых групп замкнута относительно произведения tcc-подгрупп.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Монахов В. С. Введение в теорию конечных групп и их классов. — Минск: Вышэйшая школа, 2006.
2. Su X. On semi-normal subgroups of finite group // J. Math. (Wuhan). 1988. V. 8, № 1. P. 7-9.
3. Монахов В. С., Трофимук А. А. О сверхразрешимости группы с полунормальными подгруппами // Сиб. мат. журн. 2020. Том 61, № 1. С. 148-159.
4. Guo W., Shum K. P., Skiba A. N. Conditionally Permutable Subgroups and Supersolubility of Finite Groups // Southeast Asian Bull. Math. 2005. Vol. 29. P. 493-510.
5. GAP (2022) Groups, Algorithms, and Programming, Version 4.12.2. www.gap-system.org.
6. Guo W., Shum K. P., Skiba A. N. Criterions of supersolubility for products of supersoluble groups // Publ. Math. Debrecen. 2006. Vol. 68, № 3–4. P. 433-449.
7. Trofimuk A. A. On the supersolubility of a group with some tcc-subgroups // J. Algebra Appl. 2021. Vol. 20, № 2. P. 2150020-1-2150020-18.

УДК 512.54

О проблеме сопряженности подгрупп в свободном произведении с объединением двух двупорожденных групп Артина

А. С. Угаров (Россия, г. Тула)
Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого
e-mail: ugarovas@tsput.ru

On the problem of conjugacy of subgroups in a free product with union of two two-generated Artin groups

A. S. Ugarov (Russia, Tula)
Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University
e-mail: ugarovas@tsput.ru

Будем говорить, что в группе G разрешима проблема сопряженности подгрупп, если существует алгоритм, позволяющий для любых двух конечнопорожденных подгрупп $H_1, H_2 \leqslant G$ установить, существует ли слово $z \in G$ такое, что

$$z^{-1}H_1z = H_2$$

Проблема сопряженности подгрупп является обобщением проблемы сопряженности слов. Новиковым П.С. было доказано, что в классе конечно определенных групп проблема сопряженности не разрешима.

Впервые проблема сопряженности подгрупп была положительно решена В. Н. Ремесленниковым для свободных нильпотентных групп в 1967 году [1]. В 1969 году Д. И. Молдаванским доказана разрешимость проблемы сопряженности конечно порожденных подгрупп свободной группы [2]. М. Д. Гриндлингером в 1970 году были доказаны необходимое и достаточное условие сопряженности двупорожденных подгрупп в свободной группе [3].

В 1971 году Безверхним В.Н. [4] и Молдаванским Д.И. [5] независимо друг от друга была решена проблема сопряженности подгрупп для свободного произведения групп при условии, что в сомножителях разрешимы проблемы вхождения и сопряженности подгрупп. В 1977 году Безверхним В.Н. [6] решена проблема сопряженности подгрупп в свободном произведении двух свободных групп конечного ранга с объединением по циклической подгруппе, в 1983 - в HNN -расширении по изоморфным конечным ассоциированным подгруппам при условии, что в базовой группе разрешимы проблемы вхождения и сопряженности подгрупп [7]. Также в 1975 году Безверхний В.Н. [8] показал, что в свободном произведении двух свободных групп, объединенных по подгруппе ранга 4, проблема сопряженности подгрупп неразрешима.

О. В. Инченко совместно с В. Н. Безверхним в 2010 году была решена проблема сопряженности подгрупп в конечно порожденных группах Кокстера с древесной структурой [9]. Е. С. Логачевой в 2013 году положительно решена проблема сопряженности конечно порожденных подгрупп в древесном произведении бесконечных циклических групп [10].

Пусть G — конечно порожденная группа Артина с копредставлением

$$G = \langle a_1, ..., a_l; < a_i a_j >^{m_{ij}} = < a_j a_i >^{m_{ji}}, i, j = \overline{1, l}, i \neq j \rangle,$$

где $< a_i a_j >^{m_{ij}}$ — слово длины m_{ij}, состоящее из m_{ij} чередующихся букв a_i и $a_j, i \neq j$, m_{ij} — число, соответствующее симметрической матрице Кокстера: $m_{ij} \in \mathbb{N} \setminus \{1\} \cup \{\infty\}, i \neq j$.

Для группы Артина G построим граф Γ так, что образующим a_i соответствуют вершины графа Γ, а каждому определяющему соотношению $< a_i a_j >^{m_{ij}} = < a_j a_i >^{m_{ji}}, m_{ji} < \infty$, — ребро, соединяющее вершины, соответствующие a_i и a_j, $i \neq j$. Если при этом получится дерево-граф, то группа Артина G называется группой Артина с древесной структурой.

Класс групп Артина с древесной структурой введен в рассмотрение В. Н. Безверхним в 2003 году [11].

Рассмотрим двупорожденную группу Артина $G_{ab} = \langle a, b; < ab >^{m_{ab}} = < ba >^{m_{ba}} \rangle$ (1).

Лемма 1. *([12]) Группа Артина G_{ab} при $m_{ab} = 2k+1$ изоморфна группе $\langle x, y; x^{2k+1} = y \rangle$, а при $m_{ab} = 2k$ - группе $\langle t, x; t^{-1} x^k t = x^k \rangle$.*

Определение 1. *Будем говорить, что в группе G разрешима проблема вхождения, если существует алгоритм, который для любой конечно порожденной подгруппы H группы G и для любого $w \in G$ устанавливает $w \in H$.*

Из работа [14], [16] следует лемма.

Лемма 2. *В группах Артина с двумя образующими разрешима проблема вхождения.*

Лемма 3. *В группах Артина с двумя образующими разрешима проблема сопряженности подгрупп [6].*

Данное утверждение следует из [6].

Группа Артина G с древесной структурой может быть представлена как свободное произведение двупорожденных групп Артина, объединенных по бесконечным циклическим подгруппам: от графа Γ группы Артина перейдем к графу $\overline{\Gamma}$ так, что вершинам графа $\overline{\Gamma}$ поставим в соответствие группы Артина на двух образующих G_{ij}, а всякому ребру $\overline{e}$ соединяющему вершины, соответствующие G_{ij} и G_{jk} — циклическую подгруппу $\langle a_j \rangle$

Каждый элемент свободного произведения $g \in G$ может быть единственным образом представлен в каноническом виде:

$$g = l_{1_g} \cdots l_{n_g} K_g r_{ng} \cdots r_{1_g},$$

где $r_{i_g}, l_{i_g}^{-1}$ - представители правых классов смежности группы G по подгруппе из G_1 или по подгруппе из $\langle a_n \rangle$, причем r_{i_g}, r_{i_g+1} принадлежат разным сомножителям группы G. Слог K_g

называется ядром. Если K_g не принадлежит объединяемой подгруппе C, то слоги l_{n_g} и r_{n_g} принадлежат одному сомножителю группы G, а K_g - другому. В таком случае слоговая длина будет равна $L(g) = 2n+1$. Если $K_g \in C$, то слоги l_{n_g} и r_{n_g} принадлежат разным сомножителям группы G, а длина слова равна $L_g = 2n$.

Если $r_{1_g} \cdots r_{1_g} = (l_{1_g} \cdots l_{n_g})^{-1}$ то слово

$$g = r_{1_g}^{-1} \cdots r_{n_g}^{-1} K_g r_{ng} \cdots r_{1_g}$$

называется трансформой. В противном случае, слово называется нетрансформой нечетной или четной длины соответственно.

Рассмотрим конечное множество слов $\{w_i\}_{i=\overline{1,N}}$ группы G, каждое из которых приведено к виду нетрансформы, трансформы четной или нечетной длины.

В основе доказательства лежит использование специального множества слов, открытого В. Н. Безверхним, являющимся обобщением нильсеновского множества.

Разобьем все слова специального множества слов $\{w_i\}_{i=\overline{1,N}}$ на множества: M_0 - нетрансформы и M_i - трансформы одного типа, содержащиеся в одной подгруппе, сопряженной некоторой подгруппе из G_1 или $\langle a_n \rangle$. Каждое из этих подмножеств порождает подгруппу $(M_i), i = 0, 1, \cdots, k$. Для $i = \overline{1, N}$ подгруппа (M_i) имеет вид:

$$(M_i) = r_{1_g}^{-1} \cdots r_{n_g}^{-1} C_i r_{ng} \cdots r_{1_g}.$$

Здесь C_i - подгруппы из G_1 или $\langle a_n \rangle$, порожденные ядрами трансформ. Подгруппы, порожденные трансформами, упорядочиваем по длинам крыльев их трансформ.

Лемма 4. *Подгруппа M_0 , порожденная нетрансформами специального множества, свободна и не содержит трансформ [13].*

Подгруппу, порожденную специальным множеством $\{w_i\}_{i=\overline{1,N}}$, будем обозначать $gp(M_0, S)$. Она представляет собой HNN-группу с основой S, являющуюся древесным произведением элементов из ряда подгрупп, упорядоченных по длинам трансформ, правильной системой проходных букв которой служат элементы из M_0. Подгруппы M_0 и $M_j, j = \overline{1, k}$, из ряда будем называть порождающими подгруппами подгруппы $\langle w_1 \ldots w_n \rangle = gp(M_0, S)$, причем S порождается подгруппами $M_1 \leq M_2 \leq \ldots \leq M_n$, где M_i - подгруппы, упорядоченные по длинам трансформ.

Определение 2. *Произведением $u_1 \cdots u_k$ назовем слово подгруппы $\langle w_1 \cdots w_n \rangle = gp(M_0, S)$ группы G, если:*

1. $u_i \neq 1$;
2. $u_i \in \{M_0 \cup M_0^{-1}\}$, *либо u_i принадлежит некоторой подгруппе (M_i);*
3. $u_i \neq u_{i+1}^{-1}$;
4. u_i, u_{i+1} *не содержатся в одной подгруппе (M_i);*
5. *в $u_1 \cdots u_k$ нет произведения $u_i u_{i+1} u_{i+2}, (i = \overline{1, k-2})$, где $u_i = u_{i+2}^{-1}, u_i \in \{M_0 \cup M_0^{-1}\}, u_{i+1} \in (M_j)$ и $u_i u_{i+1} u_{i+2} \in (M_s)$.*

Лемма 5. *Всякое произведение $w_{i_1}^{\epsilon_1} \cdots w_{i_m}^{\epsilon_m}$, где $\epsilon_j = \pm 1, w_{i_j}$ - образующие подгруппы $\langle \{w_i\}_{i=\overline{1,N}} \rangle$ через конечное число шагов можно привести к слову $u_{i_1} \cdots u_{i_k}, k \leq m$, подгруппы $gp(M_0, S) = \langle \{w_i\}_{i=\overline{1,N}} \rangle$ [13].*

Будем говорить, что между словами v_1 и v_2 имеет место касание первого, второго или третьего рода, если длина произведения v_1v_2 соответственно больше, равна или меньше $maxl(v_1)l(v_2)$ [13].

Определение 3. *Слово $u_1 \cdots u_k$ является простым, если $l(u_1 \cdots u_k) = maxl(u_1), \cdots, l(u_k)$ [13].*

Лемма 6. *Если $u_1 \cdots u_n$ - слово подгруппы $gp(M_0, S)$, то $l(u_1 \cdots u_n) > l_{u_i}, i = \overline{1, n}$*

Следствие 1. Если в слове $u_1 \cdots u_n$ выполнить сокращения в группе G, то в нем сокращение не затронет, по крайней мере, левую половину u_1 [13].

Следствие 2. Всякое слово подгруппы $gp(M_0, S)$ может быть представлено в виде произведения простых слов, между которыми имеет место касание первого рода [13].

Из леммы следует, что простое слово $u_1 ... u_n$ подгруппы $gp(M_0, S)$ может быть одного из следующих видов:

1. $u_1 \cdots u_k$ содержит нетрансформу максимальной длины;
2. слово $u_1 \cdots u_k$ содержит нетрансформу u_i и трансформу u_{i+1} максимальной длины
3. слово $u_1 \cdots u_k$ содержит нетрансформы u_i, u_{i+2} и трансформу u_{i+1} со свойствами $l(u_i) = l(u_{i+2}, l(u_i) = l(u_iu_{i+1}) = l(u_iu_{i+1}u_{i+2}), l(u_i) > l_{u_j}, 1 \leq j \leq i-1, i+3 \leq j \leq k$, причем длина слова u_{i+1} может оказаться меньше длины $l(u_i)$;
4. слово $u_1 ... u_k$ содержит трансформу u_i максимальной длины.

В статьях [15], [16] доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть группа*

$$G = \langle \prod_{s=1}^{n} *G_S; retG_1, \ldots, retG_s, \phi_{ji}(U_ij) = U_{ji} \rangle$$

- древесное произведение групп $Gs, 1 \leq s \leq n$, объединенных по изоморфным подгруппам $U_{ij} < G_i, U_{ji} < G_j$ с помощью фиксированного набора конструктивных изоморфизмов $\{\phi_{ij}\}, \phi_{ij}(U_ij) = U_{ji}$. Тогда, если подгруппы $U_ij, U_ji, i \in I_1, j \in I_2$, обладают условием максимальности и в сомножителях $G_s 1 \leq s \leq n$ разрешимы [14]:

1. *проблема вхождения;*
2. *проблема пересечения класса смежности любой конечно порожденной подгруппы $H < G_s$ с подгруппой $U\gamma, \gamma = \pm 1$;*
3. *существует алгоритм, выписывающий образующие пересечения любой конечно порожденной подгруппы $H < G_s$ с подгруппой $U\gamma, \gamma = \pm 1$;*

то существует алгоритм, преобразующий любое конечное множество слов группы G в специальное, порождающее подгруппу, совпадающую с подгруппой, порожденной исходным множеством, и в группе G разрешима проблема вхождения.

Теорема 2. *[17] Пусть группы G_1 и G_2 обладают свойством Хауссона (пересечение конечно порожденных подгрупп есть конечно порожденная подгруппа). Тогда, если в группах G_1 и G_2 разрешимы проблема вхождения и проблема пересечения двух конечно порожденных подгрупп, то их свободное произведение обладает свойством Хауссона и существует алгоритм, выписывающий образующие пересечения любых двух конечно порожденных подгрупп.*

Лемма 7. *Существует алгоритм, позволяющий для любого слова $w \in G_{ab}$, где G_{ab} - артинова группа и любой конечно порожденной подгруппы $H < G_{ab}$ и любой циклической подгруппы $C < G_{ab}$ установить пусто ли пересечение смежного класса $wH \cap C$.*

Лемма 8. *Существует алгоритм, выписывающий образующие пересечения конечно порожденной подгруппы $H < G_{ab}$ с любой циклической подгруппой $C < G_{ab}$.*

Данные результаты могут быть получены из следующей теоремы и леммы 1.

Рассмотрим группу $\overline{G}$, являющуюся свободным произведением двух двупорожденных групп Артина, объединенных по циклическим подгруппам. $\overline{G}$ имеет следующее копредставление:

$$\overline{G} = \langle G_{ab} *_C G_{cd}; rel(G_{ab}), rel(G_{cd}) u = w \rangle,$$

где $u \in G_{ab}$, $w \in G_{cd}$ (2).

Используя леммы 4, 5 и теорему 1, получаем следующую теорему.

Теорема 3. *В группе $\overline{G}$, являющейся свободным произведением двух двупорожденных групп Артина, объединенных по циклическим подгруппам, разрешима проблема вхождения.*

Используя условия теоремы и утверждения лемм получаем, что образующие каждой подгруппы исследуемого произведения можно привести к специальным образующим.

Лемма 9. *Всякое простое слово группы $\overline{G}$, порожденной свободным произведением двух двупорожденных групп Артина, объединенных по циклической подгруппе, имеющее своей несократимой записью трансформу $w = gag^{-1}$, где $a \in G_{ab}$ или $a \in \langle a_n \rangle$ может быть приведено к виду $gag^{-1} = u_1 u_2 \cdots u_n u_0 u_n^{-1} \cdots u_2^{-1} u_1^{-1}$, где u_0 - трансформа, принадлежащая одной из подгрупп $(M_i), i = \overline{1,k}$, $u_i \in (M_0)$, либо $u_i \in (M_i), u_1 u_2 \cdots u_n u_0 u_n^{-1} \cdots u_2^{-1} u_1^{-1}$ - слово подгруппы $gp(M_0, S)$.*

Пусть H - конечно порожденная подгруппа группы $\overline{G}$, порожденная двумя различными специальными множествами: $H = gp(M_0, S_1)$ и $H = gp(M_0', S_1')$, где $(M_i) = v_i^{-1} C_i v_i, (M_j' = g_j^{-1} C_j' g_j$, где каждая из подгрупп C_i и C_j' одновременно принадлежит либо одному из сомножителей, либо циклической подгруппе.

Лемма 10. *Пусть группа H порождена двумя различными специальными множествами: $H = gp(M_0, S_1)$ и $H = gp(M_0', S_1')$, где S_1 - древесное произведение подгрупп (M_i), а S' - древесное произведение подгрупп (M_j'). Тогда для каждой подгруппы $(M_i) = v_i^{-1} C_i v_i$ существует (M_j'), сопряженная словом $w_{ij} \in H$ такое, что $(M_i) = w_{ij}^{-1} (M_j') w_{ij}$.*

Используя предыдущую лемму, получаем следующую лемму.

Лемма 11. *Пусть $H_1 = gp(M_0, S_1)$ и $H_2 = gp(M_0', S')$ - две конечно порожденных подгруппы группы $\overline{G}$. Если H_1 и H_2 сопряжены в $\overline{G}$, то есть существует $z \in \overline{G}$ такой, что $z^{-1} H_1 z = H_2$, то существуют $w \in gp(M_0', S_1'), j = \overline{1, k_1}, s = \overline{1, k_2}$ такие, что $w^{-1} z^{-1} (M_j) z w = (M_s')$.*

Используя предыдущие леммы, получаем устанавливаем справедливость следующей теоремы.

Теорема 4. *В группе Артина $\overline{G}$, являющейся свободным произведением двух двупорожденных артиновых групп, объединенных по образующим, порождающим центры каждой из этих подгрупп, разрешима проблема сопряженности подгрупп.*

Доказательство непосредственно опирается на лемму 1 и работы [4], [5].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ремесленников В. Н. Сопряженность подгрупп в нильпотентных группах//. Алгебра и логика. 1967. Т. 6. вып. 2. С. 61-76.
2. Молдаванский Д. И, Сопряженность подгрупп свободной группы // Алгебра и логика. 1969. Т. 8, Вып. 6. С. 691-694.
3. Гриндлингер М. Д. Сопряженность подгрупп свободных групп // Сиб. мат. журнал. 1970. Т. 11. С. 875 — 876.
4. Безверхний В. Н. Решение проблемы сопряженности подгрупп для свободного произведения групп // IX Всесоюз. алгебр. коллоквиум. Резюме сообщений и докладов — Кишинев. 1971. С. 9-10.
5. Молдаванский Д. И. Решение проблемы сопряженности подгрупп // XXI Всесоюзный алгебраический коллоквиум. — Кишинев, 1971. — С. 62-63.
6. Безверхний, В. И. Решение проблемы сопряженности подгрупп для одного класса групп. I-II // Современная алгебра. Межвузовский сборник. - 1977. - Вып. 6. - С. 16-32.
7. Безверхний, В. Н. Решение проблемы сопряженности подгрупп в одном классе HNN-групп // Алгоритмические проблемы теории групп и полугрупп и их приложение. Межвузовский сборник научных трудов. - 1983. - С. 50-80.
8. Безверхний, В. Н. Неразрешимость проблемы сопряженности подгрупп для свободного произведения свободных групп с объединением / В. Н. Безверхний // Сборник научных трудов кафедры высшей математики. Тульский политехнический институт. - 1975. - Вып. 2. - С. 90-95.
9. Безверхний В. Н., Инченко О. В. Проблема сопряженности подгрупп в конечно порожденных группах Кокстера с древесной структурой // Чебышевский сборник. 2010. №3 (35).
10. Логачева Е. С. Проблема сопряженности подгрупп в свободном произведении бесконечных циклических групп с объединением// Известия ТулГУ. Естественные науки. 2013. №2-1.
11. Безверхний В. Н. О группах Артина, Кокстера с древесной структурой // V Международная конференция «Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения»: тезисы докладов. — Тула, 2003. С. 33-34.
12. Безвернхий В. Н. Решение обобщенной сопряженности слов в группах Артина большого типа // Фундаментальная и прикладная математика. 1999. Т. 5. № 1. С. 1-38.
13. Безверхний В.Н. Решение проблемы сопряженности подгрупп в одном классе HNN-групп // Алгоритмические проблемы теории групп и полугрупп и их приложение. Тула: ТГПИ, 1983. С. 50–80.
14. Безверхний В.Н. Решение проблемы вхождения для одного класса групп // Вопросы теории групп и полугрупп. Тула: ТГПИ , 1972. С.3–86.
15. Безверхний В. Н. Решение проблемы вхождения в некотором классе HNN-групп. // Алгоритмические проблемы теории групп и полугрупп и их приложение. Тула: ТГПИ, 1981. С. 20-62.

16. Безверхний В. Н. Решение проблемы вхождения в некоторых классах групп с одним определяющем соотношением. // Алгоритмические проблемы теории групп и полугрупп и их приложение. Тула: ТГПИ, 1986. С. 3-25.

17. Безверхний В. Н., Роллов Э. В. О подгруппах свободного произведения групп // Современная алгебра. Вып 1. Лениград, 1974. С. 16-31.

—————————————————————————————

Секция 2. Полугруппы и универсальные алгебры

УДК 512.577

О полугруппах отношений с конъюнктивными операциями

Д. А. Бредихин (Россия, г. Саратов)
Саратовский государственный университет
e-mail: bredikhin@mail.ru

On semigroups of relations with conjunctive operations

D. A. Bredikhin (Russia, Saratov)
Saratov State University
e-mail: bredikhin@mail.ru

A set of binary relations Φ closed with respect to some collection Ω of operations on relations forms an algebra (Φ, Ω) called an *algebra of relations* [1], and each such algebra can be considered to be partially ordered $(\Phi, \Omega, \subseteq)$ by the relation of set-theoretic inclusion $\subseteq$. We will consider algebras of relations with one binary operation, i.e., groupoids of relations, and focus on operations that satisfy the associativity condition. Let $R\{F\}$ (respectively, $R\{F, \subseteq\}$) be the class of all groupoids (partially ordered groupoids) isomorphic to groupoids (partially ordered groupoids) of relations with the binary operation F. It is well known, that for the operation of relation product $\circ$ the class $R\{\circ\}$ (respectively, $R\{\circ, \subseteq\}$)coincides with the class of all semigroups (partially ordered semigroups). There are some other associative operations on relations. For this reason, the problem of an axiomatic description of the corresponding classes naturally arises.

As a rule, operations on relations are defined by formulas of the first-order predicate calculus. These operations are called *logical*. Let $Rel(U)$ be the set of all binary relations on U. For any formula $\varphi(z_0, z_1, r_1, r_2)$ of the first-order predicate calculus (without equality and constants) containing two free variables z_0, z_1 and two binary predicate symbols r_1, r_2, we can associate the binary operation F on $Rel(U)$ defined in the following way:

$$F(\rho_1, \rho_2) = \{(u, v) \in U \times U : \varphi(u, v, \rho_1, \rho_2)\},$$

where $\varphi(u, v, \rho_1, \rho_2)$ means that the formula φ holds whenever z_0, z_1 are interpreted as u, v, and r_1, r_2 are interpreted as relations $\rho_1, \rho_2 \in Rel(U)$.

Logical operations can be classified according to the type of formulas that define them. An logical operation is called *primitive positive* [2] (in other terminology—*Diophantine* operations [3]), if it can be defined by a formula containing in its prenex normal form only existential quantifiers and conjunctions. An primitive positive operation is called *conjunctive* if it can be defined by a quantifier-free formula [4]. The operation $F^d(\rho_1, \rho_2) = F(\rho_2, \rho_1)$ is called *dual* to the operation F. The abstract properties of these operations are dual to each other. For this reason, we will consider only one of these operations. The operation $F^c(\rho_1, \rho_2) = (F(\rho_2^{-1}, \rho_1^{-1}))^{-1}$, where $^{-1}$ is the operation of relational inverse, called *conjugate* to the operation F. Note that the mapping $f(\rho) = \rho^{-1}$ is an antiisomorphism of groupoids $(Rel(X), F)$ and $(Rel(X), F^c)$, hence it will be enough to limit consideration to only one of these operations.

We say that the primitive positive operation F has *rank* k if it can be defined by a formula containing k conjunctive members and cannot be determined by formulas with a smaller number of them. There are only six operations (up to dual and conjugate) of rank 2 [4]. These are the intersection and five other operations characterized in [4]-[7]. Of these five operations, only one turned out to be associative [5]. The subject of our consideration are associative conjunctive operations of rank 3. By means of a routine calculation, it can be established that the number of associative conjunctive operations of rank 3 up to dual and conjugate is four. These operations are defined as follows: for any relations ρ_1 and ρ_2 from $Rel(U)$, put

$$
\begin{aligned}
F_1(\rho_1, \rho_2) &= \{(u,v) \in U \times U : (u,v) \in \rho_1 \wedge (v,u) \in \rho_1 \wedge (u,v) \in \rho_2\};\\
F_2(\rho_1, \rho_2) &= \{(u,v) \in U \times U : (u,u) \in \rho_1 \wedge (u,v) \in \rho_1 \wedge (u,v) \in \rho_2\};\\
F_3(\rho_1, \rho_2) &= \{(u,v) \in U \times U : (u,u) \in \rho_1 \wedge (v,v) \in \rho_1 \wedge (u,v) \in \rho_2\};\\
F_4(\rho_1, \rho_2) &= \{(u,v) \in U \times U : (u,u) \in \rho_1 \wedge (u,u) \in \rho_2 \wedge (u,v) \in \rho_2\}.
\end{aligned}
$$

A *partially ordered semigroup* is an algebraic system $(A, \cdot, \leq)$, where $(A, \cdot)$ is a semigroup and $\leq$ is a partial order relation on A that is compatible with multiplication, i.e., $x \leq y$ implies $xz \leq yz$ and $zx \leq zy$.

Theorem 1. *The classes $R\{F_1\}$ and $R\{F_2\}$ (respectively, $R\{F_1, \subseteq\}$ and $R\{F_2, \subseteq\}$) are the same. A partially ordered semigroup $(A, \cdot, \leq)$ belongs to the class $R\{F_1, \subseteq\} = R\{F_2, \subseteq\}$ if and only if it satisfies the following identities and quasi-identity:*

$$x^2y = xy, \tag{1}$$
$$xy^2 = yx^2, \tag{2}$$
$$xy \leq x, \tag{3}$$
$$xy \leq y, \tag{4}$$
$$x \leq yz \Rightarrow x = yx. \tag{5}$$

A semigroup $(A, \cdot)$ belongs to the class $R\{F_1\} = R\{F_2\}$ if and only if it satisfies identities (1) and (2).

Corollary 1. *The class $R\{F_1, \subseteq\} = R\{F_2, \subseteq\}$ does not form a variety in the class of all partial ordered semigroups. A partially ordered semigroup belongs to the variety generated by the class $R\{F_1, \subseteq\} = R\{F_2, \subseteq\}$ in the class of all partial ordered semigroups if and only if it satisfies identities (1) – (4).*

Theorem 2. *A partially ordered semigroup $(A, \cdot, \leq)$ belongs to the class $R\{F_3, \subseteq\}$ if and only if it satisfies identities (1), (4) quasi-identity (5) and the following identity:*

$$xyz = yxz. \tag{6}$$

A semigroup $(A, \cdot)$ belongs to the class $R\{F_3\}$ if and only if it satisfies identities (1) and (6).

Corollary 2. *The class $R\{F_3, \subseteq\}$ does not form a variety in the class of all partial ordered semigroups. A partially ordered semigroup belongs to the variety generated by the class $R\{F_3, \subseteq\}$ in the class of all partial ordered semigroups if and only if it satisfies identities (1), (4), and (6).*

Theorem 3. *A partially ordered semigroup $(A, \cdot, \leq)$ belongs to the class $R\{F_4, \subseteq\}$ if and only if it satisfies identities (1), (4), (6), and the following identity and quasi-identity:*

$$xy^2 = xy, \tag{7}$$
$$x \leq y^2 \wedge x \leq z^2 \Rightarrow x \leq yz. \tag{8}$$

A semigroup $(A, \cdot)$ belongs to the class $R\{F_3\}$ if and only if it satisfies identities (1), (6), and (7).

Corollary 3. *The class $R\{F_4, \subseteq\}$ does not form a variety in the class of all partial ordered semigroups. A partially ordered semigroup belongs to the variety generated by the class $R\{F_3, \subseteq\}$ in the class of all partial ordered semigroups if and only if it satisfies identities (1), (4), (6) and (7).*

REFERENCES

1. Schein B. M. Relation algebras and function semigroups // Semigroup Forum. 1970. V. 1. P. 1-62.
2. Böner P., Pöschel, F. R. Clones of operations on binary relations // Contributions to general algebra. 1991. V. 7. P. 50-70.
3. Bredikhin D. A. On quasi-identities of algebras of relations with Diophantine operations // Sib. Math. J. 1997. V. 38. P. 23-33.
4. Bredikhin D. A. On algebras of binary relations with conjunctive operations // Algebra Universalis. 2021. V. 82. Article 39.
5. Bredikhin D. A.On semigroups of relations with primitive-positive operations of rank two. // Математика. Механика: сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2019. Вып. 21. С. 10-11.
6. Bredikhin D. A. On generalized subreducts of Tarski's algebras of relations with the operation of bi-directional intersection // Algebra Universalis. 2018. V. 79. P. 77-92.
7. Bredikhin D. A. On Groupoids of Relations with One Conjunctive Operation of Rank 2 // Studia Logica. 2022. V. 110. P. 1137-1153.

УДК 512. 548

Группоиды с односторонним делением

А. А. Веселова (Россия, г. Волгоград)
Волгоградский государственный социально-педагогический университет
e-mail:alexandra.912@mail.ru

One-sided division groupoids

A. A. Veselova (Russia, Volgograd)
Volgograd State Pedagogical University
e-mail: alexandra.912@mail.ru

При шифровании текста активно применяются квазигруппы (см., например, [1], [2], [3]). Мы здесь рассмотрим алгоритм преобразования слов с помощью группоидов с левым или правым делением.

Напомним, что квазигруппой называют группоид, в котором для любых элементов a и b однозначно разрешимы уравнения

$$a * x = b, \quad y * a = b$$

(см. [4], стр. 39). В нашей работе будем рассматривать группоид $(Q, *)$, в котором для любых элементов a и b из Q однозначно разрешимо только одно из вышеуказанных уравнений.

Определение 1. *Если в группоиде $(Q, *)$ однозначно разрешимо уравнение $a * x = b$ $(y * a = b)$ для любых элементов a и b, то его называют левой (правой) квазигруппой [5]. Определим операцию левого (правого) деления $\backslash$ $(/)$ в этом группоиде следующим образом $b \backslash a = c \Leftrightarrow a * c = b \quad (b/a = c \Leftrightarrow c * a = b)$.*

Предложение 1. *В любой левой (правой) квазагруппе* $(Q, *)$ *верны тождества*

$$x * (y \setminus x) = y \quad ((y/x) * x = y), \tag{1}$$

$$(x * y) \setminus x = y \quad ((y * x)/x = y). \tag{2}$$

Предложение 2. *В любой левой (правой) квазигруппе* $(Q, *)$ *справедлив закон сокращения слева (справа)* $a * c = a * b \Rightarrow c = b \quad (c * a = b * a \Rightarrow c = b)$

Предложение 3. *Алгебра* $(Q, *, \setminus)$, *на которой выполнены тождества (1) и (2), является левой квазигруппой* $(Q, *)$.

Предложение 4. *Алгебра* $(Q, *, /)$, *на которой выполнены тождества (1) и (2) в скобках, является правой квазигруппой* $(Q, *)$.

Определение 2. *В левой (правой) квазигруппе* $(Q, *)$ *элемент* e *такой, что* $e * a = a$ $(a * e = a)$ *для любого* $a \in Q$, *называют левой (правой) единицей.*

Предложение 5. *Если в левой (правой) квазигруппе* $(Q, *)$ *верен закон коммутативности* $x * y = y * x$ *и в ней есть левая (правая) единица, то эта единица только одна.*

Теорема 1. *Если* $(Q, *)$ – *левая квазигруппа, то* $(Q, \setminus)$ – *правая квазигруппа. Причем, если в левой квазигруппе* $(Q, *)$ *есть левая единица, то в правой квазигруппе* $(Q, \setminus)$ *она будет правой единицей.*

Теорема 2. *Если* $(Q, *)$ – *правая квазигруппа, то* $(Q, /)$ – *левая квазигруппа. Причем, если в правой квазигруппе* $(Q, *)$ *существует правая единица, то в левой квазигруппе* $(Q, /)$ *она будет левой единицей.*

Определение 3. *Два группоида с операциями* $x * y$ *и* $x \bullet y$, *определенные на одном и том же множестве* Q, *называются изотопными, если существуют такие подстановки* α, β, γ *множества* Q, *что для любых* $x, y \in Q$ *верно* $\gamma(x \bullet y) = \alpha(x) * \beta(y)$ *(см. [6], стр. 13). В этом случае группоид* $(Q, \bullet)$ *называют изотопом группоида* $(Q, *)$.

Определение 4. *Упорядоченную тройку* $T = (\alpha, \beta, \gamma)$ *называют изотопией. Подстановки* (α, β, γ) *называются соответственно левой, правой и главной компонентами изотопии* T. *Изотопия вида* $T = (\alpha, \beta, 1)$, *то есть главная компонента равна тождественной подстановке, называется главной (см. [6], стр. 13).*

Заметим, что отношение изотопии будет для бинарных операций на множестве Q отношением эквивалентности.

Теорема 3. *Изотоп* $(Q, \ \bullet)$ *левой (правой) квазигруппы* $(Q, \ *)$ *также будет левой (правой) квазигруппой.*

Теорема 4. *Любая левая (правая) квазигруппа изотопна некоторой левой (правой) квазигруппе, в которой есть левая (правая) единицей.*

Рассмотрим конечное множество $Q = \{1, 2, \dots n\}$, $(Q, *)$ - левая квазигруппа, в такой группе операцию * можно описать таблицей, строки и столбцы которой пронумированы элементами множества Q, а в клетке, являющейся пересечением строки с номером i и столбца с номером j, записывают результат $i * j$.

В силу единственности решения уравнения $a * x = b$ в каждой строке этой таблицы стоят разные элементы из Q, то есть строки это значения перестановок на множестве $\{1, 2, \dots n\}$. Действительно, если бы в какой то сроке имелись два одинаковых элемента, то есть $i * j = k$

и $i * m = k$, то уравнение $i * x = k$ имело бы два различных решения, что противоречит определению левой квазигруппы.

Очевидно, что между таблицами такого вида и левыми квазигруппами определено взаимно однозначное соответствие. Количество перестановок на Q равно $n!$. Поскольку строк в таблице n, то количество рассматриваемых таблиц равно $(n!)^n$.

В работе [7] рассматривалось преобразование слов в заданном алфавите с использованием квазигрупп, а в работах [8], [9], [10] были указаны различные преобразования слов с использованием n-квазигрупп. Мы же будем преобразовывать слова с помощью левой квазигруппы.

Рассмотрим левую квазигруппу $(Q, *)$. Множество всех слов в алфавите Q обозначим $Q^+ = \{x_1 \dots x_k | x_i \in Q, k \geq 1\}$. Для фиксированного элемента a из Q на множестве Q^+ определим отображение

$$E\left(x_1 x_2 \dots x_k\right) = \left(a * x_1\right)\left(a * x_2\right)\dots\left(a * x_k\right). \tag{3}$$

А так же введем отображение

$$D\left(y_1 y_2 \dots y_k\right) = \left(y_1 \backslash a\right)\left(y_2 \backslash a\right)\dots\left(y_k \backslash a\right). \tag{4}$$

Предложение 6. *Отображения E и D являются биекциями и для любого $\alpha \in Q^+$*

$$D\left(E(\alpha)\right) = \alpha = E\left(D(\alpha)\right).$$

Рассмотрим левые квазигруппы $(Q, *_i)$, где $i = 1, \dots, n$, тогда мы можем задать отображения $E_1,\ E_2, \dots E_n,\ D_1,\ D_2, \dots D_n$ таким же образом как в (3) и в (4), выбрав фиксированные элементы $a_1,\ a_2, \dots a_n$ соответственно. Рассмотрим композиции

$E^{(n)}_{a_n,\dots,a_1} = E_n \circ E_{n-1} \circ \dots \circ E_1$ и $D^{(n)}_{a_1,\dots,a_n} = D_1 \circ D_2 \circ \dots \circ D_n$.

Очевидно, $D^{(n)}_{a_1,\dots,a_n}\left(E^{(n)}_{a_n,\dots,a_1}(\alpha)\right) = \alpha = E^{(n)}_{a_n,\dots,a_1}\left(D^{(n)}_{a_1,\dots,a_n}(\alpha)\right)$.

Теорема 5. *Пусть $c_1 c_2 \dots c_k \in Q^+$. Для операций $*_1,\ *_2, \dots, *_n$ на Q, где $(Q, *_i)$ – левые квазигруппы, и для элементов $a_1,\ a_2, \dots a_n \in Q,\ n \geq 1$ однозначно определено слово $x_1 x_2 \dots x_k \in Q^+$ такое, что верно*

$$E^{(n)}_{a_n,\dots a_1}\left(x_1 x_2 \dots x_k\right) = c_1 c_2 \dots c_k.$$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Глухов М. М. О применениях квазигрупп в криптографии // ПДМ. 2008. № 2. С. 28-32.

2. Artamonov V. A., Chakrabarti S., Gangopadhyay S., Pal S. K. On Latin squares of polynomially complete quasigroups and quasigroups generated by shifts // Quasigroups and Related Systems. 2013. Vol. 21, № 2. P. 117–130.

3. Artamonov V. A., Chakrabarti S., Pal S. K. Characterization of Polyno- mially Complete Quasigroups based on Latin Squares for Cryptographic Transformations // Discrete Applied Mathematics. 2016. P. 5–17.

4. Курош А. Г. Общая алгебра (лекции 1969-1970 учебного года. Москва, 1974.

5. Щербаков В. А. О конгруэнциях группоидов, тесно связанных с квазигруппами // Фундаментальная и прикладная математика. 2008.Том 14, № 5. С. 237-251.

6. Белоусов В. Д. Основы теории квазигрупп и луп. —Москва, 1967.

7. Markovski S., Gligoroski D., Bakeva V. Quasigroup String Processing: Part 1 // Proc. of Maked. Academ. of Sci. and Arts for Math. And Tect. Sci. XX. 1999. 1-2. P. 157-162.

8. Щучкин Н.А. Преобразования строк с помощью n-квазигрупп / Н.А. Щучкин // XVIII Международная конференция "Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы, приложения и проблемы истории посвященная 100-летию со дня рождения профессоров Б. М. Бредихина, В. И. Нечаева и С. Б. Стечкина. Тула, 23-26 сентября 2020 г. - Тульский государственный педагогический университет им. Л.Н. Толстого, 2020. - С. 117-119.

9. Щучкин, Н. А. Преобразования слов в заданном алфавите / Н. А. Щучкин // Алгебра, теория чисел, дискретная геометрия и многомасштабное моделирование: Современные проблемы, приложения и проблемы истории. Материалы XIX Международной конференции, посвящённой 200-летию со дня рождения академика П.Л. Чебышёва. - Тула: Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого, 2021. - 442 с. - С. 75-77.

10. Щучкин Н.А. Преобразования слов с помощью n-квазигрупповых операций / Н. А. Щучкин // Материалы XXI Международной конференции "Алгебра, теория чисел, дискретная геометрия и многомасштабное моделирование: современные проблемы, приложения и проблемы истории посвящённой 85-летию со дня рождения А.А. Карацубы. Тула, 2022. С. 119-122.

———————————————————————————

УДК 512. 548

Решётка топологий конечной цепи является булеаном[1]

А. А. Веселова (Россия, г. Волгоград)
Волгоградский государственный социально-педагогический университет
e-mail:alexandra.912@mail.ru
И. Б. Кожухов (Россия, г. Москва)
Национальный исследовательский университет «МИЭТ»; Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
e-mail: kozhuhov_i_b@mail.ru

The lattice of topologies of a finite chain is a boolean

A. A. Veselova (Russia, Volgograd)
Volgograd State Pedagogical University
e-mail: alexandra.912@mail.ru
I. B. Kozhukhov (Russia, Moscow)
National Research University of Electronic Technology (MIET); Lomonosov Moscow State University
e-mail: kozhuhov_i_b@mail.ru

Квазипорядком называется рефлексивное и транзитивное бинарное отношение. Пусть X – множество, на котором задан квазипорядок $\preccurlyeq$. Хорошо известно, что отношение $\sim$, определённое правилом

$$x \sim y \leftrightarrow x \preccurlyeq y \ \wedge \ y \preccurlyeq x,$$

является отношением эквивалентности на множестве X, а на фактор-множестве $X/\sim$ квазипорядок $\preccurlyeq$ индуцирует частичный порядок.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ, грант 22-11-00052

Пусть теперь X – универсальная алгебра с сигнатурой Ω. Обозначим через $\mathrm{Qord}X$ множество всех квазипорядков на X, стабильных относительно операций этой алгебры. Отношение эквивалентности, стабильное относительно всех операций из сигнатуры, называется *конгруэнцией* алгебры X. Обозначим множество всех конгруэнций через $\mathrm{Con}X$. Далее, пусть $\mathrm{Top}X$ – множество всех топологий на X, согласующихся с операциями (т.е. операции являются непрерывными отображениями). Множества $\mathrm{Qord}X$, $\mathrm{Con}X$ и $\mathrm{Top}X$ являются полными решётками относительно порядка $\alpha \leqslant \beta \Leftrightarrow \alpha \subseteq \beta$. Нулевым элементом каждой из этих решёток является отношение $\Delta_X = \{(x,x)|x \in X\}$ (отношение равенства), а единичным элементом – $\nabla_X = X \times X = \{(x,y)|x,y \in X\}$ (универсальное отношение). *Булеаном* называется решётка, изоморфная решётке подмножеств некоторого множества. Стейнер доказал для множеств без операций [1], что решётка квазипорядков $\mathrm{Qord}X$ изоморфно вкладывается в решётку, двойственную решётке топологий $\mathrm{Top}X$, а в случае, когда множество X конечно, это вложение является изоморфизмом. А.В.Карташова [2] доказала аналогичные утверждения для универсальных алгебр.

Пусть $X = \{1,2,\dots,n\}$ – конечная цепь, т.е. решётка с операциями $x \wedge y = \min\{x,y\}$ и $x \vee y = \max\{x,y\}$, а $\preccurlyeq$ – некоторый квазипорядок на X. Квазипорядок $\preccurlyeq$, как и всякое бинарное отношение, определяет на множестве X ориентированный граф, вершинами которого являются элементы множества X, а рёбрами – пары (x,y) такие, что $x \preccurlyeq y$. Компоненты сильной связности этого графа, очевидно, совпадают с классами отношения $\sim$. Для $x,y \in X$ полагаем $[x,y] = \{t|x \leqslant t \leqslant y\}$. Подмножество $A \subseteq X$ назовём *выпуклым*, если

$$\forall x,y,t \ x \leqslant t \leqslant y \ \wedge \ x,y \in A \to t \in A.$$

Предложение 1. *Пусть $X = \{1,2,\dots,n\}$ – конечная цепь. Тогда между квазипорядками на X, стабильными относительно операций $\wedge$ и $\vee$ цепи X, и словами длины $n-1$ в алфавите $\mathcal{A} = \{\sim,\to,\leftarrow,\Diamond\}$ имеется взаимно однозначное соответствие.*

Следствие 1. *Если X – цепь из n элементов, то решётка $\mathrm{Qord}X$ квазипорядков, стабильных относительно операций $\wedge$ и $\vee$ цепи X, состоит из 4^{n-1} элементов.*

Приведём пример, иллюстрирующий предложение 1. Пусть $n = 10$. Рассмотрим слово $w = \sim\to\to\sim\leftarrow\to\Diamond\to\leftarrow$. Ему соответствует квазипорядок, изображённый на рисунке 1.

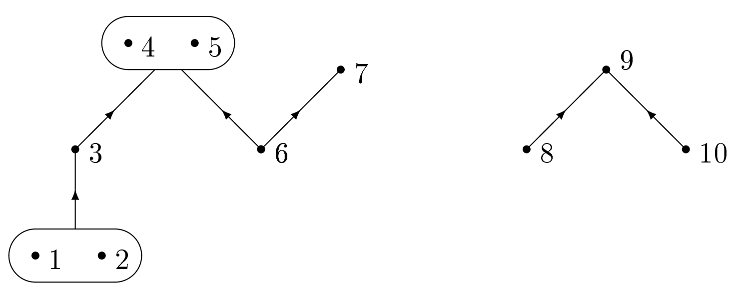


Рис. 1: Квазипорядок на конечной цепи

Введём следующие квазипорядки на множестве $X = \{1,2,\dots,n\}$:

$$\kappa_i = \{(i,i+1)\} \cup \Delta_X, \ \ \kappa_i' = \{(i+1,i)\} \cup \Delta_X$$

для $i = 1,2,\dots,n-1$. Нетрудно проверить, что κ_i, κ_i' – квазипорядки, стабильные относительно операций $\wedge$ и $\vee$, т.е. $\kappa_i, \kappa_i' \in \mathrm{Qord}X$. Ясно также, что κ_i, κ_i' являются атомами решётки $\mathrm{Qord}X$.

Теорема 1. *Пусть $X = \{1,2,\dots,n\}$ – цепь, рассматриваемая как решётка с операциями $\wedge = \min$ и $\vee = \max$. Тогда решётка $\mathrm{Qord}X$ всех квазипорядков, стабильных относительно операций $\wedge$ и $\vee$, является булеаном из 2^{2n-2} элементов. Атомами этого булеана являются квазипорядки $\kappa_1,\dots,\kappa_{n-1}$, $\kappa_1',\dots,\kappa_{n-1}'$.*

Каждая конгруэнция – это разбиение цепи X на выпуклые подмножества. Причем, таких разбиений ровно 2^{n-1}. Решётка Con$X$ – это булеан с атомами $\theta_1, \ldots, \theta_{n-1}$, где $\theta_i = \{(i, i+1), (i+1, i)\} \cup \Delta_X$ при $i = 1, 2, \ldots, n-1$.

Перейдём теперь к топологиям конечной цепи $X = \{1, 2, \ldots, n\}$. Цепь X мы рассматриваем как топологическую решётку с операциями $\wedge = \min$ и $\vee = \max$. Решётка Qord$X$ изоморфно вкладывается в решётку, двойственную решётке Top$X$, а так как множество X конечно и Qord$X$ – булеан, то имеет место изоморфизм: Top$X \cong$ Qord$X$ (очевидно, решётка, двойственная булеану, сама является булеаном). Следовательно, решётка Top$X$ является булеаном из 2^{2n-2} элементов.

Для каждого подмножества $A \subseteq X$ множество $\tau_A = \{\emptyset, A, X\}$ является топологией на X. Будем считать, что $A \neq \emptyset$ и $A \neq X$. Тогда τ_A – атом решётки топологий (всех топологий, не только согласующихся с операциями). Понятно, что если на множестве X заданы алгебраические операции и топология τ_A согласована с этими операциями, то она будет также атомом в решётке тех топологий, которые согласованы с операциями. Следующее предложение выясняет, какие из топологий τ_A согласуются с одной из операций $\wedge$, $\vee$ на конечной цепи $X = \{1, 2, \ldots, n\}$.

Предложение 2. *Топология $\tau_A = \{\varnothing, A, X\}$ где $A \neq \emptyset, X$, согласуются с одной из операций $\wedge$, $\vee$ конечной цепи X в том и только в том случае, если A выпукло и ровно один из элементов 1, n принадлежит A.*

Для цепи $X = \{1, 2, \ldots n\}$ положим: $A_i = \{1, 2, \ldots, i\}$ $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$, $B_j = \{j, j+1, \ldots, n\}$ $(j = 2, 3, \ldots, n)$,

$$\tau_i = \{\emptyset, A_i, X\} \ (i = 1, 2, \ldots, n-1), \quad \tau'_j = \{\emptyset, B_j, X\} \ (j = 2, 3, \ldots, n). \tag{1}$$

Введём в рассмотрение топологии

$$\tau_{i_1,\ldots,i_k,j_1,\ldots,j_l} = \tau_{i_1} \vee \ldots \vee \tau_{i_k} \vee \tau'_{j_1} \vee \ldots \vee \tau'_{j_l}, \tag{2}$$

где $i_1 < \ldots < i_k < n$ и $1 < j_1 < j_2 < \ldots < j_l$. Мы допускаем возможность выполнения равенств $k = 0$, $l = 0$ поодиночке или одновременно. При $k = l = 0$ считаем, что $\tau_{i_1,\ldots,i_k,j_1,\ldots,j_l} = \Delta_X$.

Теорема 2. *Пусть $X = \{1, 2, \ldots, n\}$ – цепь, рассматриваемая как решётка с операциями $\wedge = \min$ и $\vee = \max$. Тогда решётка Top$X$ всех топологий, относительно которых операции $\wedge = \min$ и $\vee = \max$ непрерывны, является булеаном из 2^{2n-2} элементов, состоящая в точности из топологий вида (2). Атомами этой решётки являются топологии, определённые по формулам (1).*

Замечание. Если множество $X = \{1, 2, \ldots, n\}$ рассматривать как алгебру с одной из операций $\wedge$, $\vee$ (т.е. как полурешётку), то решётки Qord$X$ и Top$X$ уже не будут булеанами, как показывают примеры.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. A. K. Steiner. The lattice of topologies: structure and complementation // Trans. Amer. Math. Soc..1966. Том 122, № 2. С. 379-398.

2. А. В. Карташова. О решётках квазипорядков и топологий алгебр // Фундаментальная и прикладная математика. 2008.Том 14, № 5. С. 85-92.

———————————————————————

УДК 512.548

Степени элементов в полиадической группе специального вида[1]

А. М. Гальмак (Беларусь, г. Могилев)
Белорусский государственный университет пищевых и химических технологий
e-mail:halm54@mail.ru
И. В. Юрченко (Беларусь, г. Могилев)
Белорусский государственный университет пищевых и химических технологий
e-mail: yurchenko-irina@mail.ru

Powers in l-ary groups of special form

A. M. Gal'mak (Belarus, Mogilev)
Belarusian State University of Food and Chemical Technologies
e-mail: halm54@mail.ru
I. V. Yurchenko (Belarus, Mogilev)
Belarusian State University of Food and Chemical Technologies
e-mail: yurchenko-irina@mail.ru

Полиадическим группоидом специального вида, определяемым тернарным групподом, называют [1] универсальную алгебру $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$ с одной $(2s+1)$-арной операцией $\eta_{s,\sigma,k}$, где $s \geqslant 1$, $k \geqslant 2$, которая определяется на декартовой степени A^k тернарного группоида $< A, \eta >$ с помощью подстановки σ множества $\{1, \ldots, k\}$.

Если $< A, \eta >$ – тернарная группа,

$$\mathbf{x}_i = (x_{i1}, \ldots, x_{ik}) \in A^k, i = 1, 2, \ldots, 2s+1, \tag{1}$$

то $(2s+1)$-арная операция $\eta_{s,\sigma,k}$ может быть определена следующим образом:

$$\eta_{s,\sigma,k}(\mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_{2s+1}) = (y_1, \ldots, y_k), \tag{2}$$

где для любого $j \in \{1, \ldots, k\}$ j-ая компонента y_j находится по формуле

$$y_j = \eta(x_{1j} x_{2\sigma(j)} \ldots x_{(2s+1)\sigma^{2s}(j)}). \tag{3}$$

В [2] было доказано, что если $< A, \eta >$ – тернарная группа, подстановка σ удовлетворяет условию $\sigma^{2s+1} = \sigma$, то $(2s+1)$-арный группоид $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$ является $(2s+1)$-арной группой.

Согласно Э. Посту [3], ν-ой n-адической степенью элемента a n-арной группы $< A, \eta >$ называется элемент этой же n-арной группы, обозначаемый символом $a^{[\nu]}$ и определяемый следующим образом:

$$a^{[\nu]} = a, \text{если} \nu = 0;$$
$$a^{[\nu]} = \eta(\underbrace{a \ldots a}_{\nu(n-1)+1}), \text{если} \nu > 0;$$
$$a^{[\nu]} - \text{решение уравнения} \eta(x \underbrace{a \ldots a}_{-\nu(n-1)}) = a, \text{если} \nu < 0. \tag{4}$$

Ясно, что элемент $a^{[-1]}$ совпадает с косым элементом $\bar{a}$ для элемента a, то есть $a^{[-1]} = \bar{a}$.

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке...

Теорема 1. *Пусть* $< A,\eta >$ *- тернарная группа,* σ *- подстановка из* $\boldsymbol{S}_k$ *порядка* d, $2s = td$ *для некоторого натурального* t, $\boldsymbol{a} = (a_1,\dots,a_k)$ *- произвольный элемент* $(2s+1)$*-арной группы* $< A^k,\eta_{s,\sigma,k} >$,

$$\alpha_j = a_{\sigma(j)}\dots a_{\sigma^{d-1}(j)}, j = 1,\dots,k, \tag{5}$$

α_j^{-1} *- любая обратная последовательность в* $< A,\eta >$ *для последовательности* α_j*. Тогда:*

$$\boldsymbol{a}^{[\nu]} = \boldsymbol{a}, \textit{при } \nu = 0;$$
$$\boldsymbol{a}^{[\nu]} = (\eta(a_1 \underbrace{\alpha_1 a_1 \dots \alpha_1 a_1}_{t\nu}),\dots,\eta(a_k \underbrace{\alpha_k a_k \dots \alpha_k a_k}_{t\nu})) \textit{ при } \nu > 0;$$
$$\boldsymbol{a}^{[\nu]} = (\eta(\alpha_1^{-1} \underbrace{\overline{a_1}\alpha_1^{-1}\dots\overline{a_1}\alpha_1^{-1}}_{-t\nu-1}),\dots,\eta(\alpha_k^{-1} \underbrace{\overline{a_k}\alpha_k^{-1}\dots\overline{a_k}\alpha_k^{-1}}_{-t\nu-1})) \textit{ при } \nu < 0. \tag{6}$$

Если d – чётное, то последовательность α_j в теореме 1 эквивалентна в смысле Поста элементу $\eta(a_{\sigma(j)}\dots a_{\sigma^{d-1}(j)})$. Поэтому можно считать

$$\alpha_j = \eta(a_{\sigma(j)}\dots a_{\sigma^{d-1}(j)}), \tag{7}$$

соответственно

$$\alpha_j^{-1} = \overline{\alpha_j} = \overline{\eta(a_{\sigma(j)}\dots a_{\sigma^{d-1}(j)})}. \tag{8}$$

Имея в виду сказанное, теорема 1 принимает для чётного d следующий вид.

Теорема 2. *Пусть* $< A,\eta >$ *- тернарная группа,* σ *- подстановка из* $\boldsymbol{S}_k$ *чётного порядка* d, $2s = td$ *для некоторого натурального* t, $\boldsymbol{a} = (a_1,\dots,a_k)$ *- произвольный элемент* $(2s+1)$*-арной группы* $< A^k,\eta_{s,\sigma,k} >$,

$$\alpha_j = \eta(a_{\sigma(j)}\dots a_{\sigma^{d-1}(j)}), j = 1,\dots,k. \tag{9}$$

Тогда:

$$\boldsymbol{a}^{[\nu]} = \boldsymbol{a}, \textit{при } \nu = 0;$$
$$\boldsymbol{a}^{[\nu]} = (\eta(a_1 \underbrace{\alpha_1 a_1 \dots \alpha_1 a_1}_{t\nu}),\dots,\eta(a_k \underbrace{\alpha_k a_k \dots \alpha_k a_k}_{t\nu})) \textit{ при } \nu > 0;$$
$$\boldsymbol{a}^{[\nu]} = (\eta(\overline{\alpha_1} \underbrace{\overline{a_1}\ \overline{\alpha_1}\dots\overline{a_1}\ \overline{\alpha_1}}_{-t\nu-1}),\dots,\eta(\overline{\alpha_k} \underbrace{\overline{a_k}\ \overline{\alpha_k}\dots\overline{a_k}\ \overline{\alpha_k}}_{-t\nu-1})) \textit{ при } \nu < 0. \tag{10}$$

Следствие 1. *Пусть* $< A,\eta >$ *- тернарная группа,* σ *- подстановка из* $\boldsymbol{S}_k$ *порядка* 2, $\boldsymbol{a} = (a_1,\dots,a_k)$, *- произвольный элемент* $(2s+1)$*-арной группы* $< A^k,\eta_{s,\sigma,k} >$*. Тогда:*

$$\boldsymbol{a}^{[\nu]} = \boldsymbol{a}, \textit{при } \nu = 0;$$
$$\boldsymbol{a}^{[\nu]} = (\eta(a_1 \underbrace{a_{\sigma(1)} a_1 \dots a_{\sigma(1)} a_1}_{s\nu}),\dots,\eta(a_k \underbrace{a_{\sigma(k)} a_k \dots a_{\sigma(k)} a_k}_{s\nu})) \textit{ при } \nu > 0;$$
$$\boldsymbol{a}^{[\nu]} = (\eta(\overline{a_{\sigma(1)}} \underbrace{\overline{a_1}\ \overline{a_{\sigma(1)}}\dots\overline{a_1}\ \overline{a_{\sigma(1)}}}_{-s\nu-1}),\dots,\eta(\overline{a_{\sigma(k)}} \underbrace{\overline{a_k}\ \overline{a_{\sigma(k)}}\dots\overline{a_k}\ \overline{a_{\sigma(k)}}}_{-s\nu-1})) \textit{ при } \nu < 0. \tag{11}$$

Ввиду равенства $\mathbf{a}^{[-1]} = \bar{\mathbf{a}}$, из полученных результатов вытекают соответствующие результаты из [4] о косых элементах.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гальмак А. М., А. Д. Русаков О полиадических операциях на декартовых степенях // Известия ГГУ им. Ф. Скорины. 2014. № 3. С. 35-40.

2. Гальмак А. М. О разрешимости уравнений в $< A^k, \eta_{s,\sigma,k}$ // Веснiк МДУ iм. А.А. Куляшова. 2018. № 1(51). С. 4-10.

3. Post E. L. Polyadic groups // Trans. Amer. Math. Soc. 1940. Vol. 48. № 2. P. 208–350.

4. Гальмак А. М., Ю. И. Кулаженко, М. В. Селькин Косые элементы в полиадических группах специального вида // Веснiк МДУ iм. А.А. Куляшова. 2020. № 2(56). С. 13-20.

———————————————————————————————

УДК 511.32

Об отображениях, порождающих вторичные булево-матричные идемпотенты

И. В. Дивейкин (Россия, г. Саратов)
Саратовский национальный исследовательский государственный университет
им. Н. Г. Чернышевского
e-mail: ivan11296@mail.ru

On mapping which generate secondary Boolean matrix idempotents

I. V. Diveikin (Russia, Saratov)
Saratov State University
e-mail: ivan11296@mail.ru

1. Введение

Рассмотрим частичную полугруппу булевых матриц $\langle M(B), \sqcap \rangle$, где B - произвольная булева алгебра. Отображения $r(A), l(A), m(A), n(A)$ каждой булевой матрице A размера $m \times n$ ставит в соответствие идемпотент из $E(M(B))$

Конъюнктного произведения $\sqcap$ для любых согласованных матриц A и B как матрица $C = A \sqcap B$ с элементами $c_j^i = \bigcup\limits_k \left(A_k^i \cap B_j^k \right)$. Дизъюнктное произведение $\sqcup$ определяется равенством $A \sqcup B = (A' \sqcap B')'$ с помощью булевой операции дополнения $'$.

Отображения $r(A), l(A), m(A), n(A)$ определим следующим образом:

$$
\begin{aligned}
r\left(A\right) &= A \sqcup \left(A^T\right)', \\
l\left(A\right) &= \left(A^T\right)' \sqcup A, \\
m\left(A\right) &= r\left(A'\right) = A' \sqcup A^T, \\
n\left(A\right) &= l\left(A'\right) = A^T \sqcup A'.
\end{aligned} \tag{1}
$$

Пользуясь свойством матриц с элементами из произвольной булевой алгебры: порождать с помощью булевых операций идемпотенты мультипликативной полугруппы булевых матриц, которые называются вторичными и изучению которых посвящены работы [1],[2], и получаются определенные выше отображения.

2. Свойства множества отображений

Теорема 1. *Для операции композиции отображений группоида $S = \{r, l, m, n\}$ верна следующая таблица Кэли (таблица 1): .*

	r	l	m	n
r	r	l	m	n
l	r	l	m	n
m	m	n	r	l
n	m	n	r	l

Таблица 1: таблица Кэли

Теорема 2. *Множество $S = \{r, l, m, n\}$ с операцией композицией отображений является полугруппой.*

В доказательстве проверяется ассоциативность операции композиции.
По полученным результатам можно сделать некоторые выводы:

- В полугруппе S есть две единицы, причём левые – r и l;
- Рассмотренная полугруппа с сокращением слева;
- В полугруппе нет нулей;
- r и l - идемпотенты.

3. Отношения Грина на полугруппе

Будем использовать такие известные понятия для полугрупп, как $\mathcal{D}-$, $\mathcal{R}-$, $\mathcal{L}-$ и $\mathcal{H}-$ отношения эквивалентностей Грина на полугруппе, разбивающее её на классы [1],[2].

Теорема 3. *Полугруппа $S = \{r, l, m, n\}$ с операцией композицией отображений проста и является объединением двух групп.*

Доказательство. Найдём классы Грина полугруппы S. Для этого найдём главные левые, правые и двусторонние идеалы.

Нетрудно заметить, что главные левосторонние идеалы есть

$$Sr = \{r, m\}, Sl = \{l, n\}, Sm = \{m, r\}, Sn = \{n, l\}.$$

Получаем что классы $\mathcal{L}$-эквивалентности есть $\{(r, m), (l, n)\} \in \mathcal{L}$.

Теперь найдём главные правосторонние идеалы:

$$rS = \{l, r, m, n\}, lS = \{l, r, m, n\}, mS = \{l, r, m, n\}, nS = \{l, r, m, n\}.$$

Получаем что все правосторонние идеалы равны S и тогда единственный класс $\mathcal{R}-$ эквивалентности есть

$$\{(r, l), (r, m), (r, n), (l, m), (l, n), (m, n)\} \in \mathcal{R}.$$

Главные двухсторонние идеалы также совпадают со всей полугруппой S:

$$SrS = \{l, r, m, n\}, SlS = \{l, r, m, n\}, SmS = \{l, r, m, n\}, SnS = \{l, r, m, n\}.$$

Таким образом получаем, что классы $\mathcal{D}$ - эквивалентности есть

$$\{(r,l),(r,m),(r,n),(l,m),(l,n),(m,n)\} \in \mathcal{D}.$$

Заметим, что $\mathcal{H}$-классы это $\{(r,m),(l,n)\} \in \mathcal{H}$, т.е. полугруппа состоит из двух групп, образующих две ячейки egg-box картинки полугруппы S. □

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Поплавский В. Б. Об идемпотентах алгебры булевых матриц // Известия Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2012. Т. 12, вып. 2. С. 26–33.
2. Поплавский В. Б. О приложении ассоциативности дуальных произведений алгебры булевых матриц // Фундаментальная и прикладная математика. 2012. Т. 17, вып. 4. С. 181–192.
3. Клиффорд А., Престон Г. Алгебраическая теория полугрупп. М: "МИР",1972.-Т. 1. 287 с.
4. Поплавский В. Б. О рангах, классах Грина и теории определителей булевых матриц // Дискретная математика. 2008. Т.20, вып. 4. С. 42–60.

УДК 511

Представления относительно свободных алгебр и теоремы канонизации

А. Канель-Белов (Израиль, г. Рамат-Ган)
Университет им. Бар-Илана
e-mail: kanelster@gmail.com

Representations of relatively free algebras and canonization theorems

A. Kanel-Belov (Israel, Ramat Gan)
Bar-Ilan University
e-mail: kanelster@gmail.com

The proof of local finite basis property and local representability of relatively free algebras was done, according to the Kemer programm. In order to make the proof more acceptable, the following question arises. What does it provide for the community? Why should people read it?

Joint work of the speaker with Louis Rowen and Uzi Vishne discovered relations with noncommutative algebraic geometry and provided new insights for representation theory.

Consider representation ρ of k-algebra A to matrix algebra over algebraic closed field K, which is an affine space. Then Zarissky closer of $\rho(A)$ satisfies the same identities and its natural to investigate representations up to Zarissky closure which usually is not a linear span if k is finite. $\rho(A)$ decomposes into a sum of prime components and Pierce components of radical. First canonization theorem says that it can be reduced to upper block-triangular case. Blocks are either *glued* (may be up to *Frobenius twist*) or independant. Second canonization theorem provides information for quiver or pseudoquiver. Third canonisation theorem says about quiver transformation under factoring by representable T-ideal. And Fourth (projective) canonization theorem provide existence of non-identities of some canonical structure inside non-zero T-ideal and Phoenix property ("hiking") saying that any element of T-ideal generated by hiked polynomial can be restituted to the same form. Because one can provide via substitutions on hiked polynomial structure of the Notherean module, Specht properties and local representability follows.

————————————————————————————————

УДК 512.579

О решетках с дополнениями квазимногообразий унаров

В. К. Карташов (Россия, г. Волгоград)
Волгоградский государственный социально-педагогический университет
e-mail: kartashovvk@yandex.ru
А. В. Карташова (Россия, г. Волгоград)
Волгоградский государственный социально-педагогический университет
e-mail: kartashovaan@yandex.ru

On complemented lattices of quasivarieties of monounary algebras

V. K. Kartashov (Russia, Volgograd)
Volgograd State Pedagogical University
e-mail: kartashovvk@yandex.ru
A. V. Kartashova (Russia, Volgograd)
Volgograd State Pedagogical University
e-mail: kartashovaan@yandex.ru

Следуя [1], для произвольного квазимногообразия $\mathfrak{K}$ алгебраических систем фиксированной сигнатуры через $L_q(\mathfrak{K})$ будем обозначать решетку всех подквазимногообразий квазимногообразия $\mathfrak{K}$ относительно включения. Всякая решетка, изоморфная решетке $L_q(\mathfrak{K})$, называется *Q-решеткой квазимногообразия Q*.

Проблема Биркгофа-Мальцева ([2], [3]) заключается в описании класса всех Q-решеток. Интерес к таким решеткам возникает в связи с тем, что они содержат значительную информацию о синтаксических свойствах и, в частности, о базисах квазитождеств систем из $\mathfrak{K}$ [1].

Для решения проблемы Биркгофа-Мальцева в общей постановке чрезвычайно важным является анализ ситуации для конкретных сигнатур.

В настоящее время получен ряд глубоких результатов в классе групп, колец и т.д. (см., например, [4]).

В данной работе дана конкретная характеризация класса всех Q-решеток с дополнениями квазимногообразий унаров. Ранее такая задача была решена для дистрибутивных Q-решеток квазимногообразий унаров [5].

Унаром называется алгебра с одной унарной операцией. Очевидно, что унар можно рассматривать как полигон над циклической полугруппой либо как автомат без выхода с одним входным сигналом.

Доказательство основных результатов существенно опирается на описание Q-критических унаров, т. е. конечно порожденных унаров, которые не разлагаются в подпрямое произведение собственных подунаров ([6]).

В работе [6] доказано, что любое квазимногообразие унаров определяется своими Q-критическими унарами. Эта информация в дальнейшем была существенно использована для решения вопросов о базисах квазитождеств унаров [7] и для нахождения условий, при которых Q-решетки квазимногообразий унаров обладают заданным решеточным свойством [8].

В дальнейшем $\mathbb{N}$ всюду означает множество целых положительных чисел и $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Пусть $\mathfrak{A} = \langle \{0, 1, 2\}, \leqslant \rangle$ – трехэлементная цепь. Для любого $n \in \mathbb{N}$ через $L_c(n)$ обозначим подмножество декартовой степени $\mathfrak{A}^n$, состоящее из упорядоченных наборов $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, удовлетворяющих следующим двум условиям

1. $a_1 \in \{1, 2\}$;

2. $\forall i, k \in \{1, 2, \ldots, n\}(i > k \ \& \ a_k = 2 \Rightarrow a_i \in \{0, 2\})$.

Пусть $\mathbb{N}_0^\infty$ – множество целых неотрицательных чисел с присоединенным внешним образом наибольшим элементом ∞. Для любого целого числа $n \geqslant 2$ обозначим через $L_c(n, \infty)$ множество всех наборов $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathfrak{A}^{n-1} \times \mathbb{N}_0^\infty$, удовлетворяющих следующим двум условиям

1. $(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}) \in L_c(n-1)$

2. $\forall i \in \{1, 2, \ldots, n-1\}(a_i = 2 \Rightarrow a_n \in \{0, \infty\})$.

Очевидно, что $\langle L_c(n), \leqslant \rangle$ и $\langle L_c(n, \infty), \leqslant \rangle$ – решетки.

Теорема 1. *Конечная решетка L с дополнениями, имеющая n атомов, изоморфна решетке $L_q(\mathfrak{M})$ для некоторого квазимногообразия $\mathfrak{M}$ унаров тогда и только тогда, когда она удовлетворяет одному из следующих условий:*

1. *L – булева решетка;*

2. *$L \cong L_c(n)$;*

3. *$L \cong L_c(n-1) \times \widetilde{\mathbf{2}}$, где $n \geqslant 2$ и $\widetilde{\mathbf{2}}$ – двухэлементная решетка.*

Теорема 2. *Пусть $\mathfrak{M}$ – некоторое квазимногообразие унаров и $L_q(\mathfrak{M})$ – конечная решетка с дополнениями, имеющая n атомов. Тогда мощность этой решетки равна либо 2^n, либо $2^{n-2}(n+3)$, либо $2^{n-2}(n+2)$.*

Теорема 3. *Бесконечная решетка L с дополнениями изоморфна решетке $L_q(\mathfrak{M})$ для некоторого квазимногообразия $\mathfrak{M}$ унаров тогда и только тогда, когда она удовлетворяет одному из следующих условий:*

1. *$L \cong L_c(n, \infty)$, где n – число атомов решетки L и $n \geqslant 2$;*

2. *$L \cong L_c(n-1, \infty) \times \widetilde{\mathbf{2}}$, где $n \geqslant 3$ – число атомов решетки L.*

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Горбунов В. А. Алгебраическая теория квазимногообразий. Новосибирск: Научная книга, 1999.

2. Birkhoff G. Universal Algebra // Proc. First Canadian Mathematical Congress (Montreal, 1945). Toronto: University of Toronto Press, 1946. P. 310–326.

3. Мальцев А. И. О некоторых пограничных вопросах алгебры и математической логики // Международный конгресс математиков (Москва, 1966): тезисы докладов по приглашению. М.: Мир, 1968. С. 217–231.

4. Виноградов А. А. Квазимногообразия абелевых групп // Алгебра и логика. 1965. Т. 4, № 6. С. 15–19.

5. Карташов В. К., Карташова А. В. Характеризация дистрибутивных решеток квазимногообразий унаров // Чебышевский сборник. 2021. Т. 22, № 1. С. 177–187.

6. Карташов В. К. Квазимногообразия унаров // Матем. заметки. 1980. Т. 27, № 1. С. 7–20.

7. Карташов В. К. Квазимногообразия унаров с конечным числом циклов // Алгебра и логика. 1980. Т. 19, № 2. С. 173–193.

8. Карташов В. К. О решетках квазимногообразий унаров // Сиб. матем. журн. 1985. Т. 26, № 3. С. 49–62.

———————————————————————————————

УДК 512.534.3

О полигонах над прямоугольными группами[1]

И. Б. Кожухов (Россия, г. Москва)
Национальный исследовательский университет «МИЭТ»; Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
e-mail: kozhuhov_i_b@mail.ru
К. А. Колесникова (Россия, г. Москва)
Национальный исследовательский университет «МИЭТ»; Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
e-mail: ksenya.koless@gmail.com

On the acts over rectangular groups

I. B. Kozhukhov (Russia, Moscow)
National Research University of Electronic Technology (MIET); Lomonosov Moscow State University
e-mail: kozhuhov_i_b@mail.ru
K. A. Kolesnikova (Russia, Moscow)
National Research University of Electronic Technology (MIET); Lomonosov Moscow State University
e-mail: ksenya.koless@gmail.com

Решётку конгруэнций универсальной алгебры A будем обозначать через $\mathrm{Con}A$. Это полная решётка с нулевым элементом $\Delta = \{(a,a) | \, a \in A\}$ и единичным элементом $\nabla = \{(a,b) | \, a, b \in A\}$. Алгебра A называется *простой*, если она не имеет подалгебр, отличных от A. Алгебра A *конгруэнц-проста*, если $\mathrm{Con}A = \{\Delta, \nabla\}$, и *нетривиальна*, если $|A| > 1$.

Полигон X над полугруппой S [1] — это множество, на котором действует полугруппа S, т. е. определено отображение $X \times S \to X$, $(x,s) \mapsto xs$, удовлетворяющее условию $x(st) = (xs)t$ при $x \in X$, $s, t \in S$. Полигон X назовём *квазиунитарным*, если $XS = X$. В случае, когда полугруппа S имеет единицу, квазиунитарный полигон – то же самое, что унитарный. *Копроизведение* $\coprod_{i \in I} X_i$ полигонов X_i – это дизъюнктоное объединение этих полигонов (или их изоморфных копий, если какие-либо из X_i имеют непустое пересечение).

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ, грант № 22-11-00052

Рисовская матричная полугруппа $S=\mathcal{M}(G,I,\Lambda,P)$, где G — группа, I и Λ — множества, $P=\|p_{\lambda i}\|$ — $\Lambda\times I$-матрица с элементами $p_{\lambda i}\in G$, определяется как множество элементов вида $(g)_{i\lambda}$, где $g\in G$, $i\in I$, $\lambda\in\Lambda$, с умножением $(g)_{i\lambda}\cdot(h)_{j\mu}=(gp_{\lambda j}h)_{i\mu}$. Согласно хорошо известной теореме Сушкевича — Риса (см. [2, теорема 3.5], рисовская матричная полугруппа — это то же самое, что вполне простая полугруппа. Положим $(G)_{i\lambda}=\{\,(g)_{i\lambda}|\,g\in G\}$, $R_i=\{\,(g)_{i\lambda}|\,g\in G,\lambda\in\Lambda\}$. Легко проверяется, что R_i — правый идеал полугруппы S. Ясно, что $R_i=\bigcup_{\lambda\in\Lambda}(G)_{i\lambda}$ и R_i — полигон над полугруппой S.

Полигоны над вполне простой полугруппой были описаны в [3]. Используя это описание, в [4] было доказано, что всякий квазиунитарный полигон X является копроизведением простых полигонов: $X=\coprod_{\gamma\in\Gamma}u_\gamma S$ (здесь $u_\gamma S$ — простой полигон, т.е. $xS=u_\gamma S$ для любого $x\in u_\gamma S$). Используя теорему об изоморфизме, нетрудно доказать, что всякий простой полигон над вполне простой полугруппой S изоморфен полигону R_i/ρ, где ρ — конгруэнция на R_i. Так как R_i сам является простым полигоном, то R_i/ρ — это *общий вид всех простых полигонов над вполне простой полугруппой* S. Описание конгруэнц-простых полигонов над такой полугруппой является гораздо более трудной задачей. Нетрудно видеть, что конгруэнц-простые кваазиунитарные полигоны – это в точности полигоны вида R_i/ρ, где ρ – максимальная собственная (т.е. отличная от ∇) конгруэнция полигона R_i. Приведём описание таких полигонов в одном частном случае, а именно, когда S — *прямоугольная группа*, т.е. $S=L\times G\times R$, где L — полугруппа левых нулей, G — группа, а R — полугруппа правых нулей. Эквивалентное определение прямоугольной группы — это полугруппа, изоморфная полугруппе $\mathcal{M}(G,I,\Lambda,P)$, где $p_{\lambda i}=e$ для всех $i\in I$, $\lambda\in\Lambda$, а e — единица группы G. Описание конгруэнц-простых квазиунитарных полигонов над прямоугольной группой даёт следующая теорема.

ТЕОРЕМА 1. *Пусть X — нетривиальный квазиунитарный полигон над прямоугольной группой. Тогда X является конгруэнц-простым в том и только в том случае, если он изоморфен одному из следующих полигонов:*

(a) $X=G/H$ — множество всех правых смежных классов с операцией $Hg\cdot(g')_{i\lambda}=Hgg'$, где H — максимальная собственная подгруппа группы G;

(b) $X=\{z_1,z_2\}$ с умножением $x\cdot(g)_{i\lambda}=\begin{cases}z_1, & \text{если } \lambda\in\Lambda_1,\\ z_2, & \text{если } \lambda\in\Lambda_2,\end{cases}$ $\Lambda=\Lambda_1\cup\Lambda_2$ — разбиение множества Λ.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Kilp M., Knauer U., Mikhalev A.V. Monoids, acts and categories. N.Y. – Berlin, W. de Gruyter, 2000, xvii + 529 pp.

2. Клиффорд А., Престон Г. Алгебраическая теория полугрупп. М.: Мир, 1972. — Т.1, 286 с., т. 2, 432 с.

3. Avdeyev A. Yu., Kozhukhov I. B., “Acts over completely 0-simple semigroups”, Acta Cybernetica, 2000, v. 14, no. 4, pp. 523–531.

4. Кожухов И.Б., Петриков А.О. "Проективные и инъективные полигоны над вполне простыми полугруппами Фундамент. и прикл. матем., 2016, т. 21, вып. 1, с. 123–133.

УДК 512.53

О разложении произвольного квазипорядка в произведение его симметричной и антисимметричной частей

В. М. Кусов (Россия, г. Волгоград)
Волгоградский государственный социально-педагогический университет
e-mail: kvm64@yandex.ru

On the decomposition of an arbitrary quasi-order into a product of its symmetric and antisymmetric parts

V. M. Kusov (Russia, Volgograd)
Volgograd State Pedagogical University
e-mail: kvm64@yandex.ru

Пусть X — произвольное непустое множество, $\mathscr{B}_X$ — полугруппа бинарных отношений на X с операцией умножения бинарных отношений и отношением равенства Δ_X в качестве единицы (мы записываем произведение $\rho\sigma$ бинарных отношений ρ и σ так же, как это принято, например, в [1], т. е. $\rho\sigma = \{(x,y) \in X \times X \mid \exists z \in X[(x,z) \in \rho \ \& \ (z,y) \in \sigma]\}$). Теоретико-множественный порядок $\subseteq$ на $\mathscr{B}_X$ стабилен относительно умножения бинарных отношений (а также относительно их объединения и пересечения): для любых $\rho, \sigma, \tau \in \mathscr{B}_X$ из $\rho \subseteq \sigma$ следует $\rho\tau \subseteq \sigma\tau$ и $\tau\rho \subseteq \tau\sigma$.

Напоминим: бинарное отношение $\rho \in \mathscr{B}_X$ называется рефлексивным, если $\Delta_X \subseteq \rho$, и транзитивным, если $\rho^2 \subseteq \rho$. Пусть $\mathscr{Q}_X \subseteq \mathscr{B}_X$ — множество всех квазипорядков (бинарных отношений, удовлетворяющих условию рефлексивности и условию транзитивности), $\mathscr{E}_X \subseteq \mathscr{B}_X$ — множество всех мультипликативно идемпотентных бинарных отношений (т. е. бинарных отношений ρ со свойством $\rho^2 = \rho$). Справедливо включение: $\mathscr{Q}_X \subseteq \mathscr{E}_X$. Действительно, если ρ — квазипорядок, то в силу его транзитивности $\rho^2 \subseteq \rho$, в силу его рефлексивности $\rho^2 \supseteq \rho$, откуда $\rho^2 = \rho$. Таким образом, *все квазипорядки являются рефлексивными идемпотентами полугруппы* $\mathscr{B}_X$.

Известно (см. [2]), что множество идемпотентов любой полугруппы всегда можно частично упорядочить, вводя так называемый *естественный порядок*. Для $\rho, \sigma \in \mathscr{E}_X$ положим, по определению, $\rho \leqslant \sigma \Leftrightarrow \rho\sigma = \sigma\rho = \rho$. Оказывается, на $\mathscr{Q}_X$ естественный порядок $\leqslant$ и теоретико-множественный порядок $\subseteq$ являются обращениями друг друга.

Теорема 1. *Частично-упорядоченные множества $(\mathscr{Q}_X, \leqslant)$ и $(\mathscr{Q}_X, \subseteq)$ дуально изоморфны, т. е. для всех $\rho, \sigma \in \mathscr{Q}_X$,*

$$\rho \leqslant \sigma \Leftrightarrow \rho \supseteq \sigma.$$

Следствие 1. *Любой стабильный относительно умножения частичный порядок на $\mathscr{Q}_X$, относительно которого Δ_X является наименьшим элементом, совпадает с теоретико-множественным порядком $\subseteq$.*

Произведение и объединение квазипорядков не всегда будут квазипорядками, поскольку транзитивность в результате этих операций, в отличие от рефлексивности, может не сохраняться. Укажем некоторые необходимые и достаточные условия для того, чтобы произведение и объединение квазипорядков также были квазипорядками.

Лемма 1. *Для всех $\rho, \sigma \in \mathscr{Q}_X$, $\rho\sigma \in \mathscr{Q}_X \Leftrightarrow \rho\sigma \supseteq \sigma\rho$.*

Лемма 2. *Для всех $\rho, \sigma \in \mathscr{Q}_X$, $\rho\sigma \in \mathscr{Q}_X \wedge \sigma\rho \in \mathscr{Q}_X \Leftrightarrow \rho\sigma = \sigma\rho$.*

Теорема 2. *Для всех $\rho, \sigma \in \mathscr{Q}_X$, $\rho \cup \sigma \in \mathscr{Q}_X \Leftrightarrow \rho \cup \sigma = \rho\sigma = \sigma\rho$.*

Для произвольного бинарного отношения ρ через ρ^{s} и ρ^{a} обозначим его *симметричную* и *асимметричную части* соответственно:

$$\rho^{\mathrm{s}} = \rho \cap \rho^{-1} = \{(x,y) \in \rho \mid (y,x) \in \rho\},$$

$$\rho^{\mathrm{a}} = \rho \setminus \rho^{\mathrm{s}} = \{(x,y) \in \rho \mid (y,x) \notin \rho\},$$

при этом $\rho = \rho^{\mathrm{s}} \cup \rho^{\mathrm{a}}$ и $\rho^{\mathrm{s}} \cap \rho^{\mathrm{a}} = \varnothing$. Введем также *антисимметричную часть* ρ^{w} бинарного отношения ρ, которую определим следующим образом:

$$\rho^{\mathrm{w}} = \{(x,y) \in \rho \mid (y,x) \in \rho \Rightarrow x = y\}.$$

Очевидно, $\rho = \rho^{\mathrm{s}} \cup \rho^{\mathrm{w}}$, однако $\rho^{\mathrm{s}} \cap \rho^{\mathrm{w}} = \varnothing$ только если ρ не содержит ни одной пары (x,y), где $x = y$, т. е. иррефлексивно. Если же ρ рефлексивно, то $\rho^{\mathrm{w}} = \rho^{\mathrm{a}} \cup \Delta_X$ и $\rho^{\mathrm{s}} \cap \rho^{\mathrm{w}} = \Delta_X$.

Введение понятия антисимметричной части бинарного отношения оправдывает следующая

Теорема 3. *Любой квазипорядок раскладывается в произведение своих симметричной и антисимметричной частей, причем эти части перестановочны, т. е. для всех $\rho \in \mathscr{Q}_X$*

$$\rho = \rho^{\mathrm{s}}\rho^{\mathrm{w}} = \rho^{\mathrm{w}}\rho^{\mathrm{s}}.$$

Следствие 2. *Если $\rho \in \mathscr{Q}_X$, то $\rho^{\mathrm{a}} = \rho^{\mathrm{a}}\rho^{\mathrm{s}} = \rho^{\mathrm{s}}\rho^{\mathrm{a}}$.*

Лемма 3. *Если $\rho \in \mathscr{Q}_X$, то ρ^{s} — эквивалентность, ρ^{w} — частичный, а ρ^{a} — строгий порядки.*

Для $x \in X$ через $[x]_{\rho^{\mathrm{s}}}$ обозначим смежный класс эквивалентности ρ^{s}, определяемый этим элементом. Хорошо известно (см. [3], теорему 1.3 и примечания к ней), что для произвольного квазиупорядоченного множества (X, ρ), бинарное отношение ρ, задаваемое на фактор-множестве X/ρ^{s} по правилу $[x]_{\rho^{\mathrm{s}}}\rho[x]_{\rho^{\mathrm{s}}} \Leftrightarrow x\rho y$, является частичным порядком (здесь мы для обозначения бинарного отношения на фактор-множестве использован тот же символ). Этот результат, а также другие, подобные ему, являются следствиями теоремы 3.

Замечания. Теорема 1 может рассматриваться как содержательный пример общего утверждения, принадлежащего В. Б. Поплавскому (см. [4]): для произвольного частично упорядоченного моноида $(S, 1, \preccurlyeq)$ с множеством идемпотентов $E \subseteq S$ рассматриваются множество $E_{\downarrow} = \{e \in E \mid e \preccurlyeq 1\}$ *вторичных идемпотентов минимального типа* и множество $E^{\uparrow} = \{e \in E \mid 1 \preccurlyeq e\}$ *вторичных идемпотентов максимального типа*, и доказывается, что $\leqslant = \preccurlyeq$ на $E_{\downarrow}$ и $\leqslant = \succcurlyeq$ на $E^{\uparrow}$, где $\leqslant$ — естественный порядок на E. Очевидно, $\mathscr{Q}_X$ представляет собой множество вторичных идемпотентов максимального типа частично упорядоченного моноида $(\mathscr{B}_X, \Delta_X, \subseteq)$, откуда сразу следует утверждение теоремы 1.

Другое доказательство утверждения из леммы 1 имеется в статье [5], посвященной перестановочным бинарным отношениям.

Теорема 2 является обобщением на квазипорядки теоремы 2.6 из [6], касающейся эквивалентностей.

Основной результат работы, теорема 3, проясняет природу восходящей к Э. Шрёдеру конструкции, позволяющей путем «склеивания» эквивалентных элементов в классы из любого квазипорядка получать частичный порядок на смежных классах. Причина, по которой эта конструкция «работает», заключается в разложимости произвольного квазипорядка в произведение его перестановочных симметричной и антисиметричной частей.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Мальцев А. И. Алгебраические системы. — М.: Наука, 1970. 392 с.
2. Клиффорд А., Престон Г. Алгебраическая теория полугрупп. Т. 1. — М.: Мир, 1972. 288с.
3. Биркгоф Г. Теория структур. — М.: Изд-во иностранной литературы, 1952. 408 с.
4. Поплавский В. Б. О некоторых свойствах идемпотентов частично упорядоченных моноидов // Алгебра, теория чисел, дискр. геом.:современные проблемы и приложения: Материалы XV междунар. конф. Тула: ТГПУ им. Л.Н. Толстого. 2018. с. 116-119.
5. Glavosits T., Száz Á. Characterizations of commuting relations // Acta Mathematica Universitatis Ostraviensis, Vol. 12 (2004), № 1. с. 23-31.
6. Шрейдер Ю. А. Равенство, сходство, порядок. — М.: Наука, 1971. 256 с.

———————————————————————————

УДК 512.53

О «прямоугольном» расположении идемпотентов полугруппы

В. Б. Поплавский (Россия, г. Саратов)
Саратовский национальный исследовательский государственный
университет им. Н. Г. Чернышевского
e-mail: poplavskivb@mail.ru

On “rectangular” position of semigroup idempotents

V. B. Poplavski (Russia, Saratov)
Saratov State University
e-mail: poplavskivb@mail.ru

То, что полугрупповые идемпотенты играют важную роль при определении свойств полугруппы хорошо известно. Продолжая изучение идемпотентов, начатое в [1, 2] были получены необходимые и достаточные аналитические условия расположения трёх идемпотентов произвольной полугруппы в $\mathcal{D}-$классе полугруппы так, что одна пара идемпотентов $\mathcal{R}-$эквивалентна, а другая пара из этой тройки является $\mathcal{L}-$ эквивалентной. Такое расположение трех идемпотентов назвается "прямоугольным". Мы используем понятия теории полугрупп [3], в частности, $\mathcal{D}-, \mathcal{R}-, \mathcal{L}-$ эквивалентности Грина. Далее классы $\mathcal{R}-, \mathcal{L}-$классы, порожденные элементом a, будем обозначать $\mathbf{R}_a, \mathbf{L}_a$.

Заметим, что все элементы e, f и g из определения 1 порождают один и тот же $\mathcal{D}-$класс в силу того, что $\mathbf{R}_e \cap \mathbf{L}_g \neq \emptyset$. Поэтому "прямоугольное"расположение элементов e, f и g на egg-box картинке $\mathcal{D}-$класса полугруппы $\mathbf{S}$ можно представить как

…	…	…	…	…
…	g	…	f	…
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
…	e	…	…	…
…	…	…	…	…

.

Здесь горизонтальные и вертикальные строчки интерпретируются как $\mathcal{R}-$, $\mathcal{L}-$ классы соответственно.

Теорема. Следующие условия эквивалентны:

1. Элементы e, f, g некоторой полугруппы $\mathbf{S}$ являются идемпотентами и образуют прямой угол $\widehat{egf}$;

2. ge является левой единицей для f, fg - правая единица для e и e - правая единица для g;

3. ge является левой единицей для f, fg - правая единица для e и f - левая единица для g.

Доказательство. Заметим, что утверждение теоремы можно записать в виде:

$$\left\{\begin{aligned} e&=e^2;\\ f&=f^2;\\ g=g^2&\in \mathbf{L}_e\cap\mathbf{R}_f.\end{aligned}\right. \leftrightarrow \left\{\begin{aligned} f&=gef;\\ e&=efg;\\ g&=ge.\end{aligned}\right. \leftrightarrow \left\{\begin{aligned} f&=gef;\\ e&=efg;\\ g&=fg.\end{aligned}\right.$$

Сначала покажем, что элементы e, f, g некоторой полугруппы $\mathbf{S}$ являются идемпотентами и образуют прямой угол $\widehat{egf}$ тогда и только тогда, когда выполняется система условий:

$$\left\{\begin{aligned} gef&=f;\\ efg&=e;\\ efgef&=ef;\\ gefg&=g.\end{aligned}\right. \tag{1}$$

Действительно, пусть элементы e, f, g полугруппы $\mathbf{S}$ являются идемпотентами и образуют прямой угол $\widehat{egf}$, то есть $e = e^2$, $f = f^2$, $g = g^2 \in \mathbf{L}_e \cap \mathbf{R}_f$. Так как идемпотенты g и f порождают один и тот же $\mathcal{R}-$класс, то они являются левыми единицами в своём $\mathcal{R}-$классе. Аналогично, g и e порождают один и тот же $\mathcal{L}-$класс, поэтому они являются правыми единицами в своём $\mathcal{L}-$классе. Получаем

$$fg = g, \quad gf = f; \qquad eg = e, \quad ge = g. \tag{2}$$

По теореме Клиффорда и Миллера (см. [3], теорема 2.17) имеем $ef \in \mathbf{f}_e \cap \mathbf{R}_e$. Покажем, что g и ef инверсные элементы:

$$(ef)g(ef) = e(fg)(ef) = eg(ef) = e(ef) = e^2f = ef,$$

$$g(ef)g = (ge)(fg) = gg = g.$$

Из этого и равенств (2) получается справедливость системы (1).

Докажем теперь обратное. Пусть выполняется система условий (1). Тогда

$$f^2 = (gef)(gef) = g(efgef) = g(ef) = f,$$

$$e^2 = (efg)(efg) = (efgef)g = (ef)g = e.$$

Умножая первое уравнение системы (1) на g справа, получаем $gefg = fg$, а из четвертого уравнения системы (1) имеем $gefg = g$. Следовательно, $fg = g$. Аналогично, из второго и четвертого уравнений системы (1) получаем $ge = g$. Тогда

$$g^2 = (gefg)(gefg) = (gef)g(gef)g = fgfg = gefg = g.$$

Учитывая, что $g^2 = g$, Из второго уравнения системы (1) получаем $eg = e$. Равенства $ge = g$ и $eg = e$ указывают на то, что элементы e и g порождают один и тот же $\mathcal{L}-$ класс:

$$(e, g) \in \mathcal{L}.$$

Равенства $g(ef) = f$ и $fg = g$ дают
$$(f, g) \in \mathcal{R}.$$
Получаем
$$g \in \mathbf{L}_e \cap \mathbf{R}_f.$$

Систему условий (1) можно заменить на более простую систему следующим образом.

Покажем, что система (1) эквивалентна системам
$$\begin{cases} f = gef; \\ e = efg; \\ g = ge \end{cases} \tag{3}$$
и
$$\begin{cases} f = gef; \\ e = efg; \\ g = fg. \end{cases} \tag{4}$$

Пусть выполнена система уравнений (1). Тогда из равенств $efg = e$ и $gefg = g$ следует $ge = g$. Поэтому из (1) следует (3).

Из равенств $gef = f$ и $gefg = g$ следует $fg = g$. Поэтому из (1) следует (4).

Пусть теперь выполняется система уравнений (3). Тогда
$$efgef = ef(ge)f = efgf = ef$$
и
$$gefg = g(efg) = ge = g,$$
т.е. из (3) следует(1).

Пусть выполнена система уравнений (4). Тогда
$$efgef = e(fg)ef = egef = e(gef) = ef$$
и
$$gefg = (gef)g = fg = g,$$
т.е. из (4) следует(1). □

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Поплавский В. Б.Частичные порядки и идемпотенты моноидов // Чебышевский сборник. 2021. Т. 22, вып. 4(80). С. 182–198.

2. Поплавский В. Б., Явкаев Д. Г. О некоммутативности булево-матричных идемпотентов // Математика, механика: сб. науч. тр., Саратов: Изд-во Сарат. ун-та.2020. Вып. 22. С. 39–42.

3. Клиффорд А., Престон Г. Алгебраическая теория полугрупп. М: "МИР",1972.-Т. 1. 287 с.

УДК 512.579

Линейно упорядоченные решетки формаций унаров

А. Л. Расстригин (Россия, г. Волгоград)
Волгоградский государственный социально-педагогический университет
e-mail: rasal@fizmat.vspu.ru

Linearly ordered lattices of formations of monounary algebras

A. L. Rasstrigin (Russia, Volgograd)
Volgograd State Pedagogical University
e-mail: rasal@fizmat.vspu.ru

Формацией называется класс алгебр, замкнутый относительно взятия гомоморфных образов и конечных (с конечным числом множителей) подпрямых произведений [1]. В настоящей работе рассматриваются формации унарных алгебр с одной операцией — *формации унаров*.

Совокупность формаций L, которой принадлежит вместе с любыми двумя ее формациями $F_1, F_2 \in L$ их пересечение $F_1 \cap F_2$ и наименьшая формация, содержащая F_1 и F_2, образует решетку относительно включения. Например, для некоторой формации унаров F через $L(F)$ обозначается решетка всех подформаций формации F.

Говорят, что формация F *порождается* совокупностью алгебр S, если F является наименьшей по включению формацией, содержащей все алгебры из S. Из теоремы Биркгофа о подпрямом разложении непосредственно следует, что каждая формация конечных алгебр порождается классом всех своих подпрямо неразложимых алгебр. В частности, для унаров все подпрямо неразложимые алгебры известны [2].

Теорема 1 ([3]). *Решетка $L(F)$ нетривиальной формации F конечных унаров является цепью тогда и только тогда, когда F порождается одним подпрямо неразложимым унаром или является объединением возрастающей цепи таких формаций.*

Операцию унаров будем обозначать через f. *Циклом* называют унар, порождаемый любым своим элементом. Унар называется *связным*, если пересечение любых двух его однопорожденных подалгебр непусто. Если унары A_i, $i \in I$, и унар C таковы, что $C = \bigcup_{i\in I} A_i$ и $A_i \cap A_j = \varnothing$ для любых различных $i, j \in I$, то C называется *прямой суммой* унаров A_i, $i \in I$.

Теорема 2. *Решетка $L(F)$ формации унаров F является цепью тогда и только тогда, когда F является формацией одного из следующих видов:*

1. *формация конечных связных унаров, содержащих одноэлементный цикл;*

2. *формация конечных прямых сумм циклов, длины которых есть степени фиксированного для F простого числа;*

3. *формация связных унаров, содержащих одноэлементный цикл, с условием $f(x) = f(y)$ (подкласс многообразия $f(x) = f(y)$);*

4. *формация прямых сумм одноэлементных циклов (подкласс многообразия $f(x) = x$).*

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Шеметков Л. А., Скиба А. Н. Формации алгебраических систем. М.: Наука, 1989.
2. Wenzel G. H. Subdirect irreducibility and equational compactness in unary algebras $\langle A; f\rangle$ // Archiv der Mathematik. 1970. Vol. 21. P. 256–264.
3. Расстригин А. Л. Формации конечных унаров // Чебышевский сборник. 2011. Т. 12, № 2 (38). С. 102–109.

УДК 512.577

Унары с периодической полугруппой эндоморфизмов, с идемпотентной полугруппой эндоморфизмов

С. В. Сыроватская (Россия, г. Волгоград)
Волгоградский государственный социально-педагогический университет
e-mail: svs_kagi@mail.ru

Unars with periodic endomorphism semigroup, with idempotent endomorphism semigroup

S. V. Syrovatskaya (Russia, Volgograd)
Volgograd State Pedagogical University
e-mail: svs_kagi@mail.ru

Унаром называется алгебра $\mathfrak{A} = \langle A, f\rangle$ с одной унарной операцией f.

Будем обозначать через $\mathbb{N}$ множество целых положительных чисел, $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$. Запись $n_1 \mid n_2$ для $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ означает, что n_1 делит n_2.

Элементы a, b унара $\mathfrak{A}$ называют связными, если $af^m = bf^k$ для некоторых $m, k \in \mathbb{N}_0$. Унар *связный*, если любые два его элемента являются связными. Элемент a унара $\mathfrak{A}$ такой, что $af = a$, называется *неподвижным* (*stagnant*). Другие термины теории унаров можно найти, например, в [1].

Под $\operatorname{End}\mathfrak{B}$ будем подразумевать полугруппу эндоморфизмов алгебры $\mathfrak{B}$.

Полугруппа $\mathfrak{S} = \langle S, *\rangle$ называется *периодической* [2], если каждая ее моногенная (однопорожденная) подполугруппа конечна. Полугруппа $\mathfrak{S}$ *идемпотентная* (*полугруппа идемпотентов*), если $s * s = s$ для любого $s \in S$ [2].

Теорема 1. *Полугруппа эндоморфизмов* $\operatorname{End}\mathfrak{A}$ *унара* $\mathfrak{A}$ *периодическая тогда и только тогда, когда унар* $\mathfrak{A}$ *конечен.*

Теорема 1 сформулирована в [3].

Теорема 2. *Полугруппа эндоморфизмов унара* $\mathfrak{A}$ *идемпотентна тогда и только тогда, когда* $\mathfrak{A}$ *одноэлементный либо* $\mathfrak{A}$ *есть двухэлементный связный унар с неподвижным элементом.*

Пример бесконечной унарной алгебры с периодической полугруппой эндоморфизмов.

Рассмотрим унарную алгебру $\mathfrak{A}' = \langle A', \Omega\rangle$, где $A' = \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, $\Omega = \{f_m \mid m \in \mathbb{N}\}$ и для любого $m \in \mathbb{N}$ операция f_m задается правилом: для произвольного $n \in \mathbb{N}$

$$a_n f_m = \begin{cases} a_{n-m+1}, & \text{если } \ m \mid n, \\ a_{n+1}, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Ясно, что $f_1 = \mathbb{I}_{A'}$ (через $\mathbb{I}_{A'}$ обозначаем тождественное преобразование множества A'). Заметим: $f_{m_1} f_{m_2} \neq f_{m_2} f_{m_1}$ для любых $m_1, m_2 \in \mathbb{N}$, $m_1 \neq m_2$, $m_1, m_2 \neq 1$.

Предложение 1. $\mathrm{End}\,\mathfrak{A}' = \{\mathbb{I}_{A'}\}$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Карташов В. К. Квазимногообразия унаров // Математические заметки. 1980. Том 27, № 1. С. 7–20.

2. Артамонов В. А., Салий В. Н., Скорняков Л. А., Шеврин Л. Н., Шульгейфер Е. Г. Общая алгебра. Т. 2. — М.: Изд-во Наука, 1991. 480 с.

3. Сыроватская С. В. Унары с периодической полугруппой эндоморфизмов // XIX Международная конференция «Алгебра, теория чисел, дискретная геометрия и многомасштабное моделирование: современные проблемы, приложения и проблемы истории», посвященная двухсотлетию со дня рождения академика П. Л. Чебышева: тезисы докладов международной конференции (Тула, 18-22 мая 2021 г.) — Тула, 2021. С. 70–71.

УДК 512.579

Псевдопростые алгебры в некоторых классах алгебр с одним оператором и тернарной основной операцией

В. Л. Усольцев (Россия, г. Волгоград)
Волгоградский государственный социально-педагогический университет
e-mail: usl2004@mail.ru

Pseudosimple algebras in some classes of algebras with one operator and a ternary basic operation

V. L. Usoltsev (Russia, Volgograd)
Volgograd State Pedagogical University
e-mail: usl2004@mail.ru

Алгеброй с операторами называется универсальная алгебра $\langle A, \Omega\rangle$ сигнатуры $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$, где Ω_1 произвольна и непуста, а Ω_2 состоит из унарных операций, перестановочных с любой операцией из Ω_1, то есть, действующих как эндоморфизмы относительно операций из Ω_1. Операции из Ω_1 называются основными, а унарные операции из Ω_2 — операторами.

Неодноэлементная алгебра A называется псевдопростой[1], если для любой ее неединичной конгруэнции θ выполнено условие $A/\theta \cong A$.

Псевдопростой является любая простая алгебра. Псевдопростые алгебры и их обобщения рассматривались в [2]–[5].

Пусть $\langle A, f\rangle$ — унар, то есть, алгебра с одной унарной операцией f. Для любого элемента x унара через $f^n(x)$ обозначается результат n-кратного применения операции f к элементу x; при этом $f^0(x) = x$. Элемент a унара $\langle A, f\rangle$ называется периодическим, если $f^t(a) = f^{t+n}(a)$ для некоторых целых чисел $t \geqslant 0$ и $n \geqslant 1$. Глубиной $t(a)$ периодического элемента a называется такое наименьшее целое неотрицательное число t, что $f^t(a) = f^{t+n}(a)$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$. Глубиной $t(A)$ унара A называются наибольшая из глубин его периодических элементов, если $T(A) \neq \emptyset$, и нуль, если $T(A) = \emptyset$. Если множество $\{t(a) \mid a \in T(A)\}$ не ограничено, то глубина унара принимается равной бесконечности. Унар называется связным, если для любых $x, y \in A$ выполняется условие $f^n(x) = f^m(y)$ для некоторых целых чисел $n, m \geqslant 0$. Элемент a унара A называется минимальным, если не существует такого элемента $b \in A$, что $f(b) = a$. Элемент a унара называется узловым, если найдутся такие различные элементы b и c, отличные от a, что $f(b) = a = f(c)$. Элемент a унара называется неподвижным, если $f(a) = a$. Связный унар с неподвижным элементом называется корнем. Корнем без нетривиальных узлов называется корень, не имеющий узловых элементов, кроме, может быть, неподвижного.

В современной алгебре значительное внимание уделяется тернарным операциям, перечисленным ниже. Тернарная операция $d(x, y, z)$ называется мальцевской, если она удовлетворяет тождествам $d(x, y, y) = d(y, y, x) = x$. Мальцевская операция d называется операцией Пиксли (или 2/3-операцией меньшинства), если она удовлетворяет тождествам $d(x, y, y) = d(y, y, x) = d(x, y, x) = x$. Мальцевская операция d называется операцией меньшинства, если для нее выполняются тождества $d(y, y, x) = d(x, y, y) = d(y, x, y) = x$. Тернарная операция φ, удовлетворяющая тождествам $\varphi(x, x, y) = \varphi(x, y, x) = \varphi(y, x, x) = x$ называется операцией большинства. Последняя из перечисленных операций является тернарным вариантом операции почти единогласия.

В [6] показано, что на любом унаре $\langle A, f\rangle$ можно так задать операцию Пиксли $p(x, y, z)$, что алгебра $\langle A, p, f\rangle$ становится алгеброй с оператором f. Эта операция определяется следующим образом. Пусть $x, y \in A$. Положим $M_{x,y} = \{n \in \mathrm{N} \cup \{0\} \mid f^n(x) = f^n(y)\}$, а также $k(x, y) = \min\ M_{x,y}$, если $M_{x,y} \neq \emptyset$ и $k(x, y) = \infty$, если $M_{x,y} = \emptyset$. Положим далее

$$p(x, y, z) \stackrel{def}{=} \begin{cases} z, & \text{если } k(x, y) \leqslant k(y, z) \\ x, & \text{если } k(x, y) > k(y, z). \end{cases} \qquad (1)$$

В [7] были описаны простые и псевдопростые алгебры в классе алгебр $\langle A, p, f\rangle$.

В [8], на основе подхода, предложенного в [6], на произвольном унаре $\langle A, f\rangle$ задается операция меньшинства $s(x, y, z)$, перестановочная с операцией f:

$$s(x, y, z) \stackrel{def}{=} \begin{cases} z, & \text{если } k(x, y) < k(y, z); \\ y, & \text{если } k(x, y) = k(y, z); \\ x, & \text{если } k(x, y) > k(y, z). \end{cases} \qquad (2)$$

Сходным способом на произвольном унаре $\langle A, f\rangle$ можно задать операцию большинства $m(x, y, z)$, перестановочную с f (см. [9]):

$$m(x, y, z) \stackrel{def}{=} \begin{cases} z, & \text{если } k(x, y) \geqslant k(y, z); \\ x, & \text{если } k(x, y) < k(y, z). \end{cases} \qquad (3)$$

В [10] дано описание простых алгебр в классе алгебр с одним оператором и операцией почти единогласия, включающем класс алгебр $\langle A, m, f\rangle$.

Теорема 1. *Неодноэлементная алгебра $\langle A, d, f\rangle$ с оператором f и тернарной операцией d, определенной по одному из правил* (1)–(3)*, является псевдопростой тогда и только тогда,*

когда выполняется одно из условий:
(1) операция f инъективна на множестве A;
(2) унар $\langle A, f\rangle$ является корнем глубины 1;
(3) унар $\langle A, f\rangle$ является корнем без нетривиальных узлов, имеющим для всякого числа $m > 0$ равномощные друг другу (возможно, пустые) множества минимальных элементов глубины m.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Monk D. On pseudo-simple universal algebras // Proc. Amer. Math. Soc. 1962. V. 13. N. 4. P. 543-546.

2. Andréka H., Németi I. On the congruence lattice of pseudo-simple algebras // Contributions to Universal Algebra (Colloq. Math. Soc. J. Bolyai, 17. Szeged, Hungary, 1975). Amsterdam a. o.: North-Holland Publ. Co., 1977. P. 15–20.

3. Andréka H., Németi I. Similarity types, pseudosimple algebras, and congruence representations of chains // Algebra Universalis. 1981. Vol. 13. N 1. P. 293–306.

4. Tardos G. Finitely generated pseudosimple algebras // Algebra Universalis. 1989. Vol. 26. N. 2. P. 127–136.

5. Пинус А. Г. Об алгебрах, близких к простым // Алгебра и логика. 1993. Т. 32, № 5. С. 537–555.

6. Карташов В. К. Об унарах с мальцевской операцией // Международный семинар «Универсальная алгебра и ее приложения», посвященный памяти профессора Л. А. Скорнякова: тезисы докладов (Волгоград, 6-11 сентября 1999 г.). — Волгоград, 1999. С. 31–32.

7. Usoltsev V. L. Simple and pseudosimple algebras with operators // Journal of Mathematical Sciences. 2010. Vol. 164, N 2. P. 281–293.

8. Усольцев В. Л. Свободные алгебры многообразия унаров с мальцевской операцией p, заданного тождеством $p(x, y, x) = y$ // Чебышевский сб. 2011. Т. 12. Вып. 2(38). С. 127–134.

9. Усольцев В. Л. Алгебры Риса и конгруэнц-алгебры Риса в одном классе алгебр с оператором и основной операцией почти единогласия // Чебышевский сб. 2016. Т. 17, № 4(60). С. 157–166.

10. Усольцев В. Л. О решетках конгруэнций алгебр с одним оператором и основной операцией почти единогласия // Научно-техн. вестник Поволжья. 2016. Вып. 2. С. 28–30.

УДК 512. 548

Преобразование слов с помощью тернарных группоидов

Н. А. Щучкин (Россия, г. Волгоград)
Волгоградский государственный социально-педагогический университет
e-mail:nikolaj_shchuchkin@mail.ru

Word transformations using 3-groupoids operations

N. A. Shchuchkin (Russia, Volgograd)
Volgograd State Pedagogical University
e-mail:nikolaj_shchuchkin@mail.ru

Квазигруппы и другие алгебраически структуры широко применяются в криптографии (см., например, [1], [2], [3]). Мы здесь укажем на возможность применения тернарных группоидов при шифровании.

Определение 1. *Множество Q с одной тернарной операцией f, будем обозначать $\langle Q, f\rangle$, назовем тернарнным группоидом с левым делением, если для любых элементов a, b, c из Q уравнение*

$$f(a, b, x) = c, \tag{1}$$

разрешимо однозначно.

В силу однозначной разрешимости уравнения (1), на множестве Q определим еще одну тернарную операцию g по правилу

$$g(a, b, c) = d \Leftrightarrow f(a, b, d) = c.$$

Операции g и f связаны тождеством

$$g(x, y, f(x, y, z)) = z = f(x, y, g(x, y, z)). \tag{2}$$

Пусть множество Q конечно и $Q = \{1, 2, \ldots, m\}$. Тогда каждому тернарному группоиду $\langle Q, f\rangle$ с левым делением соответствует 3-мерная матрица m-го порядка $B = (b_{ijk}|i, j, k = 1, 2, \ldots, m)$ ([4], стр. 5), где $b_{ijk} = f(i, j, k)$, причем, в силу однозначной разрешимости уравнения (1), в строках направления 3 стоят разные элементы из Q. Указанное соответствие будет взаимно однозначным. Кроме того, имеется набор m^2 перестановок γ_{ij}, $(i, j = 1, 2, \ldots, m)$ на множестве Q, действующие по правилу $\gamma_{ij}(k) = f(i, j, k)$, значения которых совпадают с элементами строк направления 3 матрицы B.

Построение 3-мерной матрицы B для тернарного группоида с левым делением показывает, что количество различных матриц такого вида равно $(m!)^{m^2}$.Тогда верно

Предложение 1. *Количество различных тернарных группоидов с левым делением, заданных на одном и том же множестве $Q = \{1, 2, \ldots, m\}$, равно $(m!)^{m^2}$.*

В работе [5] рассматривалось преобразование слов в заданном алфавите с использованием квазигрупп, а в работах [6], [7], [8] были указаны различные преобразования слов с использованием n-квазигрупп. Мы же будем преобразовывать слова с помощью тернарных группоидов с левым делением.

Рассмотрим конечный тернарный группоид $\langle Q, f\rangle$ с левым делением, где $Q = \{1, \ldots, m\}$. Множество всех слов в алфавите Q обозначим $Q^+ = \{x_1 \ldots x_s | x_i \in Q, s \geq 1\}$. Для фиксированной пары элементов a, b из Q на множестве Q^+ определим ,биективное отображение

$$F_{a,b}(x_1x_2\ldots x_s) = y_1y_2\ldots y_s = \begin{cases} y_1 = f(a,b,x_1), \\ y_2 = f(a,y_1,x_2), \\ y_{i+1} = f(y_{i-1},y_i,x_{i+1}), i = 2,3,\ldots,s-1. \end{cases} \tag{3}$$

Найдем теперь обратное отображение для отображения $F_{a,b}$. На множестве Q^+ строим отображение

$$G_{a,b}(y_1y_2\ldots y_s) = x_1x_2\ldots x_s = \begin{cases} x_1 = g(a,b,y_1), \\ x_2 = g(a,y_1,y_2), \\ x_{i+1} = g(y_{i-1},y_i,y_{i+1}), i = 2,3,\ldots,s-1. \end{cases} \tag{4}$$

Непосредственная проверка показывает, что $G_{a,b}$ — обратное отображение для отображения $F_{a,b}$.

Для произвольно выбранных упорядоченных пар $(a_1, b_1), (a_2, b_2), \ldots, (a_t, b_t)$ элементов из Q $(t > 1)$ строим по правилу (3) отображения $F_{a_1,b_1}, F_{a_2,b_2}, \ldots, F_{a_t,b_t}$, а затем рассматриваем композицию $F_{a_1,b_1,a_2,b_2,\ldots,a_t,b_t} = F_{a_1,b_1} \circ F_{a_2,b_2} \circ \ldots \circ F_{a_t,b_t}$. Для этих же пар строим по правилу (4) отображения $G_{a_1,b_1}, G_{a_2,b_2}, \ldots, G_{a_t,b_t}$, и также рассматриваем композицию $G_{a_t,b_t,\ldots,a_2,b_2,a_1,b_1} = G_{a_t,b_t} \circ \ldots \circ G_{a_2,b_2} \circ G_{a_1,b_1}$. Очевидно, $G_{a_t,b_t,\ldots,a_2,b_2,a_1,b_1}$ — обратное отображение для отображения $F_{a_1,b_1,a_2,b_2,\ldots,a_t,b_t}$. Также очевидно

Предложение 2. *Пусть $\langle Q, f\rangle$ — тернарный группоид с левым делением, где $Q = \{1, \ldots, m\}$. Для любого слова $y_1y_2\ldots y_s$ из Q^+ и для любых упорядоченных пар (a_1, b_1), $(a_2, b_2), \ldots, (a_t, b_t)$ элементов из Q существует единственное слово $x_1x_2\ldots x_s$ из Q^+ такое, что верно равенство*

$$F_{a_1,b_1,a_2,b_2,\ldots,a_t,b_t}(x_1x_2\ldots x_s) = y_1y_2\ldots y_s.$$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Глухов М. М. О применениях квазигрупп в криптографии // ПДМ. 2008. № 2. С. 28-32.

2. Artamonov V. A., Chakrabarti S., Gangopadhyay S., Pal S. K. On Latin squares of polynomially complete quasigroups and quasigroups generated by shifts // Quasigroups and Related Systems. 2013. Vol. 21, № 2. P. 117–130.

3. Artamonov V. A., Chakrabarti S., Pal S. K. Characterization of Polyno- mially Complete Quasigroups based on Latin Squares for Cryptographic Transformations // Discrete Applied Mathematics. 2016. P. 5–17.

4. Соколов Н. П. Введение в теорию многомерных матриц. — Киев. Наукова думка, 1972. 175 с.

5. Markovski S., Gligoroski D., Bakeva V. Quasigroup String Processing: Part 1 // Proc. of Maked. Academ. of Sci. and Arts for Math. And Tect. Sci. XX. 1999. 1-2. P. 157-162.

6. Щучкин Н.А. Преобразования строк с помощью n-квазигрупп / Н.А. Щучкин // XVIII Международная конференция "Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы, приложения и проблемы истории посвященная 100-летию со дня рождения профессоров Б. М. Бредихина, В. И. Нечаева и С. Б. Стечкина. Тула, 23-26 сентября 2020

г. - Тульский государственный педагогический университет им. Л.Н. Толстого, 2020. - С. 117-119.

7. Щучкин, Н. А. Преобразования слов в заданном алфавите / Н. А. Щучкин // Алгебра, теория чисел, дискретная геометрия и многомасштабное моделирование: Современные проблемы, приложения и проблемы истории. Материалы XIX Международной конференции, посвящённой 200-летию со дня рождения академика П.Л. Чебышёва. - Тула: Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого, 2021. - 442 с. - С. 75-77.

8. Щучкин Н.А. Преобразования слов с помощью n-квазигрупповых операций / Н. А. Щучкин // Материалы XXI Международной конференции "Алгебра, теория чисел, дискретная геометрия и многомасштабное моделирование: современные проблемы, приложения и проблемы истории посвящённой 85-летию со дня рождения А.А. Карацубы. Тула, 2022. С. 119-122.

Секция 3. Кольца и модули

УДК 512.55

Существенно квазиинъективные модули[1]

А. Н. Абызов (Россия, г. Казань)
Казанский (Приволжский) федеральный университет
e-mail: aabyzov@kpfu.ru
Буй Тиен Дат (Россия, г. Казань)
Казанский (Приволжский) федеральный университет
e-mail: btdat@ctuet.edu.vn

Essentially quasi-injective modules

A.N. Abyzov (Russia, Kazan)
Kazan (Volga Region) Federal University
e-mail: aabyzov@kpfu.ru
Bui Tien Dat(Russia, Kazan)
Kazan (Volga Region) Federal University
e-mail: btdat@ctuet.edu.vn

В последние несколько десятилетий были систематически изучены модули, инвариантные относительно автоморфизмов своих инъективных оболочек. Многие результаты, полученные в этом направлении, были отражены в монографии [5]. Естественным обобщением понятий автоморфизм-инвариантного модуля и квазиинъективного модуля является понятие существенно квазинъективного модуля. Модуль называется существенно квазинъективным, если он инвариантен относительно эндоморфизмов его инъективной оболочки, у которых ядра существенны. Относительная существенная инъективность для модулей была введена в статье [4] при исследовании проблемы о нахождении условий, при которых прямая сумма CS-модулей является CS-модулем. Существенно квазиинъективные модули были изучены в работе [1].

Модуль M называется автоморфизм-продолжаемым, если для любого подмодуля X модуля M каждый автоморфизм модуля X продолжается до эндоморфизма модуля M. В работе [7] было доказано, что полуартинов модуль M является автоморфизм-продолжаемым в точности тогда, когда M является автоморфизм-инвариантным модулем. Модуль M называется существенно эндоморфизм-продолжаемым, если для каждого его подмодуля A любой эндоморфизм $f \in End_R(A)$, у которого $Ker(f) \leq_e A$, продолжается до некоторого эндоморфизма f' модуля M.

Теорема 1. *Если R – существенно нетерово (полуартиново) справа кольцо, то следующие условия для правого R-модуля M эквивалентны:*

1) M – существенно эндоморфизм-продолжаемый модуль;

2) M – существенно квазиинъективный модуль.

Следующее утверждение является аналогом теоремы Фейса, который устанавливает критерий инъективности произвольных прямых сумм изоморфных копий инъективного модуля.

[1]Работа Абызова А.Н. выполнена при финансовой поддержке РНФ и Кабинета Министров Республики Татарстан в рамках научного проекта № 23-21-10086

Теорема 2. *Для правого R-модуля M следующие условия эквивалентны:*
1) модуль $M^{(I)}$ существенно иньективен для любого множества индексов I;
2) модуль $M^{(\mathbb{N})}$ существенно иньективен;
3) M – существенно иньективен и в кольце R выполнено условие максимальности для существенных правых идеалов, которые являются аннуляторами подмножеств модуля M.

Модуль M называется ADS-модулем, если для каждого его разложения $M = A \oplus B$ модули A и B взаимно инъективны. ADS-модули были введены в работе [2] и в последующем были изучены в ряде работ. ADS-абелевы группы были описаны в недавней работе [3]. Обобщением понятий ADS-модуля и существенно квазиинъективного модуля является понятие LADS-модуля, которое было введено и изучено в недавней работе [6]. Модуль M называется LADS-модулем, если для каждого его разложения $M = A \oplus B$ модули A и B взаимно существенно инъективны. Следующее утверждение дает описание существенно квазиинъективных абелевых групп и, в частности, показано, что абелева группа является существенно квазиинъективной в точности тогда, когда она является LADS-абелевой группой.

Теорема 3. *Для абелевой группы A следующие условия равносильны:*

1) A – существенно квазиинъективная абелева группа;

2) A – существенно эндоморфизм-продолжаемая абелева группа;

3) A – LADS-абелева группа;

4) выполнено одно из следующих условий:

  a) A – абелева группа без кручения;
  b) A – периодическая абелева группа и $A = \oplus_p A_p$, где A_p – p-компонента A для каждого простого числа p и либо $A_p \cong \oplus_I \mathbb{Z}_{p^\infty}$, либо $A_p \cong (\oplus_I \mathbb{Z}_{p^n}) \oplus (\oplus_{I'} \mathbb{Z}_{p^{n+1}})$;
  c) A – смешанная абелева группа и $A = B \oplus t(A)$, где $t(A)$ – делимая абелева группа.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Abyzov A.N., Quynh T.C., Ha N.T.T., Yildirim T. Modules close to the automorphism invariant and coinvariant // J. Algebra Appl. 2019. Vol. 18, no. 12. 1950235.

2. Alahmadi A., Jain S.K., Leroy A. ADS modules // J. Algebra. 2012. Vol. 352, no. 1. P. 215-222.

3. Koşan M.T., Žemlička J. ADS Abelian groups // J. Algebra Appl. 2023. https://doi.org/10.1142/S0219498824501822.

4. Santa-Clara C. Extending modules with injective or semisimple summands // J. Pure Applied Algebra. 1998. Vol. 16, no. 2. P.193-203.

5. Srivastava A.K., Tuganbaev A.A., Asensio P.A.G. Invariance of Modules under Automorphisms of their Envelopes and Covers, Cambridge University Press, Cambridge, M., 226 pp. (2021).

6. Trang D.T., Koşan T.M., Taşdemir Ö., Quynh T.C. On modules and rings having large absolute direct summands // Communications in Algebra, DOI: 10.1080/00927872.2023.2223301 (2023).

7. Tuganbaev A.A. Automorphism-invariant semi-Artinian modules // J. Algebra Appl. 2017. Vol. 16, no. 2. 1750029.

———————————————————————————————————

УДК 512.643

Локально алгебраические линейные операторы и их централизаторы[1]

А. Н. Абызов (Россия, г. Казань)
Казанский (Приволжский) федеральный университет; Петербургский государственный университет путей сообщения Императора Александра I
e-mail: aabyzov@kpfu.ru
А. Д. Маклаков (Россия, г. Казань)
Казанский (Приволжский) федеральный университет
e-mail: amk789@yandex.ru

Locally algebraic linear operators and their centralizers

A. N. Abyzov (Russia, Kazan)
Kazan (Volga Region) Federal University; Emperor Alexander I St. Petersburg State Transport University
e-mail: aabyzov@kpfu.ru
A. D. Maklakov (Russia, Kazan)
Kazan (Volga Region) Federal University
e-mail: amk789@yandex.ru

Линейный оператор A, действующий в векторном пространстве V над полем F, называется локально алгебраическим, если для каждого вектора $v \in V$ существует такой ненулевой многочлен $p(x) \in F[x]$, что $p(A)(v) = 0$. Примерами локально алгебраических линейных операторов являются алгебраические линейные операторы, а также триангулизируемые линейные операторы, изученные в работе [2]. Замыкание произвольного подмножества A алгебры линейных операторов $End(V)$ относительно конечной топологии на $End(V)$ обозначается через $\overline{A}$.

В работе [1] было показано, что равенство $CC(A) = \overline{F[A]}$ имеет место для каждого локально алгебраического линейного оператора и, в частности, для триангулизируемых линейных операторов. Существуют примеры коммутирующих локально алгебраических линейных операторов A и B, для которых имеет место строгое включение $\overline{F[A,B]} \subset CC(A,B)$.

Теорема 1. *Пусть V – векторное пространство полем F, A и B – локально алгебраические линейные операторы, действующие на V. Если линейные операторы A, B коммутируют и $f(A,B) = 0$, где $f(x,y)$ – абсолютно неразложимый многочлен из $F[x,y]$ и $(f(a,b), \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}(a,b), \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}(a,b)) \neq (0,0,0)$ для любых $a, b \in \overline{F}$, то $CC(A,B) = \overline{F[A,B]}$.*

Пусть V – векторное пространство. Локально алгебраический линейный оператор $A \in End(V)$ называется минимальным, если для каждого локально алгебраического линейного оператора $X \in End(V)$ из $C(X) \subseteq C(A)$ следует, что $C(X) = C(A)$.

Теорема 2. *Пусть V – векторное пространство произвольной размерности над бесконечным полем F и $A : V \to V$ — локально алгебраический линейный оператор. Тогда A минимален в точности тогда, когда $\overline{F[A]}$ является максимальной коммутативной подалгеброй алгебры $End_F(V)$.*

[1]Исследование Абызова А.Н. выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 22-21-00267)

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Abyzov, A., Maklakov, A., Locally algebraic linear operators and their centralizers // Linear Algebra and Its Applicationsthis. 2023. Vol. 662. P. 1–17.

2. Z. Mesyan, Infinite-Dimensional Triangularization // J. Pure Appl. Algebra. 2018. Vol. 222, no. 7. pp. 1529–1547.

———————————————————————————————————

УДК 511.32

Различные подходы к определению первичности модулей

И. Н. Балаба (Россия, г. Тула)
Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого
e-mail: ibalaba@mail.ru

Different approaches to determining the primeness of modules

I. N. Balaba (Russia, Tula)
Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University
e-mail: ibalaba@mail.ru

Первичность и связанные с ней вопросы успешно используется при изучении различных алгебраических систем: ассоциативных и неассоциативных алгебр, групп, алгебр Ли; а также групп и колец, наделенных различными дополнительными структурами: градуированных колец, решеточно-упорядоченных групп (l-групп) и колец (l-колец), групп с системой мультиоператоров Ω (Ω-групп) и многих других.

Понятие первичного модуля появилось в работах Р.Е. Джонсона [1] и В.А. Андрунакиевича [2], который показал, что первичный радикала ассоциативного кольца равен пересечению аннуляторов первичных модулей. В [3] В.А. Андрунакиевичем совместно с Ю.М. Рябухиным было установлено, что любой специальный радикал ассоциативного кольца можно охарактеризовать с помощью некоторого подкласса первичных модулей.

В 70-80 годы прошлого века появилось много различных определений первичности модуля, обобщающие понятие первичного идеала ассоциативного кольца, обзор и сравнительный анализ которых можно найти в работе Р. Висбауэра [4]. Автором в [5] были рассмотрены свойства первичных и строго первичных градуированных модулей, определен градуированный правый строго первичный радикал. Рассматривались также и первичные подмодули модуля (см., например, [6]). Во всех этих работах первичность определялась в терминах аннуляторов подмодулей или элементов.

Все рассматриваемые далее кольца являются ассоциативными с единицей, модули – унитарными, $\mathrm{Ann}_A(M) = \{a \in A | Ma = 0\}$ – аннулятор правого A-модуля M.

Определение 1 ([6]). *Подмодуль N правого A-модуля M называется первичным, если для любых $m \in M$, $a \in A$ из того, что $mAa \subseteq N$ следует $m \in N$ или $a \in \mathrm{Ann}_A(M/N)$.*
Модуль M – первичен, если 0 его первичный подмодуль.

Пусть для любого ненулевого вполне инвариантного подмодуля N модуля ${}_AM$ выполнено следующее условие:

$$\mathrm{Ann}_A(M/N) \not\subset \mathrm{Ann}_A(M) \quad (1)$$

Теорема 1 ([7], p. 95). *Пусть M – A-модуль, $S = \mathrm{End}_A(M)$, $\bar{A} = A/\mathrm{Ann}_A(M)$. Тогда:*

1) если M – первичный модуль, то $\bar{A}$ – первичное кольцо;

2) если $\bar{A}$ – первичное кольцо и для M выполнено условие (1), то M – первичный модуль;

3) если M – первичный модуль и для M выполнено условие (1), то M_S – первичный S-модуль (и S – первичное кольцо).

Обозначим через $S = End_A(M)$ кольцо эндоморфизмов правого A-модуля M. Подмодуль N модуля M называется *вполне инвариантным*, если $f(N) \subseteq N$ для всех $f \in S$. Для подмножеств $I \subset S$, $N \subset M$ обозначим через $I(N) = IN = \sum_{f \in I} f(N)$.

В [8] для вполне инвариантных подмодулей первичность определялась с помощью кольца эндоморфизмов. Чтобы отличить это определение будем называть такую первичность эндопервичностью.

Определение 2 ([8]). *Вполне инвариантный A-подмодуль N модуля M называется эндопервичным, если для любого идеала $I \subset S$ и любого вполне инвариантного подмодуля U модуля M из того, что $I(U) \subset N$ следует $I(M) \subset N$ или $U \subset N$.*

Правый A-модуль M называется эндопервичным, если 0 *является его эндопервичным подмодулем.*

Заметим, что поскольку $\mathrm{End}_A(A) \cong A$, то для идеалов кольца A условия первичности и эндопервичности эквивалентны.

Теорема 2. *Каждый эндопервичный A-модуль является первичным модулем над своим кольцом эндоморфизмов.*

Если первичный A-модуль M удовлетворяющий условию $\mathrm{Ann}_A(M/N) \not\subset \mathrm{Ann}_A(M)$ для любого ненулевого вполне инвариантного подмодуля N, то он является эндопервичным.

Если A – коммутативное кольцо, то каждый эндопервичный подмодуль A-модуля M является его первичным подмодулем.

Автором совместно с А.В.Михалевым [8] было предложено обобщить понятие первичности на бимодули, поскольку каждый правый A-модуль является левым модулем над своим кольцом эндоморфизмов, а идеалы кольца A можно рассматривать как подбимодули бимодуля ${}_AA_A$

Пусть A, B – кольца и ${}_BM_A$ – B-A-бимодуль, т.е. левый B-модуль и правый A-модуль, при этом $(b-m)a = b(ma)$ для всех $a \in A$, $m \in M$, $b \in B$.

Определение 3. *Подбимодуль N бимодуля ${}_BM_A$ назовем первичным, если для любого $a \in A$ и любого $b \in B$ из того, что $bMa \subset N$ следует $Ma \subset N$ или $bM \subset N$.*

Бимодуль ${}_BM_A$ называется первичным, если 0 *– его первичный подбимодуль.*

Следующая теорема дает несколько характеризация первичного подбимодуля.

Теорема 3. *Пусть A, B – кольца и N – подбимодуль бимодуля ${}_BM_A$. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(1) N – первичный подмодуль;

(2) если I – левый идеал кольца A, а J – правый идеал кольца B и $JMI \subset N$, то $MI \subset N$ или $JM \subset N$;

(3) для любого $a \in A$ и любого подбимодуля $K \subset M$ если $Ka \subset N$, то либо $K \subset N$ либо $Ma \subset N$;

(4) для любого $b \in B$ и любого подбимодуля $K \subset M$ если $bK \subset N$, то либо $K \subset N$ либо $bM \subset N$.

Замечание 1. *Каждый первичный вполне инвариантный (эндопервичный) подмодуль правого A-модуля M является первичным подбимодулем бимодуля $_SM_A$, где S – кольцо эндоморфизмов A-модуля M.*

Теорема 4. *Пусть вполне инвариантный A-подмодуль N модуля M_A является первичным подбимодулем бимодуля $_AM_S$, где $S = \mathrm{End}_A(M)$. Тогда N является первичным и эндопервичным подмодулем модуля M_A.*

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Johnson R.E. Representations of prime rings // Trans. Amer. Math. Soc. – 1953. – Vol. 74, no. 2. – P. 351–357.

2. Андрунакиевич В.А. Первичные модули и радикал Бэра // Сиб. матем. журн. – 1961. – Т. 2, №,6. – С. 801–806.

3. Андрунакиевич В.А., Рябухин Ю.М. Специальные модули и специальные радикалы // ДАН СССР. – 1962. – Т. 147, №,6. – С. 1274–1277.

4. Wisbauer R. On prime modules and rings // Comm. Algebra. 1983. – Vol. 11. – P. 2249–2265.

5. Балаба И.Н. Первичные градуированные модули // Фундамент. и прикл. матем. 2008. Т.14, №4. – С. 65-74.

6. Dauns J. Prime modules // J. Reine Angew. Math.– 1978. – Vol. 298. – P. 156–181.

7. Wisbauer R. Modules and algebras: bimodule structure on group actions and algebras.– Addison-Wesley-Longman.– 1996. – 366 p.

8. Nguyen Van Sanh, Nguyen Anh Vu, K. F. U. Ahmed, S. Asawasamrit, Le Phuong Thao. Primeness in module category // Asian-European Journal of Mathematics. – 2010.– Vol. 3, no. 1. – P.145–154.

9. Балаба И.Н., Михалёв А.В. Первичность в категории модулей //В сборнике: Алгебра, теория чисел, дискретная геометрия и многомасштабное модели-рование: современные проблемы, приложения и проблемы истории. Материалы XX Международной конференции, посвящённой 130-летию со дня рождения академика И.М. Виноградова. Тула, 2022. С. 56-58.

———————————————————————————

УДК 512.558

Характеризация мультипликативно идемпотентных полуколец с аннуляторным условием

Е. М. Вечтомов (Россия, г. Киров)
Вятский государственный университет
e-mail: vecht@mail.ru
А. А. Петров (Россия, г. Киров)
Вятский государственный университет
e-mail:apetrov43@mail.ru

Characterization of multiplicatively idempotent semirings with annihilator condition

E. M. Vechtomov (Russia, Kirov)
Vyatka State University
e-mail: vecht@mail.ru
A. A. Petrov (Russia, Kirov)
Vyatka State University
e-mail: apetrov43@mail.ru

Заметка является продолжением работ [3, 4]. Ассоциативные кольца и дистрибутивные решетки с аннуляторными свойствами изучались в [1]. Теории мультипликативно идемпотентных полуколец посвящена книга [2].

1. Предварительные сведения. Напомним необходимые понятия теории полуколец.

Под *полукольцом* понимается алгебраическая структура $\langle S, +, \cdot \rangle$ с коммутативно-ассоциативной операцией сложения $+$ и ассоциативной операцией умножения $\cdot$, в которой умножение дистрибутивно относительно сложения с обеих сторон.

Полукольцо с тождеством $xx = x$ будем называть *мультипликативно идемпотентным*. Мультипликативно идемпотентные кольца суть *булевы кольца*.

Если S — полукольцо с нулем 0 и $a \in S$, то положим $\operatorname{Ann} a = \{s \in S : \ as = sa = 0\}$ — (*двусторонний*) *аннулятор* элемента a. Любое мультипликативно идемпотентное полукольцо S с 0 *коммутативно в нуле*, то есть удовлетворяет квазитождеству $st = 0 \Rightarrow ts = 0$ [2, замечание 1.2.1], поэтому $\operatorname{Ann} a = \{s \in S : \ sa = 0\} = \{s \in S : \ as = 0\}$ в S для каждого элемента a.

Назовем полукольцо S с 0 *полукольцом с аннуляторным условием*, если $\operatorname{Ann} a = \operatorname{Ann} b$ влечет $a = b$ для любых элементов $a, b \in S$. В классе (ассоциативных) колец аннуляторному условию удовлетворяют в точности булевы кольца [1, теорема 1]. Аннуляторным свойством обладают и обобщенные булевы решетки. Известно, что мультипликативно идемпотентные полукольца с аннуляторным условием *коммутативны* [2, предложение 1.2.11], то есть имеют коммутативное умножение.

Для элементов a, c полукольца S определим понятие *правого уравнителя* $Eq(a, c) = \{s \in S : as = cs\}$, являющегося правым идеалом в S.

Коммутативное полукольцо S с нулем 0 назовем:

• *полукольцом с дополнениями*, если S — полукольцо с ненулевой единицей 1, каждый элемент a которого имеет дополнение $b \in S$: $a + b = 1$ и $ab = 0$;

• *полукольцом с относительными дополнениями*, если каждый его главный идеал является полукольцом с дополнениями;

• *полукольцом с псевдодополнениями*, если для каждого $a \in S$ существует такой элемент $b \in S$, что $\operatorname{Ann} a = bS$.

• *полукольцом с относительными псевдодополнениями*, если каждый его главный идеал является полукольцом с псевдодополнениями;

• *строго гармоническим*, если для любых его различных максимальных идеалов M и N найдутся такие элементы $a \in S \setminus M$ и $b \in S \setminus N$, что $ab = 0$;

• *слабо риккартовым*, если $ab = 0$ влечет $\operatorname{Ann} a + \operatorname{Ann} b = S$ для любых элементов $a, b \in S$;

• *риккартовым*, если $\operatorname{Ann} a + aS = S$ для каждого элемента $a \in S$.

Отметим, что риккартовы полукольца с 1 слабо риккартовы. Симметрические слабо риккартовы и риккартовы полукольца с 1 и без ненулевых нильпотентных элементов изучались в монографии [7, параграф 10].

Напомним, что дистрибутивная решетка с нулем называется *обобщенной булевой решеткой*, если она является решеткой с относительными дополнениями. *Булевы решетки* — это обобщенные булевы решетки с ненулевой единицей.

2. Структурные свойства. Сформулируем два новых утверждения о мультипликативно идемпотентных полукольцах, удовлетворяющих аннуляторному условию.

Теорема 1. *Для того чтобы мультипликативно идемпотентное полукольцо S с 0 удовлетворяло аннуляторному условию, необходимо и достаточно, чтобы S обладало правым уравнительным свойством:*

$$\forall a, b, c \in S\,(Eq(a, c) = Eq(b, c) \Rightarrow a = b).$$

Замечание 1. В теореме 1 вместо правого уравнительного свойства можно взять левое или двустороннее уравнительное свойство.

Теорема 2. *Для произвольного мультипликативно идемпотентного полукольца S равносильны следующие утверждения:*

1) S удовлетворяет аннуляторному условию и является полукольцом с относительными псевдодополнениями;

2) S — полукольцо с относительными дополнениями;

3) S — риккартово полукольцо с аннуляторным условием;

4) S изоморфно прямому произведению булева кольца и обобщенной булевой решетки.

Следствие 1. *Риккартовы дистрибутивные решетки (как полукольца) с аннуляторным условием суть в точности обобщенные булевы решетки.*

Отметим, что теорема 2 служит обобщением теоремы 1 из [4].

3. Дистрибутивные решетки. Хорошо известна классическая теорема Биркгофа–Стоуна об изоморфном представлении любой абстрактной дистрибутивной решетки S в виде решетки множеств L: $S \cong L$ (см., например, [5, с. 93]). *Решеткой множеств* называется произвольное непустое множество L множеств, замкнутое относительно конечных теоретико-множественных объединений и пересечений, то есть $A \cup B, A \cap B \in L$ для всех $A, B \in L$. Получаем дистрибутивную решетку $\langle L, \cup, \cap \rangle$. При этом, если L имеет нулевой (единичный) элемент, то можно считать, что пустое множество $\varnothing$ принадлежит L (соответственно, $\cup L = \cup\{A : A \in L\} \in L$).

Замечание 2. При изучении дистрибутивных решеток S можно ограничиться рассмотрением решеток множеств L. Это теоретико-множественный подход к исследованию дистрибутивных решеток. Для булевых решеток (булевых алгебр) он осуществлен в монографии Р. Сикорского [6] и основан на теореме Стоуна о представлении булевых алгебр как полей множеств. Напомним, что *полем множеств* называется такая решетка множеств L, что $\varnothing \in L, E = \cup L \in L$ и $E \setminus A \in L$ для всех $A \in L$. Отметим, что традиционно решетки множеств называют кольцами множеств, что плохо согласовано с термином «кольцо».

Решетка множеств L называется *приведенной*, если для любых двух различных точек $x, y \in \cup L$ существует множество $A \in L$, содержащее ровно одну из этих точек: $x \in A, y \notin A$ или $x \notin A, y \in A$. Если для произвольной решетки множеств L склеить точки $x, y \in \cup L$, не разделяемые никаким множеством из L, то, очевидно, получим приведенную решетку множеств, канонические изоморфную L.

Выполнение аннуляторного условия на решетке множеств L равносильно тому, что $\varnothing \in L$ и для любых $A, B \in L$ строгое включение $A \subset B$ влечет существование непустого множества $X \in L$, для которого $A \cap X = \varnothing$ и $X \subset B$.

Неодноэлементную решетку множеств L назовем *точечной*, если все одноточечные (одноэлементные) подмножества множества $\cup L$ принадлежат L. Все точечные решетки множеств суть приведенные решетки множеств с $\varnothing$ в качестве нулевого элемента и являются дистрибутивными решетками с аннуляторным условием.

Абстрактная решетка называется *точечной* [5, с. 233], если каждый ее ненулевой элемент является точной верхней гранью некоторого (непустого) множества атомов. Очевидно, что все точечные решетки множеств будут точечными решетками.

Теорема 3. *Любая неодноэлементная точечная дистрибутивная решетка изоморфна некоторой точечной решетке множеств.*

Следствие 2. *Всякая конечная дистрибутивная решетка S с аннуляторным условием изоморфна булеану $B(X)$ некоторого конечного множества X.*

Замечание 3. Неатомные булевы решетки, будучи дистрибутивные решетками с аннуляторным условием, не являются точечными решетками.

Ограниченная дистрибутивная решетка S называется:

• *нормальной*, если она обладает свойством нормальности:

$$\forall a, b \in S \ (a + b = 1 \Rightarrow \exists x, y \in S(a + x = 1 \ \& \ b + y = 1 \ \& \ xy = 0));$$

• *конормальной*, если она обладает свойством, двойственным нормальности, то есть

$$\forall a, b \in S \ (ab = 0 \Rightarrow \exists x, y \in S(ax = 0 \ \& \ by = 0 \ \& \ x + y = 1));$$

• *решеткой с коаннуляторным условием*, если любые неравные элементы $a, b \in S$ имеют неравные *коаннуляторы* $\operatorname{Can} a$ и $\operatorname{Can} b$, где $\operatorname{Can} c = \{s \in S : s + c = 1\}$ при $c \in S$.

Информацию о нормальных и конормальных решетках и их функциональных представлениях можно найти в параграфе 2.2 книги [2].

Замечание 4. Легко видеть, что любая нормальная решетка S является строго гармоническим полукольцом. Строгая гармоничность ограниченной дистрибутивной решетки не влечет, вообще говоря, ее нормальность.

Очевидно, что для любой ограниченной дистрибутивной решетки S равносильны условия: S конормальна; S — слабо риккартово полукольцо; двойственная к S решетка нормальна.

Ясно, что ограниченная дистрибутивная решетка удовлетворяет коаннуляторному условию тогда и только тогда, когда двойственная ей решетка удовлетворяет аннуляторному условию.

В заключение рассмотрим **примеры** точечных решеток множеств натуральных чисел.

• L_0 — решетка множеств, состоящая из конечных множеств натуральных чисел и самого $\mathbb{N}$.

• L_1 — решетка множеств, составленная из конечных и коконечных (дополнений до конечных множеств) подмножеств множества $\mathbb{N}$.

• L_2 — решетка множеств, содержащая в точности L_0 и все коконечные подмножества в $\mathbb{N}$, содержащие множество $2\mathbb{N}$ всех четных чисел.

• L_3 — решетка множеств, содержащая L_0, а также подмножества в $\mathbb{N}$, включающие $2\mathbb{N}$.

• L_4 — решетка множеств, включающую в себя L_1 и множества $A \subset \mathbb{N}$, почти равные $2\mathbb{N}$, то есть симметрическая разность $A \oplus (2\mathbb{N})$ конечна.

• L_5 — решетка множеств, отличающаяся от L_4 только тем, что в качестве A берутся множества натуральных чисел, почти равные множеству $2\mathbb{N} - 1$ нечетных чисел. Решетка L_5 изоморфна решетке L_4 при следующей инволюции $\mathbb{N}$ на $\mathbb{N}$, индуцирующей изоморфизм:

$(2n-1) \to 2n$ и $2n \to (2n-1)$ для любого $n \in \mathbb{N}$. Переход к дополнениям в $\mathbb{N}$, $X \to \mathbb{N} \setminus X$ для всех $X \in L_5$, осуществляет антиизоморфизм решетки L_5 на решетку L_4. Следовательно, изоморфные решетки L_4 и L_5 — самодвойственные.

• $L_6 = B(N)$ — булеан множества $\mathbb{N}$.

Решетка L_0 является наименьшей точечной решеткой на $\mathbb{N}$ с единицей $\mathbb{N}$. Отметим, что решетка $L_0 \setminus \{\mathbb{N}\}$ обобщенно булева. Решетка L_1 — наименьшая точечная булева решетка на $\mathbb{N}$, а решетка L_6 — наибольшая булева решетка на $\mathbb{N}$; остальные из рассматриваемых решеток не булевы. Имеем $L_1 \cap L_3 = L_2$ и $L_4 \cap L_5 = L_1$. Решетка L_0 нормальна и не конормальна, а двойственная ей решетка не нормальна и конормальна. Решетка L_2 нормальна, а решетка L_3 не нормальна, но обе они не конормальны и не удовлетворяют коаннуляторному условию. Решетки L_4 и L_5 нормальны, конормальны и удовлетворяют коаннуляторному условию. Решетки L_1, L_4, L_5, L_6 — самодвойственные, а решетки L_0, L_2, L_3 не являются самодвойственными. Поскольку все решетки $L_0 - L_6$ суть решетки с аннуляторным свойством, то двойственные к ним решетки обладают коаннуляторным свойством.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Вечтомов Е. М. Аннуляторные характеризации булевых колец и булевых решеток // Математические заметки. 1993. Том 53, вып. 2. С. 15–24.
2. Вечтомов Е. М., Петров А. А. Функциональная алгебра и полукольца. Полукольца с идемпотентным умножением. — Санкт-Петербург: Лань, 2022. 180 с.
3. Вечтомов Е. М., Петров А. А. Мультипликативно идемпотентные полукольца с аннуляторным условием // Материалы XXI Международной конференции «Алгебра, теория чисел, дискретная геометрия и многомасштабное моделирование: проблемы, приложения и проблемы истории», посвященная 85-летию со дня рождения А. А. Карацубы. Тула: ТГПУ им. Л. Н. Толстого, 2022. С. 125–128.
4. Вечтомов Е. М., Петров А. А. Мультипликативно идемпотентные полукольца с аннуляторным условием // Известия вузов. Математика. 2023. Вып. 3. С. 29–40.
5. Гретцер Г. Общая теория решеток. — М.: Мир, 1982. 456 с.
6. Сикорский Р. Булевы алгебры. — М.: Наука, 1969. 376 с.
7. Чермных В. В. Функциональные представления полуколец. — Киров: Изд-во ВятГГУ, 2010. 224 с.

УДК 512.552

Идемпотентные образующие алгебр инцидентности[1]

Н. А. Колегов (Россия, г. Москва)
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
e-mail: na.kolegov@yandex.ru

[1]Исследования получили финансовую поддержку Фонда развития теоретической физики и математики «БАЗИС», договор № 22-8-3-21-1.

Idempotent generators of incidence algebras

N. A. Kolegov (Russia, Moscow)
Lomonosov Moscow State University
e-mail: na.kolegov@yandex.ru

Пусть $\mathcal{R}$ — коммутативное ассоциативное кольцо с единицей, $M_n(\mathcal{R})$ — алгебра всех $n \times n$ матриц с элементами в $\mathcal{R}$. Подалгебра $\mathcal{A} \subseteq M_n(\mathcal{R})$ называется *структурной матричной алгеброй* [7], если $\mathcal{A}$ является свободным $\mathcal{R}$-модулем с базисом, состоящим из некоторых матричных единиц E_{ij}, причем все диагональные матричные единицы E_{ii}, $i = 1, \ldots, n$ лежат в этом базисе. Если дополнительно выполнено, что никакие две симметричные матричные единицы E_{ij} и E_{ji} не принадлежат этому базису одновременно, то $\mathcal{A}$ называют *алгеброй инцидентности*. В этом случае семейство таких пар индексов (i, j), что E_{ij} лежит в указанном базисе, задает частичный порядок $i \preceq j$ на множестве $\{1, \ldots, n\}$. Обратно, если дан произвольный частичный порядок $\preceq$ на $\{1, \ldots, n\}$, то $\mathcal{R}$-модуль, порожденный множеством $\{E_{ij} \mid i \preceq j\}$, замкнут относительно операции умножения матриц и поэтому является алгеброй инцидентности. Она будет обозначаться далее как $\mathcal{A}_n(\preceq, \mathcal{R})$.

В случае, когда $\preceq$ — это тривиальный частичный порядок, т.е. равенство, тогда алгебра инцидентности совпадает с алгеброй $D_n(\mathcal{R})$ всех диагональных $n \times n$ матриц. Если же рассматривать стандартный линейный порядок $\leq$ на $\{1, \ldots, n\}$, то получится алгебра $T_n(\mathcal{R})$ всех верхнетреугольных матриц.

Приведенная конструкция может быть обобщена и на случай бесконечных частично упорядоченных множеств. Подробное введение в теорию алгебр инцидентности можно найти в книге [8].

Пусть $\mathcal{K}$ — ассоциативное кольцо с единицей $1_{\mathcal{K}}$, при этом S — некоторое его подмножество. Тогда S *порождает* кольцо $\mathcal{K}$, если любой элемент $a \in \mathcal{K}$ может быть представлен в виде суммы некоторых произведений элементов множества $S \cup \{1_{\mathcal{K}}\}$:

$$a = \sum_{i=1}^{N} s_{i,1} \cdot \ldots \cdot s_{i,k_i}, \tag{1}$$

где все $s_{i,j} \in S \cup \{1_{\mathcal{K}}\}$, а натуральные числа $N, k_1, \ldots, k_N$ могут быть различными для различных $a \in \mathcal{K}$.

Если $\mathcal{A}$ — ассоциативная $\mathcal{R}$-алгебра с единицей $1_{\mathcal{A}}$, то подмножество $S \subseteq \mathcal{A}$ *порождает $\mathcal{A}$ как алгебру*, если его объединение со всеми скалярами $S \cup \{r \cdot 1_{\mathcal{A}} \mid r \in \mathcal{R}\}$ порождает $\mathcal{A}$ как кольцо. В качестве простого примера можно привести алгебру многочленов $\mathcal{R}[x_1, \ldots, x_m]$, которая порождается множеством переменных $\{x_1, \ldots, x_m\}$.

Одна из задач в этой области — это описание алгебр, которые могут быть порождены идемпотентами. Известно, что если алгебра $\mathcal{A}$ над некоторым полем $\mathbb{F}$ является простой и содержит хотя бы один идемпотент, отличный от нуля и единицы, то $\mathcal{A}$ порождается множеством всех своих идемпотентов (с небольшими исключениями в характеристике 2). Это следует из более общего результата Амицура [1, теорема 2]. Различные описания конечномерных алгебр, порожденных идемпотентами, были получены в работах Брешера [2], Ху, Щиао [3].

Если известно, что алгебра $\mathcal{A}$ порождается некоторым конечным множеством идемпотентов, то другая задача — определить минимальную возможную мощность такого множества. Далее $\nu = \nu(\mathcal{A})$ обозначает минимальное натуральное число k, что в алгебре $\mathcal{A}$ найдутся k идемпотентов, которые порождают $\mathcal{A}$.

В работе [6] Крупник вычислил ν для полной матричной алгебры над произвольным полем $\mathbb{F}$.

Теорема 1 ([6, теорема 1]). *Если $n = 2$ и в поле $\mathbb{F}$ больше двух элементов, то $\nu(M_n(\mathbb{F})) = 2$. Во всех остальных случаях выполнено $\nu(M_n(\mathbb{F})) = 3$.*

Позднее Келарев, фан дор Марве, фан Уэйк нашли величину ν для алгебры верхнетреугольных матриц $T_n(\mathcal{R})$ над произвольным коммутативным кольцом $\mathcal{R}$ с единицей.

Теорема 2 ([4, теорема 6]). *Если $n = 2, 3, 4$, то $\nu(T_n(\mathcal{R})) = \lceil \log_2 n \rceil + 1$. Во всех остальных случаях выполнено $\nu(T_n(\mathcal{R})) = \lceil \log_2 n \rceil$.*

В докладе будет представлено обобщение этого результата на произвольную алгебру инцидентности.

Пусть на множестве $\mathcal{N} = \{1, \ldots, n\}$ задан частичный порядок $\preceq$. Если для $i, j \in \mathcal{N}$ выполнено $i \prec j$ и не существует такого k, что $i \prec k \prec j$, то j *покрывает* i. Граф G называется неориентированной *диаграммой Хассе*, если его множество вершин совпадает с $\{1, \ldots, n\}$, две вершины i, j соединены ребром, если j покрывает i или i покрывает j.

Для каждого натурального m зададим граф $\mathcal{Q}_m$, соответствующий m-мерному *булеву кубу*. Множество его вершин $\{0, 1\}^m$ — все возможные наборы из нулей и единиц длины m. Два набора соединены ребром, если они отличаются ровно в одной позиции. Затем рассмотрим дополнение $\overline{\mathcal{Q}_m}$. Это граф с тем же множеством вершин, две вершины соединены ребром в $\overline{\mathcal{Q}_m}$ тогда и только тогда, когда они *не соединены* ребром в исходном графе $\mathcal{Q}_m$.

Лемма 1 ([5]). *Рассмотрим произвольный неориентированный граф G на n вершинах без петель и кратных ребер.*

1. Если $m < \lceil \log_2 n \rceil$, то ни один подграф в $\overline{\mathcal{Q}_m}$ не изоморфен G.

2. Если $m = \lceil \log_2 n \rceil + 1$, то существует подграф в $\overline{\mathcal{Q}_m}$ изоморфный G.

Предыдущая лемма не покрывает только ситуацию $m = \lceil \log_2 n \rceil$. В этом случае G может как вкладываться, так и не вкладываться в указанный граф. Скажем, что граф G на n вершинах принадлежит *нулевому классу идемпотентности*, если он вкладывается в граф $\overline{\mathcal{Q}_m}$ при $m = \lceil \log_2 n \rceil$. В противном будем считать, что граф G принадлежит *первому классу идемпотентности*. Номер класса обозначим как $\mathrm{idem}(G)$.

В работе [5] показано, что если n является степенью двойки, то оба класса графов заведомо не пусты и содержат некоторые диаграммы Хассе.

Теперь всё готово для того, чтобы сформулировать основной результат.

Теорема 3 ([5]). *Рассмотрим алгебру инцидентности $\mathcal{A} = \mathcal{A}_n(\preceq, \mathcal{R})$ над произвольным коммутативным кольцом $\mathcal{R}$ с единицей. Пусть G — диаграмма Хассе для частичного порядка $\preceq$. Тогда*

$$\nu(\mathcal{A}) = \lceil \log_2 n \rceil + idem(G). \qquad (2)$$

Автор выражает благодарность своему научному руководителю Марковой Ольге Викторовне за полезные обсуждения и внимание к работе.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Amitsur S. A. Invariant submodules of simple rings // Proc. Amer. Math. Soc. 1956. Volume 7. P. 987–989.

2. Brešar M. Finite dimensional zero product determined algebras are generated by idempotents // Expo. Math. 2016. Volume 34. P. 130–143.

3. Hu W., Xiao Z. A characterization of algebras generated by idempotents // J. Pure Appl. Algebra. 2021. Volume 225. Article number 106693.

4. Kelarev A. V., van der Merwe A. B., van Wyk L. The minimum number of idempotent generators of an upper triangular matrix algebra // J. Algebra. 1998. Volume 205. P. 605–616.

5. Kolegov N. A. Idempotent generators of incidence algebras. Preprint.

6. Krupnik N. Minimal number of idempotent generators of matrix algebras over arbitrary field // Commun. Algebra. 1992. Volume 20. P. 3251–3257.

7. Smith K. C., van Wyk L. An internal characterisation of structural matrix rings // Commun. Algebra. 1994. Volume 22. P. 5599–5622.

8. Spiegel E., O'Donnell C. J. Incidence algebras. — New York (NY): Marcel Dekker, Inc., 1997. 335 p.

УДК 512.552

О правом спектре конечного квазиполя[1]

О. В. Кравцова (Россия, г. Красноярск)
Сибирский федеральный университет
e-mail: ol71@bk.ru

On the right spectrum of a finite quasifield

O. V. Kravtsova (Russia, Krasnoyarsk)
Siberian Federal University
e-mail: ol71@bk.ru

Алгебраическая система $(Q,+,\cdot)$ с бинарными операциями $+$ и $\cdot$ называется *правым квазиполем*, если:
1) $(Q,+)$ — абелева группа;
2) $Q^* = (Q\setminus\{0\},\cdot)$ — лупа;
3) выполнен правый дистрибутивный закон $(a+b)c = ac+bc$ $(a,b,c\in Q)$;
4) $a\cdot 0 = 0$ для всех $a\in Q$;
5) уравнение $xa = xb + c$ однозначно разрешимо для всех $a,b,c\in Q$, $a\neq b$.

Квазиполе с двусторонней дистрибутивностью называется *полуполем.* Квазиполя изучаются взаимосвязанно с проективными плоскостями трансляций, исследования восходят к началу 20-го века (О. Веблен, Д. Маклаган–Веддерберн, Л. Диксон), подробно см. [1]. Следующие структурные вопросы для конечных полуполей и квазиполей исследовались в различных ситуациях уже давно и записаны В. М. Левчуком в [2].

(A) *Перечислить максимальные подполя, найти их число и возможные порядки.*

(B) *Выявить конечные квазиполя Q с неоднопорожденной лупой Q^*.*

(C) *Выявить, какие возможны спектры лупы Q^* конечного полуполя и квазиполя.*

(D) *Найти порядок группы автоморфизмов.*

[1] Работа поддержана Красноярским математическим центром, финансируемым Минобрнауки РФ (Соглашение 075-02-2023-936).

Правоупорядоченная и *левоупорядоченная степень* элемента квазиполя определяются индуктивно:

$$a^{1)} = a^{(1} = a, \quad a^{n+1)} = a^{n)} \cdot a, \quad a^{(n+1} = a \cdot a^{(n}, \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

n-й степенью называем любое произведение n множителей, равных a. Аналогично теоретико-групповым понятиям, вводятся порядок элемента, его левый и правый порядки, спектр мультипликативной лупы Q^* ненулевых элементов, ее левый и правый спектры.

В правом квазиполе Q правое умножение $R_a : x \to xa$ является линейным преобразованием левого векторного пространства Q над его ядром. Все такие преобразования образуют *регулярное множество* (spread set) R, свойства которого непосредственно связаны со свойствами квазиполя и координатизируемой проективной плоскости трансляций. Эта зависимость позволяет широко использовать регулярные множества конечных квазиполей для их построения и классификации, в том числе методами компьютерной алгебры, для изучения строения.

Теорема 1. *Пусть Q – правое квазиполе порядка p^n, p – простое число, $a \in Q^*$, $\theta(a) \in GL_n(p)$ – соответствующая матрица регулярного множества. Тогда правый порядок элемента a делит порядок матрицы $\theta(a)$ в группе $GL_n(p)$.*

Первые примеры конечных квазиполей, не являющихся ни полуполями, ни почти-полями, построил М. Холл в 1943 г. Квазиполе Q порядка q^2 ($q = p^n$, p – простое число), двумерное над центром $K \simeq GF(q)$, называется *квазиполем Холла*, если все нецентральные элементы являются корнями одного неприводимого квадратичного многочлена $\varphi(x) = x^2 - rx - s \in K[x]$.

Теорема 2. *Пусть Q – квазиполе Холла порядка p^{2n}, p – простое число. Тогда его правый спектр равен $S_r = M \cup \{m\}$, где M – множество всех делителей числа $p^n - 1$, m – делитель числа $p^{2n} - 1$, не делящий $p^n - 1$. И обратно, для любого p^{2n} и любого множества $S_r = M \cup \{m\}$ указанного вида существует квазиполе Холла порядка p^{2n} с правым спектром S_r.*

К изучению конечных полуполей применимо классическое понятие минимального многочлена ненулевого элемента. *Правоупорядоченным минимальным многочленом* элемента $a \in Q^*$ называется такой нормированный многочлен

$$\mu_a^r(x) = x^m + c_1 x^{m-1} + \cdots + c_{m-1} x + c_m \in \mathbb{Z}_p[x]$$

минимальной степени, что

$$a^{m)} + c_1 a^{m-1)} + \cdots + c_{m-1} a + c_m = 0.$$

Как доказано в [3], правоупорядоченный минимальный многочлен элемента a делит многочлен $x^k - 1$, где k – правый порядок a. Кроме того, справедлива теорема.

Теорема 3. *Пусть Q – полуполе порядка p^n, p – простое число. Если правоупорядоченный минимальный многочлен $\mu_a^r(x)$ элемента $a \in Q^*$ – неприводимый многочлен степени m, то правый порядок элемента a делит число $p^m - 1$.*

Для левого порядка и левоупорядоченного минимального многочлена теорема также справедлива. Отметим, что без требования неприводимости многочлена результат неверен. Так, в непримитивном полуполе Кнута–Руа порядка 32 [2] любой элемент, кроме 0 и 1, имеет правый порядок 21 и правоупорядоченный минимальный многочлен $(x^2 + x + 1)(x^3 + x^2 + 1)$ либо $(x^2 + x + 1)(x^3 + x + 1)$. Выдвинем предположение:

Гипотеза 1. *Пусть Q – полуполе порядка p^n, p – простое число. Если правоупорядоченный минимальный многочлен элемента $a \in Q^*$ равен произведению*

$$\mu_a^r(x) = \rho_1(x)\rho_2(x)\ldots\rho_k(x) \in \mathbb{Z}_p[x]$$

различных неприводимых многочленов степеней m_1, m_2, ..., m_k, то правый порядок элемента a делит число $(p^{m_1}-1)(p^{m_2}-1)\ldots(p^{m_k}-1)$.

Известные автору примеры полуполей порядков 16, 32, 64, 81 показывают, что в случае кратных множителей $\rho_i(x)$ предположение неверно.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Johnson N. L., Jha V., Biliotti M. Handbook of finite translation planes. — Chapman and Hall, Boca Raton, London, New York, 2007, 861 p.

2. Levchuk V.M., Kravtsova O.V. Problems on structure of finite quasifields and projective translation planes // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2017. Vol. 38, no. 4. P. 688–698.

3. Kravtsova O. V. Minimal proper quasifields with additional conditions // Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics. 2020. Vol. 13, no. 1. P. 104–113.

УДК 512.552

Инволюции второго рода алгебры верхнетреугольных матриц[1]

И. А. Кульгускин (Россия, г. Москва)
Казанский (Приволжский) федеральный университет
e-mail: ivan-kull@rambler.ru
Д. Т. Тапкин (Россия, г. Казань)
Казанский (Приволжский) федеральный университет
e-mail: danil.tapkin@yandex.ru

Involutions of the second kind of the algebra of upper triangular matrices

I. A. Kulguskin (Russia, Moscow)
Kazan (Volga Region) Federal University
e-mail: ivan-kull@rambler.ru
D. T. Tapkin (Russia, Kazan)
Kazan (Volga Region) Federal University
e-mail: danil.tapkin@yandex.ru

Пусть R – коммутативное кольцо и $\mathbb{A}$ – произвольная R-алгебра.

Определение 1. *R-линейное отображение $\gamma : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ называется* инволюцией*, если $\forall a, b \in \mathbb{A}$ $\gamma(ab) = \gamma(b)\gamma(a)$ и $\gamma^2(a) = a$.*

[1]Работа Тапкина Д.Т. поддержана грантом Российского научного фонда и Кабинета Министров Республики Татарстан (проект № 23-21-10086)

Определение 2. *Инволюция γ называется* инволюцией первого рода, *если γ тождественно действует на центре алгебры $\mathbb{A}$. В противном случае, инволюция γ называется* инволюцией второго рода.

Определение 3. *Две инволюции γ, δ алгебры $T_n(R)$ называются* эквивалентными, *если существует изоморфизм $\varphi : (T_n(R), \gamma) \to (T_n(R), \delta)$ такой, что для любой матрицы $A \in T_n(R)$ $\varphi(\gamma(A)) = \delta(\varphi(A))$.*

В последнее время пристальному изучению подверглись инволюции первого рода. Стандартными примерами инволюций первого рода в алгебре верхнетреугольных матриц служат *ортогональная* и *симплектическая* инволюции. Так в работах [4]–[7] инволюции изучались в алгебрах инцидентности. В статье [9] была получена классификация с точностью до эквивалентсности инволюций в алгебре верхнетреугольных матриц $T_n(F)$, где F – произвольное поле, характеристики отличной от 2. Совсем недавно в работе [2] были описаны инволюции в алгебре верхнетреугольных матриц, в случае полей характеристики два и коммутативных колец R, у которых фактор-кольцо $R/2R$ булево. И, как естественное продолжение работы [2], в [1] была проведена классификация инволюций с точностью до эквивалентности в алгебре верхнетреугольных матриц над кольцом целых алгебраических чисел квадратичных полей. Также в работе [3] описаны и в частных случаях классифицированы инволюции в кольцах Крылова над факториальным кольцом.

Существенно опираясь на результаты работы [9], в статье [8] приступили к изучению инволюций второго рода и провели классификацию инволюций с точностью до эквивалентности в алгебре верхнетреугольных матриц над полем характеристики отличной от 2. Для полей характеристики 2 вопрос не исследовался.

Хорошо известно, что центр алгебры $T_n(F)$, где F — некоторое поле, состоит из скалярных матриц. Таким образом, алгебра $T_n(F)$ обладает инволюцией, тогда и только тогда, когда инволюцией обладает поле F. А именно, если λ – инволюция поля F, то можно задать инволюцию t_λ алгебры $T_n(F)$ по правилу $(a_{ij}) \mapsto J(\lambda(a_{ij}))^T J^{-1}$, где $J = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & \dots & 1 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_n(F)$.

Некоторый критерий существования инволюции в поле можно получить с помощью теории Галуа.

Предложение 1. *Пусть F – поле характеристики 2.*

1) В поле F существует инволюция тогда и только тогда, когда существует подполе H поля F такое, что расширение F/H сепарабельное степени 2.

2) Если поле F совершенно, то в поле F существует инволюция тогда и только тогда, когда существует подполе H поля F такое, что расширение F/H имеет степень 2.

Достаточно очевидно, что если две инволюции алгебры $T_n(F)$ эквивалентны, то они индуцируют совпадающие инволюции на поле F. Были получены критерии эквивалентности инволюций, из которых можно вывести следующие результаты.

Теорема 1. *Пусть F – поле характеристики 2 и n нечетно. Множество классов эквивалентности инволюций в алгебре $T_n(F)$ находится в биективном соответствии с множеством инволюций в F.*

Фиксируем инволюцию λ поля F. Через γ_v обозначим инволюцию алгебры $T_n(F)$ определенную по правилу $\gamma_v(a) = vt_\lambda(a)v^{-1}$. Данное отображение будет инволюцией если и только если $t_\lambda(v) = \varepsilon_v v$ для некоторого $\varepsilon_v \in F$.

Теорема 2. *Пусть F – поле характеристики 2 и n четно. Инволюции γ_v и γ_u эквивалентны тогда и только тогда, когда существует $w \in F$ такой, что $\varepsilon_v = \frac{w}{\lambda(w)}\varepsilon_u$.*

В качестве конкретных примеров приведем следующие два результата.

Теорема 3. *В алгебре $T_n(\mathbb{F}_{2^{2k}})$ все инволюции второго рода попарно эквивалентны. В алгебре $T_n(\mathbb{F}_{2^{2k-1}})$ инволюций второго рода нет.*

Теорема 4. *1) В алгебре $T_n(\mathbb{F}_{2^{2k}}(x))$ имеется ровно $2^{4k} + 2^{3k} + 2^k - 1$ классов эквивалентности инволюций.*

2) В алгебре $T_n(\mathbb{F}_{2^{2k-1}}(x))$ имеется ровно $2^{4k-2} - 1$ классов эквивалентности инволюций.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кульгускин И. А. Инволюции в алгебре верхнетреугольных матриц над кольцом целых алгебраических чисел квадратичных полей // (препринт)
2. Кульгускин И. А., Тапкин Д. Т. Инволюции в алгебре верхнетреугольных матриц // Известие вузов. Математика. 2023. № 6. С. 11—30.
3. Кульгускин И. А., Тапкин Д. Т. Инволюции в кольцах $K_s(R)$ // (препринт)
4. Spiegel E. Involutions in incidence algebras // Linear Algebra App. 2005. Vol. 405. pp. 155—162.
5. Brusamarello R., Fornaroli E. Z., Santulo Jr. E. A. Classication of involutions on incidence algebras // Comm. Alg. 2011. Vol. 39. pp. 1941–1955.
6. Brusamarello R., Lewis D. W. Automorphisms and involutions on incidence algebras // Linear and Multilinear Algebra. 2011. Vol. 59. No. 11. pp. 1247–1267.
7. Brusamarello R., Fornaroli E. Z., Santulo Jr. E. A. Anti-automorphisms and involutions on (finitary) incidence algebras // Linear Multilinear Algebra. 2012. Vol. 60, pp. 181–188.
8. Urure R. I. Q., Silva D. C. Involutions of the Second Kind for Upper Triangular Matrix Algebras // Commun. Algebra. 2023. Vol. 51. No. 6. pp. 2326–2333.
9. Di Vincenzo O. M., Koshlukov P., La Scala R. Involutions for upper triangular matrix algebras // Adv. Appl. Math. 2006. Vol. 37. pp. 541–568.

УДК 512.554

О консервативности ассосимметричных алгебр[1]

А. В. Кухарев (Россия, г. Красноярск)
Сибирский федеральный университет
e-mail: kukharev.av@mail.ru

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ, грант 19-71-10017

On conservativity of assosymmetric algebras

A. V. Kukharev (Russia, Krasnoyarsk)
Siberian Federal University
e-mail: kukharev.av@mail.ru

Консервативные алгебры — это класс неассоциативных алгебр, введенный И. Кантором при изучении обобщений алгебр Йордана [1, 2]. Пусть $C : V \to V$ и $B : V \times V \to V$ – линейный и билинейный операторы на векторном пространстве V соответственно. Определим новый билинейный оператор $[C, B] : V \times V \to V$ по формуле

$$[C, B](x, y) = C(B(x, y)) - B(C(x), y) - B(x, C(y)).$$

Рассмотрим алгебру (V, B), заданную на векторном пространстве V с умножением $B : V \times V \to V$. Пусть L_a — оператор левого сдвига на этой алгебре, то есть $L_a(x) = B(a, x)$ $(x \in V)$.

Алгебра (V, B) называется *консервативной*, если существует другое умножение B^* (называемое ассоциированным с B) на том же векторном пространстве V, такое что

$$[[L_a, [L_b, B]] = -[L_{B^*(a,b)}, B] \quad \forall a, b \in V. \tag{1}$$

Скажем, что алгебра (V, B) *сильно консервативная*, если

$$[[L_a, [L_b, B]] = -[L_{B(a,b)}, B] \quad \forall a, b \in V, \tag{2}$$

то есть это консервативная алгебра, в которой ассоциированное умножение B^* совпадает с исходным умножением B. Условие (2) эквивалентно тождеству

$$b(a(xy) - (ax)y - x(ay)) - a((bx)y) + (a(bx))y + (bx)(ay) - a(x(by)) +$$
$$+ (ax)(by) + x(a(by)) = -(ab)(xy) + ((ab)x)y + x((ab)y),$$

где $a, b, x, y \in V$ и $xy = B(x, y)$.

Известно, что все ассоциативные и квази-ассоциативные алгебры, а также алгебры Ли, алгебры Лейбница, алгебры Йордана и алгебры Зимбеля являются консервативными (см. [3]). Более того, все эти алгебры, за исключением алгебр Зимбеля, являются сильно консервативными.

В настоящей работе изучался вопрос о консервативности ассосимметричных алгебр. Напомним, что алгебра A называется *ассосимметричной*, если $(a, b, c) = (b, a, c)$ и $(a, b, c) = (a, c, b)$ для любых $a, b, c \in A$, где по определению $(a, b, c) = (ab)c - a(bc)$.

Алгебра A называется *почти ассоциативной справа*, если выполняется тождество $((xy)z)a = (x(yz))a$ для любых элементов $x, y, z, a \in A$.

Доказано следующее утверждение

Теорема 1. *Пусть A — ассосимметричная алгебра. Тогда алгебра A является сильно консервативной, если и только если она является почти ассоциативной справа.*

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кантор И. Л. Некоторые обобщения йордановых алгебр // Тр. Семинара по векторному и тензорному анализу. 1972. Том 16. С. 407–499.

2. Kantor I. On an extension of a class of Jordan algebras // Algebra and Logic. 1989. Vol. 28. № 2. P. 117–121.

3. Kaygorodov I., Lopatin A., Popov Y. Conservative algebras of 2-dimensional algebras // Linear Algebra and its Applications. 2015. Vol. 486. P. 255-274.

УДК 512.554.3

О коммутанте внутреннего идеала алгебры Ли

Е. В. Мещерина (Россия, г. Оренбург)
Оренбургский государственный университет
e-mail: elena_lipilina@mail.ru
А. Н. Благовисная (Россия, г. Оренбург)
Оренбургский государственный университет
e-mail: matmet@bk.ru

On the commutator of the inner ideal of a Lie algebra

E. V. Mescherina (Russia, Orenburg)
Orenburg State University
e-mail: elena_lipilina@mail.ru
A. N. Blagovisnaya (Russia, Orenburg)
Orenburg State University
e-mail: matmet@bk.ru

Определение 1. *Назовем подпространство B алгебры Ли L внутренним идеалом, если $[B,[B,L]]\subseteq B$.*

Например, подалгебра $sl(2,F)$ над полем F характеристики 0 является внутренним идеалом и идеалом для алгебры Ли $gl(2,F)$. Для самой алгебры Ли $sl(2,F)$ внутренними идеалами являются подпространства $Fe=\{\alpha e_{12},\alpha\in F\}$ и $Ff=\{\beta e_{21},\beta\in F\}$ [1].

Всякий идеал I алгебры Ли L является подалгеброй и внутренним идеалом, но не всякая подалгебра является идеалом, также как и не всякий внутренний идеал является идеалом [2].

Рассматривая соотношение внутреннего идеала алгебры Ли с ее подалгеброй, построен пример внутреннего идеала, не являющегося алгеброй Ли [2].

Приведем пример, показывающий, что подалгебра алгебры Ли также может не быть внутренним идеалом.

Пример. Подалгебра кососимметрических матриц $o(2,F):\{A\in gl(n,F):A^T=-A\}$ полной линейной алгебры Ли $gl(2,F)$ над полем характеристики 0 не является внутренним идеалом для $gl(2,F)$.

Вывод. Внутренний идеал не всегда является подалгеброй алгеброй Ли также как и алгебра Ли не всегда является внутренним идеалом.

Ранее нами было доказано, что взаимный коммутант двух внутренних идеалов может не быть внутренним идеалом [2].

Известно, что коммутант внутреннего идеала, являющегося алгеброй Ли, также является внутренним идеалом [1],[2].

Возникает вопрос: всегда ли коммутант внутреннего идеала алгебры Ли является внутренним идеалом?

Ответ на этот вопрос дает следующее предложение.

Предложение 1. *Пусть подпространство B – внутренний идеал алгебры Ли L и B не подалгебра в L. Тогда, коммутант внутреннего идеала $[B,B]$ не является собственным внутренним идеалом алгебры Ли L.*

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Benkart G. On inner ideals and ad-nilpotent elements of Lie algebras // Transaction of the American Mathematical Society. 1977. V. 232. P. 61–81.

2. Мещерина Е. В., Пихтильков С. А. О некоторых свойствах внутренних идеалов алгебры Ли // Вестник ОГУ. 2013. № 9(158). С. 110–114.

———————————————————————————————

УДК 512.552

Алгебры кватернионов с унитарными инволюциями, имеющие одинаковые подполя

С. В. Тихонов (Беларусь, г. Минск)
Белорусский государственный университет
e-mail: tikhonovsv@bsu.by

Quaternion algebras with unitary involutions having the same subfields

S. V. Tikhonov (Belarus, Minsk)
Belarusian State University
e-mail: tikhonovsv@bsu.by

Пусть F — поле, $Br(F)$ — его группа Брауэра. Род $\mathbf{gen}(D)$ конечномерной центральной алгебры с делением D над полем F определяется как набор классов $[D'] \in Br(F)$, где D' — центральная F-алгебра с делением, имеющая такие же максимальные подполя, что и алгебра D (см. [1]). Различные варианты понятия рода рассмотрены в [2] и [3].

В [4] показано, что существуют кватернионные алгебры с бесконечным родом. Более того, доказано, что найдется поле F, над которым имеется бесконечно много попарно неизоморфных кватернионных алгебр, и любые две кватернионные F-алгебры с делением имеют одинаковый род. В [5] эти результаты обобщены на случай алгебр с делением любой простой степени.

Нами получено дальнейшее развитие идей из [4] и [5]. Мы строим поле, над которым имется бесконечно много попарно неизоморфных кватернионных алгебр с унитарными инволюциями, имеющих одинаковые подполя. Этот результат может найти применение при изучении максимальных торов унитарных алгебраических групп. Заметим, что если D — центральная алгебра с делением с унитарной инволюцией τ, то τ-инвариантные максимальные подполя алгебры D порождают максимальные торы соответствующей унитарной группы ([6, Prop. 2.3]).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Chernousov V. I., Rapinchuk A. S., Rapinchuk I. A. On the genus of a division algebra // C. R. Acad. Sci. Paris Ser. I. 2012. Vol. 350, N 17-18. P. 807-812.

2. Черноусов В. И., Рапинчук А. С., Рапинчук И. А. Алгебры с делением, имеющие одинаковые максимальные подполя // Успехи математических наук. 2015. Том 70, Вып. 1(421). С. 89-122.

3. Krashen D., Matzri E., Rapinchuk A., Rowen L., Saltman D. Division algebras with common subfields // Manuscripta Mathematica. 2022. Vol. 169, N 1-2. P. 209-249.

4. Meyer J. S. Division algebras with infinite genus // Bull. London Math. Soc. 2014. Vol. 46, N 3. P. 463-468.

5. Тихонов С. В. Алгебры с делением простой степени с бесконечным родом // Труды МИАН. 2016. Том 292. С. 264-267

6. Prasad G., Rapinchuk A. S. Local-global principles for embedding of fields with involution into simple algebras with involution // Comment. Math. Helv. 2010. Vol. 85. P. 583-645.

———————————————————————————

УДК 512.55+512.545

Спрямляющие идеалы частично псевдоупорядоченных колец

Е. Е. Ширшова (Россия, г. Москва)
Московский педагогический государственный университет
e-mail: shirshova.elena@gmail.com

Rectifying ideals of partially pseudo-ordered rings

E. E. Shirshova (Russian, Moscow)
Moscow Pedagogical State University
e-mail: shirshova.elena@gmail.com

Пусть $R =< R, +, \cdot >$ – произвольное кольцо (не обязательно ассоциативное).

R называется *частично псевдоупорядоченным кольцом*, если $< R, +, \leqslant >$ – частично упорядоченная группа, удовлетворяющая условию:

$(*)$ если $0 \leqslant a$ в $< R, +, \leqslant >$, то $ab \leqslant a$ и $ba \leqslant a$ для любого $b \in R$ (см. [1]).

Частично упорядоченная группа называется *направленной*, если любые два элемента имеют в этой группе верхнюю грань.

Если группа $< R, +, \leqslant >$ является направленной (линейно упорядоченной), то R называется *направленно (линейно) псевдоупорядоченным кольцом.*

Часто условию $(*)$ удовлетворяют аддитивные группы колец без единицы (колец Ли, йордановых колец, например).

Подгруппа M частично упорядоченной группы G называется *выпуклой*, если для любых элементов $a, b \in M$ и $g \in G$ из неравенств $a \leqslant g \leqslant b$ всегда следует $g \in M$.

Идеал I частично псевдоупорядоченного кольца $R =< R, +, \cdot, \leqslant >$ называется *выпуклым*, если группа $< I, +, \leqslant >$ является выпуклой подгруппой аддитивной группы $< R, +, \leqslant >$.

Целью данного сообщения является характеризация множеств выпуклых направленных идеалов частично псевдоупорядоченных колец.

Выпуклый идеал I частично псевдоупорядоченного кольца R называется *спрямляющим*, если факторкольцо R/I является линейно псевдоупорядоченным кольцом.

Важные свойства спрямляющих идеалов в подклассе направленно псевдоупорядоченных колец рассматривались ранее в сообщении А.В. Михалева и Е.Е Ширшовой [2].

Частично упорядоченная группа G называется *интерполяционной группой*, если для любых элементов $a_1, a_2, b_1, b_2 \in G$ из неравенств $a_1, a_2 \leqslant b_1, b_2$ следует существование элемента $c \in G$, для которого верны неравенства $a_1, a_2 \leqslant c \leqslant b_1, b_2$.

Определение 1. *Частично псевдоупорядоченное кольцо $R =< R, +, \cdot, \leqslant>$ называется интерполяционным псевдоупорядоченным кольцом, если аддитивная группа $R =< R, +, \leqslant>$ является интерполяционной группой.*

Свойства порядковых гомоморфизмов интерполяционных псевдоупорядоченных колец исследовались в работе А.В. Михалева и Е.Е Ширшовой [3]

Положительные элементы a и b частично упорядоченной группы $G =< G, +, \leqslant>$ называются *почти ортогональными или АО-элементами (almost orthogonal elements)* в G, если из неравенств $g \leqslant a, b$ следует верность неравенств $ng \leqslant a, b$ для всех элементов $g \in G$ и всех целых чисел $n > 0$.

Теорема 1. *Каждой паре почти ортогональных элементов a и b интерполяционного псевдоупорядоченного кольца R соответствует выпуклый направленный идеал $I_{a,b}$ кольца R.*

Пусть R – произвольное кольцо, $\{I_s |\ s \in S\}$ – семейство идеалов кольца R. Объединением

$$\bigvee_{s\in S} I_s$$

идеалов будем считать их сумму

$$\sum_{s\in S} I_s.$$

Теорема 2. *Пусть R – интерполяционное псевдоупорядоченное кольцо. Тогда в R существует выпуклый направленный идеал*

$$\mathcal{I} = \bigvee_{a,b} I_{a,b}$$

для всех пар почти ортогональных элементов a и b кольца R.

Частично упорядоченную группу $G =< G, +, \leqslant>$ называют *АО-группой*, если любой элемент $g \in G$ представим в виде разности $g = a - b$, где элементы a и b почти ортогональны в группе G.

Интерполяционная *АО*-группа называется *псевдорешеточно упорядоченной группой.*

Определение 2. *Частично псевдоупорядоченное кольцо $R =< R, +, \cdot, \leqslant>$ называется псевдо-решеточно псевдоупорядоченным кольцом, если группа $< R, +, \leqslant>$ является псевдо-решеточно упорядоченной группой.*

Теорема 3. *Пусть $R =< R, +, \cdot, \leqslant>$ – псевдо-решеточно псевдоупорядоченное кольцо. Выпуклый направленный идеал $\mathcal{I}$ в кольце R совпадает с пересечением всех спрямляющих направленных идеалов кольца R.*

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бибаева В. Н., Ширшова Е. Е. О линейно K-упорядоченных кольцах// Фундаментальная и прикладная математика. 2011/2012. Том 17, № 4. С. 13-23.

2. Михалев А. В., Ширшова Е. Е. Спрямляющие направленные идеалы частично псевдоупорядоченных колец// XVII Международная конференция "Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы, приложения и проблемы истории посвященная 100-летию со дня рождения профессора Н. И. Фельдмана и 90-летию профессоров А. И. Виноградова, А. В. Малышева и Б. Ф. Скубенко.: тезисы докладов международной конференции (Тула, 23-28 сентября 2019 г.) — Тула, 2019. С. 18-20.

3. Михалев А. В., Ширшова Е. Е. Интерполяционно псевдоупорядоченные кольца// Фундаментальная и прикладная математика. 2022. Том 22, № 4. С. 147-166.

———————————————————————————————————

УДК 511.32

Локальный $\frac{1}{2}$-дифференцирование на естественно градуированной филиформной алгебре Лейбница[1]

Б. Б. Юсупов (Узбекистан , г. Ташкент)
Институт математики им. В. И. Романовского Академии наук Узбекистана
e-mail:baxtiyor_yusupov_93@mail.ru
Н. З. Ваисова (Узбекистан , г. Ташкент)
Институт математики им. В. И. Романовского Академии наук Узбекистана
e-mail: nafosat_vaisova@mail.ru

Local $\frac{1}{2}$-derivation on naturally graded filiform Leibniz algebra

B. B. Yusupov (Uzbekistan, Tashkent)
V. I. Romanovskiy Institute of Mathematics, Uzbekistan Academy of Sciences
e-mail:baxtiyor_yusupov_93@mail.ru
N. Z. Vaisova (Uzbekistan, Tashkent)
V. I. Romanovskiy Institute of Mathematics, Uzbekistan Academy of Sciences
e-mail:nafosat_vaisova@mail.ru

Понятие локального дифференцирования было введено и исследовано независимо Р.В. Кэдисоном [9] и Д.Р. Ларсоном и А.Р. Сурур [10]. Эти работы положили начало серии работ, посвященных описанию отображений, близких к автоморфизмам и дифференцированиям C^*-алгебр и операторных алгебр. Р.В. Кадисон изложил программу изучения локальных отображений в [9], предполагая, что локальные дифференцирования могут оказаться полезными при построении дифференцирований с определенными свойствами. Р. В. Кадисон в [9] доказал, что каждое непрерывное локальное дифференцирование алгебры фон Неймана M в двойственный банахов M-бимодуль является дифференцированием. На смену этой теореме пришли исследования по дифференцированиям на C^*-алгебрах, кульминацией которых стал результат Б.Е. Джонсона, утверждающего, что каждое локальное дифференцирование C^*-алгебры A в банахов A-бимодуль автоматически непрерывен и, следовательно, является дифференцированием [8, Теорема 5.3].

Приведем список конечномерных алгебр, для которых все локальные дифференцирования являются дифференцированиями:

- C^*-алгебры, в частности, алгебра $M_n(\mathbb{C})$ всех квадратных матриц порядка n над полем комплексных чисел[9, 8];
- комплексная полиномиальная алгебра $\mathbb{C}[x]$ [9];
- конечномерные простые алгебры Ли над алгебраически замкнутым полем нулевой характеристики [4];
- алгебры Кэли [2];

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке...

- локально конечные расщепляемые простые алгебры Ли над полем нулевой характеристики [6];

С другой стороны, некоторые алгебры (в большинстве случаев близкие к нильпотентным) допускают чисто локальные дифференцирования, т. е. локальные дифференцирования, не являющиеся дифференцированиями. Ниже приведен краткий список некоторых классов алгебр, допускающих чисто локальные дифференцирования:

- алгебра $\mathbb{C}(x)$ рациональных функций [9];
- конечномерные филиформные алгебры Ли [4];
- p-филиформные алгебры Лейбница[5];
- разрешимые алгебры Лейбница с абелевыми нильрадикалами, имеющие одномерное дополняющее пространство [3];
- нуль-филиформные алгебры Лейбница с прямой суммой [1].

Определение 1. *Векторное пространство с билинейной скобкой $(\mathcal{L}, [\cdot,\cdot])$ называется алгеброй Лейбница, если для любых $x, y, z \in \mathcal{L}$ выполнено так называемое тождество Лейбница:*

$$\big[x,[y,z]\big] = \big[[x,y],z\big] - \big[[x,z],y\big].$$

Пусть $\mathcal{L}$ — алгебра Лейбница. Для алгебры Лейбница $\mathcal{L}$ рассмотрим следующие центральные нижнюю и производную последовательности:

$$\mathcal{L}^1 = \mathcal{L}, \quad \mathcal{L}^{k+1} = [\mathcal{L}^k, \mathcal{L}^1], \quad k \geq 1,$$

$$\mathcal{L}^{[1]} = \mathcal{L}, \quad \mathcal{L}^{[s+1]} = [\mathcal{L}^{[s]}, \mathcal{L}^{[s]}], \quad s \geq 1.$$

Определение 2. *Алгебра Лейбница $\mathcal{L}$ называется нильпотентной (соответственно, разрешимой), если существует $p \in \mathbb{N}$ ($q \in \mathbb{N}$) такой, что $\mathcal{L}^p = 0$ (соответственно $\mathcal{L}^{[q]} = 0$). Минимальное число p (соответственно q), обладающее таким свойством, называется индексом нильпотентности (соответственно, разрешимости) алгебры $\mathcal{L}$.*

Определение 3. *n-мерная алгебра Лейбница $\mathcal{L}$ называется филиформной, если $\dim \mathcal{L}^i = n - i$, для $2 \leq i \leq n$.*

Теперь определим естественную градуировку нильпотентной алгебры Лейбница.

Определение 4. *Для нильпотентной алгебры Лейбница $\mathcal{L}$ положим $\mathcal{L}_i = \mathcal{L}^i/\mathcal{L}^{i+1}$, $1 \leq i \leq n-1$ и $gr(\mathcal{L}) = \mathcal{L}_1 \oplus \mathcal{L}_2 \oplus \dots \oplus \mathcal{L}_{n-1}$. Тогда $[\mathcal{L}_i, \mathcal{L}_j] \subseteq \mathcal{L}_{i+j}$ и получим градуированную алгебру $gr(\mathcal{L})$. Если $gr(\mathcal{L})$ и L изоморфны, то говорим, что алгебра $\mathcal{L}$ естественно градуирована.*

В следующей теореме была приведена классификация естественно градуированных филиформных нелиевых алгебр Лейбница, приведенная в [7].

Теорема 1. *[7]. Любая комплексная n-мерная естественно градуированная филиформная нелиева алгебра Лейбница изоморфна одной из следующих неизоморфных алгебр*

- $F_n^1: \ [e_1, e_1] = e_3, \quad [e_i, e_1] = e_{i+1}, \quad 2 \leq i \leq n-1;$
- $F_n^2: \ [e_1, e_1] = e_3, \quad [e_i, e_1] = e_{i+1}, \quad 3 \leq i \leq n-1.$

Теперь дадим определения $\frac{1}{2}$-дифференцирования и локального $\frac{1}{2}$-дифференцирования.

Определение 5. *$\frac{1}{2}$-дифференцирование на алгебре Ли $\mathcal{L}$ — это линейное отображение $D : \mathcal{L} \to \mathcal{L}$, удовлетворяющее*

$$D[x, y] = \frac{1}{2}\left([D(x), y] + [x, D(y)]\right)$$

для всех $x, y \in \mathcal{L}$.

Обозначим через $\frac{1}{2}Der(\mathcal{L})$ множество всех $\frac{1}{2}$-дифференцирований $\mathcal{L}$.

Определение 6. *Линейный оператор Δ называется локальным $\frac{1}{2}$-дифференцированием, если для любого $x \in \mathcal{L}$, существует $\frac{1}{2}$ -дифференцирование $D_x : \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ (в зависимости от x) такой, что $\Delta(x) = D_x(x)$.*

Множество всех локальных $\frac{1}{2}$-дифференцирования на $\mathcal{L}$ обозначим через $\mathrm{Loc}\frac{1}{2}\mathrm{Der}(\mathcal{L})$.

В следующем предложении описываем $\frac{1}{2}$-дифференцирование естественно градуированных филиформных алгебр Лейбница.

Лемма 1. *Любое $\frac{1}{2}$-дифференцирование D комплексной n-мерной естественно градуированной филиформной нелиевой алгебры Лейбница имеет следующий вид:*

для алгебр F_n^1

$$D(e_1) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i, \quad D(e_2) = (\alpha_1 + \alpha_2)e_2 + \sum_{i=3}^{n-1} \alpha_i e_i + \beta e_n,$$

$$D(e_j) = \left(\alpha_1 + \frac{\alpha_2}{2^{j-2}}\right) e_j + \frac{1}{2^{j-2}} \sum_{i=j+1}^{n} \alpha_{i-j+2} e_i, \quad 3 \leq j \leq n.$$

для алгебр F_n^2

$$D(e_1) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i, \quad D(e_2) = \beta e_2 + \gamma e_n,$$

$$D(e_j) = \alpha_1 e_j + \frac{1}{2^{j-2}} \sum_{i=j+1}^{n} \alpha i - j + 2 e_j, \quad 3 \leq j \leq n.$$

Замечание 1. *Размерности пространств $\frac{1}{2}$-дифференцирований алгебр F_n^1 или F_n^2 равны*

$$\begin{aligned} \dim \tfrac{1}{2}Der(F_n^1) = &\quad n + 1, \\ \dim \tfrac{1}{2}Der(F_n^2) = &\quad n + 2. \end{aligned}$$

В следующей теореме даем описание локального $\frac{1}{2}$-дифференцирования естественно градуированных филиформных алгебр Лейбница.

Теорема 2. *Пусть Δ является линейным отображением — линейное отображение на комплексной n-мерной естественно градуированной филиформной нелиевой алгебре Лейбница. Любое локальное $\frac{1}{2}$-дифференцирование Δ алгебр F_n^1 или F_n^2 имеет следующий вид:*

для алгебр F_n^1

$$\begin{cases} \Delta(e_1) &= \sum\limits_{j=1}^{n} c_{j,1} e_j, \\ \Delta(e_2) &= (c_{1,1} + c_{2,1})e_2 + \sum\limits_{j=3}^{n-1} c_{j,1} e_j + c_{n,2} e_n, \\ \Delta(e_i) &= \sum\limits_{j=i}^{n} c_{j,i} e_j, \quad 3 \leq i \leq n; \end{cases} \tag{1}$$

для алгебр F_n^2

$$\begin{cases} \Delta(e_1) &= \sum\limits_{j=1}^{n} c_{j,1}e_j, \\ \Delta(e_2) &= c_{2,2}e_2 + c_{n,2}e_n, \\ \Delta(e_i) &= \sum\limits_{j=i}^{n} c_{j,i}e_j, \quad 3 \le i \le n. \end{cases} \tag{2}$$

Замечание 2. *Размерности пространств локальных* $\frac{1}{2}$*-дифференцирований алгебр* F_n^1 *или* F_n^2 *равны*

$$\dim Loc\tfrac{1}{2}Der(F_n^1) = \frac{n^2-3n+8}{2},$$
$$\dim Loc\tfrac{1}{2}Der(F_n^2) = \frac{n^2-3n+10}{2}.$$

Замечания 1 и 2 показывают, что размерности пространств всех локальных $\frac{1}{2}$-дифференцирований алгебр F_n^1 или F_n^2 строго больше размерностей пространства всех $\frac{1}{2}$-дифференцирований F_n^1 или F_n^2. Таким образом, мы имеем следующий результат.

Следствие 1. *Алгебры* F_n^1 *или* F_n^2 *допускают локальные* $\frac{1}{2}$*-дифференцирования, не являющиеся* $\frac{1}{2}$*-дифференцированиями.*

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Adashev J. Q. and Yusupov B. B. Local derivations and automorphisms of direct sum null-filiform Leibniz algebras // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2022. 12(43), P. 1-7.

2. Ayupov Sh. A., Elduque A. and Kudaybergenov K. K. Local derivations and automorphisms of Cayley algebras // Journal of Pure and Applied Algebra. 2023. 5(227), 107277.

3. Ayupov Sh. A., Khudoyberdiyev A. Kh., Yusupov B. B. Local and 2-local derivations of solvable Leibniz algebras // Internat. J. Algebra Comput. 2020. 6(30), P. 1185-1197.

4. Ayupov Sh. A., Kudaybergenov K. K. Local derivations on finite-dimensional Lie algebras // Linear Algebra Appl. 2016. 493, P. 381-398.

5. Ayupov Sh. A., Kudaybergenov K. K., Yusupov B. B. Local and 2-local derivations of p-filiform Leibniz algebras // Journal of Mathematical Sciences. 2020. 3(245), P. 359-367.

6. Ayupov Sh. A., Kudaybergenov K. K., Yusupov B. B. Local and 2-Local Derivations of Locally Simple Lie Algebras // Contemporary Mathematics. Fundamental Directions. 2022. 1(68), P. 59-69.

7. Ayupov Sh. A., Omirov B. A. On some classes of nilpotent Leibniz algebras // Siberian Math. J. 2001. 42, P. 15-24.

8. Johnson B. E. Local derivations on C^*-algebras are derivations // Transactions of the American Mathematical Society. 2001. 353, P. 313-325.

9. Kadison R. V. Local derivations // J. Algebra. 1990. 130, P. 494-509.

10. Larson D. R., Sourour A. R. Local derivations and local automorphisms of $B(X)$ // Proc. Sympos. Pure Math. 1990. 51, P. 187-194.

Секция 4. Прикладная и компьютерная алгебры, криптография и дискретная математика

УДК 519.716

Об аналоге теоремы Колмогорова о суперпозициях непрерывных функций для функциональных систем полиномиальных и рациональных функций

Н. Ф. Алексиадис (Россия, г. Москва)
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова;
Национальный исследовательский университет «МЭИ»
e-mail: aleksiadis@yandex.ru
N. Ph. Aleksiadis (Russia, Moscow)
Lomonosov Moscow State University;
National Research University "MPEI"
e-mail: aleksiadis@yandex.ru

On an analogue of Kolmogorov's theorem on superpositions of continuous functions for functional systems of polynomial and rational functions

Этот доклад можно считать продолжением цикла моих работ [1]-[6] и моих докладов на международных конференциях [7]-[9] о проблеме полноты для функциональных систем полиномиальных и рациональных функций.

При изложении материала в основном используется терминология книг [11] и [12].

Одним из важнейших направлений дискретной математики и математической кибернетики является теория функциональных систем, т.е. специальных алгебр, моделирующих структуру и поведение реальных управляющих систем. При изучении подобных алгебр одно из центральных мест занимает проблема полноты. Эта проблема тесно связана с методами анализа и синтеза управляющих систем.

К проблеме полноты примыкает известная теорема Колмогорова о представлении непрерывных функций нескольких переменных в виде суперпозиций непрерывных функций одной переменной и сложения.

Теорема 1 (Колмогоров [10]). *При любом целом $n \geq 2$ существуют такие определенные на единичном отрезке $E^1 = [0;1]$ непрерывные действительные функции $\varphi^{pq}(x)$, что каждая определенная на n-мерном единичном кубе E^n непрерывная действительная функция $f(x_1, ..., x_n)$ представима в виде*

$$f(x_1, ..., x_n) = \sum_{q=1}^{2n+1} \chi_q[\sum_{p=1}^{n} \psi^{pq}(x_p)],$$

где функции $\chi_q(y)$ действительны и непрерывны.

Эту теорему можно сформулировать на языке полноты систем функции следующим образом.

Теорема 2. *В функциональной системе непрерывных функции, отображающих конечномерный единичный куб в единичный отрезок, множество всех одноместных функций и функция от двух переменных $x+y$ образуют полную систему.*

Представляет интерес следующий вопрос: *имеется ли аналог теоремы Колмогорова для функциональных систем полиномиальных и рациональных функций*?

Прежде чем ответить на этот вопрос введем некоторые сведения из теории функциональных систем, необходимые для дальнейшего изложения.

Мы будем использовать следующие стандартные обозначения:

N – множество всех натуральных чисел (включая число 0),

Z– множество всех целых чисел,

Q – множество всех рациональных чисел,

R – множество всех действительных чисел,

Для удобства полагаем, что $0^0 = 1$.

Функциональная система (*ф.с.*) представляет собой множество функций с некоторым набором операций, применяемых к этим функциям и приводящих к получению других функций из этого же множества, т.е. *функциональная система* — это пара вида $\mathbf{F} = (F, O)$, где F – множество функций, а O – множество операций над этими функциями, при этом каждая операция из O замкнута относительно множества F.

Для произвольного подмножества $A \subseteq F$ обозначим через $[A]$ множество всех функций из F, которые получаются из функций множества A с помощью конечного числа применения операций из O. Множество $[A]$ называется *замыканием множества* A.

Множество $A\,(A \subseteq F)$ называется *замкнутым* в функциональной системе $\mathbf{F}$, если $[A] = A$.

Замкнутое множество принято называть *замкнутым классом.*

Множество $A\,(A \subseteq F)$ называется *полным* в функциональной системе $\mathbf{F}$, если $[A] = F$.

Полное множество принято называть *полной системой.*

Основной проблемой теории функциональных систем (ф.с.) является *проблема полноты, состоящая в описании всех подмножеств A множества функций F, которые являются полными в ф.с.* $\mathbf{F} = (F, O)$.

В настоящей статье рассматривается особый подход к решению проблемы полноты для специального класса функций, а именно, аналог теоремы Колмогорова о представлении непрерывных функций нескольких переменных в виде суперпозиций непрерывных функций одной переменной и сложения для функциональных систем полиномиальных функций соответственно с натуральными, целыми, рациональными и действительными коэффициентами и для функциональных систем рациональных функций с рациональными и действительными коэффициентами.

Определим следующие функциональные системы:

1. функциональная система полиномиальных функций с натуральными коэффициентами, т.е. пара $\mathbf{F}_{PN} = (P_N, O)$, где P_N – множество всех полиномиальных функций с натуральными коэффициентами $f(x_1, ..., x_n)$, аргументы которых и сами функции принимают значения из N, т.е. $f(x_1, ..., x_n) : \underbrace{N \times N \times \cdots \times N}_{n} \to N$;

2. функциональная система полиномиальных функций с целыми коэффициентами, т.е. пара $\mathbf{F}_{PZ} = (P_Z, O)$, где P_Z – множество всех полиномиальных функций с целыми коэффициентами $f(x_1, ..., x_n)$, аргументы которых и сами функции принимают значения из Z, т.е. $f(x_1, ..., x_n) : \underbrace{Z \times Z \times \cdots \times Z}_{n} \to Z$;

3. функциональная система полиномиальных функций с рациональными коэффициентами, т.е. пара $\mathbf{F}_{PQ} = (P_Q, O)$, где P_Q – множество всех полиномиальных функций с рациональными

коэффициентами $f(x_1,...,x_n)$, аргументы которых и сами функции принимают значения из Q, т.е. $f(x_1,...,x_n) : \underbrace{Q \times Q \times \cdots \times Q}_{n} \to Q$;

4. Функциональная система полиномиальных функций с действительными коэффициентами, т.е. пара $\mathbf{F}_{PR} = (P_R, O)$, где P_R – множество всех полиномиальных функций с действительными коэффициентами $f(x_1,...,x_n)$, аргументы которых и сами функции принимают значения из R, т.е. $f(x_1,...,x_n) : \underbrace{R \times R \times \cdots \times R}_{n} \to R$;

5. функциональная система рациональных функций с рациональными коэффициентами, т.е. пара $\mathbf{F}_{RQ} = (R_Q, O)$, где R_Q – множество всех рациональных функций с рациональными коэффициентами $f(x_1,...,x_n)$, аргументы которых и сами функции принимают значения из Q, т.е. $f(x_1,...,x_n) : \underbrace{Q \times Q \times \cdots \times Q}_{n} \to Q$;

6. Функциональная система рациональных функций с действительными коэффициентами, т.е. пара $\mathbf{F}_{RR} = (R_R, O)$, где R_R – множество всех рациональных функций с действительными коэффициентами $f(x_1,...,x_n)$, аргументы которых и сами функции принимают значения из R, т.е. $f(x_1,...,x_n) : \underbrace{R \times R \times \cdots \times R}_{n} \to R$;

при этом во всех этих функциональных системах в качестве множества операций O берем *операции суперпозиции*:

- перестановка переменных,
- переименование переменных без отождествления,
- отождествление переменных,
- введение фиктивной переменной,
- удаление фиктивной переменной,
- подстановка одной функции в другую.

Следует отметить, что определения вышеперечисленных функциональных систем корректные, так как любая суперпозиция функций из $P_N, P_Z, P_Q, P_R, R_Q, R_R$ опять является функцией соответственно из $P_N, P_Z, P_Q, P_R, R_Q, R_R$.

Оказывается, что поставленная задача (аналог теоремы Колмогорова) имеет отрицательный ответ для функциональных систем полиномиальных функций с натуральными и целыми коэффициентами, а для функциональных систем полиномиальных функций с рациональными и действительными коэффициентами и для функциональных систем рациональных функций с рациональными и действительными коэффициентами – ответ положительный.

Справедливы следующие теоремы.

Теорема 3. *В функциональной системе* $\mathbf{F}_{PN}$ *аналог теоремы Колмогорова не имеет места: множество всех одноместных функций и функции* $x + y$ *из* P_N *не является полной системой.*

Теорема 4. *В функциональной системе* $\mathbf{F}_{PZ}$ *аналог теоремы Колмогорова не имеет места: множество всех одноместных функций и функции* $x + y$ *из* P_Z *не является полной системой.*

Теорема 5. *В функциональной системе* $\mathbf{F}_{PQ}$ *имеет место аналог теоремы Колмогорова: множество всех одноместных функций и функции* $x + y$ *из* P_Q *является полной системой.*

Теорема 6. *В функциональной системе* $\mathbf{F}_{PR}$ *имеет место аналог теоремы Колмогорова: множество всех одноместных функций и функции* $x + y$ *из* P_R *является полной системой.*

Теорема 7. *В функциональной системе* $\mathbf{F}_{RQ}$ *аналог теоремы Колмогорова имеет место: множество всех одноместных функций и функции* $x + y$ *из* R_Q *является полной системой.*

Теорема 8. *В функциональной системе* $\mathbf{F}_{RR}$ *аналог теоремы Колмогорова имеет место: множество всех одноместных функций и функции* $x + y$ *из* R_R *является полной системой.*

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Алексиадис Н. Ф. Функциональная система полиномов с натуральными коэффициентами // Вестник МЭИ. 2013. № 6, с. 125-140.

2. Алексиадис Н. Ф. Алгоритмическая неразрешимость проблемы полноты для полиномов с целыми коэффициентами // Вестник МЭИ. 2015. № 3, с. 110-117.

3. Алексиадис Н. Ф. О функциональной системе полиномов с рациональными коэффициентами, // Интеллектуальные системы. Теория и приложения 2019. т. 23, выпуск 4, с. 93–114.

4. Алексиадис Н. Ф. О замкнутых классах в функциональной системе рациональных функций с рациональными коэффициентами //Интеллектуальные системы. Теория и приложения. 2021. т. 25, вып. 4, с. 62-65.

5. Алексиадис Н. Ф. Рациональные А-функции с рациональными коэффициентами // Чебышевский сборник, 2022, т. 23, вып. 4, с. 11–19. (DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-4-11-19).

6. Алексиадис Н. Ф. Замкнутые классы в функциональной системе полиномов с действительными коэффициентами // Чебышевский сборник, 2023, т. 24, вып. 1, с. 5–14. (DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-1-5-14).

7. Алексиадис Н. Ф. О базисах рациональных функций с рациональными коэффициентами // XX Международная конференция «Алгебра, теория чисел, дискретная геометрия и многомасштабное моделирование: современные проблемы, приложения и проблемы истории», посвященная 130-летию академика И. М. Виноградова.: Материалы XX Международной конференции, посвященной 130-летию со дня рождения академика И. М. Виноградова (Тула, 21–24 сетября 2021 г.) — Тула, 2021. С. 77-80.

8. Алексиадис Н. Ф. О замкнутых классах в функциональной системе полиномов с действительными коэффициентами // XXI Международная конференция «Алгебра, теория чисел, дискретная геометрия и многомасштабное моделирование: современные проблемы, приложения и проблемы истории», посвященная двухсотлетию со дня рождения академика П. Л. Чебышева.: Материалы XXI Международной конференции, посвященной 85-летию со дня рождения А. А Карацубы. (Тула, 17–21 мая 2022 г.) — Тула, 2022. С. 142-145.

9. Алексиадис Н. Ф. О проблеме полноты рациональных функций с рациональными коэффициентами // Международная конференция Мальцевские чтения.: Международная конференция Мальцевские чтения (Новосибирск, 20–24 сетября 2021 г.) — Новосибирск, 2021. С. 77-80.

10. Колмогоров А. Н. О представлении непрерывных функций нескольких переменных в виде суперпозиций непрерывных функций одной переменной и сложения // ДАН СССР, 1957, т. 114, вып. 5, с. 953-956.

11. Кудрявцев В. Б. Функциональные системы. — Изд–во МГУ. 1982. 157 с.

12. Яблонский С. В. Введение в дискретную математику. — Изд–во Наука. 1986. 384 с.

————————————————————————————

УДК 512.548.7

О квазигруппах, порожденных обобщенными регистрами сдвига[1]

А. В. Галатенко (Россия, г. Москва)
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
e-mail: agalat@msu.ru
В. А. Носов (Россия, г. Москва)
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
e-mail: vnosov40@mail.ru
А. Е. Панкратьев (Россия, г. Москва)
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
e-mail: apankrat@intsys.msu.ru

Quasigroups generated by generalized shift registers

A. V. Galatenko (Russia, Moscow)
Lomonosov Moscow State University
e-mail: agalat@msu.ru
V. A. Nosov (Russia, Moscow)
Lomonosov Moscow State University
e-mail: vnosov40@mail.ru
A. E. Pankratiev (Russia, Moscow)
Lomonosov Moscow State University
e-mail: apankrat@intsys.msu.ru

В работе рассматривается задача порождения конечных квазигрупп с использованием ортоморфизмов на основе обобщенных регистров сдвига.

1. Введение

Конечные квазигруппы в последние годы активно используются для реализации различных криптографических алгоритмов (см., например, обзоры [1, 2]). В ряде алгоритмов возникают квазигруппы большого порядка, в результате чего табличное задание становится практически невозможным из-за ограничений на память. Например, в хэш-функции NaSHA [3], участвовавшей в конкурсе SHA-3, вводятся квазигруппы порядка 2^{64}. Возможный выход из положения — переход от табличного задания к функциональному (формульному). Авторы алгоритма NaSHA использовали конструкцию на основе вложенных расширенных сетей Фейстеля [4]. Идея заключалась в эффективном порождении полных перестановок σ и задании квазигрупповой операции по формуле $\sigma(x \oplus y) \oplus y$, где $\oplus$ означает поразрядное сложение по

[1]Исследование выполнено при поддержке Междисциплинарной научно-образовательной школы Московского университета «Мозг, когнитивные системы, искусственный интеллект»

модулю 2. В последующих работах тех же авторов [5, 6] конструкция была обобщена на более широкий класс перестановок, для которого были установлены достаточные условия полноты.

В данной работе рассматриваются обобщенные регистры сдвига. Значительное число конструкций из работ [4, 5, 6] представляют собой частные случаи обобщенных регистров сдвига. Основными результатами являются критерии полноты отображения, точные оценки мощности множества порождаемых квазигрупп и процедуры для генерации равномерного распределения на этом множестве.

2. Основные определения и обозначения

Определение 1. *Пусть $(G,+)$ — конечная абелева группа, σ — перестановка на G. Перестановка σ называется полной относительно группы $(G,+)$, если отображение σ', определенное отношением $\sigma'(x)=\sigma(x)-x$, также является перестановкой. В этом случае σ' называется ортоморфизмом, ассоциированным с σ.*

Определение 2. *Пара (Q,f), где Q — конечное множество, а $f\colon Q\times Q\to Q$ обратима по обеим переменным, называется конечной квазигруппой.*

В дальнейшем будут рассматриваться только конечные объекты, поэтому для краткости слово «конечный» будет опускаться.

Если σ — полная перестановка относительно $(G,+)$, а

$$f(x,y)=\sigma(x-y)+y, \tag{1}$$

то (G,f) — квазигруппа [7]. Несложно показать, что утверждение верно и для функции f, заданной соотношением $f(x,y)=\sigma(x+y)-y$. В случае, когда $(G,+)\cong\mathbb{Z}_2^m$ для некоторого $m\in\mathbb{N}$, оба варианта приводят к одной и той же операции.

Пусть $k,m,n\in\mathbb{N}$, $k\geqslant 2$, $|G|=k$, $(G,+)$ — абелева группа, $\mathcal{G}=(G,+)^n$. В дальнейшем для упрощения обозначений групповую операцию на $\mathcal{G}$ мы также будем обозначать символом $+$. Множество, на котором задана операция, будут понятно из контекста. Без ограничения общности считаем, что $G=E_k=\{0,1,\ldots,k-1\}$, причем 0 является нейтральным элементом. Множество всех функций из E_k^m в E_k обозначим через P_k^m.

Определение 3. *Обобщенным регистром сдвига назовем отображение $F(x_1,\ldots,x_n)$ из E_k^n в E_k^n, $F=(f_1,\ldots,f_n)$, заданное соотношениями*

$$\begin{array}{lcl} f_1 & = & x_2+c_1\\ f_2 & = & x_3+c_2\\ & \vdots & \\ f_{n-1} & = & x_n+c_{n-1}\\ f_n & = & x_1+g(x_2,\ldots,x_n)+c_n, \end{array} \tag{2}$$

где g — некоторая функция из P_k^{n-1}, $c_1,\ldots,c_n\in E_k$.

Легко увидеть, что обобщенный регистр сдвига задает перестановку на E_k^n.

Частными случаями обобщенного регистра сдвига являются следующие конструкции, введенные в работах [4, 5, 6]. *Параметризованная сеть Фейстеля* (Parametrized Feistel Network, PFN) определена при $n=2$ соотношениями $f_1=x_2+c_1$, $f_2=x_1+c_2+g(x_2)$. Достаточным условием полноты соответствующей перестановки является биективность функции g ([5, теорема 3.3]). *Параметризованной расширенной сетью Фейстеля типа 1* (type-1 Parameterized Extended Feistel Network, type-1 PEFN) называется отображение $F=(f_1,\ldots,f_n)$ из E_k^n в E_k^n, определяемое соотношениями $f_1 = x_2+g(x_1)+c_1$, $f_2 = x_3+c_2$, $f_3 = x_4+c_3$, …, $f_{n-1} = x_n+c_{n-1}$, $f_n = x_1+c_n$, где $g \in P_k^1$, $c_1, \ldots, c_n \in E_k$. Согласованной перенумерацией функций и переменных соотношения приводятся к следующему виду: $f_1 = x_2 + c_1$, $f_2 = x_3 + c_2$, …, $f_{n-1} = x_n + c_{n-1}$, $f_n = x_1 + g(x_n) + c_n$. Достаточными условиями полноты соответствующей перестановки является биективность функции g ([5, теорема 3.4]). *Параметризованной обобщенной сетью Фейстеля типа 4* (type-4 Parameterized Extended Feistel Network, type-4 PEFN) называется отображение $f_1 = x_2 + c_1$, $f_2 = x_3 + c_2$, …, $f_{n-1} = x_n + c_{n-1}$, $f_n = x_1 + c_n + g(x_2 + x_3 \ldots + x_n)$, где $c_1, \ldots, c_n$ — произвольные константы, $g \in P_k^1$. В случае, если $(G, +) \cong \mathbb{Z}^m$ для некоторого $m \in \mathbb{N}$, достаточным условием полноты перестановки является четность n и биективность g ([6, теорема 5]).

Для случая $n = 2$ рассмотрим еще одно обобщение регистра сдвига.

Определение 4. *Обобщенной сетью Фейстеля называется отображение $F(x_1, x_2)$, из E_k^2 в E_k^2, $F = (f_1, f_2)$, заданное соотношениями*

$$\begin{aligned} f_1 &= s(x_2) \\ f_2 &= x_1 + p(x_2). \end{aligned} \tag{3}$$

3. Основные результаты

Теорема 1. *Соотношения (2) задают полную перестановку тогда и только тогда, когда для любого $a \in E_k$, $a \neq 0$, и любого $(a_2, \ldots, a_n) \in E_k^{n-1}$ выполнено неравенство $g(a_2, \ldots, a_n) \neq g(a_2 + a, \ldots, a_n + a)$.*

Другими словами, необходимым и достаточным условием полноты является изменение значения функции на любом нетривиальном сдвиге аргументов. В случае $k = 2$ это условие в точности означает самодвойственность функции g.

Теорема 1 позволяет усилить достаточные условия полноты из работ [5, 6] до критериальных

Следствие 1. *Параметризованная сеть Фейстеля и параметризованная расширенная сеть Фейстеля типа 1 задает полную перестановку тогда и только тогда, когда функция g является биекцией.*

Следствие 2. *Параметризованная расширенная сеть Фейстеля типа 4 задает полную перестановку тогда и только тогда, когда функция g является биекцией, а значения $(n-1)$ и k взаимно простые.*

Интересно, что в условиях следствий 1 и 2 исчезла зависимость от групповой операции.

Замечание 1. *В работе [5] также введены параметризованные обобщенные регистры сдвига Фейстеля с нелинейной обратной связью (Parameterized Generalized Feistel Non Linear Feedback Shift Registers, PGF-NLFSR), определяемые соотношениями $f_1 = x_2+c_1$, $f_2 = x_3+c_2$, …, $f_{n-1} = x_n+c_{n-1}$, $f_n = x_2+x_3+\ldots+x_n+c_n+g(x_1)$, где $g \in P_k^1$ и $c_1, \ldots, c_n \in E_k$. Показано, что если $(G, +) \cong \mathbb{Z}^m$ для некоторого $m \in \mathbb{N}$, то достаточным условием полноты является четность n и биективность g ([5, теорема 3.5]). Действуя аналогично доказательству теоремы 1, несложно показать, что в общем случае критериальными условиями полноты являются биективность g и взаимная простота $(n-1)$ и k.*

Легко увидеть, что замена функции g в соотношениях (2) на $g + c$ для произвольной константы c не меняет свойство полноты. Таким образом, без ограничения общности можно считать, что $c_n = 0$. Из этого факта следует следующая оценка числа квазигрупп, порождаемых обобщенными регистрами сдвига.

Теорема 2. *Обобщенные регистры сдвига, задающие полные перестановки, с помощью соотношений* (1) *порождают* $k^{n-1} \cdot (k!)^{k^{n-2}}$ *квазигрупп порядка* k^n.

Несложно реализовать процедуру, порождающую равномерное распределение на множестве всех таких квазигрупп. Для этого достаточно равновероятно выбирать константы $c_1, \ldots, c_{n-1}$ из E_k, разбить область определения функции g на классы эквивалентности ($(a_2, \ldots, a_n) \sim (a'_2, \ldots, a'_n)$ тогда и только тогда, когда существует константа a, такая что $a'_i = a_i + a$, $i = 2, \ldots, n$) и на каждом классе эквивалентности положить g равной случайной перестановке (например, полученной с помощью алгоритма Фишера-Йетса, см. [8, С. 26–27]).

Теорема 3. *Обобщенная сеть Фейстеля, заданная соотношениями* (3)*, реализует полную перестановку тогда и только тогда, когда отображения* $s(x)$ *и* $s(x)+p(x)+x$ *являются биекциями.*

Следствие 3. *Обобщенные сети Фейстеля, задающие полные перестановки, порождают* $(k!)^2$ *квазигрупп порядка* k^2.

Равномерное распределение на множестве порождаемых квазигрупп может быть реализовано следующим образом. Сперва порождается пара «случайных» перестановок σ_1 и σ_2 на множестве E_k, затем находятся $s(x) = \sigma_1(x)$, $p(x) = \sigma_2(x) - s(x) - x$, после чего применяется соотношение (1).

4. Заключение

В работе рассмотрены обобщенные регистры сдвига. Найдены критерии полноты преобразования, реализуемого регистром, а также число порождаемых квазигрупп. Дополнительно рассмотрена процедура для выбора «случайной» порожденной квазигруппы.

Направлением дальнейших исследований является изучение свойств порождаемых квазигрупп (некоммутативность, неассоциативность, простота, неаффинность, наличие собственных подквазигрупп и т.д.). Для параметризованных сетей Фейстеля ряд результатов в этом направлении представлен в работе [4]. Однако, насколько нам известно, в общем случае задача остается нерешенной.

Авторы благодарят С. Чакрабарти (S. Chakrabarti) и С. К. Тивари (S. K. Tiwari) за плодотворные обсуждения.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Глухов М. М. О применениях квазигрупп в криптографии // Прикладная дискретная математика. 2008. №2. С. 28–32.

2. Chauhan D., Gupta I., Verma R. Quasigroups and their applications in cryptography // Cryptologia. 2021. Vol. 45, no. 3. P. 227–265.

3. Markovski S., Mileva A. NaSHA — family of cryptographic hash functions // The First SHA-3 Candidate Conference, Leuven, 2009.

4. Markovski S., Mileva A. Generating huge quasigroups from small non-linear bijections via extended Feistel function // Quasigroups and Related Systems. 2009. Vol. 17, no. 1. P. 91–106.

5. Mileva A., Markovski S. Shapeless quasigroups derived by Feistel orthomorphisms // Glasnik Matematicki. 2012. Vol. 47, no. 2. P. 333–349.

6. Mileva A., Markovski S. Quasigroup representation of some Feistel and Generalized Feistel ciphers // Advances in Intelligent Systems and Computing — ICT Innovations 2012, Vol. 207, Springer Berlin Heidelberg (2013), P. 161–171.

7. Sade A. Quasigroups automorphes par le groupe cyclique // Canadian Journal of Mathematics. 1957. Vol. 9. P. 321–335.

8. Fisher R. A., Yates F. Statistical tables for biological, agricultural and medical research. — London: Oliver & Boyd, 1948. 112 p.

УДК 511.1, 519.1

Арифметическая производная и ее приложения

Е. И. Деза (Россия, г. Москва)
Московский педагогический государственный университет
e-mail: elena.deza@gmail.com

Arithmetic derivative and its applications

E. I. Deza (Russia, Moscow)
Moscow Pedagogical State University
e-mail: elena.deza@gmail.com

В данной работе мы рассматриваем понятие арифметической производной, исследуем ее аналитические, арифметические и алгебраические свойства, изучаем возможные теоретико-числовые приложения [2, 3, 5].

Хорошо известно, что в классическом дифференциальном исчислении производная константы равна нулю. Следовательно, $n^{'}=0$ для любого натурального числа n, и с точки зрения арифметики и теории чисел перспектив для исследования производных натуральных чисел нет никаких. Попробуем построить на множестве натуральных чмисел более общий оператор, сохранив *правило Лейбница*

$$(nm)^{'}=n^{'}m+nm^{'},$$

но отказавшись от требования

$$(n+m)^{'}=n^{'}+m^{'}.$$

Считая, что $p^{'}=1$ для любого простого числа p, мы получим следующее определение.

Арифметической производной называется отображение $D:\mathbb{N}\to\mathbb{N}\cup\{0\}$, удовлетворяющее двум условиям:

- $D(nm)=D(n)m+nD(m), n,m\in\mathbb{N}$;
- $D(p)=1, p\in P$.

Нетрудно видеть, что в этом случае имеют место соотношения

$$D(1)=0,\ D(p)=1,\ D(p^p)=p^p,\ p\in P;$$

в общем случае,

$$D(p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}...p_s^{\alpha_s})=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}...p_s^{\alpha_s}\left(\frac{\alpha_1}{p_1}+\frac{\alpha_2}{p_2}+...+\frac{\alpha_s}{p_s}\right),\ p_i\neq p_j\in P,\ \alpha_i\in\mathbb{N}\cup\{0\}.$$

Возможны различные направления исследования свойств арифметической производной. Так, рассматривая дифференциальное уравнение $D(n) = a$, где a - целочисленная константа, мы можем доказать, что

$$D(n) = 0 \Leftrightarrow n = 1;\ D(n) = 1 \Leftrightarrow n = p, p \in P;\ D(n) = n \Leftrightarrow n = p^p, p \in P.$$

С другой стороны, дифференциальное уравнение $D(n) = 2$ решений не имеет.

Более общие формулировки неожиданно приводят к интересным связям с классическими проблемами теории чисел. Так, дифференциальное уравнение $D(n) = a$, где a - четное число, большее двух, будет разрешимо для любого a, если верна *бинарная проблема Гольдбаха* – утверждение о том, что *любое четное число, начиная с четырех, представимо в виде суммы двух простых чисел*. Именно, если $a = p + q, p, q \in P$, то $n = pq$ – искомое решение.

Аналогично, дифференциальное уравнение второго порядка $D(D(n)) = 1$ будет иметь бесконечно много решений, если *существует бесконечно много пар* $(p, p+2), p, p+2 \in P$, *простых-близнецов*. В этом случае можно взять $n = 2p$.

Представляет интерес и исследование возможностей расширения понятия арифметической производной на множества $\mathbb{Z}$ целых, $\mathbb{Q}$ рациональных и $\mathbb{C}[i] = \{a + bi, a, b \in \mathbb{Z}, i^2 = -1\}$ целых гауссовых чисел, а также на другие алгебраические структуры.

Наконец, интересны вопросы, связанные со свойствами арифметической производной тех или иных классов специальных чисел: *совершенных чисел*, *чисел Мерсенна* и *Ферма, факториальных чисел, примориалов* и др. [1, 4]. Нами получен ряд результатов в этой области. Так, согласно *теореме Евклида-Эйлера*, *любое четное совершенное число S представимо в виде $S = 2^{p-1}P$, где $P = 2^p - 1$ - простое число* (именно, *простое число Мерсенна*). Тогда

$$D(S) = 2^{p-1}\left(\frac{p-1}{2} \cdot P + 1\right).$$

В частности,

$$D(6) = 5,\ D(28) = 2^5,\ D(496) = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 7,\ D(8128) = 2^6 \cdot 191.$$

Нетрудно показать, что $D(S) > S$ для любого четного совершенного числа, большего 6.

Серьезная теоретическая основа, тесная связь с математическим анализом, алгеброй, арифметикой и теорией чисел, возможность построения собственных конструкций подобного типа позволяют утверждать, что арифметическая производная может служить продуктивным источником новых исследований. При этом направления исследований могут быть как фундаментальными, так и методически-ориентироваными (значительная часть материала вполне доступна студентам и школьникам); да и собственно матемиатические акценты могут быть широко варьируемы в зависимости от конкретных предпочтений, способностей и уровня подготовки.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Деза Е. И. Специальные числа натурального ряда. – М.: URSS, 2018.

2. Barbeau E. J. Remarks on arithmetic derivative // Canadian Mathematical Bulletin, 1961, Vol 4.

3. Buium A. Arithmetic analogues of derivations // Journal of Algebra, 1997, Vol. 198.

4. Deza E. I. Perfect and Amicable numbers. – Singapore: World Scientific, 2023.

5. Ufnarovski V., åAhlander B. How to differentiate a number // Journal of Integer Sequences, 2003, Vol 6.

УДК 511

Псевдослучайные последовательности заданного периода над конечным полем

Л. В. Котова (Россия, г. Москва),
Московский педагогический государственный университет
e-mail: kolv@inbox.ru

Pseudorandom sequences of a given period over a finite field

L. V. Kotova (Russia, Moscow)
Moscow Pedagogical State University
e-mail: kolv@inbox.ru

Рекуррентные соотношения сегодня лежат в основе многих современных исследований математической науки, особенно прикладной ее составляющей. Например, в криптографии они позволяют генерировать псевдослучайные последовательности над конечными полями [2, 5].

Псевдослучайными называют последовательности, определяемые, как правило, арифметическими алгоритмами [5]. Подразумевается наличие большого периода у таких последовательностей, что делает их для некоторых задач аналогом случайной. Так ее можно использовать в качестве близкого к случайному одноразового ключа шифрования.

Мы рассматриваем два аспекта о возможности генерации последовательности заданного периода:

- над произвольным конечным полем $\mathbb{F}_p$,примеры генерации последовательностей для составного периода, этапы построения характеристического многочлена, анализируются такие периоды n, для которых такая генерация возможна. [3];
- над полем $\mathbb{F}_2$, возможности значительно сужаются, рассмотрение же возможных значений периода приводят нас к простым числам Мерсенна [1].

Так, построение последовательности над конечным полем непосредтвенно зависит от свойств самого поля и многоленов над кончным полем.

Уравнение вида

$$\delta_{x+n} = a_{n-1} \cdot \delta_{x+n-1} + a_{n-2} \cdot \delta_{x+n-2} + ... + a_0 \cdot \delta_x, \quad \text{где } a_i \in F_p,$$

называется *линейным рекуррентным уравнением* порядка n над полем F_p, а многочлен

$$f(\lambda) = \lambda^n - a_{n-1}\lambda^{n-1} - ... - a_0 \in F_p[x]$$

- *характеристическим многочленом* этого уравнения.

Уравнение определяет линейную рекуррентную последовательность $\{\delta_x\}_x$ над полем F_p, которая называется *решением* данного линейного уравнения и однозначно определяется своими начальными членами $\delta_0, \delta_1, ..., \delta_{n-1}$. Отметим, что решение такого уравнения обязательно периодично, и период зависит от свойств характеристического многочлена.

Наименьшее натуральное число γ, такое что $f|(x^\gamma - 1)$, называется *порядком многочлена* f, и обозначать символом $ord\ f(x)$. (Если $f(0) = 0$, то полагаем $f(x) = x^\alpha g(x)$, $g(0) \neq 0$, и $ord\ f(x) = ord\ g(x)$.)

Многочлен $f \in F_p[x]$ степени n над полем $\mathbb{F}_p$ называется *примитивным*, если $ord\,(f(x)) = p^n - 1$. То есть примитивным будет многочлен, имеющий максимальный возможный порядок [5]. Таким образом, если характеристический многочлен $f(\lambda)$, порождающий линейное рекуррентное уравнеие, неприводим и примитивен, то генерируемые соответствующим линейным рекуррентным уравнением последовательности будут иметь максимально возможный период.

Учитывая что для любой пары (p, n) формула

$$b_p(n) = \frac{\varphi(p^n-1)}{n}[5].$$

вычисляет число $b_p(n)$ примитивных многочленов степени n над полем $\mathbb{F}_p$ и эти числа неизменно положительны, то получаем, что для любого простого числа p и любого натурального числа n существует примитивный над полем $\mathbb{F}_p$ многочлен степени n.

Учитывая же свойства порядка многочленов над конечным полем, а именно что

$$\mathrm{ord}(f(x))^n = p^t \,\mathrm{ord}\, f(x),$$

где t - наименьшее целое число, такое что $p^t \geq n$, и $f(x) \in F_p[x]$ - неприводимый многочлен, получаем получаем что всегда можно сгенерировать последовательность с периодом $(p^n - 1)p^t$ для любого простого p и натуральных n и t.

Также рассматриваются более сложные конструкции n непочредственно для поля $\mathbb{F}_2$, так как именно такие последовательности нужны для решенияч практических задач.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Деза Е.И. Специальные числа натурального ряда. - М.: URSS, 2010.
2. Деза Е.И., Котова Л.В. Введение в криптографию. - М.: URSS, 2018.
3. Деза Е.И., Котова Л.В. Рекуррентные числовые последовательности: теория и приложения // Чебышевский сборник. 2022. Том 23, № 3. С. 77-101.
4. Конечные поля : В 2 т. / Р. Лидл, Г. Нидеррайтер ; перевод с англ. А. Е. Жукова, В. И. Петрова ; под ред. В. И. Нечаева. - Москва : Мир, 1988.
5. Нечаев В.И. Основы защиты информации. - М.: МГУ, 1999.

УДК 511.42

О влиянии неравновероятности выходной последовательности на качество криптографических преобразований

А. Б. Лось (Россия, г. Москва)
Московский институт электроники и математики им. А. Н. Тихонова Национального исследовательского университета «Высшая школа экономики»
e-mail: alos@hse.ru
А. Ю. Нестеренко (Россия, г. Москва)
Московский институт электроники и математики им. А. Н. Тихонова Национального исследовательского университета «Высшая школа экономики»
e-mail: nesterenko_a_y@mail.ru

О. А. Рогачёва (Россия, г. Москва)
Московский институт электроники и математики им. А. Н. Тихонова Национального исследовательского университета «Высшая школа экономики»
e-mail: oarogacheva@hse.ru

On the Influence of Unequal Probability of the Output Sequence on the Quality of Cryptographic Transformations

A. B. Loss (Russia, Moscow)
HSE Tikhonov Moscow Institute of Electronics and Mathematics (MIEM HSE)
e-mail: alos@hse.ru
A. Yu. Nesterenko (Russia, Moscow)
HSE Tikhonov Moscow Institute of Electronics and Mathematics (MIEM HSE)
e-mail: nesterenko_a_y@mail.ru
O. A. Rogacheva (Russia, Moscow)
HSE Tikhonov Moscow Institute of Electronics and Mathematics (MIEM HSE)
e-mail: oarogacheva@hse.ru

1. Постановка задачи

Пусть знаки $a_i, a_i \in A_n, i = 1, 2, \ldots, N$, входного сообщения $\bar{a}^N = a_1, a_2, \ldots, a_N$ некоторого источника сообщений $M^N = \{\bar{a}^N\}$, выбираются из алфавита $A_n = \{1, 2, \ldots, n\}$, а знаки $b_i, i = 1, 2, \ldots, N$ выходного (шифрованного) сообщения $\bar{b}^N = (b_1, b_2, \ldots, b_N)$, $b_i \in A_n$, образуются из знаков входного сообщения в соответствии с уравнением:

$$\bar{b}^N = F_k(\bar{a}^N),$$

где $F_k(\cdot)$ - некоторая функция, зависящая от ключа k, $k \in K$ и определяемая применяемым алгоритмом шифрования ([1-2]), K – множество всех ключей криптографического алгоритма.

Для дальнейшего изложения введем следующую теоретико-вероятностную модель.

Обозначим $E^N = \{\bar{b}^N = (b_1, b_2, \ldots, b_N) | b_i = F_k(a_i), i = 1, 2, \ldots, N, k \in K\}$ - множество всех шифрованных текстов, которые могут быть получены в результате применения уравнения шифрования (1) при различных ключах k из множества K.

Зададим на множестве входных сообщений M^N и множестве ключей K некоторые независящие друг от друга вероятностные распределения $P(\cdot)$ и $\theta(\cdot)$:

$$P(M^N) = \{P(\bar{a}^N), \bar{a}^N \in M^N\}, \sum_{\bar{a}^N \in M^N} P(\bar{a}^N) = 1,$$

$$\theta(K) = \{\theta_k, k \in K\}, \sum_{k \in K} \theta(k) = 1.$$

Очевидно, что распределения $P(\cdot)$ и $\theta(\cdot)$ индуцируют на множестве шифрованных сообщений некоторое вероятностное распределение $Q(\cdot)$:

$$Q(E^N) = \{Q(\bar{b}^N) | \bar{b}^N \in E^N\}, \sum_{\bar{b}^N \in E^N} Q(\bar{b}^N) = 1.$$

Обозначим через $H(X)$ - энтропию некоторого ансамбля X, через $H(X/Y)$ - условную энтропию ансамбля X при заданном ансамбле Y, а через $I(X, Y) = H(X) - H(X/Y)$ - взаимную информацию ансамблей X и Y ([3-4]).

Далее в работе нас будет интересовать значение взаимной информации ансамбля входных M^N и шифрованных E^N сообщений $I(M^N, E^N) = H(M^N) - H(M^N/E^N)$.

2. Оценка взаимной информации входных и выходных сообщений

Для дальнейшего изложения введем дополнительные обозначения, полагая:

A_n^i - множество векторов длины i в алфавите A_n,

$M^i = \{\alpha^i = (\alpha_1, \ldots, \alpha_i) \in A_n^i \mid$ существует $\bar{a}^N = (a_1, \ldots, a_N) \in M^N$, такое что $a_j = \alpha_j, j = \{1, \ldots, i.\}\}$,

$E^i = \{\beta^i = (\beta_1, \ldots, \beta_i) \in A_n^i \mid$ существует $b^N = (b_1, \ldots, b_N) \in E^N$ такое, что $b_j = \beta_j, j = \{1, \ldots, i\}\}$,

$E_i = \{\beta_i \in A_n \mid$ существует $b^N = (b_1, \ldots, b_N) \in E^N$ такое что $b_i = \beta_i\}$.

Будем также обозначать через A^i, B^i и B_i случайные величины, принимающие значения соответственно из множеств M^i, E^i, E_i и имеющие распределение вероятностей:

$P\{A^i = a^i\} = \sum_{\alpha^N \in M^N, \alpha_j = a_j, j=1,\ldots,i} P(\alpha^N)$

$P\{B^i = b^i\} = \sum_{\bar{\beta}^N \in E^N, \beta_j = b_j, j=1,\ldots,i} Q(\beta^N)$

$P\{B_i = b_i\} = \sum_{\beta^N \in E^N, \beta_i = b_i} Q(\beta^N)$.

Теорема 1. *Пусть распределение $Q(\cdot)$ таково, что вероятность появления знака шифрованного сообщения b_i не зависит от последующих знаков входного и шифрованного сообщения $(a_{i+1}, \ldots, a_N)$ и $(b_{i+1}, \ldots, b_N)$, а для любого значения величины $i = 1, 2, \ldots, N$ имеет место соотношение:*

$$p\{B_i = b_i / A^i = a^i; B^{i-1} = b^{i-1}\} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n} \Delta_{b_i}(a^i, b^{i-1}), \tag{1}$$

где $|\Delta_{b_i}(a^i, b^{i-1})| \leq \delta_i, 0 \leq \delta_i < 1, a^i \in M^i, b^{i-1} \in E^{i-1}, b_i \in E_i$.

Тогда имеет место равенство:

$$H(M^N / E^N) = H(M^N) - \sum_{i=1}^{N} \varepsilon_i, \tag{2}$$

где

$$0 \leqslant \varepsilon_i \leqslant \frac{1}{2 \cdot \ln 2} \left[\delta_i^2 + \frac{\delta_i^3}{3\,(1 - \delta_i)^3} \right].$$

Условие невозможности восстановления входного сообщения

Результат теоремы 1 позволяет при известных величинах δ_i оценить условную энтропию $H(M^N / E^N)$ ансамбля входных сообщений M^N при заданном ансамбле криптограмм E^N.

В соответствии с [4], при достаточно больших значениях величины N, можно полагать:

$$H(M^N) = N \cdot H_0, \tag{3}$$

где H_0 — средняя энтропия на знак открытого текста.

Какие либо содержательные результаты прикладных и научных исследований по оценке энтропии H_0 русского языка авторам неизвестны. Среди электронных ресурсов можно указать работы [5] и [6], в которых указаны значения средней энтропии на знак текстов на русском языке H_0, соответственно, $0,6$ и $0,7$ дв. ед.

Из результатов теоремы 1 далее получаем:

$$H(M^N / E^N) \geqslant N \cdot H_0 - \varepsilon \cdot N, \tag{4}$$

где

$$\varepsilon = \frac{1}{2\ln 2}\left[\delta^2 + \frac{\delta^3}{3\,(1-\delta)^3}\right], \quad \delta = \max \delta_i.$$

Отсюда получаем неравенство:

$$\frac{H(M^N)}{H(M^N/E^N)} \leqslant \frac{H_0}{H_0 - \varepsilon} = 1 + \frac{\varepsilon}{H_0 - \varepsilon}. \tag{5}$$

Для иллюстрации полученных результатов приведем (таблицы 1 и 2) данные численных расчетов величины

$$\Lambda = \frac{\varepsilon}{H_0 - \varepsilon}$$

для значений энтропии $H_0 = 0,5$ и $H_0 = 1$, значений параметра $\delta = n \cdot 10^{-5}$ и $\delta = n \cdot 10^{-3}$, а также ряда значений величины n.

Таблица 1: Значение параметра Λ для величины $\delta = n \cdot 10^{-5}$.

H_0/n	2	10	26	32
0,5	$5,77 \cdot 10^{-10}$	$1,14 \cdot 10^{-8}$	$9,75 \cdot 10^{-8}$	$1,47 \cdot 10^{-7}$
1	$2,89 \cdot 10^{-10}$	$7,22 \cdot 10^{-9}$	$4,88 \cdot 10^{-8}$	$7,39 \cdot 10^{-8}$

Таблица 2: Значение параметра Λ для величины $\delta = n \cdot 10^{-3}$.

H_0/n	2	10	26	32
0,5	$1,2 \cdot 10^{-5}$	$2,8 \cdot 10^{-4}$	$2,0 \cdot 10^{-3}$	$3,0 \cdot 10^{-3}$
1	$5,8 \cdot 10^{-6}$	$1,44 \cdot 10^{-4}$	$9,7 \cdot 10^{-4}$	$1,48 \cdot 10^{-3}$

Заметим далее, что в соответствии с подходом, предложенным К. Шенноном ([3]), величину $H(M^N/E^N)$ можно рассматривать как характеристику числа возможных исходных сообщений длины N, соответствующих известному выходному сообщению. В частности, можно полагать оценку числа таких сообщений равной $2^{H(M^N/E^N)}$.

Тогда, если ввести некоторый параметр β, характеризующий допустимую многозначность восстановления исходного сообщения при известном шифрованном сообщении, например, учитывающий различное написание окончания слов, то число допустимых вариантов входного сообщения оценивается величиной $2^{\beta \cdot N}$. В этом случае условие невозможности восстановления передаваемого сообщения принимает вид:

$$2^{H(M^N/E^N)} \geqslant 2^{\beta \cdot N}$$

или

$$\frac{1}{N} \cdot H(M^N/E^N) \geqslant \beta. \tag{6}$$

С учетом неравенства (4), условие невозможности восстановления передаваемого сообщения принимает вид:

$$H_0 - \varepsilon \geq \beta. \tag{7}$$

Учитывая выражение для величины ε, условие (7) принимает вид:

$$\frac{1}{2\ln 2}\left[\delta^2 + \frac{\delta^3}{3\,(1-\delta)^3}\right] \leqslant H_0 - \beta,$$

либо при $\delta \leqslant 0,46$:

$$\frac{1}{\ln 2} \cdot \delta^2 \leqslant H_0 - \beta,$$

откуда следует условие на величину неравновероятности знаков преобразованного сообщения δ, при котором невозможно восстановление исходного сообщения:

$$\delta \leqslant (\ln 2 \cdot (H_0 - \beta))^{1/2}. \tag{8}$$

Для иллюстрации полученных результатов приведем численные расчеты параметра $\lambda = \frac{1}{n}\delta$ (таблица 3) для значения величины $\beta = 0,1$ и ряда значений величин H_0 и n.

Таблица 3: Значение величины $\lambda = \frac{1}{n}\delta$.

H_0/n	2	10	26	32
0,5	0,26	0,052	0,02	0,016
0,7	0,32	0,064	0,024	0,02
0,85	0,35	0,072	0,028	0,025

3. О допустимой неравновероятности знаков ключа при применении преобразования гаммирования

Применим полученные выше результаты к исследованию преобразования гаммирования ([1,2]). В этом случае знаки выходного сообщения $b^N = (b_1, b_2, \ldots, b_N)$, $b_i \in A_n$, образуются из знаков входного сообщения $a^N = (a_1, a_2, \ldots, a_N)$ в соответствии с уравнением:

$$b_i = a_i + \gamma_i \pmod n, \quad a_i, \gamma_i \in A_n, \quad i = 1, 2, \ldots, N, \tag{9}$$

где $\{\gamma_i | \gamma_i \in A_n, i = 1, 2, \ldots, N\}$ - последовательность знаков гаммы, не зависящих от входного сообщения.

Обозначим через Γ случайную величину, принимающую значение из множества A_n и имеющую некоторое вероятностное распределение $\theta(\cdot)$, заданное на этом множестве.

Теорема 2. *Теорема 2. Пусть распределение $\theta(\cdot)$, заданное на множестве ключей K таково, что для любых $i = 1, \ldots, N$ выполнено равенство:*

$$P\{\Gamma_i = \gamma_i / \Gamma_j = \gamma_j, j = 1, \ldots, i-1\} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n} \cdot \Delta_{\gamma_i}(\gamma_j, j = 1, \ldots, i-1), \tag{10}$$

где $|\Delta_{\gamma_i}(\gamma_j,\ j = 1, \ldots, i-1)| \leqslant \delta_i,\ 0 \leqslant \delta_i < 1$.

Тогда

$$H\left(M^N / E^N\right) = H\left(M^N\right) - \sum_{i=1}^{N} \varepsilon_i, \tag{11}$$

где $0 \leqslant \varepsilon_i \leqslant \frac{1}{2\ln 2}\left[\delta_i^2 + \frac{\delta_i^3}{3(1-\delta_i)^3}\right]$.

Аналогично результатам предыдущего раздела можно найти допустимое отклонение знаков ключевой последовательности, выбираемой из алфавита n, из уравнения:

$$\delta = (\ln 2 \cdot (H_0 - \beta))^{1/2}. \tag{12}$$

Дальнейшие расчеты будем проводить для алфавита мощности $n = 32 = 2^5$, соответствующему русскому языку.

Полагая для примера $H_0 = 0,5$ и $\beta = 0,1$, из выражения (12) получаем граничное значение величины $\delta : \delta = 0,51$. При этом условие, налагаемое на вероятность появления знаков ключевой последовательности выбираемой из множества мощности $n = 2^5$, имеет вид:

$$p\{\Gamma_i = \gamma_i / \Gamma^{i-1} = \gamma^{i-1}\} = \frac{1}{2^5}[1 + \Delta_i],$$

где $|\Delta_i| \leqslant 0,51$. Отсюда следует, что в рассматриваемом случае относительные частоты знаков ключевой информации должны отклоняться от величины $2^{-5} = 0,031$ не более чем на величину $0,51 \cdot 2^{-5} = 1,6 \cdot 10^{-2}$.

Далее заметим, что, как правило, в криптографических алгоритмах ключевая информация представляется в виде двоичной последовательности. С целью получения аналогичных результатов для случая, когда знаки входного сообщения и знаки гаммы представляются в виде двоичных векторов, воспользуемся следующими соображениями.

Пусть знак ключа $\gamma_i \in A_n$ представляется в виде двоичного вектора

$$\gamma = \left(\gamma^{(1)}, \gamma^{(2)}, \ldots, \gamma^{(m)}\right), \gamma^{(j)} \in \{0; 1\}, n = 2^m.$$

Предполагая независимость случайных величин $\gamma^{(i)}$, получаем:

$$P\{\gamma = \rho\} = P\{\gamma^{(1)} = \rho^{(1)}, \gamma^{(2)} = \rho^{(2)}, ..., \gamma^{(m)} = \rho^{(m)}\} = \prod_{i=1}^{m} P\{\gamma^{(i)} = \rho^{(i)}\}, \tag{13}$$

где $\rho = \left(\rho^{(1)}, \rho^{(2)}, \ldots, \rho^{(m)}\right)$, $\rho^{(j)} \in \{0, 1\}$, $n = 2^m$.

При этом условие наличия необходимых статистических качеств ключевой последовательности, будет иметь вид:

$$P\{\gamma_i = \rho\} = \frac{1}{2^m}\left[1 + \Delta_i\right] = \prod_{i=1}^{m} \frac{1}{2} \cdot \left(1 + \Delta_i'\right), \tag{14}$$

где $|\Delta_i| \leq \delta_i, |\Delta_i'| \leq \delta_i', 0 \leq \delta_i < 1, 0 \leq \delta_i' < 1$.

Очевидно, что отклонение Δ_i соответствует алфавиту из $n = 2^m$ знаков, а отклонение Δ' — двоичному алфавиту.

Пусть, как и ранее,

$$\delta = \max_i \delta_i, \delta' = \max_i \delta_i'$$

С учетом соотношения (18) значение величины δ' может быть найдено из условия:

$$\frac{1}{2^m} \cdot (1 + \delta')^m = \frac{1}{n} \cdot (1 + \delta). \tag{15}$$

Принимая во внимание, тот факт, что величина δ_i' близка к 0, и разлагая в ряд функцию $(1 + \delta')^m$, получаем, оценку для величины δ':

$$\delta' = \frac{1}{m} \cdot \delta. \tag{16}$$

Учитывая, что при значении $m = 5$, величина δ равна

$$\delta = 0,51,$$

получаем значение для допустимого отклонения распределения знаков бинарных последовательностей ключевой информации от равновероятного распределения:

$$\delta' = 0,016.$$

Таким образом, при выработке ключевой двоичной последовательности, вероятность появления двоичного знака не должна отклоняться от значения $\frac{1}{2}$ на величину более $\delta' = 0,016$.

4. Заключение

В работе рассмотрены вопросы влияния возможного неравновероятного распределения знаков преобразованного сообщения при применении криптографического алгоритма и неравновероятного распределения знаков ключевой информации при применении схемы простого гаммирования, на криптографические качества алгоритмов с позиции теоретико-информационного подхода.

Очевидно, что полученные результаты неприменимы в отношении криптографических алгоритмов, обеспечивающих практическую стойкость, поскольку в случае наличия расстояния единственности всегда есть возможность определить ключ, применяя переборные методы и однозначно дешифровать входное сообщение.

В работе в рамках конкретной теоретико-вероятностной модели получены оценки взаимной информации ансамблей входных и выходных сообщений. На основании данных оценок получены выражения для определения границ возможного отклонения от равновероятного распределения вероятности знаков выходного (шифрованного) сообщения и знаков ключевой информации, при которых обеспечивается невозможность восстановления входного сообщения при известном выходном (шифрованном) сообщении. Для наиболее интересных с практической точки зрения случаев проведены численные расчеты исследуемых параметров.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. А. Б. Лось. Криптографические методы защиты информации. Учебник для вузов. Серия: для изучающих компьютерную безопасность / А. Б. Лось, А. Ю. Нестеренко, М. И. Рожков 2-е изд., испр. М.: Изд. Юрайт.2021. 423 с.

2. А. П. Алферов Основы криптографии/А.П. Алферов, А.Ю. Зубов, А.С. Кузьмин, А.В. Черемушкин. — М.: Гелиос АРВ, 2001. 479 с.

3. К. Шеннон Работы по теории информации и кибернетике. — М.: ИЛ. 1963.829 с.

4. Колесник В. Д. Курс теории информации / В.Д. Колесник, Г.Ш. Полтырев. — М.: Наука, 1982.416 с.

5. Энтропийный анализ текстов / Электронный ресурс (режим доступа — свободный): https://studme.org/245864/prochie/entropiynyy_analiz_tekstov (дата обращения 05.12.22).

6. Энтропия сложных сообщений / Электронный ресурс (режим доступа — свободный): https://studopedia.su/9_31691_entropiya-slozhnih-//soobshcheniy-izbitochnost-istochnika.html (дата обращения 05.12.22).

7. М. Я. Выгодский. Справочник по высшей математике/ М.Я. Выгодский.-М: Наука, 1964.-870 с.

———————————————————————————————

УДК 519.115.8

Вычисление числа покрытий специального вида для заданного прямоугольника[1]

А. М. Магомедов (Россия, г. Махачкала)
Дагестанский государственный университет
e-mail: magomedtagir1@yandex.ru
С. А. Лоренс (Россия, Москва)
Российский государственный университет туризма и сервиса; Институт сервисных технологий
e-mail: lawrencenko@gmail.com
О. И. Челяпина (Россия, Москва)
Российский государственный университет туризма и сервиса; Институт сервисных технологий
e-mail: : olga-chelyapina@mail.ru

Calculation of the number of coverings of a special kind for a given rectangle

A. M. Magomedov (Russia, Makhachkala)
Dagestan State University
e-mail: magomedtagir1@yandex.ru
S. Lawrence (Russia, Moscow)
Russian State University of Tourism and Service; Institute of Service Technologies
e-mail: lawrencenko@gmail.com
O. I. Chelyapina (Russia, Moscow)
Russian State University of Tourism and Service; Institute of Service Technologies
e-mail: olga-chelyapina@mail.ru

1. Специальные покрытия и информационные рисунки

Различным аспектам проблемы вычисления количества покрытий плитками 1×2 прямоугольника M $m \times n$, где m – ширина, n – высота (всюду в тексте m полагается четным), посвящено множество статей, начиная с работ [1] – [2].

Рисунок прямоугольной сетки $m \times n$, где некоторые горизонтальные линии сетки – пунктирные, остальные – точечные, будем называть *информационным рисунком* и рассматривать как обозначение мощности множества специальных покрытий таких, что:

1. для каждой пунктирной горизонтали в специальном покрытии найдется плитка, пересекаемая ею;

2. ни одна точечная горизонталь не пересекает плитку специального покрытия.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Отдела математики и информатики ДФИЦ РАН

Для обозначения мощности всех покрытий используется пустой прямоугольник $m \times n$ без сетки.

Задача. Требуется подсчитать количество специальных покрытий прямоугольника M $m \times n$ плитками 1×2 в соответствии с заданным информационным рисунком.

Примеры.

1. Для $m = 4, n = 2$ все специальные покрытия, содержащие вертикальные плитки, приведены на рис. 1.

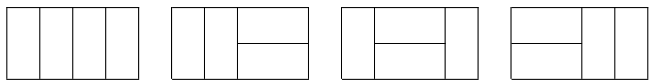
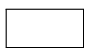
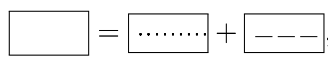


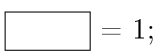
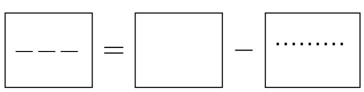
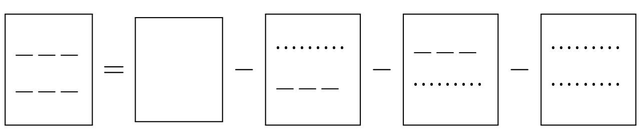
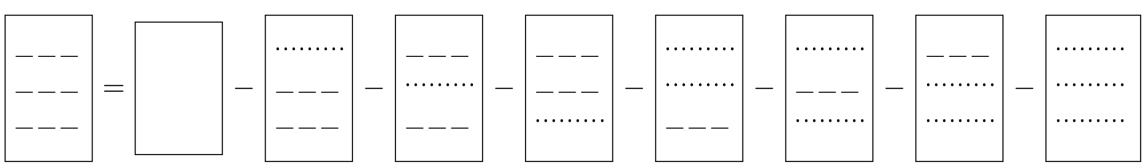
Рис. 1: В случае $m = 4, n = 2$ четыре специальных покрытия содержат плитки, пересекаемые горизонтальной линией.

2. При $n = 1$  равно 1, если m–четное, 0 – если m – нечетное.
3. При четном m для любых n выполняется равенство

 (1)

если информационные рисунки в правой части различаются только верхними горизонтальными линиями.

Утверждение 1. При $m = 4$ справедливы равенства (значение n равно номеру пункта – $1, 2, 3$ или 4):

1.  $= 1$;
2.  $= 5 - 1 \cdot 1 = 4$;
3.  $= 11 - 1 \cdot 4 - 4 \cdot 1 - 1 \cdot 1 \cdot 1 = 2$;
4. 

$= 36 - 2 - 4 \cdot 4 - 2 - 4 - 4 - 1 - 4 = 3$.

Когда значение m зафиксировано и известно из контекста, для количества всех покрытий будем использовать обозначение a_n. Для небольших m значения a_n хорошо известны. В частности, при $m = 4$: $a_0 = 1$, $a_1 = 1$, $a_2 = 5$, $a_3 = 11$, $a_4 = 36$, $a_5 = 95$ и т.д. (см., например, [3]).

Утверждение 2.

1. Каждое число, представленное на рис. 2 вершиной с двумя потомками, равно сумме численных значений этих потомков (потомки расположены правее от своей родительской вершины исоединены с ней ребрами).
2. если $m = 4$ и $n \leq 4$, то

$$a_n = a_{n-1} + 4a_{n-2} + 2a_{n-3} + 3a_{n-4}. \quad (2)$$

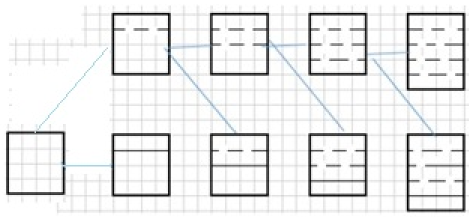


Рис. 2: Внизу – значения информационных рисунков нижнего ряда.

2. Построение двоичного дерева

Клетки M упорядочены: сначала – клетки первой строки слева-направо, затем клетки второй строки и т.д. Клетки, занятые плитками, будем называть «темными», незанятые – «светлыми». Каждому частичному покрытию (ч.п.) прямоугольника M соответствует вершина двоичного дерева, пустому покрытию сопоставляется корень дерева.

Опишем построение двоичного дерева T_n *методом первой светлой клетки.*

1. В текущем ч.п. A (вначале это – корень дерева) находим первую светлую клетку (i, j), $1 \leq n$, $1 \leq j \leq m$.
2. Если $j < m$ и клетка $(i, j + 1)$ светлая, укладываем горизонтальную клетку $(i, j) : (i, j + 1)$ и объявляем полученную вершину v дочерним потомком ч.п. A.
3. Если $i > 1$, укладываем вертикальную плитку $(i, j) : (i - 1, j)$ и объявляем полученную вершину v сыновним потомком ч.п. A.
4. Если плитки ч.п., соответствующего последней построенной вершине v, покрывают клетки в точности k верхних строк прямоугольника M (где k – некоторое из $1, 2, \ldots, n$), то вершина v получит *постоянную* символьную метку a_{n-k}, потомки v не создаются (см. все затененные вершины на рис. 3). Если вершина v (ч.п.) не только покрывает все клетки прямоугольника M, но содержит также две клетки (принадлежащие разным плиткам) ниже прямоугольника M, то v получит *временную* числовую метку, равную 0, и потомки для v не создаются.
5. Построение дерева завершается, когда все его листья, соответствующие ч.п. высоты n, помечены.

3. Рекуррентная формула

В двоичном дереве (рис. 3) существует взаимно-однозначное соответствие между вершинами, помеченными a_{n-k}, и количеством путей в помеченные вершины из корневой вершины, не проходящих через другие помеченные вершины. Т.е. количество вершин, помеченных одной и той же символьной меткой a_{n-k}, равно числу b_k специальных покрытий прямоугольника $m \times k$, в информационном рисунке которого все горизонтали – пунктирные.

Утверждение 3.

$$a_n = a_{n-1} + b_2 a_{n-2} + b_3 a_{n-3} + b_4 a_{n-4} + \ldots$$

4. Множественность рекуррентных формул. Пример

Наконец, рассмотрим вопрос о единственности коэффициентов рекуррентной формулы для a_n.

Посмотрим, например, как изменится рекуррентная формула (2), если снять ограничение $n \leq 4$.

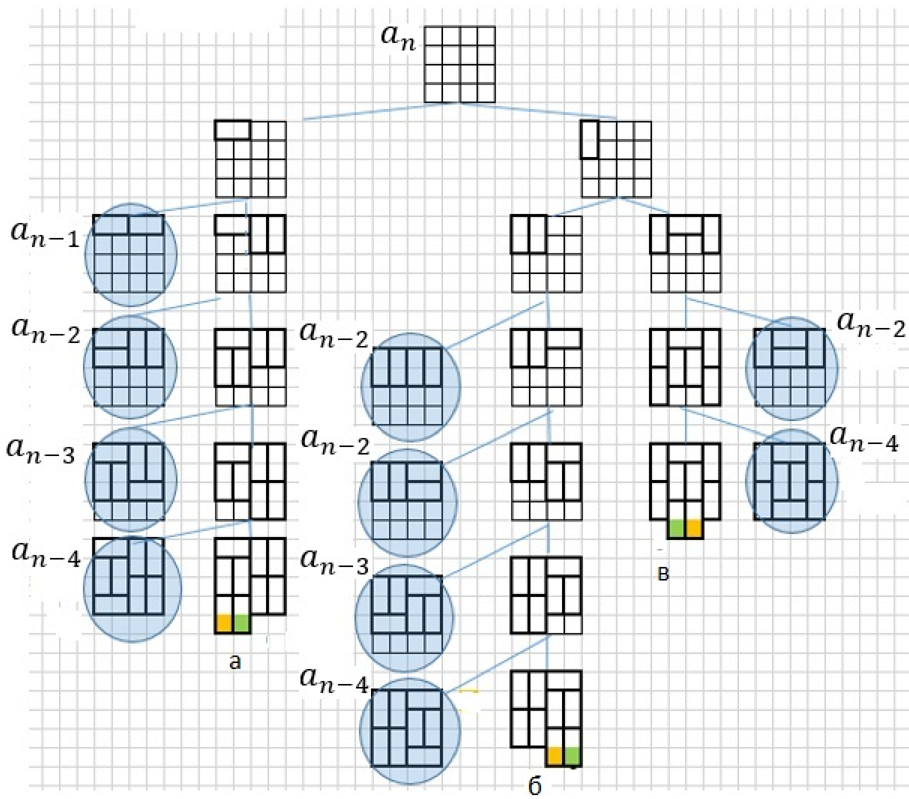


Рис. 3: Двоичное дерево при $m = 4, n = 4$.

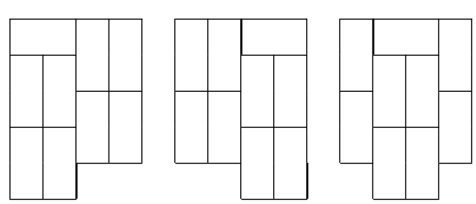


Рис. 4: Вершины двоичного дерева T_n с меткой 0.

Очевидно, что символьные метки $a_{n-1}, a_{n-2}, a_{n-3}, a_{n-4}$ вершин сохранятся (в этом смысле они – постоянные), но при переходе к $n = 5$ их значения изменятся на 36, 11, 5, 1 соответственно. Все изменения дерева при этом переходе сводятся к созданию потомков трех вершин, вынесенных в рис. 4, с помечиванием: дочерние потомки вершин рис. 3а и рис. 3б получат символьную метку a_{n-5}, сыновние потомки вершин рис. 3а, рис. 3б и рис. 3в – метку 0. В целях уточнения структуры формулы сохраним и слагаемое, равное нулю: $a_n = a_{n-1} + 4a_{n-2} + 2a_{n-3} + 3a_{n-4} + 2a_{n-5} + 3 \cdot 0$.

Продолжая увеличивать n, получим:

$a_n = a_{n-1} + 4a_{n-2} + 2a_{n-3} + 3a_{n-4} + (2a_{n-5} + 3a_{n-6} + ...)$ или

$a_{n-2} = a_{n-3} + 4a_{n-4} + (2a_{n-5} + 3a_{n-6} + ...)$.

Вычтем почленно последние два равенства и получим формулу:

$a_n = a_{n-1} + 5a_{n-2} + a_{n-3} - a_{n-4}, (n \geq 4)$ или $a_{n-1} = a_{n-2} + 5a_{n-3} + a_{n-4} - a_{n-5}, (n \geq 5)$.

Наконец, сложим почленно последние два равенства и после тривиальных упрощений получим вторую формулу:

$a_n = 6(a_{n-2} + a_{n-3}) - a_{n-5}$, $(n \geq 5)$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. P. W. Kasteleyn, emphThe statistic of dimers on a lattice I: The number of dimer arrangements on quadratic lattice Physica, (1961), Vol. 27, 1209–1225.

2. H. N. V. Temperley and M. E. Fisher, Dimer problem in statistical mechanics — an exact result, Phil. Mag. (1961), Vol. 6, 1061–1063.

3. Magomedov A.M., S. Lawrence, A347054 – OEIS. Number of domino tilings of a 32×n rectangle. The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences. 14 Aug. 2021. https://oeis.org/A347054.

———————————————————————————

УДК 512.552

Протокол обмена ключами над кольцом формальных матриц

М. М. Насрутдинов (Россия, г. Казань)
Казанский (Приволжский) федеральный университет
e-mail: marat.nasrutdinov@kpfu.ru

Key exchange protocol over a formal matrix ring

M. F. Nasrutdinov (Russia, Kazan)
Kazan (Volga Region) Federal University
e-mail: marat.nasrutdinov@kpfu.ru

В цикле работ [1], [2], [3] рассматривались кольца эндоморфизмов $End(Z_p \oplus Z_{p^2})$, которое авторы назвали кольцом Бергмана, и $End(Z_p \oplus Z_{p^2} \oplus \ldots \oplus Z_{p^m})$, которое авторы назвали обобщенным кольцом Бергмана. Кольцо Бергмана и обобщенное кольцо Бергмана авторы использовали для построения протоколов обмена сообщениями.

В работе [4] конструкция кольца $End(Z_p \oplus Z_{p^2} \oplus \ldots \oplus Z_{p^m})$ была обобщена. А именно, пусть R — ассоциативное кольцо с единицей, P — двусторонний идеал R, $n \geqslant 2$ — натуральное число. Обозначим через

$$B^{(n)}(R,P) = \{(x_{ij}) | x_{ij} \in B_{ij}\} = \begin{pmatrix} R/P & R/P & \ldots & R/P \\ P/P^2 & R/P^2 & \ldots & R/P^2 \\ P^2/P^3 & P/P^3 & \ldots & R/P^3 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ P^{n-1}/P^n & P^{n-2}/P^n & \ldots & R/P^n \end{pmatrix}$$

множество формальных матриц размера $n \times n$, где $B_{ij} = R/P^i$ при $i \leqslant j$, $B_{ij} = P^{i-j}/P^i$ при $i > j$, для любых $1 \leqslant i, j \leqslant n$.

На множестве $B^{(n)}(R,P)$ можно естественным образом определить операции сложения и умножения, превращающие его в ассоциативное кольцо с единицей: если $X = (x_{ij})$ и $Y = (y_{ij})$ – элементы множества $B^{(n)}(R,P)$, то операция умножения вводится по формуле умножения матриц

$$z_{ij} = \sum_k x_{ik} y_{kj}.$$

В этой работе мы рассматриваем протокол обмена сообщениями над этим кольцом.

Описание протокола.

Пусть $f(X) = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \ldots a_n X^n \in \mathbb{Z}[X]$. Для элемента $M \in B^{(n)}(R,P)$ обозначим

$$f(M) = a_0 E + a_1 M + a_2 M^2 + \ldots a_n M^n,$$

где E – единичная матрица кольца $B^{(n)}(R,P)$.

Схема протокола описывается следующим образом:

1. Алиса и Боб публикуют открытые ключи $r, s \in \mathbb{N}$ и $M, N \in B^{(n)}(R,P)$.
2. Алиса и Боб выбирают закрытые ключи $f(X) \in \mathbb{Z}[X]$ и $g(X) \in \mathbb{Z}[X]$, соответственно.
3. Алиса вычисляет открытый ключ $P_A = f(M)^r N f(M)^s$ и посылает его Бобу.
4. Боб вычисляет открытый ключ $P_B = g(M)^r M g(M)^s$ и посылает его Алисе.
5. Алиса вычисляет $S_A = f(M)^r P_B f(M)^s$, Боб вычисляет $S_B = g(M)^r P_A g(M)^s$
6. В ряде случаев (в частности, если $R = \mathbf{Z}$, $P = p\mathbf{Z}$) можно показать, что $S_A = S_B$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Climent J.-J., Navarro P. R., and Tortosa L. On the arithmetic of the endomorphisms ring $End(Z_p \oplus Z_{p^2})$//Applic. Algebra Eng., Commun. Comput. 22 (2), 91–108 (2011).

2. Climent J.-J., Navarro P. R., and Tortosa L. Key exchange protocols over noncommutative rings. The case of $End(Z_p \oplus Z_{p^2})$// Int. J. Comput. Math. 89, 1753–1763 (2012).

3. Climent J.-J., Navarro P. R., and Tortosa L. An extension of the noncommutative Bergman's ring with a large number of noninvertible elements// Applic. Algebra Eng., Commun. Comput. 25, 347–361 (2014). https://doi.org/10.1007/s00200-014-0231-6

4. Nasrutdinov, M.F., Tronin, S.N. On Some Class of Formal Matrix Ring// Lobachevskii J Math 43, 677–681 (2022). https://doi.org/10.1134/S1995080222060269

УДК 517

Расстояние единственности как определяющее свойство блочного шифра

А. Б. Чухно (Россия, г. Москва)
e-mail: achuhno@hse.ru
М. С. Расторгуева (Россия, г. Москва)
e-mail: achuhno@hse.ru

Unicity distance as a defining property of a block cipher

A. B. Chuhno (Russia, Moscow)
e-mail: achuhno@hse.ru
M. S. Rastorgueva (Russia, Moscow)
e-mail: achuhno@hse.ru

1. Введение

Зачастую, при оценке надежности алгоритмов блочного шифрования, возникают задачи, связанные с исследованием свойств и характеристик множеств подстановок. Подстановки зачастую являются самостоятельными элементами итерационных преобразований соответствующих механизмов защиты. В этой связи изучение свойств подстановок, максимально усложняющих проведение процедуры дешифрования, приобретают особую практическую и теоретическую значимость. С другой стороны, сам алгоритм блочного шифрования можно рассматривать как случайную подстановку, и с этой точки зрения важным становится оценка вероятности наступления событий, описывающих цикловую структуру подстановки, в частности, появление неподвижных точек. Данный подход позволяет в широком смысле судить о вероятности наступления некоторых событий, оказывающих негативное влияние на надежность.

В настоящее время на территории Российской Федерации действует стандарт [2], утверждающий два алгоритма шифрования информации. Один из алгоритмов – «Магма», являющийся версией стандарта [3] с фиксированным набором подстановок (S-боксов). Однако выбор конкретных подстановок не избавил «Магму» от унаследования слабостей исходного алгоритма, к которому применимы известные атаки [8],[9]. Оценка степени риска по отношению к данным атакам основывается на оценке вероятности появления неподвижной точки у случайно выбранной подстановки [4].

Попытка защититься от указанной уязвимости у алгоритма ГОСТ 28147-89 [5] не исправила ситуации, поскольку и к новому варианту алгоритма применима аналогичная атака [6], основанная на появлении неподвижной точки.

Хорошо известно соотношение, связывающее мощность ключевого множества алгоритма блочного шифрования с числом известных пар открытый-шифрованный текст, достаточным для однозначного определения ключа – расстояние единственности [7]. Для оценки вероятности появления неблагоприятных событий предлагается рассматривать блочный шифр не как случайное подмножество подстановок, а выбранное на основе расстояния единственности.

2. Расстояние единственности как определяющее свойство подмножества подстановок

Хорошо известно соотношение, связывающее мощность ключевого множества криптосистемы с числом L_0 известных пар открытый-шифрованный текст, достаточным для однозначного определения ключа – расстояние единственности.

Поскольку блочный шифр можно воспринимать как подстановку на множестве открытых текстов, то наличие расстояния единственности можно изложить так: шифр-преобразование – это подмножество подстановок, в котором каждый элемент однозначно идентифицируется по известным L переходам.

Определение 1. *Пусть $\Omega_{L,n}$ – подмножество подстановок степени n, $\Omega_{L,n} \subset S_n$, такое что для любой подстановки $\pi \in \Omega_{L,n}$ и для любого набора $\{i_1, i_2, \ldots, i_L\}$, $i_j \in \{1, \ldots, n\}$, $i_j \neq i_t$, $j \neq t$ набор переходов $i_j \to \pi(i_j)$, $j = \overline{1, L}$ однозначно определяет подстановку π.*

Предложение 3. *Для случая $L = 1$ подмножество $\Omega_{1,n}$ образует латинский квадрат*[1].

Доказательство. По определению, множество $\Omega_{1,n}$ – подмножество подстановок, в котором каждый элемент однозначно задаётся одним переходом.

Очевидно, что если мы возьмём любой латинский квадрат и каждой строке поставим в соответствие подстановку, то такое множество действительно будет задавать подмножества типа $\Omega_{1,n}$, поскольку взяв любой переход (номер строки и номер столбца) мы однозначно выясним все остальные переходы в постановке.

С другой стороны, если существует подмножество $\Omega_{1,n}$ не образующее латинский квадрат, то должен найтись хотя бы один элемент i_h, который встретится минимум дважды в одном столбце, но это значит, что найдутся хотя бы две подстановки имеющие один и тот же переход в значение i_h, а это противоречит определению множества. $\square$

Определение 2. *Для двух подстановок $\pi_1, \pi_2 \in S_n$ расстоянием $d(\pi_1, \pi_2)$ назовём число несовпадающих переходов*

$$d(\pi_1, \pi_2) = n - \sum_{i=1}^{n} (\pi_1(i) = \pi_2(i)) \tag{1}$$

Предложение 4. *Для фиксированной подстановки $\phi \in S_n$ число подстановок, неимеющих с ней хотя бы один одинаковый переход равно*

$$\mathscr{T}_{1\,n}(\pi) = n! \sum_{i=1}^{n} \frac{(-1)^{i+1}}{i!} \tag{2}$$

Доказательство. Для фиксированной подстановки π рассмотрим наборы подмножеств подстановок

$$A_i(\pi) = \{\rho \in S_n : \rho(i) = \pi(i)\}$$

Несложно видеть, что $\mathscr{T}_n = |\cup_{i=1}^{n} A_i(\pi)|$. Пользуясь формулой включения-исключения получим:

$$|\cup_{i=1}^{n} A_i(\pi)| = \sum_{i=1}^{n} |A_i(\pi)| - \sum_{i \neq j} |A_i(\pi) \cap A_j(\pi)| + \ldots +$$
$$+(-1)^{n+1} |A_1(\pi) \cap A_2(\pi) \cap \ldots \cap A_n(\pi)|,$$

[1]Множество подстановок образуют латинский квадрат – это значит, что выписанные одна под другой строки образов для каждой из подстановок в множестве, образуют матрицу, которая и будет латинским квадратом.

$$|A_{i_1}(\pi) \cap A_{i_2}(\pi) \cap \ldots \cap A_{i_t}(\pi)| = (n-t)!,$$

$$\begin{aligned}\mathscr{L}_n = n! - C_n^2(n-2)! + C_n^3(n-3)! + \ldots + (-1)^{n+1}C_n^n 0! = \\ = n! - \frac{n!}{2} + \frac{n!}{3!} - \ldots + (-1)^{n+1} = \\ = n!\sum_{i=1}^{n}\frac{(-1)^{i+1}}{i!}\end{aligned}$$

□

на основе формулы 2 можно выписать оценку на мощность множества $\Omega_{2,n}$

$$|\Omega_{2,n}| \leqslant \left(n!\sum_{i=1}^{n}\frac{(-1)^{i+1}}{i!}\right)^{n-1}$$

Данная оценка в силу погрешности является несодержательной.

При проведении вычислеительных экспериментов было выяснено, что для расстояния единственности $L > 1$ мощность множества $\Omega_{L,n}$ определяется неединственным образом.

Гипотеза 2. *Для* $\Omega_{L,n} = \{\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_t\}$ *мощность* $|\Omega_{L,n}|$ *определяется совокуностью расстояний* $d_{ij} = d(\pi_i, \pi_j)$

Гипотеза 3.

$$\Omega_{L,n} \leqslant C_n^{L-1}(n-l+1)$$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Banks W. D., Conflitti A., Shparlinski I. E. Character sums over integers with restricted g-ary digits // Illinois J. Math. 2002. Vol. 46, №3. P. 819-836.
2. ГОСТ Р 34.12-2018 Информационная технология// Криптографическая защита информации// Блочные шифры, Стандартинформ, Москва, 2018 Стандартинформ 2018
3. ГОСТ 28147-89 Государственный стандарт союза ССР// Системы обработки информации. Защита криптографическая // Алгоритм криптографического преобразования, 1990
4. В.Н.Сачков Введение в комбинаторные методы дискретной математики, М.: Наука., 1982.
5. A. A. Dmukh, D. M. Dygin, G. B. Marshalko A lightweight-friendly modification of GOST block cipher // Матем. вопр. криптогр., 2014, том 5, выпуск 2, с. 47–55
6. A. Dmukh, D. Trifonov, A. Chookhno Modification of the key schedule of the 2-GOST block cipher and its implementation on FPGA // virology and hacking technics, 2022, vol. 18, №3, p 49–59
7. А.П. Алферов, А.Ю. Зубов, А.С. Кузьмин, А.В. Черемушкин Основы криптографии, М.: Гелиос АРВ, 2005
8. Takanori Isobe A Single-Key Attack on the Full GOST Block Cipher // Journal of cryptology — 2011, V. 26 — P. 172-189
9. Itai Dinur, O. Dunkelman, A. Shamir Improved Attacks on Full GOST // FSE 2012: Fast Software Encryption — 2012, P. 9-28

———————————————————————————————

Секция 5. Аналитическая теория чисел

УДК 511.348

О представления чисел суммой двух простых и квадрата третьего простого числа

И. Аллаков (Узбекистан, г.Термез)
Термезский государственный университет
e-mail: iallakov@mail.ru
Н. С. Музрапова (Узбекистан, г.Термез)
Термезский государственный университет
e-mail:muzrapova_n@mail.ru

About the representation of numbers as the sum of two primes and the quare of a third prime

I. Allakov (Uzbekistan, Termez)
Termez State University
e-mail: iallakov@mail.ru
N. S. Muzrapova, (Uzbekistan, Termez)
Termez State University
e-mail:muzrapova_n@mail.ru

1. Формулировка результата

Рассмотрим уравнение

$$a_1p_1 + a_2p_2 + a_3p_3^2 = b, \tag{1}$$

где a_1, a_2, a_3, b- целые числа, p_j- простые числа. Ясно, что мы можем предполагать $a_j \neq 0,\ (j = 1,\ 2,\ 3)$ и

$$\text{НОД}\,(a_1,\ a_2,\ a_3) = 1 \tag{2}$$

Кроме этого предположим, что для уравнение (1) выполняется условия конгруент разрешимости подобно тому, как в проблеме Тарри работы Хуа Л.К. (см. стр.162, [1]). Если определим с помощью равенство

$$N\,(q) := card\left\{(n_1, n_2, n_3)\ |1 \leqslant n_j \leqslant q,\ (n_j, q) = 1,\ a_1n_1 + a_2n_2 + a_3n_3^2 \equiv b\,(\mathrm{mod} q)\right\}, \tag{3}$$

тогда это условие можно написать в виде

$$\text{”для всех } q \geqslant 1 \text{ выполняется } N\,(q) \geqslant 1\text{“}. \tag{4}$$

Предположим, что a_1, a_2, a_3, b удовлетворяют условиям (2) и (3) и $B := \max\{2,\ a_1,\ a_2,\ a_3\}$, тогда, используя эти обозначения, мы можем сформулировать основные результаты настоящей работы в виде следующей теоремы.

Теорема 1. *Если a_1, a_2, a_3, b удовлетворяют условиям (2) - (4), то существует эффективное постоянное число $A > 0$ такое, что справедливы следующие утверждения:*

a) если все a_1, a_2, a_3 положительны и $b \geqslant B^A$, то уравнение (1) имеет решение в простых числах p_1, p_2, p_3.

b) если не все a_1, a_2, a_3 имеют одинаковой знак, то уравнение (1) имеет решение в простых числах p_1, p_2, p_3, которые не привосходит $3\,|b| + B^A$.

Если в уравнении (1) положим $a_1 = a_2 = a_3 = 1$, тогда мы придем классической задаче, поставленной Хуа Ло Кен‘ом в 1938 году [2].

2. Обозначение и малые дуги

В дальнейшем через p(с индексом или без индекса) обозначим простое число, $c_1, c_2, \ldots$ - эффективные положительные постоянное, δ-достаточно малое положительное эффективное число, значение которого может зависеть от значений c_j. Не ограничивая общности мы можем предполагать $B \geqslant 34$. В доказательстве теоремы мы будем использовать схему доказательств основных результатов работы [3] и [4]. Положим $N > 0$ и $Q := N^{\delta},\ T := Q^{\frac{1}{\sqrt{\delta}}},\ L := N\,B^{-1}$. Число N, определим так, чтобы выполнялось соотношение $B \leqslant Q^{\delta}$.

Пусть $\chi(\mathrm{mod} q)$ и $\chi_0\,(\mathrm{mod} q)$ соответственно означает произвольный характер Дирихле по модулю q и главный характер Дирихле по модулю q (см. §§4 и 5, [5],). Известно (см. §14, [5]), существует постоянное c_1 такое, что $L-$функции $L(s,\chi)-$могут иметь только один вещественный нуль $\tilde{\beta}$ для одного вещественного характера $\tilde{\chi}$ по модулю $\tilde{r}$, $(\tilde{r} \leqslant T)$, в области $\sigma > 1 - c_1(\ln T)^{-1}$, $\ |t| \leqslant T$. Если такой нуль существует, то она единственный, вещественный нуль функции $L(s,\tilde{\chi})$ и называется исключительным нулем $L(s,\chi)-$ функции. Кроме того этот исключительный нуль $\tilde{\beta}$ удовлетворяет соотношению

$$c_2\left(\tilde{r}^{\frac{1}{2}}\ln^2\tilde{r}\right)^{-1} \leqslant 1 - \tilde{\beta} \leqslant c_1(\ln T)^{-1}.$$

Далее, для произвольного действительного числа y и положительного целого числа q, определим $e\,(y) := e^{2\pi i y}$ и $e_q\,(y) := y^{2\pi i \frac{y}{q}} = e\left(\frac{y}{q}\right)$; $\Lambda\,(n)$ обозначает функцию Мангольдта. Более того, для произвольного характера $\chi\,(\mathrm{mod} q)$, мы вводим следующие обозначения:

$$\begin{aligned}
S_j\,(y) &:= \sum_{L<n_j\leqslant N} \Lambda\,(n_j)\,e\,(n_j y)\,,\ \ j=1,2; & S_3\,(y) &:= \sum_{L<n_3\leqslant N} \Lambda\,(n_3)\,e\left(n_3^2 y\right),\\
S_j\,(\chi,y) &:= \sum_{L<n_j\leqslant N} \Lambda\,(n_j)\,\chi\,(n_j)\,e\,(n_j y)\,,\ \ j=1,2; & S_3\,(\chi,y) &:= \sum_{L<n_3\leqslant N} \Lambda\,(n_3)\,\chi\,(n_3)\,e\left(n_3^2 y\right),\\
I_j\,(y) &:= \int\limits_L^N e\,(x_j y)\,dx_j,\ j=1,2; & I_3\,(y) &:= \int\limits_L^N e\left(x_3^2 y\right)dx_3\,;\\
\tilde{I}_j\,(y) &= \int\limits_L^N x_j^{\tilde{\beta}-1} e\,(x_j y)\,dx_j,\ j=1,2; & I_3\,(y) &= \int\limits_L^N x_3^{\tilde{\beta}-1} e\left(x_3^2 y\right)dx_3\,;\\
I_j\,(\chi,y) &:= \sum_{|\gamma|\leqslant T}{}' \int\limits_L^N x_j^{\rho-1} e\,(x_j y)\,dx_j,\ j=1,2; & I_3\,(\chi,y) &:= \sum_{|\gamma|\leqslant T}{}' \int\limits_L^N x_3^{\rho-1} e\left(x_3^2 y\right)dx_3.
\end{aligned} \tag{5}$$

Здесь $\sum\limits_{|\gamma|\leqslant T}{}'$ - означает, что суммирование ведется по всем нулям $\rho = \beta + i\gamma$ функции $L(s,\chi)$ в области $\frac{1}{2} \leqslant \beta \leqslant 1 - c_1(\ln T)^{-1}$,$|\gamma| \leqslant T$ (кроме исключительного нуля $\tilde{\beta}$).

Пологая $\tau = T^{\frac{1}{4}}N^{-1}$ интервал $[\tau; 1+\tau]$ делим на основные и дополнительные под интервалы следующим образом: для взаимно простых целых h и q условием $1 \leqslant h \leqslant q \leqslant Q$, пусть $m(h,q)$ означает закрытый интервал $[(h-\tau)/q\ ;(h+\tau)/q\ ]$. Нетрудно видет, что эти интервалы взаимно непересекаются и лежат в $[\tau; 1+\tau]$. Объединение всех этих интервалов $m(h,q)$

обозначим через M и будем называть большой дугой, а разность $[\tau;1+\tau]\setminus M$ обозначим через M' и будем называть малой дугой.

Пусть
$$I(N):=\sum_{\substack{L<n_1,n_2,n_3\leqslant N\\ a_1n_1+a_2n_3+a_3n_3^2=b}}\Lambda\left(n_1\right)\Lambda\left(n_2\right)\Lambda\left(n_3\right), \qquad (6)$$

тогда используя обозначении (6) $I(N)$ можно представит в виде следующего интеграла
$$I\left(N\right)=\int\limits_{\tau}^{1+\tau}e\left(-bx\right)S_1\left(a_1x\right)\,S_2\left(a_2x\right)\,S_3\left(a_3x\right)dx.$$

С учетом того, что $M\cup M'=[\tau,1+\tau]$, интеграл правой части мы можем написать как сумма двух интегралов , то есть в виде
$$I\left(N\right)=\left(\int\limits_{M}+\int\limits_{M'}\right)e\left(-bx\right)\prod_{j=1}^{3}S_j\left(a_jx\right)dx=I_1\left(N\right)+I_2\left(N\right) \qquad (7)$$

На правой части равенство (7) через $I_1\left(N\right)$ обозначена интеграл по большой дуге M, а через $I_2\left(N\right)$ интеграл по малой дуге M'.

Сначала оценим интеграл по малой дуге. Для этого воспользуемся леммой:

Лемма 1. *Для произвольного $x\in M'$, при $N\geqslant N_1\left(c_3,\delta\right)$ справедлива оценки:*
$$S_j\left(a_jx\right)\ll NQ^{-\frac{1}{2}}B^{\frac{1}{2}}\ln^4 N,\ \ (j=1,2)$$

и
$$S_3\left(a_3x\right)\ll N^{1+\frac{c_3}{\ln\ln N}}Q^{-\frac{1}{4}}B^{\frac{1}{4}},$$

где $\ll$ - символ И.М. Виноградова.

Из лемма 1 следует, что если $N\geqslant N_1(c_3,\delta)$, тогда справедлива оценка
$$I_2(N)\ll N^{2+\frac{c_3}{\ln\ln N}}Q^{-1/4}B^{1/4}\ln N. \qquad (8)$$

Пусть $R\left(N\right)$ количество решений уравнение (1) в простых числах $L<p_1,p_2,p_3\leqslant N$. Учитывая (6), (7) и (8) получим соотношение
$$R(N)\geqslant\frac{I_1(N)}{\ln^3 N}+O\left(N^{2+\frac{c_4}{\ln\ln N}}Q^{-1/4}B^{1/4}(\ln N)^{-2}\right) \qquad (9)$$

3. Большие дуги

Рассмотрим интеграл
$$I_1(N)=\int\limits_{M}e(-bx)\prod_{i=1}^{3}S_i(a_ix)dx=\sum_{q\leqslant Q}\sum_{h=1}^{q}{}'\int\limits_{-\tau/q}^{\tau/q}e\left(-b\left(\frac{h}{q}+\eta\right)\right)\prod_{i=1}^{3}S_i\left(a_i\left(\frac{h}{q}+\eta\right)\right)d\eta. \qquad (10)$$

Обозначим
$$\left.\begin{array}{ll} C_1\left(\chi,m\right)=\sum\limits_{l=1}^{q}\chi\left(l\right)e_q\left(lm\right), & C_1\left(\chi_0,m\right)=\sum\limits_{l=1}^{q}{}'e_q\left(lm\right); \\ C_2\left(\chi,m\right)=\sum\limits_{l=1}^{q}\chi\left(l\right)e_q\left(l^2m\right), & C_2\left(\chi_0,m\right)=\sum\limits_{l=1}^{q}{}'e_q\left(l^2m\right). \end{array}\right\}$$

Используя эти обозначении и результаты работы [4], а также точное формула

$$\psi(x,\chi)=\sum_{n\leqslant x}\Lambda(n)\chi(n)=\delta_{\chi_0}x-\delta_{\tilde{\chi}}\frac{x^{\tilde{\beta}}}{\tilde{\beta}}-\sum_{|\gamma|\leqslant T}{}'\frac{x^{\rho}}{\rho}+O(NT^{-1}ln^2T),$$

находим

$$S_j(a_jx)=\frac{1}{\varphi(q)}\left\{H_j+R\right\},\ \ j=1,2,3,$$

где $\delta_{\chi_0}=\begin{cases}1, \text{ если } \chi=\chi_0\\ 0, \text{ если } \chi\neq\chi_0,\end{cases}$ $\delta_{\widetilde{\chi}}=\begin{cases}1, \text{ если } \chi=\widetilde{\chi}\\ 0, \text{ если } \chi\neq\widetilde{\chi}\end{cases}$ (см. [6] и стр.115, [5]),
$R\ll\varphi(q)NBT^{-3/4}ln^2T$, $2\leq T\leq x\leq N, q\leq T$

Поставляя этот в (10) получим
$I_1(N)=\sum\limits_{q\leqslant Q}\frac{1}{\varphi^3(q)}\sum\limits_{h=1}^{q}{}'e_q\left(-bh\right)\int\limits_{-\tau/q}^{\tau/q}e\left(-b\eta\right)H_1H_2H_3d\eta+O\left(N^2Q^{-3/4}\right).$
Теперь расширяя предел интегрирование до $(-\infty;+\infty)$ интеграл $I_1(N)$ можно представить в виде

$$I_1(N)=\sum_{q\leqslant Q}\frac{1}{\varphi^3(q)}\sum_{\substack{h=1\\(h,q)=1}}^{q}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e(-b\eta)H_1H_2H_3d\eta+O(N^2Q^{-1/2}),\tag{11}$$

где

$$H_j=H_j(h,q,\eta)=C_1(\chi_0,a_jh)I(a_j\eta)-\delta_{\tilde{\chi}}C_1(\tilde{\chi}\chi_0,a_jh)\tilde{I}(a_j\eta)-G_j(h,q,\eta),$$
$$G_j(h,q,\eta)=\sum_{\chi_q}C_1(\chi_0,a_jh)I_{\chi}(a_j\eta),\ (\ j=1,2)$$

и

$$H_3=H_3(h,q,\eta)=C_2(\chi_0,a_3h)I(a_3\eta)-\delta_{\tilde{\chi}}C_2(\tilde{\chi}\chi_0,a_3h)\tilde{I}(a_3\eta)-G_3(h,q,\eta),$$
$$G_3(h,q,\eta)=\sum_{\chi_q}C_2(\chi_0,a_3h)I_{\chi}(a_3\eta).$$

Далее, исследуя первое слагаемое на правой части равенство (11) доказывается неравенство

$$I_1(N)>N^{2+\frac{c_4}{\ln\ln N}}Q^{-2/9}B^{1/4}(\ln N)^{-2}.\tag{12}$$

Из (9) и (12) следует утверждение теоремы.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Хуа Л.К. Матем. Инс. Им. Стеклова. 1947, 22, стр.3-179.

2. Hua, L.K. Some results in the additive prime number theory // Quart. J. Math. Oxford 1938, Ser.9, 68-80.

3. Ming-Chit Liu and Kai-Man Tsang. Small prime Solutions of additive equations // Mh. Math. 1991, 111, 147-169.

4. Аллаков И. Музропова Н.С. О количестве представлении натурального числа в виде суммы пяти квадратов простых чисел // Бюллетень Института математики АН РУЗ. 2022, Vol. 5, №5, стр.82-86

5. Davenport Harold. Multiplicative Number Theory // New York, Heidelberg, Berlin. Second edi. 1997, 178p.

6. Карацуба А.А. Основы аналитической теории чисел //М.: Наука, 1983. 240 с.

УДК 511.32

Формула суммирования Вороного для неголоморфных форм Маасса полуцелого веса

О. Г. Балканова (Россия, г. Москва)
Математический институт им. В. А. Стеклова Российской академии наук
e-mail: balkanova@mi-ras.ru

Voronoi summation formula for non-holomorphic Maass forms of half-integral weight

O. G. Balkanova (Russia, Moscow)
Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences
e-mail: balkanova@mi-ras.ru

Обязательным элементом тезисов является название, фамилии авторов и аффилиация на русском и английском языках.

Формулы суммирования Вороного являются важным инструментом исследования сумм коэффициентов Фурье автоморфных форм. Данные формулы позволяют выделить главный член в соответствующей сумме, а также сократить длину суммирования. В своей работе 1903 года Г.Ф. Вороной вывел формулу суммирования с коэффициентами Фурье рядов Эйзенштейна равными функции количества делителей целого числа, благодаря которой удалось улучшить остаточный член в проблеме делителей Дирихле. С тех пор было получено множество обобщений для различных автоморфных форм. В докладе мы рассмотрим историю данной задачи, а также докажем новый вариант формулы Вороного для неголоморфных форм Маасса полуцелого веса и конгруэнц-подгруппы Гекке уровня 4. В частном случае полученная формула позволяет исследовать суммы значений L-рядов Загье на критической прямой, которые естественным образом возникают при доказательстве теоремы о простых геодезических и при вычислении моментов L-функций симметрического квадрата.

УДК 511.35, 517.15

О взаимно простых элементах последовательностей Битти

А. В. Бегунц (Россия, г. Москва)
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
e-mail: alexander.begunts@math.msu.ru
Д. В. Горяшин (Россия, г. Москва)
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
e-mail: dmitry.goryashin@math.msu.ru

On mutual prime elements of Beatty sequences

A. V. Begunts (Russia, Moscow)
Lomonosov Moscow State University
e-mail: alexander.begunts@math.msu.ru
D. V. Goryashin (Russia, Moscow)
Lomonosov Moscow State University
e-mail: dmitry.goryashin@math.msu.ru

В докладе будут представлены два приложения полученной авторами (см. [1]) асимптотической формулы для числа значений последовательности Битти $[\alpha n + \beta]$, где $\alpha > 1$ — иррациональное число с ограниченными неполными частными, в арифметической прогрессии с растущей разностью.

Известно (см. задачу 19 к гл. II книги [2]), что среди первых N натуральных чисел доля взаимно простых с данным натуральным числом a асимптотически эквивалентна $\frac{\varphi(a)}{a}$, где $\varphi(a)$ — функция Эйлера. Ответ на аналогичный вопрос для последовательности Битти даёт следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть $\alpha > 1$ — иррациональное число и N — достаточно большое натуральное число. Тогда если неполные частные непрерывной дроби числа α ограничены, то для количества $S(\alpha, N, a)$ элементов последовательности Битти $[\alpha n]$, $1 \leqslant n \leqslant N$, взаимно простых с числом a, справедлива асимптотическая формула*

$$S(\alpha, N, a) = N\frac{\varphi(a)}{a} + O\left(\min(\sigma(a)\ln^3 N, \sqrt{N}\tau(a)\ln^{3/2} N)\right).$$

Известно также (см. задачу 21 к гл. II книги [2]), что среди всех пар натуральных чисел, каждое из которых не превосходит N, доля взаимно простых асимптотически эквивалентна $\frac{1}{\zeta(2)} = \frac{6}{\pi^2}$. Ответ на аналогичный вопрос для пар членов последовательностей Битти содержится в следующем утверждении.

Теорема 2. *Пусть $\alpha > 1$ и $\beta > 1$ — иррациональные числа и N — достаточно большое натуральное число. Тогда если неполные частные непрерывных дробей чисел α и β ограничены, то для количества $S(\alpha, \beta, N)$ пар взаимно простых элементов последовательностей Битти $[\alpha m]$, $1 \leqslant m \leqslant N$, и $[\beta n]$, $1 \leqslant n \leqslant N$, справедлива асимптотическая формула*

$$S(\alpha, \beta, N) = \frac{6}{\pi^2}N^2 + O\left(N^{3/2}\ln^{3/2} N\right).$$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бегунц А. В., Горяшин Д. В. О значениях последовательности Битти в арифметической прогрессии // Чебышевский сборник. 2020. Том 21, № 1. С. 361—367.

2. Виноградов И. М. Основы теории чисел. М.: Наука, 1981. 176 с.

УДК 511.554

Примитивно простые-универсальные тернарные квадратичные формы

Н. В. Бударина (Ирландия, г. Дандолк)
Дандолкский технологический институт
e-mail: natalia.budarina@dkit.ie

Primitively prime-universal ternary quadratic forms

N. V. Budarina (Ireland, Dundalk)
Dundalk Institute of Technology
e-mail:natalia.budarina@dkit.ie

Let $Q = {}^tQ$ be a symmetric non-singular matrix of dimension 3 with integer elements. We identify Q with the corresponding quadratic form. We say that quadratic form Q represents an integer A primitively if the equation $Q[b] = b^tQb = A$ has an integer solution $b \in M_{3,1}(\mathbb{Z})$ such that $\gcd(b_1, b_2, b_3) = 1$. A positive definite classically integral quadratic form Q is said to be *(primitively) prime-universal* if it (primitively) represents all primes. G. Doyle and K.S. Williams in [1] classified all prime-universal diagonal ternary quadratic forms (and also diagonal quaternary quadratic forms under some their conjectures), and J. Ju, D. Kim, K. Kim, M. Kim and B.-K. Oh in [2] classified all prime-universal diagonal quadratic forms regardless of ranks. We will investigate a primitive counterpart of this problem for ternary quadratic forms, as well as the non-diagonal counterpart. For example, we prove that the form $Q = x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2$ which is a prime-universal according to [1], is a primitively prime-universal. Our proof relies heavily on a system of p-adic symbols [3] and primitive representations over local rings $\mathbb{Z}_p$ [4,5]. Our main result reads as follows.

Theorem 1. *Let Q be a positive definite ternary quadratic form with class number one. Let the determinant $|Q|$ of the quadratic form Q be odd. Then the form Q is a primitively prime-universal if its 2-symbol satisfies Property 1, and all odd prime p-symbols satisfy Property 2.*

- *Property 1. Let Q have one of the following 2-adic symbols $1^{+3}_{\pm 1}$, $1^{-3}_{\pm 3}$ over the ring $\mathbb{Z}_2$.*
- *Property 2. Let Q have a p-adic symbol $\prod_q q^{\epsilon_q(Q) n_q(Q)}$, $q = p^\alpha$, $\alpha = 0, 1, 2, \ldots$, over an odd ring $\mathbb{Z}_p$, and one of the following holds:*

$$\begin{aligned} &n_1(Q) = 3;\\ &n_1(Q) = 2 \ \text{ and } \ \epsilon_1(Q) = \left(\frac{-1}{p}\right) \ for \ \alpha \geqslant 1;\\ &n_1(Q) = 2 \ \text{ and } \ \epsilon_p(Q) = 1 \ for \ \alpha = 1. \end{aligned}$$

REFERENCES

1. Doyle G. and Williams K.S. Prime-universal quadratic forms $ax^2 + by^2 + cz^2$ and $ax^2 + by^2 + cz^2 + dw^2$ // Bull. Aust. Math. Soc. 2020. Vol. 101. P. 1–12.

2. Ju J., Kim D., Kim K., Kim M. and Oh B.-K. Prime-universal diagonal quadratic forms // Bulletin of the Australian Mathematical Society.2021. Vol. 103(3). P. 390–404.

3. Conway J.H. and Sloane J.A.Sphere packings, lattices and groups // Grundlehren Math. Wiss. 290, New York, Berlin, Springer-Verlag, 1988.

4. Zhuravlev V.G. Representation of a form by the genus of quadratic forms // St. Petersburg Math. J. 1997. Vol. 8(1). P. 15–84.

5. Zhuravlev V.G. Orbits of representation of numbers by local quadratic forms // Proc. Steklov Inst. Math. 1997. Vol. 218. P. 146–159.

УДК 511.3

О приближении положительного числа суммой двух простых чисел

Д. В. Горяшин (Россия, г. Москва)
Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
e-mail: dmitry.goryashin@math.msu.ru
С. А. Гриценко (Россия, г. Москва)
Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
e-mail: s.gritsenko@gmail.com

On an approximation of positive number by sum of two prime numbers

D. V. Goryashin (Russia, Moscow)
Lomonosov Moscow State University
e-mail: dmitry.goryashin@math.msu.ru
S. A. Gritsenko (Russia, Moscow)
Lomonosov Moscow State University
e-mail: s.gritsenko@gmail.com

В докладе будет рассмотрена задача о приближении заданного положительного числа N суммой двух простых чисел. На основе применения явных формул для функции Чебышёва и теорем о плотности нулей дзета-функции Римана можно доказать, что неравенство $|p_1+p_2-N|\leqslant H$ разрешимо в простых числах p_1 и p_2 при $H\geqslant N^{1/6+\varepsilon}$ (см. задачу 4а к главе VII монографии А.А.Карацубы [1]). В 1975 г. Х. Монтгомери и Р. Вон в статье [2] доказали разрешимость этого неравенства при $H\geqslant N^{7/72+\varepsilon}$.

В 2001 г. Р. Бейкер, Г. Харман и Дж. Пинтц в работе [3] получили для числа решений неравенства $|p-N|\leqslant H$ в простых числах p правильную по порядку оценку снизу при условии $H\geqslant N^{21/40+\varepsilon}$. На основе этого результата и плотностных теорем доказывается следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть ε — произвольно малое положительное число, $N_1\geqslant N^{\frac{21}{40}+\varepsilon}$. Тогда при $H\geqslant N_1^{\frac{1}{6}+2\varepsilon}\geqslant N^{\frac{7}{80}+\varepsilon}$ для числа $J_1(N,H)$ решений неравенства $|p_1+p_2-N|\leqslant H$ в простых числах p_1 и p_2 справедлива оценка*

$$J_1(N,H)\gg\frac{N_1H}{\ln^2 N}.$$

Кроме того, на основе плотностной техники доказывается также оценка снизу для числа решений неравенства $\left|p_1^2+p_2^2+p_3-N\right|\leqslant H$ в простых числах p_1, p_2 и p_3 при $H\geqslant N^{\frac{7}{72}+\varepsilon}$.

Теорема 2. *Пусть ε — произвольно малое положительное число, $N_2 \geqslant N^{\frac{7}{12}+\varepsilon}$. Тогда при $H \geqslant N_2^{\frac{1}{6}+2\varepsilon} \geqslant N^{\frac{7}{72}+\varepsilon}$ для числа $J_2(N,H)$ решений неравенства $\left|p_1^2+p_2^2+p_3-N\right| \leqslant H$ в простых числах p_1, p_2 и p_3 справедлива оценка*

$$J_2(N,H) \gg \frac{N_2 H}{\ln^3 N}.$$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Карацуба А. А. Основы аналитической теории чисел. М.: Наука, 1983. 240 с.
2. Montgomery H. L., Vaughan R. C. The exceptional set in Goldbach's problem // Acta Arith. 1975. Vol. 27. P. 353–370.
3. Baker R. C., Harman G., Pintz J. The difference between consecutive primes, II // Proc. London Math. Soc. 2001. Vol. 83, №3. P. 532-562.

УДК 511.32

О числе листов накрытий, определенных системами уравнений в n-мерных пространствах

И. Ш. Джаббаров (Азербайджан, г. Гянджа)
Гянджинский государственный университет
e-mail:ilgar_js@rambler.ru
С. М. Мешаик (Азербайджан, г. Гянджа)
Гянджинский государственный университет
М. М. Исмаилова (Азербайджан, г. Гянджа)
Гянджинский государственный университет

On Number of Sheets of Coverings defined by a System of Equations in n-Dimensional Spaces

I. Sh. Jabbarov (Azerbaijan, Ganja)
Ganja State University
e-mail:e-mail:ilgar_js@rambler.ru
S. A. Meshaik (Azerbaijan, Ganja)
Ganja State University
e-mail: **M. M. Ismailova (Azerbaijan, Ganja)**
Ganja State University

Обязательным элементом тезисов является название, фамилии авторов и аффилиация на русском и английском языках.

1. Introduction

Let us consider two regular manifolds of equal dimensions M and N. f: M→ N is some their map.

Definition 1. *This map is called a covering, if following conditions are satisfied:*

a) The Jacobian of the map f is distinct from zero in every point of the manifold M;

b) For every point $y \in N$ there exists a neighborhood $y \in U \subset N$ such that the preimage $f^{-1}(U) \subset M$ consists of finite of infinite number of non-intersecting domains

$$f^{-1}(U) = V_1 \bigcup V_2 \bigcup \cdots ,$$

for which the map $f : V_j \to U$ is diffeomorphism;

c) The manifold is covered by finite or denumerable family of such domains U.

Another equivalent definition of the notion of covering based on a dual point of a view to the problem. Consider this definition.

Definition 2. *The surjective continuous map π: $X \to Y$ of linearly connected space X is called a covering:*

1) if for every point $a \in Y$ there exists a neighborhood $V \subset Y$ for which it can be found a homeomorphism $h : \pi^{-1}(V) \to V \times \Gamma$, with a discrete space Γ.

2) If p: $V \times \Gamma \to V$ is a natural projection then

$$\pi|_{\pi^{-1}(V)} = p \circ h.$$

The space X is called the space of covering; Y is called a base of covering.

First definition mostly is in use in geometry and analysis. Second definition is widely used in algebra and topology. The problem on equivalence of these two definitions is substantive. Digging deep in investigation of this problem goes out of the frames of this paper. We accept it without proof.

The number of sheets is an important characteristics of coverings and in many questions of analysis and geometry, it arises the question on defining or estimating of the number of sheets. The number of sheets does not depend on the point, if the manifold is connected [1]. In general case this question is not easy for investigation. For one class of coverings this question allows solution by using of compactness [1]. Consider one of theorems for such kind.

Let M and N be smooth n-dimensional closed manifolds, and the map $f : M \to N$ is regular (with non-degenerating Jacobian) and surjective. Following theorem is true.

Proposition 1. *The map $f : M \to N$ is a covering with finite number of sheets.*

The condition on closeness of manifolds is substantive in this theorem. But this theorem does not give tools to advance any conclusions on the number of sheets. In questions connected with algebraic or analytic manifolds, this question allows solution due to connections of coverings with some groups of transformation of manifolds.

Coverings rather arose when the system of equations in multidimensional spaces are considered. In the present work we shall consider coverings defined by the system of equations in n-dimensional spaces R^n. In some natural conditions we obtain bounds for the number of sheets.

2. Theorem on implicit functions

Following lemma is a general form of the theorem on implicit functions in normed spaces ([2]).

LEMMA 1. *Suppose we are given with normed spaces X, Y and Z. Let* $\Phi : X \times Y \to Z$ *be some differentiable map which at the points* $a \in X$, $b \in Y$ *satisfies the condition* $\Phi(a, b) = 0$ *and the linear operator* $\frac{\partial \Phi(x,y)}{\partial y}$ *(the operator of partial differentiation) is continuous and has an inverse in some neighborhood W of the point (a, b),* $W = \{(x, y)/ \|x - a\| < r, \|y - b\| < \rho\} \subset U$. *Then there exists such a ball* $U_\rho = \{x/ \|x - a\| < \rho < r\}$ *with the center at the point a, and a unique map* $f : X \to Y$ *such that:*

1) f is continuous in the ball U_ρ*;*

2) the equality $b = f(a)$ *is true;*

3) for every $x \in U_\rho$ *the equality* $\Phi(x, f(x)) = 0$ *is satisfied.*

Uniqueness of the function $f(x)$ means: if there exist a pair of functions f_1 and f_2 defined in the balls U_{ρ_1} and U_{ρ_2}, then they are coincident in the intersection $U = U_{\rho_1} \cap U_{\rho_2}$.

3. Posing of the problem and basic results

Let we are given with some bounded, one-connected, closed Jordan domain , contained in other open domain given in -dimensional space . Suppose that in the domain some continuous function and continuously differentiable function $f_1(\overline{x}) = f_1(x_1, \ldots, x_n)$ be given and, moreover, suppose that gradient vector is distinct from zero everywhere in Ω_0. Consider in Ω a following equation:

$$f_1(\bar{x}) = 0. \tag{1}$$

This equation, by the conditions above, defines some *n-1* dimensional surface in Ω. We assume that this surface has *n-1* dimensional volume or area. This is possible when the intersection of the surface with the boundary of the domain Ω has *n-1* dimensional Jordan measure being equal to zero. This condition is always satisfied when the domain Ω is bounded by finite number of hyper surfaces of a view

$$\varphi : U \subset R^{n-1} \to V \subset R^n,$$

with continuously differentiable map φ of closed domains U and V; these hypersurfaces can intersect each with other by parts of their boundaries. We do not exclude the case when one or more surfaces of boundary has the form $f_1(\overline{x}) = a$. In this case the question demands more detailed consideration. The analogical situation is arose in the case of system of equations. But the considered case of one equation is basic, and the general case is possible to reduce the case of one equation.

The equation $f_1(\overline{x}) = 0$ defines a covering in Ω. In many applications of analysis, it arises the question on the number of sheets of this covering, that is, the number of elementary surfaces defined by this system of equations.

We formulate and prove two theorems on coverings defined by such equation. Bounding of the number of sheets we lead to some metric relations.

STATEMENT 1. *Take some cube* $B \subset R_{n-r}$ *such that covering with this base has a discrete space* Γ. *Then for the number of elements of* Γ, *the following inequality is satisfied:*

$$|\Gamma| \leqslant M|B|^{-1} \int_{\Pi} \frac{ds}{\sqrt{G}},$$

where M denotes the maximal value of components of the gradient vector in B and |B| is a volume of B and in the right hand side a surface integral taken along the surface Π, *defined by the system of given equations.*

Statement 2. *In the conditions of the theorem 1 we have:*

$$|\Gamma| \leqslant M|B|^{-1} \lim_{h\to 0} \frac{1}{h^r} \int_{\substack{0 < f_1 < h \\ \cdots \\ 0 < f_r < h}} |J|^{-1} dx_{r+1} \cdots dx_n \ .$$

where integration is taken along the subset of Ω *, defined by inequalities indicated at the foot of the sign of integral.*

Following lemma is important and has an independent interest (firstly this result with brief proof was given in [3]). It is generalization of the theorem on differentiation of an integral with variable upper bound, which lies in the base of differential and integral calculus. For which class of functions one can state that integral with upper variable bound is an antiderivative for a given function? Solution in full of this question reaches in more general theories of integral. The lemma below is a generalization of those problems for multi-dimensional integrals. Here we give simplest form of the question showing the basic difficulties we are met. We does not consider Lebesgue or other general integrals' theories in which the question can be completely studied. For us more suitable to define basic ideas for studying the case of Riemann integral, to give applications to estimates of the number of sheets of coverings, and investigate problem on estimating of the number of sheets using the structure of some tensor fields.

Lemma 2. *Let domains* Ω *and* Ω_0*, functions* $f(\overline{x})$ *and* $f_1(\overline{x})$ *be defined as above in n-dimensional space . Let, further,* $\overline{\xi}_0$ *be some point of an image of the function* $f_1(\overline{x})$ *. Then in some neighborhood of the point* $\overline{\xi}_0$ *we have the equality*

$$\frac{\partial}{\partial \xi_1} \int_{\Omega(\bar{\xi})} f dx_1 \cdots dx_n = \int_{M(\bar{\xi})} f \frac{ds}{\sqrt{G}}$$

Where $\Omega\left(\overline{\xi}\right)$ *is a sub-domain in* Ω*, defined by the inequality* $f_1(\overline{x}) \leqslant \xi$*, and* $M(\bar{\xi})$ *is a surface defined by the equation* $f_1(\overline{x}) = \xi$*,* G *is a norm of gradient of the function* $f_1(\overline{x})$*.*

Remark 1. *Differentiating of integral is taken one sided, that is, passing to the limit performed from interior of the domain* $\Omega\left(\overline{\xi}\right)$*. In the work is proven that there is only finite or denumerable values ov vector* $\overline{\xi}$ *at which one sided derivatives differs each from other (this not substantive in applications). In all other points they a coincides with the ordinary derivative.*

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Dubrovin B. A., Novikov S. P., Fomenko A. T. Modern Geometry // Moscow: Nauka, 1968. 760p.

2. Shilov G. E. Mathematical Analysis. Functions of several real variables // Moscow: Nauka, 1972, 622p.

3. Dzhabbarov I. Sh. On estimates of trigonometric integrals // Chebishevskii sbornik. -2010, v. 11, issue 1, pp. 85-108.

УДК 511.32

О максимальном числе простых делителей порядков циклических подгрупп в симметрической группе

Р. А. Дохов (Россия, г. Ставрополь)
Северо-Кавказский федеральный университет
e-mail: rezuan.dokhov@yandex.ru
У. М. Пачев (Россия, г. Нальчик)
Кабардино-Балкарский государственный университет им. Х. М. Бербекова
e-mail: urusbi@rambler.ru

On the maximum number of prime divisors of the orders of cyclic subgroups in a symmetric group

R. A. Dokhov (Russia, Stavropol)
North-Caucasus Federal University
e-mail: rezuan.dokhov@yandex.ru
U. M. Pachev (Russia, Nalchik)
Kabardino-Balkarian State University named after H. M. Berbekov
e-mail: urusbi@rambler.ru

Одним из первых применений теоретико-числовых результатов к теории симметрических групп является постулат Бертрана о простых числах (между натуральными числами n и $2n$ при $n > 1$ содержится хотя бы одно простое число), из которого следует, что симметрическая группа S_n не имеет подгрупп, индекс i которых удовлетворяет неравенствам $2 < i < n$ при $n > 4$.

Постулат Бертрана был доказан Чебышевым в 1852 г. Дальнейшее применение теории чисел к группам подстановок заданной степени было дано Э. Ландау [1], исследование которого было продолжено В. Миллер [2].

Ещё одно применение, связанное с теорией сравнений даётся в [3], где установлено существование в симметрической группе S_n циклических, абелевых и неабелевых подгрупп соответственно порядков k, $\varphi(k)$ и $k\varphi(k)$, где $\varphi(k)$ — функция Эйлера, при этом $k \leqslant n$.

Теперь мы ещё рассматриваем следующее применение теории чисел к вопросу о максимальном числе простых делителей порядка циклических подгрупп симметрической группы S_n.

Теорема 1. *Для максимального числа $\max\limits_{\tau \in S_n} \nu(|<\tau<|)$ простых делителей порядков циклических подгрупп симметрической группы S_n справедливо неравенство*

$$\max_{\tau \in S_n} v(|<\tau<|) > \sqrt{\frac{n}{\log n}} - 1,$$

где v — функция числа простых делителей.

В доказательстве этой теоремы существенно используются результаты Россера [4] об оценках n-го простого числа и формула суммирования Эйлера—Маклорена [5].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Landau. E. Über die Maximalordnung der Permutation gegeben Grades//Archiv der Math. Und Phys., Ser 3,5 (1903) 92–103.

2. Miller. W. The Maximum Order of a Element of a Finite Symmetric Group//The American Mathematical Monthly. Vol. 94, #6, 1987, pp. 497–506.

3. Пачев У. М., Шокуев В. Н. О применении теории сравнений к изучению подгрупп в симметрических группах//Изв. КБНЦ РАН. 2001, №1 (6). С. 68–69.

4. Rosser. B. The n-th Prime is greater than $n \log n$. Pros. London. Math. Soc. 45, 1938, pp. 21–44.

5. Krätzel E. Zahlentheorie VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften. Berlin. 1981.

УДК 511.31

Задача Гельфонда для обобщенных разложений Островского иррационального числа α по знаменателям подходящих дробей и произвольного модуля

А. А. Жукова (Россия, г. Владимир)
Российская академия народного хозяйства и государственной службы при Президенте Российской Федерации
e-mail: georg967@mail.ru
А. В. Шутов (Россия, г. Владимир)
Владимирский государственный университет имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых
e-mail: a1981@mail.ru

The Gel'fond problem for generalized Ostrovskii expansions of an irrational number α in terms of the denominators of convergents and an arbitrary modulus

A. A. Zhukova (Russia, Vladimir)
Russian Presidential Academy of National Economy and Public Administration (The Presidential Academy, RANEPA)
e-mail: georg967@mail.ru
A. V. Shutov (Russia, Vladimir)
Vladimir State University named after Alexander and Nicholay Stoletovs
e-mail: a1981@mail.ru

А. О. Гельфонд доказал, что суммы цифр разложений натуральных чисел в b-ичную систему счисления равномерно распределены по арифметическим прогрессиям с разностью d при условии взаимной простоты $b-1$ и d, а, именно, решил следующую задачу.

Пусть

$$X = \sum_{i=1}^{\infty} z_i b^i,$$

где $z_i \in \{0, 1, \dots, b-1\}$, — разложение X в b-ичную систему счисления, $N_{d,a}^{(b)}(X)$ — количество натуральных чисел, меньших X для которых $\sum\limits_{i=0}^{\infty} z_i(m) \equiv a \pmod d$.

Гельфонд показал [1], что в случае взаимной простоты d и $b-1$ найдется постоянная $\mu < 1$ такая, что

$$N_{d,a}^{(b)}(X) = \frac{X}{d} + O(X^{\mu}).$$

Рассмотрим следующую задачу.

Пусть $\alpha \in (0;1)$ — иррационально, $\{q_i\}$ — последовательность неполных частных разложения α в цепную дробь, $\{Q_i\}$ — последовательность знаменателей соответствующих подходящих дробей.

Знаменатели подходящих дробей, определяемые соотношением

$$Q_i = q_i Q_{i-1} + Q_{i-2},$$

где $Q_1 = 1$, $Q_2 = q_1$, образуют систему счисления, в которой любое натуральное число X может быть представлено как

$$X = \sum_{i=1}^{\infty} z_i Q_i, \tag{1}$$

где $0 \leqslant z_i \leqslant q_{i+1}$, причем, если $z_i = q_{i+1}$, то $z_{i-1} = 0$. Данное равенство получило название обобщенного разложения Островского по знаменателям подходящих дробей.

Обозначим через $N_{d,a}(X)$ — количество натуральных чисел, меньших X, для которых сумма коэффициентов z_i разложения (1) сравнима с a по модулю d, т.е.

$$N_{d,a}(X) = \sharp \left\{ m \,:\, m < X, \quad \sum_{i=0}^{\infty} z_i(m) \equiv a \pmod d \right\}. \tag{2}$$

В работе [2] полностью рассмотрен вопрос об асимптотике $N_{d,a}(X)$ в случае $d = 2$. Доказано, что для любого иррационального α

$$N_{2,a}(X) = \frac{X}{2} + O(\log X).$$

Для произвольных модулей при определенных ограничениях справедливо аналогичное утверждение.

Теорема 1. *Пусть величина $N_{d,a}(X)$ определяется равенством (2) для наутрального X, имеющего разложение (1) по Q_i — знаменателям подходящих дробей представления числа α в виде цепной дроби, при условии, что все соотвествующие неполные частные сравнимы с нулем по модулю d. Тогда справедлива асимптотическая формула*

$$N_{d,a}(X) = \frac{X}{d} + O(\log X).$$

Введем обозначения:

$$d_0 = \left[\frac{d}{2}\right], \qquad d_0' = \begin{cases} d_0 & \text{при} \quad d \text{ — четном}, \\ d_0 + 1 & \text{при} \quad d \text{ — нечетном}; \end{cases}$$

где $[x]$ — целая часть числа x; $q_i' = 1$, если $q_i \equiv 0 \pmod d$; q_i' — наименьшее положительное решение сравнения $q_i \equiv q_i' \pmod d$, если $q_i \not\equiv 0 \pmod d$.

Имеет место следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть величина* $N_{d,a}(X)$ *определяется равенством (2) для наутрального* X, *имеющего разложение (1) по* Q_i — *знаменателям подходящих дробей представления числа* α *в виде цепной дроби. Если* $k_{\alpha,d}(n)$ — *количество неполных частных* q_i, $i < n$, *разложения числа* α *в цепную дробь таких, что* $q_i > d_0'$, *то справедлива асимптотическая формула*

$$N_{d,a}(X) = \frac{X}{d} + O\left(X\mu^{-k_{\alpha,d}(n_1(X))}\right),$$

где $n_1(X) = \max\{i : Q_i \leqslant X\}$, $\mu = \frac{2d_0+3}{2d_0+2}$ *и* $d \geqslant 3$.

Если $X \to \infty$, *то* $n_1(X) \to \infty$ *и первое слагаемое больше, чем второе.*

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Gelfond, A. O. 1968, “Sur les nombres qui ont des propriétés additives et multiplicatives données“, *Acta Arithmetica*, vol. 13, pp. 259-265. doi: 10.4064/aa-13-3-259-265.

2. Жукова А. А., Шутов А. В. Об аналоге задачи Гельфонда для обобщенных разложений Цеккендорфа // Чебышевский сборник. 2021. Т. 22. Вып. 2. С. 104–120.

———————————————————————

УДК 517.521.75

Оценка для чезаровских средних m-го порядка

З. Н. Камариддинзода (Таджикистан, г. Душанбе)
Таджикский государственный педагогический университет им. Садриддина Айни
e-mail: zarrina.qamariddinova@gmail.com

Estimation for m-order Cesaro averages

Z. N. Qamariddinzoda (Tajikistan, Dushanbe)
Tajik State Pedagogical University
e-mail: zarrina.qamariddinova@gmail.com

В работах [1] - [3] рассматривались тауберовы теоремы для степенных рядов Тейлора — Дирихле при чезаровских средних, а также доказано несколько теорем о чезаровских средних в тауберовых теоремах с остатком.

В этой работе найдена другая оценка для чезаровских средних m–го порядка.

Теорема 1. *Пусть ряд Тейлора — Дирихле*

$$f_a(\sigma) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-\sigma n}$$

абсолютно сходится при $\sigma > 0$ *и удовлетворяет условию*

$$f_a(\sigma) = H + O(r(\sigma)),$$

где

$$r(\sigma) \sim A\left(\ln\frac{1}{\sigma}\right)^{-\lambda}, \qquad \lambda \geq 0, \qquad H = const$$

и пусть

$$1)a_n > -kn^{\alpha-1}L(t), \qquad \left(a_n < kn^{\alpha-1}L(t)\right),$$

$$2)a_n > -H(n^{\alpha-1}) \qquad a_n = O\left(\frac{1}{n^{\alpha+1}}\right)$$

или

$$a_n = O\big(n^{\alpha-1}L(t)\big), \quad \alpha > 0,$$

где k-положительная постоянная, тогда

$$\sum_{n=0}^{\infty}(x-n)^m a_n = Hx^m(1+\rho(x)),$$

здесь

$$\rho(x) = O\left(\frac{1}{\ln\ln x}\right),$$

то

$$\sum_{n=0}^{\infty}(x-n)^m a_n = Hx^m\left[1+O\left(\frac{1}{\ln\ln x}\right)\right]; \quad x\to\infty.$$

Число $\alpha>0$ и функции $r(\sigma)$, $L(t)$, $\rho(x)$ определены так же, как в теореме из работы [4], $m \geq 0$ целое и постоянная в оценке O зависит от чисел α, m.

Теорема 2. *Пусть ряд Тейлора — Дирихле $f_a(\sigma)$ удовлетворяет всем условиям теоремы 1. Тогда справедливо утверждение*

$$\sigma_n^{(m)} = H\left[1+O\left(\frac{1}{\ln\ln n}\right)\right]; \quad n\to\infty,$$

где $\sigma_n^{(m)}$– чезаровская средняя m-го порядка.

Теорема 3. *Пусть ряд Тейлора — Дирихле*

$$f_a(\sigma) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-\sigma n}$$

абсолютно сходится при $\sigma>0$ и удовлетворяет условию

$$f_a(\sigma) = H + O(r(\sigma)),$$

где

$$r(\sigma) \sim \sigma^{\lambda}, \qquad \lambda > 0,$$

и пусть

$$a_n = o\left(\frac{\ln n}{n}\right),$$

то

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{x=0}^{n} a_n = H,$$

то есть,

$$\lim_{n\to\infty}\rho(x) = 0.$$

Тогда

$$\sum_{n\leq x}(x-n)^m a_n = Hx^m(1+O(\rho(x)))$$

или

$$\sum_{n\leq x}(x-n)^m a_n = Hx^m,$$

$m\geq 0$ - целое.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Каримова М. М., Камарадинова З. Н. Действительные тауберовы теоремы для степенных рядов и рядов Тейлора - Дирихле при чезаровских средних // Вестник Педуниверситета. - Душанбе, 2007. С. 10-11.

2. Камарадинова З. Н. О чезаровских средних в Тауберовых теоремах с остатком для рядов Тейлора - Дирихле // Вестник Педуниверситета. - Душанбе, 2005. - № 2. С. 28.

3. Камарадинова З. Н. Чезаровские средние в Тауберовых теоремах с остатком // Вестник Педуниверситета. - Душанбе, 2005. - № 3. С.79-87.

4. Камарадинова З. Н. Об одном улучшение оценки одного интеграла применяемое в тауберовых теоремах // Материалы республиканской научно-практической конференции посвященной 70 – летию кандидата физико-математических наук, доцента Норова Курбонбоя на тему «Современные проблемы математики и профессиональные подготовки учителя математики в педагогических Вузах». Душанбе, ТГПУ им. С. Айни, 2018. С.11-14.

УДК 517.521.5, 517.589

Рекуррентные соотношения с пропусками постоянной длины для многочленов Бернулли и Эйлера[1]

К. А. Мирзоев (Россия, г. Москва)
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова; Центр фундаментальной и прикладной математики Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова
e-mail: mirzoev.karahan@mail.ru

Recurrent relations with gaps of constant length for Bernoulli and Euler polynomials

K. A. Mirzoev (Russia, Moscow)
Lomonosov Moscow State University; Center for Fundamental and Applied Mathematics of Lomonosov Moscow State University
e-mail: mirzoev.karahan@mail.ru

I. Символами $B_n(x)$ и $E_n(x)$ обозначим многочлены Бернулли и Эйлера, определяемые соответственно из разложений

$$\frac{te^{tx}}{e^t-1}=\sum_{n=0}^{+\infty}B_n(x)\frac{t^n}{n!},\qquad \frac{2e^{tx}}{e^t+1}=\sum_{n=0}^{+\infty}E_n(x)\frac{t^n}{n!},$$

первое из которых справедливо при $|t|<2\pi$, а второе - при $|t|<\pi$, а символами B_n и E_n - числа Бернулли и Эйлера, определяемые равенствами $B_n=B_n(0)$ и $E_n=2^nE_n(1/2)$ $(n=0,1,\ldots)$.

Для многочленов $B_n(x)$ и $E_n(x)$ справедливы формулы дифференцирования

$$B_n'(x)=nB_{n-1}(x),\quad E_n'(x)=nE_{n-1}(x),\quad n=1,2,\ldots$$

[1]Работа выполнена при поддержке РНФ (грант № 20-11-20261)

и рекуррентные соотношения

$$\sum_{k=0}^{n-1} C_n^k B_k(x) = nx^{n-1}, \quad \sum_{k=0}^{n} C_n^k E_k(x) + E_n(x) = 2x^n, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Полагая $x = 0$ в первой из них и $x = 1/2$ во второй, получим рекуррентные соотношения для чисел Бернулли и Эйлера

$$\sum_{k=0}^{n-1} C_n^k B_k = 0, \quad n = 2, 3, \ldots,$$

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k 2^k E_{n-k} + E_n = 2, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Отметим, что B_n - рациональные, E_n - целые числа, $B_0 = E_0 = 1$, $B_1 = -1/2$, $E_1 = 0$ и $B_{2k+1} = E_{2k+1} = 0$, $k = 1, 2, \ldots$ и, кроме того, при $n = 0, 1, \ldots$ справедливы равенства

$$B_n\left(\frac{1}{2}\right) = -(1 - 2^{1-n})B_n, \qquad E_n(0) = -E_n(1) = -\frac{2(2^{n+1} - 1)B_{n+1}}{n+1}, \tag{1}$$

$$B_{2n}\left(\frac{1}{3}\right) = B_{2n}\left(\frac{2}{3}\right) = -\frac{1}{2}(1 - 3^{1-2n})B_{2n}, \tag{2}$$

$$B_{2n}\left(\frac{1}{6}\right) = B_{2n}\left(\frac{5}{6}\right) = \frac{1}{2}(1 - 2^{1-2n})(1 - 3^{1-2n})B_{2n}, \tag{3}$$

а при $n = 1, 2, \ldots$ - равенства

$$B_n\left(\frac{1}{4}\right) = (-1)^n B_n\left(\frac{3}{4}\right) = -2^{-n}(1 - 2^{1-n})B_n - n4^{-n}E_{n-1}, \tag{4}$$

$$E_{2n-1}\left(\frac{1}{3}\right) = -E_{2n-1}\left(\frac{2}{3}\right) = -\frac{1}{2n}(1 - 3^{1-2n})(2^{2n} - 1)B_{2n}. \tag{5}$$

Также хорошо известны разложения многочленов $B_n(x)$ и $E_n(x)$ в ряды Фурье, а именно, при $0 \leqslant x \leqslant 1$ и $n = 1, 2, \ldots$ справедливы формулы

$$B_{2n}(x) = \frac{(-1)^{n-1}2(2n)!}{(2\pi)^{2n}} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\cos 2k\pi x}{k^{2n}}, \qquad E_{2n-1}(x) = \frac{(-1)^n 4(2n-1)!}{\pi^{2n}} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\cos(2k+1)\pi x}{(2k+1)^{2n}},$$

при $0 \leqslant x \leqslant 1$, $n = 2, 3, \ldots$ и при $n = 1$, $0 < x < 1$

$$B_{2n-1}(x) = \frac{(-1)^n 2(2n-1)!}{(2\pi)^{2n-1}} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sin 2k\pi x}{k^{2n-1}},$$

а при $0 \leqslant x \leqslant 1$, $n = 1, 2, \ldots$ и при $n = 0$, $0 < x < 1$

$$E_{2n}(x) = \frac{(-1)^n 4(2n)!}{\pi^{2n+1}} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\sin(2k+1)\pi x}{(2k+1)^{2n+1}}.$$

Факты, приведённые в этом пункте, хорошо известны и содержатся в различных справочниках (см., напр., [1, п. 23] и [2, ch. 24]).

II. Пусть $n \geqslant 2$ - фиксированное натуральное число и $\epsilon = e^{i\pi/n}$. Мощность множества всевозможных отображений множества $\{1, 2, \ldots, n-1\}$ на множество $\{0, 1\}$ равна 2^{n-1}. Элементы этого множества занумеруем символами m_s и определим числа α_s, полагая

$$\alpha_s = \sum_{j=1}^{n-1} (-1)^{m_s(j)} \epsilon^j, \quad s = 1, 2, \ldots, 2^{n-1}.$$

Доклад посвящён доказательству следующих теорем и следствий из них.

Теорема 1. *При $n = 1, 2, \ldots$ и $m = 0, 1, \ldots$ справедливы равенства*

$$\sum_{k=0}^{[m/(2n)]} 2^{m-2nk} C_{m+n}^{2nk+n} B_{m-2nk}(z) \sum_{s=1}^{2^{n-1}} (-1)^{\nu(s)} (1+\alpha_s)^{2nk+n-1} =$$

$$= (-1)^{n-1} \left(1 + \frac{m}{n}\right) \sum_{s=1}^{2^{n-1}} (-1)^{\nu(s)} (2z - 1 + \alpha_s)^{m+n-1},$$

где $[a]$ - целая часть числа a и $\nu(s) = 0$, если количество слагаемых со знаком плюс в числе α_s чётное, и $\nu(s) = 1$ в противном случае.

Теорема 2. *При $n = 1, 2, \ldots$ и $m = 1, 2, \ldots$ справедливы равенства*

$$E_{m-1}(z) + \frac{n}{2^n} \sum_{k=1}^{[m/(2n)-1]} \frac{C_{m-1}^{2nk} E_{m-2nk-1}(z)}{2^{2nk-1}} \sum_{s=1}^{2^{n-1}} (1+\alpha_s)^{2nk-1} = \frac{1}{2^{m+n-2}} \sum_{s=1}^{2^{n-1}} (2z - 1 + \alpha_s)^{m-1}.$$

Для наглядности приведём формулировку теорем 1 и 2 для случая $n = 4$ и с заменой m на $8m$.

Теорема 3. *При $m = 0, 1, \ldots$ справедливы равенства*

$$\sum_{k=0}^{m} (-1)^k \alpha_{4k+2} C_{8m+4}^{8k+4} B_{8(m-k)}(z) = \frac{i(2m+1)}{2^{8m+4}} \sum_{s=1}^{8} (-1)^{s-1} (2z - 1 + a_s)^{8m+3}$$

и

$$\sum_{k=0}^{m} (-1)^k \alpha_{4k} C_{8m}^{8k} E_{8(m-k)}(z) = \frac{1}{2^{8m+2}} \sum_{s=1}^{8} (2z - 1 + a_s)^{8m},$$

где $\alpha_m = \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^m + \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^m$, $a_1 = \sqrt{2} - i,\ a_2 = \sqrt{2} + i,\ a_3 = -\sqrt{2} - i,\ a_4 = -\sqrt{2} + i,$

$$a_5 = -i(\sqrt{2} - 1),\ a_6 = i(\sqrt{2} - 1),\ a_7 = i(\sqrt{2} + 1),\ a_8 = -i(\sqrt{2} + 1).$$

Следствие 1. *При $n = 1, 2, \ldots$ справедливы равенства*

$$E_{2n-1}(z) = \frac{1}{2^{3n-2}} \sum_{s=1}^{2^{n-1}} (2z - 1 + \alpha_s)^{2n-1}.$$

Полагая $z = 1$ в этом равенстве и используя вторую часть равенства (1), заключаем, что

$$B_{2n} = \frac{n}{2^{3n-2}(2^{2n} - 1)} \sum_{s=1}^{2^{n-1}} (1 + \alpha_s)^{2n-1} = \frac{1}{2^{3n-2}(2^{2n} - 1)} \sum_{s=1}^{2^{n-1}} (1 + \alpha_s)^{2n}$$

Продифференцировав равенство из следствия 1 и полагая $z = 1/2$ в полученной формуле, находим, что

$$E_{2n-2} = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{s=1}^{2^{n-1}} \alpha_s^{2n-2}.$$

Формулы для B_{2n} и E_{2n-2}, приведённые выше, по-видимому, являются новыми.

Полагая $z = 0$, $z = 1/6$, $z = 1/4$, $z = 1/3$ и $z = 1/2$ в равенствах теорем 1 и 2 и учитывая определения чисел Бернулли и Эйлера и равенства (1) - (5) можно получить рекуррентные соотношения с пропусками длины $2n$ для них. Некоторые из этих соотношений, а именно, те, которые получаются при $z = 0$ и $z = 1/2$ и особенно при малых значениях n хорошо известны и являются классическими (см., напр., [3] - [5]), а те, которые получаются при других выше перечисленных значениях z, являются новыми.

III. Пусть $n \in \mathcal{N}$, $\alpha \in (0,1)$ и $0 < a < 1$. Рассмотрим самосопряжённый оператор S_α, порождённый в $\mathcal{L}^2[0,\pi]$ выражением

$$l_{2n}[y] = (-1)^n y^{(2n)} - a^{2n} y$$

и граничными условиями

$$y^{(j)}(0) = e^{\pi i \alpha} y^{(j)}(\pi), \quad j = 0, 1, \ldots, 2n-1.$$

Спектр этого оператора состоит из собственных чисел $\mu_{\alpha,k} = (2k+\alpha)^{2n} - a^{2n}$, а собственному значению $\mu_{\alpha,k}$ соответствует собственная функция $\varphi_k(x) = e^{-i(2k+\alpha)x}/\sqrt{\pi}$ $(k = 0; \pm 1; \pm 2; \ldots)$. Если параметры α и a дополнительно удовлетворяют условиям $\alpha \neq a$ и $\alpha \neq 2-a$, то число $\mu = 0$ не принадлежит спектру оператора S_α. Поэтому он имеет резольвенту R_α. Резольвента этого оператора является интегральным оператором с ядром - функцией Грина $G_\alpha(x,t)$ задачи

$$\begin{cases} l_{2n}[y] = f \\ y^{(j)}(0) - e^{\pi i \alpha} y^{(j)}(\pi) = 0, \; j = 0, \ldots, 2n-1 \end{cases},$$

для которой хорошо известная процедура её построения даёт

$$G_\alpha(x,t) = \frac{(-1)^n}{4n\beta^{2n-1}} \left(sign(u) \sum_{k=1}^{2n} \epsilon^k e^{\epsilon^k \beta u} + \sum_{k=1}^{2n} \frac{\epsilon^k \left(e^{\epsilon^k \beta u} + e^{\pi i \alpha} e^{\epsilon^k \beta (u+\pi)} \right)}{1 - e^{\pi i \alpha} e^{\pi \epsilon^k \beta}} \right), \tag{6}$$

где $u = x - t$.

С другой стороны, для оператора R_α и, следовательно, для функции Грина справедлива теорема о разложении в ряд по собственным функциям. Таким образом, из этого разложения и формулы (6) при $\alpha = 0$ и $\alpha = 1$ следует справедливость следующего утверждения.

Утверждение 1. *При $0 < a < 1$, $-\pi \leqslant u \leqslant \pi$ и $n = 1, 2, \ldots$ справедливы равенства*

$$\frac{(-1)^{n+1}}{2n\beta^{2n-1}} \sum_{k=1}^{n} \frac{\epsilon^k \operatorname{ch} \epsilon^k \beta (\frac{\pi}{2} - |u|)}{\operatorname{sh} \frac{\pi \epsilon^k \beta}{2}} = -\frac{1}{\pi a^{2n}} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\cos 2ku}{(2k)^{2n} - a^{2n}} \tag{7}$$

и

$$\frac{(-1)^{n+1}}{2n\beta^{2n-1}} \sum_{k=1}^{n} \frac{\epsilon^k \operatorname{sh} \epsilon^k \beta (\frac{\pi}{2} - |u|)}{\operatorname{ch} \frac{\pi \epsilon^k \beta}{2}} = \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\cos(2k+1)u}{(2k+1)^{2n} - a^{2n}}, \tag{8}$$

где $\beta = a$, если n - чётное число, и $\beta = ia$, если n - нечётное число.

Отметим, что эти тождества являются разложениями в классические ряды Фурье функций, стоящих в их левых частях, и их справедливость можно установить прямыми вычислениями.

Умножив обе части равенства (7) и (8) на произведение

$$\prod_{k=1}^{n} \operatorname{sh} \frac{\pi\epsilon^k\beta}{2} \quad \text{и} \quad \prod_{k=1}^{n} \operatorname{ch} \frac{\pi\epsilon^k\beta}{2}$$

соответственно, а затем, разложив в ряды по степеням a обе части полученных равенств и приравняв коэффициенты при одинаковых степенях a с использованием тождеств из п. I, приходим к справедливости утверждений теорем 1 и 2.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Abramowitz M., Stegun I. A. Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables. — New York:Dover Publ., 1972.
2. NIST Handbook of Mathematcal Functuios. — New York: Cambridge, 2010.
3. Ramanujan S. Some properties of Bernoulli's numbers// J. Indian Math. Soc. 1911. № 3. PP. 219–234.
4. Lehmer D. H. Lacunary recurrence formulas for the numbers of Bernoulli and Euler// Ann. of Math.1935 Vol. 36, № 4. PP. 637–649.
5. S. Wagstaff S. Jr. Ramanujan's paper on Bernoulli numbers// J. Indian Math. Soc. 1981 Vol. 45. PP. 49–65.

УДК 511.325

Об оценке коротких тригонометрических сумм Г. Вейля в малых дугах

Н. Н. Назрублоев (Таджикистан, г. Душанбе)
Институт математики им. А. Джураева НАН Таджикистана
e-mail: nasrullo_86@bk.ru

On estimating short trigonometric sums of G. Weyl in small arcs

N. N. Nazrubloev (Tajikistan, Dushanbe)
A.Dzhuraev Institute of Mathematics, NAS of Tajikistan
e-mail: nasrullo_86@bk.ru

Согласно теореме Дирихле о приближении действительных чисел рациональными числами, каждое α из промежутка $[-æ, 1-æ]$, $æ\tau = 1$ представимо в виде.

$$\alpha = \frac{a}{q} + \lambda, \quad (a,q) = 1, \qquad 1 \leqslant q \leqslant \tau, \qquad |\lambda| \leqslant \frac{1}{q\tau}.$$

Через $\mathfrak{M}(P)$ обозначим те числа α, для которых $q \leqslant P$, $P < Q$ через $\mathfrak{m}(P)$ обозначим оставшиеся α. $\mathfrak{M}(P)$ и $\mathfrak{m}(P)$ соответственно называются большими и малыми дугами.

После создания метода тригонометрических сумм и метода оценок тригонометрических сумм с простыми числами И.М. Виноградова решения классических аддитивных проблем как тернарная проблема Гольдбаха, проблема Варинга, проблема Гольдбаха-Варинга, проблема Эстермана, а также другие аддитивные задачи сводятся к двум следующим задачам:

- изучение в большие дуги $\mathfrak{M}(P)$ поведения тригонометрических сумм Г. Вейля вида
$$S_k(\alpha, N)=\sum_{m\leqslant N}\Lambda(m)e(\alpha m^k),\qquad T_n(\alpha, N)=\sum_{x\leqslant N}e(\alpha x^n);$$
- получение нетривиальных оценок этих сумм в малые дуги $\mathfrak{m}(P)$.

Решение вышеназванных классических проблем становится гораздо труднее, если требовать, что все слагаемые почти равны, так как вместо обычных тригонометрических сумм Г. Вейля $S_k(\alpha, N)$ и $T_n(\alpha, N)$ возникают короткие тригонометрические суммы Г. Вейля вида
$$S_k(\alpha; x, y)=\sum_{x-y<n\leqslant x}\Lambda(n)e(\alpha n^k),\qquad T_n(\alpha; x, y)=\sum_{x-y<m\leqslant x}e(\alpha m^n).$$
Более конкретно решения классических аддитивных проблем с почти равными слагаемыми сводятся к трём следующим задачам:

- изучение поведения коротких тригонометрических сумм $S_k(\alpha; x, y)$ и $T_n(\alpha; x, y)$ в малой окрестности центра больших дуг $\mathfrak{M}(P)$;
- получение нетривиальных оценок этих коротких сумм в больших дугах $\mathfrak{M}(P)$ за исключением малой окрестности их центров;
- нахождение нетривиальных оценок этих сумм в малые дуги $\mathfrak{m}(P)$.

Поведение $T_n(\alpha; x, y)$ и $S_k(\alpha; x, y)$ в больших дугах $\mathfrak{M}(P)$ изучены соответственно в работах [1,2]. В работе [3] была доказана, что *если $x\geqslant x_0>0$, $y_0<y\leqslant 0,01x$, $\tau(h)$ — функция делителей, α – вещественное число, $\left|\alpha-\frac{a}{q}\right|\leqslant\frac{1}{q^2}$, $(a,q)=1$, то справедлива оценка*
$$|T_k(\alpha; x, y)|\leqslant 2y\left(4k!\left(\frac{1}{q}+\frac{1}{y}+\frac{q\ln q}{y^k}\right)\max_{h<y^{k-1}}\tau(h)\right)^{\frac{1}{2^{k-1}}},$$
которая нетривиальна при $q\gg 2^{2k-1}4k!\tau(y^{k-1})$, то есть в $\mathfrak{m}\left(y^{\varepsilon}\right)$. Доклад посвящен выводу новой оценке суммы $T_k(\alpha; x, y)$, являющиеся нетривиальной при $\mathfrak{m}\left(\ln y\right)^A$, A — абсолютная положительная постоянная.

Теорема 1. *Пусть $x\geqslant x_0>0$, $y_0<y\leqslant 0,01x$, α — вещественное число, $\left|\alpha-\frac{a}{q}\right|\leqslant\frac{1}{q^2}$, $(a,q)=1$, тогда справедлива оценка*
$$|T_k(\alpha; x, y)|\leqslant 2y\left(2^{2k}6kk!\left(\frac{1}{q}+\frac{1}{y}+\frac{q\ln q}{y^k}\right)\ln y\right)^{2^{-k}}.$$

Пусть Δ_j означает j — применение разностного оператора, так что для многочлена $f(u)$ степени n
$$\Delta_1(f(u);t)=f(u+t)-f(u),$$
$$\Delta_{j+1}(f(u);t_1,\ldots,t_{j+1})=\Delta_1(\Delta_j(f(u);t_1,\ldots,t_j);t_{j+1}).$$
Тогда нетрудно убедиться, что
$$\Delta_j(u^k;t_1,\ldots,t_j)=t_1\ldots t_jp_j(u;t_1,\ldots,t_j),$$
где p_j — многочлен от u степени $k-j$ со старшим коэффициентом $k!/(k-j)!$.

Следствие 1. *Пусть*

$$T(f(u);x,y)=\sum_{x-y<u\leqslant x}e(f(u)),$$

где $f(u)$ – произвольный многочлен степени n. Тогда при $j=1,\ldots,n-1$ имеет место

$$|T(f(u);x,y)|^{2^j}\leq(2y)^{2^j-j-1}\sum_{|h_1|<y}\ldots\sum_{|h_j|<y}T_j,\qquad T_j=\left|\sum_{u\in I_j}e(\Delta_j(f(u);h_1,\ldots,h_j))\right|,$$

где интервалы $I_j=I_j(x,y;h_1,\ldots,h_j)$ удовлетворяют соотношениям:

$$I_1=I_1(x,y;h_1)=(x-y,x]\cap(x-y-h_1,x-h_1],$$
$$I_j=I_j(x,y;h_1,\ldots,h_j)=I_{j-1}(x,y;h_1,\ldots,h_{j-1})\cap I_{j-1}(x-h_j,y;h_1,\ldots,h_{j-1}),$$

то есть интервал $I_{j-1}(x-h_j,y;h_1,\ldots,h_{j-1})$ получается из $I_{j-1}=I_{j-1}(x,y;h_1,\ldots,h_{j-1})$ сдвигом на $-h_j$ всех интервалов, пересечением которых он является.

По следствие 1 при $j=k-1$ имеем

$$|T_k(\alpha;x,y)|^{2^{k-1}}\leq(2y)^{2^{k-1}-k}\sum_{|h_1|<y}\ldots\sum_{|h_{k-1}|<y}\left|\sum_{u\in I_{k-1}}e(\Delta_{k-1}(\alpha u^k;h_1,\ldots,h_{k-1}))\right|,$$
$$\Delta_{k-1}(\alpha u^k;h_1,\ldots,h_{k-1})=\alpha k!h_1h_2\ldots h_{k-1}\left(u+\frac{1}{2}h_1+\frac{1}{2}h_2\ldots+\frac{1}{2}h_{k-1}\right),$$

где интервал $I_{k-1}=I_{k-1}(x,y;h_1,\ldots,h_{k-1})$ удовлетворяет соотношениям

$$I_1=I_1(x,y;h_1)=(x-y,x]\cap(x-y-h_1,x-h_1],$$
$$I_{k-1}(x,y;h_1,\ldots,h_{k-1})=I_{k-2}(x,y;h_1,\ldots,h_{k-2})\cap I_{k-2}(x-h_j,y;h_1,\ldots,h_{k-2}).$$

Таким образом,

$$|T_k(\alpha;x,y)|^{2^{k-1}}\leq(2y)^{2^{k-1}-k}\sum_{|h_1|<y}\ldots\sum_{|h_{k-1}|<y}\left|\sum_{u\in I_{k-1}}e(\alpha k!h_1h_2\ldots h_{k-1}u)\right|.$$

В последней сумме члены с $h_1\cdots h_{k-1}=0$ дают вклад не более $(k-1)y(2y)^{k-2}$. Поэтому

$$|T_k(\alpha;x,y)|^{2^{k-1}}\leqslant(2y)^{2^{k-1}-k}\left(2^{k-1}S_k(\alpha;x,y)+(k-1)y(2y)^{k-2}\right),\tag{1}$$

$$S_k(\alpha;x,y)=\sum_{h=1}^{y^{k-1}}\tau'(h)\left|\sum_{u\in I_{k-1}}e(\alpha k!hu)\right|,\quad \tau'(h)=\sum_{\substack{h=h_1\ldots h_{k-1}\\ 1\leqslant h_1,\ldots,h_{k-1}<y,}}1\leqslant\tau(h).$$

Применим к внутренней сумме в $S_k(\alpha;x,y)$ лемму 4 из [4] стр. 94, имея в виду, что она является линейной, сплошной, длина которой не превосходит y:

$$S_k(\alpha;x,y)\leqslant\sum_{h=1}^{y^{k-1}}\tau(h)\min\left(y,\frac{1}{2\|\alpha k!h\|}\right).$$

Далее воспользуемся неравенством Коши. Имеем

$$S_k^2(\alpha; x, y) \leqslant \sum_{h=1}^{y^{k-1}} \tau^2(h) \sum_{h=1}^{y^{k-1}} \min\left(y, \frac{1}{2\|\alpha k! h\|}\right)^2 \leqslant k y^k \ln y \sum_{h=1}^{k! y^{k-1}} \min\left(y, \frac{1}{\|\alpha h\|}\right).$$

Далее, воспользовавшись леммой 5 из [4], стр. 94, найдем

$$S_k^2(\alpha; x, y) \leqslant 6 k y^k \ln y \left(\frac{k! y^{k-1}}{q} + 1\right)(y + q \ln q) \leqslant 6 k k! y^{2k} \ln y \left(\frac{1}{q} + \frac{1}{y} + \frac{1}{y^{k-1}} + \frac{q \ln q}{y^k}\right).$$

Подставляя эту оценку в (1), получим

$$|T_k(\alpha; x, y)|^{2^k} \leqslant 2^{2k}(2y)^{2^k}\left(3kk! \ln y \left(\frac{1}{q} + \frac{1}{y} + \frac{1}{y^{k-1}} + \frac{q \ln q}{y^k}\right) + \frac{(k-1)^2}{8y^2}\right) \leqslant$$
$$\leqslant (2y)^{2^k} 2^{2k} 6kk! \left(\frac{1}{q} + \frac{1}{y} + \frac{q \ln q}{y^k}\right) \ln y.$$

Извлекая корень степени 2^{k-1}, получим утверждение теоремы.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Рахмонов З.Х., Назрублоев Н.Н., РахимовА.О. Короткие суммы Г.Вейля и их приложения //Чебышевский сборник. 2015. Т. 16. В. 1(53). С. 232-247.

2. Рахмонов З.Х. Оценка коротких тригонометрических сумм с простыми числами в длинных дугах // Чебышевский сборник. 2021. Т. 22. № 5(81). С. 176-200.

3. Рахмонов З. Х., Азамов А.З., Нарзублоев Н.Н. Оценка коротких тригонометрических сумм Г.Вейля в малых дугах // ДАН Республики Таджикистан. 2018. Т. 61. № 7-8. С. 609–614.

4. Карацуба А.А. Основы аналитической теории чисел // 2-ое изд. - М.:Наука. 1983.

УДК 517.589

Об интегральном представлении некоторых специальных функций

Т. А. Сафонова (Россия, г. Архангельск)
Северный (Арктический) федеральный университет им. М. В. Ломоносова
e-mail: t.Safonova@narfu.ru

On the integral representation of some special functions

T. A. Safonova (Russia, Arkhangelsk)
Northern (Arctic) Federal University named after M. V. Lomonosov
e-mail: t.Safonova@narfu.ru

I. Символом $\psi(a)$ обозначим дигамма-функцию — логарифмическую производную Г-функции Эйлера, — а символом $G(a)$ - связанную с ней функцию, определяемую равенством

$$G(a)=\frac{1}{2}\left(\psi\left(\frac{1+a}{2}\right)-\psi\left(\frac{a}{2}\right)\right).$$

Для них справедливы формулы

$$\psi(a)=-\gamma+\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+a}\right), \qquad G(a)=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k+a},$$

где γ — постоянная Эйлера (см., напр., [1, приложения II.2 и II.3]).

В работах [2] - [5] нами предложен метод, позволяющий средствами спектральной теории обыкновенных дифференциальных операторов получить интегральное представление сумм некоторых степенных рядов и специальных функций, в т.ч. для функций $\psi(a)$ и $G(a)$. Приведём формулировку соответствующей теоремы для них, справедливость которой установлена этим методом в работе [5].

Теорема 1. *При $0<a<1$ справедливы равенства*

$$\psi(a)=-\gamma-2\ln 2-\frac{\pi}{2}\operatorname{ctg}(a\pi)+\frac{1}{\sin(a\pi)}\int\limits_0^{\pi/2}\frac{\sin(a\pi)-\cos(2a-1)x}{\cos x}dx= \tag{1}$$

$$=-\gamma-\ln 2-\frac{1}{2a}-\frac{\pi}{2}\operatorname{ctg}(a\pi)+\frac{1}{\sin(a\pi)}\int\limits_0^{\pi/2}(\sin(a\pi)-\sin(2ax))\operatorname{tg}x dx, \tag{2}$$

$$G(a)=\frac{\pi}{2\sin(a\pi)}-\frac{1}{\sin(a\pi)}\int\limits_0^{\pi/2}\frac{\sin(2a-1)x}{\sin x}dx= \tag{3}$$

$$=\frac{\pi}{2\sin(a\pi)}+\frac{1}{2a}-\frac{1}{a\sin(a\pi)}\int\limits_0^{\pi/2}\left(\frac{\sin(ax)}{\sin x}\right)^2dx. \tag{4}$$

Отметим, что формула (3) приведена в [6, глава XII, п.8, стр.392], формула (4) - в [1, глава 2, п.2.5.12, формула 27], а равенства (1) и (2), по-видимому, впервые появились в [5].

II. Следуя [7, гл.23], символами $\zeta(s)$, $\beta(s)$, $\lambda(s)$ и $\eta(s)$ обозначим дзета-функцию Римана и родственные с ней функции, определяемые равенствами

$$\zeta(s)=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^s}, \qquad \beta(s)=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)^s}, \qquad \lambda(s)=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{(2k-1)^s}, \qquad \eta(s)=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k^s}.$$

Из теоремы 1 следует, что для определённых линейных комбинаций чисел $\zeta(2n)$, $\zeta(2n+1)$, $\beta(2n)$, $\beta(2n+1)$, $\lambda(2n)$, $\lambda(2n+1)$, $\eta(2n)$ и $\eta(2n+1)$ выполняются некоторые тождества. Найденные равенства сформулируем в виде следующих следствий из теоремы 1.

Следствие 1. *При $m=1,2,\dots$ справедливы равенства*

$$\sum_{n=0}^{m}\frac{(-1)^n}{(2m-2n)!}\left(\frac{2}{\pi}\right)^{2n}\beta(2n+1)=0,$$

$$\sum_{n=1}^{m}\frac{(-1)^{n-1}}{(2m-2n)!}\left(\frac{2}{\pi}\right)^{2n}\lambda(2n)=\frac{1}{2(2m-1)!},$$

$$\sum_{n=1}^{m}\frac{(-1)^{n-1}}{\pi^{2n}(2m-2n+1)!}\eta(2n)=\frac{1}{2(2m+1)!},$$

$$\sum_{n=1}^{m}\frac{(-1)^{n-1}}{\pi^{2n}(2m-2n+1)!}\zeta(2n)=\frac{m}{(2m+1)!},$$

$$\sum_{n=0}^{m-1}\frac{(-1)^{m-n}}{(2m-2n-1)!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2(m-n)-1}\beta(2n+1)+\lambda(2m)=0,$$

$$\sum_{n=1}^{m}\frac{(-1)^{m-n}}{(2m-2n+1)!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2(m-n)+1}\lambda(2n)-\beta(2m+1)=\frac{(-1)^{m-1}}{2(2m)!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2m+1},$$

$$\sum_{n=1}^{m}\frac{(-1)^{m-n}\pi^{2(m-n)}}{(2m-2n)!}\eta(2n)+\zeta(2m)=\frac{(-1)^{m-1}\pi^{2m}}{2(2m)!}.$$

Отметим, что некоторые из этих формул были известны ранее и приведены, например, в [8] как частные случаи более общих результатов.

Следствие 2. *При $m=1,2,\ldots$ справедливы равенства*

$$\sum_{n=1}^{m}\frac{(-1)^{n-1}}{(2m-2n)!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2(m-n)}\beta(2n)=\frac{1}{2(2m-1)!}\int_0^{\pi/2}\frac{x^{2m-1}}{\sin x}dx,$$

$$\sum_{n=1}^{m}\frac{(-1)^{n-1}}{(2m-2n)!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2(m-n)}\lambda(2n+1)=\frac{1}{2(2m)!}\int_0^{\pi/2}\frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2m}-\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^{2m}}{\sin x}dx,$$

$$\sum_{n=1}^{m}\frac{(-1)^{n-1}\pi^{2(m-n)+1}}{(2m-2n+1)!}\eta(2n-1)=\frac{2^{2m-1}}{(2m)!}\int_0^{\pi/2}\frac{x^{2m}}{\sin^2 x}dx,$$

$$\sum_{n=1}^{m}\frac{(-1)^{n-1}\pi^{2(m-n)}}{(2m-2n+1)!}\zeta(2n+1)=-\frac{\pi^{2m+1}}{(2m+1)!}\ln 2+$$

$$+\frac{2^{2m+1}}{(2m+2)!}\int_0^{\pi/2}\frac{(2m+2)\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2m+1}x+\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^{2m+2}-\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2m+2}}{\sin^2 x}dx,$$

$$\sum_{n=1}^{m}\frac{(-1)^{m-n}}{(2m-2n+1)!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2(m-n)+1}\beta(2n)+\lambda(2m+1)=\frac{(-1)^{m}}{2(2m)!}\int_0^{\pi/2}\frac{x^{2m}}{\sin x}dx,$$

$$\sum_{n=1}^{m}\frac{(-1)^{m-n}}{(2m-2n+1)!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2(m-n)+1}\lambda(2n+1)-\beta(2m+2)=\frac{(-1)^{m-1}}{2(2m+1)!}\int_0^{\pi/2}\frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2m+1}-\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^{2m+1}}{\sin x}dx,$$

$$\sum_{n=0}^{m}\frac{(-1)^{m-n}\pi^{2(m-n)}}{(2m-2n)!}\eta(2n+1)+\zeta(2m+1)=\frac{(-1)^{m}2^{2m}}{(2m+1)!}\int_0^{\pi/2}\frac{x^{2m+1}}{\sin^2 x}dx.$$

Некоторые интегральные представления из следствия 2 неоднократно встречались в математической литературе и использовались, например, для представления комбинаций, стоящих в их левых частях, в виде быстро сходящихся рядов, содержащих $\zeta(2n)$ (см., напр., [9] и [10]).

В заключительной части настоящего доклада тождества из следствия 2 будут использованы для получения новых предельных соотношений для комбинаций, стоящих в их левых частях. Они напоминают формулы, полученные впервые в работе [11] (см. также работу [12]), но существенно отличаются от них.

III. Пусть a является правильной положительной рациональной дробью, т.е. $a = p/q$, где $p,\, q \in \mathcal{N}$ и $0 < p < q$. В работе [5] установлено, что в этом случае справедливо равенство

$$\int\limits_0^{\pi/2} \frac{\sin(ax)}{\sin x}\, dx = 2\cos\frac{p\pi}{2q}\sum_{k=1}^{q}(-1)^k \sin(2k-1)\frac{p\pi}{2q}\ln\sin(2k-1)\frac{\pi}{4q},$$

из которого можно извлечь, что при любом $m \in \mathcal{N}$

$$\int\limits_0^{\pi/2} \frac{(\sin(ax))^{2m-1}}{\sin x} dx = \sum_{k=1}^{q-1}(-1)^k \sin^{2m-1}\frac{kp\pi}{q}\ln\frac{\sin(2k-1)\frac{\pi}{4q}}{\sin(2k+1)\frac{\pi}{4q}}. \tag{5}$$

С другой стороны, первое равенство в следствии 2, очевидно, можно записать в виде

$$\sum_{n=1}^{m}\frac{(-1)^{n-1}}{(2m-2n)!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2(m-n)}\beta(2n) = \frac{1}{2(2m-1)!}\lim_{a\to 0}\frac{1}{a^{2m-1}}\int\limits_0^{\pi/2}\frac{(\sin(ax))^{2m-1}}{\sin x}dx.$$

Положив далее в равенстве (5) $a = a_n = p_n/q_n$, где a_n - последовательность положительных рациональных чисел, стремящаяся к 0 при $n \to +\infty$, первое из равенств следствия 2 можно записать в виде

$$\sum_{n=1}^{m}\frac{(-1)^{n-1}}{(2m-2n)!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2(m-n)}\beta(2n) =$$

$$= \frac{1}{2(2m-1)!}\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{q_n}{p_n}\right)^{2m-1}\sum_{k=1}^{q_n-1}(-1)^k\sin^{2m-1}\frac{kp_n\pi}{q_n}\ln\frac{\sin(2k-1)\frac{\pi}{4q_n}}{\sin(2k+1)\frac{\pi}{4q_n}}.$$

В частности, если положить $a_n = 1/(2n)$, то получаем, что

$$\sum_{n=1}^{m}\frac{(-1)^{n-1}}{(2m-2n)!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2(m-n)}\beta(2n) = \frac{1}{2(2m-1)!}\lim_{n\to+\infty}(2n)^{2m-1}\sum_{k=1}^{2n-1}(-1)^k\sin^{2m-1}\frac{k\pi}{2n}\ln\frac{\sin(2k-1)\frac{\pi}{8n}}{\sin(2k+1)\frac{\pi}{8n}}.$$

Аналогичные рассуждения позволяют получить предельные соотношения и для других линейных комбинаций из следствия 2, например, для комбинаций

$$\sum_{n=1}^{m}\frac{(-1)^{m-n}}{(2m-2n+1)!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2(m-n)+1}\beta(2n)+\lambda(2m+1), \quad \sum_{n=0}^{m}\frac{(-1)^{m-n}\pi^{2(m-n)}}{(2m-2n)!}\eta(2n+1)+\zeta(2m+1).$$

Эти формулы при $m = 1$ совпадают с полученными нами ранее в [5] предельными соотношениями для $\beta(2)$, $\lambda(3)$, $\ln 2$, $\eta(3)$ и $\zeta(3)$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И. Интегралы и ряды. В 3 т. Т.1. Элементарные функции. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002.
2. Мирзоев К. А., Сафонова Т. А. Функция Грина обыкновенных дифференциальных операторов и интегральное представление сумм некоторых степенных рядов // ДАН. 2018. Том 3, № 1. С. 329-354.
3. Мирзоев К. А., Сафонова Т. А. Обыкновенные дифференциальные операторы и интегральное представление сумм некоторых степенных рядов // Труды ММО. 2019. Том 80, № 2. С. 157-177.
4. Мирзоев К. А., Сафонова Т. А. Интегральное представление сумм некоторых рядов, связанных со специальными функциями // Математические заметки. 2020. Том 108, № 4. С. 632-637.
5. Мирзоев К. А., Сафонова Т. А. Вокруг теоремы Гаусса о значениях дигамма-функции Эйлера в рациональных точках // Алгебра и анализ. 2023. Том 35, № 2. С. 86-106.
6. Bromwich T. J. I'A. An introduction to the theory of infinite series. 2nd Ed. MacMillan and LTD, 1926.
7. Abramowitz M., Stegun I. A. Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables. — New York:Dover Publ., 1972.
8. Merca M. On families of linear recurrence relations for the special values of the Riemann zeta function // Journal of Number Theory. 2017. Vol. 170. PP. 55-65.
9. Srivastava H. M. The Zeta and Related Functions: Recent Developments // Journal of Advanced Engineering and Computation. 2019. Vol. 3, № 1. PP. 329-354.
10. Мирзоев К. А., Сафонова Т. А. Представления $\zeta(2n+1)$ и связанных с ними чисел в виде определённых интегралов и быстро сходящихся рядов // Доклады РАН. МАТЕМАТИКА, ИНФОРМАТИКА, ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ. 2020. Том 494. С. 48-52.
11. Apostol T. M., Another elementary proof of Euler's formula for $\zeta(2n)$ // Amer. Math. Monthly. 1973. Vol. 80. PP. 425-431.
12. Cvijovic D., Srivastava H. M. Limit representations of Riemann's zeta Function // Amer. Math. Monthly. 2012. Vol. 119, № 4. PP. 324-330.

УДК 511.6

Функциональные непрерывные дроби и унимодулярные преобразования[1]

Г. В. Федоров (Россия, г. Сочи)
Университет «Сириус», Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, НИИСИ РАН
e-mail: fedorov.gv@talantiuspeh.ru

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 22-71-00101).

Functional continued fractions and unimodular transformations

G. V. Fedorov (Sochi, Russia)
Sirius Univercity, Lomonosov Moscow State University, SRISA RAS
e-mail: fedorov.gv@mech.math.msu.su

Пусть K — поле характеристики, отличной от 2. Еще в работах Абеля и Чебышева было подмечено, что непрерывные дроби могут быть построены в функциональном случае, когда вместо кольца целых чисел рассматривается кольцо многочленов $K[x]$, а вместо целой части действительного числа рассматривается целая часть разложения функции в формальный степенной ряд из $K((1/x))$, где

$$K((1/x)) = \left\{ \sum_{j=s}^{\infty} b_j \left(\frac{1}{x}\right)^j \mid b_j \in K,\ b_s \neq 0,\ s \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Пусть $\mathcal{L}$ — гиперэллиптическое поле — поле функций гиперэллиптической кривой C. По аналогии с числовым случаем для многочленов $A, B, C, D \in K[x]$ и элемента $\beta \in \mathcal{L}$ будем использовать обозначение

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \beta \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{A\beta + B}{C\beta + D}. \tag{1}$$

Множество

$$\Gamma = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} A & B \\ C & D \end{smallmatrix}\right) \mid A, B, C, D \in K[x],\ AD - BC \in K^* \right\}$$

образует группу, которая действует на поле $\mathcal{L}$ по правилу (1). Группу Γ будем называть *группой унимодулярных преобразований* на поле $\mathcal{L}$. Если $M = \left(\begin{smallmatrix} A & B \\ C & D \end{smallmatrix}\right) \in \Gamma$ и $\beta \in \mathcal{L}$, то вместо (1) будем использовать краткое обозначение $M[\beta]$. Легко проверить, что группа Γ действует (слева) транзитивно на $\mathcal{L}$, а также, что это действие сохраняет дискриминант квадратичных иррациональностей с точностью до постоянного множителя, являющегося квадратом в мультипликативной группе K^* поля K. Будем говорить, что $M \in \Gamma$ *тривиально*, если все элементы матрицы M лежат в поле K.

Предположим, что бесконечное нормирование v_∞ поля $K(x)$ продолжается двумя способами v_∞^-, v_∞^+ на поле $\mathcal{L}$. Это равносильно условию, что поле $\mathcal{L}$ вкладывается в $K((1/x))$ двумя способами. Для $\beta \in \mathcal{L}$ можно единственным образом найти $a \in K[x]$ такое, что $v_\infty^-(\beta - a) > 0$. Введем обозначения

$$[\beta]_\infty^- = a, \quad M(a) = \left(\begin{smallmatrix} a & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) \in \Gamma.$$

Положим $\beta_0 = \alpha$, $a_0 = [\beta_0]_\infty^-$, $M_0 = M(a_0)$. Для каждого $j \in \mathbb{N}$ положим

$$\beta_j = M(a_{j-1})^{-1}[\beta_{j-1}], \quad a_j = [\beta_j]_\infty^-,$$

до тех пор, пока $a_j \neq \beta_j$. В результате получится разложение α в функциональную непрерывную дробь (конечную или бесконечную), построенную в множестве формальных степенных рядов $K((1/x))$ с помощью нормирования v_∞^-: $\beta = [a_0; a_1, a_2, \ldots]$. Элементы a_j называются *неполными частными*, β_j — *полными частными* непрерывной дроби.

В ходе доклада будет доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть $M \in \Gamma$. Существует и единственное представление вида*

$$M = M(a_0) \cdot M(a_1) \cdot \ldots \cdot M(a_n) \cdot \left(\begin{smallmatrix} c & 0 \\ 0 & b \end{smallmatrix}\right), \tag{2}$$

где $a_0, a_n \in K[x]$, $a_j \in K[x] \setminus K$, $1 \leqslant j \leqslant n-1$, $b, c \in K$, $bc = (-1)^{n+1} \det M$.

Преобразование $M = \left(\begin{smallmatrix} A & B \\ C & D \end{smallmatrix}\right) \in \Gamma$ назовем *приведенным*, если $\deg A > \deg B$ и $\deg A > \deg C$. Из теоремы 1 следует, что, если преобразование M нетривиальное и приведенное, то для представления (2) имеем $\deg a_j > 0$, $0 \leqslant j \leqslant n$. Также из теоремы 1 следует, что для $M = M_n = \left(\begin{smallmatrix} p_n & p_{n-1} \\ q_n & q_{n-1} \end{smallmatrix}\right)$ — "подходящего преобразования" к некоторому $\beta \in \mathcal{L}$ в представлении (2) многочлены a_j являются соответствующими неполными частными непрерывной дроби β, а кроме того, $b = c = 1$ и $\deg a_n > 0$. Тем самым теорема 1 дает альтернативный поход к построению и исследованию функциональных непрерывных дробей.

В ходе доклада мы обсудим применения теоремы 1 для доказательства эквивалентных условий периодичности и квазипериодичности непрерывных дробей для элементов поля $\mathcal{L}$ (см. [1]). В данном контексте будут найдены точные оценки на длину периода и квазипериода (см. [2]). Будет рассмотрена задача о подъеме дивизора кручения в якобиане J гиперэллиптической кривой C до дивизора кручения в обобщенном якобиане J_m для модулей m ограниченной степени (см. [3], [4]).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Schmidt W. M. On continued fractions and diophantine approximation in power series fields // Acta arithmetica. 2000. Vol. 95, № 2. P. 139-166.

2. Федоров Г. В., Об оценках длин периодов функциональных непрерывных дробей над алгебраическими числовыми полями // Чебышевский сборник. 2023.

3. Zannier U. Hyperelliptic continued fractions and generalized Jacobians // American Journal of Mathematics. 2019. Vol. 141, № 1. P. 1-40.

4. Fedorov G. V., On the period length of a functional continued fraction over a number field // Doklady Mathematics. 2020. Vol. 102. P. 513-517.

УДК 511.32

О четвертом моменте L-функций модулярных параболических форм большого веса

Д. А. Фроленков (Россия, Москва)
Математический институт им. В. А. Стеклова РАН
e-mail: frolenkov@mi-ras.ru

The fourth moment of automorphic L-functions in the weight aspect

D. A. Frolenkov (Russia, Moscow)
Steklov Mathematical Institute of RAS
e-mail: frolenkov@mi-ras.ru

Обязательным элементом тезисов является название, фамилии авторов и аффилиация на русском и английском языках.

Пусть $f(z)$ – модулярная параболическая форма большого веса $2k$. Из условия модулярности следует, что $f(z)$ обладает разложением в ряд Фурье. Используя коэффициенты Фурье формы $f(z)$ можно построить ассоциированную с ней L-функцию модулярной формы. Назовем m-м моментом L-функций модулярных форм среднее значение их m-ых степеней при усреднении, например, по базису пространства всех модулярных параболических форм. Изучение асимптотического поведения моментов является одним из основных способов получения информации о свойствах L-функций модулярных форм. В докладе речь пойдет о поведении четвертого момента и о получающихся из него следствиях.

УДК 511.331

Об оценке количества нулей функции Дэвенпорта — Хейльбронна, лежащих на критической прямой

Ш. А. Хайруллоев (Таджикистан, г. Душанбе)
Таджикский национальный университет
e-mail: shamsullo@rambler.ru

On estimating the number of Zeros of the Davenport–Heilbronn function lying on the critical line

Sh. A. Khayrulloev (Tajikistan, Dushanbe)
Tajik National University
e-mail: shamsullo@rambler.ru

Пусть $\chi(n)$ комплексный характер по модулю 5 такой, что $\chi(2) = i$,

$$æ = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}-2}{\sqrt{5}-1}, \qquad 0 < æ < 1.$$

Функцией Дэвенпорта-Хейльбронна называется функция, которая определяется равенством

$$f(s) = \frac{1-iæ}{2}L(s,\chi) + \frac{1+iæ}{2}L(s,\bar{\chi}),$$

где $L(s,\chi)$ — функция Дирихле. Функцию $f(s)$ ввели и исследовали Дэвенпорт и Хейльбронн [1]. Они показали, что $f(s)$ удовлетворяет функциональному уравнению римановского типа

$$\left(\frac{\pi}{5}\right)^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right) f(s) = \left(\frac{\pi}{5}\right)^{-\frac{1-s}{2}} \Gamma\left(\frac{(1-s)+1}{2}\right) f(1-s),$$

однако для $f(s)$ гипотеза Римана, (все комплексные нули $f(s)$ лежат на прямой $Re\, s = 0.5$), не выполняется и, более того, число нулей $f(s)$ в области $Re\, s > 1$, $0 < Im\, s \le T$ превосходит cT, $c > 0$ — абсолютная постоянная.

В 1980 г. С.М. Воронин [2] доказал, что *критическая прямая* то есть $Res = \frac{1}{2}$ является исключительным множеством для нулей $f(s)$, то есть для $N_0(T)$ — числа нулей $f(s)$ на отрезке $Res = 1/2$, $0 < Ims \leqslant T$ имеет место оценка

$$N_0(T) > cT \exp\left(\frac{1}{20}\sqrt{\ln\ln\ln\ln T}\right),$$

где $c > 0$ — абсолютная постоянная, $T \geqslant T_0 > 0$.

Количество нулей функции Дэвенпорта-Хейльбронна $f(s)$ в коротких промежутках критической прямой впервые исследовал А.А. Карацуба. Он в 1989 году доказал, что при ε и

ε_1 – произвольно малых фиксированных положительных числах, не превосходящих 0.001, и $T \geq T_0(\varepsilon, \varepsilon_1) > 0$ и $H = T^{\frac{27}{82}+\varepsilon_1}$, выполняется соотношение

$$N_0(T+H) - N_0(T) \geqslant H(\ln T)^{\frac{1}{2}-\varepsilon}. \quad (1)$$

В 1993 г. А.А. Карацуба [3], воспользовавшись новым усовершенствованным методом, при котором возникают почти такие же тригонометрические суммы, как при выводе оценки (1), при $H = T^{\frac{27}{82}+\varepsilon_1}$, $0 < \varepsilon_1 < 0,01$, ε_1 — фиксированное число, получил более точную оценку вида

$$N_0(T+H) - N_0(T) \geqslant H(\ln T)^{\frac{1}{2}} \exp(-c_3\sqrt{\ln\ln T}). \quad (2)$$

Автору удалось доказать оценку (2) для коротких промежутках критической прямой, имеющих более короткую длину.

Теорема 1. *Пусть ε — произвольное малое фиксированное положительное число, не превосходящее 0.01, тогда при $H = T^{\frac{1515}{4816}+\varepsilon}$, $T \geqslant T_0(\varepsilon) > 0$ выполняется соотношение*

$$N_0(T+H) - N_0(T) \geqslant H\sqrt{\ln T} \exp(-c_4\sqrt{\ln\ln T}),$$

где $c_4 > 0$ – абсолютная постоянная.

Основным утверждением, позволяющим доказать эту теорему, является новая оценка специальных тригонометрических сумм $W = W(T)$ равномерных по параметру в терминах экспоненциальных пар [4, 5, 6].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Davenport H. On the zeros of certain Dirichlet series // J. Lond. Math. Soc. 1936. Vol. 11. PP. 181–185 and 307–312.

2. Воронин С. М. О нулях некоторых рядов Дирихле, лежащих на критической прямой // Известия АН СССР. Серия математическая. 1980. Т. 44. № 1. С. 63–91.

3. Карацуба А. А. Новый подход к проблеме нулей некоторых рядов Дирихле // Труды МИАН. 1994. Т. 207. С. 180–196.

4. Рахмонов З. Х, Хайруллоев Ш. А., Аминов А. С. Нули функции Дэвенпорта-Хейльбронна в коротких промежутках критической прямой // Чебышевский сборник. 2019. Т. 20. Вып. 4(72). С. 271–293.

5. Хайруллоев Ш. А. О равномерных по параметрам оценках специальных тригонометрических сумм // XXI Международная конференция «Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы, приложения и проблемы истории», посвященная 85-летию столетию со дня рождения А.А. Карацубы.: тезисы докладов международной конференции (Тула, 17-21 мая 2022 г.) — Тула, 2022. С. 211-213.

6. Хайруллоев Ш. А. О нулях арифметических рядов Дирихле, не имеющих Эйлерова произведения // Известия Академии наук Республики Таджикистан. Отделение физико-математических, химических, геологических и технических наук. 2018. № 4(173). С. 7–25.

УДК 511.325

Короткая двойная сумма значений характеров Дирихле от сдвинутых произведений двух чисел

Д. Дж. Хокиев (Таджикистан, г. Душанбе)
Таджикский национальный университет
e-mail: khdj.91@mail.ru

Short double sum of Dirichlet character values from shifted products of two numbers

D. Dj. Khokiev (Tajikistan, Dushanbe)
Tajik National University
e-mail: khdj.91@mail.ru

При изучении закона распределения значений производного характеров χ по составному модулю D на последовательностях сдвинутых простых чисел вида $p-l$, $(l,D)=1$, наряду с задачей получения нетривиальной оценки *сумм значений примитивного характера Дирихле в последовательности сдвинутых чисел, лежащих в арифметических прогрессиях*, возникает также задача о нетривиальной оценке двойных сумм $W=W_q(x,M,N,l,\nu)$вида

$$W_q(x,M,N,l,\nu)=\sum_{\substack{M<m\leqslant 2M\\(m,q)=1}}a_m\sum_{\substack{U<n\leqslant\min(xm^{-1},2N)\\(n,q)=1,\,mn\equiv l(\mathrm{mod}\ \nu)}}b_n\chi_q(mn-l),\qquad(\nu l,q)=1,$$

где a_m и b_n функции натурального аргумента такие, что $|a_m|\leqslant\tau^c(m)$ и

$|b_n|\leqslant\tau^c(n)$, c – положительное фиксированное число, не все время одно и то же, χ_q – примитивный характер по модулю q. Сумма $W_q(x,M,N,l,\nu)$ называется *двойной суммой значений примитивного характера Дирихле от сдвинутых произведений двух чисел, лежащих в арифметических прогрессиях.*

В сумме $W_q(x,M,N,l,\nu)$, не ограничивая общности, можно считать, что $N\leqslant M$. Отметим, что если в рассматриваемой задаче (*закон распределения значений производных характеров χ по составному модулю D на последовательностях сдвинутых простых чисел вида $p-l$, $(l,D)=1$*) характер χ является примитивным, то есть если $\chi=\chi_q$, то вместо суммы $W_q(x,M,N,l,\nu)$ возникает более простая сумма $W_q(x,M,N,l,1)=W_q(x,M,N,l)$ вида

$$W_q(x,M,N,l)=\sum_{\substack{M<m\leqslant 2M\\(m,q)=1}}a_m\sum_{\substack{U<n\leqslant\min(xm^{-1},2N)\\(n,q)=1}}b_n\chi_q(mn-l),\qquad(l,q)=1,$$

И.М. Виноградов, впервые изучая сумму $W_q(x,M,N,l)$ для простого q получил её нетривиальную оценку при $x\geqslant q^{1+\varepsilon}$, а затем нетривиальную оценку короткой суммы $W_q(x,M,N,l)$ при $x\geqslant q^{0{,}75+\varepsilon}$ [1]. Наилучшая нетривиальная оценка $W_q(x,M,N,l)$ для простого q при $x\geqslant q^{0{,}5+\varepsilon}$ найдена в работе А.А. Карацубы [2].

З.Х.Рахмонов [3,4] изучил сумму $W_q(x,M,N,l,\nu)$ для составного q и получил нетривиальную оценку при $x\geqslant q^{1+\varepsilon}$. Нетривиальную оценку короткой суммы $W_q(x,M,N,l)$ для составного q при $x\geqslant q^{\frac{8}{9}+\varepsilon}$ в 2010 году получили Дж.Б.Фридландер, К.Гонг, И.Е.Шпарлинский [5]. В 2017 г. он [6] для модулей q — число свободное от кубов получил нетривиальную оценку суммы $W_q(x,M,N,l,\nu)$ при $y\geqslant q^{\frac{1}{2}+\varepsilon}$. З.Х.Рахмонов и Хокиев Д.Дж. [7,-11] для составного q доказал нетривиальную оценку $W_q(x,M,N,l)$ при $x\geqslant q^{\frac{5}{6}+\varepsilon}$, Теорема. *Пусть M, N, U — целые числа, $N \leqslant U < 2N \leqslant q^{\frac{1}{6}}$,*

$$W_q(x,M,N,l,\nu) = \sum_{\substack{M<m\leqslant 2M\\(m,q)=1}} a_m \sum_{\substack{U<n\leqslant \min(xm^{-1},2N)\\(n,q)=1,\,mn\equiv l \pmod \nu}} b_n\chi_q(mn-l), \qquad (\nu l,q)=1,$$

a_m и b_n функции натурального аргумента такие, что

$$\sum_{M<m\leqslant 2M} |a_m|^{\alpha} \ll M \ln c^{c_\alpha}, \quad \alpha=1,2; \qquad |b_n| \ll B.$$

Тогда справедлива оценка

$$|W_q(x,M,N,l,\nu)| \ll BM^{\frac{5}{6}}N^{\frac{1}{2}}q^{\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\delta}\ln c^{\frac{4c_1+c_2+1}{6}}.$$

Схема доказательства. Не ограничивая общности, будем считать, что выполняется условие $MN < x$. Сумму $W_q(x,M,N,l,\nu)$ преобразуем в другую так, чтобы интервал суммирования внутренней суммы не зависел от m. Поступая аналогично, как при доказательстве леммы 4.1 в работе [7], имеем неравенство

$$|W_q(x,M,N,l,\nu)| \ll \ln c \max_{0\leqslant j<\nu}\max_{0\leqslant k<q} W(j,k), \tag{1}$$

$$W(j,k) = \sum_{\substack{M<m\leqslant 2M\\(m,q)=1}} |a_m||B(k\nu+jq,m)|,$$

$$B(k\nu+jq,m) = \sum_{\substack{N<n\leqslant 2N\\(n,q)=1}} b_n\chi_q(mn-l)e\left(\frac{(k\nu+jq)n}{q\nu}\right).$$

Оценим $W(j,k)$. Возведем обе части этого равенства в куб и воспользуемся неравенством Гельдера, полагая в нем $\nu=m$, $a_\nu=|a_m|$, $b_\nu=|B(kd+jq,m)|$. Будем иметь:

$$W^3(j,k) \ll M^2 \ln c^{2c_1} \sum_{\substack{M<m\leqslant 2M\\(m,q)=1}} |a_m||B(kd+jq,m)|^3.$$

Возведя обе части последнего неравенства в квадрат, применяя неравенство Коши, и условие $M<q$, найдем

$$W^6(j,k) \ll M^4 \ln c^{4c_1} \sum_{\substack{M<m\leqslant 2M\\(m,q)=1}} |a_m|^2 \sum_{\substack{M<m\leqslant 2M\\(m,q)=1}} |B(kd+jq,m)|^6 \ll$$

$$\ll M^5 \ln c^{4c_1+c_2} \sum_{\substack{m=0\\(m,q)=1}}^{q-1} |B(kd+jq,m)|^6.$$

Отсюда, воспользовавшись явным видом $B(kd+jq,m)$, получим

$$W^6(j,k) \ll M^5 \ln c^{4c_1+c_2} \sum_{\substack{\lambda=0\\(\lambda,q)=1}}^{q-1} \left|\sum_{\substack{N<n\leqslant 2N\\(n,q)=1}} b_n\chi_q(n+\lambda)e\left(\frac{(kd+jq)n}{qd}\right)\right|^6 \ll$$

$$\ll M^5 \ln c^{4c_1+c_2} \sum_{\substack{N'<n_1,\ldots,n_6\leqslant 2N\\(n_1,\ldots,n_6,q)=1}} |b_{n_1}\ldots b_{n_6}| \left|\sum_{\lambda=0}^{q-1}\chi\left(\frac{(\lambda+n_1)(\lambda+n_2)(\lambda+n_3)}{(\lambda+n_4)(\lambda+n_5)(\lambda+n_6)}\right)\right|.$$

Далее, воспользовавшись неравенством $|b_n| \ll B$, затем известной оценкой Д.Берджесса, найдем

$$W^6(j,k) \leqslant B^6 M^5 \ln c^{4c_1+c_2} \sum_{1\leqslant n_1,\ldots,n_6\leqslant 2N} \left| \sum_{\lambda=0}^{q-1} \chi\left(\frac{(\lambda+n_1)(\lambda+n_2)(\lambda+n_3)}{(\lambda+n_4)(\lambda+n_5)(\lambda+n_6)}\right)\right| \ll$$
$$\ll B^6 M^5 N^3 q^{1+\delta} \ln c^{4c_1+c_2}.$$

Отсюда и из (1) следует утверждение теоремы.

Из этой теоремы, в частности вытекает следующая нетривиальная оценка двойной суммы, имеющей сумму для длины N, которой выполняется неравенство $q^{\frac{1}{12}} \leqslant N \leqslant q^{\frac{1}{6}}$.

Следствие. *Пусть M, N, U — целые числа,*

$$N \leqslant U < 2N,\ q^{\theta} \leqslant N \leqslant q^{\frac{1}{6}}, \quad D^{\frac{1}{2}} \leqslant q \leqslant D, \quad \nu \leqslant \exp\sqrt{2\ln c},$$

$$W_q(x,M,N,l,\nu) = \sum_{\substack{M<m\leqslant 2M\\(m,q)=1}} a_m \sum_{\substack{U<n\leqslant\min(xm^{-1},2N)\\(n,q)=1,\, mn\ equivl\,(\mathrm{mod}\ \nu)}} b_n\chi_q(mn-l), \qquad (\nu l,q)=1,$$

a_m и b_n – функции натурального аргумента такие, что

$$|a_m| \leqslant \tau_5(m), \quad |b_n| \leqslant 1.$$

Тогда при $x \geqslant q^{1-2\theta+1,1\delta}$ справедлива оценка

$$|W_q(x,M,N,l,\nu)| \ll \frac{x}{\nu}\exp\left(-0,7\sqrt{\ln c}\right).$$

Доказательство. Согласно лемме К.К.Марджанашвили, имея в виду, что $\ln M \ll \ln c$, найдём

$$\sum_{M<m\leqslant 2M} \tau_5(m) \ll M\ln c^4, \qquad \sum_{M<m\leqslant 2M} \tau_5^2(m) \ll M\ln c^{24}.$$

Из теоремы 1 при $c_1 = 4$, $c_2 = 24$, воспользовавшись условием $MN \leqslant x$, $N \geqslant q^{\theta}$ и $x \geqslant q^{1-2\theta+1,1\delta}$, найдём

$$|W_q(x,M,N,l,\nu)| \ll (MN)^{\frac{5}{6}} N^{-\frac{1}{3}} q^{\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\delta} \ln c^{\frac{20}{3}} \leqslant x^{\frac{5}{6}} N^{-\frac{1}{3}} q^{\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\delta} \ln c^{\frac{20}{3}} =$$
$$= x\left(\frac{N^{-2}q^{1+\delta}}{x}\right)^{\frac{1}{6}} \ln c^{\frac{20}{3}} \leqslant x\left(\frac{q^{1-2\theta+\delta}}{x}\right)^{\frac{1}{6}} \ln c^{\frac{20}{3}} \ll xq^{-\frac{\delta}{60}} \ln c^{\frac{20}{3}}.$$

Воспользовавшись соотношениями $D^{\frac{1}{2}} \leqslant q \leqslant D$ и $\nu \leqslant \exp\sqrt{2\ln c}$, имеем

$$|W_q(x,M,N,l,\nu)| \ll \frac{x}{\nu} \ln c^{\frac{20}{3}} \exp\sqrt{2\ln c}\, D^{-\frac{\delta}{120}} \ll \frac{x}{\nu}\exp\left(-0,7\sqrt{\ln c}\right).$$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Виноградов И.М. Избранные труды. — М.: Изд-во АН СССР, 1952.
2. Карацуба А.А. Суммы характеров с простыми числами. — Известия АН СССР. Серия математическая, 1970, т. 34, с. 299 – 321.

3. Рахмонов З.Х. Об оценке суммы характеров с простыми числами. — Доклады АН Таджикский ССР, 1986, т. 29, № 1, с. 16 – 20.

4. Рахмонов З.Х.О распределении значений характеров Дирихле и их приложения. — Труды Математического института им. В.А.Стеклова, 1994, т. 207, с. 286 – 296.

5. Фридландера Дж.Б., Гонг К., Шпарлинский И.Е. Суммы значений характеров на сдвинутых простых числах. — Математические заметки, 2010, т. 88, в. 4. с. 605 – 619.

6. Рахмонов З.Х. Суммы значений неглавных характеров по последовательности сдвинутых простых чисел. — Труды Математического института им. В.А.Стеклова, 2017, т. 299, с. 1 – 27.

7. Рахмонов З.Х. О распределении значений характеров Дирихле в последовательности сдвинутых простых чисел. — ДАН РТ, 2013, т. 56, № 1, с. 5 – 9.

8. Рахмонов З.Х. Суммы характеров с простыми числами. — Чебышевский сборник, 2014, т. 15, в. 2(50), с. 73 – 100.

9. Хокиев Д. Дж. Оценка коротких сумм значений характеров от специальной последовательности натуралтных чисел // ДАН Республики Таджикистан. 2015.Т. 58. № 12. С. 1065-1071.

10. Хокиев Д.Дж. Оценка короткой суммы значений характеров Дирихле по составном модулю на последовательности сдвинутых чисел //ДАН Республики Таджикистан. 2017. Т. 60. № 1-2. С. 5-11.

11. Рахмонов З. Х., Хокиев Д.Дж. Об оценке суммы характеров с простыми числамы // ДАН Республики Таджикистан. 2018.Т.61.№1.С.5-11.

———————————————————————————

УДК 511.174

Об одном интегрально-разностном уравнении, применяемом в суммировании мультипликативных функций

У. Чариев (Таджикистан, г. Душанбе)
Таджикский государственный педагогический университет им. С. Айни
e-mail: umidchoriyev@mail.ru

On one integral-difference equations used in summation of multiplicative functions

U. Chariev (Tajikistan, Dushanbe)
Tajik State Pedagogical University named after S. Ayni
e-mail: umidchoriyev@mail.ru

В работах У. Чариева [1] – [3] рассматривались суммы вида

$$M_f(X, Y_1, ..., Y_{k-1}) = \sum_{n_1...n_k \le X} f_1(n_1)...f_k(n_k) = \sum_{n \le X} f(n),$$

где $f(n) = f_1(n_1)...f_k(n_k)$, $p/n_\nu \to X^{\frac{1}{t_{\nu-1}}} < p \le X^{\frac{1}{t_\nu}}$, $Y_\nu = X^{\frac{1}{t_\nu}}$, $t_\nu = \frac{\ln X}{\ln Y_\nu}$, $\nu = \overline{1,k}$, $\frac{1}{t_\nu} = 0$, $t_k = 1$, $t_1 > ... > t_{k-1} > t_k = 1$ и $1 = Y_0 < Y_1 < ... < Y_{k-1} < Y_k = X$.

В этих работах предполагался, что существуют комплексные числа τ_ν, B_ν, $A_\nu \ge 0$, а также функция $\rho_\nu(X)$ такие что

$$\sum_{\substack{p^r \le X \\ p \le Y}} \frac{\Lambda_{f_\nu}(p^r)}{p^r} = \tau_\nu \ln \min(X, Y) + B_\nu + O(\rho_\nu(\min(X, Y))), \tag{1}$$

и

$$\prod_{Y \le p \le X} \left(1 + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{|\ f_\nu(p^r)\ |}{p^r}\right) = O\left(\left(\frac{\ln X}{\ln Y}\right)^{A_\nu}\right). \tag{2}$$

Здесь $\rho_\nu(X) \to 0$ при $X \to \infty$, для $\nu = \overline{1,k}$, а $\Lambda_{f_\nu}(n)$–обобщенная функция Мангольдта, определяемая соотношением

$$f_\nu(n) \ln n = \sum_{d/n} \Lambda_{f_\nu}(\frac{n}{d}) f_\nu(d).$$

В частности в работе [1] доказывается следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть $f_\nu(n)$–мультипликативные функции при $\nu = \overline{1,k}$, удовлетворяющие условиям (1), (2) и*

$$f_1(n_1) = \varepsilon(n_1) = \begin{cases} 1 & \textit{при} \quad n_1 = 1, \\ 0 & \textit{при} \quad n_1 \ne 1, \end{cases}$$

т.е. суммирование ведется по числам, все простые делители которых больше, чем Y_1. Тогда, если

$$r_k = 1 + \sum_{\nu=2}^{k} |\tau_\nu| \ge \max(A_k + 1, Re\tau_\nu + 2),$$

то при $t_{k-1} > 1$

$$M_f(X, Y_1, ..., Y_{k-1}) = \int_1^{t_1} Y_1^u \frac{d}{du} z_{k-1}\left(u, \frac{ut_2}{t_1}, ..., \frac{ut_{k-1}}{t_1}\right) du + O\left(\frac{X\rho(Y_1) t_1^{r_k - 1}}{t_{k-1} \ln Y_1} \ln^\delta t_1\right),$$

где функция $z_{k-1}(t_1, ..., t_{k-1})$ является при $t_{k-1} > 1$ решением уравнения

$$t_1 z_{k-1}(t_1, ..., t_{k-1}) - \int_0^{t_1} z_{k-1}\left(u, \frac{ut_2}{t_1}, ..., \frac{ut_{k-1}}{t_1}\right) du -$$

$$- \sum_{\nu=2}^{k} \tau_\nu \int_{t_1\left(1 - \frac{1}{t_\nu}\right)}^{t_1\left(1 - \frac{1}{t_{\nu-1}}\right)} z_{k-1}\left(u, \frac{ut_2}{t_1}, ..., \frac{ut_{k-1}}{t_1}\right) du = 0 \tag{3}$$

с начальными условиями

$$z_{k-1}(t_1, ..., t_{k-1}) = \begin{cases} z_{k-2}(t_1, ..., t_{k-2}) \quad \textit{при} & k \ge 3, t_{k-1} \le 1, \\ 1 \quad \textit{при} & 0 < t_1 \le 1, \\ 0 \quad \textit{при} & t_1 \ne 0. \end{cases}$$

Целью настоящей работы является доказательство существование и единственность непрерывного решения уравнения (3).

Доказана следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть $\tau_1, ..., \tau_k$–комплексные числа, $Re\tau_1 > -1$. Тогда при любом фиксированном $k \geq 2$ и действительных $t_1, ..., t_k$ с условиям*

$$t_1 > t_2 > ... > t_k = 1, \quad \frac{1}{t_0} = 0,$$

уравнение

$$st_1 z_{k-1}(st_1, ..., st_{k-1}) - \int_0^{st_1} z_{k-1}\left(u, \frac{ut_2}{t_1}, ..., \frac{ut_{k-1}}{t_1}\right) du -$$

$$-\sum_{\nu=2}^{k} \tau_\nu \int_{t_1\left(s-\frac{1}{t_\nu}\right)}^{t_1\left(s-\frac{1}{t_{\nu-1}}\right)} z_{k-1}\left(u, \frac{ut_2}{t_1}, ..., \frac{ut_{k-1}}{t_1}\right) du = 0$$

с начальными условиями

$$z_{k-1}(t_1, ..., t_{k-1}) = \begin{cases} z_{k-2}(t_1, ..., t_{k-2}) & \text{при} \quad k \geq 3, t_{k-1} \leq 1, \\ t_1^{\tau_1} \quad \text{при} & 0 < t_1 \leq 1, \\ 0 \quad \text{при} & t_1 < 0, \end{cases}$$

имеет единственное непрерывное по s при $0 < s \leq 1$ решение $z_{k-1}(st_1, ..., st_{k-1})$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Чариев У. Суммы мультипликативных функций по числам простые делители которых лежат в заданных интервалах // Деп. в ВИНИТИ, № 918-78, 16 марта 1978. 8 стр.
2. Чариев У. Обобщенная задача о числах с малыми и большими простыми делителям // Изв. АН ТаджССР. Отд.физ.-мат. и геол. – хим. наук. 1979. № 1(71). С. 13-20.
3. Чариев У. Асимптотическое поведение решений некоторых дифференциально–разностных уравнений // ДАН Тадж. ССР. Т.22. № 8. 1979. С. 463-465.

———————————————————————————

УДК 511.32

Экстремальные свойства произведений множеств

Ю. Н. Штейников (Россия, г. Москва)
Научно-исследовательский институт системных исследований РАН
e-mail: yuriisht@yandex.ru

Extremal properties of product sets

Yu. N. Shteinikov (Russia, Moscow)
Scientific Research Institute for System Analysis of the RAS
e-mail: yuriisht@yandex.ru

В своем докладе я представлю нижнюю оценка на размер множества A из конечных интервалов натуральных чисел, таких, что размер множества AA асимптотически равен $|A|^2/2$. Рассуждая аналогично предыдущей работе К.Форда [1] с небольшими оптимизациями, мы уточняем предыдущую оценку. В данной работе мы заимствуем задачи, подходы и аргументы рассуждений, предложенные в статье [1].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. К. Форд, Экстремальные свойства произведений множеств // Труды МИАН, 303 (2018), 239–245

УДК 511.3

О первых разностях чисел с заданным окончанием разложения по линейной рекуррентной последовательности[1]

А. В. Шутов (Россия, г. Владимир)
Хабаровское отделение Института прикладной математики ДВО РАН
e-mail:a1981@mail.ru

On first differences of numbers with fixed last digits of their linear recurrent base expansion

A. V. Shutov (Russia, Vladimir)
Khabarovsk Division of the Institute for Applied Mathematics, Far Eastern Branch, Russian Academy of Sciences
e-mail: a1981@mail.ru

Пусть $a_1, \ldots, a_d$ – натуральные числа, удовлетворяющие условию

$$a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq a_{d-1} \geq a_d = 1.$$

Определим последовательность $\{T_n\}$ при помощи линейного рекуррентного соотношения

$$T_n = a_1 T_{n-1} + a_2 T_{n-2} + \ldots + a_d T_{n-d}.$$

Начальные условия будут иметь вид

$$T_0 = 1,$$

и

$$T_n = 1 + a_1 T_{n-1} + a_2 T_{n-2} + \ldots + a_n T_0$$

для $n < d$. В этом случае любое натуральное число N допускает однозначное жадное разложение по последовательности $\{T_n\}$:

$$N = \sum_{k=0}^{m(N)} \varepsilon_k(N) T_k.$$

Жадность данного разложения означает, что для любого $m_1 < m(N)$ выполняются неравенства $0 \leq N - \sum_{k=m_1}^{m(N)} \varepsilon_k(N) T_k < T_{m_1}$.

Пусть $w = w_{m-1} \ldots w_0$ – слово длины m над алфавитом $\{0, \ldots, a_1\}$. Пусть

$$\mathbb{N}(w) = \{N \in \mathbb{N} : \varepsilon_k(N) = w_k, 0 \leq k < m\}$$

[1]Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда №19-11-00065, https://rscf.ru/project/19-11-00065/.

– множество натуральных чисел, разложения которых по последовательности $\{T_n\}$ заканчиваются на слово w.

Вообще говоря, множество $\mathbb{N}(w)$ может оказаться пустым. Слово w будем называть допустимым, если множество $\mathbb{N}(w)$ не пусто. Легко видеть, что в этом случае $\mathbb{N}(w)$ будет содержать бесконечно много чисел. Обозначим через Adm_n – множество допустимых слов длины n.

Далее, пусть $n_1(w), n_2(w), \ldots, n_k(w), \ldots$ – все числа из $\mathbb{N}(w)$, расположенные в порядке возрастания. Рассмотрим множество первых разностей между этими числами

$$Diff(w) = \{n_{k+1}(w) - n_k(w) : k \in \mathbb{N}\}.$$

Теорема 1. *Для любого допустимого слова $w \in Adm_n$ множество $Diff(w)$ содержит не более d элементов. При достаточно больших n это множество содержит в точности d элементов.*

Определим также множество

$$Diff_n = \bigcup_{w \in Adm_n} Diff(w).$$

Теорема 2. *Для любого n множество $Diff_n$ содержит не более $2d-1$ элементов. При достаточно больших n это множество содержит в точности $2d-1$ элемент.*

В докладе также будет рассказано о связи задачи с арифметикой иррационального сдвига тора, перекладываниями областей и одномерными квазипериодическими структурами.

Секция 6. Диофантовы приближения и теория трансцендентных чисел

УДК 511.42

Оценка количества целочисленных многочленов с малыми производными в корне

В. И. Берник (Беларусь, г. Минск)
Институт математики Национальной академии наук Беларуси
e-mail: bernik.vasili@mail.ru
Д. В. Васильев (Беларусь, г. Минск)
Институт математики Национальной академии наук Беларуси
e-mail: vasilyev@im.bas-net.by
А. С. Кудин (Беларусь, г. Минск)
Институт математики Национальной академии наук Беларуси
e-mail: knxd@yandex.ru

An estimate for the number of integer polynomials with small derivatives at the root

V. I. Bernik (Belarus, Minsk)
Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus
e-mail: bernik.vasili@mail.ru
D. V. Vasilyev (Belarus, Minsk)
Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus
e-mail: vasilyev@im.bas-net.by
A. S. Kudin (Belarus, Minsk)
Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus
e-mail: knxd@yandex.ru

Задача об изучении множества действительных чисел x, удовлетворяющих неравенству

$$|P(x)| < H^{-w},\ w > 0, \tag{1}$$

где $P(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$ — целочисленный многочлен степени n и $H = H(P) = \max\limits_{0 \leqslant j \leqslant n} |a_j|$ — высота $P(x)$, является одной из основных задач теории диофантовых приближений. Обозначим через $\mathcal{L}_n(w)$ множество $x \in \mathbb{R}$, для которых неравенство (1) имеет бесконечное число решений в многочленах $P(x)$. Для подмножества $A \subset \mathbb{R}$ через μA и $\dim A$ будем обозначать соответственно меру Лебега и размерность Хаусдорфа множества A. К настоящему времени известны следующие результаты.

$$\mu \mathcal{L}_n(w) = 0,\ \text{при } w > 4n,\ \text{К. Малер, 1932, [1]}$$

$$\mu \mathcal{L}_1(w) = 0,\ \text{при } w > n,\ \text{В. Г. Спринджук, 1964, [1]}$$

$$\dim \mathcal{L}_1(w) = \frac{n+1}{w+1}, w > n,\ \text{В. И. Берник, 1983, [2], [3]}$$

В основе доказательства указанных результатов лежат оценки количества целочисленных многочленов P с ограничениями на значения производной в некотором корне α_1. А именно, в работах [1-3] и многих других для натуральных чисел Q использовались различные несовпадающие верхние и нижние оценки величины

$$\# \bigcup_{H(P)\leqslant Q} \left\{P : |P'(\alpha_1)| < H^{1-v},\ \text{где } \alpha_1 \text{ — некоторый корень } P\right\}. \qquad (2)$$

До сих пор, однако, не было даже предположений о точном значении порядка величины (2) относительно параметра Q.

В данной работе показано, что если $0 \leqslant k \leqslant 1$ и корни многочленов $P(x)$ упорядочены следующим образом

$$|\alpha_1 - \alpha_2| \leqslant |\alpha_1 - \alpha_3| \leqslant \ldots \leqslant |\alpha_1 - \alpha_n|,$$

то для любого $\varepsilon > 0$ справедливы неравенства

$$\# \bigcup_{H\leqslant Q} \left\{P(x) : |P'(\alpha)| \ll H^{1-v}, |\alpha_1 - \alpha_2| = H^{-kv}\right\} \ll$$
$$\ll Q^{n+1-3v+\varepsilon},\ \text{если } k = 1/4,$$
$$\ll Q^{n+1-5v/4+\varepsilon},\ \text{если } k = 1/2,$$
$$\ll Q^{n+1-v+\varepsilon},\ \text{если } k = 1.$$

где константа в символе Виноградова $\ll$ не зависит от Q. Данные факты позволяют предположить, что для получения точных оценок (2) понадобится указывать дополнительные условия о распределении нулей $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ многочленов $P(x)$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Спринджук В. Г. Проблема Малера в метрической теории чисел. — Минск: Наука и техника, 1967. 184 с.

2. Baker A., Schmidt W. Diophantine approximation and Hausdorff dimension // Proc. Lond. Math. Soc. 1970. Vol. 21. pp. 1-11.

3. Bernik V. An application of Hausdorff dimension in the theory of Diophantine approximation // Acta Arith. 1983. 42(3). pp. 219–253.

———————————————————————————

УДК 511.42

Обобщение леммы А. Гельфонда на интервалы числовой прямой и её применение в диофантовых приближениях

В. И. Берник (Беларусь, г. Минск)
Институт математики Национальной академии наук Беларуси
e-mail: bernik.vasili@mail.ru
И. А. Корлюкова (Беларусь, г. Гродно)
Гродненский государственный университет имени Янки Купалы

А. С. Кудин (Беларусь, г. Минск)
Институт математики Национальной академии наук Беларуси
e-mail: knxd@yandex.ru
Ж. И. Пантелеева (Беларусь, г. Минск)
Институт математики Национальной академии наук Беларуси
e-mail: janna-85@list.ru

Generalization of A. Gelfond's lemma to intervals of the real line and its application in Diophantine approximations

V. I. Bernik (Belarus, Minsk)
Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus
e-mail: bernik.vasili@mail.ru
I. A. Korlyukova (Belarus, Grodno)
Yanka Kupala State University of Grodno
A. S. Kudin (Belarus, Minsk)
Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus
e-mail: knxd@yandex.ru
Z. I. Panteleeva (Belarus, Minsk)
Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus
e-mail: janna-85@list.ru

В 1842 году Дирихле [1] установил, что для любых $x \in R$ и натуральных чисел $Q > 1$ нацдутся целые p и $q \in N$, $1 \leq q \leq Q$, для которых выполняется неравенство

$$|xq - p| < Q^{-1}. \tag{1}$$

Из неравенства (1) легко получить, что неравенство

$$\left|x - \frac{p}{q}\right| < q^{-2} \tag{2}$$

имеет бесконечное число решений в натуральных числах q. Неравенство (2) почти неулучшаемо, что доказал Гурвиц [2, 3]. Он установил, что неравенство $|x_1 q - p| < \frac{1}{\sqrt{5}} q$ для любого $x_1 \in R$ имеет бесконечное число решений в $(p, q) \in Z \times N$, но уже при любом $\epsilon > 0$ и $q > q_0(\epsilon)$ найдутся такие $x_2 \in R$, для которых справедливо неравенство

$$|x_2 q - p| > \frac{1}{(\sqrt{5} + \epsilon) q}. \tag{3}$$

В 1898 году Э. Борель [4] привлёк для изучения неравенств (1), (3) понятие меры Лебега. Он доказал, что неравенство $|xq - p| < q^{-2}$ имеет бесконеное число решений только для редких $x \in B \subset R$. Результат Бореля был значительно улучшен А. Хинчиным [5].

Теорему Хинчина для многочленов произвольной степени доказали Берник [6] и Береснevич [7]. Теорема Хинчина доказана в значительно общей формулировке для невырожденных кривых [8], [9].

Получен следующий результат.

Теорема. Пусть $P_j(x)$ - многочлены степени $degP_j \leq n$ без общих корней и $H(P_j) \leq Q, j = \overline{1, 2}$ и на интервале I, $|I| = Q^{-\eta}, \eta > 0$ для всех $x \in I$ выполняется неравенство

$$max_{x \in I} \left(|P_1(x)|, |P_2(x)|\right) < Q^{-\tau}, \tau > 0.$$

Тогда при выполнении неравенства

$$Q^{-\eta} > |P(x)||P'(x)|^{-1} \tag{4}$$

при любых $\delta > 0$ и $Q > Q_0(\delta)$ справедливо неравенство

$$\tau + 1 + 2\sum_{k=1}^{n} max(\tau + 1 - k\eta, 0) < 2n + \delta. \tag{5}$$

Неравенство (5) удобно для приложений.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Dirichlet, J.P.G. Lejeune. Verallgemeinerung eines Satzes aus der Lehre von den Kettenbrüchen nebst einigen Anwendungen auf die Theorie der Zahlen. – Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. – 1842. – P. 93–95.
2. Cassels, J. W. S. An Introduction to Diophantine Approximation (Cambridge Tracts in Mathematics and Mathematical Physics, №45) / J. W. S. Cassels. — Cambridge: Cambridge University Press. — 1957.
3. Шмидт В. Диофантовы приближения: Пер. с англ. — Мир, М., 1983. — 232 с.
4. Borel, E. Les probabilités dénombrables et leurs applications arithmétiques. – Rend. Circ. Mat. Palermo. – 1909. – P. 247–271.
5. Khintchine, A. Einige Sätze über Kettenbrüche, mit Anwendungen auf die Theorie der Diophantischen Approximationen // Mathematische Annalen. – 1924, V. 92. – P. 115-125.
6. Bernik, V. On the exact order of approximation of zero by values of integral polynomials // Acta Arith. – 1989, № 53. – P. 17 – 28.
7. Beresnevich,V. V. On approximation of real numbers by real algebraic numbers // Acta Arith. – 1999, № 2. – P. 97 – 112.
8. Beresnevich, V. V. A Groshev type theorem for convergence on manifolds // Acta Math. Hungarica. – 2002. – V. 94, № 1-2. – P. 99-130.
9. Bernik, V. I. Khintchine-type theorems on manifolds: the convergence case for standard and multiplicative versions / V. I. Bernik, D. Kleinbock, G. A. Margulis // nternat. Math. Res. Notices. – 2001. – Vol. 9. – P. 453–486.

———————————————————————

УДК 511

О цепных дробях с рациональными неполными частными

Д. А. Долгов (Россия, г. Казань)
Казанский (Приволжский) федеральный университет
e-mail: Dolgov.kfu@gmail.com

Continued fractions with rational incomplete quotients

D. A. Dolgov (Russia, Kazan)
Kazan Federal University
e-mail: Dolgov.kfu@gmail.com

Обобщение k-арного алгоритма Соренсона с правым сдвигом приводит к новому разложению рациональных чисел a, b в цепные дроби с рациональными неполными частными с правым сдвигом, которые будем называть *дробями первого рода* [1].

Пусть x_i, y_i– ненулевые целые числа, a_i, b_i – положительные целые числа, а $K = \{k_i\}_{i=0}^{\infty}$ – бесконечная последовательность натуральных чисел с условием $k_i \in K$ больше двух.

Определим целочисленные величины

$$\beta_i = \gcd(b_i, k_i),\ \ \gamma_i = \gcd(a_i, k_i), s_i = |a_i x_i/\gamma_i - y_i b_i/\beta_i|/k_i.$$

Введем вектор g_i равным $(y_i, x_i, k_i, \gamma_i, \beta_i)$ для любого $i < n$, а при $i = n$ положим g_i равным $(y_n, x_n, \gamma_n, \beta_n)$. Число y_0 – целое, x_0, x_i, y_i – ненулевые целые, а числа a_i, b_i – неотрицательные целые. Выделим отдельный вид дробей первого рода, *цепные дроби первого типа*:

$$\frac{y_0\gamma_0}{x_0\beta_0} + \cfrac{k_0}{\left(\cfrac{y_1x_0\beta_0\gamma_1}{\gamma_0x_1\beta_1} + \cfrac{k_1}{\left(\ddots + \cfrac{k_{n-1}}{\cfrac{y_n \prod\limits_{\substack{0\leqslant i<n,\\ i\not\equiv n \pmod 2}} x_i\beta_i \prod\limits_{\substack{0\leqslant t\leqslant n,\\ t\equiv n \pmod 2}} \gamma_t}{\prod\limits_{\substack{0\leqslant j\leqslant n,\\ j\equiv n \pmod 2}} x_j\beta_j \prod\limits_{\substack{0\leqslant m<n,\\ m\not\equiv n \pmod 2}} \gamma_m}}\right)}\right)}. \tag{1}$$

Обозначим дроби первого типа как $[g_0; g_1, ..., g_n]_1$. Число $b/a < 1$, раскладываемое в цепную дробь первого типа, обозначим как $[0; g_1, ..., g_n]_1$. Такие дроби получаются при выполнении условия $a_i/\gamma_i > b_i/\beta_i > s_i$.

Дроби второго типа $[g_0; g_1, ..., g_n]_2$ имеют вид:

$$\frac{y_0\gamma_0}{x_0\beta_0} + \cfrac{k_0\gamma_0}{\left(\cfrac{x_0\beta_0}{\left(\cfrac{y_1\gamma_1}{x_1\beta_1} + \cfrac{k_1\gamma_1}{\ddots + \cfrac{k_{n-1}\gamma_{n-1}x_n\beta_n}{x_{n-1}\beta_{n-1}y_n\gamma_n}}\right)}\right)}.$$

Для получения такой дроби на каждом шаге (кроме последнего) должно выполняться условие $a_i/\gamma_i > s_i > b_i/\beta_i$.

В докладе будет произведено сравнение обыкновенных цепных дробей и цепных дробей с рациональными неполными частными. Также в докладе будет обсуждаться применение таких дробей в теории диофантовых приближений.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Долгов Д. А. О континуантах цепных дробей с рациональными неполными частными // Дискретная математика. 2022. Том 34, № 3. С. 34-51.

УДК 511.42

Оценки меры Хаара резонансных множеств в $\mathbb{Q}_p$

Е. В. Засимович (Беларусь, г. Могилев)
Могилевский государственный университет им. А. А. Кулешова
e-mail: elena.guseva.96@yandex.by
Н. В. Сакович (Беларусь, г. Могилев)
Могилевский государственный университет им. А. А. Кулешова
e-mail: sakovichnv@tut.by

The Haar measure's estimates of resonance sets in $\mathbb{Q}_p$

E. V. Zasimovich (Belarus, Mogilev)
Mogilev State A. Kuleshov University
e-mail: elena.guseva.96@yandex.by
N. V. Sakovich (Belarus, Mogilev)
Mogilev State A. Kuleshov University
e-mail: sakovichnv@tut.by

Пусть $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ — некоторый интервал, $\mu_1 B_1$ – мера Лебега измеримого множества $B_2 \subset \mathbb{Q}_p$, $\Psi(t)$ — монотонно убывающая функция. Обозначим через $\mathcal{L}_1(\Psi)$ множество $x \in I$, для которых неравенства $\left|x - \frac{p}{q}\right| < \Psi(q)q^{-1}$ или $|qx - p| < \Psi(q)$ имеет босконечное число решений в $(p, q) \in \mathbb{Z}^2$.

Ещё Дирихле доказал, что $\mathcal{L}_1(\Psi) = \mathbb{R}$ при $\Psi(q) = q^{-1}$. Исследованию этих неравенств при алгебраических x посвящены работы филдсовских лауреатов Рота, Бейкера, Маргулиса. Далее будем рассматривать множества решений неравенств

$$|P(x)| < H^{-w_1}, w_1 > n; |P(\omega)|_p < H^{-w_2}, w_2 > n - 1, \tag{1}$$

для целочисленных многочленов $P(t)$ действительной переменной x и $\omega \in \mathbb{Q}_p$. В.Г. Спринджук [1] доказал, что оба неравенства имеют бесконечное число решений только на множествах нулевых мер Лебега и Хаара соответственно [1, 2].

Обозначим через

$$\mathcal{P}_n(Q) = \{P(t) \in \mathbb{Z}[t], \deg P \leqslant n, H(P) \leqslant Q\} \tag{2}$$

класс целочисленных полиномов, высоты которых не превосходят наутрального числа $Q > 1$ и будем рассматривать множества $x \in \mathbb{R}, \omega \in \mathbb{Q}_p$, при которых неравенства (1) имеют решения при $H \leqslant Q$. Эти множества обозначим через $\mathcal{L}_n(w_1, Q)$ и $\mathcal{L}_n(w_2, Q)$ соответственно. Н.В. Бударина [3] доказала, что

$$\mu_1 \mathcal{L}_n(w_1, Q) < c_1(n) Q^{-\frac{w_1 - n}{n}}, w_1 > n. \tag{3}$$

Мы обощили и улучшили этот результат в $\mathbb{Q}_p$.

Теорема 1. *При $w_2 > n + 1$ выполнимо неравенство*

$$\mu_2 \mathcal{L}_n(w_1, Q) < c_2 Q^{-\frac{w_2 - 1}{n}}.$$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Спринджук, В.Г. Проблема Малера с метрической теории чисел // Наука и техника 1967.
2. Bernik, V.I., Dodson M.M. Metric Diophantine Approximation on Manifolds // Cambridge Tracts in Mathematics, Cambridge University Press, Cambridge. 1999. 137 p.
3. Budarina, N. On the rate of convergence to zero of the measure of extremal sets in metric theory of transcendental numbers // Math. Z. 2019. Vol. 293. P. 809–824.

УДК 511.42

Оценки сверху для количества целочисленных многочленов с заданными дискриминантами

Н. И. Калоша (Беларусь, г. Минск)
Институт математики Национальной академии наук Беларуси
e-mail: kalosha@im.bas-net.by
Н. В. Шамукова (Беларусь, г. Минск)
Военная академия Республики Беларусь
e-mail: shamukova_n@mail.ru
М. В. Ламчановская (Беларусь, г. Минск)
Институт информационных технологий Белорусского государственного университета информатики и радиоэлектроники
e-mail: lammv@mail.ru

Upper bounds for the number of integer polynomials with given discriminants

N. I. Kalosha (Belarus, Minsk)
Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus
e-mail: kalosha@im.bas-net.by
N. V. Shamukova (Belarus, Minsk)
Military Academy of the Republic of Belarus
e-mail: shamukova_n@mail.ru
M. V. Lamchanouskaya (Belarus, Minsk)
Institute of Information Technologies, Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics
e-mail: lammv@mail.ru

Рассмотрим многочлены $P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0$, $\alpha_j \in \mathbb{Z}$, с корнями $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ степени $\deg P = n$ и высоты $H = \max\limits_{0 \leqslant j \leqslant n} |a_j|$. Обозначим через $D(P) = a_n^{2n-2} \prod (a_i - a_j)^2$ дискриминант многочлена $P(z)$. Для натурального $Q > 1$ введём классы многочленов

$$\mathcal{P}_n(Q) = \{P_n(z) : H(P) \leqslant Q\},$$

$$\mathcal{P}_n(Q, \upsilon) = \left\{P_n(z) \in \mathcal{P}_n(Q), D(P) \leqslant Q^{2n-2-2\upsilon}, 0 \leqslant \upsilon\right\}.$$

В диофантовых приближениях важное значение имеют оценки для $\#\mathcal{P}_n(Q,\upsilon)$ [1,2,3]. Получен следующий результат.

Теорема. При $0 \leqslant \upsilon < \frac{1}{2}$ справедлива оценка

$$\#\mathcal{P}_4(Q,\upsilon) < c\,(n)\,Q^{4-2\upsilon}.$$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Спринджук, В.Г. Проблема Малера в метрической теории чисел. – Минск : Наука и техника, 1967. 184 с.

2. V. Bernik, F. Götze, O. Kukso, Lower bounds for the number of integer polynomials with given order of discriminants // Acta Arithmetica 133:4 (2008). P. 375-390.

3. Коледа, Д.В. Об оценке сверху для числа целочисленных многочленов третьей степени с заданной границей для дискриминантов // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2010. – № 3. – С. 10–16.

———————————————————————

УДК 511.42

Плохо приближаемые комплексные числа

О. Н. Кемеш (Беларусь, г. Минск)
Белорусский государственный аграрный технический университет
e-mail: oksana.kemesh@tut.by
И. М. Морозова (Беларусь, г. Минск)
Белорусский государственный аграрный технический университет
e-mail: inna.morozova@tut.by
Ж. И. Пантелеева (Беларусь, г. Минск)
Институт математики Национальной академии наук Беларуси
e-mail: janna-85@list.ru

Poorly approximated complex numbers

O. N. Kemesh (Belarus, Minsk)
Belarusian State Agrarian Technical University
e-mail: oksana.kemesh@tut.by
I. M. Morozova (Belarus, Minsk)
Belarusian State Agrarian Technical University
e-mail: inna.morozova@tut.by
Zh. I. Panteleeva (Belarus, Minsk)
Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus
e-mail: janna-85@list.ru

Дирихле доказал следующую теорему о приближении действительных чисел рационалными

Теорема 1 (Дирихле). *Пусть $\alpha \in \mathbb{R}$, а $Q > 1$ — натуральное число. Тогда существуют натуральное число $1 \leqslant q \leqslant Q$ и целое p, удовлетворяющие неравенству*

$$|\alpha q - p| < Q^{-1}. \tag{1}$$

Теорема 1 легко обобщается на многочлены произвольной степени.

Аналогом теоремы Дирихле в поле комплексных чисел является следующий результат: для любого $\beta \in \mathbb{C}$ и натурального числа $Q > 1$ всегда можно найти полином $P(z)$ с целыми рациональными коэффициентами степени n и высоты $H = H(P) \leqslant Q$ такой, что

$$|P_n(z)| < c_1 Q^{-\frac{n-1}{2}}, \tag{2}$$

где $c_1 = c_1(n), c_2, ...$ величины, зависящие от n и не зависящие от H и Q.

Неравенство (1) практически неулучшаемо, что показал Гурвиц [1].

Определив множество комплексных чисел

$$B_1 = \left\{ |z| \leqslant 1 \bigcap \mathrm{Im} z \geqslant \frac{1}{2} \right\},$$

мера Лебега которого равна $\mu B_1 = \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4} \approx 0,614185$.

Средствами метрической теории диофантовых приближений [2, 3] мы доказываем существование комплексных чисел z, для которых выполняется теорема

Теорема 2. *Для любого $Q \in \mathbb{N}$ обозначим через $\mathcal{L}_3(c_2, Q)$ множество $z \in B_1$, для которых верно неравенство*

$$|P_3(z)| < c_2 Q^{-1}, \ \ H(P) \leqslant Q. \tag{3}$$

Тогда при $c_3 < \sqrt{\frac{1}{3 \cdot 2^9} - \frac{\sqrt{3}}{2^{11}\pi}} \approx 0,01954$ справедливо неравенство

$$\mu_1 \mathcal{L}_3(c_2, Q) < \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}. \tag{4}$$

Это неравенство показывает, что существуют $z \in B_1$, для которых всегда верно неравенство, противоположное (3).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Шмидт В. Диофантовы приближения // Москва: Изд-во Мир, 1983. 232 с.

2. Спринджук В. Г. Проблема Малера в метрической теории чисел // Минск: Изд-во Наука и техника, 1967. 184 с.

3. Bernik V. I., Dodson M. M. Metric Diophantine approximation on manifolds. // Cambridge: Cambridge University Press, 1999.

———————————————————————

Секция 7. Дискретная геометрия и геометрия чисел

УДК 514.17

Кооперативные игры и сбалансированные 2-подмножества

М. В. Блудов (Россия, г. Долгопрудный)
Институт проблем передачи информации имени А. А. Харкевича РАН
e-mail: bludov.mv@phystech.edu
О. Р. Мусин (США)
Техасский университет долины Рио-Гранде
e-mail: omusin@gmail.com

Cooperative Games and balanced 2-subsets

M. V. Bludov (Russia, Dolgoprudny)
Institute for Information Transmission Problems of the Russian Academy of Sciences (Kharkevich Institute)
e-mail:bludov.mv@phystech.edu
O. R. Musin (USA)
University of Texas Rio Grande Valley
e-mail: omusin@gmail.com

Сбалансированные множества, как совокупность подмножеств конечного множества, в соответствии с весами, равномерно покрывающих все множество, впервые были рассмотрены в работах О.Н. Бондаревой [1] и Л.С. Шепли [2]. В этой работе предлагается классификация сбалансированных семейств, состоящих только из подмножеств с двумя элементами. Также рассматриваются сбалансированные множества вершин многогранников для обобщения дискретных версий теорем о неподвижных точках.

Обозначим через $[d]$ множество состоящее из элементов $\{1, 2, ..., d\}$. Пусть семейство Φ состоит из подмножеств $\{S_1, ..., S_m\}$ множества $[d]$. Шепли [3] называет это семейство *сбалансированным,* если найдется такой набор неотрицательных весов $\{w_1, ..., w_m\}$, что

$$\sum_{k=1}^{m} w_k \eta_k = (1, ..., 1), \tag{1}$$

где η_k - характеристический вектор S_k в $[d]$. Сбалансированное семейство называется *минимальным,* если оно не содержит меньших сбалансированных семейств.

Сбалансированные семейства играют важную роль в теории кооперативных игр. В частности, можем дать следующее определение:

Определение 1. *Игра $([n], \nu)$ называется сбалансированной, если для любого сбалансированного семейства коалиций Φ с балансирующими весами $\{\lambda_S\}_{S\in\Phi}$ будет выполнено, что*

$$\sum_{S\in\Phi} \lambda_S \nu(S) \le \nu([n]) \tag{2}$$

Теорема Бондаревой же утверждает следующее:

Теорема 1 (Бондарева, [1]). *Кооперативная ТП-игра $([n], \nu)$ имеет непустое ядро тогда и только тогда, когда он сбалансирована.*

Таким образом явное описание и классификация минимальных сбалансированных семейств может быть очень полезна для проверки условия сбалансированности игры. Мы приводим классификацию для частного случая двухэлементных подмножеств.

Будем рассматривать семейства F, состоящие только из подмножеств с двумя элементами. Будем говорит, что семейство F *нечетного размера*, если оно содержит нечетное число множеств.

Пусть $I = \{i_1, ..., i_n\}$, где $n \geqslant 3$. Будем говорить, что семейсто F является *цикличным относительно* I, если $F = \{(i_1, i_2), (i_2, i_3), ..., (i_n, i_1)\}$. Если же $n = 2$, то у нас есть ровно одно двухэлементное подмножество I. В этом случае назовем $F = \{(i_1, i_2)\}$ *изолированным.*

Теорема 2 (Основная теорема). *Пусть* Φ *– минимальное сбалансированное семейство двухэлементных подмножеств* $[d]$. *Тогда* $\Phi = \{\Phi_\ell\}_{\ell=1,...,k}$ *и* $[d]$ *можно разбить на подмножества* $I_1, ..., I_k$, *т.ч.* Φ_ℓ *либо цикличное нечетного размера относительно* I_ℓ, *либо изолированное.*

Замечание 1. *Несложно описать все такие разбиения – это разбиение* d *на слагаемые 2,3,5,... Производящая функция этого разбиения имеет вид*

$$\frac{1}{1+x}\prod_{i=0}^{\infty}\frac{1}{1-x^{2i+1}}. \tag{3}$$

Легко показать связь с разбиениями на нечетные слагаемые. Пусть $b(d)$ *обозначает число наших разбиений, а* $q(d)$ *- число разбиений на нечетные слагаемые. Тогда*

$$b(d) = q(d) - q(d-1) + ... + (-1)^d q(0). \tag{4}$$

Замечание 2. *Доказательство Теоремы 2 основано на геометрической интерпретации сбалансированных множеств и на применении теоремы Каратеодори о выпуклой оболочке.*

Геометрически же сбалансированные множества можно понимать следующим образом. Пусть дано множество точек $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$ в $\mathbb{R}^d$. Обозначим через c_V центр масс этого множества. Тогда набор точек $v_{i_1}, \ldots, v_{i_k}$ будем называть *выпукло сбалансированным,* если c_V лежит в выпуклой оболочке $conv(v_{i_1}, \ldots, v_{i_k})$. Соответствующий набор индексов $I = \{i_1, \ldots, i_k\}$ также будем называть выпукло сбалансированным. Нас прежде всего будут интересовать *минимальные выпукло сбалансированные множества*, т.е. подмножества V не содержащих меньших сбалансированных множеств. Множество всех таких наборов будем обозначать $convBS(V)$.

Теорему 2 можно применить для корпоративных игр с коалициями из двух игроков. По теореме Бондаревой – Шепли условия непустоты ядра нужно проверять только на минимальных сбалансированных множествах. Поскольку мы знаем эти множества, то проверка условий значительно упрощается.

Во второй половине работы рассматриваются дискретные версии теорем о неподвижных точках и их связь с сбалансированными подмножествами. Лемма Шпернера о раскраске вершин триангуляции и ее версия для покрытий ККМ (лемма Кнастера-Куратовского-Мазуркевича) являются дискретными аналогами теоремы Брауэра о неподвижной точке. У леммы большое число приложений. В частности, эта лемма и её обобщение лемма KKMS [3, 4] играют важную роль в теории игр и математической экономике. Дискретными версиями теоремы Борсука-Улама являются леммы Такера, Ки Фана и Шашкина [5, 6]. У этих лемм также имеются многочисленные приложения. В работе нами рассматриваются две теоремы, которые являются следствиями теорем из [7, 8]. Эти теоремы используют сбалансированные наборы множества точек V и являются обобщениями дискретных версий теорем о неподвижных точках. Если для некоторого множества V известно его $BS(V)$, то это дает явные версии этих теорем. В частности, из Теоремы 2 получается новый результат для раскраски вершин триангуляции в $d(d-1)/2$ цветов. Также нами предложено доказательство обобщенной леммы Шашкина на основе анализа подходящего множества V и набора $BS(V)$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бондарева О.Н. Некоторые применения методов линейного программирования к теории кооперативных игр // Проблемы кибернетики 1963. Т. 10. С. 119.
2. Shapley L.S. On balanced sets and cores // Naval Res. Logist. Quart. 1967. V. 14. P. 453.
3. Shapley L.S. On balanced games without side payments // Mathematical Programming. New York: Academic Press, 1973. P. 261.
4. Shapley L.S, Vohra R. On Kakutani's fixed point theorem, the KKMS theorem and the core of a balanced game // Economic Theory. 1991. V. 1. P. 108.
5. Musin O.R. Extensions of Sperner and Tucker's lemma for manifolds // J. of Combin. Theory Ser. A. 2015. V. 132. P. 172.
6. Musin O.R. Generalizations of Tucker–Fan–Shashkin lemmas // Arnold Math. J. 2016. V. 2:3. P. 299.
7. Musin O.R. Homotopy invariants of covers and KKM type lemmas // Algebr. Geom. Topol. 2016. V. 16. P. 1799.
8. Musin O.R. KKM type theorems with boundary conditions //J. Fixed Point Theory Appl. 2017. V. 19. P. 2037.

———————————————————————

УДК 511.32

Перекладывающиеся квадраты и построение BR-множеств

А. С. Бужина (Россия, г. Владимир)
Владимирский государственный университет им. А. Г. и Н. Г. Столетовых
e-mail: rina_201293@mail.ru
А. А. Мокрова (Россия, г. Владимир)
Владимирский государственный университет им. А. Г. и Н. Г. Столетовых
e-mail: albina.mokrova@yandex.ru

Exchanged squares and the construction of BR-sets

A. C. Buzhina (Russia, Vladimir)
Vladimir State University
e-mail:rina_201293@mail.ru
A. A. Mokrova (Russia, Vladimir)
Vladimir State University
e-mail: albina.mokrova@yandex.ru

Актуальность изучения BR-множеств обусловлена переходом от классических арифметических числовых и функциональных структур к нелинейным арифметическим структурам.

Множество T_k называется множеством ограниченного остатка (BR- множеством), если существует такая константа C_{T_k}, что для остаточного члена $\delta_k(i)$ справедливо неравенство

$$\delta_k(i) \leq C_{T_k}. \tag{1}$$

В 1921 г. Э. Гекке [1] были построены первые примеры одномерных множеств ограниченного остатка. В двумерном случае первый пример таких множеств был получен в 1954 г. R. Szüsz [2]. Математики французской школы Ж. Рози [3] (1982) и S. Ferenczi [4] (1992) связали свойство быть BR-множеством со свойствами отображения первого возвращения. В 2012 г. В.Г. Журавлев [5] нашел способ построения множеств ограниченного остатка на основе вытягивания многомерного куба. А. А. Мокровой (Абросимовой) [6] в 2011-2015 гг. были разработаны методы позволяющие строить двумерные и трехмерные BR-множества на основе параметрических многогранников и изучать их свойства.

По методу построения множеств ограниченного остатка, на основе перекладывающихся торических разверток, мы строим двумерные множества ограниченного остатка, на базе единичного квадрата T с вершинами $(0,0),(1,0),(1,1),(0,1)$.

Разбиение квадрата задается с помощью векторов $(\alpha_1,0),(0,\alpha_2)$ отложенных на сторонах квадрата. На основе этих векторов построим разбиение квадрата T на области $T_k, k=0,1,2$ (рис. 1), площади которых соответственно равны

$$vol_{T_0} = 1-\alpha_1; \quad vol_{T_1} = \alpha_1\alpha_2; \quad vol_{T_2} = \alpha_1(1-\alpha_2).$$

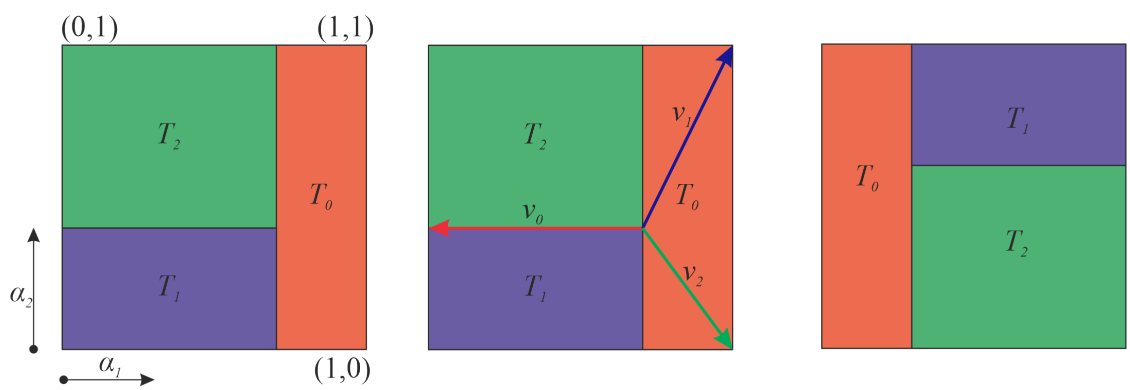


Рис. 1: Перекладывающаяся развертка тора.

Теорема 1. *(Двумерное обобщение теоремы Гекке). Множества $T_k, k=0,1,2$ являются множествами ограниченного остатка. Для отклонений $\delta_k, k=0,1,2$ справедливы точные неравенства:*

$$\begin{gathered} -1 \leq \delta_0 \leq 0, \\ 0 \leq \delta_1 \leq \alpha_2+1, \\ -1 \leq \delta_2 \leq 1-\alpha_2. \end{gathered} \tag{2}$$

Таким образом, нам удалось построить множества ограниченного остатка на базе двумерной развертки тора.

Помимо этого, множества ограниченного остатка могут быть получены и на основе произведения торических разверток [5]. Зная две перекладывающиеся торические развертки размерностей D^1 и D^2 можно построить новую развертку размерности D^1+D^2. Произведение двух перекладывающихся отрезков, разбитых на два полуинтервала каждый, с векторами перекладывания соответственно (ν_0, ν_1) и (ω_0, ω_1) дает квадратную развертку двумерного тора, где

$$\nu_0 = \alpha_1, \nu_2 = \alpha_1 - 1, \omega_0 = \alpha_2, \omega_1 = \alpha_2 - 1.$$

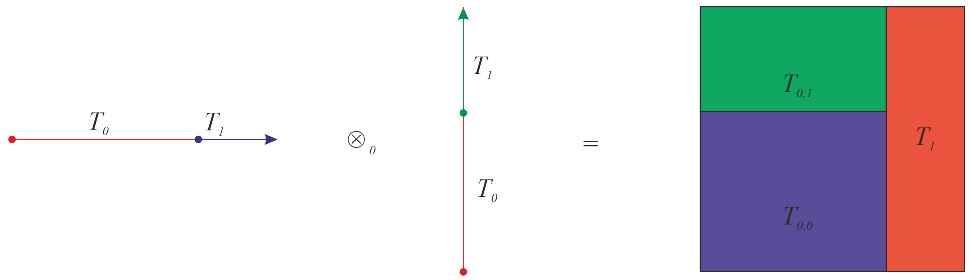


Рис. 2: 0-произведение отрезков.

Для перекладывающихся отрезков геометрическое изображение произведения представлено на рисунке 2. Как множество полученное произведение совпадает с прямым произведением двух отрезков, поэтому получен квадрат. Нетривиален следующий шаг. Как определить разбиение квадрата. Один из способов представлен на рисунке 2. Легко увидеть перекладывание, полученных фигур. На рисунке 2 также представлен переложенный квадрат и векторы перекладывания для его областей. Для удобства в двухмерном случае у областей появился вверху индекс размерности $D = 2$ чтобы не возникло путаницы в обозначениях с одномерным случаем.

Векторы перекладывания, для полученных областей квадрата, строятся из векторов перекладывания исходных полуинтервалов. Они задают трансляционную решетку: если в качестве начального вектора выбрать один из векторов перекладывания, и его конец соединить с концами двух других векторов перекладывания, получим базис трансляционной решетки.

Можно получить и другое разбиение квадрата, как показано на рисунке 3. Чтобы различать два этих произведения, изображенное на рисунке 2 будем называть 0-произведением отрезков, так как разбиение происходит на полуинтервале T_0 первого отрезка, а 1-произведением - изображенное на рисунке 3, так как происходит на полуинтервале T_1.

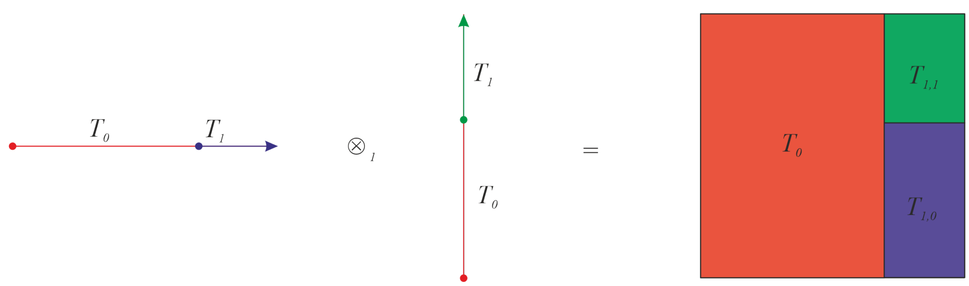


Рис. 3: 1-произведение отрезков.

Метод произведения торических разверток, так же позволяет получать точные границы отклонений. Так в случае 0-произведение отрезков были получены неравенства:

$$\begin{gathered} 0 \le \delta_0 \le \alpha_2, \\ -1 \le \delta_{1,1} \le 0, \\ 0 \le \delta_{1,0} \le \alpha_2 + 1. \end{gathered} \tag{3}$$

Таким образом, на основе перекладывающихся торических разверток нам удалось получить семейство двумерных множеств ограниченного остатка и определить точные границы отклонений (2) и (3) для полученных множеств.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Hecke E. Eber Analytische Funktionen und die Verteilung von Zahlen mod.eins// Math. Sem. Hamburg. Univ. 1921. № 30. P. 377-407.

2. Szüsz R. Uber die Verteilung der Vielfachen einer komplexen Zahl nach dem Modul des Einheitsquadrats // Acta Math. Acad. Sci. Hungar. 1954. № 5. P. 35-39.

3. Rauzy G. Nombres alge 0 briques et substitutions// Bull. Soc. Math. France. 1982. № 110. P. 147-178.

4. Ferenczi S. Bounded remainder sets// Acta Arithmetica. 1992. V 61. P. 319-326.

5. Журавлев В. Г. Перекладывающиеся торические развертки и множества ограниченного остатка. // Записки научных семинаров ПОМИ. 2011. № 392. С. 95–145.

6. Абросимова А. А. Средние значения отклонений для распределения точек на торе// Научные ведомости БелГУ. 2012. № 5(124). С. 5–11.

УДК 514.7, 514.82, 519.63

Винтовые линии в пространствах постоянной кривизны

Д. Ю. Волков (Россия, г. Санкт-Петербург)
Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения
e-mail: dmitrivolkov@mail.ru , dmitrivolkov@guap.ru
К. В. Галунова (Россия, г. Санкт-Петербург)
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого
e-mail: galounova@gmail.com

Helixes in spaces of constant curvature

D.Yu Volkov (Russia, St. Petersburg)
Saint-Petersburg State University of Aerospace Instrumentation
e-mail: dmitrivolkov@mail.ru dmitrivolkov@guap.ru
K. V. Galunova (Russia, St. Petersburg)
Peter the Great St.Petersburg Polytechnic University
e-mail: galounova@gmail.com

Одним из интересных вопросов теории кривых в пространствах постоянной кривизны является вопрос о качественном поведении кривой с данными кривизнами. Эти кривые хорошо изучены в евклидовом пространстве и менее изучены в сферическом и Лобачевском пространствах. Кривая постоянной кривизны на евклидовой плоскости - это окружность. На двумерной сфере кривая постоянной кривизны - окружность. На плоскости Лобачевского кривая постоянной кривизны либо окружность (геодезическая кривизна кривой меньше кривизны плоскости), либо орицикл (кривизна кривой равна кривизне плоскости), либо эквидистанта (кривизна кривой больше кривизны плоскости) [6]. В трехмерном случае в евклидовом пространстве кривая с постоянной кривизной и кручением является винтовой линией. Винтовая линия лежит на прямом круговом цилиндре и равномерно наматывается на него. В пространстве Лобачевского линия постоянной кривизны и кручения лежит на поверхности, образованной вращением эквидистанты вокруг базисной прямой, и равномерно наматывается на эту поверхность. Описание и литература о Кривых с постоянными кривизнами в евклидовом пространстве приведены в [1, стр. 150-155]. Кривые постоянной геодезической кривизны на плоскости Лобачевского рассмотрены в [5, 6, 7], кривые в пространствах постоянной кривизны размерности $n = 3, 4$ в [6, 7, 10]. В данной работе мы исследуем кривые постоянной кривизны и кручения в пространствах постоянной кривизны произвольной размерности. Задачу о изучении этих кривых ставил академик В.И. Арнольд[2, стр 36]. В статье мы указываем один из возможных способов изучения кривых в пространствах Лобачевского произвольной размерности. Наш подход основан на решении системы Френе-Серра для кривой. Как хорошо известно, в случае евклидова пространства в декартовых координатах эта система уравнений есть система линейных уравнений с постоянными коэффициентами. Для сферического пространства и пространства Лобачевского в общем случае эта система уже не является системой с постоянными коэффициентами. Поэтому встает вопрос о выборе удобной системы координат. Оказывается, что удобно рассмотреть эти пространства как вложенные поверхности в еклидово(псевдоевклидово) пространство. Тогда можно выбрать такие координаты, что соответствующая система уравнений Френе-Серра для кривой будет системой с постоянными коэффициентами. А изучение этих систем можно осуществить с помощью методов линейной алгебры.

Рассмотрим уравнение Френе - Серра кривых с постоянными геодезическими кривизнами k_1, k_2, ..., k_n в сферическом пространстве постоянной кривизны S^n с кривизной 1 и пространстве Лобачевского H^n с кривизной -1. Эти уравнения выводят либо методом подвижного репера Э. Картана [5], либо записывая связь оператора ковариантной производной для пространство и вложенной поверхности [3, 4]. Второй способ более краткий, поэтому мы им и воспользуемся. Для того, чтобы одновременно рассмотреть пространства положительной и отрицательной кривизны, мы рассмотрим квадратичную форму на $\mathbb{R}^{n+1}$, заданную матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & r \end{pmatrix}$$

где $r = \pm 1$. При $r = 1$ это форма евклидова, а при $r = -1$ это форма псевдоевклидова. Обозначим скалярное произведение векторов u и v через $\langle u, v\rangle$. Рассмотрим гиперповерхность в $\mathbb{R}^{n+1}$, заданное условием

$$S(r) = \{(x_1)^2 + \ldots + (x_n)^2 + r\,(x_{n+1})^2 = r\}$$

Это множество есть сфера(двуполостный гиперболоид) при $r = 1 (r = -1)$. Во втором случае мы рассматриваем лишь одну часть гиперболоида,т.е. считаем, что $x_{n+1} > 0$. Пусть g-риманова метрика на $S(r)$, полученная сужением исходной метрики на $S(r)$. Тогда пространство $S(1)$ есть сферическое пространство $\mathbb{S}^n$, а пространство $S(-1)$ есть пространство Лобачевского $\mathbb{H}^n$ [3, стр. 194, 4, стр 113]. Определим ковариантную производную вдоль пространства $S(r)$ Как хорошо известно, ковариантная производная $\nabla_v Y$ на $S(c)$ есть ортогональная проекция ковариантной производной в объемлющем пространстве на касательное пространство $S(c)$ [4, стр 103, 108]. Следовательно, мы имеем

$$\nabla_v Y = v(Y) - r(v(Y), P)P.$$

где $v \in T_P S(r), Y$ — векторное поле на $S(r)$, а $v(Y) = (v(Y_1)\ \ v(Y_2), v(Y_3))$ — производная по направлению каждой компоненты. Обратите внимание, что поскольку $\langle \nabla_\varepsilon Y, P\rangle = 0$, мы имеем $\nabla_v Y \in T_P S(\epsilon, K)$.

Пусть теперь $\gamma(t)$ — регулярная кривая на $S(r)$, т. е. $\gamma(t) \in C^{n+1}, \gamma'(t) \neq 0$, и пусть $Y = \gamma'(t)$. Тогда

$$\nabla_{\gamma'(t)}\gamma'(t) = \gamma''(t) - r\left\langle \gamma'(t), \gamma(t)\right\rangle \gamma(t)$$

Пусть $\gamma : I \to S(r)$ гладкая кривая, параметризованная длиной дуги. Кривая $\gamma(s)$ называется винтовой линией в пространстве X, если существует ортонормированный базис $\tau_1 = \gamma(s)'$, $\tau_2, ..., \tau_n$ вдоль α и такие постоянные k_1, k_2, ..., k_{n-1} , что выполняется система дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \nabla_{\gamma'(s)}\gamma = \tau_1 \\ \nabla_{\gamma'(s)}\tau_1 = k_1\tau_2, \\ \nabla_{\gamma'(s)}\tau_j = -k_{j-1}\tau_{j-1} + k_j\tau_{j+1} \quad (j = 2, ..., n-1), \\ \nabla_{\gamma'(s)}\tau_n = -k_{n-1}\tau_{n-1}. \end{cases} \tag{1}$$

Константы k_i называются геодезическими кривизнами кривой γ, а система уравнений (1) называется расширенной системой Френе -Серра для кривой $\gamma(s)$ [5, 7]. Наиболее простой вид эта система имеет в описанных моделях пространств постоянной кривизны.(Подробное описание в [3,4,5]). Используя информацию о связи ковариантной и обычной производной, мы получим что система Френе - Серра в пространствах постоянной кривизны будет системой линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами:

$$\begin{cases} \dfrac{d\gamma}{ds} = \tau_1 \\ \\ \dfrac{d\tau_1}{ds} = -r\gamma +\ k_1\tau_2, \\ \\ \dfrac{d\tau_1}{ds} = -k_{j-1}\tau_{j-1} + k_j\tau_{j+1} \quad (j = 2, ..., n-1), \\ \\ \dfrac{d\tau_n}{ds} = -k_{n-1}\tau_{n-1}. \end{cases} \tag{2}$$

Рассмотрим матрицу коэффициентов системы (2).

$$A_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -r & 0 & k_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -k_1 & 0 & k_2 & \dots & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -k_{n-2} & 0 & k_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -k_{n-1} & 0 \end{pmatrix}$$

Эта матрица трехдиагональная . Рассмотрим спектральные свойства этой матрицы [8,стр 121, 9].

Рассмотрим $n \times n$ комплексную неприводимую трехдиагональную матрицу, главная диагональ которой содержит только нулевые элементы.

$$J_n = \begin{pmatrix} 0 & c_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_1 & 0 & c_2 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & c_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-1} & 0 \end{pmatrix}, \quad a_k, c_k \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$$

Теорема. Спектр матрицы J_n имеет вид

$$\sigma\left(J_{2l}\right) = \{\pm\lambda_1, \pm\lambda_2, \dots, \pm\lambda_l\} \quad \text{и} \quad \sigma\left(J_{2l+1}\right) = \{0, \pm\lambda_1, \pm\lambda_2, \dots, \pm\lambda_l)\}$$

Здесь числа λ_i необязательно различны: каждое собственное значение J_n встречается столько раз, сколько раз соответствует его алгебраической кратности. Для четного n все λ_i отличны от нуля.

Доказательство. Пусть $p_k(z), k = 1, \dots, n,$ — характеристический многочлен старшей главной подматрицы размера $k \times k$матрицы J_n. Тогда имеют место следующие рекуррентные соотношения

$$p_{k+1}(z) = zp_k(z) - a_k c_k p_{k-1}(z), \quad k = 0, 1, \dots, n-1,$$

с $p_{-1}(z) \equiv 0, p_0(z) \equiv 1$. Из этой формулы следует, что многочлены $p_k(z)$ зависят только от произведения $a_k c_k$. Следовательно, матрицы J_n и $-J_n$ имеют одинаковые собственные значения, а значит, спектр матрицы A_n симметричен относительно 0 . В частности, если n нечетно, матрица J_n вырождена. Отметим,

$$\det\left(J_{2l}\right) = (-1)^l \prod_{k=1}^{l} a_{2k-1} c_{2k-1} \neq 0,$$

так что для четного n матрица J_n невырожденна.

Найдем свободное слагаемое характеристического многочлена $p(\lambda)$ матрицы A_n. Из явного вида A следует, что

$$p(0) = \begin{cases} a_0 = rk_2^2 k_4^2 \dots k_{n-1}^2 < 0 & \text{для нечетного } n \\ 0 & \text{для четного } n \end{cases}$$

Следовательно, при нечетном n для сферического пространства $r = 1$ характеристический многочлен имеет $p(\lambda)$ имеет $m-$ пар чисто -мнимых собственных чисел, а для гиперболического пространства $H^n(-1)$ при $r = -1$ характеристический многочлен имеет как минимум пару вещественных корней $\lambda_1 = -\lambda_2$ и $\lambda_1 < 0$. Следовательно, кривая $\alpha(s)$ является неограниченной в нечетномерном пространстве $H^n(-1)$. Мы доказали

Теорема Гладкая кривая с постоянным вектором кривизн $(k_1,\ k_2,\ ,\ \dots,\ k_{n-1)},\ k_j > 0$ в пространстве $H^n(-1)$ при нечетном n является неограниченной кривой.

Таким образом, винтовые кривые в нечетномерных пространствах $H^n(-1)$ аналогичны винтовым линиям в нечетномерных евклидовых пространствах. Наглядное описание винтовой линии в трехмерном пространстве Лобачевского $H^3(-1)$ приведено в [6, стр 454], а в [10] описана винтовая линия в трехмерном сферическом пространстве. Используя информацию о корнях характеристического уравнения можно получать информацию о замкнутости кривых и других характеристиках этих кривых [7].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Аминов, Ю.А. *Дифференциальная геометрия и топология кривых.* - Москва: Наука, 1987. 159 с.

2. Мехматяне вспоминают: 2. Выпуск подготовлен В.Б.Демидовичем. - Москва: Мехмат МГУ, 2009.

3. Кобаяси, Ш., Номидзу, К. *Основы дифференциальной геометрии.* Перевод с англ. Л.В. Сабинина. Т. 1. - Москва: Наука, 1981. 344 с.

4. O'Neill, B. *Semi-Riemannian geometry with applications to relativity.* - Academic Press, 1983.

5. Картан, Э.Ж. *Риманова геометрия в ортогональном репере: По лекциям Эли Картана, читанным в Сорбонне в 1926-1927 гг.* Пер., [обработка] и ред. проф. С.П. Финикова. - Москва: Изд-во Моск. ун-та, 1960. 307 с.

6. Каган, В.Ф. *Основания геометрии: учение об обосновании геометрии в ходе его исторического развития.* При редакционном участии Я. С. Дубнова. - Москва: Гос. изд-во технико-теоретической лит.; Ленинград: [б. и.], 1949-. Ч. 1: Геометрия Лобачевского и ее предыстория. 1949. 492 с.

7. Adachi, Toshiaki. *Foliations on the moduli space of helices on a real space form* Int. Math. Forum. – 2009. – Т. 4. – С. 1699-1707.

8. Уилкинсон, Дж.Х. *Алгебраическая проблема собственных значений.* Пер. с англ. В.В. Воеводина и В.Н. Фаддеевой. - Москва: Наука, 1970. 564 с.

9. Dyachenko A., Tyaglov M. *On the spectrum of the tridiagonal matrices with two-periodic main diagonal.* arXiv preprint arXiv:2109.10771, 2021.

10. Chakrabarti D., Sahay R., Williams J. *Curves of constant curvature and torsion in the 3-sphere* Involve, a Journal of Mathematics. – 2018. – Т. 12. – №. 2. – С. 235-255.

УДК 51 M34

Цепная дробь $[0; a_1, 1, a_3, a_4, ..., a_N]$ и её целочисленная ступенчатая аппроксимация

М. М. Галламов (Россия, г. Москва)

The chain fraction $[0; a_1, 1, a_3, a_4, ..., a_N]$ and its integer step approximation

M. M. Gallamov (Russia, Moscow)

1. Целочисленная аппроксимация отрезка, определяемого цепной дроби $[0; a_1, 1, a_3, a_4, ..., a_N]$

Пусть $[0; a_1, 1, a_3, a_4, ..., a_N] = \frac{p}{q}$, $A = A(q) = (q; 0)$ и $B = B(p) = (0; p)$, где координаты указаны в прямоугольной системе координат OXY с целочисленной решеткой. Отрезок AB назовем *обрезком, определяемый цепной дробью* $[0; a_1, 1, a_3, a_4, ..., a_N]$. *Клеткой* будем называть единичный квадрат с целыми вершинами, а любое объединение клеток — *клетчатой областью*. Рассмотрим минимальную клетчатую область $\mathbb{S}_{AB}$, содержащую отрезок AB. По причине минимальности внутри её нет целых точек. Ориентируем прямую $l_{AB} : y = -\frac{p}{q} \cdot x + p$ посредством движением от A к B. Объекты, лежащие справа (слава) от l_{AB} будем помечать верхним индексом в виде знака плюс (минус). Если такой объект имеет общие точки с l_{AB}, то они также включаются в этот объект. Граница $\mathtt{S}_{AB} = \mathtt{S}^-_{AB} \cup \mathtt{S}^+_{AB}$, где $\mathtt{S}^-_{AB}$ и $\mathtt{S}^+_{AB}$ есть соответственно *левая и правая ступенчатая (целочисленная) аппроксимация отрезка* AB, которые представляют собой ломаные с общими концами A и B, целыми вершинами и звеньями параллельными одной из осей координат — $\mathtt{S}^{\pm}_{AB}$ напоминает лестничного марша. Для краткости такие ломаные будем называть *маршами*, а её горизонтальные звенья — *ступенями* — ассоциация с лестничным маршем.

Введем новую систему координат $A(q)e_1e_2$ с базисом $\overline{e}_1 = \overline{(-1; 0)}_{OXY}$, $\overline{e}_2 = \overline{(0; 1)}_{OXY}$, осью абсцисс $A(q)e_1$ и ординат $A(q)e_2$ — индекс OXY говорит о том, что координаты объекта рассматриваются в OXY. В $A(q)e_1e_2$ прямая l_{AB} задается уравнением: $e_2 = \frac{p}{q} \cdot e_1$, а введенные выше геометрические понятия описываются аналитически с помощью *алгоритмом "вытягивания носов"* ([1]):

$$\begin{gathered}\overline{e}_{n+2}(0;0) = \overline{e}_n(0;0) + a_{n-1}\overline{e}_{n+1}(0;0) = q_{n-1}\overline{e}_1(0;0) + p_{n-1}\overline{e}_2(0;0) = \\ \overline{(q_{n-1}; p_{n-1})}_{(0;0)},\ \overline{e}_1 = \overline{(1;0)},\ \overline{e}_2 = \overline{(0;1)},\ n \in \mathbb{N} = \{1, 2, , ...\},\end{gathered} \tag{1}$$

где q_{n-1} и p_{n-1} определяются рекуррентными равенствами:

$$\begin{aligned}&p_n = a_n p_{n-1} + p_{n-2},\ q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2},\\ &p_0 = a_0, p_1 = a_0 a_1 + 1,\ q_0 = 1, q_1 = a_1,\ n \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\};\\ &p_{-2} = 0,\ q_{-2} = 1,\ p_{-1} = 1,\ q_{-1} = 0,\end{aligned} \tag{2}$$

В (1) координаты объектов записаны в $A(q)e_1e_2$ без указания нижнего индекса в виде $A(q)e_1e_2$. В дальнейшем будем поступать аналогично, если не потребуются дополнительного уточнения. Из (1) (см. также (6) и (7) из [1])) для $[0; a_1, 1, a_3, a_4, ..., a_N]$ получаем

$$\begin{gathered}\overline{e}_3 = \overline{e}_1 + a_0\overline{e}_2|_{a_0=0},\ \overline{e}_4 = \overline{e}_2 + a_1\overline{e}_3 = \overline{(a_1; 1)},\\ \overline{e}_5 = \overline{e}_3 + a_2\overline{e}_4|_{a_2=1} = \overline{(a_1+1; 1)},\end{gathered} \tag{3}$$

Для нас очень важным является то, что ординаты у $\overline{e}_4$ и $\overline{e}_5$ равны единице, что ведет к единичной длине каждого вертикального звена — высоты ступени — обеих ломаных $\mathtt{S}^-_{AB}$ и $\mathtt{S}^+_{AB}$. Отметим, что $\overline{e}_5(0;0)$ ($\in OAB$) и $\overline{e}_4(0;0)$ лежат соответственно по левую и правую стороны от l_{AB}. Более того любой вектор, определяемый (1), с нечетным (четным) индексом лежит по левую (правую) стороны от l_{AB}, конечно, такой вектор должен быть приложен к точке $A = A(q)$.

2. Алгоритм построения ступенчатой ломаной $\mathtt{S}^-_{AB}$

`Обозначения`: $e_{1;j}$ — абсцисса точки $\{e_2 = j\} \cap l_{AB}$, $\lceil\alpha\rceil$ — наименьшее целое число не меньше α, $\mathtt{H}^-_j = OAB \cap (\{e_2 \geq j-1\} \cup \{e_2 \leq j\} \cup \{e_1 \leq \lceil e_{1;j}\rceil\})$ — полоса, состоящую из $\lceil e_{1;l} \rceil$

клеток, $j = 1, ..., p$, и $[\mathtt{A}]$ — число клеток содержавшихся в множестве $\mathtt{A}$, $(l_1 + f(q_1, ..., q_k); l_2 + f(p_1, ..., p_k)) = (l_1 + f(q_1, ..., q_k); l_2 + p \to q)$/

Нулевая ступень $\mathtt{h}_j^-(A_0; A_1)$ располагается на оси абсцисс $A(q)e_2$ и имеет ширину $\mathtt{h}_0^- = a_1 + 1$, так как $[\mathtt{H}_1^-] = q - (a_1 + 1)$, ибо $\overline{e}_5(0; 0)$, приложенный к $A = A_0 = (0; 0)$, имеет конец в точке $(a_1 + 1; 1)$ и поэтому $A_0 = A$ и $A_1 - (0; 1) = (a_1 + 1; 0)$ есть начало и конец ступеньки $\mathtt{h}_j^-(A_0; A_1)$. Ступень $\mathtt{h}_0^-(A_0; A_1)$ полностью определяется вектором $\overline{e}_5(0; 0)$, вследствие чего удобно говорить, что *оно порождается вектором* $\overline{e}_5(0; 0)$ и по этой причине в обозначении $\mathtt{h}_0^-(A_0; A_1)$ присутствует обозначение A_1 его конца, а нижний индекс у A_1 указывает на её ординату. Терминологию и обозначения такого сорта будем распространять ниже. Для $\mathtt{h}_0^-(A_0; A_1)$ введем ещё одно обозначение в виде $\mathtt{M}_{5;0}(A_0; A_1)$, где индекс пять подчеркивает происхождение, а смыл второго индекса будет ясен из последующего.

Ширина $\mathtt{h}_j^-$ ступени $\mathtt{h}_j^-(\cdot; \cdot)$ равна $[\mathtt{H}_j^-] - [\mathtt{H}_{j+1}^-] = \lceil e_{1;j} \rceil - \lceil e_{1;j+1} \rceil$, где $\mathtt{h}_j^-(\cdot; \cdot)$ обозначает горизонтальную ступень, точки напоминают о том, что она есть звено ломанной, порожденное вектором, начало и конец которого и определяет значения точек — в некоторых случаях эти значения будем указывать.

Для решение основной задачи применим рекуррентные формулы (6) и (7) из [1], которые выпишем в удобном для нас виде:

$$\begin{aligned} &\overline{e}_{2m+1}(l_1; l_2) = \\ &\overline{e}_{2m-1}(l_1; l_2) + \textstyle\sum_{k=0}^{a_{2m-2}-1} \overline{e}_{2m}(l_1 + q_{2m-4} + kq_{2m-3}; l_2 + p \to q), \end{aligned} \tag{4}$$

$$\begin{aligned} \overline{e}_{2m'+2}(l'_1; l'_2) = \textstyle\sum_{k'=0}^{a_{2m'-1}-1} \overline{e}_{2m'+1}(l'_1 + k'q_{2m'-2}; l'_2 + k'p_{2m'-2}) + \\ \overline{e}_{2m'}(l'_1 + a_{2m'-1}q_{2m'-2}; l'_2 + a_{2m'-1}p_{2m'-2}). \end{aligned} \tag{5}$$

где точки приложения $(l_1; l_2)$ и $(l'_1; l'_2)$ векторов определяются теми частными случаями, к которым применяться эти формулы. Начальными условиями для них служат векторы $\overline{e}_4$ и $\overline{e}_5$ из (3), приложенные к нужным точкам.

Положим в (4) и (5) $m = 3$, $(l_1; l_2) = (0; 0)$, $m' = 2$, $(l'_1; l'_2) = (q_2 + kq_3; p \to q) = (a_3 + 1 + kq_3; 1 + kp_3)$, тогда

$$\begin{aligned} \overline{e}_7(0; 0) = \overline{e}_5(0; 0) + \textstyle\sum_{k=0}^{a_4-1} \overline{e}_6((q_2 + kq_3; p \to q)) = \overline{e}_5(0; 0) + \textstyle\sum_{k=0}^{a_4-1} \\ \Big(\textstyle\sum_{k'=0}^{a_3-1} \overline{e}_5(kq_3 + (k'+1)q_2; p \to q) + \overline{e}_4(kq_3 + (a_3+1)q_2; p \to q).\Big). \end{aligned} \tag{6}$$

Так как здесь ординаты векторов-слагаемых $\overline{e}_4(\cdot; \cdot)$ и $\overline{e}_5(\cdot; \cdot)$ равны единице и взятые они в естественном порядке из правой части последнего равенства, то они дают единственную ступенчатую ломаную, которую мы опишес аналитически. При $k = 0$ ступенчатую ломаную (марш) $\mathtt{M}_{6;0} = \mathtt{M}_{6;0}(A_{p_2}; A_{p_2+p_3})$ запишем в виде упорядоченного набора

$$\mathtt{M}_{6;0} = \langle \mathtt{M}_{5;0}(A_{p_2}; A_{2p_2}), ..., \mathtt{M}_{5;a_3-1}(A_{a_3p_2}; A_{(a_3+1)p_2}); \mathtt{M}_{4;a_3}(A_{(a_3+1)p_2}; A_{p_2+p_3}) \rangle, \tag{7}$$

где компонента $\mathtt{M}_{5;k'}(A_{(k'+1)p_2}; A_{(k'+2)p_2}) = \mathtt{h}_{(k'+1)p_2}^-(A_{(k'+1)p_2}; A_{(k'+2)p_2})$ порождена $\overline{e}_5(A_{k'p_2}) = \overline{(A_{(k'+1)p_2}; A_{(k'+2)p_2})}$ для $k' = 0, ...a_3 - 1$, $\mathtt{M}_{4;a_3}(A_{a_3p_2}; A_{a_3p_2+p_1}) = \mathtt{h}_{a_3}^-(A_{a_3p_2}; A_{a_3p_2+p_1})$ порождено $\overline{e}_4(A_{a_3p_2}) = \overline{(A_{a_3p_2}; A_{p_3})}$. Отсюда следует, что каждая последующая получается из предыдущей для $k' = 0, ...a_3 - 1$ параллельным сдвигом на вектор $\overline{e}_5$, что отразим в виде записи: $\mathtt{M}_{5;k'+1}(A_{(k'+2)p_2}; A_{(k'+3)p_2}) = \overline{e}_5 + \mathtt{M}_{5;k'}(A_{(k'+1)p_2; A_{(k'+2)p_2}})$. Поэтому первые a_3 компоненты имеют ширину $a_1 + 1$, а последняя — a_1. Согласно методу построения на основе вектор-слагаемых из внутренней суммы для $k = 0$ во внешней сумме получаем, что марш $\mathtt{M}_{6;0} = \mathtt{M}_{6;0}(A_{p_2}; A_{p_2+p_3})$ порожден $\overline{e}_6(q_2; p_2)$.

Рассмотрим последовательность маршей

$$\mathtt{M}_{6;k+1}(A_{p_2+(k+1)p_3}; A_{p_2+(k+2)p_3}) = \overline{e}_6 + \mathtt{M}_{6;k}(A_{p_2+kp_3; A_{p_2+(k+1)p_3}}),$$

$k = 0, ...a_4 - 1$, в которой каждый последующий получается из предыдущего параллельным сдвигом на вектор $\overline{e}_6$. Нулевая ступень $\mathtt{M}_{5;0}(A_0; A_{p_2})$ и эта последовательность с учетом ого, что $p_4 = p_2 + a_4 p_3$ в силу (2), дают марш

$$\mathtt{M}_{7;0}(A_{p_0}; A_{p_4}) = \langle \mathtt{M}_{5;0}(A_0; A_{p_2}); \mathtt{M}_{6;0}(A_{p_2}; A_{p_2+p_3}), ..., \mathtt{M}_{6;a_4-1}(A_{p_2+(a_4-1)p_3}; A_{p_4}\rangle. \tag{8}$$

На основе индукции с поморью формул (2), (4) и (5) получаем алгоритм построения ломаной $\mathtt{S}^-_{AB}$ в виде рекуррентных формул

$$\begin{gathered}\mathtt{M}_{2m+1;0}(A_{p_0}; A_{p_{2m-2}}) = \langle \mathtt{M}_{2m-1;0}(A_{p_0}; A_{p_{2m-4}}); \mathtt{M}_{2m;0}(\\ A_{p_{2m-4}}; A_{p_{2m-4}+p_{2m-3}}), ..., \mathtt{M}_{2m;a_{2m-2}-1}(A_{p_{2m-4}+(a_{2m-2}-1)p_{2m-3}}; A_{p_{2m-2}}\rangle,\end{gathered} \tag{9}$$

$$\begin{gathered}\mathtt{M}_{2m;0}(A_{p_{2m-4}}; A_{p_{2m-4}+p_{2m-3}}) = \langle \mathtt{M}_{2m-1;0}(A_{p_{2m-4}}; A_{2p_{2m-4}}), ..., \mathtt{M}_{2m-1;a_{2m-3}-1}; \\ (A_{a_{2m-3}p_{2m-4}} A_{(a_{2m-3}+1)p_{2m-4}}); \mathtt{M}_{2m-2;a_{2m-3}}(A_{(a_{2m-3}+1)p_{2m-4}}; A_{p_{2m-4}+p_{2m-3}})\rangle\end{gathered} \tag{10}$$

с начальными условиями (3), а для $k' = 0, ...a_{2m-3} - 1$ и $k = 0, ...a_{2m-4} - 1$

$$\begin{gathered}\mathtt{M}_{2m-1;k'+1}(A_{(k'+2)p_{2m-4}}; A_{(k'+3)p_{2m-4}}) = \\ \overline{e}_{2m-1} + \mathtt{M}_{2m-1;k'}(A_{(k'+1)p_{2m-4}; A_{(k'+2)p_{2m-4}}}),\end{gathered} \tag{11}$$

$$\begin{gathered}\mathtt{M}_{2m;k+1}(A_{p_{2m-4}+(k+1)p_{2m-3}}; A_{p_{2m-4}+(k+2)p_{2m-3}}) = \\ \overline{e}_{2m} + \mathtt{M}_{2m;k}(A_{p_{2m-4}+kp_{2m-3}; A_{p_{2m-4}+(k+1)p_{2m-3}}}),\end{gathered} \tag{12}$$

При $2m + 1 = N$ этот алгоритм завершает свою работу, где индекс N есть порядок последнего элемента a_N (> 1) цепной дроби $[0; a_1, 1, a_3 ..., a_N]$. В случае четного N эту цепную дробь представляем в виде $[0; a_1, 1, a_3, ..., a_N - 1, 1]$. На выходе этот алгоритм дает ступенчатую ломаную $\mathtt{S}^-_{AB}$, так как каждый последующий марш получается из предыдущего параллельным сдвиговое, что отражено в формулах (11) и (12)и первоначальный мари (7) однозначно дает ступенчатую ломаную.

3. Распределение ступеней ширины a_1 в $\mathtt{S}^-_{AB}$

Здесь основной задачей является нахождение расположения ступеней ломаной $\mathtt{S}^-_{AB}$ ширины a_1.

Положим $m = 3$ в (9) чт дает марш $\mathtt{M}_{7;0}(A_0; A_{p_4})$. Первая его компонента $\mathtt{M}_{5;0}(A_0; A_{p_2})$ дает нулевую ступень $\mathtt{h}_0((A_0; A_{p_2})$, а остальные a_4 имеют вид: $\mathtt{M}_{6;k_7-1}(A_{p_2+(k_7-1)p_3}; A_{p_2+k_7p_3})$, $k_7 = 1, 2, ..., a_4$. Согласно (10) в марше $\mathtt{M}_{6;0}(A_{p_2}; A_{p_2+p_3})$ первые a_3 компоненты имеют вид: $\mathtt{M}_{5;k_6-1}(A_{k_6p_2}; A_{(k_6+1)p_2})$, $k_6 = 1, 2, ..., a_3$, а последняя — $\mathtt{M}_{4;a_3}(A_{(a_3+1)p_2}; A_{(a_3+1)p_2+p_2})$. Применяя (12), получаем, что $\mathtt{M}_{6;0}(A_{p_2}; A_{p_2+p_3})$ содержит одну ступеньку $\mathtt{h}_{(a_3+1)p_2}((\cdot;\cdot) = \mathtt{h}_{p_2+p_3-2}((\cdot;\cdot)$ ширины a_1. Из (11) следует, что $\mathtt{M}_{6;k_7-1}(A_{p_2+(k_7-1)p_3}; A_{p_2+k_7p_3})$ содержит одну ступень $\mathtt{h}_{p_2+k_7p_3-1}(\cdot;\cdot)$ такого же сорта для каждого $k_7 = 2, ..., a_4$. Итак, маршу $\mathtt{M}_{7;0}(A_0; A_{p_4})$ принадлежит ровно a_4 ступени вида: $\mathtt{h}_{p_2+k_7p_3-1}(\cdot;\cdot)$, $k_7 = 1, 2, ..., a_4$, каждая из которых имеет ширины a_1.

Марш $\mathtt{M}_{9;0}(A_0; A_{p_5})$ получаем из (9) при $m = 4$. Для первой компоненты $\mathtt{M}_{7;0}(A_0; A_{p_4})$ установилено расположение нужных ступеней, оставшиеся a_6 компонент исследуем с помощью (10) – (12). Начнем с $\mathtt{M}_{8;0}(A_{p_4}; A_{p_4+p_5})$, которая в силу (10) имеет первые a_5 компонент вида: $\mathtt{M}_{7;k_8-1}(A_{k_8p_4} A_{(k_8+1)p_4})$, $k_8 = 1, 2, ..., a_5$, и последнюю — $\mathtt{M}_{6;a_5}(A_{(a_5+1)p_4} A_{(a_5+1)p_4+p_3})$. Из (11) следует, что все нужные ступени в $\mathtt{M}_{7;k_8-1}(A_{k_8p_4} A_{(k_8+1)p_4})$ при фиксированном $k_8 = 1, 2, ..., a_5$ таковы: $\mathtt{h}_{p_2+k_7p_3+k_8p_4-1}(\cdot;\cdot)$, Последняя компонента $\mathtt{M}_{6;a_5}(A_{(a_5+1)p_4}; A_{(a_5+1)p_4+p_3})$ имеет только одну нужную ступень $\mathtt{h}_{p_3+(a_5+1)p_4-1}(\cdot;\cdot) = \mathtt{h}_{p_2+k_7p_3+k_8p_4-1}(\cdot;\cdot)|_{k_7=a_4+1, k_8=a}$. Нами найдены следующие ступени: $\mathtt{h}_{p_2+k_7p_3+k_84-1}(\cdot;\cdot)$, $k_s = 1, 2, ..., a_{s-3} + \delta_{7,s}$, $s = 7, 8$, которые принадлежат $\mathtt{M}_{8;0}(A_{p_4}; A_{p_4+p_3})$ и имеют ширину a_1 — других нет, где $\delta_{7,s}$ — символ Кронекера. Применим (12) к поиску всех ступеней такого сорта из оставшихся компонент: $\mathtt{M}_{8;k_9-1}(A_{p_4+(k_9-1)p_3}; A_{p_4+k_9p_3})$, $k_9 = 2, ..., a_6$, тогда получим ступени $\mathtt{h}_{p_2+k_7p_3+k_8p_4+k_9p_5-1}(\cdot;\cdot)$, $k_s = 1, 2, ..., a_{s-3} - \delta_{7,s}$, $s = 7, 8, 9$, в которые входят ступени и из $\mathtt{M}_{8;0}(A_{p_4}; A_{p_4+p_3})$. Для $k_s = 0, 1, 2, ..., a_{s-3}$, $s = 7, 8, 9$, ступени вида: $\mathtt{h}_{(k_7+1)p_3+k_8p_4+k_9p_5}(\cdot;\cdot)$ имеют ширину a_1 и представляют собой полный набор таких ступеней из $\mathtt{M}_{9;0}(A_0; A_{p_6})$.

Ступени такого сорта для марша $\mathtt{M}_{2m+1;0}(A_0; A_{p_{2m-2}})$ описываются формулой:

$$\mathtt{h}_{(k_7+1)p_3+k_8p_4+\cdots+k_{2m+1}p_{2m-3}}(\cdot;\cdot),$$

$k_s = 0, 1, 2, ..., a_{s-3}$, $s = 7, 8, ..., 2m+1$, где индекс $(k_7+1)p_3 + k_8p_4 + \cdots + k_{2m+1}p_{2m-3}$ есть ордината этой ступени.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. М. М. Галламов. Целочисленная аппроксимация отрезка // Чебышевский сборник, 2022, т. 23, вып. 4, с. 20–38.

———————————————————————————————

УДК 515.162+519.17

Примеры весовых систем оснащенных хордовых диаграмм

Д. П. Ильютко (Россия, г. Москва)
Школа-интернат им. А. Н. Колмогорова; Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
e-mail: denis.ilyutko@math.msu.ru
И. М. Никонов (Россия, г. Москва)
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
e-mail: nikonov@mech.math.msu.su

Examples of weight systems of framed chord diagrams

D. P. Ilyutko (Russia, Moscow)
Kolmogorov Boarding School; Lomonosov Moscow State University
e-mail: denis.ilyutko@math.msu.ru
I. M. Nikonov (Russia, Moscow)
Lomonosov Moscow State University
e-mail: nikonov@mech.math.msu.su

1. Введение

Понятия оснащенной хордовой диаграммы и оснащенного 4-членного соотношения [1] возникает при изучении теории J-инвариантов конечного порядка плоских кривых, которая была разработана В. И. Арнольдом [2, 3]. Напомним, что хордовые диаграммы и 4-членные соотношения играют большую роль при исследовании инвариантов Васильева, инвариантов конечного порядка, узлов [4, 5], а именно весовые системы, т.е. линейные функции на алгебре хордовых диаграмм, согласно теореме Васильева–Концевича, приводят к инвариантам Васильева узлов. Помимо (оснащенных) хордовых диаграмм и 4-членных соотношений рассматриваются также линейные (оснащенные) диаграммы, которые возникают при вложении или погружении прямой или окружности с фиксированной точкой, а не окружности. На этот случай непосредственно переносятся (оснащенные) 4-членные соотношения.

Основная цель работы — это определение и построение весовых систем оснащенных (линейных) хордовых диаграмм, т.е. некоторых их инвариантов относительно 4-членных соотношений. Основное внимание будет уделено конструкции Бар-Натана весовых систем, индуцированных представлениями алгебр Ли, которую мы обобщим на случай оснащенных (линейных) хордовых диаграмм.

2. Весовая система

Линейная диаграмма — это ориентированная прямая с конечным числом дуг (*хорд*), концы которых лежат на этой прямой и являются различными точками прямой. Линейная диаграмма называется *оснащенной*, если задано отображение (*оснащение*) из множества хорд в кольцо $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, т.е. каждой хорде приписывается число 0 или 1. Мы рассматриваем оснащенные линейные диаграммы с точностью до изоморфизма, переводящего одну прямую в другую с сохранением ориентации и оснащения хорд.

Пусть L^f — свободный $\mathbb{Z}$-модуль, порожденный всеми оснащенными линейными диаграммами. Таким образом, каждый элемент L^f — это конечная линейная комбинация оснащенных линейных диаграмм с целыми коэффициентами. Модуль $\mathcal{L}^f$ оснащенных линейных диаграмм — это фактормодуль модуля L^f по соотношениям из рис. 1 (для каждого соотношения все другие хорды, отличные от изображенных двух, имеют концы на пунктирных участках прямой и расположены одинаково на четырех оснащенных линейных диаграммах). Мы рассматриваем эти соотношения как *оснащенные 4-членные соотношения*. Линейную функцию из $\mathcal{L}^f$ в поле $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$ мы будем называть *весовой системой*.

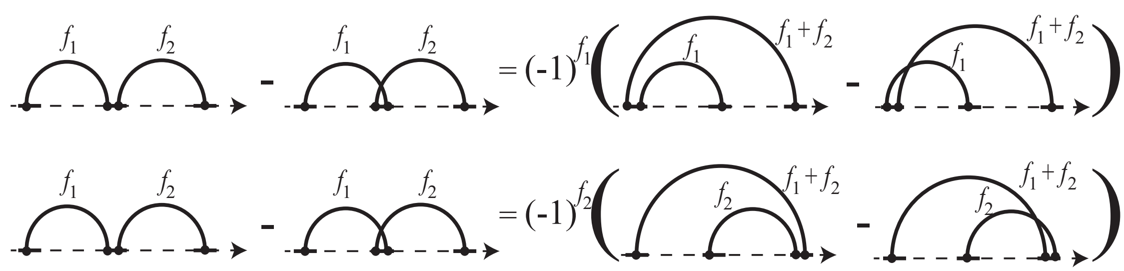


Рис. 1: Оснащенные 4-членные соотношения: $f_1,\ f_2 \in \{0,1\}$ — оснащения хорд (хорды с оснащением 0 изображаются жирными ребрами, а с оснащением 1 — пунктирными).

Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли над полем F с базисом $\mathbf{e}_i$, $i = 1,\ldots,n$, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ — ad-инвариантная невырожденная симметрическая билинейная форма на $\mathfrak{g}$, а $h \in \mathrm{End}\,(\mathfrak{g})$ — произвольный линейный самосопряженный оператор на $\mathfrak{g}$, $h(\mathbf{e}_i) = a_i^j \mathbf{e}_j$, $a_i^j \in F$.

Пусть D — произвольная оснащенная линейная диаграмма. Припишем каждой хорде d два *индекса* — натуральные числа i_d и j_d, которые меняются от 1 до n. Пометим первый конец хорды d элементом $\mathbf{e}_{i_d}$, а второй конец — элементом $\mathbf{e}_{j_d}$. Запишем произведение всех элементов $\mathbf{e}_{i_d}$ и $\mathbf{e}_{j_d}$ в порядке, в котором они появляются при обходе прямой диаграммы, умножим этот элемент на элемент $g^{i_d j_d}$ для каждой хорды d с оснащением 0 и на элемент $-g^{i_d k_d} a_{k_d}^{j_d} = -g^{j_d k_d} a_{k_d}^{i_d}$ для каждой хорды d с оснащением 1 и возьмем полную свертку. В результате мы получим элемент универсальной обертывающей алгебры $U(\mathfrak{g})$, который мы обозначим $\varphi_{\mathfrak{g},h}(D)$. Продолжая по линейности, мы придем к отображению $\varphi_{\mathfrak{g},h}\colon L^f \to U(\mathfrak{g})$.

Теорема 1. *Для любого линейного самосопряженного оператора $h \in \mathrm{End}\,(\mathfrak{g})$ отображение $\varphi_{\mathfrak{g},h}$ не зависит от выбора базиса и удовлетворяет оснащенным 4-членным соотношени-*

ям.

Любое линейное представление $T\colon \mathfrak{g} \to \mathrm{End}(V)$, где V — конечномерное линейное пространство, естественным образом продолжается до гомоморфизма $U(T)\colon U(\mathfrak{g}) \to \mathrm{End}(V)$. Рассматривая след оператора, мы получаем отображение $\mathrm{Tr}\colon \mathrm{End}(V) \to F$.

Следствие 1. *Отображение* $\mathrm{Tr} \circ U(T) \circ \varphi_{\mathfrak{g},h}$ *является весовой системой.*

3. Примеры

Пусть $\mathfrak{g} = gl(N,F) = \mathrm{End}(F^N)$ — общая линейная алгебра Ли с коммутатором $[\mathbf{x},\mathbf{y}] = \mathbf{xy} - \mathbf{yx}$ и ad-инвариантной невырожденной симметрической билинейной формой $\langle \mathbf{x},\mathbf{y}\rangle = \mathrm{Tr}(\mathbf{xy})$ для любых $\mathbf{x},\mathbf{y} \in \mathfrak{g}$. Рассмотрим два линейных оператора из $\mathrm{End}(\mathfrak{g})$: $h_1(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}A^{-1}$ для всех $\mathbf{x} \in \mathfrak{g}$, где $A \in GL(N,F)$, и $h_2(\mathbf{x}) = -\mathbf{x}^\top$ (здесь $\top$ — операция транспонирования).

Рассмотрим фундаментальное представление T алгебры $\mathfrak{g}$ в пространстве F^n и опишем соответствующие весовые системы $\mathrm{Tr} \circ U(T) \circ \varphi_{\mathfrak{g},h_1}$ и $\mathrm{Tr} \circ U(T) \circ \varphi_{\mathfrak{g},h_2}$.

Для оснащенной линейной диаграммы D определим два способа *удвоения хорды*, состоящие в замене хорды на две параллельные ей дуги или на две пересекающие дуги и удалении участков ориентированной прямой, разделяющих данные дуги. В результате удвоения всех хорд диаграммы и шевеления дуг при разведении вторым способом мы получим одномерное многообразие в $\mathbb{R}^3$.

Пусть $s(D)$ — число связных компонент многообразия, полученного в результате удвоения всех хорд диаграммы D первым способом; $s_{\mathrm{odd}}(D)$ — число компонент многообразия при удвоении (первым способом) хорд диаграммы D, которые содержат нечетное число дуг, соответствующих хордам с оснащением 1, и $s_f(D)$ — число связных компонент многообразия, полученного в результате удвоения всех хорд с оснащением 0 диаграммы D первым способом и всех хорд с оснащением 1 вторым способом. Пусть $n_1(D)$ — число хорд с оснащением 1 в диаграмме D.

Теорема 2. *Для любой оснащенной линейной диаграммы D значение весовой системы* $\mathrm{Tr}\circ U(T)\circ\varphi_{\mathfrak{g},h_1}(D)$ *равно* $(-1)^{n_1(D)} \cdot N^{s(D)-s_{\mathrm{odd}}(D)} \cdot (N-2p)^{s_{\mathrm{odd}}(D)}$, *а значение весовой системы* $\mathrm{Tr}\circ U(T)\circ\varphi_{\mathfrak{g},h_2}(D)$ *равно* $N^{s_f(D)}$. *Здесь p — кратность собственного значения* 1 *матрицы A.*

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ландо С. К. J-инварианты орнаментов и оснащенные хордовые диаграммы // Функц. анализ и его прил. 2006. **40**, № 1. 1–13.

2. Arnold V. I. Topological Invariants of Plane Curves and Caustics // Univ. Lecture. Ser. **5**. Amer. Math. Soc. Providence, RI, 1994.

3. Arnold V. I. Plane curves, their invariants, perestroikas and classifications // Singularities and Bifurcations. Adv. Sov. Math. 1994. Vol. 21. Amer. Math. Soc. Providence, RI, 1994. 33–91.

4. Bar-Natan D. On the Vassiliev knot invariants // Topology. 1995. **34**. 423–472.

5. Chmutov S. V., Duzhin S., Mostovoy J. Introduction to Vassiliev Knot Invariants. — Cambridge: Cambridge University Press, 2012. xvi+504 pp.

УДК 514.122.2

Исследование задачи Аполлония для двух объектов

А. С. Кашина (Россия, г. Москва)
Московский педагогический государственный университет
e-mail: Aniusik01@mail.ru
Л. М. Цыбуля (Россия, г. Москва)
Московский педагогический государственный университет
e-mail: liliya-kinder@mail.ru

Research of the Apollonius problem for two objects

A. S. Kashina (Russia, Moscow)
Moscow Pedagogical State University
e-mail: Aniusik01@mail.ru
L. M. Tsybulya (Russia, Moscow)
Moscow Pedagogical State University
e-mail: liliya-kinder@mail.ru

Классическая задача (проблема) Аполлония заключается в построении с помощью циркуля и линейки окружности, касающейся трёх данных. При этом допускаются так называемые *вырожденные* случаи: любая из данных окружностей может являться точкой, то есть окружностью нулевого радиуса, или прямой, то есть окружностью бесконечного радиуса. Как известно, эта проблема обладает конечным числом решений, либо не имеет решений, если данные окружности концентрические.

Настоящая заметка посвящена исследованию задачи Аполлония не для трёх окружностей, а для двух, включая вырожденные случаи.

В работе представлена классификация всех случаев рассматриваемой задачи в зависимости от вида заданных объектов (точки, прямой или окружности) и от их взаимного расположения на вещественной координатной плоскости. Выявлены следующие группы (типы) задач:

1. Две точки.
2. Две прямые:
   - параллельны;
   - пересекаются.
3. Прямая и точка:
   - точка лежит на прямой;
   - точка не лежит на прямой.
4. Точка и окружность:
   - точка лежит на окружности;
   - точка лежит внутри окружности;
   - точка лежит вне окружности.
5. Прямая и окружность:

- окружность и прямая не имеют общих точек;
- прямая касается окружности;
- прямая пересекает окружность.

6. Две окружности:

- окружности не имеют общих точек и ни одна из них не находится внутри другой;
- окружности касаются внешним образом;
- окружности пересекаются;
- окружности касаются внутренним образом;
- одна окружность находится внутри другой.

Решение полученных типов задач основывается на понятиях геометрического места точек, равноудалённых от заданных объектов задачи, и на условиях равенств расстояний от предполагаемого центра искомой касательной окружности до каждого из заданных объектов.

В каждом из приведённых случаев проблемы Аполлония для двух объектов были не только найдены решения, но и указаны некоторые их взаимосвязи.

Отметим, что в отличие от классической задачи Аполлония решение всегда существует, более того, число решений бесконечно.

В следующих ниже утверждениях изложены основные результаты исследования.

Предложение 1. *Пусть даны две параллельные прямые на координатной плоскости Oxy. Тогда множество центров семейства окружностей, касающихся данных прямых, есть прямая, параллельная данным и равноудалённая от них. При этом радиус будет постоянен и равен расстоянию от прямой центров до одной из данных прямых.*

Предложение 2. *Пусть даны две пересекающиеся прямые на координатной плоскости Oxy. Тогда множество центров семейства окружностей, касающихся данных прямых, есть пара взаимно перпендикулярных прямых, являющихся биссектрисами углов, образованных данными прямыми, без одной точки – точки пересечения этих биссектрис.*

Теорема 1. *Пусть даны окружность и прямая на координатной плоскости Oxy.*

1.1. *Если окружность и прямая не имеют общих точек либо имеют ровно две общие точки, то множество центров семейства окружностей, касающихся данной окружности и данной прямой, есть пара парабол.*

1.2. *Если прямая касается заданной окружности, то множество центров семейства окружностей, касающихся данной окружности и данной прямой, есть парабола без точки – её вершины – и прямая, проходящая через центр данной окружности и точку касания окружности и прямой, без двух точек – центра данной окружности и точки касания заданной окружности и данной прямой.*

При условии, если заданная окружность вырождается в точку, получим случай задачи для точки и прямой.

Следствие 1. *Пусть даны точка и прямая на координатной плоскости Oxy.*

1.1. *Если точка не лежит на заданной прямой, то множество центров семейства окружностей, касающихся данной прямой и проходящих через эту точку, есть парабола, для которой данная точка является фокусом, а данная прямая – директрисой.*

1.2. *Если точка лежит на заданной прямой, то множество центров семейства окружностей, касающихся данной прямой в этой точке, есть прямая, перпендикулярная данной прямой, проходящая через данную точку и не включающая эту же точку.*

Для следующих теорем условимся, что радиусы заданных окружностей различны.

Теорема 2. *Пусть даны две окружности, не имеющие общих точек, и ни одна из них не находится внутри другой, на координатной плоскости Oxy. Тогда множество центров семейства окружностей, касающихся данных окружностей, есть пара гипербол.*

Теорема 3. *Пусть даны две окружности, касающиеся внешним образом, на координатной плоскости Oxy. Тогда множество центров семейства окружностей, касающихся данных окружностей, есть гипербола и прямая, проходящая через центры данных окружностей, без трёх точек – центров данных окружностей и точки их касания.*

Теорема 4. *Пусть даны две пересекающиеся окружности на координатной плоскости Oxy. Тогда множество центров семейства окружностей, касающихся данных окружностей, есть гипербола и эллипс.*

Теорема 5. *Пусть даны две окружности, касающиеся внутренним образом, на координатной плоскости Oxy. Тогда множество центров семейства окружностей, касающихся данных окружностей, есть эллипс и прямая, проходящая через центры данных окружностей, без трёх точек – центров данных окружностей и точки их касания.*

Теорема 6. *Пусть даны две окружности, одна из которых находится внутри другой (или являются концентрическими), на координатной плоскости Oxy. Тогда множество центров семейства окружностей, касающихся данных окружностей, есть пара эллипсов (или пара концентрических окружностей).*

В случае окружностей с равными радиусами справедлива следующая теорема.

Теорема 7. *Пусть даны две окружности с равными радиусами на координатной плоскости Oxy.*

7.1. *Если окружности не имеют общих точек и ни одна из них не находится внутри другой, то множество центров семейства окружностей, касающихся данных окружностей, есть гипербола и прямая.*

7.2. *Если окружности касаются внешним образом, то множество центров семейства окружностей, касающихся данных окружностей, есть пара взаимно перпендикулярных прямых, одна из которых проходит через центры данных окружностей. При этом исключаются три точки этой прямой: центры данных окружностей и точка их касания.*

7.3. *Если окружности пересекаются, то множество центров семейства окружностей, касающихся данных окружностей, есть эллипс и прямая.*

Стоит отметить, что решения задач для двух точек можно получить естественным образом из решений задач для двух окружностей, если обе окружности вырождаются в точки.

Следствие 2. *Пусть даны две точки на координатной плоскости Oxy. Тогда множество центров семейства окружностей, проходящих через данные точки, есть прямая, являющаяся серединным перпендикуляром к отрезку, соединяющему эти точки.*

Кроме того, если одна из заданных окружностей вырождается в точку, то задача для двух не взаимодействующих, касающихся или расположенных одна внутри другой окружностей, сводится к задаче для точки, лежащей вне, непосредственно на или внутри окружности соответственно.

Следствие 3. *Пусть даны точка и окружность на координатной плоскости Oxy.*

3.1. *Если точка расположена вне заданной окружности, то множество центров семейства окружностей, касающихся данной окружности и проходящих через эту точку, есть гипербола.*

3.2. *Если точка лежит на заданной окружности, то множество центров семейства окружностей, касающихся данной окружности в этой точке, есть прямая, соединяющая центр данной окружности и данную точку, без двух точек – центра данной окружности и заданной точки.*

3.3. *Если точка лежит внутри заданной окружности и не совпадает с её центром, то множество центров семейства окружностей, касающихся данной окружности и проходящих через эту точку, есть эллипс. Причём центр данной окружности и данная точка будут являться фокусами полученного эллипса. Если точка совпадает с центром данной окружности, то множество центров семейства окружностей есть окружность с центром в этой точке и радиусом, равным половине радиуса данной окружности.*

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Аргунов Б. И., Балк М. Б. Геометрические построения на плоскости. Пособие для студентов педагогических институтов. –М., Учпедгиз, 1957. 268 с.
2. Атанасян Л. С., Базылев В. Т. Геометрия. В 2-х ч. Ч. I. Учеб. пособие для студентов физ.-мат. фак. пед. ин-тов. – М.: Просвещение, 1986. – 336 с.
3. Выгодский М. Я. Справочник по высшей математике. – М.: АСТ: Астрель, 2006. – 991 с.
4. Р. Курант, Г. Роббинс. Что такое математика? — 9-е изд., исправленное. – М.: МЦНМО, 2019. 564 с.

УДК 514.113.5+515.164.2+548.1

К доказательству решения задачи М. М. Постникова о трёхмерных сферических многообразиях

Я. В. Кучериненко (Россия, г. Москва)
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
e-mail: yar_kuch@mail.ru

On the proof of the solution of the M. M. Postnikov problem on three-dimensional spherical manifolds

Ya. V. Kucherinenko (Russia, Moscow)
Lomonosov Moscow State University
e-mail: yar_kuch@mail.ru

В работе рассматриваются особенности доказательства результата, полученного в [1].

Классификация сферических многообразий хорошо изучена с точки зрения алгебры (особенно прост трёхмерный случай) [2]. М.М. Постников предложил вернуться к истокам и дать их геометрическое описание с помощью ячеек Дирихле-Вороного правильных систем точек на 3-сфере. Таких систем, которые являются орбитами дискретных групп, действующих без неподвижных точек [3]. Движения группы, переводящие ячейку в соседнюю по общей двумерной грани, одновременно отождествляют пары её граней, завершая таким образом геометрическое описание трёхмерных сферических многообразий. Среди всех пяти серий рассматриваемых многообразий Постников предъявил ячейку Дирихле-Вороного (для каждой из групп без неподвижных точек $C_n \times C_m$, $D_n^* \times C_m^*$, $T^* \times C_m^*$, $O^* \times C_m^*$, и $I^* \times C_m^*$)[1] только в двух первых сериях: в т.н. "линзах"и "призмах". Для остальных трёх серий было приведено геометрическое описание для первых членов, а именно, для пространств октаэдра, усечённого куба и додекаэдра, а остальные случаи натолкнулись на вычислительные трудности [3].

Подход, применённый для описания ориентаций компонентов в двойниках и сростках кристаллов, позволил нам разобраться в идее и технике работы [3], а также предъявить форму ячеек Дирихле-Вороного для каждой группы остальных трёх серий [4, 5] (см. Рис. 1 в [1]). Геометрия ячеек такова, что они имеют симметрию поворотов правильных трёх-, четырёх- и пятиугольных призм. Кроме того, ячейки отчасти напоминают призмы: каждая имеет по два основания (развёрнутые друг относительно друга вокруг вертикальной оси на угол, величиной равной толщине ячейки) и боковые грани.

Данная работа посвящена подходам и методам, позволившим упростить описание формы ячеек Дирихле-Вороного в $\mathbb{S}^3$, а также схемы отождествлений их двумерных граней.

1. Наряду с описанием геометрии ячеек непосредственно в $\mathbb{S}^3$, рассматривались их проекции на касательную гиперплоскость $\mathbb{R}^3$.

2. Предложены обозначения винтовых поворотов по образцу применяемых в обозначениях 230 фёдоровских групп ($2_1, 3_1, 3_2, 4_1, 4_3, 5_1, 5_2, 5_3, 5_4$ и т.п.). Это было сделано, следуя методике, рекомендованной в [6] для идентификации винтовых поворотов: операцию возводят в степень, находя минимальный целый показатель, при котором результирующая операция превращается в параллельный перенос (который затем делится на величину этого показателя степени). В результате получаем вектор смещения вдоль винтовой оси и однозначное её обозначение в зависимости от величины поворотной составляющей и величины сдвига. В нашем случае вместо параллельного переноса в $\mathbb{R}^3$ мы добиваемся клиффордова сдвига в $\mathbb{S}^3$. В остальном методики сходны и позволяют применить обозначения для винтовых осей дискретных групп, действующих в $\mathbb{S}^3$, аналогичные применяемым в 230 фёдоровских группах.

Это сильно упростило обозначения групповых операций и свело их количество от счётного множества к конечному числу (для серий $T^* \times C_m^*$, $O^* \times C_m^*$, и $I^* \times C_m^*$), а также позволило счётные множества этих групп свести к конечному числу их типов.

Характер действия поворотов осей (в виде предложенных обозначений) сильно упростил подтверждение комбинаторного устройства исследуемых ячеек Дирихле-Вороного, а также позволил найти и удобно расклассифицировать карты отождествлений (какие пары граней отождествляются с помощью каких движений). При этом каждая из серий 1, 2a и 2b (см. Рис. 1 в [1]) распадается на две подсерии, в которых одинаковым образом отождествляются грани оснований и по одинаковому принципу — боковые грани. Каждая из серий 3a и 3b распадается на четыре подсерии. Карты отождествлений призм (серия $D_n^* \times C_m^*$) естественным образом делятся на две подсерии (соответственно для конечного числа подсерий групп, имеющих сходные графические обозначения).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кучериненко Я. В, Макаров В. С. Задача М.М. Постникова о трёхмерных сферических многообразиях // XVIII Международная конференция «Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы, приложения и проблемы истории», посвященная 100-летию со дня рождения профессоров Б. М. Бредихина, В. И. Нечаева и С. Б. Стечки-

[1] m выбирается так, чтобы перемножаемые группы не имели одинаковых операций, помимо тождественной и, возможно, центральной симметрии в $\mathbb{R}^4 \supset \mathbb{S}^3$. Звёздочкой * обозначено удвоение группы при отображении группы конечных фигур, действующей в $\mathbb{R}^3$, в группу клиффордовых сдвигов в $\mathbb{S}^3$. Группы C_n, или C_m без звёздочки – это циклические группы клиффордовых сдвигов в $\mathbb{S}^3$, имеющие порядок n, или m. Для таких групп прообразы, действующие в $\mathbb{R}^3$, очевидно, существуют только при чётных n, или m.

на.: тезисы докладов международной конференции (Тула, 23-26 сентября 2020 г.) — Тула, 2020. С. 277-280., http://poivs.tsput.ru/conf/international/XVIII/files/Conference2020.pdf

2. Вольф Дж. Пространства постоянной кривизны. — М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1982. 480 с.
3. Постников М. М. Трехмерные сферические формы // Труды МИАН СССР. 1991. Том 196. С. 114–146. English version: M. M. Postnikov M. M. Three-dimensional spherical forms// Proc. Steklov Inst. Math., 196 (1992), 129—161.
4. Кучериненко Я. В., Макаров В. С. Геометрия бикристаллов и трёхмерные сферические многообразия //Материалы XII Международного семинара «Дискретная математика и её приложения» имени академика О.Б. Лупанова (Москва, 20-25 июня 2016 г.) — М.: МГУ, 2016. С. 360-362.
5. Кучериненко Я. В., Макаров В. С. Теория двойников и сростков кристаллов как раздел четырехмерной кристаллографии // Труды XIII Всероссийской научной школы "Математические исследования в естественных науках"(Апатиты, 17 октября 2016 г.) — Апатиты: Изд-во K&M, 2016. С. 52-63.
6. Wondratschek H. 8.1.5.Crystallographic symmetry operations // International Tables for Crystallography, 2006. Vol. A, Chapter 8.1. P. 720–725.

———————————————————————————————

УДК 514.174

Построение перекладывающихся полимино с симметриями

А. А. Мокрова (Россия, г. Владимир)
Владимирский государственный университет им. А. Г. и Н. Г. Столетовых
e-mail: albina.mokrova@yandex.ru
В. Г. Журавлев (Россия, г. Владимир)
Владимирский государственный университет им. А. Г. и Н. Г. Столетовых
e-mail: vzhuravlev@mail.ru

Construction of exchanged polyominoes with symmetries

A. A. Mokrova (Russia, Vladimir)
Vladimir State University
e-mail: albina.mokrova@yandex.ru
V. G. Zhuravlev (Russia, Vladimir)
Vladimir State University
e-mail: vzhuravlev@mail.ru

Полимино — фигура на плоскости, составленная из конечного числа единичных квадратов (клеток), которая сильно связна, то есть из любой клетки в любую другую клетку этого полимино можно попасть, переходя по общим сторонам смежных клеток.

Понятие и сам термин полимино были введены в 1953 году С. В. Голомбом [1].

Полимино называется трансляционным, если с его помощью можно заполнить всю плоскость используя только параллельные переносы. На основе результатов авторов [2], был разработан алгоритм построения трансляционных полимино [3]. Этот алгоритм базируется на использовании метода «звезды», разработанного В.Г. Журавлевым и впервые описанного в [4].

Пусть на плоскости имеется квадратная решетка S, базис которой $e_1 = (1,0), e_2 = (0,1)$. Договоримся, что любой луч на плоскости может проходить только по границе решетки S, начинаться и заканчиваться только в вершинах решетки S.

Опишем алгоритм построения трансляционных полимино с заданным числом клеток.

Алгоритм 1.

Шаг 1. Подобрать матрицу

$$M = \begin{pmatrix} n_{11} n_{12} \\ n_{21} n_{22} \end{pmatrix},$$

такую, что $det(M) = \pm n$. Здесь n – число клеток исходного полимино P, а $n_{11}, n_{12}, n_{21}, n_{22} \in N$,

Шаг 2. Построить на решетке S параллелограмм K, стороны которого задаются векторами $n_1 = (n_{11}e_1, n_{12}e_2), n_2 = (n_{21}e_1, n_{22}e_2)$, которые определяются строками матрицы M.

Отсюда координаты вершин параллелограмма $K_1 = (x_0, y_0)$, $K_2 = (x_0 + n_{11}, y_0 + n_12)$, $K_3 = (x_0 + n_{21}, y_0 + n_{22})$, $K_4 = (x_0 + n_{11} + n_{21}, y_0 + n_{12} + n_{22})$, $x_0, y_0 \in Z$.

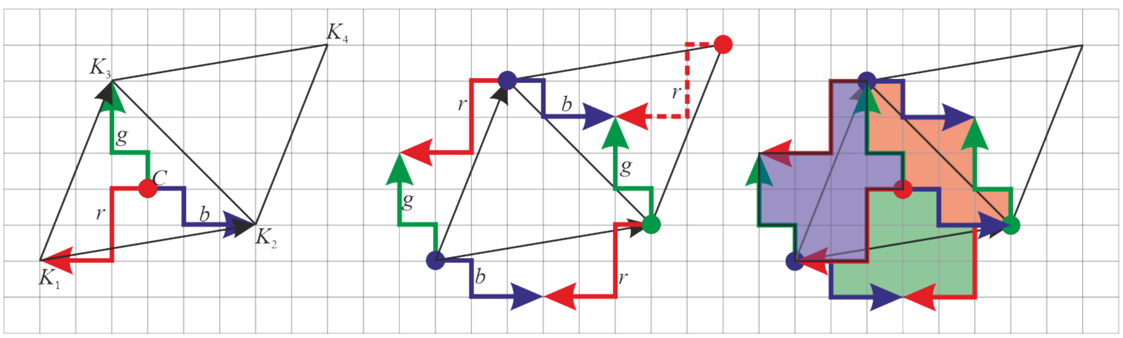


Рис. 1: Пример построения перекладывающегося полимино.

Шаг 3. Провести в параллелограмме K диагональ K_2K_3. Внутри треугольника $K_1K_2K_3$ построить «звезду» C следующим образом, выбрать внутри или на границе треугольника произвольную точку — центр «звезды» C_0 в одной из вершин решетки и соединить ее с вершинами треугольника $K_1K_2K_3$ лучами r, b, g соответственно.

Шаг 4. Построить на основе «звезды» C полимино P. От вершин K_2, K_3, K_4 параллелограмма K отложить луч r, и соединять концы отложенных лучей и вершину квадрата K_1 лучами b и g. Получим полимино P, образованное шестью лучами трех типов r, b, g, разбитое «звездой» C на три полимино R, B, G. □

В [5] показано, что данный алгоритм порождает трансляционные полимино P с векторами трансляции параллелограмма K. Полимино R, B, G составляющие исходное P также являются трансляционными, со своими векторами трансляции, как и полимино, составленные из любых их комбинаций.

Особый интерес в теории полимино представляют полимино с заданной симметрией, задаче о построении таких полимино и посвящена настоящая работа. Учитывая, что полимино строятся на базе квадратной решетки S, которая обладает четырьмя поворотными симметриями и четырьмя осевыми, искать симметрии полимино имеет смысл среди них.

Для построения полимино с заданной симметрией введем алгоритмы 2 — 4 [3].

Алгоритм 2 используется для построения центральносимметричных полимино.

Алгоритм 2.

1. Лучи r, g, b «звезды» C следует проводить так, чтобы каждый из них сам был центральносимметричным.

2. Центры симметрии лучей должны лежать либо в вершине квадратной решетки S, либо в центре ребра ее ячейки. □

На рисунке 2 представлен пример центральносимметричного полимино, полученного с помощью алгоритма 2. Центры симметрии лучей отмечены квадратными маркерами, точка O - центр симметрии полимино.

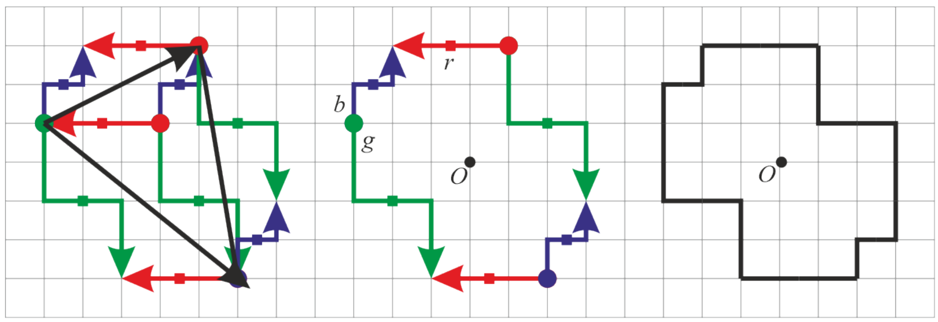


Рис. 2: Пример построения центральносимметричного полимино.

Алгоритм 2 один из наиболее простых алгоритмов, рассмотренных авторами в данной работе, его выполнение вызывает наименьшие затруднения.

Для построения полимино с поворотной симметрией четвертого порядка в [3] были описаны условия алгоритма 3.

Алгоритм 3.

1. Подобрать матрицу M так, чтобы веторы n_1, n_2 задавали квадрат K. Центры векторов n_1, n_2 должны лежать в центре ребра ячеек решетки.

2. Центр «звезды» C_0 выбрать в одной из вершин квадрата K, при этом один из лучей «звезды» C вырождается в точку.

3. Два невырожденных луча должны переводиться один в другой с помощью поворота на 90°, их следует провести так, чтобы они были центральносимметричными, при этом центры симметрии лучей должны располагаться в центрах векторов n_1, n_2. □

Пример полимино с поворотной симметрией четвертого порядка представлен на рисунке 3.

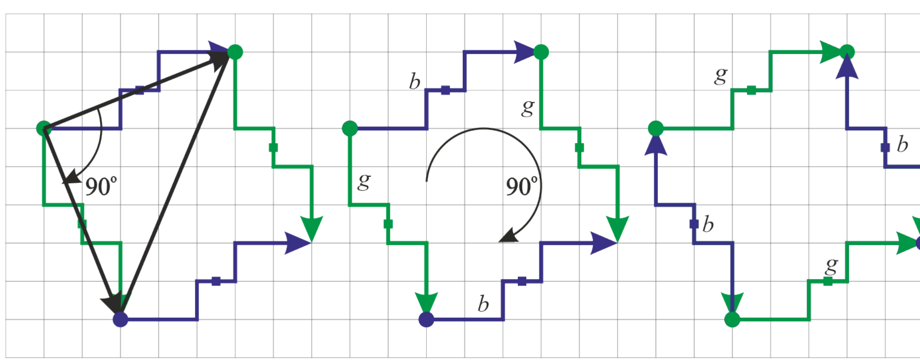


Рис. 3: Пример построения полимино с поворотной симметрией.

Поворотная симметрия четвертого порядка задает очень сильное ограничение на количество трансляционных полимино обладающих данной симметрий. Для колличества клеток полимино $n = 1$ — одно трансляционное полимино с поворотной симметрией четвертого порядка, для $n = 2, 3$ — нет полимино с данной симметрией, для $n = 4$ — одно полимино, удовлетворяющее условиям, для $n = 5$ — одно и т.д.

В алгоритме 4 описывается построение полимино с зеркальной симметрией.

Алгоритм 4.

1. Подобрать матрицу M так, чтобы направление одного из векторов $n_i, i = 1,2$ совпадало с направлением одного из базисных векторов e_1, e_2 решетки S соответственно, а его центр лежал в одной из вершин решетки S.

2. Центр «звезды» C_0 расположить в центре вектора n_i.

3.Один из лучей «звезды» C следует провести так, чтобы он был зеркально симметричен относительно оси, параллельной вектору n_i.

4. Два других луча «звезды» C, должны быть построены так, что бы их можно было перевести один в другой с помощью зеркальной симметрии относительно той же оси, параллельной вектору n_i. □

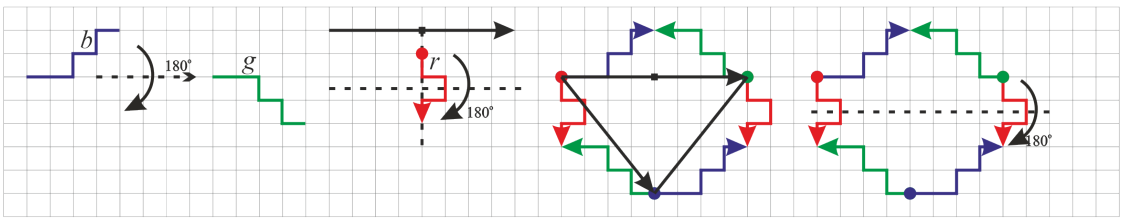


Рис. 4: Пример построения полимино с зеркальной симметрией.

В алгоритме 4 выбор одного из векторов $n_i, i = 1,2$ определяется выбором направления горизонтальной или вертикальной зеркальной оси симметрии. На рисунке 4 приведен пример полимино, построенного с помощью алгоритма 4. Зеркальная ось симметрии в данном примере параллельна вектору e_1 решетки S.

Помимо выше сказанного было обнаружено, что полимино P, построенные с помощью алгоритма 1, являются перекладывающимися (рис. 5). Перекладывающимся будем называть полимино P, если задано его разбиение на более мелкие полимино $P_1, P_1, \ldots, P_k$, такое, что их перекладывание вновь дает исходную фигуру.

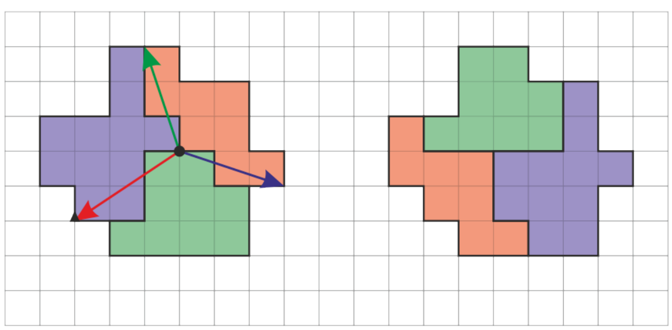


Рис. 5: Пример перекладывающегося полимино, построенного с помощью алгоритма.

«Звезда» C разбивает полимино P на три полимино R, B, G, перекладывание которых вновь дает исходное полимино, при этом векторы перекладывания C_0K_1, C_0K_2, C_0K_3 для этих полимино задаются лучами «звезды» C (рис. 5). Перекладывающиеся полимино играют важную роль и могут применяться в теории построения множеств ограниченного остатка и теории сбалансированных последовательностей.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Golomb S. W. Checker boards and polyominoes // American Mathematical Monthly. 1954. Vol. 61.P. 672-682.

2. Абросимова А.А., Журавлев В.Г. Двумерное обобщение теоремы Гекке и сбалансированные слова // Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения: тез. докл. VIII Международной конференции, посвященной 190-летию П.Л. Чебышева и 120-летию И.М. Виноградова — Саратов, 2011. С. 3-4.

3. Мокрова А.А., Журавлев В.Г. Перекладывающиеся полимино с симметриями // Математическая кристаллография и родственные задачи: материалы всерос. конф. с междунар. участием — Владимир, 2023. С. 17-21.

4. Журавлев В.Г., Осипова А.А. Полимино с симметриями: учебное пособие для самостоятельной работы по математике // Автоном. некоммерч. образоват. орг. высш. образования Центросоюза Рос. Федерации «Рос. ун-т кооперации», Владим. фил. – Владимир: ООО «Аркаим», 2016. – 48 с.

5. Осипова А.А., Монатова А.А. Построение перекладывающихся полимино // Актуальные проблемы развития науки и современного образования: сборник материалов Международной научно-практической конференции (Белгород, 10 апреля 2017 г). — Белгород, 2017. С. 57-59.

———————————————————————————————

УДК 512.644

О двоичных решениях у системы нескольких линейных уравнений по модулю три

А. В. Селиверстов (Россия, г. Москва)
Институт проблем передачи информации им. А. А. Харкевича РАН
e-mail: slvstv@iitp.ru

On binary solutions to a system of several linear equations modulo three

A. V. Seliverstov (Russia, Moscow)
Institute for Information Transmission Problems of the RAS (Kharkevich Institute)
e-mail: slvstv@itp.ru

Обозначим через $GF(3)$ поле вычетов по модулю три. Элементы поля $GF(3)$ будем обозначать числами из множества $\{0, 1, 2\}$.

Решение системы уравнений, в котором значение каждой переменной принадлежит множеству $\{0, 1\}$, называется $(0, 1)$-решением или двоичным решением. Распознавание существования $(0, 1)$-решения у системы линейных уравнений над полем $GF(3)$ служит примером NP-полной задачи. Однако для одного уравнения эта задача решается легко: только линейное уравнение вида $x_k = 2$ не имеет $(0, 1)$-решения, поскольку каждое линейное уравнение, нетривиально зависящее от двух или более переменных, имеет $(0, 1)$-решение. Более того, задача поиска $(0, 1)$-решения также разрешима за полиномиальное время для систем из фиксированного числа линейных уравнений. Например, можно использовать сводимость задачи над $GF(3)$ к аналогичной задаче над полем рациональных чисел, для решения которой известно много алгоритмов, см. [1, 2]. Мы же рассмотрим системы, в которых число уравнений ограничено не константой, а монотонно возрастающей функцией от числа переменных. Также обсуждаются вероятностные алгоритмы. Распределение значений сумм случайных $(0, 1)$-величин рассмотрено Яшунским [3].

Пусть система линейных уравнений от переменных $x_1, \ldots, x_n$ содержит больше одного уравнения и некоторое уравнение нетривиально зависит от переменной x_k. Будем говорить, что новая система линейных уравнений получена из исходной системы исключением переменной x_k, если новая система не зависит от переменной x_k, а исходная система эквивалентна объединению новой системы и ровно одного уравнения (зависящего от x_k), равного линейной комбинации уравнений исходной системы.

Исключение переменной может приводить к системе, имеющей большее число $(0,1)$-решений, чем было у исходной системы. Следующий результат справедлив лишь над полем $GF(3)$, но не над полями с большим числом элементов.

Предложение 1. *Даны натуральные числа n и m, удовлетворяющие неравенствам $n \geqslant 5$ и $2 \leqslant m \leqslant \log_3(2n-1)$, и система из m линейных уравнений от n переменных над полем $GF(3)$. Пусть для каждого индекса $1 \leqslant k \leqslant n$ существует уравнение, нетривиально зависящее от x_k. Если у этой системы нет $(0,1)$-решения, то существует такой индекс $1 \leqslant k \leqslant n$, что исключие переменной x_k вновь приводит к системе, у которой нет $(0,1)$-решения. Более того, эта подсистема может быть найдена за полиномиальное время.*

Доказательство.Систему уравнений можно записать в матричном виде $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, где через A обозначена $m \times n$ матрица коэффициентов линейных членов уравнений, а через $\mathbf{x}$ и $\mathbf{b}$ — столбцы из n переменных и m чисел, соответственно. По условию теоремы, в матрице A нет нулевых столбцов.

При условии $2 \leqslant m \leqslant \log_3(2n-1)$ в матрице A найдутся два линейно зависимых столбца. Действительно, число возможных различных ненулевых столбцов равно 3^m-1. Это множество разбивается на $(3^m-1)/2$ пар линейно зависимых столбцов. Поэтому выполнение условия $n \geqslant (3^m+1)/2$ обеспечивает, что в матрице A найдутся два линейно зависимых столбца. Обозначим номера этих столбцов через j и k. Найти номера j и k можно перебирая $n(n-1)/2$ вариантов и проверяя линейную зависимость соответствующих столбцов.

Исходная система $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ эквивалентна системе $B\mathbf{x} = \mathbf{c}$, где в $m \times n$ матрице B в столбцах с номерами j и k ненулевые элементы расположены лишь в одной строке, номер которой обозначим через ℓ. Здесь матрица B получается из матрицы A элементарными операциями над строками, а элемент столбца $\mathbf{c}$ равен соответствующей линейной комбинации элементов столбца $\mathbf{b}$. Если система уравнений, полученная удалением ℓ-го уравнения из этой системы уравнений, имеет $(0,1)$-решение, то она имеет $(0,1)$-решение при любых значениях переменных x_j и x_k. Следовательно, вся система тоже имеет $(0,1)$-решение, поскольку выбор значений переменных x_j и x_k позволяет выполнить ℓ-ое уравнение при любой оценке остальных переменных. Удаление ℓ-го уравнения соответствует исключению каждой из переменных x_j и x_k.

$\square$

Предложение 2. *Существует алгоритм полиномиального времени, который получает на вход систему из m линейных уравнений от n переменных над полем $GF(3)$ и при условии $m \leqslant \log_3 \log_3(2n-1)$ примимает вход тогда и только тогда, когда система имеет $(0,1)$-решение.*

Доказательство.Алгоритм в цикле делает попытки либо удалить уравнение, которое линейно зависит от остальных уравнений, либо исключить переменную в соответствии с предложением 1. Также удаляются из рассмотрения все переменные, которые не входят в новую систему. В случае успеха на очередном шаге будет получена система уравнений, состоящая из меньшего числа уравнений. При этом новая система имеет $(0,1)$-решение тогда и только тогда, когда исходная система имеет $(0,1)$-решение. После выполнения менее m шагов этот процесс останавливается в одном из двух возможных случаев: либо осталось одно уравнение, либо полученная система зависит от малого числа переменных.

Если осталось одно уравнение, то для уравнения вида $x_k = 2$ вход отвергается, а для уравнения другого вида вход принимается.

Если осталось k переменных, а система содержит несколько уравнений и не может быть уменьшена, то происходит разбор 2^k случаев. Оценим сверху число k. Поскольку оставшееся число уравнений не превышает числа m, выполнено неравенство $\log_3(2k-1) < m$. Но по условию применимости алгоритма выполнено $m \leqslant \log_3 \log_3(2n-1)$. Следовательно, выполнены неравенства $(2k-1) < \log_3(2n-1)$ и $k \leqslant 0.5 \log_3(2n-1) < 0.3155 \log_2(2n-1)$. Поэтому число различных $(0,1)$-оценок оставшихся k переменных меньше числа $(2n-1)^{0.3155}$.

□

Если условие $m \leqslant \log_3 \log_3(2n-1)$ из предложения 2 нарушено, то алгоритм всегда даст правильный ответ, но время работы может быть большим. Однако для большой доли случаев среди входов с данными значениями m и n время работы алгоритма будет маленьким даже при более слабом ограничении $m \leqslant \log_3(2n-1)$.

При данных значениях m и n, удовлетворяющих неравенству $m \leqslant \log_3(2n-1)$, почти любая система из m уравнений от n переменных над полем $GF(3)$ будет иметь много $(0,1)$-решений. С другой стороны, при этом условии существование $(0,1)$-решения всегда может быть проверено некоторым алгоритмом за квазиполиномиальное время $n^{O(\log n)}$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Селиверстов А. В. Двоичные решения для больших систем линейных уравнений // Прикладная Дискретная Математика. 2021. № 52. С. 5–15. https://doi.org/10.17223/20710410/52/1

2. Селиверстов А. В. Обобщение задачи о сумме подмножеств и кубические формы // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2023. Том 63, № 1. С. 51–60.

3. Яшунский А. Д. О суммах бернуллиевских случайных величин по модулю 3 // Математические заметки. 2022. Том 111, № 1. С. 154–157. https://doi.org/10.4213/mzm13214

———————————————————————————

УДК 519.147

Разбиение пространства на поликубы и плотнейшая упаковка пространства поликубами: способ верификации прямой и обратной задачи

К. Г. Серавкин (Россия, г. Владимир)
Владимирский государственный университет
e-mail: seravkin@rambler.ru

Tilings of space with polycubes and the densest polycube packings of space: way to verify direct and inverse problem

K. G. Seravkin (Russia, Vladimir)
Vladimir State University
e-mail: seravkin@rambler.ru

Предложен вариант подтверждения корректности алгоритма перебора трансляционных кубических разбиений пространства на поликубы и алгоритма поиска плотнейших (без пустот) трансляционных кубических упаковок пространства поликубами.

1. Определения

Определение 1. *Назовём поликубом геометрическую фигуру со связной внутренней областью, состоящую из конечного числа одинаковых единичных кубов - элементарных ячеек простой кубической решетки $L = \mathbb{Z}^3$. Назовём один такой куб ячейкой поликуба.*

Определение 2. *Назовём упаковкой поликуба P, такое расположение поликубов, эквивалентных P с точностью до движения, в пространстве, при котором любые два поликуба не имеют общих внутренних точек.*

Определение 3. *Назовём упаковку поликуба, у которой центры ячеек поликубов лежат на кубической решетке $\mathbb{Z}^3$, кубической упаковкой поликуба.*

Определение 4. *Упаковка поликуба называется периодической, если её группа симметрии содержит в качестве подгруппы трехмерную группу трансляций некоторой подрешетки $\Lambda \subset L$.*

Определение 5. *Плотность упаковки – это доля пространства, заполненного фигурами, составляющими упаковку. Плотность кубической периодической упаковки совпадает с отношением объема поликуба к объему фундаментальной области решетки трансляций $\rho = V/N$.*

Определение 6. *Упаковка поликуба с плотностью $\rho = 1$ называется разбиением.*

2. Разбиения пространства на поликубы и упаковки поликуба

В дальнейшем будем рассматривать только периодические кубические упаковки и разбиения.

В работе [2] представлен алгоритм перебора периодических кубических упаковок заданного поликуба. Данный алгоритм не только предоставляет критерий проверки наличия упаковки поликуба, но и предъявляет все такие упаковки. Это так называемая прямая задача. На вход алгоритма подается поликуб, на выходе получаем подрешетку трансляции и код упаковки. По подрешетке и коду однозначно восстанавливается упаковка поликуба. У алгоритма есть вариации для одного поликуба и для набора поликубов.

В работе [1] представлен алгоритм перебора разбиений плоскости на полимино. Алгоритм легко обобщается на трехмерный случай. Это так называемая обратная задача. Алгоритм перебирает все подрешетки трансляции(их конечное число) и все возможные коды упаковок. Код упаковки представляет из себя число в восьмиричной системе исчисления. Код упаковки проверяется на валидность и на выходе получаем поликуб или набор поликубов, у которых упаковка точно существует.

Естественным образом возникает желание сравнить результаты работы двух независимых алгоритмов. Нужно взять каталог всех поликубов объёма N и каждому поликубу присвоить взаимно однозначный код. Например, в качестве такого кода может быть самый короткий лексикографический код обхода поликуба методом ближайшего соседа. С одной стороны, нужно взять все поликубы из каталога и найти для них всевозможные кода упаковок, с другой стороны нужно перебрать все кода упаковок и определить кода поликубов, которые возникли в разбиении. Полученные массивы данных должны совпасть.

Проблема состоит в том, что не существует каталогов поликубов для больших N. Например, для $N = 16$ всего существует 29915913663 поликубов. Если каждую точку поликуба хранить тремя координатами(3 байта), то понадобится 48 байт на поликуб. Тогда, на весь каталог поликубов с $N = 16$ понадобится 1,3 Тб. Это очень большой объём информации, не на каждом компьютере есть дисковая система такого объёма.

Раз хранить полные каталоги поликубов нельзя, то есть вариант совместить поиск упаковок поликуба с генерацией поликубов. Запускаем генератор поликубов, как только он выдаёт валидный поликуб, подаём его в алгоритм поиска упаковок, нигде не сохраняя. Если упаковка поликуба найдена, то запоминаем полученные кода упаковок. Проверка упаковок поликуба происходит относительно быстро, основные временные затраты - это генерация поликубов. Таким образом, получаем две сравнимые по сложности вычислений задачи: генерация поликубов и перебор разбиений.

Количество поликубов для каждого N - величина известная. Поэтому появляется дополнительный способ проверки алгоритмов поиска упаковок поликубов, на который можно опереться.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Малеев А.В. Алгоритм и программа перебора разбиений плоскости на полимино // Кристаллография. 2001. Том 46, № 1. С. 165-167.

2. Серавкин К.Г., Малеев А.В., Шутов А.В. Алгоритмы перебора вариантов решётчатых и периодических упаковок трехмерных поликубов // Математические исследования в естественных науках. 2018. № 14. С. 68-78.

УДК 514.172.45

О многогранниках, близких к RR-многогранникам

В. И. Субботин (Россия, г. Новочеркасск)
Южно-Российский государственный политехнический университет им. М. И. Платова;
Донской государственный аграрный университет
e-mail: geometry@mail.ru

On polyhedra close to RR-polyhedra

V. I. Subbotin (Russia, Novocherkassk)
Platov South-Russian State Polytechnic University; Don State Agrarian University
e-mail: geometry@mail.ru

В работе [1] была доказана полнота списка замкнутых выпуклых многогранников с правильными гранями. Установленная полнота списка правильногранников относится к тому направлению в современной геометрии, в котором изучаются различные классы многогранников с геометрическими условиями на грани.

Настоящий доклад продолжает исследование выпуклых многогранников с ромбическими вершинами и правильными гранями различного вида. Замкнутый выпуклый многогранник в E^3 называется RR-многогранником первого типа, если множество его граней является объединением двух непересекающихся непустых множеств: множества граней (ромбов, не квадратов), образующих звезды симметричных ромбических вершин и множества правильных граней одного типа. Если указанные правильные грани — различного вида, то многогранник называется RR-многогранником второго типа.

RR-многогранники первого типа полностью перечислены автором ранее, в их списке оказалось только 23 многогранника, среди которых имеются многогранники с не более, чем двумя симметричными ромбическими вершинами, [2], [3]. Далее, в работе [4] найдены все составные RR-многогранником второго типа: существуют только пятьдесят четыре составных RR-многогранника второго типа. Под составными понимается такой RR-многогранник, который можно некоторой плоскостью разбить на ромбические пирамиды и многогранники с правильными гранями.

В [5] найдены некоторые несоставные RR-многогранники второго типа. Для полного перечисления всех RR-многогранников второго типа нужно исключить из рассмотрения некоторые многогранники, которые "близки"к RR-многогранникам в том смысле, что их материальные модели могут быть построены.

В настоящем докладе доказываются следующие утверждения о несуществовании таких RR-многогранников. Те многогранники, которые могут быть получены из некоторого известного многогранника M удалением некоторых его граней с последующим добавлением новых граней, естественно называть *связанными* с M.

Утверждение 1. *RR-многогранник, связанный с плосконосым кубом, не существует.*

В докладе даётся новое доказательство этому факту. Доказательство основано на том, что не существует непрерывного изгибания, сохраняющего симметрию относительно главной оси "плосконосого куба с границей". Под последним понимается многогранник, который получается из плосконосого куба после удаления из него одной квадратной грани и четырёх треугольных граней, соседних с квадратной по ребру.

Утверждение 2. *Не существует RR-многогранников, связанных с додекаэдром и икосододекаэдром.*

Замечание 1. *Для многогранника, связанного с додекаэдром, его близость к RR-многограннику подтверждается тем, что некоторый двугранный угол $\psi \approx 174,409^\circ$ мало отличается от развёрнутого угла.*

Замечание 2. *Для многогранника, связанного с икосододекаэдром, его близость к RR-многограннику подтверждается тем, что некоторый треугольник мало отличается от правильного: два его угла равны $\alpha \approx 54,056^\circ$.*

При доказательстве утверждения 2 так же используется, в частности, неизгибаемость с сохранением симметрии частей соответствующих правильных многогранников.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Залгаллер В. А. Выпуклые многогранники с правильными гранями. //Зап. научн. сем. ЛОМИ. 1967. Том 2. С. 1–220.

2. Субботин В. И. О полноте списка выпуклых RR-многогранников //Чебышевский сборник. 2020. Том 21, № 1. С. 297–309.

3. Субботин В. И. О существовании и полноте перечисления трёхмерных RR-многогранников //Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. 2022. Том 216. С. 106–115.

4. Subbotin V. I. On the composite RR-polyhedra of the second type //Siberian Mathematical Journal. 2023. Vol. 64, № 2. Pp.500—506.

5. Субботин В. И. О несоставных RR-многогранниках второго типа //Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. 2023. Том 221. С. 104–114.

УДК 517.518

Кривые Пеано и «длина» квадрата

Е. В. Щепин (Россия, г. Москва)
Математический институт имени В. А. Стеклова РАН
e-mail: scepin@mi-ras.ru

Peano curves and the "length" of the square

E. V. Shchepin (Russia, Moscow)
Steklov Mathematical Institute of RAS
e-mail: scepin@mi-ras.ru

1. Проблема Какутани — Гомори

Какутани и Гомори предложили следующее обобщение понятия длины, применимое к многомерным метрическим пространствам (см. [1]).

k-*мерной вариацией* (k-вариацией) последовательности точек метрического пространства $x_0, x_1, \dots, x_n$ называется сумма k-ых степеней расстояний между ее последовательными членами $\sum_{i=1}^{n} |x_{i-1} - x_i|^k$.

k-мерной вариацией конечного множества точек называется минимум k-мерных вариаций последовательностей, содержащих все точки этого множества.

Определение 1. *k-мерной длиной Какутани — Гомори компакта называется верхняя грань k-вариаций его конечных подмножеств.*

Заметим, что одномерная длина Какутани — Гомори спрямляемой кривой совпадает с обычной. Какутани — Гомори пытались определить двумерную длину квадрата. Следующая проблема остается открытой.

Задача 1. *Чему равна двумерная длина Какутани — Гомори единичного квадрата с евклидовой метрикой?*

Поскольку четырех-точечное множество состоящее из вершин единичного квадрата, очевидно имеет 2-вариацию равную трем, постольку евклидова двумерная длина Какутани — Гомори единичного квадрате не меньше трех. Оценки сверху для длины Какутани — Гомори можно получить с помощью кривых Пеано.

Определим k-мерную вариацию кривой $p\colon I \to X$ как верхнюю грань k-мерных вариаций последовательностей $p(t_0), \dots p(t_n)$, таких что $t_0 < t_1 < \dots < t_n$. Очевидно, что k-мерная вариация кривой дает оценку сверху для k-мерной длины Какутани — Гомори ее образа.

Отображение отрезка на метрический компакт $p\colon I \to X$ называется *гельдерово непрерывным* степени k, если для $t, t' \in I$ ограничено отношение

$$\frac{|p(t) - p(t')|^k}{|t - t'|} \tag{1}$$

Верхнюю грань этого отношения называем k-мерным растяжением кривой p.

Утверждение 1. *k-мерная вариация гельдерово-непрерывной кривой кривой $p\colon I \to X$ не превосходит произведения длины отрезка L на k-мерное растяжение кривой λ.*

Доказательство. Пусть $\{x_0, x_1, \dots x_n\}$ конечное подмножество компакта X. Тогда найдутся точки $t_0, \dots, t_n$, такие что $x_i = p(t_i)$ для всякого i. Упорядочим точки так, чтобы $t_0 < t_1 < \dots < t_n$. В таком случае k-вариация последовательности $\{x_i\}$ оценивается сверху суммой $\lambda(t_i - t_{i-1}) = \lambda L$ □ Какутани — Гомори применили это утверждение к известной кривой Серпинского, отображающей единичный отрезок на единичный квадрат с двумерным растяжением равным четырем, и получили, что длина Какутани — Гомори единичного квадрата не превосходит четырех.

2. Гипердлина

Заметим, что k-мерная вариация подпоследовательности при $k > 1$ может быть больше k-вариации этой последовательности. Это мотивирует введение следующего понятия.

Определение 2. *k-мерной гипервариацией последовательности точек метрического пространства называется максимум k-вариаций ее подпоследовательностей.*

Соответственно k-мерной гипервариацией конечного множества точек называется минимум k-мерных гипервариаций последовательностей содержащих все точки этого подмножества. И k-мерной *гипердлиной* компакта называется верхняя грань k-мерных гипервариаций его конечных подмножеств. И утверждение 1, очевидно, остается справедливым для гипердлины. Следующая теорема доказана Ю.Малыхиным (не опубликована).

Теорема 1. *Если выпуклый компакт имеет k-мерную гипердлину L, то существует отображение единичного отрезка на этот компакт с k-мерным растяжением L.*

Таким образом задача определения k-мерной гипердлины выпуклого компакта оказывается равносильной задаче построения кривой, отображающей единичный отрезок на квадрат с минимальным k-мерным растяжением. И проблема нахождения "константы Пеано"для квадрата сформулированная в статье [5] превращается в задачу определения двумерной гипердлины квадрата.

Длина Какутани — Гомори любого компакта, очевидно, не превосходит его гипердлины соответствующей размерности. Для равнобедренного прямоугольного треугольника двумерная длина Какутани — Гомори совпадает с его 2-мерной гипердлиной и равна его учетверенной площади (см. [2]). Из полученных в статье [4] оценок вытекает, что двумерная (евклидова) гипердлина единичного квадрата больше чем $3\frac{5}{8}$.

В общем случае длина Какутани — Гомори отличается от гипердлины, как показывает следующее утверждение.

Теорема 2. *Евклидова 2-мерная длина Какутани — Гомори границы единичного квадрата равна трем, а его евклидова 2-мерная гипердлина равна трем с половиной.*

Представленный результат дает основание для выдвижения следующей гипотезы.

Гипотеза 4. *Евклидова двумерная длина Какутани — Гомори единичного квадрата равна трем, а его евклидова двумерная гипердлина равна четырем.*

3. О гипердлине кубов

Про трехмерный единичный куб известны [3] следующие границы для его евклидовой гипердлины. $(11.1, 17)$. Евклидова гипердлина Пеано четырехмерного единичного куба заключена в интервале $(32, 62)$ (см. [3]) Причем нижняя оценка основана на следующей неопубликованной теореме автора.

Теорема **3.** *4-мерная евклидова гипервариация множества вершин единичного четырехмерного куба равна 32.*

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Мандельброт Б., "Фрактальная геометрия природы."— Москва: Институт компьютерных исследований, 2002, 656 стр.

2. E. V. Shchepin, “On the Sierpinski–Knopp curve”, Russian Math. Surveys, 75:2 (2020), 377–379

3. Yuri Malykhin, Evgeny Shchepin, “Search of fractal space-filling curves with minimal dilation”, Discrete Comput. Geom., 70 (2023), 189–213

4. Е. В. Щепин, Е. Ю. Мычка, “О нижних оценках квадратно-линейного отношения плоских кривых Пеано”, Матем. заметки, 110:2 (2021), 289–296

5. Щепин Е. В., “О фрактальных кривых Пеано”, Геометрическая топология и теория множеств, Сборник статей. К 100-летию со дня рождения профессора Людмилы Всеволодовны Келдыш, Тр. МИАН, **247**, Наука, М., 2004, 294–303; Proc. Steklov Inst. Math., **247** (2004), 272–280

———————————————————————

Секция 8. Теоретико-числовой метод в приближенном анализе и теория приближений

УДК 511.482

Анализ видеоизображений в рамках задачи вычисления локальных деформаций при растяжении[1]

Ю. А. Басалов (Россия, г. Тула)
Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого
e-mail: basalov_yurij@mail.ru
А. Н. Чуканов (Россия, г. Тула)
Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого
e-mail: alexchukanov@yandex.ru
Е. В. Цой (Россия, г. Тула)
Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого
e-mail: tsoyev@tsput.ru

Analysis of video images within the problem of calculating local tensile strains

Yu. A. Basalov (Russia, Tula)
Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University
e-mail: basalov_yurij@mail.ru
A. N. Chukanov (Russia, Tula)
Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University
e-mail: alexchukanov@yandex.ru
E. V. Tsoi (Russia, Tula)
Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University
e-mail: tsoyev@tsput.ru

Рассмотрим следующую задачу — дано фото- или видеоизображение содержащий объект с нанесенными на него параллельными линиями. Необходимо измерить расстояние между линиями в процессе деформации объекта с максимально возможной точностью. Это задачу можно разбить на 2 части: первая — обнаружить линии на изображении, вторая — корректно сопоставить линии на изображении и линии на объекте.

Основная проблема задачи сопоставления линий заключается в том, что исходное изображение является двухмерной проекцией трехмерного объекта. Чаще всего это приводит к тому, что изначально параллельные линии становятся не параллельными (искажение перспективы). Это проблема давно изучена и может быть решена с помощью линейного преобразования вида [1]

$$(x', y', w') = (x, y, 1) \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Задача определения линий более сложна. Если пренебречь дефектами оптики и матриц цифровых фотоаппаратов (из-за чего линия всегда имеет толщину несколько пикселей), основной проблемой является зашумленность изображения (см. рис. 1).

[1]Работа выполнена в рамках государственного задания Министерства просвещения РФ соглашение №073-03-2023-303/2 от 14.02.23 г. тема научного исследования «Теоретико-числовые методы в приближенном анализе и их приложения в механике и физике»

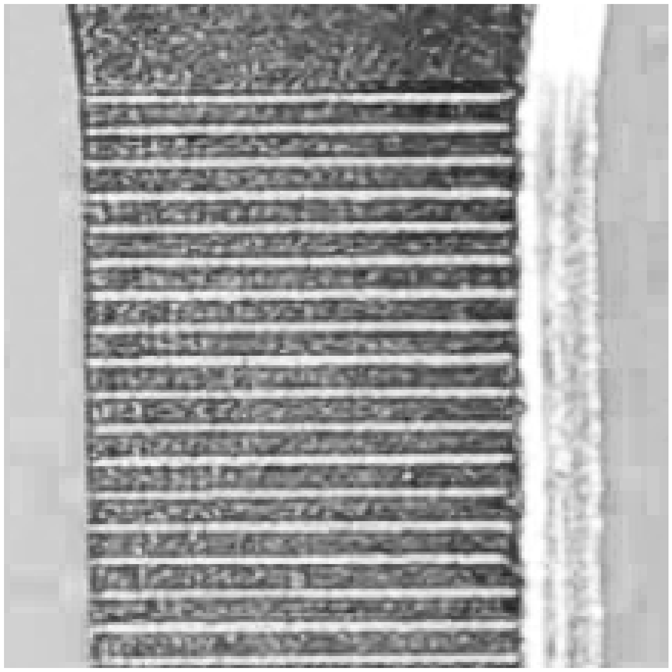


Рис. 1: Пример изображения реального образца

Поэтому классические алгоритмы распознавания линий (LSD, преобразование Радона) показывают не очень хорошие результаты при работе с реальными изображениями.

Поэтому в последние годы были разработаны ряд алгоритмов, которые ориентированны на работы с реальными изображениями. Например,

- *SCAD (Sum of Gradient Angle Differences)* [3]. Статистический алгоритм, предполагающий наличие нормально распределенного шума. Обладает высокой производительностью благодаря тому, что основан на простейших линейных преобразованиях.
- *LCNN* [2]. Нейронная сеть для поиска прямых линий на изображении.
- *MCMLSD (Markov Chain Marginal Line Segment Detector)* [4].

Данные алгоритмы позволяют достаточно надежно находить линии на изображении, однако качество их работы непосредственно зависит от изображений с которыми происходит работа. При этом ограничения по точности распознавания линий около 1 пикселя накладывают высокие требования на фотоборудование при проведении экспериментов, предполагающих последующую детектирование линий на изображениях.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Моськин Г. В., Никитенков В. Л., Ситкарев Г. А., Синтез матрицы преобразования перспективы // Вестник Сыктывкарского университета. Серия 1. Математика. Механика. Информатика. 2013. №17.

2. Yichao Zhou, Haozhi Qi, Yi Ma, End-to-End Wireframe Parsing // arXiv.org. 2021. Дата обновления: 04.05.2021. URL: https://arxiv.org/abs/1905.03246 (дата обращения: 10.08.2023).

3. Suyoung Seo, Line-Detection Based on the Sum of Gradient // Angle Differences Applied Sciences, Vol. 10, Iss. 1, 2019. https://doi.org/10.3390/app10010254

4. James H. Elder, Emilio J. Almazàn, Yiming Qian, Ron Tal, MCMLSD: A Probabilistic Algorithm and Evaluation Framework for Line Segment Detection // arXiv.org. 2020. Дата обновления: 06.01.2020. URL: https://arxiv.org/abs/2001.01788 (дата обращения: 10.08.2023).

———————————————————————————————

УДК 517.9

Задачи с кубическими нелинейностями

А. И. Денисов (Россия, г. Тула)
Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого
e-mail: den_tspu@mail.ru
И. В. Денисов (Россия, г. Тула)
Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого
e-mail: den_tspu@mail.ru

Problems with Cubic Nonlinearities

A. I. Denisov (Russia, Tula)
Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University
e-mail: den_tspu@mail.ru
I. V. Denisov (Russia, Tula)
Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University
e-mail: den_tspu@mail.ru

В прямоугольнике $\Omega = \{(x,t)\,|\,0 < x < 1,\ 0 < t < T\}$ рассматривается начально-краевая задача для сингулярно возмущенного параболического уравнения

$$\varepsilon^2\left(a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial t}\right) = F(u,x,t,\varepsilon), \quad (x,t)\in\Omega,$$

$$u(x,0,\varepsilon) = \varphi(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant 1,$$

$$u(0,t,\varepsilon) = \psi_1(t), \quad u(1,t,\varepsilon) = \psi_2(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T.$$

Предполагается, что в угловых точках $(k,0)$ прямоугольника Ω, где $k=0$ или 1, функция $F(u) = F(u,k,0,0)$ имеет вид

$$F(u) = u^3 - \bar{u}_0^3, \quad \text{где} \quad \bar{u}_0 = \bar{u}_0(k,0) < 0.$$

Для построения асимптотики решения задачи используется нелинейный метод угловых пограничных функций. Ранее был рассмотрен случай, когда граничное значение φ в угловых точках отделено от точки перегиба $u=0$ условием

$$\bar{u}_0 < \varphi \leq \frac{\bar{u}_0}{2} < 0,$$

при котором на роль барьерных подошли функции "простейшего"вида, пригодные сразу во всей рассматриваемой области. В настоящей работе рассматривается случай

$$\frac{\bar{u}_0}{2} < \varphi < 0,$$

при котором область приходится разбивать на части, в каждой подобласти строить свои барьерные функции с учетом их непрерывной стыковки на общих границах подобластей, а затем проводить сглаживание кусочно-непрерывных нижних и верхних решений. В результате получается полное асимптотическое разложение решения при $\varepsilon \to 0$ и обосновывается его равномерность в замкнутом прямоугольнике.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Денисов И.В. Угловой пограничный слой в краевых задачах с нелинейностями, имеющими стационарные точки // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2021. Т.61. №11. С. 1894–1903.

2. Денисов А.И., Денисов И.В. О нелинейном методе угловых пограничных функций // Дифференциальные уравнения и математическое моделирование. Межвузовский сборник научных трудов. Отв. редактор С. С. Мамонов. Рязань, 2022. С. 41-42.

3. Денисов А.И., Денисов И.В. Нелинейный метод угловых пограничных функций в задачах с кубическими нелинейностями // Чебышевский сборник. Т.24. Вып. 1 (88). - Тула: Изд-во Тул. гос. пед. ун-та им. Л.Н. Толстого, 2023. Т. 24. № 1. С. 27-39.

———————————————————————————————

УДК 511.3+511.4

Об оценках типа Быковского для отклонений обобщенных параллелепипедальных сеток[1]

Н. М. Добровольский (Россия, г. Тула)
Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого
e-mail: dobrovol@tsput.ru

On Bykovsky-type estimates for discrepancy of generalized parallelepipedal lattice

N. M. Dobrovol'skii (Russia, Tula)
Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University
e-mail: dobrovol@tsput.ru

Данная работа посвящена получению оценок типа оценок Быковского для отклонения обобщённой параллелепипедальной сетки. В ней продолжены исследования аналогичные тем, что ранее мы выполнили для оценок меры качества и количественной меры параллелепипедальной сетки.

Основная идея, используемая в данной работе, восходит к работе В. А. Быковского (2002 год) об оценке погрешности приближенного интегрирования по параллелепипедальным сеткам и её обобщению в работе О. А. Горкуши и Н. М. Добровольского (2005 год) на случай гиперболической дзета-функции произвольной решётки. Центральное место в этих работах играет множество Быковского, состоящее из локальных минимумов второго рода, и суммы по этим множествам.

Рассмотрим в s-мерном вещественном арифметическом пространстве $\mathbb{R}^s$ произвольную решётку $\Lambda = \Lambda(\vec{\lambda}_1, \ldots, \vec{\lambda}_s)$ с базисом $\vec{\lambda}_1, \ldots, \vec{\lambda}_s$, который является линейно независимой системой векторов:

$$\Lambda = \Lambda(\vec{\lambda}_1, \ldots, \vec{\lambda}_s) = \left\{ m_1\vec{\lambda}_1 + \ldots + m_s\vec{\lambda}_s \,\middle|\, m_1, \ldots, m_s \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Ненулевая точка $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_s) \in \Lambda$ называется локальным минимумом второго рода, если не существует другой ненулевой точки $\vec{y} = (y_1, \ldots, y_s) \in \Lambda$, для которой

$$\overline{y_1} \leqslant \overline{x_1}, \ldots, \overline{y_s} \leqslant \overline{x_s}; \quad \overline{y_1} + \ldots + \overline{y_s} < \overline{x_1} + \ldots + \overline{x_s}.$$

[1]Исследование выполнено РНФ № 23-21-00317 по теме "Геометрия чисел и диофантовы приближения в теоретико-числовом методе в приближенном анализе".

Минимальным множеством решётки Λ назовем множество $B(\Lambda)$, состоящее из всех локальных минимумов $\vec{x}$ второго рода.

Из дискретности решётки и теоремы Минковского о выпуклом теле следует, что для произвольной решётки её минимальное множество $B(\Lambda)$ конечно и не пусто, при этом $\overline{x_j} < \det\Lambda$ $(j = 1, \dots, s)$.

Пусть $\vec{x}_j = (x_{1\,j}, \dots, x_{s\,j}) \quad (1 \leqslant j \leqslant r,\ r = r(\Lambda))$ есть все локальные минимумы второго рода из минимального множества $B(\Lambda)$ решётки Λ. Так как для любого локального минимума второго рода $\vec{x}$ точка $-\vec{x}$ также является локальным минимумом второго рода, то $r(\Lambda)$ — чётное натуральное число. Через $B^*(\Lambda)$ обозначим множество локальных минимумов второго рода, где из каждой пары $\vec{x}$ и $-\vec{x}$ взят ровно один. Таким образом

$$B(\Lambda) = B^*(\Lambda)\bigcup -B^*(\Lambda). \tag{1}$$

Если $r^*(\Lambda) = |B^*(\Lambda)|$, то $r(\Lambda) = 2r^*(\Lambda)$. Будем предпологать, что нумерация локальных минимумов согласована с разбиением (1): $\vec{x}_j \in B^*(\Lambda)$ $(j = 1, \dots, r^*)$ и $\vec{x}_{j+r^*} = -\vec{x}_j \in -B^*(\Lambda)$ $(j = 1, \dots, r^*)$. Ясно, что для гиперболического параметра решётки справедливо равенство

$$q(\Lambda) = \min_{1\leqslant j\leqslant r} \overline{x}_{1\,j} \dots \overline{x}_{s\,j}.$$

Как и в работе «Об оценках Быковского для меры качества оптимальных коэффициентов» был обнаружен эффект, что в оценках отклонения появляется множитель с логарифмическим порядком роста, который стал входить в определение модифицированной суммы Быковского.

Методом работы является объединение подходов из работы «Оценки отклонений обобщенных параллелепипедальных сеток» (1984 год) с подходами 2005 года.

Теорема 1. *Пусть для решётки Λ справедливы неравенства $q(\Lambda) > 1$, $\det\Lambda > 4$, тогда для отклонения обобщённой параллелепипедальной сетки $M(\Lambda)$ решётки Λ справедливо неравенство*

$$D_s(N) \leqslant 2\cdot 4^s(\det\Lambda)\left(\frac{(\ln(\det\Lambda+1)+4)^s}{\pi^s}\sum_{j=1}^{r^*}\frac{1}{\overline{x_{1\,j}}\dots\overline{x_{s\,j}}} + \frac{1}{\det\Lambda}\right), \tag{2}$$

$$N = \det\Lambda + \theta(\Lambda)4^s(\det\Lambda)\left(\frac{(\ln(\det\Lambda+1)+4)^s}{\pi^s}\sum_{j=1}^{r^*}\frac{1}{\overline{x_{1\,j}}\dots\overline{x_{s\,j}}} + \frac{1}{\det\Lambda}\right), \tag{3}$$

где N — количество точек сетки $M(\Lambda)$ и $|\theta(\Lambda)| \leqslant 1$.

Намечены дальнейшие пути для получения уточнения полученных оценок.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Быковский В. А. О погрешности теоретико-числовых квадратурных формул // Чебышевский сборник, 2002, т. 3, вып. 2(4), С. 27–33.

2. О. А. Горкуша, Н. М. Добровольский. Об оценках гиперболической дзета-функции решёток // Чебышевский сборник, 2005, т. 6, вып. 2(14), С. 130–138.

3. А. Н. Кормачева, Н. Н. Добровольский, И. Ю. Реброва, Н. М. Добровольский. Об оценках Быковского для отклонений обобщенных параллелепипедальных сеток // Чебышевский сборник, 2023, т. 24, вып. 2, с. 214–227.

———————————————————————————————————————

УДК 517.51

Обобщенное преобразование Ганкеля на прямой[1]

В. И. Иванов (Россия, г. Тула)
Тульский государственный университет; Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого
e-mail: ivaleryi@mail.ru

Generalized Hankel transform on the line

V. I. Ivanov (Russia, Tula)
Tula State University; Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University
e-mail: ivaleryi@mail.ru

1. Введение

Пусть $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ — пространство Шварца бесконечно дифференцируемых на $\mathbb{R}$ и быстро убывающих на бесконечности функций, $J_\alpha(x)$ — функция Бесселя первого рода порядка $\alpha \geqslant -1/2$, $j_\alpha(x) = 2^\alpha\Gamma(\alpha+1)x^{-\alpha}J_\alpha(x)$ — нормированная функция Бесселя, Π — множество алгебраических многочленов, $\{P_n^{(\alpha)}(t)\}_{n=0}^\infty$ — многочлены Гегенбауэра, ортогональные на отрезке $[-1,1]$ с весом $(1-t^2)^\alpha$, $\alpha > -1$, и нормированные условием $P_n^{(\alpha)}(1) = 1$,

$$(\alpha)_0 = 1, \quad (\alpha)_n = \frac{\Gamma(\alpha+n)}{\Gamma(\alpha)} = \alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1), \quad n \geqslant 1,$$

— символ Похгаммера.

Пусть $a > 0$, $k \geqslant 0$, $2k+a-1 > 0$, $\lambda = (2k-1)/a$, $v_{k,a}(x) = |x|^{2k+a-2}$ – степенной вес, $d\mu_{k,a}(x) = c_{k,a}v_{k,a}(x)dx$ – нормированная мера на прямой, $c_{k,a}^{-1} = 2a^\lambda\Gamma(\lambda+1)$.

В 2012 г. С. Бен Саид, Т. Кобаяши и Б. Орстед [1] определили двупараметрическое (k,a)-обобщенное унитарное преобразование Фурье, которое в одномерном случае имеет вид

$$\mathcal{F}_{k,a}(f)(y) = \int_{\mathbb{R}} f(x)b_{k,a}(xy)\,d\mu_{k,a}(x), \tag{1}$$

где ядро

$$b_{k,a}(xy) = j_\lambda\Big(\frac{2}{a}\,|xy|^{a/2}\Big) + \frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\lambda+1+2/a)}\,\frac{xy}{(ai)^{2/a}}\,j_{\lambda+\frac{2}{a}}\Big(\frac{2}{a}\,|xy|^{a/2}\Big). \tag{2}$$

Оно является обобщением классического преобразования Фурье на случай степенного веса на прямой ($a = 2, k = 0$), а также обобщением преобразования Данкля ($a = 2$) (см. [2]). Но в отличие от преобразований Фурье и Данкля, для которых пространство Шварца является инвариантным, обобщенное преобразование Фурье при $a \neq 2$ обладает деформационными свойствами и пространство Шварца для него не является инвариантным (см. [3]). В частности, $\mathcal{F}_{k,a}(f)$ быстро убывает на бесконечности для любой $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, если только $a = \frac{2}{n}$, $n \in \mathbb{N}$.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Министерства образования и науки РФ на развитие молодежных лабораторий, в рамках реализации ТГПУ им. Л. Н. Толстого программы "Приоритет 2030" по Соглашению №073-03-2022-117/7 по теме "Теоретико-числовые методы в приближенном анализе и их приложения в механике и физике."

Последовательность $a=\frac{2}{n}$ естественным образом разбивается на две подпоследовательности $a=\frac{2}{2r+1}$, $r\in\mathbb{Z}_+$, и $a=\frac{1}{r}$, $r\in\mathbb{N}$. Для первой подпоследовательности преобразование $\mathcal{F}_{k,a}$ имеет порядок 4, а для второй — порядок 2. Преобразование $\mathcal{F}_{k,a}$ для первой подпоследовательности назовем обобщенным преобразованием Данкля, так как преобразование Данкля является его частным случаем ($r=0$), а для второй — обобщенным преобразованием Ганкеля. Для обобщенного преобразования Ганкеля как и для преобразования Ганкеля на полупрямой $\mathcal{F}_{k,a}^{-1}=\mathcal{F}_{k,a}$.

Доклад посвящен изложению свойств обобщенного преобразования Ганкеля. Оно задается формулой (1), а его ядро, получаемое из формулы (2), имеет вид

$$e_{k,a}(xy)=j_\lambda\big(2r|xy|^{\frac{1}{2r}}\big)+\frac{(-1)^r r^{2r}xy}{(\lambda+1)_{2r}}\,j_{\lambda+2r}\big(2r|xy|^{\frac{1}{2r}}\big). \tag{3}$$

Пусть $\lambda>-1/2$, $d\nu_\lambda(x)=c_\lambda|x|^{2\lambda+1}\,dx$ — нормированная мера на прямой $\mathbb{R}$ со степенным весом, $c_\lambda^{-1}=2^{\lambda+1}\Gamma(\lambda+1)$, $dm_\lambda(t)=\widetilde{c}_\lambda(1-t^2)^{\lambda-1/2}\,dt$ — вероятностная мера на отрезке $[-1,1]$, $(\widetilde{c}_\lambda)^{-1}=\sqrt{\pi}\Gamma(\lambda+1/2)/\Gamma(\lambda+1)$.

Замена переменных в формулах (1), (3)

$$(2r)^{1/2}|x|^{\frac{1}{2r}}\operatorname{sign}x\to x,\quad (2r)^{1/2}|y|^{\frac{1}{2r}}\operatorname{sign}y\to y,$$

где $k=(\lambda a+1)/2$, $\lambda>-1/2$, приводит к недеформированному обобщенному унитарному преобразованию Ганкеля

$$\mathcal{F}_{r,\lambda}(f)(x)=\int_{\mathbb{R}}f(x)e_{r,\lambda}(xy)\,d\nu_\lambda(x), \tag{4}$$

у которого ядро

$$e_{r,\lambda}(xy)=j_\lambda(xy)+(-1)^r\frac{(xy)^{2r}\operatorname{sign}(xy)}{2^{2r}(\lambda+1)_{2r}}j_{\lambda+2r}(xy). \tag{5}$$

Преобразование (1) будем называть деформированным обобщенным преобразованием Ганкеля. Оба преобразования имеют одинаковые с точностью до замены переменных свойства, но работать удобнее с преобразованием (4), поэтому в дальнейшем будем излагать только его свойства.

Пусть $1\leqslant p\leqslant\infty$, $L^p(\mathbb{R},d\nu_\lambda)$ — лебегово пространство ν_λ-измеримых комплекснозначных функций с конечной нормой

$$\|f\|_{p,d\nu_\lambda}=\Big(\int_{\mathbb{R}}|f(x)|^p\,d\nu_\lambda(x)\Big)^{1/p},\ 1\leqslant p<\infty,\quad \|f\|_\infty=\operatorname{vrai}\sup_{\mathbb{R}}|f(x)|,\ p=\infty,$$

$C_b(\mathbb{R})$ — множество непрерывных ограниченных функций, $C_0(\mathbb{R})$ — множество непрерывных бесконечно малых на бесконечности функций,

$$\mathcal{A}=\{f\in C_b(\mathbb{R})\colon f,\mathcal{F}_{r,\lambda}(f)\in L^1(\mathbb{R},d\nu_\lambda)\}.$$

Мы будем писать $A\lesssim B$, если выполнено неравенство $A\leqslant cB$ с константой $c>0$, зависящей только от несущественных параметров. Как обычно, показатель p и сопряженный показатель p' связаны соотношением $1/p+1/p'=1$.

2. Общие свойства

Обозначим $\|e_{r,\lambda}(xy)\|_\infty=M_{r,\lambda}$. При $\lambda>-1/2$ для ядра (5) справедливо представление (см. [3])

$$e_{r,\lambda}(xy)=\int_{-1}^{1}(1+\operatorname{sign}(xy)P_{2r}^{(\lambda-1/2)}(t))\,e^{-ixyt}\,dm_\lambda(t).$$

Отсюда вытекают оценки

$$M_{r,\lambda} \leqslant 1 + d_{2r,\lambda-1/2}, \ -1/2 < \lambda < 0; \quad M_{r,\lambda} = 1, \ \lambda \geqslant 0,$$

где $d_{n,\alpha} = \|P_n^{(\alpha)}\|_\infty$. Отметим, что $d_{n,\alpha} = 1$ для $\alpha \geqslant -1/2$ (см. [3]).

Ядро $e_{r,\lambda}(xy)$ является собственной функцией дифференциально-разностного оператора

$$\Delta_{r,\lambda} f(x) = f''(x) + \frac{2\lambda+1}{x} f'(x) - 2r(r+\lambda)\frac{f(x)-f(-x)}{x^2}.$$

Справедливы равенства

$$(\Delta_{r,\lambda})_x e_{r,\lambda}(xy) = -y^2 e_{r,\lambda}(xy), \quad \Delta_{r,\lambda}(x^{2r}\mathrm{sign} x) = 0.$$

Пусть для $r \in \mathbb{N}$

$$\mathcal{S}_r(\mathbb{R}) = \{f(x) = F_1(x) + x^{2r}\mathrm{sign} x F_2(x) \colon \ F_1, F_2 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}), \ F_1, F_2 - \text{четные}\}.$$

Отметим, что $\mathcal{S}_r(\mathbb{R}) \subset \mathcal{A}$ и $\mathcal{S}_r(\mathbb{R})$ плотно в пространствах $L^p(\mathbb{R}, d\nu_\lambda)$, $1 \leqslant p < \infty$, и $C_0(\mathbb{R})$.

Теорема 1. *Если $f \in \mathcal{S}_r(\mathbb{R})$, то $\mathcal{F}_{r,\lambda}(f)$, $\Delta_{r,\lambda} f \in \mathcal{S}_r(\mathbb{R})$.*

Таким образом, пространство $\mathcal{S}_r(\mathbb{R})$ является инвариантным для операторов $\mathcal{F}_{r,\lambda}$ и $\Delta_{r,\lambda}$.

Теорема 2. *Если $f \in \mathcal{S}_r(\mathbb{R})$ и $n \in \mathbb{N}$, то*

$$\int_{\mathbb{R}} \Delta_{\lambda,r}^n f(x) e_{r,\lambda}(xy)\, d\nu_\lambda(x) = (-1)^n y^{2n} \int_{\mathbb{R}} f(x) e_{r,\lambda}(xy)\, d\nu_\lambda(x).$$

3. Операторы обобщенного сдвига и свертки

Для $x, y \in \mathbb{R}$ рассмотрим два оператора обобщенного сдвига

$$\tau^y f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e_{r,\lambda}(yz) e_{r,\lambda}(xz) \mathcal{F}_{r,\lambda}(f)(z)\, d\nu_\lambda(z) \tag{6}$$

и

$$T^y f(x) = \frac{\tau^y f(x) + \tau^{-y} f(x)}{2} = \int_{-\infty}^{\infty} j_\lambda(yz) e_{r,\lambda}(xz) \mathcal{F}_{r,\lambda}(f)(z)\, d\nu_\lambda(z). \tag{7}$$

Пусть $A = \sqrt{x^2 + y^2 - 2xyt}$, $|t| \leqslant 1$, $\lambda_0 = \lambda - 1/2$. Для операторов (6), (7) справедливы интегральные представления

$$\tau^y f(x) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \Big\{ f(A)\Big(1 + \mathrm{sign}(xy) P_{2r}^{(\lambda_0)}(t) + \mathrm{sign} x P_{2r}^{(\lambda_0)}\Big(\frac{x-yt}{A}\Big) + \mathrm{sign} y P_{2r}^{(\lambda_0)}\Big(\frac{y-xt}{A}\Big)\Big)$$
$$+ f(-A)\Big(1 + \mathrm{sign}(xy) P_{2r}^{(\lambda_0)}(t) - \mathrm{sign} x P_{2r}^{(\lambda_0)}\Big(\frac{x-yt}{A}\Big) - \mathrm{sign} y P_{2r}^{(\lambda_0)}\Big(\frac{y-xt}{A}\Big)\Big)\Big\}\, dm_\lambda(t)$$

и

$$T^y f(x) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \Big\{ f(A)\Big(1 + \mathrm{sign} x P_{2r}^{(\lambda_0)}\Big(\frac{x-yt}{A}\Big)\Big) + f(-A)\Big(1 - \mathrm{sign} x P_{2r}^{(\lambda_0)}\Big(\frac{x-yt}{A}\Big)\Big)\Big\}\, dm_\lambda(t).$$

На подпространстве четных функций

$$\tau^y f(x) = \int_{-1}^{1} f(A)\big(1 + \mathrm{sign}(xy) P_{2r}^{(\lambda_0)}(t)\big)\, dm_\lambda(t).$$

Интегральные представления операторов обобщенного сдвига получены на основе теорем умножения для функций Бесселя

$$j_\lambda(xz)j_\lambda(yz)=\int_{-1}^{1}j_\lambda(Az)\,dm_\lambda(t),$$

$$\frac{(xz)^{2r}j_{\lambda+2r}(xz)}{2^{2r}(\lambda+1)_{2r}}\frac{(yz)^{2r}j_{\lambda+2r}(yz)}{2^{2r}(\lambda+1)_{2r}}=\int_{-1}^{1}j_\lambda(Az)P_{2r}^{(\lambda_0)}(t)\,dm_\lambda(t),$$

$$(xz)^{2r}j_{\lambda+2r}(xz)j_\lambda(yz)=\int_{-1}^{1}j_{\lambda+2r}(Az)(Az)^{2r}P_{2r}^{(\lambda_0)}\Big(\frac{x-yt}{A}\Big)\,dm_\lambda(t).$$

Первые две теоремы умножения легко выводятся из теоремы сложения Гегенбауэра для функций Бесселя, третья доказана в статье [4].

Пусть

$$M_{\lambda,r}^{\tau}=\begin{cases}1+3d_{2r,\lambda_0},\ -1/2<\lambda<0,\\ 4,\ \lambda\geqslant 0,\end{cases}\qquad M_{\lambda,r}^{T}=\begin{cases}1+d_{2r,\lambda_0},\ -1/2<\lambda<0,\\ 1,\ \lambda\geqslant 0.\end{cases}$$

Для норм операторов (6), (7) справедливы следующие оценки.

Теорема 3. *Для всех $1\leqslant p\leqslant\infty$, $y\in\mathbb{R}$, $r\in\mathbb{N}$, $\lambda>-1/2$, линейные операторы* (6), (7) *ограничены в пространствах $L^p(\mathbb{R},d\nu_\lambda)$ и для их норм справедливы оценки*

$$\|\tau^y\|_{p\to p}\leqslant M_{\lambda,r}^{\tau},\quad \|T^y\|_{p\to p}\leqslant M_{\lambda,r}^{T}.$$

На подпространстве четных функций $\|\tau^y\|_{p\to p}\leqslant M_{\lambda,r}^{T}$. Для всех $x\in\mathbb{R}$ справедливы также неравенства

$$\Big(\int_{\mathbb{R}}|T^yf(x)|^p\,d\nu_\lambda(y)\Big)^{1/p}\leqslant\big(1+d_{2r,\lambda_0}\big)\big\|f\big\|_{p,d\nu_\lambda},\quad -1/2<\lambda<0,$$

$$\Big(\int_{\mathbb{R}}|T^yf(x)|^p\,d\nu_\lambda(y)\Big)^{1/p}\leqslant\big\|f\big\|_{p,d\nu_\lambda},\quad \lambda\geqslant 0.$$

С помощью операторов τ^y и T^y определим две свертки

$$(f*_\tau g)(x)=\int_{\mathbb{R}}f(y)\tau^xg(y)\,d\nu_\lambda(y),\quad (f*_T g)(x)=\int_{\mathbb{R}}T^yf(x)g(y)\,d\nu_\lambda(y).\tag{8}$$

В свертке, определяемой с помощью оператора T^y, предполагается, что функция $g(x)$ четная.

С помощью теоремы 3 для сверток доказывается теорема Юнга.

Теорема 4. *Пусть $1\leqslant p,q\leqslant\infty$, $1/p+1/q\geqslant 1$ и $1/s=1/p+1/q-1$. Если $f\in L^p(\mathbb{R},d\nu_\lambda)$, $g\in L^q(\mathbb{R},d\nu_\lambda)$, то*

$$\|(f*_\tau g)\|_{s,d\nu_\lambda}\leqslant M_{r,\lambda}^{\tau}\|f\|_{p,d\nu_\lambda}\|g\|_{q,d\nu_\lambda},$$

$$\|(f*_T g_e)\|_{s,d\nu_\lambda}\leqslant M_{r,\lambda}^{T}\|f\|_{p,d\nu_\lambda}\|g_e\|_{q,d\nu_\lambda}.$$

Связь между двумя свертками устанавливается в следующей теореме.

Теорема 5. *Если $f\in\mathcal{A}$, $g\in L^1(\mathbb{R},d\nu_\lambda)$ и g — четная, то для всех $x,y\in\mathbb{R}$,*

$$(f*_\tau g)(x)=(f*_T g)(x)=\int_{\mathbb{R}}\tau^yf(x)g(y)\,d\nu_\lambda(y),$$

$$\mathcal{F}_{r,\lambda}(f*_\tau g)(y)=\mathcal{F}_{r,\lambda}(f*_T g)(y)=\mathcal{F}_{r,\lambda}(f)(y)\mathcal{F}_{r,\lambda}(g)(y).$$

Если $f\in L^p(\mathbb{R},d\nu_\lambda)$, $1\leqslant p<\infty$, то $(f*_\tau g)(x)=(f*_T g)(x)$ почти всюду.

4. L^p-сходимость и сходимость почти всюду обобщенных средних

Пусть

$$\varepsilon > 0, \quad \varphi \in \mathcal{A}, \quad \varphi(0) = 1, \quad \widehat{\varphi} = \mathcal{F}_{r,\lambda}(\varphi), \quad \widehat{\varphi}_\varepsilon(y) = \mathcal{F}_{r,\lambda}(\varphi(\varepsilon(\cdot)))(y).$$

Тогда

$$\widehat{\varphi}_\varepsilon(y) = \varepsilon^{-2(\lambda+1)}\widehat{\varphi}\big(\varepsilon^{-1}y\big), \quad \widehat{\varphi}_\varepsilon \in L^1(\mathbb{R}, d\nu_\lambda) \cap C_0(\mathbb{R}), \quad \int_{\mathbb{R}} \widehat{\varphi}_\varepsilon(y)\, d\nu_\lambda(y) = 1.$$

Под $L^\infty(\mathbb{R}, d\nu_\lambda)$ далее будем понимать $C_0(\mathbb{R})$. Для $f \in L^p(\mathbb{R}, d\nu_\lambda)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, с помощью свертки (8) определим (r, λ)-обобщенные средние

$$\Phi_\varepsilon^\tau f(x) = (f *_\tau \widehat{\varphi}_\varepsilon)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(y)\tau^x \widehat{\varphi}_\varepsilon(y)\, d\nu_\lambda(y). \tag{9}$$

Функцию φ назовем генератором обобщенных средних (9). Если функция $\varphi(x)$ — четная, то согласно теореме 5 почти всюду

$$\Phi_\varepsilon^\tau f(x) = \Phi_\varepsilon^T f(x) = (f *_T \widehat{\varphi}_\varepsilon)(x) = \int_{\mathbb{R}} T^y f(x) \widehat{\varphi}_\varepsilon(y)\, d\nu_\lambda(y).$$

При рассмотрении средних $\Phi_\varepsilon^T f(x)$ будем всегда предполагать, что генератор четный.

По теореме 4 Юнга

$$\|\Phi_\varepsilon^\tau f\|_{p,d\nu_\lambda} \leqslant M_{r,\lambda}^\tau \|\widehat{\varphi}_\varepsilon\|_{1,d\nu_\lambda} \|f\|_{p,d\nu_\lambda}, \quad \|\Phi_\varepsilon^T f\|_{p,d\nu_\lambda} \leqslant M_{r,\lambda}^T \|\widehat{\varphi}_\varepsilon\|_{1,d\nu_\lambda} \|f\|_{p,d\nu_\lambda}. \tag{10}$$

Пусть

$$\omega_\tau(\delta, f)_{p,d\nu_\lambda} = \sup_{|y| \leqslant \delta} \|\tau^y f - f\|_{p,d\nu_\lambda}, \quad \omega_T(\delta, f)_{p,d\nu_\lambda} = \sup_{|y| \leqslant \delta} \|T^y f - f\|_{p,d\nu_\lambda}$$

– модули непрерывности функции $f \in L^p(\mathbb{R}, d\nu_\lambda)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$.

Лемма 1. *Если $f \in L^p(\mathbb{R}, d\nu_\lambda)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, то*

$$\omega_\tau(\delta, f)_{p,d\nu_\lambda} \leqslant \big(1 + M_{r,\lambda}^\tau\big) \|f\|_{p,d\nu_\lambda}, \quad \omega_T(\delta, f)_{p,d\nu_\lambda} \leqslant \big(1 + M_{r,\lambda}^T\big) \|f\|_{p,d\nu_\lambda},$$

$$\lim_{\delta \to 0} \omega_\tau(\delta, f)_{p,d\nu_\lambda} = 0, \quad \lim_{\delta \to 0} \omega_T(\delta, f)_{p,d\nu_\lambda} = 0.$$

С помощью леммы 1 доказываем L^p-сходимость обобщенных средних (9) на плотном множестве $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. Отсюда и из неравенств (10) по теореме Банаха–Штейнгауза получаем утверждение.

Теорема 6. *Пусть $\varphi \in \mathcal{A}$, $\varphi(0) = 1$, $\widehat{\varphi} = \mathcal{F}_{r,\lambda}(\varphi)$. Если $f \in L^p(\mathbb{R}, d\nu_\lambda)$ при $1 \leqslant p \leqslant \infty$, то*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \|f - \Phi_\varepsilon^\tau f\|_{p,d\nu_\lambda} = 0.$$

Следствие 1. *Если в условиях теоремы 6 функция φ — четная, то для любой $f \in L^p(\mathbb{R}, d\nu_\lambda)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$,*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \|f - \Phi_\varepsilon^T f\|_{p,d\nu_\lambda} = 0.$$

Пусть $\Phi^\tau f(x) = \sup_{\varepsilon > 0} |\Phi_\varepsilon^\tau f(x)|$ – мажоранта обобщенных средних, $E_f = \{x\colon |f(x)| > \alpha\}$, $d_f(\alpha) = \int_{E_f} d\nu_\lambda(x)$ — функция распределения f, $L^{p,\infty}(\mathbb{R}, d\nu_\lambda)$ — множество измеримых функций, для которых конечна квазинорма $\|f\|_{p,\infty,d\nu_\lambda} = \sup\{\alpha (d_f(\alpha))^{1/p}\colon \alpha > 0\}$.

Пространство $L^{p,\infty}(\mathbb{R}, d\nu_\lambda)$ называют слабым L^p-пространством, так как имеет место строгое вложение $L^p(\mathbb{R}, d\nu_\lambda) \subset L^{p,\infty}(\mathbb{R}, d\nu_\lambda)$ и $\|f\|_{p,\infty,d\nu_\lambda} \leqslant \|f\|_{p,d\nu_\lambda}$.

При исследовании сходимости почти всюду обобщенных средних $\Phi_\varepsilon^\tau f(x)$ опираемся на следующее утверждение типа теоремы Банаха–Штейнгауза (см. [5, Theorem 2.1.14]).

Теорема 7. *Пусть $1 \leqslant p < \infty$, множество $D \subset L^p(\mathbb{R}, d\nu_\lambda)$ плотно в $L^p(\mathbb{R}, d\nu_\lambda)$. Если для любой $f \in L^p(\mathbb{R}, d\nu_\lambda)$ выполнено неравенство*

$$\|\Phi^\tau f\|_{p,\infty,d\nu_\lambda} \lesssim \|f\|_{p,d\nu_\lambda} \tag{11}$$

и для любой $f \in D$ обобщенные средние $\Phi_\varepsilon^\tau f(x)$ сходятся к $f(x)$ почти всюду, то они сходятся к $f(x)$ почти всюду для любой $f \in L^p(\mathbb{R}, d\nu_\lambda)$.

Чтобы получить оценку (11) используем максимальную функцию Харди–Литтлвуда

$$\mathcal{M}_{r,\lambda} f(x) = \sup_{s>0} \frac{\left|\int_{\mathbb{R}} f(y)\tau^x \chi_{[-s,s]}(y)\, d\nu_\lambda(y)\right|}{\int_{\mathbb{R}} \chi_{[-s,s]}(y) d\nu_\lambda(y)} = \sup_{s>0} \frac{\left|\int_{\mathbb{R}} T^y f(x)\chi_{[-s,s]}(y) d\nu_\lambda(y)\right|}{\int_{\mathbb{R}} \chi_{[-s,s]}(y) d\nu_\lambda(y)},$$

где $\chi_{[-s,s]}$ — характеристическая функция отрезка $[-s,s]$. Для максимальной функции справедливо слабое L^1-неравенство и сильное L^p-неравенство при $1 < p < \infty$ (см. [6]).

Лемма 2. *Если $\lambda \geqslant 0$, $\gamma > 0$, $\varphi(x)$ — четный генератор, справедлива оценка $|\widehat{\varphi}(y)| \lesssim (1+|y|)^{-(2\lambda+2+\gamma)}$ и $f \in L^p(\mathbb{R}^d, d\nu_\lambda)$, $1 \leqslant p < \infty$, то для почти всех $x \in \mathbb{R}$, $\Phi^\tau f(x) \lesssim \mathcal{M}_{r,\lambda}|f|(x)$.*

При доказательстве леммы 2 используется положительность оператора T^y для $\lambda \geqslant 0$. По лемме 2 неравенство (11) выполнено. На множестве $D = \mathcal{S}_r(\mathbb{R})$ имеет место равномерная сходимость, поэтому из теоремы 7 вытекает следующее утверждение.

Теорема 8. *Пусть $\lambda \geqslant 0$, $\gamma > 0$, четная функция $\varphi \in \mathcal{A}$, $\varphi(0) = 1$, и $|\widehat{\varphi}(y)| \lesssim (1 + |y|)^{-(2\lambda+2+\gamma)}$. Если $f \in L^p(\mathbb{R}, d\nu_\lambda)$, $1 \leqslant p < \infty$, то почти всюду $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \Phi_\varepsilon^\tau f(x) = f(x)$.*

В статье [7] для преобразования Данкля исследована L^p-сходимость и сходимость почти всюду средних Гаусса–Вейерштрасса, Пуассона и Бохнера–Рисса с четными генераторами $\varphi_1(x) = e^{-x^2/2}$, $\varphi_2(x) = e^{-|x|}$, $\delta > 0$, $\varphi_3(x) = (1-|x|^2)^\delta$ при $|x| \leqslant 1$ и $\varphi_3(x) = 0$ при $|x| > 1$ соответственно. Эти генераторы являются генераторами аналогичных средних и для обобщенного преобразования Ганкеля и для них выполнены условия теорем 6, 8 (для средних Бохнера–Рисса при δ, больших критического показателя $\delta_0 = \lambda + 1/2$). Следовательно, и для этих обобщенных средних имеет место L^p-сходимость и сходимость почти всюду.

5. Заключение

Результаты, изложенные в докладе, публикуются в статье [8].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ben Saïd S., Kobayashi T., Ørsted B. Laguerre semigroup and Dunkl operators // Compos. Math. 2012. Vol. 148, no. 4. P. 1265–1336.

2. Rösler M. Dunkl operators. Theory and applications: in Orthogonal Polynomials and Special Functions // Lecture Notes in Math. Springer-Verlag, 2002. Vol. 1817. P. 93–135.

3. Gorbachev D., Ivanov V., Tikhonov S. On the kernel of the (κ, a)-Generalized Fourier transform // Forum of Mathematics, Sigma. 2023. Vol. 11: e72 1–25. Published online by Cambridge University Press: 14 August 2023. Doi: https://doi.org/10.1017/fms.2023.69.

4. Boubatra M. A., Negzaoui S., Sifi M. A new product formula involving Bessel functions // Integral Transforms Spec. Funct. 2022. Vol. 33, no. 3. P. 247–263.

5. Grafacos L. Classical Fourier Analysis. Graduate Texts in Mathematics 249. – New York: Springer Science+Business Media, LLC, 2008. 489 p.

6. Ben Saïd S., Negzaoui S. Norm inequalities for maximal operators // Journal of Inequalities and Applications. 2022. Article number: 134. https://doi.org/10.1186/s13660-022-02874-1.

7. Thangavelu S., Xu Y. Convolution operator and maximal function for Dunkl transform // J. d'Analyse. Math. 2005. Vol. 97. P. 25–55.

8. Иванов В. И. Обобщенное преобразование Ганкеля на прямой // Чебышевский сборник. 2023. Том 24 (в печати).

———————————————————————————————

УДК 517.948

Коэрцитивные оценки решения нелинейных эллиптических дифференциальных уравнений недивергентного вида

О. Х. Каримов (Таджикистан, г. Душанбе)
Институт математики им. А. Джураева Национальной академии наук Таджикистана
e-mail: karimov_olim@mail.ru

Coercive estimates of the solution of nonlinear elliptic differential equations of a nondivergent form

O. Kh. Karimov (Tajikistan, Dushanbe)
A. Dzhuraev Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Tajikistan
e-mail: karimov_olim@mail.ru

В данной работе речь идет о коэрцитивной оценке решения эллиптических дифференциальных уравнений в пространстве $L_2(R^n)$. В работах (см.[1]-[5] и имеющиеся там ссылки) исследуются коэрцитивные оценки и разделимость дифференциальных выражений.

Символом $L_2(R^n)$ обозначим пространство с конечной нормой

$$\|u; L_2(R^n)\| = \left\{\int_{R^n} |u(x)|^2 dx\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

В пространстве $L_2(R^n)$ рассматриваем дифференциальное уравнение

$$-\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + V(x)u(x) = f(x), \quad u(x) \in W^2_{2,loc}(R^n), \tag{1}$$

где $a_{ij}(x) \in C^2(R^n)$, а $V(x)$ -положительная функция.

Для формулировки результата введем функции

$$F(x) = V^{\frac{1}{2}}(x),\ Q(x) = F^2(x)$$

Пусть для всех $x \in R^n$ функция $F(x)$ удовлетворяет условиям

$$\left\|a_{ij}^{-\frac{1}{2}}(x)\frac{\partial a_{ij}(x)}{\partial x_i}F^{-1}\right\|^2 \le \sigma_1, \tag{2}$$

$$\left\| a_{ij}^{\frac{1}{2}}(x) F^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial F}{\partial x_i} F^{-\frac{3}{2}} \right\|^2 \leqslant \sigma_2, \tag{3}$$

Также предполагается, что для всех $x \in R^n$ выполнена неравенство

$$\left\| a_{ij}^{\frac{1}{2}}(x) F^{-1} \frac{\partial Q}{\partial x_i} F^{-2} \right\|^2 \leqslant \sigma_3. \tag{4}$$

Теорема 1. *Пусть выполнены условия (2) –(4) и пусть числа σ_j, $(j = \overline{1,3})$ такие, что*

$$\sigma_1 < \frac{4}{3n^2}, \ \frac{2}{n^2(\sigma_1 + \sigma_2)} < 1, \ \frac{2}{n^2(\sigma_1 + \sigma_3)} < 1.$$

Тогда уравнение (1) разделяется в $L_2(R^n)$, и для всех функций $u(x) \in L_2(R^n) \cap W_{2,loc}^2(R^n)$ таких, что $f(x) \in L_2(R^n)$ справедливы включения

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}, \quad V(x, u(x)) u(x) \in L_2(R^n),$$

$$a_{ij}^{\frac{1}{2}}(x) V^{\frac{1}{2}}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \in L_2(R^n), i = 1, 2, ..., n; j = 1, 2, ..., n.$$

При этом имеет место коэрцитивное неравенство

$$\left\| \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}; L_2(R^n) \right\| + \|V(x)u; L_2(R^n)\| +$$
$$+ \sum_{i,j=1}^{n} \left\| a_{ij}^{\frac{1}{2}}(x) V^{\frac{1}{2}}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j}; L_2(R^n) \right\| \leq M \|f(x); L_2(R^n)\|,$$

где положительное число M не зависит от $u(x)$, $f(x)$.

С помощью теоремы 1 сформулируем следующий результат о коэрцитивной разрешимости уравнения (1).

Теорема 2. *Пусть дифференциальный оператор*

$$L[u] = -\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + Vu$$

разделяется в пространстве $L_2(R^n)$, и пусть положительная функция $\phi(x)$, принадлежащая в $C^1(R^n)$, удовлетворяет неравенству

$$\left\| a_{ij}^{\frac{1}{2}}(x) V^{-\frac{1}{2}} \phi^{-1} \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right\|^2 \leq \theta_1,$$

где $0 < \theta_1 + \sigma_1 < \frac{1}{n^2}$. Тогда уравнение (1) для всех $f \in L_2(R^n)$ имеет единственное решение в пространстве $L_2(R^n)$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Everitt W. N.,Gierz M. Some properties of the domains of certain differential operators // Proc. London Math.Soc. 1971. Vol. 23, P. 301 – 324.

2. Бойматов К.Х. Теоремы разделимости, весовые пространства и их приложения // Труды МИАН СССР, 1984, т.170, с.37-76.

3. Бойматов К. Х. Коэрцитивные оценки и разделимость для эллиптических дифференциальных уравнений второго порядка // ДАН СССР. 1988. Т. 301, № 5. С. 1033 – 1036.

4. Mohamed A. S., H. A, Atia Separation of the general second elliptic differential operator potential in the weighted weighted Hilbert spaces // Applied Mathematics and Computation. 2005. № 162. P. 155 – 163.

5. Каримов О.Х. О коэрцитивной разрешимости нелинейного уравнения Лапласа — Бельтрами в гильбертовом пространстве // Чебышевский сборник, 2021, т.22, № 1(77), с.163-176.

———————————————————————————

УДК 511.32

Монотонность функций потребления и капитала в теории экономического роста

А. И. Козко (Россия, г. Москва)
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова; Российская академия народного хозяйства и государственной службы при Президенте Российской Федерации
e-mail: prozerpi@yahoo.co.uk
Л. М. Лужина (Россия, г. Москва)
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова; Российская академия народного хозяйства и государственной службы при Президенте Российской Федерации
e-mail: lluzhina@gmail.com
А. Ю. Попов (Россия, г. Москва)
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова; Московский центр фундаментальной и прикладной математики
e-mail: prozerpi@yahoo.co.uk
В. Г. Чирский (Россия, г. Москва)
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова; Российская академия народного хозяйства и государственной службы при Президенте Российской Федерации
e-mail: vgchirskii@yandex.ru

Monotony of consumption and capital functions in the theory of economic growth

A. I. Kozko (Russia, Moscow)
Lomonosov Moscow State University; Russian Presidential Academy of National Economy and Public Administration
e-mail: prozerpi@yahoo.co.uk

L. M. Luzhina (Russia, Moscow)
Lomonosov Moscow State University; Russian Presidential Academy of National Economy and Public Administration
e-mail: lluzhina@gmail.com
A. Yu. Popov (Russia, Moscow)
Lomonosov Moscow State University; Moscow Center of Fundamental and Applied Mathematics
e-mail: prozerpi@yahoo.co.uk
V. G. Chirskii (Russia, Moscow)
Lomonosov Moscow State University; Russian Presidential Academy of National Economy and Public Administration
e-mail: vgchirskii@yandex.ru

В модели Рамсея — Касса — Купманса (см. [1] – [11]), применяемой в теории экономического роста, определяющую роль играет система двух дифференциальных уравнений, которой удовлетворяют функции $K(t)$ — капитал в момент времени t и $C(t)$ — потребление в момент времени t:

$$\begin{cases} \dot{K} = f(K) - bC - x_3K, \\ \dot{C} = \alpha\theta^{-1}\left(\frac{f(K)}{K}\right)C - x_2C, \quad \text{где } x_3 = \frac{x_2}{\alpha},\ b > 0, \end{cases} \tag{1}$$

$$K(0) = K_0,\ C(0) = C_0, \tag{2}$$

В систему входит набор констант $(a, b, \alpha, \theta, x_2, x_3)$, характеризующих рассматриваемую экономическую структуру. Производственная функция, которую мы будем рассматривать, — это функция Кобба – Дугласа $f(K) = aK^\alpha$. Поэтому система (1) принимает вид:

$$\begin{cases} \dot{K}(t) = aK^\alpha(t) - bC(t) - x_3K(t), \\ \dot{C}(t) = \theta^{-1}\alpha aK^{\alpha-1}(t)C(t) - x_2C(t). \end{cases}$$

Нами получен ряд результатов о поведении функций $K(t)$ и $C(t)$. Сформулируем некоторые из них.

Теорема 1. *Пусть $\theta > 1$, и выполняются условие $\frac{\alpha}{\theta}\frac{f(K_0)}{K_0} > x_2$ и равенство*

$$f(K_0) = \frac{\theta}{\theta - 1}bC_0.$$

Тогда решение $(K(t),\ C(t))$ задачи Коши (1), (2) существует на всём луче $[0,\ +\infty)$, обе компоненты его возрастают и стремятся к следующим пределам:

$$\lim_{t\to+\infty} K(t) = \left(\frac{a\alpha}{x_2\theta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}, \quad \lim_{t\to+\infty} C(t) = \frac{\theta-1}{b}\left(\frac{a}{\theta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}\left(\frac{\alpha}{x_2}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}.$$

На луче $0 \leqslant t \leqslant +\infty$ справедливы равенства

$$C(t) = \frac{\theta-1}{b\theta}f(K(t)), \quad \int\limits_{K_0}^{K(t)} \frac{du}{\theta^{-1}f(u) - (\frac{x_2}{\alpha})u} = t.$$

Введём величины λ и H по формулам $\lambda = \frac{\theta-1}{\theta} \cdot \frac{f(K_0)}{bC_0} - 1$, $H = \frac{\alpha}{\theta}\frac{f(K_0)}{x_2K_0}$. Положим

$$F(y) = \int\limits_1^y z^{-1}(\lambda z^\theta + z)^p dz, \quad \text{где } p = \frac{1}{\alpha} - 1,$$

и

$$R(y) = H(1+\lambda)^p + pF(y) - (\lambda y^\theta + y)^p.$$

Лемма 1. *При условиях $\theta > 1$, $H > 1$, $\lambda > 0$, $p \leqslant 1$ функция $R(y)$ имеет на луче $1 < y < +\infty$ единственный корень $y = y_0(\lambda, H, p, \theta)$, причём,*

$$R(y) > 0 \text{ при } 1 \leqslant y < y_0(\lambda, H, p, \theta),$$
$$R(y) < 0 \text{ при } y_0(\lambda, H, p, \theta) < y < +\infty.$$

Теорема 2. *Пусть $\theta > 1,\ \lambda > 0,\ H > 1, \alpha \in [\frac{1}{2}, 1)$. Положим $p = \frac{1}{\alpha} - 1$,*

$$y(t) = \mathcal{F}\left(\left(\frac{H}{p}\right)(\lambda+1)^p\left(e^{px_2t} - 1\right)\right), \hat{C}(y) = y\left(1 + \frac{pF(y)}{H(\lambda+1)^p}\right)^{-\frac{1}{p}},$$

где функция $\mathcal{F}$ – обратная к F. Тогда вторая компонента $C(t)$ решения системы (1) с начальными условиями $K(0) = K_0$, $C(0) = C_0$ задаётся формулой $C(t) = C_0\hat{C}(y(t))$, $t \in [0, +\infty)$. Функция $\hat{C}(y)$ возрастает на отрезке $1 \leqslant y \leqslant y_0(\lambda, H, \frac{1}{\alpha} - 1, \theta)$ и убывает на луче $y_0(\lambda, H, \frac{1}{\alpha} - 1, \theta) \leqslant y < +\infty$ (величина y_0 определена в лемме). Функция $C(t)$ возрастает на отрезке $0 \leqslant t \leqslant t_0(\lambda, H, \alpha, \theta)$ и убывает на луче $t_0(\lambda, H, \alpha, \theta) \leqslant t < +\infty$, где

$$t_0(\lambda, H, \alpha, \theta) = \frac{1}{px_2}\ln\left(1 + \frac{pF(y_0(\lambda, H, p, \theta))}{H(\lambda+1)^p}\right).$$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Козко А.И., Лужина Л.М., Попов А.Ю., Чирский В.Г. Метод приближённого решения системы дифференциальных уравнений из модели Рамсея — Касса — Купманса, основанный на решении в квадратурах одного подкласса сходных систем // Чебышевский сборник. 2022. Том 23. , № 4. С. 115-125.

2. Козко А. И., Лужина Л. М., Попов А. Ю., Чирский В. Г. О задаче Рамсея — Касса — Купманса для потребительского выбора // Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. 2020. Том. 182. С. 39-44.

3. Козко А.И., Лужина Л.М., Попов А.Ю., Чирский В.Г. Оценка необходимого начального экономического ресурса в задаче Рамсея — Касса — Купманса // Чебышевский сборник. 2019. Т. 20, № 4. С. 188–196.

4. Козко А. И., Лужина Л. М., Попов А. Ю., Чирский В. Г. Ограничения на значения функции потребления в модели экономического роста Рамсея — Касса — Купманса в случае стационарности функции сбережения // Чебышевский сборник. 2021. Том. 22, № 2. С. 501-509.

5. Козко А. И., Лужина Л. М., Попов А. Ю., Чирский В. Г. Локализация показателя оптимальной экспоненты задачи Рамсея — Касса — Купманса стремящейся к бесконечности степенной функции полезности // Чебышевский сборник. 2021. Том. 22, № 2(78). С. 121-134.

6. Козко А.И., Лужина Л.М., Попов А.Ю., Чирский В.Г. Функция потребления в модели экономического роста Рамсея — Касса — Купманса в случае стационарности функции сбережения // Чебышевский сборник. 2022. Том. 23, № 1. С. 118–129.

7. Козко А. И., Лужина Л. М., Попов А. Ю., Чирский В. Г. Модель задачи Рамсея — Касса — Купманса // Издательство: Московский педагогический государственный университет (Москва). Классическая и современная геометрия, материалы международной конференции, посвященной 100-летию со дня рождения В. Т. Базылева. под ред. А. В. Царева. Москва. 2019. С. 87-88.

8. Ramsey F. P. A mathematical theory of saving // The Economic Journal. December. 1928. P. 543–559.

9. Барро Р. Дж., Сала-и-Мартин Х. Экономический рост // М.: БИНОМ. Лаборатория знаний. 2010.

10. Benassy Jean-Pascal. The Ramsey Model. Macroeconomic Theory. // New York: Oxford University Press. 2011. C. 145–160.

11. Gomez M. A., Economic growth and factor substitution with elastic labor supply // Math. Social Sci. 2018. V. 94. P. 49-57.

———————————————————————————

УДК 511.3+511.4

Метрическое пространство двумерных диагональных унимодулярных решёток[1]

А. П. Крылов (Россия, г. Тула)
Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого
e-mail: alek.krylov@gmail.com

Metric space of two-dimensional diagonal unimodular lattices

A. P. Krylov (Russia, Tula)
Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University
e-mail: alek.krylov@gmail.com

1. Введение

Как известно (см. [1], стр.165) множество всех s-мерных решёток образуют полное метрическое пространство относительно метрики $\rho(\Lambda, \Gamma)$, которая задана равенствами

$$\rho(\Lambda,\Gamma) = \max(\ln(1+\mu), \ln(1+\nu)), \quad \mu = \inf_{\Lambda = A\cdot\Gamma} \|A - E_s\|, \quad \nu = \inf_{B\cdot\Lambda=\Gamma} \|B - E_s\|,$$

$$E_s = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = (\delta_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant s}, \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{при } i = j, \\ 0, & \text{при } i \neq j, \end{cases} \qquad \|A\| = s \cdot \max_{1\leqslant i,j\leqslant s} |a_{ij}|.$$

Цель нашей работы — рассмотреть подпространство двумерных диагональных унимодулярных решёток, доказать теорему о полноте этого пространства.

[1] Работа выполнена в рамках государственного задания Министерства просвещения РФ соглашение №073-03-2023-303/2 от 14.02.23 г. тема научного исследования «Теоретико-числовые методы в приближенном анализе и их приложения в механике и физике».

2. Пространство диагональных унимодулярных решёток

Диагональные решётки — самый простой класс решёток. Они получаются растяжением по координатам фундаментальной двумерной решётки $\mathbb{Z}^2$: $\Lambda(d_1, d_2) = \{(d_1m_1, d_2m_2)|m_1, m_2 \in \mathbb{Z}\}$, $(d_1, d_2 > 0)$.

Диагональная унимодулярная решётка $\Lambda(d) = \Lambda\left(d, \frac{1}{d}\right)$, $d > 0$. Всякая решётка имеет бесконечно много базисов. Действительно, если $GL_2(\mathbb{Z})$ — линейная унимодулярная группа, состоящая из квадратных матриц второго порядка

$$M = \begin{pmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} \\ m_{2,1} & m_{2,2} \end{pmatrix}, \quad m_{i,j} \in \mathbb{Z} \quad (i, j = 1, 2), \quad \det M = m_{1,1}m_{2,2} - m_{1,2}m_{2,1} = \pm 1,$$

то для любого базиса $\vec{\lambda}_1 = (\lambda_{1,1}, \lambda_{1,2})$, $\vec{\lambda}_2 = (\lambda_{2,1}, \lambda_{2,2})$ решётки Λ все базисы имеют вид $\vec{\lambda}'_1 = \vec{\lambda}_1 \cdot M$, $\vec{\lambda}'_2 = \vec{\lambda}_2 \cdot M$, где $M \in GL_2(\mathbb{Z})$. Отсюда следует, что произвольная базисная матрица $M(d)$ диагональной решётки $\Lambda(d)$ имеет вид

$$M(d) = \begin{pmatrix} d & 0 \\ 0 & \frac{1}{d} \end{pmatrix} \cdot M = \begin{pmatrix} dm_{1,1} & dm_{1,2} \\ \frac{m_{2,1}}{d} & \frac{m_{2,2}}{d} \end{pmatrix}, \quad M \in GL_2(\mathbb{Z}).$$

Взаимная решётка $\Lambda^*(d) = \Lambda\left(\frac{1}{d}, d\right)$ имеет взаимную базисную матрицу

$$M^*(d) = \begin{pmatrix} \frac{1}{d} & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \cdot M^* = \begin{pmatrix} \frac{1}{d} & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} m_{2,2} & -m_{2,1} \\ -m_{1,2} & m_{1,1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{m_{2,2}}{d} & \frac{-m_{2,1}}{d} \\ -dm_{1,2} & dm_{1,1} \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим две диагональных решётки: $\Lambda(d_1) = \Lambda\left(d_1, \frac{1}{d_1}\right)$, $d_1 > 0$ и $\Lambda(d_2) = \Lambda\left(d_2, \frac{1}{d_2}\right)$, $d_2 > 0$ с базисными матрицами

$$M(d_1) = \begin{pmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{d_1} \end{pmatrix} \cdot M = \begin{pmatrix} d_1m_{1,1} & d_1m_{1,2} \\ \frac{m_{2,1}}{d_1} & \frac{m_{2,2}}{d_1} \end{pmatrix}, \quad m = \det M = \pm 1,$$

$$M(d_2) = \begin{pmatrix} d_2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{d_2} \end{pmatrix} \cdot N = \begin{pmatrix} d_2n_{1,1} & d_2n_{1,2} \\ \frac{n_{2,1}}{d_2} & \frac{n_{2,2}}{d_2} \end{pmatrix}, \quad n = \det N = \pm 1, \quad M_1, M_2 \in GL_2(\mathbb{Z}).$$

Ясно, что $M(d_1) = M(d_2) \cdot A$, $M(d_2) = M(d_1) \cdot B$, где $A = M^{-1}(d_2)M(d_1)$, $B = M^{-1}(d_1)M(d_2)$. Легко находим, что

$$M^{-1}(d_2) = N^{-1}\begin{pmatrix} \frac{1}{d_2} & 0 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{n_{2,2}}{n} & -\frac{n_{1,2}}{n} \\ -\frac{n_{2,1}}{n} & \frac{n_{1,1}}{n} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{d_2} & 0 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{n_{2,2}}{nd_2} & -\frac{d_2n_{1,2}}{n} \\ -\frac{n_{2,1}}{nd_2} & \frac{d_2n_{1,1}}{n} \end{pmatrix},$$

$$M^{-1}(d_1) = M^{-1}\begin{pmatrix} \frac{1}{d_1} & 0 \\ 0 & d_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{m_{2,2}}{m} & -\frac{m_{1,2}}{m} \\ -\frac{m_{2,1}}{m} & \frac{m_{1,1}}{m} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{d_1} & 0 \\ 0 & d_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{m_{2,2}}{md_1} & -\frac{d_1m_{1,2}}{m} \\ -\frac{m_{2,1}}{md_1} & \frac{d_1m_{1,1}}{m} \end{pmatrix}.$$

Отсюда следует, что

$$A = \begin{pmatrix} \frac{d_1m_{1,1}n_{2,2}}{nd_2} - \frac{d_2m_{2,1}n_{1,2}}{nd_1} & \frac{d_1m_{1,2}n_{2,2}}{nd_2} - \frac{d_2m_{2,2}n_{1,2}}{nd_1} \\ \frac{d_2m_{2,1}n_{1,1}}{nd_1} - \frac{d_1m_{1,1}n_{2,1}}{nd_2} & \frac{d_2m_{2,2}n_{1,1}}{nd_1} - \frac{d_1m_{1,2}n_{2,1}}{nd_2} \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} \frac{d_2m_{2,2}n_{1,1}}{md_1} - \frac{d_1m_{1,2}n_{2,1}}{md_2} & \frac{d_2m_{2,2}n_{1,2}}{md_1} - \frac{d_1m_{1,2}n_{2,2}}{md_2} \\ \frac{d_1m_{1,1}n_{2,1}}{md_2} - \frac{d_2m_{2,1}n_{1,1}}{md_1} & \frac{d_1m_{1,1}n_{2,2}}{md_2} - \frac{d_2m_{2,1}n_{1,2}}{md_1} \end{pmatrix}.$$

Лемма 1. *Пусть* $d_1 \geqslant d_2$, *тогда* $\rho(\Lambda(d_1), \Lambda(d_2)) \leqslant \ln\left(2\frac{d_1}{d_2} - 1\right)$.

Лемма 2. *Пусть* $d_1 \geqslant d_2$, $\Lambda(d_1) = A \cdot \Lambda(d_2)$ *и* $\|A - E_2\| \leqslant \delta < 1$, *тогда* $d_1 - d_2 = d_2\delta_1$, *где* $0 \leqslant \delta_1 \leqslant \frac{\delta}{2}$.

3. Полнота метрического пространства диагональных унимодулярных решёток

Для доказательства требуемой полноты метрического пространства диагональных унимодулярных решёток требуется показать, что любая фундаментальная последовательность Коши диагональных унимодулярных решёток сходится. Другими словами, надо доказать, что если для последовательности диагональных унимодулярных решёток $\Lambda(d_1)$, $\Lambda(d_2)$, $\ldots$, $\Lambda(d_n), \ldots$ выполняется условие, что для любого $\varepsilon > 0$ существует номер $N = N(\varepsilon)$ такой, что для любых n и m больших N справедливо неравенство $\rho(\Lambda(d_n), \Lambda(d_m)) < \varepsilon$, то существует диагональная унимодулярная решётка $\Lambda(d)$ такая, что

$$\lim_{n\to\infty} \rho(\Lambda(d_n), \Lambda(d)) = 0.$$

Указанное определение фундаментальности последовательности диагональных унимодулярных решёток можно переформулировать в терминах норм матриц. А именно, последовательность диагональных унимодулярных решёток $\Lambda(d_1)$, $\Lambda(d_2)$,$\ldots$,$\Lambda(d_n)$,$\ldots$ является последовательностью Коши, если для любого $\varepsilon > 0$ существует номер $N = N(\varepsilon)$ такой, что для любых n и m больших N существуют матрицы $A_{n,m}$ и $B_{n,m}$ такие, что $\|A_{n,m} - E_2\|, \|B_{n,m} - E_2\| < \varepsilon$ и выполняются равенства

$$\begin{pmatrix} d_n & 0 \\ 0 & \frac{1}{d_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_m & 0 \\ 0 & \frac{1}{d_m} \end{pmatrix} \cdot A_{n,m}, \quad \begin{pmatrix} d_m & 0 \\ 0 & \frac{1}{d_m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_n & 0 \\ 0 & \frac{1}{d_n} \end{pmatrix} \cdot B_{n,m},$$

тогда существует диагональная унимодулярная решётка $\Lambda(d)$ такая, что найдется последовательность матриц A_n и B_n таких, что $\lim_{n\to\infty} \|A_n - E_2\| = \lim_{n\to\infty} \|B_n - E_2\| = 0$ и

$$\begin{pmatrix} d_n & 0 \\ 0 & \frac{1}{d_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & 0 \\ 0 & \frac{1}{d} \end{pmatrix} \cdot A_n, \quad \begin{pmatrix} d & 0 \\ 0 & \frac{1}{d} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_n & 0 \\ 0 & \frac{1}{d_n} \end{pmatrix} \cdot B_n.$$

Теорема 1. *Пространство диагональных унимодулярных решёток полно.*

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Касселс Д. Введение в геометрию чисел. М.: Мир, 1965. 422 с.

УДК 511.3+511.4

Численное решение линейных интегральных уравнений[1]

А. С. Подолян (Россия, г. Тула)
Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого
e-mail: alena.balabaeva.93@mail.ru

[1]Работа выполнена в рамках государственного задания Министерства просвещения РФ соглашение №073-03-2023-303/2 от 14.02.23 г. тема научного исследования «Теоретико-числовые методы в приближенном анализе и их приложения в механике и физике»

Numerical solution of linear integral equations

A. S. Podolyan (Russia, Tula)
Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University
e-mail: alena.balabaeva.93@mail.ru

В данной работе получены новые оценки погрешности приближенного решения интегрального уравнения Фредгольма II рода методом итерации с использованием алгебраических сеток.

Одним из важных классов интегральных уравнений с теоретической и практической точек зрения является уравнение Фредгольма второго рода, то есть уравнение вида

$$\varphi\left(\vec{t}\right) = \lambda \iint\limits_{G_s} K_s\left(\vec{t}, \vec{u}\right) \varphi\left(\vec{u}\right) d\vec{u} + f\left(\vec{t}\right), \tag{1}$$

где $G_s = [0;1)^s$.

Характерная особенность уравнения (1) — его линейность: неизвестная функция φ входит в него линейно и на неё воздействует линейный интегральный оператор с ядром $K_s\left(\vec{t}, \vec{u}\right)$.

Мы будем исследовать уравнение (1) для случая периодических функций, когда свободный член $f\left(\vec{t}\right)$ и ядро $K_s\left(\vec{t}, \vec{u}\right)$ этого уравнения принадлежат, соответственно, классам $E_s^\alpha(C_1)$ и $E_{2s}^\alpha(C_2)$. Ясно, что и решение $\varphi\left(\vec{t}\right)$ будет являться периодической функцией.

Определение 1. *Для произвольной решетки Λ обобщенной параллелепипедальной сеткой $M(\Lambda)$ называется множество $M(\Lambda) = \Lambda^* \cap G_s$.*

Сетка $M_1(\Lambda) = \Lambda^* \cap [-1;1)^s$.

Обобщенной параллелепипедальной сеткой II рода $M'(\Lambda)$ называется множество

$$M'(\Lambda) = \{\vec{x} \,|\, \vec{x} = \{\vec{y}\}, \vec{y} \in M_1(\Lambda)\}.$$

Определение 2. *Весовой функцией порядка r с константой B называется гладкая функция $\rho(\vec{x})$, удовлетворяющая условиям*

$$\sum_{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_s=-1}^{0} \rho(\vec{x} + (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_s)) = 1 \text{ при } \vec{x} \in G_s, \tag{2}$$

$$\rho(\vec{x}) = 0 \quad \text{при} \quad \vec{x} \notin (-1;1)^s, \tag{3}$$

$$\left| \int\limits_{-1}^{1} \cdots \int\limits_{-1}^{1} \rho(\vec{x}) e^{2\pi i (\vec{\sigma}, \vec{x})} d\vec{x} \right| \leqslant B(\overline{\sigma}_1 \ldots \overline{\sigma}_s)^{-r} \quad \text{для любого} \quad \vec{\sigma} \in \mathbb{R}^s. \tag{4}$$

Если выполнены условия (2) и (3), то говорим просто о весовой функции $\rho(\vec{x})$.

Определение 3. *Квадратурной формулой с обобщенной параллелепипедальной сеткой II типа и весовой функцией $\rho(\vec{x})$ называется формула вида*

$$\int\limits_{0}^{1} \cdots \int\limits_{0}^{1} f(\vec{x}) d\vec{x} = (\det \Lambda)^{-1} \sum_{\vec{x} \in M'(\Lambda)} \rho_{\vec{x}} f(\vec{x}) - R_{N'(\Lambda)}[f],$$

$$\text{где} \quad \rho_{\vec{x}} = \sum_{\vec{y} \in M_1(\Lambda), \{\vec{y}\} = \vec{x}} \rho(\vec{y}), \quad N'(\Lambda) = |M'(\Lambda)|,$$

$R_{N'(\Lambda)}[f]$ — *погрешность квадратурной формулы.*

Для погрешности квадратурной формулы с обобщенной параллелепипедальной сеткой II рода на классе E_s^α справедлива оценка

$$R_{N'(\Lambda)}[E_s^\alpha(C)] = \sup_{f\in E_s^\alpha(C)} |R_{N'(\Lambda)}[f]| \leqslant CB\cdot c_1(\alpha)^s \zeta_H(\Lambda|\alpha),$$

$$\text{где}\quad c_1(\alpha) = 2^{\alpha+1}\left(3+\frac{2}{\alpha-1}\right),\quad \zeta_H(\Lambda|\alpha) = {\sum_{\vec{x}\in\Lambda}}' (\overline{x}_1\ldots\overline{x}_s)^{-\alpha}.$$

Пусть $\vec{a} = (a_0, a_1, \ldots, a_{s-1})$ — целочисленный вектор такой, что многочлен

$$P_{\vec{a}}(x) = \sum_{\nu=0}^{s-1} a_\nu x^\nu + x^s \tag{5}$$

неприводим над полем рациональных чисел и все корни Θ_ν $(\nu = 1, \ldots, s)$ многочлена (5) действительные.

Обозначим через $T(\vec{a})$ матрицу степеней алгебраически сопряженных целых алгебраических чисел $\Theta_1,\ldots,\Theta_s$ — корней многочлена $P_{\vec{a}}(x)$:

$$T(\vec{a}) = \begin{pmatrix} 1 & \ldots & 1 \\ \Theta_1 & \ldots & \Theta_s \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \Theta_1^{s-1} & \ldots & \Theta_s^{s-1} \end{pmatrix}, \tag{6}$$

а через $\vec{\Theta} = (\Theta_1, \ldots, \Theta_s)$ — вектор полного набора алгебраически сопряженных чисел — корней многочлена $P_{\vec{a}}(x)$.

Для любого $t > 0$ решётка $\Lambda(t\cdot T(\vec{a}))$ называется алгебраической. Она имеет вид

$$\Lambda(t\cdot T(\vec{a})) = \left\{\vec{x} = \left(t\sum_{\nu=1}^{s}\Theta_1^{\nu-1}m_\nu, \ldots, t\sum_{\nu=1}^{s}\Theta_s^{\nu-1}m_\nu\right) = t\cdot\vec{m}\cdot T(\vec{a}) \,\middle|\, \vec{m}\in\mathbb{Z}^s\right\}.$$

Совокупность $M \subset G_s$ точек $M_k = (\xi_1(k), \ldots, \xi_s(k))$ $\quad (k = 1\ldots N)$ называется *сеткой* M из N узлов, а сами точки — *узлами квадратурной формулы*. Величины $\rho_k = \rho(M_k)$ называются весами квадратурной формулы.

Рассмотрим уравнение Фредгольма второго рода, то есть уравнение вида

$$\varphi\left(\vec{t}\right) = \lambda \iint_{G_s} K_s\left(\vec{t}, \vec{u}\right)\varphi\left(\vec{u}\right) d\vec{u} + f\left(\vec{t}\right), \tag{7}$$

где $G_s = [0;1)^s$. Мы будем исследовать уравнение (7) для случая периодических функций, когда свободный член $f\left(\vec{t}\right)$ и ядро $K_s\left(\vec{t}, \vec{u}\right)$ этого уравнения принадлежат, соответственно, классам $E_s^\alpha(C_1)$ и $E_{2s}^\alpha(C_2)$. Ясно, что и решение $\varphi\left(\vec{t}\right)$ будет являться периодической функцией.

Теорема 1. *Пусть $q < 1$ и*

$$|\lambda| \leqslant \frac{q}{\|K_s\left(\vec{t}, \vec{u}\right)\|_{E_s^\alpha}(1+2\zeta(2\alpha))^s}. \tag{8}$$

Тогда уравнение Фредгольма (7) имеет единственное решение и для него справедливо представление в виде ряда Неймана

$$\varphi\left(\vec{t}\right) = f\left(\vec{t}\right) +$$
$$+\sum_{\vec{k}=1}^{\infty}\lambda^k \iint_{G_{sk}} K_s(\vec{t}, \vec{u}_1)K_s(\vec{u}_1, \vec{u}_2)\ldots K_s(\vec{u}_{k-1}, \vec{u}_k) f(\vec{u}_k) d\vec{u}_1\ldots d\vec{u}_k$$

и справедливо соотношение

$$\varphi\left(\vec{t}\right)=f\left(\vec{t}\right)+$$
$$+\sum_{k=1}^{n}\lambda^k\iint\limits_{G_{sk}}K_s(\vec{t},\vec{u}_1)K_s(\vec{u}_1,\vec{u}_2)\ldots K_s(\vec{u}_{k-1},\vec{u}_k)f(\vec{u}_k)d\vec{u}_1\ldots d\vec{u}_k+$$
$$+\frac{q^{n+1}\cdot\Theta\cdot\|f(\vec{t})\|_{E_s^\alpha}}{1-q},\quad \textit{где}\quad |\Theta|\leqslant(1+2\zeta(2\alpha))^s.$$

Первый подход для выбора чисто-вещественного алгебраического поля основан на том, что для каждой размерности sk, где $k=1,2,\ldots,n$, выбирается свой неприводимый полином

$$P_{\vec{a}}(x)=\sum_{\nu=0}^{sk-1}a_\nu x^\nu+x^{sk}, \tag{9}$$

у которого все корни действительные. В качестве такого многочлена можно взять многочлен

$$P_k(x)=x(x-2)(x-4)\ldots(x-2sk+2)-1.$$

Теорема 2. *Пусть $a_1,\ldots,a_n$ — различные целые числа. Тогда многочлен*

$$P_{1,\vec{a}}(x)=(x-a_1)\ldots(x-a_n)-1$$

неприводим над $\mathbb{Q}$.

Лемма 1. *Пусть $n=2m$ — четное, $a_1<a_2<\ldots<a_n$ — различные целые числа и выполнены неравенства*

$$\prod_{\nu=1}^{n}\left(a_\nu-\frac{a_{2\mu}+a_{2\mu+1}}{2}\right)>1\quad(\mu=1,\ldots,m-1),$$

тогда все корни многочлена $P_{1,\vec{a}}(x)$ — вещественные.

Лемма 2. *Пусть $n=2m+1$ — нечетное, $a_1<a_2<\ldots<a_n$ — различные целые числа и выполнены неравенства*

$$\prod_{\nu=1}^{n}\left(a_\nu-\frac{a_{2\mu-1}+a_{2\mu}}{2}\right)>1\quad(\mu=1,\ldots,m),$$

тогда все корни многочлена $P_{1,\vec{a}}(x)$ — вещественные.

Теорема 3. *Пусть натуральное $n>1$, $\varepsilon=2\left\{\frac{n}{2}\right\}$, $a_1<a_2<\ldots<a_n$ — различные целые числа, для которых выполнено условие*

$$\prod_{\nu=1}^{n}\left(a_\nu-\frac{a_{2\mu-\varepsilon}+a_{2\mu+1-\varepsilon}}{2}\right)>1\quad(\mu=1,\ldots,m+\varepsilon-1).$$

Тогда многочлен

$$P_{1,\vec{a}}(x)=(x-a_1)\ldots(x-a_n)-1$$

неприводим над $\mathbb{Q}$ и все его корни вещественные.

Теорема 4. *Если для приближенного вычисления интеграла*

$$\iint\limits_{G_{sk}} K_s(\vec{t},\vec{u}_1)K_s(\vec{u}_1,\vec{u}_2)\dots K_s(\vec{u}_{k-1},\vec{u}_k)f(\vec{u}_k)d\vec{u}_1\dots d\vec{u}_k$$

использовать квадратурные формулы, соответствующие решетке $\Lambda(t\cdot T(\vec{a}))$ *и многочлену* $P_{\vec{a}}(x)=P_k(x)$, *то погрешность приближенного решения уравнения Фредгольма второго рода будет*

$$\|f(\vec{t})\|_{E_s^\alpha}\cdot O\left(\frac{q^{n+1}}{1-q}+\frac{\ln^{sn-1}t}{t^{s\alpha}}\right).$$

Второй подход для выбора чисто-вещественного алгебраического поля связан с использованием башни полей Дирихле: $\mathbb{Q}\left(\sqrt{2}\right),\mathbb{Q}\left(\sqrt{2},\sqrt{3}\right),\dots,\mathbb{Q}\left(\sqrt{2},\sqrt{3},\dots,\sqrt{p_m}\right)$, где p_m — m-ое простое число и $2^{m-1}<sn\leqslant 2^m$.

Пусть натуральное l_k выбрано из условия $2^{l-1}<sk\leqslant 2^l$. Рассмотрим чисто-вещественное кольцо целых алгебраических чисел $\mathbb{Z}_l=\mathbb{Z}\left[\sqrt{2},\dots,\sqrt{p_l}\right]$ и соответствующее чисто-вещественное алгебраическое поле степени 2^l $\mathbb{Q}_l=\mathbb{Q}\left(\sqrt{2},\dots,\sqrt{p_l}\right)$. Через $\Lambda_l(t)$ обозначим алгебраическую решётку $\Lambda_l(t)=\{\vec{x}=(t\Theta_1,\dots,t\Theta_{2^l})|\,\Theta=\Theta_1\in\mathbb{Z}_l\}$, где $\Theta_1,\dots,\Theta_{2^l}$ – алгебраически сопряженные числа.

Теорема 5. *Если для приближенного вычисления интеграла*

$$\iint\limits_{G_{sk}} K_s(\vec{t},\vec{u}_1)K_s(\vec{u}_1,\vec{u}_2)\dots K_s(\vec{u}_{k-1},\vec{u}_k)f(\vec{u}_k)d\vec{u}_1\dots d\vec{u}_k$$

использовать квадратурные формулы, соответствующие решетке $\Lambda_l(t)$, *то погрешность приближенного решения уравнения Фредгольма второго рода будет*

$$\|f(\vec{t})\|_{E_s^\alpha}\cdot O\left(\frac{q^{n+1}}{1-q}+\frac{\ln^{2^m-1}t}{t^{2^m\alpha}}\right).$$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Н. М. Добровольский, А. С. Подолян. Алгебраические сетки и их приложение к численному решению линейных интегральных уравнений // Чебышевский сборник, 2022, т. 23, вып. 4, с. 162–169.

УДК 517

Алгоритмические вопросы построения обобщённых параллелепипедальных сеток[1]

А. В. Родионов (Россия, г. Тула)
Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого
e-mail: rodionovalexandr@mail.ru

[1]Работа выполнена в рамках государственного задания Министерства просвещения РФ соглашение №073-03-2023-303/2 от 14.02.23 г. тема научного исследования «Теоретико-числовые методы в приближенном анализе и их приложения в механике и физике».

Algorithmic issues of multidimensional Fourier interpolation using number theoretic lattice

A. V. Rodionov (Russia, Tula)
Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University
e-mail: rodionovalexandr@mail.ru

1. Введение

При решении задач многомерного численного интегрирования большую роль играет выбор сеток, с помощью которых строятся квадратурные формулы.

В 1959 году Н. М. Коробов предложил квадратурные формулы с использованием параллелепипедальных сеток с оптимальными коэффициентами.

Для этих формул на классе E_s^α выполняется оценка погрешности $|R_N[f]| = O\left(\frac{\ln^\gamma N}{N^\alpha}\right)$, где γ зависит только от размерности s и порядка гладкости α.

Подробнее о классах функций и погрешностях интегрирования с использованием различных видов сеток см., например [1].

Данная работа посвящена алгоритмам построения одного из видов таких сеток — обобщённых параллелепипедальных сеток.

Определение 1. *Пусть в вещественном арифметическом пространстве $\mathbb{R}^s$ задана линейно независимая система векторов $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_s$. Совокупность Λ всех векторов вида*

$$n_1\vec{a}_1 + \ldots + n_s\vec{a}_s,$$

где n_j независимо друг от друга пробегают все целые рациональные числа, называется решеткой в $\mathbb{R}^s$, а сами векторы $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_s$ — базисом этой решетки.

Символом G_s будем обозначать полуоткрытый единичный s-мерный куб $G_s = [0; 1)^s$.

Определение 2. *Для произвольной решетки Λ обобщенной параллелепипедальной сеткой $M(\Lambda)$ называется пересечение взаимной решетки к решетке Λ с единичным s-мерным кубом $M(\Lambda) = \Lambda^* \cap G_s$.*

Среди рассматриваемых нами решёток особый интерес представляют целочисленные, так как получаемые в этом случае параллелепипедальные сетки — рациональные, и квадратурные формулы с использованием таких сеток будут с равными весами.

Отметим, что базису $\vec{\lambda}_\nu = (a_{\nu 1}, \ldots, a_{\nu s})$ $(\nu = 1, \ldots, s)$ решетки Λ взаимным базисом $\vec{\lambda}_\nu^*$ $(\nu = 1, \ldots, s)$ взаимной решетки Λ^* будут векторы

$$\vec{\lambda}_\nu^* = \left(\frac{A_{\nu 1}}{\det \Lambda}, \ldots, \frac{A_{\nu s}}{\det \Lambda}\right) \quad (\nu = 1, \ldots, s).$$

Из определения сетки $M(\Lambda)$ следует, что

$$M(\Lambda) = \left\{ \vec{x} \;\middle|\; 0 \leqslant x_\nu = \frac{k_1 A_{1\nu} + \ldots + k_s A_{s\nu}}{\det \Lambda} < 1 \, (\nu = 1, \ldots, s);\ \vec{k} \in \mathbb{Z}^s \right\}. \tag{1}$$

2. Преобразование базиса решётки

Равенство (1) не даёт простого представления того, каким образом строить обобщённую параллелепипедальную сетку $M(\Lambda)$. Построение такой сетки будет наиболее удобным, если базис соответствующей целочисленной решётки представлен в виде $\vec{b}_\nu = (b_{\nu 1}, \ldots, b_{\nu\nu}, 0, \ldots, 0)$.

Другими словами, базисная матрица решётки имеет треугольный вид:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \ldots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{s1} & a_{s2} & \ldots & a_{ss} \end{pmatrix}.$$

Более того, базисные векторы можно выбрать таким образом, что все их ненулевые компоненты удовлетворяли условию $0 \leqslant a_{\nu\mu} < a_{\mu\mu}$ $(1 \leqslant \mu < \nu \leqslant s)$.

Существование такого базиса следует из теоремы 1 монографии Дж. В. С. Касселса «Введение в геометрию чисел» [2].

Лемма 1. *Пусть $\vec{a}_i = (a_{i1}, \ldots, a_{is})$ и $\vec{a}_j = (a_{j1}, \ldots, a_{js})$ — два произвольных вектора, принадлежащие некоторому базису целочисленной решётки Λ, при чём для некоторого t $(1 \leqslant t \leqslant s)$ числа a_{it} и a_{jt} — натуральные. Пусть, также, дроби $\frac{p_1}{q_1}, \ldots, \frac{p_n}{q_n} = \frac{a_{it}}{a_{jt}}$ — подходящие дроби к числу $\frac{a_{it}}{a_{jt}}$.*

Тогда набор векторов, полученный заменой в данном базисе векторов $\vec{a}_i$ и $\vec{a}_j$ соответственно на векторы

$$\vec{b} = -q_n\vec{a}_i + p_n\vec{a}_j \quad \vec{c} = (-1)^{n+1}\left(q_{n-1}\vec{a}_i - p_{n-1}\vec{a}_j\right),$$

также является базисом этой решётки, при этом:

1) $b_t = 0$;

2) $c_t = (a_{it}, a_{jt})$, где (a_{it}, b_{it}) — наибольший общий делитель чисел a_{it} и a_{jt}.

Доказательство. Первое свойство следует из равенства $\frac{a_t}{a_t} = \frac{p_n}{q_n}$.

Для доказательства второго свойства воспользуемся тем, что дробь $\frac{p_n}{q_n}$ несократима. Тогда $a_t = (a_t, b_t) \cdot p_n$, $b_t = (a_t, b_t) \cdot q_n$. Получим $c_t = (-1)^{n+1}\big((a_t, b_t) \cdot q_{n-1}p_n - (a_t, b_t) \cdot p_{n-1}q_n\big) = (a_t, b_t)$.

Покажем теперь, что новый набор векторов также является базисом данной решётки. Если A — исходный базис решётки, то указанное преобразование задаётся матрицей

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & \ddots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & \ldots & -q_n & \ldots & p_n & \ldots & 0 \\ 0 & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & 0 \\ 0 & \ldots & (-1)^{n+1}q_{n-1} & \ldots & (-1)^n p_{n-1} & \ldots & 0 \\ 0 & \ldots & \ldots & \ldots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

В матрице B элементы $b_{ii} = -q_n$, $b_{ij} = p_n$, $b_{ji} = (-1)^{n+1}q_{n-1}$, $b_{jj} = (-1)^n p_{n-1}$; прочие элементы главной диагонали — единицы; остальные элементы матрицы — нули.

Модуль определителя $|\det B| = \left|(-1)^{n+1}(q_n p_{n-1} - p_n q_{n-1})\right| = 1$, из чего следует, что данное преобразование является унимодулярным, а значит матрица $B \cdot A$ является базисной для данной решётки. □

Теперь опишем *алгоритм приведения базиса решётки Λ к нижнему треугольному виду.*

Шаг 1. Запишем базисную матрицу решётки Λ

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1s} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{s1} & \dots & a_{ss} \end{pmatrix}.$$

Зафиксируем $i = s$.

Шаг 2. Каждую строку матрицы с первой по i-тую, для которой $a_{ji} < 0$ $(1 \leqslant j \leqslant i)$ заменим на противоположную. Если $a_{ii} = 0$, то поменяем местами i-тую строку с произвольной j-той строкой $(1 \leqslant j \leqslant i)$, в которой $a_{ji} \neq 0$.

Заметим, что матрица, полученная в результате указанных преобразований будет являться базисной матрицей решётки Λ. Существование такой строки, в которой $a_{ji} \neq 0$ следует из линейной независимости базисных векторов.

В результате выполнения первого шага получим базисную матрицу решётки Λ, в которой все элементы $a_{1i}, a_{2i}, \dots, a_{ii}$ неотрицательны, при этом $a_{ii} \neq 0$.

Шаг 3. Для строки с номером $j = 1$ выполним следующую операцию. Если $a_{ji} \neq 0$, заменим первую строку матрицы на строку $-q_n\vec{a}_i + p_n\vec{a}_j$, а i-тую строку на $(-1)^{n+1}\left(q_{n-1}\vec{a}_i - p_{n-1}\vec{a}_j\right)$. Здесь $\vec{a}_i$ и $\vec{a}_j$ — i-тая и j-тая строки матрицы соответственно, p_{n-1}, p_n — числители, q_{n-1}, q_n — знаменатели подходящих дробей к дроби $\frac{a_{ii}}{a_{ij}}$ $\left(\frac{p_n}{q_n} = \frac{a_{ii}}{a_{ij}}\right)$.

Повторим *шаг 3* для значений j: $2 \leqslant j \leqslant i - 1$.

Согласно лемме 1 в результате выполнения этого шага мы получим матрицу, в которой $a_{1i} = a_{2i} = \ldots = a_{i-1\,i} = 0$, $a_{ii} > 0$.

Повторим *шаги 2–3* для $i = s - 1, \dots, \dots, 1$. В результате получим базисную матрицу решётки Λ, приведённую к верхнему треугольному виду.

Заметим, что в полученной матрице все элементы на главной диагонали положительны, а прочие ненулевые элементы могут принимать произвольные значения.

3. Построение обобщённой параллелепипедальной сетки

Пусть базис целочисленной решётки Λ имеет нижний треугольный вид, причём все её элементы неотрицательны (элементы на главной диагонали строго положительны в силу полноты решётки):

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{s1} & a_{s2} & \dots & a_{ss} \end{pmatrix}, \quad a_{ij} \geqslant 0 \ (i, j = 1, \dots, s). \tag{2}$$

Её детерминант равен $\det \Lambda = a_{11} \cdot \ldots \cdot a_{ss}$.

В этом случае базисная матрица взаимной решётки Λ^* будет верхней треугольной:

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1s} \\ 0 & b_{22} & \dots & b_{2s} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & b_{ss} \end{pmatrix}, \tag{3}$$

где

- при $i > j$ $\quad b_{ij} = 0$;
- при $i = j$ $\quad b_{ii} = \frac{1}{a_{ii}}$;

- при $i < j \quad b_{ij} = -\frac{1}{a_{jj}} \sum\limits_{k=1}^{i-1} b_{ki} a_{jk}$.

Её детерминант равен $\det \Lambda^* = \frac{1}{\det \Lambda}$.

Теорема 1. *Пусть базисная матрица целочисленной решётки Λ задана равенством (2), а базисная матрица взаимной решётки Λ^* — равенством (3). Тогда обобщённая параллелепипедальная сетка $M(\Lambda)$ имеет вид*

$$M(\Lambda) = \left\{ \left\{ k_1\vec{b}_1 + \ldots + k_s\vec{b}_s \right\} \middle| k_i = 0, \ldots, a_{ii} - 1, i = 1, \ldots, s \right\}, \quad (4)$$

где $\{\vec{x}\} = (\{x_1\}, \ldots, \{x_s\})$ — дробная часть вектора $\vec{x}$.

Доказательство. Символом M обозначим конечное подмножество векторов решётки Λ^*

$$M = \left\{ k_1\vec{b}_1 + \ldots + k_s\vec{b}_s \middle| k_i = 0, \ldots, a_{ii} - 1, i = 1, \ldots, s \right\}. \quad (5)$$

Поскольку $k_i = 0, \ldots, a_{ii} - 1$, $i = 1, \ldots, s$, то мощность $|M| = a_{11} \cdot \ldots \cdot a_{ss} = |M(\Lambda)|$.

Покажем теперь, что разность любых двух различных векторов из множества M вида $\vec{x}_1 = k_1\vec{b}_1 + \ldots + k_s\vec{b}_s$ и $\vec{x}_2 = m_1\vec{b}_1 + \ldots + m_s\vec{b}_s$ не является целым вектором.

Так как векторы $\vec{x}_1$ и $\vec{x}_2$ различны, то найдётся такое значение t, что $k_t \neq m_t$. Будем считать, что $k_t > m_t$, и t — наименьшее среди таких значений, то есть $k_i = m_i$, при $i < t$.

Рассмотрим t-тую компоненту разности $\vec{y} = \vec{x}_1 - \vec{x}_2$

$$y_t = (k_1 - m_1)b_{1t} + \ldots + (k_{t-1} - m_{t-1})b_{t-1\,t} + (k_t - m_t)b_{tt} + (k_{t+1} - m_{t+1})b_{t+1\,t} + \ldots + (k_s - m_s)b_{st}.$$

В ней $k_1 - m_1 = \ldots = k_{t-1} - m_{t-1} = 0$, так как значение t выбрано минимальным, для которого $k_t \neq m_t$. С другой стороны, $b_{t+1\,t} = \ldots = b_{st} = 0$, так как базисная матрица решётки Λ^* имеет верхний треугольный вид.

Таким образом, получаем $y_t = (k_t - m_t)b_{tt}$. Поскольку $0 \leqslant m_t < k_t < a_{tt}$, то $0 < k_t - m_t < a_{tt}$. Из данных неравенств и равенства $b_{tt} = \frac{1}{a_{tt}}$ имеем $0 < y_t = (k_t - m_t)b_{tt} < a_{tt}b_{tt} = 1$.

Из сказанного следует, что разность любых двух векторов из множества M имеет хотя бы одну нецелую компоненту y_t, а значит дробные части этих векторов различны, что и доказывает утверждение теоремы. □

С вопросом построения параллелепипедальной сетки тесно связаны вопросы нахождения гиперболических параметров целочисленной решётки и построение абсолютно наименьшей полной гиперболической системы вычетов данной решётки. Эти задачи представляют интерес для дальнейшего исследования.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. И. Ю. Реброва, В. Н. Чубариков, Н. Н. Добровольский, М. Н. Добровольский, Н. М. Добровольский. О классических теоретико-числовых сетках // Чебышевский сборник. 2018. Т. 19, вып. 4, С. 118–176.

2. J. W. S. Cassels. An Introduction to the Geometry of Numbers. 345 pp.

———————————————————————————————

Секция 9. История математики

УДК 51(091)

Из истории математических обществ

В. Г. Алябьева (Россия, г. Пермь)
e-mail: vgalyabeva@gmail.com

From the history of mathematical societies

V. G. Alyabieva (Russia, Perm)
e-mail: vgalyabeva@gmail.com

В XIX веке в Европе и в Британии наука становилась всё более специализированной, следствием чего явилась потребность в создании специализированных научных обществ. Во второй половине XIX в. в разных странах стали возникать математические общества, которые существуют до настоящего времени. В России при Московском университете в 1861 году возникло математическое общество, в 1865 г. возникло Лондонское математическое общество [1]. Его создание повлияло на формирование нескольких других национальных обществ по всему миру, таких как Математическое общество Франции (1873), Математический кружок Палермо (1884), Американское математическое общество (1888), Немецкое математическое общество (1890).

Возникновение Лондонского математического общества В Британии в 1662 г. было основано Королевское общество (the Royal Society) для поощрения исследований в области естественных и физических наук. С начала XIX в. стали появляться специализированные научные общества: Геологическое общество (1807), Астрономическое общество (1820), Статическое общество (1834), Химическое общество (1841). В 1831 г. основана Британская ассоциация содействия развитию науки.

У британских математиков середины XIX в. не существовало национального общества. Некоторые математики становились членами Статистического общества, однако более привлекательным для математиков было Астрономическое общество, основанное Фрэнсисом Бейли (Francis Baily, 1774–1844), членами которого были такие математики как Чарльз Бэббидж (Charles Babbage, 1792–1871), сэр Джон Гершель (Sir John Herschel, 1792–1871), Август де Морган (Augustus De Morgan, 1806–1871).

Британский математик мог опубликовать статью в изданиях Кембриджского философского общества (the Cambridge Philosophical Society, основано в 1819 г.). Но философское общество интересовалось не только математикой. в Британской ассоциации была секция математики, но она собиралась только раз в год. Задолго до создания Лондонского математического общества в 1865 году существовали такие местные организации, как Манчестерское общество (the Manchester Society), основанное в 1718 году, и Олдхэмское общество (the Oldham Society) 1794 года. Большей известностью, чем любое из них, пользовалось знаменитое математическое общество Спиталфилдса (the Spitalfields Mathematical Society), основанное в 1717 году. в июне 1845 года общество прекратило свое существование.

В течение следующих 20 лет двумя основными английскими изданиями для математиков были издания Королевского общества и Кембриджского философского общества. Кембриджское философское общество могло быть хорошей отправной точкой для формирования отделений математического общества, поскольку Кембридж в то время был передовым местом математического обучения в стране. Однако не нашлось мотивированных и заинтересованных людей в формировании такого органа. Заинтересованные люди нашлись в Лондоне, где было гораздо больше практикующих математиков, не только академических.

Университетский колледж Лондона входит в состав Лондонского университета. Он расположен в самом центре столицы. Лондонский университет был основан в 1826 г., в 1836 г. Лондонский университет и Королевский университет объединились под именем Лондонского университета, который состоял из двух колледжей — Университетского и Королевского. в итоге Университетский колледж был назван «Университетский колледж Лондона» (UCL).

В Университетском колледже первым профессором математики был Август де Морган.

Де Морган поступил в Тринити-колледж в Кембридже в феврале 1823 года и на втором курсе занял первое место в дивизионе первого класса; однако он был разочарован, окончив его только четвертым рэнглером в 1827 году. в 1828 г. де Морган стал профессором математики в Университетском колледже Лондона, в котором он прослужил практически всю жизнь, именно, с 1828 г по 1831 г. затем с 1836 г. по 1867 г., уходя в отставку по принципиальным соображениям. Де Морган был глубоко вовлечен в сферу образования. Университетский колледж был молодым и часто испытывал трудности. Де Морган был полностью предан своим обязанностям в нём. Он был активным членом Общества распространения полезных знаний. «Энциклопедия Пенни», издаваемая этим Обществом, содержит более 850 статей де Моргана по математике и смежным предметам. Де Морган публиковал учебники по логике, алгебре, тригонометрии, астрономии, дифференциальному и интегральному исчислению и др. Как учитель он стремился демонстрировать принципы и их строгое логическое развитие, а не методы. Его ученики, среди которых были И. Тодгентер и Дж. Сильвестр, переняли от него большую любовь к математике. Де Морган оказал значительное влияние на развитие математики в девятнадцатом веке. в 1838 г. он определил термин «математическая индукция», который использовался математиками без особой ясности. После статьи де Моргана термин получил широкое распространение благодаря учебнику алгебры Тодгентера. Его наибольший вклад в научное знание заключается в его логических исследованиях, результатом которых стали его знаменитые законы и логика отношений. в 1847 г. де Морган опубликовал свой главный логический трактат под названием «Формальная логика, или исчисление необходимых и вероятных заключений» [2], в котором он исходил из принципа, что логика должна служить точному выражению мыслей и устранять неясности и двусмысленности, присущие разговорному языку. Трактат содержит переиздание первых понятий, подробное развитие доктрины силлогизма, а также главы о вероятности, индукции, старых логических терминах и ошибках. Профессор де Морган, его сын Джордж и жена София причастны к истории основания Лондонского математического общества.

Идея основания Лондонского математического общества принадлежит двум молодым людям, недавним выпускникам Университетского колледжа, Джорджу де Моргану и его другу Артуру Рэньярду.

Жизнь Артура с 12 лет была связана с Университетским колледжем, с 1857 по 1860 год он учился в школе Университетского колледжа, затем в течение четырёх лет учился в коллежде, где с 1857 подружился со своим одноклассником Джорджем де Морганом. Под влиянием лекций профессора де Моргана Артур решил продолжить изучение математики и астрономии. В 1863 году, в возрасте 18 лет, он был избран членом Королевского астрономического общества.

Джордж де Морган тоже учился в школе Университетского колледжа (1856–1857), а затем в колледже, где получил множество отличий, выиграв первую премию в классе своего отца и золотую медаль Лондонского университета, когда получил степень магистра в 1863 году. Его называли «юный Бернулли». имея в виду, что его отец тоже был математиком. С 1863 по 1865 год он был учителем математики в школе Университетского колледжа.

Подробности формирования Лондонского математического Общества описала София де Морган в мемуарах о муже, опубликованных в 1882 году [3]. История гласит, что летом 1864 года младший де Морган (George Campbell De Morgan, 1841–1861) и его друг Артур Рэньярд (Arthur Cowper Ranyard, 1815–1894) обсуждали математические проблемы во время прогулки по улицам, когда им пришло в голову, что «было бы очень приятно иметь общество, в которое можно было бы вносить все открытия в области математики». «Между молодыми людьми было решено, что Джордж должен попросить своего отца занять председательское место на первом заседании» [3, стр. 281]. На самом деле, видимо, Рэньярд договорился с профессором о встрече.

Литографированный циркуляр от 10 октября 1864 г, написанный рукой Джорджа де Моргана и разосланый математикам по всей стране, гласил следующее: «Сэр, позвольте просить Вас оказать нам честь присутствовать на первом заседании „Математического общества Университетского колледжа“, которое состоится в колледже в Ботаническом театре вечером 7-го ноября в восемь часов. Профессор де Морган пообещал быть председателем и выступить со вступительной речью, после чего можно будет обсудить общие цели и планы Общества. Предлагается, чтобы очередные заседания Общества проходили раз в месяц, а прочитанные затем статьи были отпечатаны на литографии и распространены среди членов Общества. Годовая подписка не должна превышать половины гинеи.

Имеем честь быть, сэр,

Ваши покорные слуги. G. C. De Morgan, Arthur C. Ranyard» [4].

Предварительная встреча состоялась 7 ноября 1864 г. На ней договорились называть будущее общество «Лондонское математическое общество». Первое заседание Общества состоялось 16 января 1865 г. Торжественное заседание началось в восемь часов с избрания Августа де Моргана и Томаса Херста (Thomas Archer Hirst, 1830–1892) в качестве первого президента и вице-президента Общества соответственно. Секретарями-основателями общества стали Генри Мейсон Бомпас (Bompas, Henry Mason, 1836–1909) и Герберт Харди Козенс-Харди (Herbert Cozens-Hardy, 1838–1920), оба бывшие ученики де Моргана в Университетском колледже и оба практикующие юристы. Джордж де Морган и Артур Рэньярд на этом заседании отсутствовали.

Со вступительной речью выступил профессор де Морган. Главной целью Общества де Морган назвал развитие математики и её наиболее непосредственных применений. Он также выразил надежду, что в Обществе не будет доминировать какая-то конкретная область исследований, но что каждое направление будет иметь достаточную поддержку среди своих членов. Наконец, он предложил такие области изучения, как «то, что можно назвать логической математикой, т.е. связь между логикой и математикой; история математики» [5].

Из 27 членов Общества 26 имели прямое отношение к Университетскому коледжу: учились в нём, были учениками де Моргана. в течение нескольких месяцев Общество привлекло более 60 новых членов со всей страны, включая многих ведущих британских математики 19 века, такие как Артур Кэли, Джеймс Джозеф Сильвестр, Генри Джон Стивен Смит, Джордж Сэлмон, Уильям Кингдон Клиффорд и Джеймс Клерк Максвелл.

Кэли был одним их самых активных членов Общества. Свою первую статью «Преобразование плоских кривых» он представил Обществу 16 октября 1865 г. [6], после которой последовали ещё 77 статей. С 1868 по 1870 г. он был президентом Общества.

15 января 1866 г. состоялось годовое заседание Общества. Де Морган обратил внимание на новизну и важность многих статей и отметил, что это единственное общество в Англии, где можно получить такие статьи. Он также выразил свое мнение, что цели Общества в целом выполнены. в ноябре 1866 г. состоялась второе общее ежегодное собрание Общества. Де Морган не присутствовал на этой встрече — двумя днями ранее он подал в отставку со своего поста профессора Университетского колледжа из-за разногласий по поводу реализации колледжем политики религиозного нейтралитета, — и с этого времени его посещения становились все менее регулярными по мере ухудшения состояния его здоровья. Он остался в Совете Общества,

занимая должность вице-президента с 1866 по 1868 год и с 1869 по 1870 год, все еще время от времени выступая с докладами. Инсульт сделал его неспособным посещать собрания после 1868 года, и он умер 18 марта 1871 года.

Однако Общество очень скоро стало жертвой собственного успеха. Резкое увеличение числа членов и статей, представленных на его заседаниях, привело к увеличению расходов на печать и распространение трудов. Первый том трудов Общества (Proceedings of the London Mathematical Society), охватывающий период с января 1865 по ноябрь 1866 года, содержал всего 11 из 37 статей, представленных в течение этого времени. в своем первоначальном циркуляре от 1864 года Джордж де Морган и Артур Рэньярд заверяли потенциальных членов, что годовая подписка не превысит половины гинеи. Однако затраты на подготовку материалов быстро привели к необходимости более чем удвоить членский взнос с 10 шиллингов до одной гинеи в ноябре 1867 года. Но, несмотря на увеличение доходов, которое обеспечил этот рост, к 1873 году Общество испытывало дефицит из-за растущего числа публикаций статей. Такие скромные меры, как сокращение подписки на журналы, сокращение расходов на печать и взимание платы с членов клуба за перепечатку статей, серьезно рассматривались до тех пор, пока в 1874 году щедрый подарок в размере 1000 фунтов стерлингов от лорда Рэлея (Lord Rayleigh) не разрешил финансовые трудности. После устранения финансовых проблем число публикацияй статей резко возросло. К 1900 году в трудах общества было опубликовано более 900 статей.

До 1867 г. Лондонское математическое общество не имело собственноо помещения и, по сути, считалось студенческим обществом университетского колледжа, наряду с существующими медицинским, дискуссионным, литературным и философским обществами.

В 1867 г. Общество насчитывало 94 члена, больше половины из них не имели отношение к Университетскому колледжу. Это общество вскоре привлекло внимание некоторых выдающихся математиков страны, и из общества университетских колледжей оно превратилось в Лондонское математическое общество и переведено из здания колледжа в собственное помещение. Общество стало тем, чем оно остается до сих пор, — национальным математическим обществом.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Rice A. C., Wilson R. J., Gardner J. H. From Student Club to National Society: The Founding of the London Mathematical Society in 1865 // Historia Mathematica. 1995. V. 22, p. 402–421.

2. Morgan A. de. Formal logic: or the calculus of inference, necessary and probable - London: Taylor and Walton. 1847.

3. Morgan S. E. de. Memoir of Augustus De Morgan - London: Longmans, Green, and Co.1882.

4. London Mathematical Society Papers: Letters to Thomas Archer Hirst, University College London Archives.

5. Morgan A. de. Speech of Professor de Morgan // Proceedings of the London Mathematical Society. 1865. V. s1-1. P. 1-9.

6. Cayley A. Transformation of Plane Curves // Proceedings of the London Mathematical Society. 1866. No. III. P. 27-34.

УДК 51(091)

Платон, Кеплер и Гегель о гармонии мира

П. Н. Антонюк (Россия, г. Москва)
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
e-mail: pavera@bk.ru
Я. В. Кучериненко (Россия, г. Москва)
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
e-mail: yar_kuch@mail.ru

Plato, Kepler and Hegel on the harmony of the world

P. N. Antonyuk (Russia, Moscow)
Lomonosov Moscow State University
e-mail: pavera@bk.ru
Ya. V. Kucherinenko (Russia, Moscow)
Lomonosov Moscow State University
e-mail: yar_kuch@mail.ru

Рассмотрена краткая история применения чисел Платона к описанию строения Солнечной системы.

В своем диалоге «Тимей» Платон [1] рассказывает, как бог построил Вселенную (космос, мир). Для этого Платон использует две последовательности натуральных чисел. Первая последовательность (стр. 437 – 438)

1 2 3 4 9 8 27

написана в духе пифагорейцев. Вторая последовательность (стр. 458 – 459)

4 8 20 6 12

характеризует пять правильных выпуклых многогранников, называемых телами Платона. Последовательность указывает число их граней. Сегодня приняты следующие названия многогранников, соответственно: тетраэдр, октаэдр, икосаэдр, гексаэдр (куб) и додекаэдр (сами названия учитывают число граней). Двойственность тел Платона (грани и вершины меняются местами) приводит к такой же последовательности числа вершин, но тела располагаются в другом порядке: тетраэдр, куб, додекаэдр, октаэдр и икосаэдр. В 1596 году Иоганн Кеплер (1571 – 1630) в своей первой книге «Космографическая тайна» [2] применил тела Платона для объяснения закона планетных расстояний в Солнечной системе:

8 20 12 4 6

У Кеплера тела Платона (указано число граней) располагаются в порядке возрастания расстояний планет от Солнца: октаэдр, икосаэдр, додекаэдр, тетраэдр и куб. Тела Платона разделены сферами, шесть сфер охватывают пять тел Платона, орбиты шести планет (Меркурий, Венера, Земля, Марс, Юпитер, Сатурн) лежат на сферах.

В 1801 году Георг Вильгельм Фридрих Гегель (1770 — 1831) [3] применил первую последовательность Платона к формулировке закона планетных расстояний в Солнечной системе, произвольно заменив число 8 на число 16:

1 2 3 4 9 16 27

Заметим, что все числа в последовательностях даны в том порядке, как их задавали Платон, Кеплер и Гегель. Хорошо видно, что Кеплер и Гегель считали возможным изменить в последовательностях Платона порядок чисел и сами числа.

Алексей Фёдорович Лосев (1893 — 1988), автор вступительной статьи и статьи в примечаниях к третьему тому Платона [1], указал в этом томе неверный порядок чисел в первой последовательности Платона (стр. 613):

1 2 3 4 8 9 27

Неверный порядок чисел мы видим также в важной книге Лосева [4] на стр. 196 и 201, в то время как на стр. 423 дан верный порядок. В другой известной книге Лосева [5] первая последовательность Платона записана правильно.

Отметим, что грани каждого из платоновых тел образуют правильную систему фигур в том смысле, что каждая из этих граней одинаково окружена другими. Рёбра и вершины каждого из платоновых тел также образуют правильные системы фигур. Эти свойства позволяют определить платоновы тела и только их. Свойства правильности платоновых тел лежат в основе понимания правильных систем точек, составляющих суть кристаллографии. Это понимал ещё Кеплер, сочинение "О шестиугольных снежинках"которого, считается первой работой в кристаллографии.

Вера в гармонию Солнечной системы привела в конечном счете к формулировке Кеплером трех законов движения планет, которые с высокой точность подтверждаются астрономическими наблюдениями и из которых однозначно следует закон всемирного тяготения Ньютона. Недаром одна из последних книг Кеплера называется «Гармония мира», в которой идея правильности рассматривается с разных сторон.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Платон. Собрание сочинений в 4 т. Том 3. — М.: Мысль, 1994. 656 с.

2. Johannes Kepler. Mysterium cosmographicum // Johannes Kepler - Gesammelte Werke. Band I. — München, 1993.

3. Гегель. Об орбитах планет (Философская диссертация, 1801 г.) // Под знаменем марксизма. Философский и общественно-экономический журнал. 1934. № 6. С. 101 – 119. (Первый перевод диссертации Гегеля на русский язык).

4. Лосев А. Ф. Античный космос и современная наука. — М.: Издание автора, 1927. 550 с.

5. Лосев А. Ф. История античной эстетики. Софисты. Сократ. Платон. — М.: Искусство, 1969. 716 с.

6. Андреев Н. Н., Долбилин Н. П., Канель-Белов А. Я. Гармония правильных многогранников, https://www.etudes.ru/ru/etudes/platonic-solids-harmony/

7. Андреев Н. Н. Двойственность правильных многогранников // Математические этюды., https://www.etudes.ru/ru/sketches/polyhedrons-duality/

УДК 51(091)

Математические данные, устанавливающие точность хронологических расчетов Кирика Новгородца

П. Н. Антонюк (Россия, г. Москва)
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
e-mail: pavera@bk.ru
Р. А. Симонов (Россия, г. Москва)
Научный и издательский центр «Наука» Российской академии наук
e-mail: rem.simonov8@yandex.ru

Mathematical data establishing the accuracy of the chronological calculations of Kirik Novgorodets

P. N. Antonyuk (Russia, Moscow)
Lomonosov Moscow State University
e-mail: pavera@bk.ru
R. A. Simonov (Russia, Moscow)
Scientific and Publishing Center "Nauka" of the Russian Academy of Sciences
e-mail: rem.simonov8@yandex.ru

Хронологические расчеты Кирика Новгородца (1100 - после 1156) представлены в его сочинении «Учение им же ведати человеку числа всех лет» (1136 г.) [1]. В начальной части данного произведения приводятся расчеты количества единиц счета времени в 6644 годах, прошедших от Сотворения Мира до момента выполнения хронологических вычислений Кириком. Кроме числа самих годов, Кирик рассчитывает в этом числе - (6644) - количество месяцев, недель, дней и часов. «Все приводимые результаты вычислены точно» [2]. В.В. Мильков независимо от А.П. Юшкевича уже в наше время аналогично оценил, что расчетная работа Кириком «исполнена безукоризненно» [3]. Однако ни Юшкевич, ни Мильков не сообщают на основе чего они пришли к выводу о точности математических расчетов Кирика, но самое главное: зачем Кирику была нужна такая точность? Между тем ответ на этот вопрос вытекает из работы А.А. Турилова о «семитысячниках». Они были кириллической рецепцией глаголического протографа, а так как числовые системы в этих письменностях были различными (в деталях), то «семитысячники» могли казаться крайне неточными хронологическими текстами, каковые Кирик решил исправить: «Кирик самостоятелен в расчетах, которые он делал применительно к своему времени (т. е. к 6644 году – Авт.). Семитысячники послужили ему лишь образцом и схемой, к тому же наиболее оригинальная часть «Учения» - о дробном делении часа – в них не представлена» [4]. От себя добавим, что сама ситуация, в которой оказался Кирик, заставляла его с особой тщательностью относиться к производимым в «Учении о числах» расчетам. Однако до сих пор остается нерешенным вопрос: что служит **маркером** надежности расчетов Кирика и можно ли им руководствоваться современному ученому-источниковеду при решении проблемы достоверности работы с древнерусскими числовыми источниками. Переходим к изложению такой возможности.

На основе элементарных (школьных) сведений известно, что числа делятся на простые и составные, причем составные числа можно делить на простые числа. Например, составное число 12 делится на простые числа так: $\mathbf{12 = 2 \cdot 2 \cdot 3}$ или «2 в квадрате умножить на 3». Число 12 (в буквенной нумерации) встречается в «Учении о числах» Кирика. Оно здесь фиксирует часы астрономического явления, которое называется равноденствием (весенним или осенним): «вси ведають и азъ поведаю, яко въ дни одиномъ 12 есть часа, а тако же и в нощи» [1, С. 186].

Далее у Кирика речь идет о числе 60, которое выражает количество «дробных»: «яко егда будет их 60 день исполняют» [1, С. 186]. Число 60 можно разложить на простые множители так: $\mathbf{60 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5}$. Если рассмотреть приводимые Кириком данные о всех семи «дробных» (60, 300, 1500, 7500, 37500, 187500, 937500), то в качестве **маркера** будет выступать число 60, которое присутствует во всех семи случаях «дробных». Интересно сравнить, согласуются ли это разбиение с числами Кирика о временных единицах (6644, 79728, 2426721, 29120652). Легко заметить, что в этом случае **маркером** будет число $\mathbf{11 \cdot 151}$, которое повторяется во всех четырех случаях. Это может свидетельствовать о том, что первоначально текст о «дробных» не входил в учение Кирика, каким оно сформировалось позже, что подтверждает предположение К.В. Вершинина о том, что название трактата Кирика относилось не ко всему сочинению, а к его части: «... Заголовок «Учение им же ведати человеку числа всех лет», хотя и прижился в историографии в качестве названия всего сочинения, обозначает лишь его часть...» [5]. Недельное число («346673 недели и 3 дни») не является целочисленным, поэтому выпадает из состава анализируемых числовых значений.

$$\mathbf{12 = 2 \cdot 2 \cdot 3}$$

$$\mathbf{60 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5}$$

$$\mathbf{300 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5}$$

$$\mathbf{1500 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5}$$

$$\mathbf{7500 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5}$$

$$\mathbf{37500 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5}$$

$$\mathbf{187500 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5}$$

$$\mathbf{937500 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{6644}\ (\text{годы}) &= \mathbf{2 \cdot 2 \cdot 11 \cdot 151} \\
\mathbf{79728}\ (\text{месяцы}) &= \mathbf{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 151} \\
\mathbf{2426721}\ (\text{дни}) &= \mathbf{3 \cdot 11 \cdot 151 \cdot 487} \\
\mathbf{29120652}\ (\text{часы}) &= \mathbf{2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 151 \cdot 487}
\end{aligned}$$

В результате вопрос о точности вычислений Кирика получил окончательное решение. Выяснилось, что правильность числовых результатов может быть установлена посредством выявления общего **маркера**, представляющего собой наибольший общий делитель. Для начальной части «Учения» Кирика это число – $\mathbf{11 \cdot 151}$, то есть 1661. Для пятеричных «дроблений» это – $\mathbf{2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5}$, то есть 60. Это легко проверить на примере изучения длительности предельно малой частицы времени, которая в историографии интерпретируется (в частности) величиной седьмого дробного «часца» Кирика. Кирик утверждал, что более краткого времени не бывает: «Боле же сего не бываеть рекше не ражаются от седмых дробных» [1, С. 188]. В распределении Кирика «дробных» важную роль играют начальное значение ($\mathbf{12 = 2 \cdot 2 \cdot 3}$), с которого начинается счет «дробных», и последнее ($\mathbf{937500 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5}$), которым счет завершается. Их отношение 12/937500 **точно** равно (в современной терминологии) 46,08 миллисекунд (частица времени). Этот результат соответствует указываемому в историографии значению, равному «примерно 46 миллисекундам» [6]. Из этого следует, что предложенный метод с опорой на понятие **маркера**, имеет применение к ситуациям, изучаемым в древнерусской исторической хронологии и исторической метрологии.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кирик Новгородец. Учение им же ведати человеку числа всех лет // Историко-математические исследования. — М.: Гостехтеориздат, 1953. Вып. VI / Под ред. Г.Ф. Рыбкина и А.П. Юшкевича. С. 173-191.

2. Юшкевич А. П. История математики в России до 1917 года. — М.: Наука, 1969. С. 19-20.

3. Мильков В. В. Кирик Новгородец – ученый инок и его «университет» (о значении Антониева монастыря в творческой судьбе древнерусского книжника) // Вестник славянских культур. 2020. Том 56. С. 10.

4. Турилов А. А. О датировке и месте создания календарно-математических текстов – «семитысячников» // Естественнонаучные представления Древней Руси. — М.: Наука, 1988. С. 38.

5. Вершинин К. В. Неизвестный фрагмент «Учения о числах» Кирика Новгородца // Древняя Русь. Вопросы медиевистики. — М.: Индрик, 2022. № 1(87). С. 38.

6. Мурьянов М. Ф. История книжной культуры России. Очерки: В 2 ч. Ч. 1. — СПб.: Мир, 2007. С. 144.

———————————————————————————

УДК 512.1

Применение алгебры комплексных чисел в геодезии и робототехнике

О. О. Барабанов (Россия, Ковров)
e-mail: barabanovoo@yandex.ru
Л. П. Барабанова (Россия, Ковров)
Ковровская государственная технологическая академия имени В. А. Дегтярева
e-mail: lpbarabanova@yandex.ru

Application of complex number algebra in geodesy and robotics

O. O. Barabanov (Russia, Kovrov)
e-mail: barabanovoo@yandex.ru
L. P. Barabanova (Russia, Kovrov)
Kovrov State Technological Academy of Degtyarev
e-mail: lpbarabanova@yandex.ru

В настоящее время классические задачи плоской геодезии получили новые интерпретации в робототехнике. В этих задачах удобным оказывается применение комплексных чисел, восходящее к Каспару Весселю (Wessel C., 1799).

Рассмотрим обратную угловую засечку (ОУЗ) применительно к мобильному роботу на плоскости. Проблеме построения алгоритмов позиционирования робота на плоскости по углам между осью робота и направлениями на три известных маяка посвящено много работ, см. [1]. Представленные в литературе алгоритмы такого рода состоят из двух семейств. Первое семейство (классическое) – только местоопределение. Второе семейство (робототехническое)

– местоопределение и ориентирование. К первому семейству относятся алгоритмы только местоопределения для наблюдателя трех известных пунктов по измеренным углам. Достоверно первым вопрос о таком угловом местоопределении поставил Снеллиус [2, p. 203-205]. Затем многие известные геодезисты и математики отметились в истории своими алгоритмами для ОУЗ – так впоследствии стали называть эту задачу. Первый алгоритм для ОУЗ в декартовых прямоугольных координатах построил Бессель [3]. Попытки построить адекватный алгоритм для ОУЗ предпринимал Гаусс, см. [4]. Согласно [5] со ссылкой на [6] на момент 1959 года число различных процедур решения обратной угловой засечки уже превосходило 500. Ко второму, относящемуся к робототехнике, семейству алгоритмов, принадлежат алгоритмы [1]—[5]. Первостепенным качеством алгоритма решения любой такой задачи должно быть логическое соответствие исходной постановке в следующем смысле: если задача имеет решение, то оно совпадает с выходом алгоритма, и если задача не имеет решения, то алгоритм выдает соответствующее сообщение, характеризующее возникшую ситуацию. Специфической особенностью задач позиционирования является то, что объект существует, а, следовательно, и задача должна иметь решение. Однако в силу возможных сбоев и аварийных ситуаций может произойти потеря формального решения задачи, т.е. на вход алгоритма может поступить комплект фиктивных данных, называемый выбросом, при котором задача не имеет решения. В этом случае алгоритма решения задачи должен отреагировать определённым флагом отказа. Назовём алгоритм *адекватным* исходной задаче, если он соблюдает все особенности задачи, не привносит своих собственных особенностей и реагирует на выбросы. Насколько нам известно, первый адекватный алгоритм для ОУЗ, был построен в [7].

Назовем алгоритм решения измерительной задачи *вполне адекватным* измерительной задаче, если он адекватен задаче и обеспечивает расчет среднеквадратических ошибок (СКО) искомых величин. Как правило, СКО искомых величин определенным образом связаны с СКО употребляемых и измеряемых величин. Эту связь и должен проводить вполне адекватный алгоритм решения измерительной задачи. Таким образом, вполне адекватный алгоритм решения измерительной задачи должен максимально использовать всю входную навигационную информацию в рамках принятой математической модели во всех возможных случаях. Попытка произвести анализ ошибок в рассматриваемой задаче была сделана в [5].

Целью настоящей заметки является построение вполне адекватного алгоритма для задачи позиционирования мобильного робота на плоскости с помощью ОУЗ в комплексных числах.

1. Постановка задачи. На входе алгоритма: известные маяки b_1, b_2, b_3 как точки комплексной плоскости, углы φ_1, φ_2, φ_3, измеренные от направления оси робота до направлений на маяки b_1, b_2, b_3, соответственно (положительным направлением отсчета углов считаем отсчет против часовой стрелки), см. рис. 1, слева. Кроме того, на входе алгоритма – СКО $\sigma_\varphi > 0$ измерения углов φ_1, φ_2, φ_3.

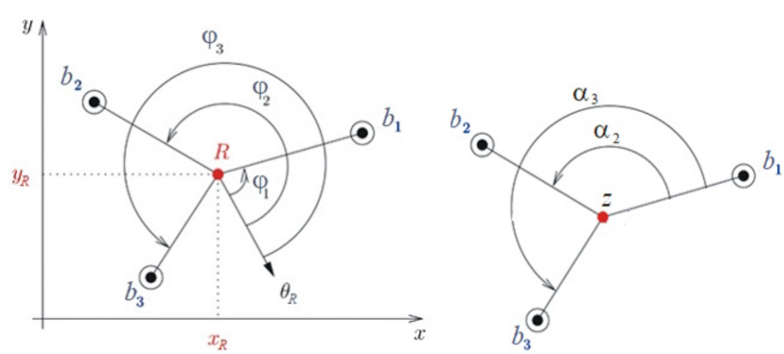


Рис. 1: Триангуляционная схема на базе рисунка из [1]

Требуется вычислить: точку $R \equiv z$ — центр угловых измерений; полярный угол $\theta \equiv \theta_R \equiv \arg z$ оси робота; СКО $\sigma_z = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}$ точки z; СКО σ_φ угла φ.

На выходе алгоритма: точка z, из которой производились наблюдения, и угол φ или отказ, сопровождаемый характеристикой нештатной ситуации. Кроме того, на выходе алгоритма в штатной ситуации должны быть среднеквадратические ошибки σ_z, σ_φ местоположения робота и его ориентации, соответственно.

2. Основная формула местоопределения для обратной угловой засечки. Положим $\alpha_2 = \varphi_2 - \varphi_1$, $\alpha_3 = \varphi_3 - \varphi_1$, см. рис. 1 справа. Тогда для однократной обратной угловой засечки при отсутствии выбросов согласно [7]

$$z = b_1 + \frac{\operatorname{Im}\left(e^{i(\alpha_3-\alpha_2)}(b_2-b_1)(\overline{b_3-b_1})\right)}{e^{i\alpha_2}(\overline{b_2-b_1})\sin\alpha_3 - e^{i\alpha_3}(\overline{b_3-b_1})\sin\alpha_2}. \tag{1}$$

Формула (1) легко приводится к симметричному виду

$$z = \frac{b_1 e^{-2i\varphi_1}\overline{b_2-b_3} + b_2 e^{-2i\varphi_2}\overline{b_3-b_1} + b_3 e^{-2i\varphi_3}\overline{b_1-b_2}}{e^{-2i\varphi_1}\overline{b_2-b_3} + e^{-2i\varphi_2}\overline{b_3-b_1} + e^{-2i\varphi_3}\overline{b_1-b_2}}. \tag{2}$$

Отсюда видно, что z можно записать и по-другому. Положим в (2)

$$p_1 = e^{-2i\varphi_1}\overline{b_2-b_3},\ p_2 = e^{-2i\varphi_2}\overline{b_3-b_1},\ p_3 = e^{-2i\varphi_3}\overline{b_1-b_2},\ p = p_1+p_2+p_3. \tag{3}$$

Тогда

$$z = \frac{b_1p_1 + b_2p_2 + b_3p_3}{p}. \tag{4}$$

3. Исчисление ошибки местоопределения. Найдем строгое в смысле классической теории ошибок выражение для СКО σ_z пункта z, вычисленного согласно (4). Под СКО z понимаем корень из дисперсии комплексной случайной величины [8, с.402-403], которая в классической теории ошибок отождествляется с дифференциалом измерения, в данном случае это dz: $\sigma_z = \sqrt{\mathbf{E}(|dz|^2)}$, где $\mathbf{E}$ — оператор математического ожидания, $dz = \frac{\partial z}{\partial\varphi_1}d\varphi_1 + \frac{\partial z}{\partial\varphi_2}d\varphi_2 + \frac{\partial z}{\partial\varphi_3}d\varphi_3$. При этом будем считать маяки $b_1,\ b_2,\ b_3$ безошибочно известными, а измерения $\varphi_1,\ \varphi_2,\ \varphi_3$ независимыми и равноточными. Тогда

$$\sigma_z = K_z(\varphi_1,\ \varphi_2,\ \varphi_3)\cdot\sigma_\varphi, \tag{5}$$

где $K_z = K_z(\varphi_1,\ \varphi_2,\ \varphi_3) = \sqrt{\left|\frac{\partial z}{\partial\varphi_1}\right|^2 + \left|\frac{\partial z}{\partial\varphi_2}\right|^2 + \left|\frac{\partial z}{\partial\varphi_3}\right|^2}$ есть искомый коэффициент, названный в [9] *коэффициентом чувствительности* измерительной системы по z.

Имеем: $\frac{\partial z}{\partial\varphi_k} = \frac{\partial z}{\partial p_k}\cdot\frac{\partial p_k}{\partial\varphi_k}$, $\frac{\partial z}{\partial p_k} = \frac{b_kp-(b_1p_1+b_2p_2+b_3p_3)}{p^2} = \frac{p(b_k-(b_1p_1+b_2p_2+b_3p_3)/p}{p^2} = \frac{b_k-z}{p}$, $\frac{\partial p_k}{\partial\varphi_k} = -2i\cdot p_k$. Поэтому $\frac{\partial z}{\partial\varphi_k} = \frac{-2i\cdot p_k\cdot(z-b_k)}{p}$, $K_z^2 = 4|p|^{-2}\left(|p_1|^2|b_1-z|^2 + |p_2|^2|b_2-z|^2 + |p_3|^2|b_3-z|^2\right)$ или, согласно (3),

$$K_z = 2|p|^{-1}\sqrt{|b_2-b_3|^2|b_1-z|^2 + |b_3-b_1|^2|b_2-z|^2 + |b_1-b_2|^2|b_3-z|^2}. \tag{6}$$

Имеем $e^{-2i\varphi_k} = e^{2i\theta}\frac{|b_k-z|^2}{(b_k-z)^2} = e^{2i\theta}\frac{\overline{b_k-z}}{b_k-z}$. Поэтому согласно (3) $p(z) = e^{2i\theta}\frac{q(z)}{(b_1-z)(b_2-z)(b_3-z)}$, где

$$q(z) = \overline{b_1-z}(b_2-z)(b_3-z)\overline{b_2-b_3} + \overline{b_2-z}(b_1-z)(b_3-z)\overline{b_3-b_1} + \overline{b_3-z}(b_1-z)(b_2-z)\overline{b_1-b_2}.$$

Раскрывая скобки, убеждаемся, что третьи степени в выражении $q(z)$ исчезают. Более того, получается классическая ситуация: $q(z) = 0$ есть уравнение второго порядка для окружности, проходящей через точки $b_1,\ b_2,\ b_3$. В рассматриваемой задаче эта окружность называется *опасной*. В результате,

$$K_z = \frac{2|(b_1-z)(b_2-z)(b_3-z)|}{|q(z)|}\sqrt{|b_2-b_3|^2|b_1-z|^2+|b_3-b_1|^2|b_2-z|^2+|b_1-b_2|^2|b_3-z|^2}.$$

что объясняет наличие существенно особых точек $b_1,\ b_2,\ b_3$ для K_z. Кроме того, из последней формулы очевидно следует, что при приближении z к точке на опасной окружности, отличной от $b_1,\ b_2,\ b_3$, коэффициент чувствительности K_z стремится к бесконечности, а порядок роста K_z при z, стремящемся к бесконечности, равен двум.

4. Ориентирование и исчисление ошибки ориентирования. Для θ имеем три эквивалентных выражения

$$\theta = \arg(b_k - z(\varphi) - \varphi_k), \quad k = 1,\ 2,\ 3. \tag{7}$$

Также как в случае оценки СКО местоопределения, имеем связь СКО

$$\sigma_\theta = K_\theta(\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3)\cdot\sigma_\varphi, \tag{8}$$

где главную роль играет K_θ — коэффициент чувствительности измерительной системы по θ: $K_\theta(\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3) = \sqrt{\left|\frac{\partial\theta}{\partial\varphi_1}\right|^2+\left|\frac{\partial\theta}{\partial\varphi_2}\right|^2+\left|\frac{\partial\theta}{\partial\varphi_3}\right|^2}$. В связи с тем, что функция $\arg w$, как функция комплексного аргумента, не является аналитической, будем её рассматривать как вещественную функцию $\arg w$, где $w = (x\ y)^T$ — столбец из двух вещественных прямоугольных координат, $(\cdot)^T$ — операция транспонирования матрицы. Тогда, согласно (7),

$$\frac{\partial\theta}{\partial\varphi_k} = \frac{\partial\arg w}{\partial w}\cdot\frac{\partial(b_k-z)}{\partial z}\cdot\left(\mathrm{Re}\left(\frac{\partial z}{\partial\varphi_k}\right)\ \mathrm{Im}\left(\frac{\partial z}{\partial\varphi_k}\right)\right)^T - 1 =$$

$$= \frac{-1}{|b_k-z|^2}\left(-\mathrm{Im}(b_k-z)\ \mathrm{Re}(b_k-z)\right)\cdot\left(\mathrm{Re}\left(\frac{\partial z}{\partial\varphi_k}\right)\ \mathrm{Im}\left(\frac{\partial z}{\partial\varphi_k}\right)\right)^T - 1 = -\frac{\mathrm{Im}\left(\overline{b_k-z}\cdot\frac{\partial z}{\partial\varphi_k}\right)}{|b_k-z|^2} - 1,$$

где $\frac{\partial z}{\partial\varphi_k}$ обеспечено формулой (5). То есть, согласно (5), $\frac{\partial\theta}{\partial\varphi_k} = \mathrm{Im}\left(\frac{2ip_k}{p}\right) - 1 = 2\mathrm{Re}\left(\frac{p_k}{p}\right) - 1$. Отсюда

$$K_\theta = \sqrt{\left(2\mathrm{Re}\left(\frac{p_1}{p}\right)-1\right)^2+\left(2\mathrm{Re}\left(\frac{p_2}{p}\right)-1\right)^2+\left(2\mathrm{Re}\left(\frac{p_3}{p}\right)-1\right)^2}. \tag{9}$$

5. Вполне адекватный алгоритм позиционирования робота. Вход: $b_1,\ b_2,\ b_3$ — комплексные числа, $\varphi_1,\ \varphi_2,\ \varphi_3$ — действительные числа.

Шаг 1. Вычисление p согласно (3). Если получится нуль, то сообщается, что «Робот на опасной окружности». Конец алгоритма. В противном случае переход к следующему шагу.

Шаг 2. Вычисление z по формуле (4).

Шаг 3. Проверка на выброс согласно [7]. Если

$$\mathrm{Re}\left(e^{-i(\varphi_2-\varphi_1)}\frac{(b_2-z)}{(b_1-z)}\right) < 0 \quad \text{или} \quad \mathrm{Re}\left(e^{-i(\varphi_3-\varphi_1)}\frac{(b_3-z)}{(b_1-z)}\right) < 0,$$

то сообщение «Выброс». Конец алгоритма. В противном случае – переход к следующему шагу.

Шаг 4. Вычисление θ по формуле (7) при $k=1$ (для определенности).

Шаг 5. Вычисление K_z по формуле (6) и K_θ по формуле (9).

Шаг 6. Вычисление σ_z по формуле (5) и σ_θ по формуле (8).

Шаг 7. Выход алгоритма (штатный): комплект данных $z,\ \theta,\ K_z,\ K_\theta,\ \sigma_z,\ \sigma_\theta$.

В заключение отметим, что намеченная теория позиционирования мобильного робота хорошо поддается дальнейшему обобщению на избыточные измерения в точном соответствии с методом наименьших квадратов и с исчислением штатных ошибок.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Pierlot V., Van Droogenbroeck M. A New Three Object Triangulation Algorithm for Mobile Robot Positioning // IEEE Transactions on Robotics. 2014. V. 30. №3. P. 566–577.
2. Snellius W. Eratosthenes Batavus. Leyden, 1617.
3. Bessel F.W. Über eine Aufgabe der practischen Geometrie // Monatliche Correspondenz zur Beförderung der Erd-und Himmels-kunde. 1813. Band 27. S. 222–226.
4. Барабанов О.О., Барабанова Л.П. История задач Снеллиуса и Ферма / Материалы XVI Междунар. конф., посвященной 80-летию со дня рождения проф. Мишеля Деза. – Тула: ТГПУ им. Л. Н. Толстого, 2019. С. 149–153.
5. Font-Llagunes J., Batlle J. Consistent triangulation for mobile robot localization using discontinuous angular measurements // Robotics and Autonomous Systems. 2009. V. 57. №9, P. 931–942.
6. Bock W. Mathematische und geschichtliche Betrachtungen zum Einschneiden, Schriftenreihe Niedersaechsisches Landesvermessungsamt, Report 9, Hannover, 1959.
7. Барабанова Л.П. Окончательная формула для обратной однократной угловой засечки // Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъемка. 2013. №3. С. 9–13.
8. Вентцель Е.С. Теория вероятностей. М.: Наука, 1969.
9. Барабанов О.О., Барабанова Л.П. Математические задачи дальномерной навигации. М.: Физматлит, 2007. 272 с.

УДК 519.716

Об алгоритме Дэна

Б. П. Ваньков (Россия, г. Тула)
Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого
e-mail: vankovbp@mail.ru

About Dan's algorithm

B. P. Vankov (Russia, Tula)
Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University
e-mail: vankovbp@mail.ru

Для решения важных задач, связанных с универсальным способом задания групп в 1911 году М. Дэном была сформулирована проблема распознавания равенства слов (проблема тождества) для конечно определенных групп. Для группы G=<X;R>, заданной конечными множествами порождающих X и определяющих слов R, и любых двух групповых слов в алфавите X следует определить, представляют ли они один и тот же элемент группы G. Ставилась задача построения алгоритма (общего метода).

В 1955 году П.С. Новиков [5] доказал алгоритмическую неразрешимость проблемы тождества в теории групп.

В работе [11] в 1911 году М. Дэн предложил простой алгоритм решения проблемы равенства слов для фундаментальных групп замкнутых ориентируемых двумерных многообразий. В случае равенства 1 слово последовательно заменялось всё более короткими словами при помощи определяющих соотношений до получения пустого слова в группе.

Метод М. Дэна позже был распространен на широкие классы мало сократимых групп, удовлетворяющих условию малого сокращения определяющих слов.

Рассмотрим конечно-определённую группу G с представлением $G =< X; R >$, где R – симметризованное множество циклически несократимых определяющих слов, то есть замкнутое относительно циклического сдвига их и взятия обратного, а свободная группа F имеет базис X. Назовём её $T(q) - 1/p-$ группой, если симметризованное множество R всех определяющих слов удовлетворяет конъюнкции условий $C'(1/p)$ и $T(q)$.

Условие малого налегания $C'(1/p)$ означает, что при сокращении произведения любых двух не взаимно обратных определяющих слов сокращается меньше $1/p$длины каждого из них.

По условию $T(q)$ любая последовательность пар из h,$3 \leqslant h < q$, определяющих слов имеет хотя бы одну несократимую пару.

В. А. Тартаковский в 1947 [6] и в 1949 [7] годах решил проблему равенства слов для класса 1/6-групп.

В 1960 году М. Д. Гриндлингер [8, 9] показал, что к группам из этого класса применим алгоритм М. Дэна.

В 1978 году Гольдберг [1], учитывая работу [5], показал неулучшаемость этого результата.

Если положить, что натуральные p и q удовлетворяют условию $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{2}$, то будем иметь три класса $T(q) - 1/p-$групп с малой мерой налегания: $1/6-$группы, $T(4) - 1/4-$группы и $T(6) - 1/3-$группы.

М. Д. Гриндлингер получил полную структуру слов, равных единице, для первых двух классов групп.

Приведем лемму Гриндлингера для 1/6-групп [3].

Пусть R удовлетворяет условию $C'(1/6)$. Предположим, что W – нетривиальное циклически приведённое слово, равное 1 в G. Тогда либо

1. *$W \in R$,*

либо некоторая циклически приведённая перестановка W^* элемента W содержит одно из следующих:

1. *два непересекающихся подслова, каждое из которых $>(5/6)R$,*
2. *три непересекающихся подслова, каждое из которых$>(4/6)R$,*
3. *четыре непересекающихся подслова, два из которых $>(4/6)R$ и два$>(3/6)R$,*
4. *пять непересекающихся подслов, четыре из которых$>(3/6)R$, и одно$>(4/6)R$, или*
5. *шесть непересекающихся подслов, каждое из которых $>(3/6)R$.*

Похожий результат был получен М. Д. Гриндлингером для $T(4) - 1/4-$групп в 1965 году [2].

Пусть R удовлетворяет условию $C'(1/4)$и $T(4)$. Предположим, что W – нетривиальное циклически приведённое слово, равное 1 в G. Тогда либо

1. *$W \in R$,*

либо некоторая циклически приведённая перестановка W^* элемента W содержит одно из следующих:

1. *два непересекающихся подслова, каждое из которых >(3/4)R,*

2. *четыре непересекающихся подслова, каждое из которых >(1/2)R.*

Таким образом, любое слово, равное единице в $1/6$-группе или $T(4)-1/4-$группе, содержит более половины некоторого определяющего слова.

Последовательно производя замену таких подслов на меньшую часть определяющего слова для слова, равного единице в группе, получаем в итоге пустое слово. В этом и состоит алгоритм М. Дэна.

Следуя геометрической интерпретации условий малых сокращений [3] имеем:

по условию $C'(1/p)$для любой внутренней R – области D приведенной диаграммы $T(q)-1/p-$группы имеется не менее $p+1$ пограничного ребра;

по условию $T(q)$ из каждой внутренней вершины v приведенной диаграммы $T(q)-1/p-$группы выходит не менее q ориентированных ребер.

Таким образом получаем, что $T(6)-1/3-$группа является двойственной $1/6-$группе, то есть эти группы имеют дуальные диаграммы.

Поэтому любое слово, равное единице в $T(6)-1/3-$группе, содержит либо более половины некоторого определяющего слова и можем заменить его на меньшую часть, либо подслово S_1S_2 такое, что S_1UT и S_2VU^{-1} являются определяющими словами и длина слова S_1S_2больше длины слова $T^{-1}V^{-1}$, на которое можно заменить слово S_1S_2.

Таким образом получается обобщённый алгоритм Дэна решения проблемы равенства слов для *T(6)-1/3*-групп при помощи этих замен подслов на более короткие слова.

Рассматривается функция Дэна. Для конечного задания группы G определяется значение функции Дэна *f(n)* как максимальное количество слов, сопряжённых к определяющим словам, которые нужно перемножить, чтобы получить любое тривиальное слово длины не больше n. Её невычислимость равносильна неразрешимости в группе проблемы равенства слов.

Группы с линейной функцией Дэна гиперболичны.

Гиперболические группы были введены М. Громовым в работе [10]. Из определения гиперболической группы следует, что свойство группы быть гиперболической не зависит от выбора конечного задания этой группы. Всякая гиперболическая группа обладает разрешимыми проблемами равенства и сопряженности [10].

Примечательно, что, как показано в [4], для всякой гиперболической группы есть возможность конечного задания, для которого проблема равенства решается с помощью алгоритма Дэна.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гольберг А. И. О невозможности усиления некоторых результатов Гриндлингера и Линдона // Успехи матем. наук. 1978. Т. 33 № 6. С. 201–202.

2. Гриндлингер М. Д. К проблемам тождества слов и сопряжённости.-Изв. АН СССР Сер.матем. 1965. Т.29 С.245-268.

3. Линдон Р., Шупп П. Комбинаторная теория групп. М.: Мир, 1980. 368с.

4. Лысёнок И. Г. О некоторых алгоритмических свойствах гиперболических групп // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1989. Т. 53. Выпуск 4. С. 814 - 832

5. Новиков П. С. Об алгоритмической неразрешимости проблемы тождества слов в теории групп // Тр. мат. ин-та АН СССР им. В. А. Стеклова. 1955. Т. 44 – М.: Наука, 1955

6. Тартаковский В. А. О проблеме тождества для некоторых типов групп// Докл. АН СССР. 1947. Т. 58. С. 1909–1910.

7. Тартаковский В. А. Решение проблемы тождества для группы с k-сократимым базисом при $k = 6$ // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1949. Т. 13. С. 483–494.

8. Greendlinger M. Dehn's algorith for the word problem // Comm. Pure and Appl. Math. 1960. V. 13. P. 67–83.

9. Greendlinger M. On Dehn's algoriths for the conjugacy and word problems with applications // Comm. Pure and Appl. Math. 1960. V. 13. P. 641– 677

10. Gromov M. Hyperbolic groups. Preprint/ IHES. Paris, 1986.

11. Dehn M. Uber unendliche diskontinuerliche Gruppen // Math. Ann. 1911. Bd. 71. – P. 116–144.

———————————————————————————

УДК 517.28

Использование интеграла Лобачевского для решения некоторых задач интегрального исчисления

И. Х. Еникеев (Россия, г. Москва)
Московский политехнический университет
e-mail: enickeev.iX@yandex.ru
С. А. Муханов (Россия, г. Москва)
Московский политехнический университет
e-mail: s_a_mukhanov@mail.ru

Using the Lobachevsky integral to solve some problems of integral calculus

I. H. Enikeev (Russia, Moscow)
Moscow Polytechnic University
e-mail: enickeev.iX@yandex.ru
S. A. Mukhanov (Russia, Moscow)
Moscow Polytechnic University
e-mail: s_a_mukhanov@mail.ru

1. Введение

С давних времен человечество пыталось подтвердить или опровергнуть незыблемость постулатов Евклидовой геометрии. Основной причиной споров являлся 5 постулат Евклида о параллельных прямых, который нельзя было доказать ни одним из действующих на тот момент способов. Со временем учёные перестали предпринимать попытки обосновать его, однако нашёлся учёный, который смог предложить альтернативный вариант геометрии, в которой не выполнялась аксиома Евклида о параллельных прямых. Этим человеком был Николай Иванович Лобачевский. При жизни его труд подвергся массовой критики со стороны многих математиков того времени, однако нашлись и те, кто признал его. Среди последних был и „король математиков“ - Карл Фридрих Гаусс. После смерти Лобачевского в 1856 году, была обнародована их переписка, это взбудоражило всё научное сообщество того времени и заставило людей задуматься о том, как много мы ещё не знаем о нашем мире.

2. Основная часть

Определение геометрии Лобачесвкого на плоскости: геометрия Лобачевского есть геометрия внутри круга на обычной (евклидовой) плоскости, лишь выраженная особым способом. Именно, внутренность круга, т. е. круг за исключением ограничивающей его окружности, называют „плоскостью Лобачевского“ (рис.1). Точкой „плоскости“ является точка внутри круга. „Прямой“ называют любую хорду (напр., a,b,b’,MN,AB) с исключёнными концами (т. к. окружность исключена из „плоскости“); „движением“ – любое преобразование круга самого в себя, которое переводит хорды в хорды. Равными называются фигуры внутри круга, которые можно перевести одну в другую такими преобразованиями. Получается, что любой геометрический факт, описанный указанным выше способом, представляет теорему или аксиому геометрии Лобачевского. Т.е., всякое утверждение геометрии Лобачевского на плоскости есть утверждение евклидовой геометрии, относящееся к фигурам внутри круга, перефразированное в указанных терминах. Конечно, Евклидова аксиома о параллельных прямых здесь не выполняется, т. к. через точку O, не лежащую на данной хорде a (т. е. „прямой“), проходит сколь угодно много не пересекающих её хорд („прямых“, напр. b и b’). В пространстве имеем аналогичную ситуацию - геометрия Лобачевского может быть определена как геометрия внутри шара, выраженная в соответствующих терминах („прямые“ – хорды, „плоскости“ – плоские сечения внутренности шара, „равные“ фигуры – те, которые переводятся одна в другую преобразованиями, переводящими шар сам в себя и хорды в хорды). Таким образом, геометрия Лобачевского имеет совершенно реальный смысл и столь же непротиворечива, как геометрия Евклида [1].

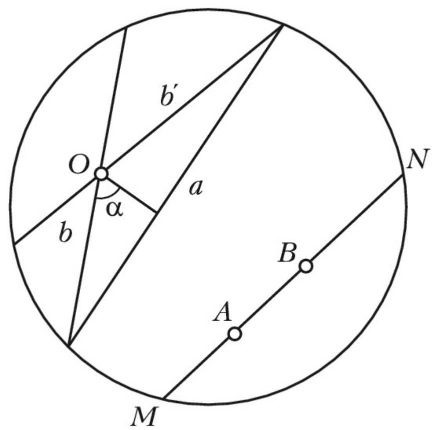


Рис. 1: Плоскость Лобачевского

Геометрия Лобачевского изучает свойства плоскости Лобачевского в планиметрии и пространства Лобачевского в стереометрии. Плоскость Лобачевского – это плоскость (множество точек), в которой определены прямые линии (а также движения фигур, расстояния, углы и пр.), подчиняющиеся всем аксиомам евклидовой геометрии, за исключением аксиомы о параллельных, которая заменяется сформулированной выше аксиомой Лобачевского. Сходным образом определяется пространство Лобачевского. Задача выяснения реального смысла геометрии Лобачевского состояла в нахождении моделей плоскости и пространства Лобачевского, т.е. в нахождении таких объектов, в которых реализовывались бы соответствующим образом истолкованные положения планиметрии и стереометрии данной геометрии. Можно отметить, что геометрия на куске плоскости Лобачевского совпадает с геометрией на поверхностях постоянной отрицательной кривизны, простейший примером которых являются однополостный и двуполостный (псевдосфера) гиперболоиды (рис.2). Если точкам и прямым на конечном куске плоскости Лобачевского сопоставить точки и кратчайшие линии (геодезические) на гиперболоидах и движению плоскости Лобачевского сопоставить перемещение фигуры по псевдосфере с изгибанием, т. е. деформацией, сохраняющей длины, то всякой теореме Л. г. будет отвечать факт, имеющий место на псевдосфере. Таким образом, геометрия Лобачевского получает простой реальный смысл.

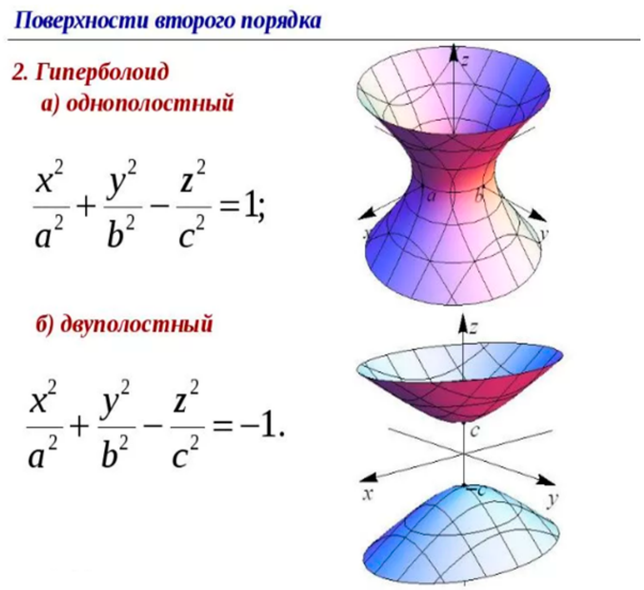


Рис. 2: Поверхности 2 порядка

Лобачевский применил свою геометрию к вычислению определённых интегралов [2], в частности к интегралу вида:

$$\varphi(x) = -\int\limits_0^x \ln\cos y dy$$

Этот интеграл называется интегралом Лобачевского и обладает многими важными свойствами, такими как:

1. $\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.5\pi\ln 2$,
2. $\varphi(-x) = -\varphi(x)$,
3. $\varphi(x+mx) = \varphi(x) + m\pi\ln 2, m \in \mathbb{Z}$,
4. $\varphi(x) - \varphi\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 0.5\left(\left(2x - \frac{\pi}{2}\right)\ln 2 + \varphi\left(2x - \frac{\pi}{2}\right)\right)$,
5. $\int\limits_a^b \ln\sin x dx = \varphi\left(\frac{\pi}{2} - b\right) - \varphi\left(\frac{\pi}{2} - a\right), a, b \in [2m\pi, (2m+1)\pi]$.

Помимо этих свойств есть еще одно свойство интеграла Лобачевского, которое можно сформулировать в виде теоремы.

Теорема 1. *Пусть дан интеграл Лобачевского:*

$$\varphi(x) = -\int\limits_0^x \ln\cos y dy. \tag{1}$$

Доказать, что $\varphi(x) = 2\varphi\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right) - 2\varphi\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) - x\ln 2$.

Доказательство.
Из (1) следует, что $\varphi'(x) = -\ln\cos x$. Тогда ,

$$\varphi'\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)=-\ln\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right),-\varphi'\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)=\ln\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right) \tag{2}$$

Так как:

$$\ln\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)+\ln\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)=\ln\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)\right)=\ln\left(\frac{1}{2}\cos x\right)=-\ln 2+\ln\cos x \tag{3}$$

То из (2) и (3) следует: Так как:

$$-\varphi'\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)-\varphi'\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)=-\ln 2-\varphi'(x) \tag{4}$$

Интегрируя уравнение (4), получим:

$$\varphi(x)=2\varphi\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)-2\varphi\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)-x\ln 2+C \tag{5}$$

Учитывая, что $\varphi(0)=0$ из (5) находим, что $C=0$. Тогда $\varphi(x)=2\varphi\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)-2\varphi\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)-x\ln 2$, что и требовалось доказать.

□

Из этой теоремы, в частности следует, что

$$\varphi(0.5\pi)=-\int\limits_0^{\pi/2}\ln\cos y\,dy=0.5\pi\ln 2 \tag{6}$$

Формула (6) имеет наглядную геометрическую интерпретацию. Пусть дана функция $y=\ln\cos x$, $x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$. Найти площадь фигуры, ограниченной данной функцией и $D(f(x))$ на $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ и вертикальной асимптотой $y=\frac{\pi}{2}$ (рис.3).

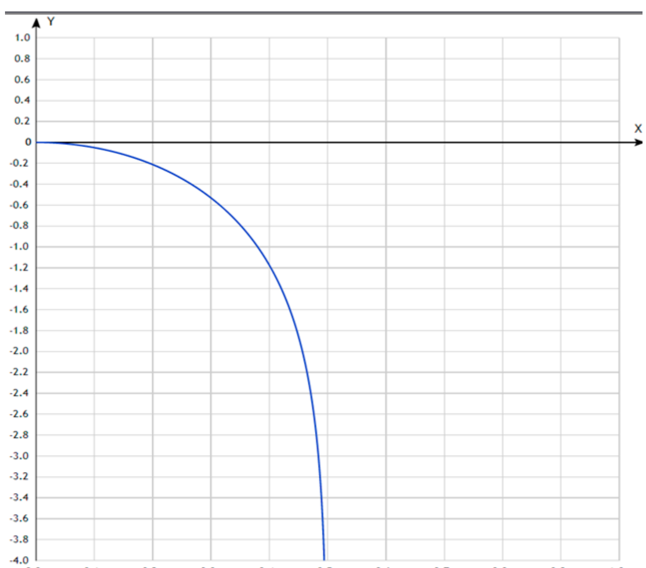


Рис. 3: График функции $y=\ln\cos x$, $x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$

Из рисунка следует, что площадь данной фигуры ограничена функцией, имеющей разрыв второго рода в точке $x=\frac{\pi}{2}$. Согласно (6) эта площадь будет равна $0.5\pi\ln 2$.

3. Заключение

Николай Иванович Лобачевский своими исследованиями совершил революцию в математике. Его также называли Коперником геометрии, потому как благодаря его трудам, человечество осознало, что существует ещё много всего, что нам предстоит изучить. С помощью интеграла Лобачевского мы можем находить площади различных криволинейных фигур, которые заданы функциями имеющими разрывы 2 рода (по сути фигур с бесконечными сторонами, у которых площадь это конечная величина). Таким образом, Л. г. получает простой реальный смысл.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лаптев Б.Л. Объем пирамиды в пространстве Лобачевского – Ученые записки Казанского государственного университета им. В.И. Ульянова-Ленина, т.114, кн.2, Математика,1954.

2. Андриевская М.Г. Аналитическая геометрия в пространстве Лобачевского – К., 1963.

———————————————————————————————

УДК 51(091)

Движение под действием ускоряющей силы в работах Х. Гюйгенс

Е. А. Зайцев (Россия, г. Москва)
e-mail: e_zaitsev@mail.ru

Movement under accelerating force in Ch. Huygens

E. A. Zaytsev (Russia, Moscow)
e-mail: e_zaitsev@mail.ru

1. Античные греки считали силу причиной, вызывающей движение тела или же обеспечивающей его пребывание в состоянии покоя. Подобной точки зрения придерживались также средневековые натурфилософы. Это представление нашло свое математическое выражение в законе «аристотелевской динамики», согласно которому скорость движения тела прямо пропорциональна величине действующей на него силы.

В классической механике сила понимается иначе. Сила считается причиной не движения, как такового (движение может происходить по инерции), но его изменения – ускорения или замедления. Свое формальное выражение это представление находит во втором законе Ньютона, согласно которому ускорение тела пропорционально приложенной силе.

Различие в трактовке действия, производимого силой, связано с различным происхождением представления о силе. В античной динамике сила соответствует работе, производимой физическим усилием одушевленного «агента» – человека или животного. Этим объясняется «формула Аристотеля», согласно которой скорость тела пропорциональна приложенной к нему силе: во многих случаях (хотя и не всегда) два человека, используя мускульное усилие, вдвое быстрее выполняют работу по перемещению тяжелого груза, чем один (можно представить, что груз разделен на две части, и каждый работник перемещает одну из них). По аналогии с физическим усилием античность трактовала также действие механических сил, включая силу тяжести. Согласно Аристотелю, скорость падения тела под действием тяжести прямо пропорциональна силе тяжести или весу. Напрямую получить такого рода зависимость не представляется возможным, поскольку количественные параметры, характеризующие падение тяжелого тела, недоступны непосредственному наблюдению (в отличие от работы человека по его перемещению).

В классической механике представление о силе утрачивает генетическую связь с мышечным усилием. Понятие силы становится производным от особой механической силы – силы тяжести. Движение под действием какой-либо силы – независимо от ее природы – копирует свойства, присущие движению под действием тяжести. В частности, оно происходит с постоянным ускорением. Последнее положение составляет содержание второго закона Ньютона.

2. Логика, согласно которой физическое усилие может быть эквивалентным образом трансформировано в действие силы тяжести, описана в курсе физики под редакцией Г.С. Ландсберга [1, с. 84-88]. На первом шаге мышечному усилию сопоставляется упругая сила, наиболее близкая по своей природе. Для количественной оценки упругой силы может быть использован – хорошо знакомый со школьных времен – пружинный динамометр, который представляет эту силу в виде линейной величины, характеризующей степень растяжения пружины. Такой способ измерения имеет, однако, очевидный недостаток: растяжение пружины зависит от множества факторов – температуры, степени деформации (линейная зависимость между силой и деформацией сохраняется только при малом растяжении), степени износа пружины и т.д. Этот недостаток можно устранить, сделав следующий шаг, а именно, уравновесив силу растянутой пружины подвешенным к ней грузом. Упругая сила и опосредованно мышечное усилие оказываются, тем самым, редуцированы к силе тяжести: «трудную задачу изготовления и сохранения эталонной пружины при определенном растяжении мы заменяем более простой – изготовлением и сохранением эталонной гири» [1, с. 85].

Несмотря на логическую убедительность этой схемы и ее педагогические достоинства (опосредование мышечного усилия силой механической пружины), исторически смена силовой парадигмы не была связана со статикой. Заметим, что в области статики отождествление мышечного усилия с силой тяжести фактически произошло еще в античности. Так, при использовании простых машин для подъема и перемещения тяжелых грузов – блока, ворота, полиспаста, наклонной плоскости и винта – устанавливалось равновесие между действием тяжести перемещаемого груза и физической силой работника, выступавшего в качестве «машины-двигателя». Подобная практика, широко распространенная в античности и средние века и описанная в трактатах по практической механике, не привела, однако, к принятию силы тяжести в качестве нового образца для понятия силы.

На деле, представление о том, что движение под действием сил обладает свойствами движения под действием силы тяжести, обязано своим формированием задачам динамики, среди которых центральную роль играла задача о силах, определяющих вращательное движение тел вокруг неподвижной точки. Основная заслуга в ее решении принадлежит Х. Гюйгенсу.

Введя понятие центробежной силы, возникающей при вращении груза на веревке (удерживаемого усилием руки), Гюйгенс показал, что по своему возможному действию эта сила эквивалентна силе тяжести. Он установил, что в случае обрыва веревки центробежная сила вызовет движение груза с постоянным ускорением. Результат действия этой силы на груз будет таким же, как результат действия силы тяжести, которая в случае обрыва веревки приведет к его равноускоренному падению. Этот результат был опубликован Гюйгенсом без доказательства в трактате «Маятниковые часы» (1673). Доказательство было приведено лишь в посмертно изданной рукописи «О центробежной силе» (1703), которую сам Гюйгенс не планировал для публикации [2, с. 247-280].

3. Понятия, которые в рамках уже сформировавшихся научных дисциплин обладают статусом всеобщих, таковыми не рождаются. Всеобщий характер они приобретают в ходе сложного и противоречивого процесса, протекающего по следующей схеме. Вначале эти понятия появляются как инструмент для теоретического описания некоторой конкретной (особенной)

области явлений. Затем спектр описываемых ими явлений расширяется, включая в себя феномены из смежных областей. На заключительном этапе это понятие воспринимается уже не как особенное, но как всеобщее, а область, в которой оно родилось, становится всего лишь одной из множества сфер его приложения.

Конкретизируем эту схему на примере понятия силы в классической механике.

4. Становление понятия силы происходило в ходе научной революции XVII в. и включало в себя несколько этапов. На первом этапе Галилей, занимавшийся изучением движения под действием силы тяжести, установил, что оно происходит с постоянным ускорением («Беседы и математические доказательства», 1638). В отсутствии алгебраической символики он охарактеризовал это движение в терминах теории пропорций при помощи двух числовых последовательностей. При свободном падении тела, равно как и его «падении» по наклонной плоскости, расстояния, проходимые телом за равные промежутки времени, относятся друг к другу как члены последовательности нечетных чисел 1, 3, 5, 7, 9, и т.д. Из этой пропорции следовал вывод, что расстояния, пройденные телом от начала движения, относятся друг к другу как члены последовательности квадратов натуральных чисел 1, 4, 9, 16, 25 и т.д. Используя эти соотношения, Галилей описал ряд конкретных случаев движения под действием силы тяжести, а также движений, в которых эта сила играла роль силы сопротивления. Наиболее важным из полученных им результатов стала теорема о параболичности траектории полета снаряда. Теория движения, созданная Галилеем, теория, с которой начинается развитие классической механики, еще не претендовала на всеобщность: сфера ее применения ограничивалась исключительно движениями, обусловленными действием силы тяжести.

Особенность закона падения, сформулированного Галилеем, состояла в том, что он носил чисто априорный характер. Ни самому Галилею, ни его ученикам – Б. Кавальери и Э. Торричелли – не удалось дать его доказательства. Это обстоятельство стало причиной неприятия теории Галилея со стороны таких ученых, как Декарт и Роберваль. Помимо теоретических трудностей, квадратичный закон столкнулся с проблемой своего экспериментального подтверждения. Знаменитые опыты Галилея со скатыванием шаров по наклонной плоскости были «фальсифицированы» М. Мерсенном, обнаружившим в них существенную ошибку (в 25

5. Основная заслуга в «реабилитация» теории Галилея и ее приспособления для дальнейшего развития теоретической механики принадлежит Гюйгенсу. Свое исследование проблем движения под действием силы Гюйгенс начал с выяснения закона свободного падения, правильную форму которого он, будучи еще совсем молодым человеком, установил самостоятельно, независимо от Галилея. Свои исследования по этой теме Гюйгенс возобновил в 1659 г. в связи с началом работы над маятниковыми часами. Рукописи, датируемые этим периодом, свидетельствуют об оригинальности подхода Гюйгенса, который при выводе закона падения использовал динамические представления [3, p. 125-141].

Основой его рассуждений служил закон инерции, дополненный принципом относительности движения. Гюйгенс исходил из того, что при падении скорость тела складывается из двух компонент – постоянной скорости, приобретенной телом к данному моменту времени, и дополнительной скорости, вызванной действием тяжести в этот момент. По Гюйгенсу, если бы движущееся тело оказалось в таком месте, «где не ощущается действия тяжести», то оно продолжало бы падение с постоянной скоростью. Но поскольку такого места нет, его падение происходит с ускорением. Ссылка на принцип инерции служит здесь для качественного объяснения механизма ускорения; количественной оценки ускорения она не дает (из приведенных Гюйгенсом рассуждений даже не следует, что ускорение будет постоянным). Как и Галилей, Гюйгенс, сформулировав квадратичный закон падения, не смог дать его доказательства.

Отметим оригинальную попытку Гюйгенса в этих работах отождествить движение тела под действием тяжести с движением под действием упругой пружины. Такое отождествление он использовал для доказательства положения, что абсолютно твердое тело после падения на упругую горизонтальную поверхность поднимется вверх на ту же высоту, с которой оно начало падение. Сначала, опираясь на принцип инерции, Гюйгенс установил, что тело, поднимающееся вверх после отскока должно за время, равное времени падения, пройти по инерции – в отсутствии тяжести – путь, в два раза больший, чем путь, пройденный им при падении вниз. Затем он скорректировал этот результат, уменьшив его в два раза с учетом замедления, вызываемого сопротивлением тяжести. Оригинальным моментом в этом рассуждении является использование для анализа движения в вертикальном направлении движения шара по горизонтальной плоскости под действием тяжести другого шара, связанного с первым шаром веревкой, перекинутой через блок. При этом Гюйгенс использовал идею, что движение под действием тяжести может быть заменено движением, вызываемым действием упругой пружины (elater). Отметим, что аналогию между движениями, вызванными гравитационной и упругой силой, использовал также Р. Гук.

6. Наиболее значимыми для классической механики стали результаты, полученные Гюйгенсом в отношении движения под действием центробежной силы. Гюйгенс доказал, что оно следует закону, которому подчиняется падение тела под действием тяжести. Представим, что находящийся на конце веревки груз (тяжелый шарик) вращается в горизонтальной плоскости. При этом на него действует центробежная сила, которая натягивает веревку. Действие этой силы ощущает рука, когда приводит шарик в движение. Представим, что наблюдатель находится на колесе, которое вращается с той же угловой скоростью, что и шарик на веревке. В случае обрыва веревки, груз под действием центробежной силы начнет удаляться от наблюдателя в радиальном направлении. В начальный момент времени его движение будет осуществляться по касательной к окружности, проходящей через точку, в которой груз находился в момент обрыва веревки. В соответствии с законом инерции, его движение будет равномерным. Посредством элементарного геометрического рассуждения Гюйгенс показал, что расстояние между грузом и наблюдателем будет увеличиваться по закону квадратных чисел 1, 4, 9, 16, 25 . . . . На языке скоростей это означает, что, оторвавшись от веревки, тело (в первый момент времени) будет удаляться от наблюдателя с постоянным ускорением. Отметим, что в отличие от механиков итальянской школы, считавших, что инерциальное движение осуществляется на конечном отрезке, Гюйгенс использовал локальный вариант принципа инерции, в соответствии с которым равномерным и прямолинейным является лишь движение, осуществляющееся в начальный, бесконечно малый промежуток времени. Оперируя бесконечно малыми отрезками, он отбрасывал бесконечно малые величины второго порядка. Впоследствии такого рода инфинитезимальная техника широко использовалась И. Ньютоном.

Приведем перечень наиболее важных результатов, полученных Гюйгенсом при решении задачи о движении под действием центробежной силы. Первые два результата устанавливают аналогию между центробежной силой и весом. Первый результат: «центробежные силы разных тел, движущихся по одинаковым кругам с одинаковой скоростью, относятся друг к другу, как веса тел или как количества материи» [2, с. 256]. Второй результат: стремление к движению (conatus) тел, вращающихся на веревке вокруг неподвижной точки, «совершенно подобно тому, которое происходит от тяготения» [там же]. Эти два результата знаменуют первый случай распространения квадратичного закона падения на движение под действием силы, отличной от силы тяжести. Подчеркнем, что в отличие от закона падения, не получившего теоретического обоснования, закон движения под действием центробежной силы был строго доказан Гюйгенсом при помощи элементарного геометрического построения, опирающегося на теорему Пифагора. При этом из механических принципов Гюйгенс использовал только закон (прямолинейной) инерции.

Еще один важный результат, полученный Гюйгенсом, состоял в открытии особого свойства центробежной силы, которое отличает ее от силы тяжести: «в то время как стремление падать у одного и того же шара всегда одно и то же. . . , центробежное стремление — разное, в зависимости от скорости вращения» [там же]. Вариативность центробежной силы, зависимость ее величины от скорости вращения груза означает, что, несмотря на формальное совпадение, закон движения под действием центробежной силы богаче по своему содержанию закона падения под действием тяжести. В конечном итоге именно этот результат позволил Ньютону преодолеть недостатки теории Галилея и создать теорию движения небесных тел в поле центральных сил. Постулировав в рамках третьего закона равенство центробежной и центростремительной силы (в роли последней выступала у Ньютона сила всемирного тяготения – обобщенный аналог силы тяжести), он сделал завершающий шаг на пути становления общего понятия силы классической механики.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ландсберг Г.С. Элементарный учебник физики. Т. 1. Механика, теплота, молекулярная физика. М., 2010.
2. Гюйгенс Х. Тр и мемуара по механике. М., 1951.
3. Christiaan Huygens. Oeuvres complètes (in 22 vols.). Vol. 17. Den Haag, 1932.

УДК 511.32

Доказательство о неразрешимости уравнений в радикалах Абелем

Н. В. Ингтем (Россия, г. Москва)
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
e-mail: nathalia_koulik@mail.ru

Abel's proof of the theorem on the impossibility of solving polynomial equations in radicals

N. V. Ingtem (Russia, Moscow)
Lomonosov Moscow State University
e-mail: nathalia_koulik@mail.ru

В 1826 г. в журнале «Чистой и прикладной математики» было опубликовано доказательство Абеля теоремы «О неразрешимости общего уравнения 5-й степени в радикалах» и в этом же году в журнале Феррюсака была опубликована слегка модифицированная статья с заключением редактора журнала Сэгея. В письме Холмбое, Абель сообщает, что это заключение составлено, им самим.

Современники Абеля никак не отреагировали на это доказательство. Великие математики Гаусс и Коши, так же занимавшиеся этим вопросом, проигнорировали его. Однако впоследствии, мнения о доказательстве Абеля разделились. Одни – Гамильтон, Кёнигсбергер, Пьерпонт, высказали ряд серьёзных замечаний, французские математики не дали никакой оценки доказательству Абеля; другие – Остроградский, Силов и Ли, считали его хорошим.

Первое критическое замечание было дано Гамильтоном в статье, вышедшей в 1839, где он отмечает сложность построения поля, описанное Абелем.

Замечание относится к классификации алгебраических функций по степеням и порядкам. Позже такое же мнение было высказано и Кёнигсбергером. Силов и Ли, отмечая эти замечания, считают доказательство Абеля вполне строгим. Пьерпонт объединил доказательства Руффини и Абеля и, назвал теорему о неразрешимости общих уравнений в радикалах теоремой Руффини-Абеля. Французское математическое сообщество, кроме заключения Сэгея к статье Абеля в журнале Феррюсака, проигнорировало это доказательство, считая доказательство Руффини достаточно хорошим.

Остроградский в своих лекциях использует доказательство Абеля. По этим лекциям читал свой курс и Чебышёв.

Исследование доказательства Абеля показали, что, опираясь на труды Эйлера и Лагранжа, он, по сути, построил последовательные расширения поля коэффициентов, описав его как множество полиномиальных функций, наделённое операциями: сложения, умножения, деления, извлечение корней с простыми показателями. Вычитание, возведение в степени с целыми показателями, а также извлечение корней с показателями, являющимися составными числами, он считает входящими в отмеченные выше операции, подчеркивая при этом, что никакая из рациональных операций не будет изменять вид, определённый для элементов данного поля. Расширения заданного поля строятся по принципу присоединения радикалов простого порядка из элемента заданного поля, причём Абель вводит понятие порядка расширения и степень данного расширения. Эти радикальные выражения, Абель называет алгебраическими функциями. Однако, в построении алгебраической функции, как заметили Гамильтон и Кёнигсбергер, такая классификация усложняет понимание вопроса, т.к. понятие степени вносит нарушение однозначности в понимание присоединяемых элементов. Несмотря на этот недостаток эта часть доказательства является очень важной, вносит новизну в понимание множества и открывает представление о структуре множеств, что даёт право считать Абеля одним из разработчиков множественных структур. В этой части сформулирована следующая теорема:

1-я теорема. Всякая алгебраическая функция может быть представлена в виде:

$$v = q_0 + p^{1/n} + q_2 p^{2/n} + \ldots + q_{n-1} p^{(n-1)/n}.$$

где n – простое число, q_i, $i = 0, \ldots, n-1$, $q_1 = 1$ – алгебраические функции порядка μ, и степени $m-1$, p – алгебраическая функция порядка $\mu - 1$ и такова, что $p^{1/n}$ не может рационально выражаться через q_i.

В доказательстве теоремы о неразрешимости уравнений высших степеней сформулированы следующие теоремы:

2-я теорема. *Если уравнение алгебраически разрешимо, то его корню всегда можно придать такой вид, что все алгебраические функции, входящие в неё, могут быть представлены рациональными функциями корней.*

Строгое доказательство этого предложения представлено Лагранжем. Доказательство Абеля нельзя считать строгим по следующим причинам: - показатель степени заданного уравнения не описан; - не сказано является это уравнение приводимым или нет; - в полученных выражениях для коэффициентов через корни уравнения, не указано сколько значений будет принимать эта функция корней. Особый интерес представляет условие линейной независимости элементов поля. Подставляя предполагаемое выражения корня, записанное в базисе расширения поля коэффициентов, в заданное уравнение, Абель получает представление нулевого элемента и доказывает, что это будет иметь место только в случае, когда все коэффициенты выражения будут равны нулю.

Доказательство этой теоремы послужило поводом для того, чтобы теореме о неразрешимости уравнения пятой степени, заданного в общем виде, присвоить имя Абеля, а не Руффини, сформулировавшего и доказавшего её прежде Абеля.

3-я теорема – это теорема Коши о количестве значений, которые может принимать функция от перестановки, содержащихся в ней переменных.

4-я теорема:

Если функция, зависящая от нескольких переменных, принимает m различных значений, то существует уравнение степени m, коэффициентами которого являются симметрические функции этих значений, а сами значения – корнями этого уравнения. Уравнения такого же вида степень которого меньше m , содержащего корнем одно или несколько значений этой функции не существует.

Необходимо заметить, что предложение о том, что функция, принимающая m значений, удовлетворяет уравнению степени m (названного Лагранжем упрощающим), было доказано Лагранжем.

5-я теорема (опираясь на представленные доказательства передыдущих теорем, Абель заключает):

Решить уравнение 5*-й степени в общем виде невозможно.*

Необходимо заметить, что указанные выше неточности в рассуждениях могли повлиять на заключения Абеля. Чрезмерная общность, отсутствие описаний обозначений не позволяют считать доказательство вполне строгим и чёткым.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Oeuvres complètes de Niels Henrik Abel. Nouvelle édition publiée aux frais de l'état norvegien par MM. L. Sylow et S. Lie.T1. — Christiania, imprimerie de Grondahl & Son 1881.

2. Abregé d'histoire des mathémetiques, 1700-1900. Sous la direction de Jean Dieudonne Herman, 1978.

3. Постников М. М. Теория Галуа. Москва Факториал Пресс, 2003.

———————————————————————————

УДК 091

Из истории одной неопубликованной статьи М. И. Кадеца[1]

Е. В. Манохин (Россия, г. Тула)
Финансовый университет при Правительстве РФ (Тульский филиал)
e-mail: emanfinun@mail.ru
Р. А. Жуков (Россия, г. Тула)
Финансовый университет при Правительстве РФ (Тульский филиал)
e-mail: pluszh@mail.ru
И. В. Бормотов (Россия, г. Тула)
Финансовый университет при Правительстве РФ (Тульский филиал)
И. В. Добрынина (Россия, г. Москва)
Московский технический университет связи и информатики
e-mail: ivdobrynina@rambler.ru
Е. А. Назырова (Россия, г. Тула)
Финансовый университет при Правительстве РФ (Тульский филиал)

[1]Работа подготовлена по результатам исследования, выполненного за счет бюджетных средств по государственному заданию Финуниверситета.

From history of one unpublished paper of M. I. Kadets

E. V. Manokhin (Russia, Tula)
Financial University under the Government of the Russian Federation (Tula Branch)
e-mail: emanfinun@mail.ru
R. A. Zhukov (Russia, Tula)
Financial University under the Government of the Russian Federation (Tula Branch)
e-mail: pluszh@mail.ru
I. V. Bormotov (Russia, Tula)
Financial University under the Government of the Russian Federation (Tula Branch)
I. V. Dobrynina (Russia, Moscow)
Moscow Technical University of Communications and Informatics
e-mail: ivdobrynina@rambler.ru
E. A. Nazirova (Russia, Tula)
Financial University under the Government of the Russian Federation (Tula Branch)

1. Введение

В 1986 году после окончания математического факультета Тульского пединститута, автор поступил в аспирантуру Михаила Иосифовича Кадеца. О математической школе Кадеца в городе Харькове он узнал за год до этого от своего учителя Рыбакова Владислава Ивановича. В это время Харьковская школа Михаила Иосифовича Кадеца уже получила мировую известность. В частности, о ней как об особом явлении в области теории банаховых пространств упоминает А. Пич в своей книге “History of Banach spaces and linear operators” (Birkhauser, 2007). Харьковской школе и годам сотрудничества с ней автор посвятил работу[1].

Заметим, что Владиславом Ивановичем Рыбаковым [2] получены глубокие, содержательные научные результаты. Например, о «the classical theorem of Rybakov» можно прочитать в книгах и статьях, опубликованных в международной математической печати. Работа 1970 года содержит эту самую "the classical theorem of Rybakov"(название взято нами, из англоязычных работ 1997-1998 годов. Теперь поговорим о М.И. Кадеце.

«Михаил Иосифович (30 ноября 1923 г. — 7 марта 2011 г.) был блестящим и одновременно необычайно глубоким математиком, добрым и отзывчивым человеком, остроумным и приятным собеседником. Таким он и останется в нашей памяти». Среди полученных им выдающихся результатов, отметим, что Михаил Иосифович решил в положительном смысле давно стоявшую проблему Фреше–Банаха о гомеоморфизме всех сепарабельных бесконечномерных банаховых пространств. Этот замечательный результат сразу стал классическим.

Одним из средств, предложенных Михаилом Иосифовичем при решении этой проблемы, является построение эквивалентных норм, удовлетворяющих специальным условиям выпуклости. При этом оказалось, что техника эквивалентных норм эффективна в гораздо более широком круге проблем геометрии банаховых пространств и нелинейного анализа. Михаил Иосифович по праву считается одним из создателей теории эквивалентных перенормировок банаховых пространств, превратившейся в настоящее время в самостоятельную область.

2. Из истории неопубликованной статьи М. И. Кадеца, Е. В. Манохина

Теория эквивалентных норм для банаховых пространств C(K) непрерывных функций на метрических компактах есть следствие теоремы Милютина и теории сепарабельных пространств Банаха (пространство C(K) сепарабельно в том и только том случае, если K — метрический компакт, сопряженное пространство к C(K) сепарабельно в том и только том случае, если K — счетный метрический компакт. Был установлен факт существования эквивалентных строго выпуклых и локально равномерно выпуклых норм на всех пространствах непрерывных функций, определенных на метрических компактах. Для случая неметризуемых компактов теория до сих далека от завершения.

Среди всех компактов естественно выделяется класс компактов с первой аксиомой счетности. Он включает класс метрических компактов, но не совпадает с ним. Примеры неметризуемых компактов с первой аксиомой счетности: две стрелки, лексикографический квадрат, компакт Хелли и другие хорошо известны и приводятся в учебниках топологии.

М. И. Кадеца и Е. В. Манохин готовили статью, в которой рассматривали банахово пространство C(H) всех непрерывных функций f(x) на компакте Хелли с обычной нормой $||\mathrm{f}||_{\infty}$=$\max\{|f\left(x\right)|: x \in H\}$. Неизвестно, допускает ли C(H) эквивалентную локального равномерно норму. Более того, неизвестного обладает ли C(H) эквивалентной нормой с H-свойством (мы вынуждены употреблять букву H в двух разных смыслах!). В это время начали выходит из печати работы Хейдона, которые подчеркнули значение H-свойства: из того, что банахово пространство X обладает H-свойством не следует, что оно имеет эквивалентную локального равномерно норму. В статье М. И. Кадеца и Е.В. Манохина была доказана теорема о том, что на банаховом пространстве C(H) существует эквивалентная норма с H-свойством. Е.В. Манохин начал готовить статью к печати, сначала в виде рукописи, но внезапно получил письмо от Кадеца: Михаил Иосифович засомневался, что теорема в конце статьи вытекает из предшествующих рассуждений,он решил, что на самом деле требуется более сильная версия леммы 2. Манохину Е.В. показалась непонятным в чем проблема, но он подумал, что к статье можно вернуться позднее. Рукопись была положена в ящик стола. Публикация статьи был отложена и к ее рассмотрению авторы так и не вернулись. Представляем математической общественности эту неопубликованную работу, как часть истории математики.

Отметим, что статья не была опубликованы из-за высокой требовательности, которую предъявлял к себе выдающийся советский математик М. И. Кадец, требовательности, которая может служить примером для современной молодежи, особенно для научной молодежи. Ценностный мир молодежи должен отражать все многообразие современного российского общества и обладать своеобразием, уникальностью, неповторимостью, иметь отличительные особенности и черты.

Построение такого мира ценностей сегодня - одна из болевых точек не только российской молодежи, но и общества в целом, поскольку вакуум, образовавшийся в результате смены, трансформации социальных ценностей в постсоветский период должен быть преодолен.

3. Кратко содержание статьи М. И. Кадеца, Е. В. Манохина «Компакт Хелли H и банахово пространство $C(H)$»

Компактом Хелли H называются множеством всех неубывающих, отображений x = x(t) отрезка [0; 1] = I в себя, наделенное топологией поточечной сходимости.

В этой топологии компакт Хелли – неметризуемое сепарабельное топологическое пространство с первой аксиомой счетности. Кроме того H – выпуклое множество (выпуклое подмножество линейного пространства всех функция определённых на I).

Фундаментальной системой окружностей элемента x∈H являются «параллелепипеды»

$O(x, S, \epsilon) = \{y \in H : |x\left(t\right) - y\left(t\right)| < \epsilon, t \in S\}$, где S– конечное подмножество отрезка I.

Каждый элемент компакта Хелли – функция на I, непрерывнаяво всех точках кроме, быть может, счётного множества. Подмножество H, образованное всеми непрерывными элементами, обозначим Hc.

Предложение 1. *Hc-всюду плотное G_δ – подмножество в H.*

Предложение 2. *Если $x_0 \in H_c$, то для любого $\epsilon>$ 0 найдутся T и δ>0 такие, что* O (x_0, I,ϵ) $\supset$O (x_0, T, δ)

Следствие. Если последовательность$(x_n)_1^\infty$ $\subset$Hсходится поточечно к элементу x$\in$H$_c$, то она сходится и равномерно.

Топологическое пространство X называется топологически однородным, если для любых его элементов хи у найдется гомеоморфизм X на себя, переводящий хв у.Окружность однородна, отрезок не однороден (мешают концы). Известно, что каждый бесконечномерный выпуклый метрический компакт однороден.Неизвестно однороден ли компакт Хелли.

Перейдем к рассмотрению Банахова пространства C(H) всех непрерывных функцийf(x) на компакте Хелли с обычной нормой$||f||_\infty$=max$\{|f\,(x)| : x \in H\}$. В силу неметризуемости компакта Хелли, пространство C(H) несепарабельно. Поэтому для него актуален вопрос о существовании или не существовании “хороших” эквивалентных норм. Так как H- сепарабельный компакт , то C(H). допускает эквивалентную строго выпуклую норму. Неизвестно, допускает ли C(H) эквивалентную локального равномерно норму. Более того, неизвестного обладает ли C(H) эквивалентной нормой с H-свойством (мы вынуждены употреблять букву H в двух разных смыслах!) Напомним соответствующие определения.

Определение 1. *Банахово пространство X называется локально равномерно выпуклым, если для его элементов условия* $\|x_n\|$=$\|x\|$=1 и lim$\|x_n$+$x\|$ =2 влекут сильную сходимость: lim$\|x_n$−$x\|$=0

Определение 2.Банахово пространство Xобладает H-свойством; если из условий x_nслабо сходится к x и lim$\|x_n\|$=$\|x\|$ следует сильная сходимость.

Каждое локально равномерно выпуклое пространство обладает H-свойством; обратное необязательно. Более подробно по поводу эквивалентных норм в пространстве Банаха. Основная цель настоящей заметки – в предположении, что H-однородный компакт, доказать, что C(H) обладает H-свойством. Для дальнейшего нам потребуется понятия, обобщающие на функции из C(H) понятия модуля непрерывности функции из C(I).

Определение 3. Пусть T – конечное подмножество отрезка T (обозначение: T $\in$F) и $0 < \delta \leq 1$. T –модулем непрерывности функции $f \in (H)$ назовём функционал

ω(f, T, δ) =sup{ |f(x)-f(y)|: x$\in$H, y$\in$O(x,T,δ)}

Предложение 3. *При данном T модуль непрерывности $\omega(f, T, \delta)$ обладает следующими свойствами:*

1. $\omega(f, T, \delta)$ — неубывающая непрерывная функция от δ,

2. $\omega(f+g, T, \delta) \leqslant \omega(f, T, \delta)+\omega(g, T, \delta)$,

3. $\omega(f, T, \delta+h) \leqslant \omega(f, T, \delta)+\omega(f, T, h)$,

4. $\omega(\lambda f, T, \delta) = |\lambda|\omega(f, T, \delta)$.

Определение 4. *Модулем непрерывности функции $f \in C\,(H)$ назовем функционал* $\omega\,(f, \delta)$= *inf*$\{\omega\,(f, T, \delta)$:$T \in F$ }.

Предложение 4.*Модуль непрерывности $\omega\,(f, \delta)$ обладает следующими свойствами:*

0. $\lim_{\delta\to 0}\omega(f, \delta) = 0$ для всех $f \in C(H)$,

1. $\omega(f, \delta)$ неубывающая непрерывная функция от δ,

2. $\omega(f+g, \delta) \leqslant \omega(f, \delta)+\omega(g, \delta)$,

3. $\omega(f, \delta+h) \leqslant \omega(f, \delta)+\omega(f, h)$,

4. $\omega(\lambda f, \delta) = |\lambda|\omega(f, \delta)$.

Лемма 1. *Пусть γ: H$\to$H− гомеоморфизм комактаХелли на себя. Каждой функции* $f\,(x)$$\in$C(H) сопоставим функцию.

$$\Gamma f{=}g\,(u){=}f\,(\ u){=}f\,(x)\,.$$

Модули непрерывности этих функций связаны соотношением

$$\forall\epsilon\ \exists\delta\colon\ \omega\left(g,\delta\right)\leqslant\omega\left(f,\epsilon\right).$$

Лемма 2. *Допустим, что компакт Хелли топологически однороден. Пусть последовательность:* $(fn)_1^\infty\subset C\left(H\right)$ *сходится слабо (т.е. последовательность ограничена и сходится поточечно) к* $f\in C\left(H\right)$ *и пусть существует положительное число* ζ *и последовательность*$(x\mathrm{n})_1^\infty\subset\mathrm{H}$ *сходящаяся к* $\overline{x}\in\mathrm{H}$ *,такие что*

$$\left|f_n\left(x_n\right)-f\left(x_n\right)\right|\geqslant\ \zeta.$$

Тогда найдутся такие $\epsilon{>}0$ *и* $n_0\in N$*,что*

$\omega\left(f,\epsilon\right)=\frac{1}{6}\zeta$ и $\omega\left(f_n,\epsilon\right)\geqslant\frac{1}{2}\zeta$ для любых $n\geqslant n_0$

Теорема. *Если компакт Хелли топологически однороден, то на банаховом пространстве C(H) существует эквивалентная норма с H-свойством.*

4. Заключение

В этой небольшой заметке, касающейся времени 1988-1990 гг., выпускаемой к 35-летию неопубликованной работы выдающегося руководителя Харьковской математической школы Михаила Иосифовича Кадеца, мы видим пример сотрудничества в научном творчестве того периода. Он дает представление о том, как формировались научные направления того периода, периода последних лет СССР.

Статья подготовлена по результатам исследований выполненных за счет бюджетных средств по государственному заданию Финуниверситета № 15841п-П8 «Социологический портрет ценностного мира молодежи в субъектах Российской Федерации»

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Петров Н.Т. О длине простых групп. Докл. АН СССР, **208**:3 (1973), 537–540.

2. Е. В Манохин, Н. О. Козлова, В. Э. Комов. Харьковская школа М. И. Кадеца и математики Тулы // Чебышевский сборник, 2021, т. 22, вып. 4, с. 323–330.

3. Е. В. Манохин, А. Е. Устян, Г. В. Кузнецов. Ученый и педагог. К 80-летнему юбилею Владислава Ивановича Рыбакова (13.12.1939–27.09.2016) // Чебышевский сборник, 2019, т. 20,вып. 4 с. 450 – 457.

———————————————————————————

УДК 511.32

Теория алгоритмов в работах А. Н. Колмогорова

М. А. Подколзина (Россия, г. Москва)
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
e-mail: maress@mail.ru

Algorithms theory in the works of A. N. Kolmogorov

M. A. Podkolzina (Russia, Moscow)
Lomonosov Moscow State University
e-mail: maress@mail.ru

Теория алгоритмов – совсем молодой раздел математики, получивший свою формализацию лишь в 30-е годы XX века.

В 1928 году Давид Гильберт сформулировал проблему разрешения: найти алгоритм, который бы принимал в качестве входных данных описание любой проблемы разрешимости (формального языка и математического утверждения "S"на этом языке) – и, после конечного числа шагов, останавливался бы и выдавал один из двух ответов: "Истина!"или "Ложь! – в зависимости от того, истинно или ложно утверждение "S".

И хотя понятие алгоритма на тот момент уже достаточно активно использовалось в математике (это и алгоритм Евклида в "Началах и "алгоритм"у Лейбница в понимании систематического способа решения проблем дифференциального исчисления, и работа Эйлера "Использование нового алгоритма для решения проблемы Пелля"(De usu novi algorithmi in problemate Pelliano solvendo), в которой понимание алгоритма как синонима способа решения задачи уже очень близко к современному), но формального определения все еще не было.

Возникновение определения алгоритма обычно связывают с вышедшими практически одновременно в середине 30-х годов XX в. работами Алонзо Черча, Алана Тьюринга, Стивена Коула Клини и Эмиля Поста, в которых были даны описания машины Тьюринга и машины Поста, сформулированы основные понятия теории рекурсивных функций и лямбда-исчисления.

В 1935 американский математик Эмиль Леон Пост (1897-1954) опубликовал в "Журнале символической логики"статью "Финитные комбинаторные процессы, формулировка 1"[1]. В этой статье и появившейся одновременно в Трудах Лондонского математического общества статье английского математика Алана Тьюринга (1912-1954) "О вычислимых числах с приложением к проблеме решения"[2] были даны первые уточнения понятия "алгоритм". Важность идей Поста состоит в том, что был предложен простейший способ преобразования информации, построена алгоритмическая система и доказано, что она является алгоритмически полной.

В 1967 ученик А.Н. Колмогорова, В.А. Успенский пересказал эти статьи с новых позиций, ввел сам термин "машина Поста". Машина Поста - абстрактная машина, которая работает по алгоритмам, разработанным человеком, она решает следующую проблему: если для решения задачи можно построить машину Поста, то она алгоритмически разрешима.

Практически одновременно с появлением машин Поста и Тьюринга свои теории появляются у Алонзо Черча (1903-1995) и его ученика Стивена Клини (1909-1994).

Лямбда-исчисление [3] постулирует некоторую структуру формул, а также правила (точнее, ровно одно правило) преобразования этих формул. Кроме того, поскольку лямбда-исчисление не гарантирует, что выражение когда-либо окажется в нормальной форме, существуют многочисленные способы задать порядок преобразований. При этом иногда оказывается интересен не сам результат преобразований, а промежуточные шаги.

В это же время Стивен Клини в [4] строит свою теорию рекурсивных функций.

Первые работы по теории алгоритмов в Советском Союзе появляются в 1947 г. и принадлежат А. А. Маркову (1903-1979). В своих первых статьях А.А. Марков не дает основных определений, лишь в ссылке пишет, что в отношении терминологии и обозначений следует за работами Гильберта, Аккермана и Бернайса, написанным по основаниям математики. Вскоре после этого, в 1950 г. появляется и первая работа по теории алгоритмов, написанная в Москве, на механико-математическом факультете МГУ. Это - статья А.В. Кузнецова (1926-1984) "О примитивно рекурсивных функциях большого размаха"[5]. В ней построен первый пример бесконечного примитивно рекурсивного множества, прямой пересчет ко-торого не примитивно рекурсивен. А также содержится важное наблюдение, что элементарный шаг каждого алгоритма задается при соответствующей арифметизации примитивно рекурсивной функцией. Тогда же, в начале 50-х годов XX в. на механико-математическом факультете МГУ начинается систематическое развитие теории алгоритмов в работах А.Н. Колмогорова и его учеников с одной стороны и П.С. Новикова, с другой. В начале 1952 г. Колмогоров сформулировал свое знаменитое общее определение алгоритма в виде преобразования размеченных комплексов, которое затем было опубликовано в [6]. Это определение Колмогоров предложил своему ученику, тогда студенту V курса В.А. Успенскому, в качестве темы для написания дипломной работы.

Работа В.А. Успенского "Общее определение алгоритмической вычислимости и алгоритмической сводимости"(диплом защищен в 1952 г.). содержит критику ранее существовавших определений Черча, Клини и др., а также - весьма подробную проработку определения Колмогорова, запись некоторых алгоритмов в его терминологии. Также рассматривается связь алгоритма Колмогорова с рекурсивными функциями, доказывается его алгоритмическая сводимость.

Чуть позже указанное определение явилось предметом доклада Колмогорова на заседании Московского математического общества в марте 1953 г. и совместной статьи А.Н. Колмогорова и В.А. Успенского в 1958 г. [6]

Определение А.Н. Колмогорова звучало следующим образом [5, 6]:

Мы отправляемся от следующих наглядных представлений об алгоритмах:

1) Алгоритм Г, примененный ко всякому "условию"("начальному состоянию") A из некоторого множества D(Г) ("области применимости"алгоритма Г), дает "решение"("заключительное состояние") B

2) Алгоритмический процесс расчленяется на отдельные шаги заранее ограниченной сложности; каждый шаг состоит в "непосредственной переработке"возникшего к этому шагу состояния S в состояние $S* = \Omega_\Gamma(S)$

3) Процесс переработки $A^0 = A$ в $A^1 = \Omega_\Gamma(A^0)$, A^1 в $A^2 = \Omega_\Gamma(A^1)$, A^2 в $A^3 = \Omega_\Gamma(A^2)$ и т. д. продолжается до тех пор, пока либо не произойдет безрезультатная остановка (если оператор Ω_Γ не определен для получившегося состояния), либо не появится сигнал о получении "решения". При этом не исключается возможность неограниченного продолжения процесса (если никогда не появится сигнал о решении).

4) Непосредственная переработка S в $S* = \Omega_\Gamma(S)$ производится лишь на основании информации о виде заранее ограниченной "активной части"состояния S и затрагивает лишь эту активную часть."

Как позже, уже в конце 80х гг, пишет В.А. Успенский [8], формулировка Колмогорова содержит две существенные идеи. Первая из них - идея итеративности алгоритмического процесса, а вторая выражена в последнем пункте формулировки, это идея локальности каждого отдельного шага.

Формулировка Колмогорова предлагает общую схему детерминированного преобразования одних объектов в другие - схему, согласно которой всякое такое преобразование представляет собой результат многократного применения одной и той же сравнительно простой операции (у Колмогорова она называется "оператором"). При этом локальная операция состоит в удалении заранее ограниченного "куска"обрабатываемого объекта (состояния) и в замене этого удаляемого "куска"на другой "кусок определяемый в зависимости от первого.

Таким образом, Колмогоровым была предложена некоторая вычислительная модель. Как выяснилось впоследствии, в 70-е годы, эта модель естественным образом включает в себя все другие модели с локальным преобразованием информации. Вычислительная модель Колмогорова, в отличии, например, от машин Тьюринга, может в реальное время осуществлять моделирование всех других известных устройств с локальным преобразованием информации.

Дальнейшие работы А.Н. Колмогорова по теории алгоритмов были написаны на стыке с еще одной молодой областью научных исследований - теорией информации. Первая работа, написанная А.Н. Колмогоровым по теории информации [9] содержала вероятностный подход. Но в дальнейшем сам же А.Н. Колмогоров выделял у себя три различных подхода к данной области: комбинаторный, вероятностный и алгоритмический [10].

Наиболее полно А.Н. Колмогоров изложил свои результаты, лежащие на стыке теории алгоритмов и теории информации в работе "Комбинаторные основания теории информации и исчисления вероятностей"[11] в 1983 г. Там алгоритмический подход основан на применении теории алгоритмов для определения понятия энтропии или сложности.

Также, помимо непосредственной работы над развитием теории алгоритмов, А.Н. Колмогоровым проводилась серьезная педагогическая работа в данном направлении. И первым учебным мероприятием на механико-математическом факультете МГУ в области теории алгоритмов стал семинар по рекурсивной арифметике (руководители А.Н. Колмогоров, В.А. Успенский), происходивший в 1953/54 учебном году. Активными участниками этого семинара были, в частности, С.И. Адян и Ю.Т, Медведев. Именно на этом семинаре Колмогоров предложил общие определения нумерации и сводимости нумераций, чем положил начало теории нумераций.

И именно под руководством А.Н. Колмогорова в 1955 г. были защищены две первые кандидатские диссертации по теории алгоритмов, написанные в стенах МГУ. Это - диссертации В.А. Успенского "Об операциях над перечислимыми множествами"и Ю.Т. Медведева "Степени трудности математических проблем".

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Post E. I. Finite combinatory processes-formulation, J. Symbolic logic, 1, 103- 936).

2. Turing A. M. On computabile N numbers with an application to the entscheidungsproblem, Proc. Lond. Math. Soc, 2, 42, 230-265 (1936).

3. Church A. A note on the Entscheidungsproblem, Symbolic Logic, 1,40-41 (1936).

4. Kleen S. C. General recursive functions of natural numbers, Math. Ann., 112, 727-742 (1935).

5. Кузнецов А.В. О примитивно рекурсивных функциях большого размаха. ДАН, т. 71 (1950), N 2, 233-236

6. Колмогоров А.Н. О понятии алгоритма. УМН, т. 8 (1953), в.4, 175-176.

7. Колмогоров А.Н., Успенский В.А. К определению алгоритма. УМН, т. 13 (1958), в. 4, 3-28.

8. Успенский В.А., Семенов А.Л. Теория алгоритмов: основные открытия и приложения, Москва, "Наука 1987, 288 с.

9. Колмогоров А.Н, Гельфанд И.М., Яглом А.Н. К общему определению количества информации, ДАН СССР, 1956 г., т.111, №4, с. 745-748.

10. Колмогоров А.Н. Три подхода к определению понятия "количество информации". Проблемы передачи информации, 1965, т.1, №1, с.3-11

11. Колмогоров А.Н., "Комбинаторные основания теории информации и исчисления вероятностей УМН, 1983, том 38, вып. 4(232) (1983), 27-36;

УДК 511.32

Страницы истории физико-математического факультета ТГПУ им. Л. Н. Толстого (к 85-летию со дня основания)

И. Ю. Реброва (Россия, г. Тула)
Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого
e-mail: i_rebrova@mail.ru
А. Е. Устян (Россия, г. Тула)

Pages of the history of the Faculty of Physics and Mathematics of Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (to the 85th anniversary of its founding)

I. Yu. Rebrova (Russia, Tula)
Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University
e-mail: i_rebrova@mail.ru
A. E. Ustyan (Russia, Tula)

В далеком 1938 году одновременно с созданием Тульского педагогического института в числе первых был создан физико-математический факультет. Тульский государственный педагогический институт являлся одним из крупнейших в СССР. Он только на 8 лет моложе Московского государственного педагогического института им. В.И. Ленина (ныне МПГУ). Первый директор института Карп Илларионович Чирва (род. в 1894 году), старый коммунист, энергичный, напористый, в прошлом активный участник партизанского движения на Северном Кавказе, преодолел большие трудности по организации института в короткий срок.

В начале первого 1938-39 учебного года в дневном педагогическом институте было всего 175 студентов, в том числе 55 студентов физмата (2 группы). Физико-математической кафедрой и факультетом в этом году руководил физик доцент Пальгунов Петр Петрович, приезжавший из Москвы. Он же читал лекции по общей физике и астрономии.

1939-40 гг. и 1940-41 гг. (до 22 июня) для физико-математического факультета были очень благоприятными. На факультет были приглашены из Самаркандского университета питомцы МГУ, молодые ученые, кандидаты физико-математических наук, супруги Павел Васильевич Соловьев (1906-1943 гг.) и Валентина Михайловна Гущина (1907-2006 гг.), а также кандидат физико-математических наук Лев Мейнгардович Шифнер, некоторое время назад окончивший аспирантуру при Академии Наук СССР. Хорошо укомплектованный факультет разворачивал свою работу. Прекрасно читались лекции по математическим дисциплинам. Успешно развивалась научная работа преподавателей факультета. Л.М. Шифнер и П.В. Соловьев готовили докторские диссертации. С.Т. Зотов сдавал кандидатские экзамены и готовился к выполнению кандидатской диссертации. На физико-математической кафедре работал научный семинар, на котором выступали все творчески работающие члены кафедры. На факультете работали студенческие научные кружки под руководством Л.М. Шифнера, П.В. Соловьева, В.М. Гущиной, Н.П. Петрушкина.

К концу 1940-41 учебного года количество студентов педагогического института превышало тысячу. Более чем в два раза увеличилось количество преподавателей. Но дальнейший рост института, а вместе с ним и физико-математического факультета, был прерван нападением на нашу Родину фашистской Германии 22 июня 1941 года. Защищая Родину на фронтах, погибло много студентов и преподавателей факультета, среди них: декан факультета Павел

Васильевич Соловьев, старший преподаватель Сергей Тимофеевич Зотов, студенты Георгий Григорьевич Демыкин, Цой Дюн Чен, Николай Гаврилович Рождественский, Михаил Васильевич Назаров, Виктор Константинович Мызников, Евгений Александрович Трусков. В эти годы деканом факультета становится Валентина Михайловна Гущина. Она проработала в должности декана почти 20 лет с небольшими перерывами.

С началом войны институт был эвакуирован в Казахстан. Срок обучения был сокращен до 3 лет. После разгрома фашистов под Москвой институт возвратился в Тулу. Была организована итоговая аттестация, но сдавать экзамены могли не все, многие ушли на фронт в июне-августе месяцах. Таким образом, диплом получили только 23 человека из 55 принятых. Несмотря на трудные годы, факультет не нарушал традиций. В 1943 году на факультете торжественно было отмечено 300-летие Исаака Ньютона. В.М. Гущина делала все, чтобы разжечь в сердцах студентов любовь к своей науке. Она твердо знала, что даже при самом заурядном уме увлечение предметом многократно увеличивает возможности студента.

В послевоенные годы институт начал залечивать свои раны. Вернулись с фронта оставшиеся в живых студенты. Некоторые из них начали учебу на дневном отделении факультета, некоторые – на заочном и вечернем отделениях. Вернулись преподаватели. Среди них Петрушкин Николай Павлович, который вскоре стал заместителем директора, а затем проректором по учебной и научной работе и выполнял эту работу в течение многих лет. Николай Павлович прошел всю войну, был командиром пулеметного взвода, ротным переводчиком, помощником начальника штаба.

В 1957 году деканом факультета становится Ефимова Нина Сергеевна, выпускница физико-математического факультета, именная стипендиатка, которая успешно работала на кафедре математического анализа старшим преподавателем, являясь одним из ведущих преподавателей. В 1957-1958 учебном году было введено в строй новое общежитие на ул. Мира д. 33. Институт укреплялся с ростом кафедр. В 1958 году институту присваивается вторая категория. В этом же году факультет начинает прием абитуриентов на специальность "Математика и черчение" сроком обучения 5 лет. С 1960 по 1961 гг. деканом факультета была Софья Николаевна Левина.

В 1961 году в Тульский государственный педагогический институт приезжает опытный методист и преподаватель с 25-летним стажем работы Петр Алексеевич Буданцев. С 1961 по 1964 год Петр Алексеевич заведовал кафедрой элементарной математики и методики преподавания математики, а с 1962 по 1967 год работал деканом математического факультета.

В 1964 году физико-математический факультет значительно вырос, настало время для выделения двух отдельных подразделений в структуре университета. Факультет разделился на два: математический и физико-технический. К математическому факультету отошли две кафедры: высшей математики и элементарной математики. На физическо-техническом факультете началась подготовка учителей физики и труда. Деканом физико-технического факультета стал доцент Генрих Борисович Куперман.

В 1967 году деканом математического факультета избирается Гайдуков Иван Иванович, и работает на этом посту в течение 10 лет. За это время факультет рос, создавалась хорошая материальная база, развернулась большая работа с учителями города и области. Различные формы повышения квалификации учителей связаны с именем И.И. Гайдукова, а также Буданцева Петра Алексеевича и Саннинского Владимира Яковлевича. Их методические труды живут и по сей день. Они известны далеко за пределами г. Тулы. Книга И.И. Гайдукова "Абсолютная величина" переведена на японский язык. Большим успехом пользуется и учебник "Методика преподавания математики в средней школе", одним из авторов которой является В.Я. Саннинский.

Иван Иванович Гайдуков, ветеран Великой отечественной войны, считал, что «главная задача молодых – добросовестно трудиться, тем самым укрепляя экономическое и оборонное могущество Родины. А чтобы хорошо трудиться, нужно знать, а чтобы знать, нужно упорно и настойчиво учиться». Этот принцип был основополагающим для всех поколений студентов физико-математического факультета. Освоение таких фундаментальных дисциплин, как физика и математика, невозможно без упорства и настойчивости, без целеустремленности в познании их законов.

С 1977 года начинается целая эпоха в истории математического факультета. Деканом избирается Устян Ашот Енофович, он работает на этом посту 33 года. С первых дней работы в качестве декана Устян А.Е. поставил перед собой две главные задачи. Первая – создание системы подготовки кадров высшей квалификации для математического факультета. Он вложил всю свою неуемную энергию в то, чтобы на факультете росли свои доктора наук, отправлял молодых ученых на стажировки и конференции. С его легкой руки факультет начал успешно сотрудничать с известными на весь мир учеными Московского государственного университета им. М.В.Ломоносова. Вторая главная задача для декана Устяна А.Е. – это студенты. Он считает, что «своих» студентов нужно искать, когда они еще на школьной скамье. Поэтому на факультете организуется юношеская математическая школа, затем летняя математическая школа для старшеклассников.

С 1980 года на математическом факультете началась подготовка учителей математики и физики для республик Куба и Ангола. С 1985 по 1989 гг. выпускниками факультета стали 46 иностранных студентов. С 1990 по 1996 годы 27 иностранных студентов получили квалификацию учителя математики и информатики.

К 1996 году математический факультет уже на протяжении 10 лет успешно реализует подготовку учителей по специальности Математика с Информатикой. В 1996 году факультет получает новое название – факультет математики и информатики. Выпускники факультета, получив качественную математическую подготовку и уверенные навыки программирования, востребованы не только в образовательных организациях, но и в сфере ИТ. В 2004 году, оперативно реагируя на вновь возникающие потребности, факультет открывает первое направление подготовки специалистов для ИТ-сферы — "Математическое обеспечение и администрирование информационных систем".

Физический факультет продолжает подготовку учителей физики с дополнительной специальностью математика, информатика, экономика. Возглавляет факультет Головнев Юрий Филиппович, доктор физико-математических наук, профессор. В 2006 году факультеты вновь объединяются и образуют факультет математики, физики и информатики. Руководит факультетом до 2010 года Устян А.Е.

В 2010 году эстафету руководства факультетом принимает Реброва Ирина Юрьевна, выпускница математического факультета, кандидат физико-математических наук. В 2011 году ректором университета избирается Панин Владимир Алексеевич, выпускник физического факультета, доктор физико-математических наук, профессор. Факультет продолжает успешное выполнение своей первостепенной задачи — подготовка учителей математики, физики и информатики. Расширяется спектр и сочетание профилей подготовки.

Наряду с этим, продолжается стремительное развитие ИТ-отрасли, растет потребность в ИТ-специалистах, и в 2011 году на факультете открывается новое направление подготовки бакалавров "Фундаментальная информатика и информационные технологии", а уже в 2013 году еще одно новое направление бакалавриата "Прикладная информатика". Успешно проходит аккредитация всех направлений подготовки, включая магистерские программы по каждому направлению.

Нам часто кажется, что вот именно сейчас и именно мы живем в эпоху перемен, но пролистав страницы истории факультета, понимаем, что ничто не вечно. Факультет начал работу, набрал силу, вырос и назрела необходимость разделения кафедр, создания самостоятельных факультетов. А дальше снова рост, развитие. В 2022 году произошла очередная реорганизация, из структуры факультета выделено самостоятельное подразделение — Институт передовых информационных технологий. А физико-математический факультет, вернув свое историческое название и историческое предназначение, открывает новую страницу своей истории.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Устян А.Е. К истории ТГПУ им. Л. Н. Толстого и математического факультета// В сборнике: Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы, приложения и проблемы истории. Материалы XVIII Международной конференции, посвященной 100-летию со дня рождения профессоров Б. М. Бредихина, В. И. Нечаева и С. Б. Стечкина. Тула, 2020. С. 396-401.

УДК 51(091)

О материалах по истории естествознания в фонде О. Ю. Шмидта Архива РАН

Г. С. Смирнова (Россия, г. Москва)
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
e-mail: galina.smirnova@math.msu.ru

Documents on the history of natural science in the O. Yu. Schmidt collection of the RAS Archives

G. S. Smirnova (Russia, Moscow)
Lomonosov Moscow State University
e-mail: galina.smirnova@math.msu.ru

В 2022 г. после более чем шестидесятилетнего перерыва небольшим тиражом (300 экз.) вышел в свет четвертый том избранных трудов О.Ю. Шмидта (1891–1956) [1]. Ни один из источников, имеющих отношение к работам Шмидта по истории науки, начиная с 1921 г., в том числе к его курсам по истории естествознания и техники, прочитанным сначала во 2 МГУ (1925–1928), а затем на физико-математическом факультете 1 МГУ (1929), в этот том не попал. Однако для историков науки, читающих такие курсы и в наши дни, эти материалы, хранящиеся в фонде О.Ю. Шмидта Архива РАН [2], представляют несомненный интерес.

К настоящему времени из всех сохранившихся в АРАН лекций Шмидта по истории естествознания свет увидела только одна: в 1990 г. А.Н. Боголюбов (1911–2004) в сборнике научных статей „Очерки истории естествознания и техники“, издаваемом Центром исследований научно-технического потенциала и истории науки тогда еще Академии наук Украинской ССР, опубликовал лекцию 15, которую назвал (в архивной машинописи такого названия нет) „*Методологические аспекты науки*“ и в качестве подзаголовка указал „*Из цикла лекций, читанных в Московском университете в 20-е годы XX ст.*“[3, с. 95–103]. Снабдив ее своим комментарием, А.Н. Боголюбов не сообщил в нем, что это за работа, откуда она была получена и какова судьба остальных лекций.

Изучение материалов дела 276 из фонда Шмидта в Архиве РАН позволяет утверждать, что опубликованная в [3] лекция является частью курса, лекции 5–16 которого содержатся в этом деле. Сравнение текстов полностью подтверждает этот вывод. Дело 276 в АРАН поименовано как „План и курс лекций Шмидта О.Ю., прочитанных в 1 МГУ“. Поскольку на самих материалах дела никаких дат не стоит, а профессором и заведующим кафедрой алгебры 1-го МГУ Шмидт был утвержден в июле 1929 г., то именно этот год выставлен архивариусом в качестве предполагаемой даты документов.

Тот факт, что О.Ю. Шмидт, известный своими выдающимися результатами в одной из таких сложных математических дисциплин как алгебра, обратил внимание на историю науки, перестает удивлять после знакомства с биографией Шмидта, написанной Матвеевой Л.В. [4]. Еще будучи студентом Киевского университета, он выработал свой подход к занятиям наукой: прежде всего нужно познакомиться со всем многообразием существующих в математике теорий, поэтому сначала изучаются сочинения энциклопедического характера, после чего – работы по истории математики, и только после этого – специальная научная литература. Как позже Шмидт писал об этом времени, одна из таких энциклопедий, в которой наряду с изложением математической сущности понятий и теорем содержались и исторические сведения о них – „*Repertorium der höheren Mathematik*“ Эрнесто Паскаля (1865–1940), немецкий перевод которой вышел в свет в 1900–1902 гг., всегда была у него настольной книгой [4, с. 23].

Несомненно, в этом сказалось и влияние профессора Д.А. Граве (1863–1939), под руководством которого Шмидт занимался теорией групп и в 1912 г. опубликовал свою первую математическую работу „*Über die Zerlegung endlicher Gruppen in direkte unzerlegbare Faktoren*“ [5]. В том же году в Киеве из печати вышла книга Граве [6], однако прямого указания на нее в бумагах Шмидта найти не удалось.

Этот вопрос выяснения списка литературы, которую использовал О.Ю. Шмидт при подготовке своих лекций, стал одним из важных вопросов, возникших при знакомстве с его курсом, т.к. такого списка источников в архивных документах нет. Тем не менее в одном из них упоминается фамилия Даннеман, что позволило обнаружить один из главных источников Шмидта.

Фридрих Даннеман (*Johann Friedrich Dannemann*, 1858–1936) – немецкий физик и историк науки, почетный профессор знаменитого Боннского университета (где в 1835–36 гг. учился К. Маркс). Во многом благодаря энциклопедическим трудам Даннемана в начале XX века в Германии резко возрос интерес к общей истории науки. В своем произведении он постарался изложить историю естественных наук как часть общей эволюции культуры и создать таким образом книгу, полезную не только для историка, но и для врача, техника, педагога, студента, — для всех, кто интересуется судьбой естествознания. Намерением автора было дать историю развития естествознания не только в его основах, но и в его отношении к другим наукам — в особенности к философии, математике, медицине и технике.

Во многом структура курса Шмидта, содержание и последовательность изложения материала совпадают с тем, что мы находим в четырехтомной „*Истории естествознания*“ Даннемана [7, 8, 9]. Заметим, что на русском языке издание первых трех томов Даннемана появилось лишь в 30-е годы XX столетия уже после того, как Шмидт читал свои лекции по истории естествознания и техники в Московском университете, и именно Шмидт вместе с М.Л. Левиным (1885–1937, первым заведующим кабинетом истории естествознания в Коммунистической академии) стал инициатором и редактором этого издания. Вот что они писали об этом произведении и его авторе в своем предисловии:

> «Предлагаемая вниманию наших молодых социалистических кадров книга научного сотрудника знаменитого „Германского музея образцовых великих произведений естествознания и техники“ Фридриха Даннемана – сочинение немарксистское. Автор, подобно большинству буржуазных ученых, занимающихся историей естествознания, колеблется между материализмом и идеализмом. Книга Даннемана, следовательно, не может восполнить пробела в русской литературе в последовательно-материалистической истории естествознания в целом...
>
> „*Четырехтомная история Даннемана*“, вышедшая первым изданием в

> 1910–1914 гг. – талантливая книга. Она может послужить толчком и отправной точкой для самостоятельной, опирающейся на марксистско-ленинскую методологию работы над историей естествознания.
>
> Даннеман – наиболее известный в Германии популяризатор истории естествознания. Кроме упомянутого четырехтомного сочинения им написан еще ряд уже менее крупных работ, из них следует упомянуть его „*Gründriss einer Geschichte der Naturwissenschaften*“ (1889) и удачно составленный популярный сборник отрывков из классических сочинений наиболее выдающихся естествоиспытателей, озаглавленный „*Aus der Werkstatt grosser Forscher*“ 4 Aufl. 1922 (имеется на русском языке). Недавно появилось сокращенное издание его четырехтомной истории под названием: „*Vom Werden der naturwisischer Probleme*“ (1928 г.). На русском языке имеются также изданная издательством „Матезис“ (1913) сокращенная „*История естествознания*“ и популярная брошюра „*Как создавалась наша картина мира*“ (изд. „Образование“, Петроград, 1915), очень поверхностная, а поэтому малоценная» [7, с. 4–5].

Еще в одной из черновых записок к лекциям по истории точных наук, прочитанным Шмидтом осенью 1925 г. во 2-м МГУ, Шмидт пишет „*по Тропфке*“, имея в виду его книгу „*История элементарной математики в систематическом изложении.* Том 1. Арифметика и алгебра“, изданную в 1914 г. под редакцией профессора Московского университета И.И. Чистякова, после В.В. Бобынина читавшего курс истории математики. Однако ни на Чистякова, ни на Бобынина ссылок в документах Шмидта найти не удалось.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Шмидт О.Ю. Избранные труды: Проблемы общественной жизни и науки / отв. ред. С.О. Шмидт, сост. В.Г. Бухерт. — М.: Новый хронограф, 2022. 676 с.

2. Архив РАН. Ф.496. Оп. 1.

3. Шмидт О.Ю. Методологические аспекты науки (с комментариями А.Н. Боголюбова) // Очерки истории естествознания и техники. Киев: Наукова думка, 1990. Т. 38. С. 95–105.

4. Матвеева Л.В. Отто Юльевич Шмидт: 1891–1956. — М.: Наука, 1993. 208 с.

5. Schmidt O. Über die Zerlegung endlicher Gruppen in direkte unzerlegbare Faktoren // Протоколы Физико-математического общества при Киевском университете. 1912. С. 1–6.

6. Граве Д.А. Энциклопедия математики: Очерк ее современного положения. — Киев: кн. маг. Н.Я. Оглоблина, 1912. X, 601 с. с 152 рис.

7. Даннеман Ф. История естествознания. Т. 1. От зачатков науки до эпохи Возрождения. Пер. А.Г. Горнфельда. — М.: Государственное Медицинское издательство, 1932. 432 с.

8. Даннеман Ф. История естествознания. Т. 2. От эпохи Галилея до середины XVIII в. Пер. П.С. Юшкевича. — М.-Л.: ОНТИ НКТП СССР, 1935. 408 с.

9. Даннеман Ф. История естествознания. Т. 3. Расцвет современного естествознания до установления принципа сохранения энергии. Пер. П.С. Юшкевича. — М.-Л.: ОНТИ НКТП СССР, 1938. 358 с.

УДК 519.21

Этапы научного творчества профессора А. Ф. Терпугова

Е. Л. Туренова (Россия, г. Москва)
Московский государственный технический университет гражданской авиации
e-mail: turenova@yandex.ru
И. В. Добрынина (Россия, г. Москва)
Московский технический университет связи и информатики
e-mail: dobrynirina@yandex.ru

Stages of scientific creativity of Professor A. F. Terpugov

E. L. Turenova (Russia, Moscow)
Moscow State Technical University of Civil Aviation
e-mail: turenova@yandex.ru
I. V. Dobrynina (Russia, Moscow)
Moscow Technical University of Communications and Informatics
e-mail: dobrynirina@yandex.ru

Невозможно представить себе человека, лично или косвенно знакомого с педагогической или научной деятельностью Александра Федоровича Терпугова, который бы не испытывал чувства уважения и восхищения перед его достижениями, перед многогранностью его личности, широтой научных интересов и блистательностью таланта. Терпугов Александр Федорович — математик, радиофизик, профессор, заведующий кафедрой теории вероятностей и математической статистики Томского государственного университета. Автор метода асимптотического анализа сетей массового обслуживания, алгоритмов оценки функции корреляции и спектра мощности стационарного случайного процесса, анализа временного ряда при случайных пропусках измерений и при наличии аномальных ошибок в измерениях [1]-[5]. Но это достаточно сухие факты, не дающие полного понимания значимости этого ученого для современной науки. В реальности — это был выдающийся человек, харизматичный и талантливый педагог, и по сей день ведущий за собой и через свои труды влюбляющий в теорию массового обслуживания, теорию вероятностей и случайных процессов, указавший путь к обширному классу задач современной науки и техники, научивший любить математику и смело принимать любые вызовы и идти в ногу со временем, опережая передовые технологии и внося вклад в их развитие.

В научной работе Александра Фёдоровича можно выделить 4 крупных временных и тематических этапа [4], [5]. Первый этап был посвящён решению проблемы оптимизации работы радиолокационных станций. Основными направлениями его исследований в тот период были: выбор вида зондирующего сигнала, обеспечивающего хорошее разрешение целей по дальности и скорости, а также хорошую оценку этих величин; нахождение оптимального вида диаграмм направленности антенн радиолокационных станций, дающих наименьшую погрешность в оценке углового положения цели; нахождение алгоритмов обзора пространства антеннами с электрическим качанием луча, которые обеспечивали бы скорейшее обнаружение цели в пространстве. В 60-ые годы научный интерес профессора А. Ф. Терпугова среди прочих составляли задачи поиска в многоканальных системах неподвижного сигнала, а позднее, в связи с усложнением практических задач, и задачи поиска сигнала, перемещающегося по каналам.

Результаты исследований по поиску неподвижного сигнала вошли в монографию Л. Е. Радюк, А. Ф. Терпугов, Ф. А. Шапиро «Поиск сигнала в многоканальной системе».

В докторской диссертации [6] А. Ф. Терпуговым был изложен разработанный им новый метод синтеза сложных сигналов, позволивший решать задачи, не поддающиеся решению другими методами. Рассмотренные в работе вопросы касались измерений электромагнитных волн очень широкого диапазона, от радиоволн до рентгеновских.

Разработанные методы получили дальнейшее развитие в работах учеников Александра Федоровича. Наиболее плодотворным здесь оказался так называемый «двухэтапный метод поиска». Решение этих проблем составили основное содержание кандидатских диссертаций его первых учеников (В. С. Трусов, Л. Е. Радюк, В. А. Толстунов).

Наиболее полное развитие идея двухэтапного метода поиска получила в докторской диссертации ученика А. Ф. Терпугов Ю. М. Тонконогова. При разработке теории поиска сигнала в многоканальной системе Ю. М. Тонконогов предложил новый способ управляемого поиска движущихся сигналов, использующий прерывание регулярного осмотра. На его основе был создан класс алгоритмов поиска движущихся каналов с использованием процедуры последовательного анализа Вальда. Выводятся нестандартные интегральные уравнения последовательного анализа при меняющихся во времени гипотезах. Он разработал методику аналитического расчета основных характеристик (частота лонных тревог, среднее время поиска, распределение времени поиска) алгоритмов и получил аналитические формулы для этих характеристик. Разработал методику приближенного аналитического расчета и получил явные формулы для характеристики алгоритмов поиска для широкого спектра сигналов и способов обработки.

Второй этап развития научных интересов А. Ф. Терпугова был посвящён исследованию управляемых систем массового обслуживания, развитию методов оптимального и адаптивного управления такими системами. Совместно со своими учениками, модифицируя методы нелинейного и динамического программирования, Александр Федорович разработал алгоритмы динамических приоритетов и формирования очередей. Им были заложены основы метода асимптотического анализа для исследования систем массового обслуживания в условии большой загрузки. В результате этих исследований ряд его учеников защитили кандидатские диссертации, а его ученики А. А. Назаров и И. А. Коротаев — докторские.

Как и ранее, дальнейшее развитие данного направления продолжили ученики Александра Федоровича. Одним из активно развиваемых направлений в конце 70-х годов прошлого столетия стали управляемые системы массового обслуживания. Исследованием таких систем с динамическими приоритетами занимался А. А. Назаров с помощью предложенной им модификации метода динамического программирования для СМО, функционирующих в стационарных режимах. Тогда же был введен термин адаптивного управления системами массового обслуживания, когда в режиме реального времени необходимо оценивать параметры системы и назначать оптимальное управление. Решать такие задачи предлагалось с помощью автоматов с целесообразным поведением. Также рассматривался класс управлений по косвенным наблюдениям, когда оно осуществляется по информации стохастически связанной с состоянием системы.

Большой практический и научный интерес имеют исследования систем массового обслуживания со случайно или детерминировано изменяющимися параметрами, так как они наиболее близко описывают реальные системы. Этой области посвящены исследования И. А. Коротаева. В диссертационной работе И. А. Коротаева разработаны методы приближенного расчета характеристик адаптирующихся систем массового обслуживания. Предлагается метод расчета стационарного распределения числа заявок в однолинейной адаптирующейся СМО с резервным прибором. Управление включением-выключением резервного прибора осуществляется адаптером, при этом структура адаптера не конкретизируется. Рассматриваются методы приближенного расчета среднего числа заявок в однолинейной адаптирующейся СМО с переменной интенсивностью обслуживания и характеристик адаптирующейся СМО с динамическими приоритетами.

Рассматриваются способы оценки интенсивности входящего потока заявок и адаптивного управления системой массового обслуживания. Для этого предлагается четыре автомата-адаптера. Для всех автоматов найдено стационарное распределение вероятностей состояния. Так же предлагается и исследуется адаптивная оценка интенсивности дважды стохастического пуассоновского процесса. Найдены характеристики автоматов-адаптеров, необходимые для расчета характеристик адаптирующихся СМО, использующих данные автоматы.

А. А. Назаровым был сформулирован метод асимптотического анализа для исследования марковских и немарковских, но марковизируемых систем массового обслуживания, а также некоторых классов случайных потоков однородных событий. Суть метода асимптотического анализа изложена в монографиях, он может быть применен для исследования систем и сетей массового обслуживания различной конфигурации. Метод заключается в расширении фазового пространства состояний системы таким образом, что соответствующий многомерный случайный процесс их изменения во времени оказывается марковским (метод марковизации). Составляются уравнения Колмогорова для распределения вероятностей, частичных производящих функций или характеристических функций значений полученных многомерных марковских случайных процессов.

Третий этап исследований А. Ф. Терпугова посвящен анализу временных рядови потоков событий при измерениях в случайные моменты времени и при наличии шумов. Исходя из предположения, что поток моментов наблюдений является пуассоновским либо рекуррентным, он построил алгоритмы выделения трендов временных рядов, оценки функции корреляции и спектра мощности стационарного случайного процесса. Им были также построены алгоритмы анализа временного ряда при случайных пропусках измерений и при наличии ошибок в измерениях. Были разработаны оценки параметров пуассоновских потоков и их обобщений в виде потоков Кокса при аномальных ошибках измерений и при наличии так называемого «мёртвого времени». В результате исследований по этой тематике ещё ряд учеников А. Ф. Терпугова защищают кандидатские диссертации, а К. И. Лившиц, Ф. Ф. Идрисов и Е. В. Глухова защищают докторские диссертации, научным консультантом в которых является Александр Фёдорович.

Большое практическое значение для прогнозирования состояния различных технических и экономических систем имеют результаты А. Ф. Терпугова и его учеников в области анализа трендов временных рядов. Важной особенностью этих исследований является нахождение оценок параметров моделей трендов в отсутствие некоторого случайного числа наблюдений или при наличии случайности моментов измерений, или даже неизвестности этих моментов. Результаты таких исследований, к примеру, были использованы в ОКБ «Полет» для разработки ПО систем телеметрического контроля и прогнозирования состояния навигационных спутников.

На четвёртом этапе тематика исследований А. Ф. Терпугова перемещается в область математических моделей в экономике и актуарной математике, то есть математике страхового дела. Им предложена и совместно с учениками изучена математическая модель страховой компании, существенно обобщающая классическую модель, расчётными формулами которой страховые компании пользуются до сих пор. Модель Терпугова учитывает приход и уход клиентов из компании, стохастический характер этой динамики, случайность величины страховых премий. Им же предложена модель влияния рекламы на деятельность страховых компаний.

В докторской диссертации Е. В. Глуховой исследовались вероятности разорения страховых компаний с учетом перестраховки и разорения страховых компаний с работающим капиталом.

Наряду с этим он занимался исследованием моделей изменения цен финансовых активов на фондовом и финансовом рынках и математически корректным обоснованием некоторых эвристических алгоритмов технического анализа фондового рынка, таких, как метод «японских свечек». Здесь из его учеников наибольшего успеха добился О. А. Змеев, защитивший докторскую диссертацию.

А. Ф. Терпугов был членом ряда диссертационных советов, но его любимым детищем был диссертационный совет Д 212.267.18 по защите докторских диссертаций, который он сформировал и был его председателем.

Александр Фёдорович являлся автором более 200 научных работ, в том числе 4 монографий. Среди его учеников — свыше 50 кандидатов наук, 13 из них стали докторами физико-математических и технических наук и имеют большое количество собственных учеников, также имеющих ученые степени. Таким образом, Александр Федорович по праву является основателем обширной и быстро развивающейся современной научной школы по прикладному вероятностному анализу.

Ежегодно проводится международная конференция имени А. Ф. Терпугова «Информационные технологии и математическое моделирование» (http://itmmconf.tsu.ru/) с последующим выпуском материалов конференции в качестве отдельного тематического тома «Queueing Theoryand Applications» в рамках серии Communications in Computer and Information Science (CCIS) «Queueing Theoryand Applications», Springer Verlag, которая входит в базу цитирования Scopus.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Горцев А. М. Факультет прикладной математики и кибернетики // Вестник Томского государственного университета. 2000. № 271. С. 9-12.

2. Назаров А. А. Терпугов Александр Федорович. Слово об учителе, наставнике, друге // Вестник Томского государственного университета. 2000. № 271. С. 181-183.

3. Основатели ФПМК // Вестник Томского государственного университета. 2000. № 271. С. 7-8.

4. Памяти товарища (Терпугов Александр Федорович) // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2009. № 4(9). С. 102-104.

5. Туренова И. А., Туренова Е. Л., Моисеева С. П. История развития научных исследований по прикладному вероятностному анализу кафедры ТВ и МС Томского государственного университета // Алгебра, теория чисел, дискретная геометрия и многомасштабное моделирование: современные проблемы, приложения и проблемы истории. Материалы XXI Международной конференции, посвящённой 85-летию со дня рождения А. А. Карацубы. — Тула, 2022. С. 332-336.

6. Терпугов А. Ф. Избранные теоретические вопросы оптимизации светолокационных и радиолокационных станций: автореферат дис. на соискание ученой степени д-ра физ.-мат. наук. Томский гос. ун-т им. В. В. Куйбышева. — Томск, 1970. — 39 с.

УДК 512.54

О научной деятельности Владимира Николаевича Безверхнего

А. С. Угаров (Россия, г. Тула)
Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого
e-mail: ugarovas@tsput.ru
И. В. Добрынина (Россия, г. Москва)
Московский технический университет связи и информатики
e-mail: dobrynirina@yandex.ru

On the scientific activity of Vladimir Nikolaevich Bezverkhny

A. S. Ugarov (Russia, Tula)
Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University
e-mail: ugarovas@tsput.ru
I. V. Dobrynina (Russia, Moscow)
Moscow Technical University of Communications and Informatics
e-mail: dobrynirina@yandex.ru

Владимир Николаевич поступил на математический факультет ТГПИ (сейчас ТГПУ) им. Л.Н. Толстого в 1962 году, закончив службу в рядах Советской Армии. Трудолюбие и недюжинные математические способности быстро позволили ему стать одним из лучших студентов математического факультета. Он успешно участвовал в олимпиадах, сдавал экзамены досрочно и получал повышенную стипендию.

По окончании института Владимир Николаевич ненадолго покинул его стены. В Тулу приехал Мартин Давидович Гриндлингер, доктор физ.-мат. наук, выдающийся математик, и Владимир Николаевич стал посещать его научный семинар по теории групп.

В 1968 году М.Д. Гриндлингер пригласил Владимира Николаевича в аспирантуру, оценив потенциал подающего большие надежды молодого ученого. И ученик не обманул надежд своего учителя.

В математике весьма важно доказать новые теоремы, но не менее, если не более важно предложить новый инструмент – математический метод, который можно успешно применять для решения сложных проблем.

Еще в аспирантуре Владимир Николаевич ввел в алгоритмическую теорию групп понятие специального множества – понятие, позволившее ему успешно решить ряд сложнейших проблем. Несколько позже им были также определены понятия специального сокращения для групп с малым сокращением, понятие π-изолятора, метод типов. Определены группы Артина с древесной структурой и с n- угольной структурой.

Обучение в аспирантуре завершилось благополучной защитой кандидатской диссертации, и Владимир Николаевич вновь покинул математический факультет, в этот раз почти на 10 лет. Тем не менее он оставался постоянным членом научного семинара, заместителем редактора, а потом и редактором журнала «Алгоритмические проблемы теории групп и полугрупп»

В 1988 году Владимир Николаевич возвращается на математический факультет е. Студентам он запомнился своей требовательностью, высокой порядочностью и человечностью.

После отъезда М.Д. Гриндлингера Владимир Николаевич становится руководителем научного семинара по теории групп, а позднее руководителем аспирантуры. Им подготовлено 8 кандидатов физ.-мат. наук и один доктор. За время руководства аспирантурой Владимир Николаевич укрепил научные связи математического факультета и мехмата МГУ. Приезжал принимать кандидатские экзамены у его аспирантов выдающийся математик, профессор МГУ

Альфред Львович Шмелькин. Также он являлся первым оппонентом при защите диссертации аспирантами Владимира Николаевича.

В 1999 году Владимир Николаевич впервые в истории математического факультета выиграл грант РФФИ. В дальнейшем выиграл еще 4 гранта, в том числе и грант молодых ученых. В 1999 году впервые в истории факультета защитил докторскую диссертацию по специальности «Математическая логика, алгебра и теория чисел».

С 2000 по 2004 год являлся заведующим кафедрой алгебры и геометрии.

Список его научных трудов насчитывает более 200 работ.

В XX веке математическая наука вынуждена была признать, что не на все возникающие вопросы она может дать ответ. В свете появившихся примеров алгоритмической неразрешимости случаи положительного решения тех или иных проблем имеют особую ценность.

К основным научным результатам Владимира Николаевича можно отнести следующие:

I. Исследования проблемы вхождения в свободных конструкциях.

1. Решение проблемы вхождения в свободном произведении двух свободных групп с объединением по циклической подгруппе.

2. Неразрешимость проблемы вхождения в свободном произведении двух свободных групп с объединением по конечнопорожденным подгруппам.

3. Решение проблемы вхождения в свободном произведении двух свободных групп с объединением по конечнопорожденным подгруппам при условии, что объединяемая подгруппа обладает условием максимальности.

4. Решение проблемы вхождения в HNN – расширениях при условии, что ассоциированная подгруппа обладает условием максимальности.

5. Решение проблемы вхождения для древесного произведения групп с объединением по конечнопорожденным подгруппам при условии, что объединяемая подгруппа обладает условием максимальности.

II. Проблема сопряженности подгрупп.

1. Решение проблемы сопряженности подгрупп для свободного произведения двух свободных групп с объединением по циклической подгруппе.

2. Неразрешимость проблемы сопряженности подгрупп для свободного произведения двух свободных групп с объединением по конечнопорожденным подгруппам.

3. Решение проблемы сопряженности подгрупп для свободного произведения двух свободных групп с объединением по конечным подгруппам.

4. Решение проблемы сопряженности подгрупп в HNN – расширениях с ассоциированной циклической подгруппой.

5. Решение проблемы сопряженности подгрупп для древесного произведения бесконечных циклических групп с циклическим объединением.

III. Проблема сопряженности в свободных конструкциях.

1. Решение проблемы сопряженности для древесного произведения свободных групп с объединением по циклической подгруппе.

2. Решение обобщенной проблемы сопряженности слов в свободном произведении двух свободных групп с объединением по циклической подгруппе.

IV. Группы с одним определяющим соотношением.

1. Решена проблема сопряженности и степенной сопряженности слов в свободном произведении групп с одним определяющим соотношением с кручением с объединением по циклической подгруппе.

2. Решена проблема вхождения в группе Гуревича и в ее HNN – расширениях с ассоциированной циклической подгруппой.

3. Решена проблема сопряженности слов в HNN – расширениях группы Гуревича с ассоциированной циклической подгруппой.

4. Доказана гиперболичность группы Гуревича.

5. Дано обобщение теоремы Бахерзаде для групп с одним определяющим соотношением.

V. Группы Артина конечного типа.

1. Решена проблема вхождения в циклическую подгруппу.

2. Доказана теорема об отсутствии кручения.

3. Указан алгоритм построения нормализатора элементов.

4. Указан алгоритм построения централизатора конечнопорожденной подгруппы.

5. Решена проблема обобщенной сопряженности слов в крашенных подгруппах.

6. Решение проблемы равенства слов в свободном произведении двух групп Артина конечного типа с объединением по циклической подгруппе.

7. Решена проблема обобщенной сопряженности слов.

8. Доказана неразрешимость проблемы сопряженности подгрупп – контрпример – группа кос с четырьмя образующими.

Для групп Артина конечного типа решена проблема вхождения в циклическую подгруппу, проблема обобщенной сопряженности слов, проблема равенства слов в свободном произведении двух групп Артина конечного типа с объединением по циклической подгруппе. Доказана неразрешимость проблемы сопряженности подгрупп. Указан алгоритм построения нормализатора элементов, указан алгоритм построения централизатора конечнопорожденной подгруппы.

VI. Группы Кокстера.

1. Решена проблема сопряженности подгрупп в группах Кокстера с древесной структурой.

2. Решена проблема обобщенной сопряженности слов в группах Кокстера большого типа и указан алгоритм построения централизатора конечнопорожденной подгруппы.

3. Решена проблема Мальцева о пересечении конечнопорожденных подгрупп в группах Кокстера с древесной структурой.

VII. Группы Артина.

1. Решена проблема равенства и сопряженности слов в группах Артина большого типа.

2. Решена проблема обобщенной сопряженности подгрупп в группах Артина большого типа, указан алгоритм построения централизатора конечнопорожденной подгруппы.

3. Решена проблема степенной сопряженности слов и в группах Артина экстрабольшого типа.

4. Решена проблема обобщенной сопряженности слов и указан алгоритм построения централизатора конечнопорожденной подгруппы.

5. Решена проблема равенства и сопряженности слов в группах Артина с древесной структурой.

6. Решена проблема сопряженности и обобщенной сопряженности слов в крашенных подгруппах группах Артина с древесной структурой.

7. Доказана теорема о коммутировании элементов в древесном произведении групп Артина.

8. Решена проблема равенства и сопряженности слов в группах Артина с n-угольной структурой при n>3.

9. Решена проблема сопряженности подгрупп в свободном произведении двух двупорожденных групп Артина с циклическим объединением.

10. Доказана когерентность групп Артина с древесной структурой.

11. Доказана когерентность свободного произведения групп с условием когерентности, объединённым по подгруппе с условием максимальности.

12. Доказана когерентность HNN – расширений групп с условием когерентности, объединённым по подгруппе с условием максимальности.

VIII. Изоляторы и пересечения подгрупп.

1. Обобщение теоремы Ньюмана о пересечении подгрупп в свободном произведении групп.

2. Алгоритмическое решение проблемы Хаусона для свободной группы. (применен метод типов).

3. Решена проблема Хаусона для HNN-расширений с помощью конечных групп и указан алгоритм построения.

4. Доказана конечнопорожденность изолятора конечнопорожденной подгруппы свободного произведения с объединением по изолированной подгруппе.

5. Доказана конечнопорожденность изолятора конечнопорожденной подгруппы HNN-расширений с помощью изолированной подгруппы с условием максимальности.

6. Получено необходимое и достаточное условие конечнопорожденности ?−изолятора свободной группы.

IX. Группы с малым сокращением. $C\,(p)\,\&T(q)$

1. Доказана теорема о существовании для слова равного единице в этой группе, специального сокращения.

2. Доказана конечнопорожденность нормализатора произвольного элемента.

3. Решена проблема обобщенной сопряженности слов.

4. Доказана конечнопорожденность централизатора конечнопорожденной подгруппы.

5. Решена проблема степенной сопряженности слов и степени.

6. Решена проблема вхождения в циклическую подгруппу.

7. Для отображения, переводящего образующие одной группы в образующие другой получено необходимое и достаточное условие изоморфизма этих групп.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. А. Е. Устян, И. В. Добрынина, Ю. Э. Трубицын, А. С. Угаров, Н. М. Добровольский, И. Ю. Реброва, “80-летие профессора Безверхнего Владимира Николаевича”, Чебышевский сб., 21:3 (2020), 317–335

———————————————————————

УДК 511.32

О развитии механики реактивного движения тел переменного состава в середине XX столетия

В. Н. Чиненова (Россия, г. Москва)
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
e-mail: v.chinenova@yandex.ru

On the development of the mechanics of jet propulsion of bodies of variable composition in the middle of the XX century

V. N. Chinenova (Russia, Moscow)
Lomonosov Moscow State University
e-mail: v.chinenova@yandex.ru

Теория реактивного движения тел переменного состава приобрела в середине 20-го века известную самостоятельность и имела обширную литературу, как общетеоретического, так и конкретного прикладного характера. Однако разрозненные работы этого направления нельзя еще было назвать единым разделом механики. В статье рассматривается кандидатская диссертация И.А.Тюлиной «Развитие механики реактивного движения тел переменного состава» (1951). В этой работе проведен исторический и методологический анализ развития основных понятий, основных законов и соответствующих им основных форм дифференциальных уравнений реактивного движения тел переменного состава.

В диссертации Тюлиной дан исторический обзор соответствующей литературы с широким охватом и анализом отдельных разрозненных теорий данной области, выросших под влиянием потребностей практики в различное время, а именно:

1) теории поступательного движения гидрореактивного судна,
2) теории вращательного движения гидрореактивных турбин,
3) теории отдачи артиллерийского орудия,
4) теории движения ракеты, получившей практическое значение только в XX веке,
5) теории движения небесных тел переменной массы и т.д.

В развитии каждой из этих дисциплин сыграли важнейшую роль труды членов Петербургской Академии наук (Д.Бернулли, Эйлер) и представителей передовой русской школы механики (Константинов, Шифф, Циолковский, Мещерский и др.).

Конкретное содержание работы можно описать так.

В первой главе излагаются общие характеристики *основных научных абстракций*, используемых для отражения свойств движущегося материального тела, и основных *научных гипотез* относительно причин, вызывающих изменение состояния движения материальных тел. При этом выясняется, что в рассматриваемом разделе механики изучаются тела, характеризующиеся *непостоянством своего* состава. Такие материальные тела можно разбить на два класса:

1) масса которых остается постоянной, несмотря на переменный состав (например, реактивная турбина или прямоточный реактивный двигатель);

2) масса которых меняется в связи с переменностью состава (например, ракета).

Понятие тела переменного состава шире, чем понятие тела переменной массы, так как тело переменной массы обязательно является и телом переменного состава ввиду текучести материальных частиц, составляющих тело.

В этой же главе дается обзор основных принципов механики, использованных различными исследователями в механике реактивного движения тел переменного состава.

На основе материалов первой главы оказывается возможным достигнуть достаточной ясности в определении самого предмета механики реактивного движения тел переменного состава и ее специфических отличий от обычной теоретической механики, понимаемой как теория простейших видов движения материальных тел неизменного состава. В параграфе три этой главы, посвященном характеристике причин, вызывающих изменения состояния движения тел переменного состава, дается определение реактивного движения и механики реактивного движения тел переменного состава.

Во второй главе рассматривается *развитие теории поступательного движения гидрореактивного судна.* Эта теория возникла в эпоху расцвета мореплавания и кораблестроения XVIII века (период колониальных захватов развивающегося европейского капитализма). В то время техника судостроения нуждалась в изобретении нового, более эффективного способа передвижения кораблей без помощи ветра и весел.

В середине XVIII века в некоторых европейских академиях наук объявлялись конкурсы или ставились научные проблемы о новом способе передвижения судов.

Впервые теорию гидрореактивного корабля разработал Д. Бернулли во время его пребывания и активной научной деятельности в Петербургской Академии наук. Несколько позже этой проблемой занимался другой замечательный ученый XVIII века, также действительный член Петербургской Академии наук, Леонард Эйлер.

В последующем внимание инженеров и теоретиков снова было привлечено к проблеме создания *реактивного*, уже *парового, двигателя для судов.* В результате по теории действия такого двигателя возникла довольно обширная литература, которая и анализируется в работе И. А. Тюлиной. Так, например, излагаются и сравниваются результаты исследований по теории гидрореактивного судна Цейнера, Буслея, Погодина, Жуковского, Мещерского и др.

В третьей главе описывается *развитие теории вращательного движения гидрореактивной турбины.* Эта теория возникла также на базе практических запросов развивающейся капиталистической промышленности XVIII века. В ту эпоху водяные колеса, служившие основным двигателем мануфактурной и средневековой промышленности, потребовали существенного усовершенствования, что привело к созданию гидрореактивной турбины. Этот новый тип гидравлического двигателя сохранил и в дальнейшем свое значение: в век пара и в век электричества. Разработкой теории реактивных турбин занимались многие инженеры и теоретики XVIII века, как, например, Эйлер, Я. Бернулли. В дальнейшем большой вклад в развитие этой теории внесли труды Понселе, Вейсбаха, Пражиля, Стодола, Проскура, Кочина и др.

В четвертой главе речь идет о *развитии теории отдачи артиллерийского орудия*. В некоторых специальных дисциплинах из области артиллерийских наук с той или иной целью исследовалось явление отдачи или отката орудия. Так, например, *теория лафетов*, возникшая в конце XVIII века, интересовалась отдачей в связи с расчетом на прочность откатывающейся после выстрела системы и ее частей. Под влиянием тех или иных запросов артиллерийской инженерной практики строились теории движения орудия, снаряда и пороховых газов в канале ствола орудия.

В отличие от первых двух специальных дисциплин, изучавших установившиеся или равномерные движения (движение реактивного судна и движение реактивной турбины), теория отдачи артиллерийского орудия изучает неустановившееся движение откатывающегося орудия с лафетом под действием *силы реакции пороховых газов*, истекающих с большой скоростью из дула орудия.

В пятой главе рассматривается *развитие теории движения пороховых и жидкостных неуправляемых ракет*. Здесь анализируются и сравниваются основополагающие труды двух замечательных русских ученых конца XIX - начала XX в.в. К.Э. Циолковского, И.В. Мещерского по теории движения ракеты. Кроме того, в этой главе дается анализ основных теоретических положений некоторых трудов зарубежных авторов по теории движения ракет, а также трудов современных советских исследователей в данной области.

В шестой главе описывается развитие теории движения небесных тел переменной массы, являющейся важной частью общей теории реактивного движения тел переменного состава. Так, И.В. Мещерский исследовал движение небесных тел, масса которых меняется из-за падения метеоритов на их поверхность. Фактор переменной массы – одна из причин векового ускорения в движении Луны и других планет.

Основной задачей седьмой главы является *описание и анализ развития общей отвлеченной теории реактивного движения тел переменного состава*.

Первым опытом создания общей теории движения тел переменного состава явились труды И.В. Мещерского 1897-1904 годов [6]. В этой общей теории им впервые введена абстрактная модель твердого тела переменной массы, впервые выведены дифференциальные уравнения движения таких тел и проведен подробнейший анализ основных частных случаев такого движения.

Главную роль среди конкретных предпосылок теории И.В. Мещерского играли задачи небесной механики и космогонии в совокупности с такими задачами техники, где речь шла об отделении или о присоедини твердых частиц или твердых тел к движущемуся твердому телу, причем присоединение это можно было рассматривать как совершенно неупругий удар.

На протяжении более тридцати лет теория Мещерского оставалась единственным опытом создания общей теории движения тел переменной массы.

Зарубежные ученые в течение всего этого времени игнорировали теорию Мещерского и его труды. Следствием этого явилось отставание зарубежной науки в данной области. Предложенная итальянским ученым Леви-Чивита в 30-х годах теория движения тел переменной массы при ближайшем рассмотрении оказалась лишь частной разновидностью общей теории Мещерского. Труды последующих зарубежных ученых в той же области не дали существенного продвижения вперед.

Настоящая разработка научного наследства И.В. Мещерского и К. Э. Циолковского была начата лишь советскими учеными, давшими ряд фундаментальных трудов в области общей теории реактивного движения тел переменной массы.

Все эти аспекты детально освещены И. А. Тюлиной в этой главе.

Вопросы, рассмотренные в кандидатской диссертации, И.А. Тюлина продолжала активно разрабатывать и в своих последующих работах [2-5].

За два столетия динамика реактивного движения сложилась с специальную отрасль механики. Зародившись под влиянием запросов техники и естествознания, это учение сначала состояло из разрозненных частей, изучающих движение водометного судна, водяной турбины, отдачу орудия, динамику ракеты, отдельные задачи небесной и земной механики.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Тюлина И. А. Развитие механики реактивного движения тел переменного состава. Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук. Москва. 1951.

2. Тюлина И. А. О работах Л. Эйлера по теории гидрореактивного судна и водяной турбины. – Вопр. Истории естествознания и техники. М.: Изд-во АН СССР. 1957. Вып. 4. С.34-46.

3. Тюлина И. А. Механика тел переменной массы. - В кн.: История механики. С конца XVIII века до середины XX века. М.: Наука. 1972. С 226- 244.

4. Тюлина И. А. Два подхода к построению модели тела переменной массы. - Исследования по истории механики. М.: Наука. 1981. С. 233 -257.

5. Тюлина И. А. О гидравлических исследованиях Эйлера.- Исследования по истории механики. М.: Наука. 1983. С. 167-177.

6. Мещерский И. В. Работы по механике тел переменной массы. М.-Л.: Гостехиздат. 1949. С.96.

Секция 10. Арифметическая и алгебраическая геометрии

УДК 511.32

О плоских вещественных кривых степени 7, распадающихся на пару коник и кубику

В. А. Горская (Россия, г. Нижний Новгород)
Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»
e-mail: victoriya.gorskaya@mail.ru

On plane real curves of degree 7 decomposing into a pair of conics and a cubic

V. A. Gorskaya (Russia, Nizhni Novgorod)
National Research University Higher School of Economics
e-mail: victoriya.gorskaya@mail.ru

Через C_n будем обозначать *плоскую вещественную проективную кривую степени* n, т. е. однородный многочлен степени n над $\mathbb{R}$ от однородных координат $(x_0 : x_1 : x_2)$ в вещественной проективной плоскости $\mathbb{R}P^2$, рассматриваемый с точностью до ненулевого постоянного множителя, а через $\mathbb{R}C_n$=$\{(x_0 : x_1 : x_2) \in \mathbb{R}P^2 \mid C_n(x_0, x_1, x_2) = 0\}$ – *множество вещественных точек кривой* C_n. Для краткости при $n = 2$ (при $n = 3$) кривая и множество её вещественных точек ниже называются *коникой* (соответственно, *кубикой*).

Вопрос о топологии множества $\mathbb{R}C_6$ в случае *неособой*[1] кривой, включённый Д. Гильбертом в первую часть его 16-й проблемы, был решён в 1969 г. Д.А. Гудковым [1]. Там же Гудков поставил задачу о топологии множества $\mathbb{R}C_6$ для случая, когда кривая C_6 распадается в произведение двух M-кривых[2]. Эта задача была решена Г.М. Полотовским в [2], а затем и для случая, когда сомножителей больше двух – в [3].

В настоящем докладе излагаются новые результаты о топологии кривых степени 7, распадающихся на три неособых сомножителя.

Цель работы – найти изотопическую классификацию множеств $\mathbb{R}C_3 \cup \mathbb{R}C_2 \cup \mathbb{R}\widetilde{C}_2$ в $\mathbb{R}P^2$. Без наложения дополнительных условий эта задача труднообозрима, поэтому всюду предполагаются выполненными условия максимальности и общего положения:

(i) C_2, $\widetilde{C}_2$ и C_3 являются M-кривыми, т. е. вещественная схема каждой из кривых C_2 и $\widetilde{C}_2$ представляет собой один овал, а вещественная схема кривой C_3 состоит из овала и нечётной ветви.

(ii) кривые-сомножители пересекаются только попарно и транверсально в максимально возможном по теореме Безу числе точек, т.е.

$$\#(\mathbb{R}C_3 \cap \mathbb{R}C_2) = \#(\mathbb{R}C_3 \cap \mathbb{R}\widetilde{C}_2) = 6, \#(\mathbb{R}C_2 \cap \mathbb{R}\widetilde{C}_2) = 4,$$

и все точки пересечения кубики с кониками расположены на нечётной ветви кубики.

Но и при этом задача остаётся слишком объёмной, поэтому рассматриваемые случаи делятся на серии, выделяемые условиями комбинаторного характера. Для того, чтобы описать

[1]Кривая C_n называется *неособой*, если первые частные производные многочлена $C_n(x_0, x_1, x_2)$ по переменным x_0, x_1, x_2 не обращаются одновременно в нуль (в $\mathbb{C}P^2$).

[2]Кривая C_n называется M-кривой, если $\mathbb{R}C_n$ имеет максимально возможное для данной степени n число компонент связности, согласно теореме Харнака равное $\frac{(n-1)(n-2)}{2} + 1$.

рассматриваемую сейчас серию, напомним известные ограничения на взаимные расположения пары коник и на взаимные расположения кубики и коники.

Существуют ровно два топологически различных расположения в $\mathbb{R}P^2$ двух неособых коник с четырьмя общими точками, которые показаны на рис.1[3]. Каждая коника делится точками пересечения со второй коникой на четыре дуги; те дуги, которые лежат вне второй коники, будем называть *внешними*, две другие – *внутренними*.

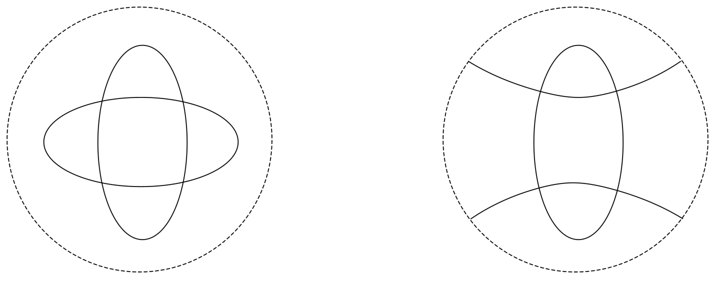


Рис. 1

Ограничения на взаимные расположения M-кубики и неособой коники состоят в том, что существуют ровно три расположения в $\mathbb{R}P^2$, в которых нечётная ветвь кубики пересекает конику в шести вещественных точках (рис.2).

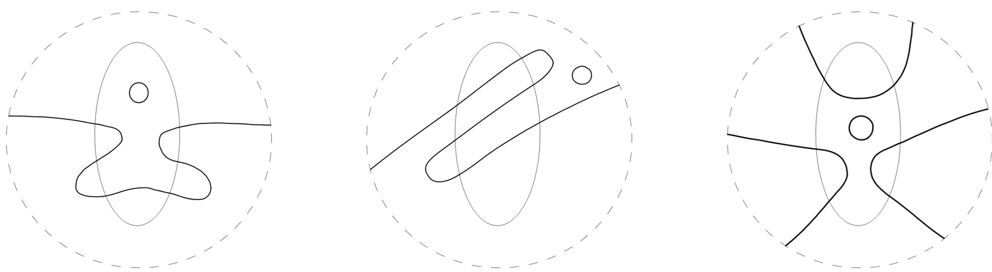


Рис. 2

В дополнение к условиям (i), (ii) предполагаются выполненными условия:

(iii) коники расположены так, как на рис.1.б)[4].

(iv) рассматриваются только расположения рис.2.а) и рис.2б).

(v) все шесть общих точек нечётной ветви кубики с одной из коник C_2 и $\widetilde{C}_2$ лежат на одной из четырёх дуг, на которые эта коника делится точками пересечения со второй коникой, причём эта дуга внешняя; для другой коники шесть общих точек с нечётной ветвью кубики лежат на её двух внешних дугах.

Схема исследования в данной работе следующая: сначала перечисляются топологические модели кривых данной серии, удовлетворяющие наложенным ограничениям, топологическим следствиям теоремы Безу и следствиям известных результатов о топологии неособых алгебраических кривых. Затем для каждой модели из полученного списка пытаемся доказать её нереализуемость алгебраической кривой рассматриваемого класса с помощью метода Оревкова, основанного на теории кос и зацеплений [7].

Теорема 1. *Существуют* 438 *попарно различных расположений кривых вида* $\mathbb{R}C_3 \cup \mathbb{R}C_2 \cup \mathbb{R}\widetilde{C}_2$*, удовлетворяющих условиям* (i) – (v). *Их них* 387 *расположений не может быть реали-*

[3]Здесь и ниже на рисунках в качестве модели вещественной проективной плоскости используется круг, диаметрально противоположные точки граничной окружности которого, изображаемой пунктиром, считаются отождествлёнными.

[4]Расположение коник как на рис.1.а) было рассмотрено в [4] – [6]

зовано кривыми степени 7. Вопрос о реализуемость оставшихся расположений, показанных на рис.3, остается открытым.

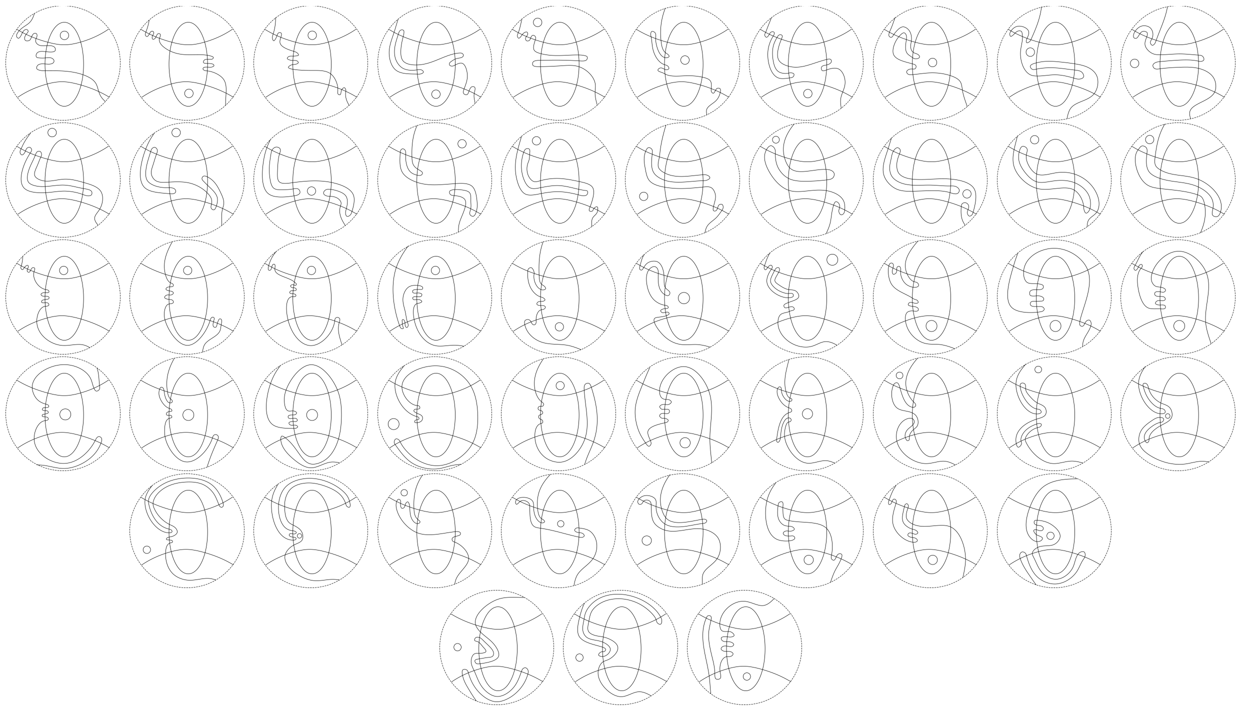


Рис. 3

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гудков Д.А., Уткин Г.А. Топология кривых 6-го порядка и поверхностей 4-го порядка (к 16-й проблеме Гильберта) // Уч. зап. Горьков. ун-та. 1969. Вып. 87. С. 1–214.

2. Полотовский Г.М. Каталог M-распадающихся кривых 6-го порядка // Докл. АН СССР. 1977. Т. 236. № 3. С. 548–551.

3. Kuzmenko T.V., Polotovskiy G.M. Classification of curves of degree 6 decomposing into a product of M-curves in general position // AMS Translations Ser. 2. 1996. Vol.173. P.165-177.

4. Горская В.А., Полотовский Г.М. О расположениях кубики и пары коник в вещественной проективной плоскости // Журнал Средневолжского математического общества. 2020. Т. 22. № 1. С. 24–37.

5. Горская В.А. О расположениях кубики и пары коник в вещественной проективной плоскости.II // Чебышевский сборник. 2022. Т. 23. №3. С. 61-76.

6. Горская В.А. О кривых степени 7, распадающихся на пару коник и кубику // Алгебра и анализ. (2023, в печати)

7. Orevkov S.Yu. Link theory and oval arrangements of real algebraic curve // Topology. 1999. Vol. 38. P. 779–810.

———————————————————————————

УДК 511.6+511.2

Новые результаты по проблеме периодичности непрерывных дробей элементов гиперэллиптических полей[1]

В. П. Платонов (Россия, г. Москва)
Научно-исследовательский институт системных исследований Российской академии наук; Математический институт им. В. А. Стеклова Российской академии наук
e-mail: platonov@mi-ras.ru
М. М. Петрунин (Россия, г. Москва)
Научно-исследовательский институт системных исследований Российской академии наук
e-mail: petrushkin@yandex.ru

New Results on the Periodicity Problem for Continued Fractions of Elements of Hyperelliptic Fields

V. P. Platonov (Russia, Moscow)
Scientific Research Institute for System Analysis of Russian Academy of Sciences; Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences
e-mail: platonov@niisi.ras.ru
M. M. Petrunin (Russia, Moscow)
Scientific Research Institute for System Analysis of Russian Academy of Sciences
e-mail: petrushkin@yandex.ru

Пусть поле k характеристики 0, и $f(x) \in k[x]$ — многочлен свободный от квадратов степени $2g+1$, $g \geqslant 1$. И пусть существует два неэквивалентных линейных нормирования: ν_x^+ и ν_x^- гиперэллиптического поля $L = k(x)(\sqrt{f(x)})$, индуцированных многочленом x. Зафиксируем вложение поля L в поле формальных степенных рядов $k((x))$, связанное с ν_x^+. Тогда элемент $\sqrt{f}$ можно разложить в непрерывную дробь. В отличие от классического случая вложения поля L в поле $k((1/x))$ (см. [2, 3, 4, 5]), периодичность разложения $\sqrt{f}$ в непрерывную дробь в $k((x))$ — редкое явление. Необходимым условием для существования периодических элементов в поле L является периодичность элементов $\sqrt{f}/x^g$, $\sqrt{f}/x^{g+1}$. Это условие эквивалентно условию существования нетривиальных S-единиц в поле L для множества нормирований S, состоящего из бесконечного нормирования и нормирования ν_x^+. Что, в свою очередь, эквивалентно тому, что класс, построенный по точке $(0, \sqrt{f(0)})$ гиперэллиптической кривой $y^2 = f(x)$, является классом кручения (см. [4]).

В работе [6] были найдены все многочлены f степени 3 с рациональными коэффициентами с периодическим разложением $\sqrt{f}$ в непрерывную дробь в $\mathbb{Q}((x))$. В работе [7] было дано описание многочленов f степени 4 над $\mathbb{Q}$ с периодическим разложением $\sqrt{f}$, что завершило описание периодических $\sqrt{f}$ в эллиптическом случае над полем рациональных чисел. В работах [8, 9] эти исследования были обобщены на числовые поля констант, и для кубических многочленов f была полностью решена проблема периодичности $\sqrt{f}$ для квадратичных и числовых полей степени 3 над $\mathbb{Q}$, а также была доказана теорема конечности для расширений $\mathbb{Q}$ степени $\leqslant 6$.

Отметим, что аргументы и подходы работ [6, 7, 8, 9] существенно опирались на параметризацию пар: эллиптическая кривая и точка с заданным порядком кручения (см. [10, 11]). В

[1]Работа выполнена в рамках государственного задания по проведению фундаментальных научных исследований по проекту № FNEF-2022-0011.

случае многочленов f степени 5 и выше подобные параметризации неизвестны, и описание периодических $\sqrt{f}$ требует иных подходов. Так в работе [12] был предложен новый эффективный метод для решения норменного уравнения, основанный на применении базисов Гребнера. С его помощью над произвольным полем k была показана конечность множества многочленов f нечетной степени отличной от 11 таких, что элемент $\sqrt{f}$ периодичен, а гиперэллиптическое поле L содержит S-единицу степени 11. Указанный подход получил свое развитие в работе [13], где с помощью последовательных вычислений результантов и без использования параметризаций удалось получить альтернативное доказательство теоремы об описании кубических многочленов f над $\mathbb{Q}$ с периодическим разложением $\sqrt{f}$ в непрерывную дробь. В дальнейшем подход работы [12] позволил доказать, что если ограничить константой 11 степень соответствующей фундаментальной S-единицы, то для почти всех d не существует многочлена f нечетной степени d над произвольным числовым полем k с периодическим разложением $\sqrt{f}$ в непрерывную дробь в $k((x))$. Это было сделано в работе [14], где были явно приведены все многочлены f с периодическим $\sqrt{f}$ с указанным ограничением на степень соответствующей S-единицы.

В работе показано, что в случае четной степени U фундаментальной S-единицы при росте степени многочлена f ситуация существенно меняется. В настоящей работе получено описание всех многочленов f произвольной нечетной степени d с периодическим $\sqrt{f}$ при условии $U \leqslant 20$ с произвольным полем констант $k \subseteq \overline{\mathbb{Q}}$, и доказано, что с точностью до эквивалентности число многочленов с такими свойствами не превосходит двух для каждой пары d, U. Отметим, что сложность символьных вычислений не позволила построить пример пары d, U с числом многочленов более двух. Однако из доказательств теорем настоящей работы следует, что для пары d, $U = 2m$ условие периодичности $\sqrt{f}$ может быть переформулировано в виде $(d-1)/2$ систем алгебраических уравнений. Число уравнений в каждой из систем совпадает с числом переменных, и ожидаемая размерность множества решений равна 0 для достаточно больших m. Полное изложение результатов настоящей работы приводится в [1].

1. Основные результаты

Пусть нормирование ν_x поля $k(x)$ имеет два продолжения ν_x^+ и ν_x^- на поле $L = k(x)(\sqrt{f})$. Зафиксируем $\deg f = 2g+1$ для $g \geqslant 1$, $g \in \mathbb{N}$, и сохранив обозначение ν_∞ для единственного продолжения бесконечного нормирования на поле L, положим $S = \{\nu_x^+, \nu_\infty\}$. Группа S-целых элементов поля L называется группой S-единиц. Если существует хотя бы одна нетривиальная S-единица (то есть отличная от константы поля k), то в описанном нами случае группа S-единиц является прямым произведением $k^\times$ и бесконечной циклической группы. Образующие этой циклической группы называются фундаментальными S-единицами. Для S-единицы $\alpha + \beta\sqrt{f}$, $\alpha, \beta \in k(x)$, выполнено $\alpha^2 - \beta^2 f = bx^m$, $b \in k \setminus \{0\}$, для некоторого целого m, называемого степенью S-единицы. Для фундаментальной S-единицы с положительной степенью m существует k-точка кручения порядка m в якобиане соответствующей гиперэллиптической кривой.

Будем говорить, что элементы поля L разлагаются в формальные степенные ряды $\sum_{j\geq s} \gamma_j x^j$, где $\gamma_j \in k$, если существует вложение L в поле формальных степенных рядов $k((x))$. Подробные сведения о разложении в ряд Лорана, функциональных непрерывных дробях и их связи с S-единицами содержатся в работе [4].

Под периодичностью разложения в непрерывную дробь мы понимаем периодичность последовательности полных частных. Периодичность разложения $\sqrt{f(x)}$ в непрерывную дробь равносильна периодичности $\sqrt{f^\sigma(x)}$, где $\sigma \in \mathrm{Aut}(\mathrm{k}/\mathbb{Q})$ — автоморфизм поля k постоянный на $\mathbb{Q}$, а также периодичности $\sqrt{a^2 f(bx)}$ для некоторых $a, b \in k \setminus \{0\}$. Поэтому мы будем рассматривать многочлены с точностью до эквивалентности, определяемой преобразованиями, указанными выше. Отношение эквивалентности зависит от поля k, и в зависимости от контекста мы будем рассматривать отношение эквивалентности или над алгебраическим замыканием поля рациональных чисел $\overline{\mathbb{Q}}$ или над полем определения многочлена f. Мы будем называть полем определения многочлена f минимальное подполе $k \subseteq \overline{\mathbb{Q}}$, содержащее все его коэффициенты.

Следующая теорема дает описание многочленов с периодическим разложением квадратного корня в непрерывную дробь при единственном условии на ограничение степени фундаментальной S-единицы соответствующего гиперэллиптического поля.

Теорема 1. *С точностью до эквивалентности существует не более одного бесквадратного многочлена $f_{d,U} \in \overline{\mathbb{Q}}[x]$, $\deg f_{d,U} = d > 1$, для которого выполнены следующие условия:*

(i) гиперэллиптическое поле $\overline{\mathbb{Q}}(x)(\sqrt{f_{d,U}})$ содержит фундаментальную S-единицу степени U для $S = \{\nu_\infty, \nu_x^+\}$;

(ii) разложение в непрерывную дробь в $\overline{\mathbb{Q}}((x))$ элемента $\sqrt{f_{d,U}}$ периодично;

где d — нечётное число, и $d < U \leqslant 12$.

Все такие многочлены $f_{d,U}$, удовлетворяющие условиям (i) *и* (ii)*, описаны ниже и соответствуют парам d, U из таблицы 1.*

Замечание 1. *В случае $d = U$ для любого $U \geqslant 3$ существует единственный с точностью до эквивалентности над $\overline{\mathbb{Q}}$ многочлен $x^U + 1$, который удовлетворяет условиям* (i) *и* (ii) *теоремы 1. Если фиксируется поле $k \subset \overline{\mathbb{Q}}$, над котором определено отношение эквивалентности, то в случае $d = U$ возникает семейство $f = cx^U + 1, c \in k \setminus \{0\}$. Таких многочленов f нечетной степени $d > U$ не существует.*

Теорема 1 в такой формулировке приводится впервые, но её доказательство фактически вытекает из рассуждений работ [6, 9, 14, 15]. Основным результатом настоящей работы является следующая теорема, в которой показано, что указанное в теореме 1 ограничение на степень фундаментальной S-единицы можно увеличить до 20.

Теорема 2. *Для любой пары, состоящей из нечётного d и чётного U таких, что $d < U \leqslant 20$, с точностью до эквивалентности существует не более двух бесквадратных многочленов $f_{d,U} \in \overline{\mathbb{Q}}[x]$, $\deg f_{d,U} = d$, для которых выполнены условия* (i) *и* (ii) *теоремы 1.*

Все такие многочлены $f_{d,U}$ описаны ниже и соответствуют строкам таблицы 3.

В таблице 1 для всех многочленов $f_{d,U}$, удовлетворяющих условиям теоремы 1, приведены $d = \deg f_{d,U}$; U — степень фундаментальной S-единицы поля $L = k(x)(\sqrt{f_{d,U}})$; неприводимый над $\mathbb{Q}$ многочлен $F_{d,U}(t) \in \mathbb{Q}[t]$, задающий $k = \mathbb{Q}[t]/F_{d,U}(t)$ — поле определения многочлена $f_{d,U}$.

Строки таблицы 3 соответствуют всем многочленам, удовлетворяющим условиям теоремы 2. Многочлены, отвечающие паре d, U, индексируются $\deg d_1$, где d_1 определяется из норменного уравнения. В таблице для многочлена $f_{d,U,\deg d_1}$ с периодическим разложением $\sqrt{f_{d,U,\deg d_1}}$, приведены его степень $d = f_{d,U,\deg d_1}$; U — степень фундаментальной S-единицы поля $L = k(x)(\sqrt{f_{d,U,\deg d_1}})$; и неприводимый над $\mathbb{Q}$ многочлен $F_{d,U,\deg d_1}(t) \in \mathbb{Q}[t]$, задающий $k = \mathbb{Q}[t]/(F_{d,U,\deg d_1}(t))$ — поле определения многочлена $f_{d,U,\deg d_1}$. В случае, когда для пары d, U такой многочлен единственен, индекс $\deg d_1$ опускается.

Каждому многочлену $f_{d,U,\deg d_1}$, удовлетворяющему условиям теоремы 2, соответствует строка в таблице 3. Приведем многочлены $f_{d,U,\deg d_1}$ в явном виде. Как и прежде, в случае,

Таблица 1: Таблица пар d, U и многочленов $F_{d,U}$, задающих поля определения многочленов $f_{d,U}$, которые удовлетворяют условиям теоремы 1

d	U	многочлен $F_{d,U}$
3	5	t
3	7	t^2-21
3	8	t
3	9	$t^3-t^2+\frac{1}{2}t-\frac{1}{12}$
3	10	t
3	11	$t^5-t^4-4t^3+3t^2-\frac{35}{3}t+21$
3	12	t^3-2
5	7	t
5	9	$t^3-27t-51$
5	11	$t^7-t^6-53t^5-133t^4+195t^3+1000t^2+1165t+955$
5	12	t
7	9	t
7	11	$t^4-2t^3-81t^2-303t-321$
9	11	t

если для пары d, U существует единственный такой многочлен, то индекс $\deg d_1$ опускается.

$$\begin{aligned}f_{5,14} = & -2^4(z+1)\,x^5+\frac{28}{3}(z+1)\,x^4-\frac{4}{21}(z+55)\,x^3-\\ & -(\frac{59}{12}z-\frac{185}{21})\,x^2-\frac{10}{21}(z-5)\,x-\frac{25}{7}(z-3),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f_{5,16,1} = & \frac{1}{9}(919z^4+29z^3-9992z^2+10170z-71118)\,x^5-\\ & -\frac{7}{18}(148z^4-664z^3+907z^2-2832z-711)\,x^4+\\ & +\frac{1}{3}(29z^4+40z^3+347z^2+144z+1152)\,x^3-\\ & -\frac{1}{45}(22z^4-178z^3+421z^2-852z+1107)\,x^2+\\ & +\frac{2}{45}(2z^4+z^3+44z^2-12z+153)\,x+1,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f_{5,16,3} = & (89z-475)\,x^5-\frac{7}{3}(11z-51)\,x^4+4(6z-31)\,x^3+(6z-23)\,x^2+12\,x+36,\\ f_{5,18,4} = & \frac{4}{7}x^5+\frac{2}{3}x^4-\frac{50}{147}x^3+\frac{65}{196}x^2-\frac{25}{63}x+\frac{25}{9},\\ f_{7,16} = & 8x^7-9x^6+10x^5-11x^4+12x^3-13x^2+14x+49,\\ f_{7,18} = & \frac{2^8 9}{49}(613z^2+4684z+8809)\,x^7+\frac{6^4}{49}(51z^2+358z+599)\,x^6-\\ & -\frac{16}{49}(852z^2+6931z+13943)\,x^5-\frac{4}{49}(384z^2+2433z+3202)\,x^4+\\ & +2(12z+53)\,x^3+\frac{1}{28}(128z+535)\,x^2-x+1,\end{aligned}$$

Таблица 3: Таблица пар d, U и многочленов $F_{d,U,\deg d_1}$, задающих поля определения многочленов $f_{d,U,\deg d_1}$, которые удовлетворяют условиям теоремы 2

d, $\deg d_1$	U	многочлен $F_{d,U,\deg d_1}$
3	14	$t^3+t^2-2t-\frac{9}{2}$
3	16	$t^6+\frac{2}{7}t^5-\frac{9}{7}t^4-\frac{12}{7}t^3-\frac{15}{7}t^2-\frac{30}{7}t-\frac{15}{7}$
3	18	$t^6-\frac{39}{7}t^5+\frac{96}{7}t^4-\frac{136}{7}t^3+\frac{114}{7}t^2-\frac{15}{2}t+\frac{10}{7}$
3	20	$t^{10}-\frac{175}{18}t^9+\frac{395}{9}t^8-\frac{365}{3}t^7+\frac{2050}{9}t^6-\frac{2684}{9}t^5+275t^4-\frac{1585}{9}t^3+\frac{2030}{27}t^2-\frac{175}{9}t+\frac{7}{3}$
5	14	t^2-t-5
$5, \deg d_1=1$	16	$t^5-t^4+10t^3+6t^2+18t+54$
$5, \deg d_1=3$	16	t^2-30
$5, \deg d_1=2$	18	$t^{10}-5t^9-27t^8+135t^7+486t^6-2340t^5-4020t^4+23700t^3+4680t^2-113680t+119840$
$5, \deg d_1=4$	18	t
$5, \deg d_1=1$	20	$t^{15}-10t^{13}+45t^{11}-50t^{10}-10t^9+330t^8-950t^7+320t^6+2592t^5-4040t^4+80t^3+4800t^2-4480t+1344$
$5, \deg d_1=3$	20	$t^{10}-5t^9-10t^8+60t^7+125t^6-201t^5+290t^4+500t^3-410t^2-270t+172$
7	16	t
7	18	$t^3-45t-114$
$7, \deg d_1=1$	20	$t^7-2t^6+t^5-10t^4+35t^3-8t^2+31t-128$
$7, \deg d_1=3$	20	$t^5-90t^3-280t^2+885t+3312$
9	20	t

$$f_{9,20} = 10x^9-11x^8+12x^7-13x^6+14x^5-15x^4+16x^3-17x^2+18x+81.$$

Выше для каждого многочлена $f_{d,U,\deg d_1}$ элемент z является корнем соответствующего многочлена $F_{d,U,\deg d_1}$ из таблицы 3. Многочлены с индексом $d=3$ описаны в работе [15], а многочлены $f_{5,18,2}$, $f_{5,20,1}$, $f_{5,20,3}$, $f_{7,20,1}$, $f_{7,20,3}$ не приводятся в настоящей работе в виду громоздкости их коэффициентов.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Platonov V. P., Petrunin M. M. New results on the periodicity problem for continued fractions of elements of hyperelliptic fields // Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics. 2023. Vol. 320, P. 258–266.

2. Abel N.H. Ueber die integration der differential-formel $\rho dx/\sqrt{R}$ wenn r und ρ ganze functionen sind // *Journal für die reine und angewandte Mathematik.* 1826. Vol. 1, P. 185–221.

3. Tchebicheff P. Sur l'intégration des différentielles qui contiennent une racine carrée d'un polynome du troisieme ou du quatrieme degré' // *Journal des math. pures et appl.* 1857. Vol. 2, P. 168–192.

4. Платонов В.П. Теоретико-числовые свойства гиперэллиптических полей и проблема кручения в якобианах гиперэллиптических кривых над полем рациональных чисел // *Успехи математических наук.* 2014. Т. 69, №1(415), С.3–38.

5. Schmidt W.M. On continued fractions and diophantine approximation in power series fields // *Acta arithmetica.* 2000. Vol. 95, №2. P.139–166.

6. Платонов В.П., Федоров Г.В. О проблеме периодичности непрерывных дробей в гиперэллиптических полях // *Математический сборник.* 2018, Т.209, № 4. С.54–94.

7. Платонов В.П., Федоров Г.В. О проблеме классификации периодических непрерывных дробей в гиперэллиптических полях // *Успехи математических наук.* 2020. Т. 75, № 4(454), С.211–212.

8. Платонов В.П., Жгун В.С., Петрунин М.М. О проблеме периодичности разложений в непрерывную дробь $\sqrt{f}$ для кубических многочленов над числовыми полями // *Доклады РАН. Математика, информатика, процессы управления.* 2020. Т.493, № 1, С.32–37.

9. Платонов В.П., Петрунин М.М. О конечности числа периодических разложений в непрерывную дробь $\sqrt{f}$ для кубических многочленов над полями алгебраических чисел // *Доклады РАН. Математика, информатика, процессы управления.* 2020. Т.495, № 1, С.48–54.

10. Kubert D.S. Universal bounds on the torsion of elliptic curves // *Proc. London Math. Soc.* 1976. Vol. 33, № 2, P. 193–237.

11. Sutherland A. Constructing elliptic curves over finite fields with prescribed torsion // *Mathematics of Computation.* 2012. Vol. 81, № 278, P. 1131–1147.

12. Платонов В.П., Жгун В. С, Петрунин М.М., Штейников Ю.Н. О конечности гиперэллиптических полей со специальными свойствами и периодическим разложением $\sqrt{f}$ // *Доклады РАН.* 2018. Т.483, № 6, С. 609–613.

13. Платонов В.П., Петрунин М.М., Штейников Ю.Н. О конечности числа эллиптических полей с заданными степенями S-единиц и периодическим разложением $\sqrt{f}$ // *Доклады РАН.* 2019. Т. 488, № 3, С. 9–14.

14. Платонов В.П., Петрунин М.М., Штейников Ю.Н. О проблеме периодичности разложения в непрерывную дробь элементов гиперэллиптических полей со степенью S-единицы не выше 11 // Доклады Российской академии наук. Математика, информатика, процессы управления. 2021. Т. 500. С. 45–51.

15. Платонов В.П., Жгун В. С, Петрунин М.М. О проблеме периодичности разложений в непрерывную дробь $\sqrt{f}$ для кубических многочленов f над полями алгебраических чисел // Математический сборник. 2022, Т.213. № 3, 139–170

УДК 511.32

Об одном классе взаимных расположений двух кривых степени 4[1]

Н. Д. Пучкова (Россия, г. Нижний Новгород)
Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»
e-mail: nataha1910@mail.ru

[1]Работа выполнена при поддержке Лаборатории динамических систем и приложений НИУ ВШЭ, грант Министерства науки и высшего образования РФ соглашение № 075-15-2022-1101

On one class of mutual arrangements of two curves of degree 4[1]

N. D. Puchkova (Russia, Nizhny Novgorod)
National Research University Higher School of Economics
e-mail: nataha1910@mail.ru

Данная работа посвящена изучению взаимных расположений в вещественной проективной плоскости $\mathbb{R}P^2$ двух M-кривых степени 4, находящихся в общем положении, и является продолжением исследований [1], [2].

1. Постановка задачи. Задача топологической классификации неособых плоских вещественных алгебраических кривых сформулирована в первой части 16-й проблемы Гильберта [3]. На данный момент известна классификация неособых кривых до седьмой степени включительно.

В данной работе исследуется взаимное расположение в вещественной проективной плоскости двух кривых степени 4 при некоторых условиях максимальности и общего положения. Именно, предполагается, что:
1. Эти две кривые являются M-кривыми.
2. Все точки пересечения этих кривых лежат на одном овале одной кривой и на одном овале другой кривой.
3. Точек пересечения максимальное число, т. е. $4 \cdot 4 = 16$.
4. Точки пересечения попарно различны.

Введем тип пересечения ветвей, который назовём «змея, обвивающаяся вокруг овала».

Определение 1. Пусть овал O целиком лежит в аффинной плоскости[2]. Рассмотрим незамкнутую дугу без самопересечений, тоже целиком лежащую в аффинной плоскости и пересекающую овал O в восьми попарно различных точках Эту дугу будем называть *образующей дугой*. При достаточно малом ε граница ε-окрестности этой дуги представляет собой другой овал, который пересекает исходный овал O в 16 попарно различных точках. Этот второй овал будем называть *змеёй*, а такое взаимное расположение двух овалов будем называть пересечением ветвей типа *“змея, обвивающаяся вокруг овала”*.

Определение 2. Пусть в вещественной проективной плоскости $\mathbb{R}P^2$ имеем пересечение двух овалов типа “змея, обвивающаяся вокруг овала” такое, что один (*а, значит, и второй*) *конец образующей дуги лежит в овале* O. *Отвечающую такой дуге змею назовём “змеёй с концом внутри овала”.*

В данной работе будем исследовать “змеи с концом внутри овала”.

Поскольку моделей кривых, подлежащих исследованию, очень много, выделим подкласс, содержащий 700 попарно различных топологических моделей, удовлетворяющих известным фактам о топологии неособых кривых и топологическим следствиям теоремы Безу.

Цель нашего исследования – найти изотопическую классификацию проективных кривых степени 8, удовлетворяющих условиям 1–4, имеющих пересечение овалов имеет тип “змея с концом внутри овала” и принадлежащее выделенному подклассу.

2. Основной результат. Получена полная классификация кривых степени 8 рассматриваемого класса, которую описывает следующая

Теорема 1. *Существуют только 7 изотопических типов кривых степени 8 типа “змея с концом внутри овала”, принадлежащих выделенному подклассу, показанные на рис.* 1 – 7.

[1]The author is partially supported by Laboratory of Dynamical Systems and Applications NRU HSE, of the Ministry of science and higher education of the RF grant ag. No 075-15-2022-1101

[2]Для овала M-кривой степени 4 этого всегда можно добиться, выбрав в качестве бесконечно удаленной прямой аффинной плоскости слегка сдвинутую двойную касательную к этой кривой.

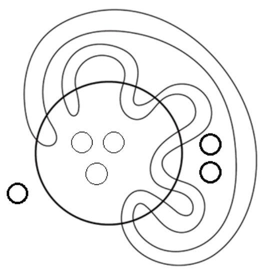


Рис. 1

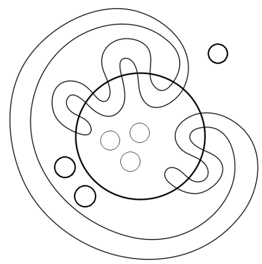


Рис. 2

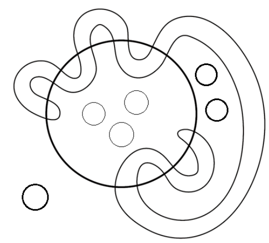


Рис. 3

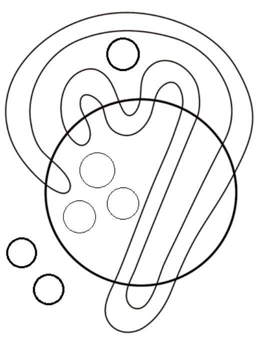


Рис. 4

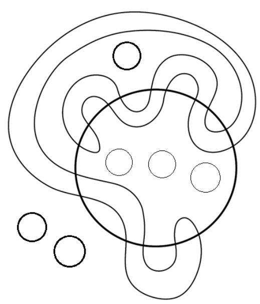


Рис. 5

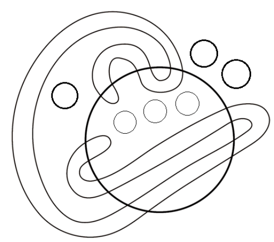


Рис. 6

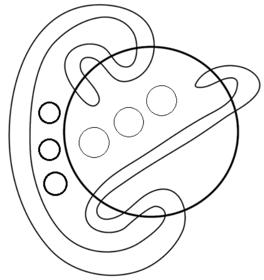


Рис. 7

Запреты доказываются с помощью теоремы Безу и метода Оревкова [4], основанного на теории кос и зацеплений. Построения осуществлены методом малого параметра.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Пучкова Н.Д. О взаимных расположениях двух М-кривых степени 4 // Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. – 2023. – Т. 222. – С. 69–82.

2. Пучкова Н.Д. О расположениях двух М-кривых степени 4, овал одной из которых обвивается вокруг овала другой // Чебышевский сборник. – 2023. – Т. 24, № 2(88), в печати.

3. Проблемы Гильберта (под редакцией П.С. Александрова) – М.: Наука, 1969 – 240 с.

4. Orevkov S. Yu. Link theory and oval arrangements of real algebraic curves // Topology. 1999. Том 38. Vol.4. P. 779—810.

———————————————————————————————————————

УДК 511.32

Подеры орициклов на расширенной гиперболической плоскости

Л. Н. Ромакина (Россия, г. Саратов)
Саратовский государственный университет
e-mail: romakinaln@mail.ru

Pedal curves of horocycles in an extended hyperbolic plane

L. N. Romakina (Russia, Saratov)
Saratov State University
e-mail: romakinaln@mail.ru

Расширенную гиперболическую плоскость H^2 рассматриваем в проективной интерпретации Кэли – Клейна как проективную плоскость P_2 с фиксированной на ней овальной линией γ. Проективные автоморфизмы линии γ образуют *фундаментальную группу* G плоскости H^2. На внутренней (внешней) относительно γ области плоскости P_2 может быть реализована геометрия плоскости Лобачевского Λ^2 (гиперболической плоскости $\widehat{H}$ положительной кривизны). Линию γ называют *абсолютом* каждой из плоскостей H^2, Λ^2 и $\widehat{H}$ и считают бесконечно удаленной [1, 2].

Орицикл плоскости H^2 можно определить метрически, позиционно или с помощью преобразований группы G (см., например, [2, 3, 4, 5]). Согласно позиционному определению орицикл является овальной линией, у которой совпадают все четыре общие точки с абсолютом. В зависимости от области расположения различают орициклы плоскости Λ^2 или $\widehat{H}$. Орицикл с точкой K на абсолюте, называемой *центром* орицикла, является стационарной линией преобразования группы G с неподвижной точкой K. Такое преобразование называют *орициклическим поворотом* вокруг точки K или *сдвигом вдоль параболической прямой*, касающейся абсолюта и орицикла в точке K и называемой *базой* орицикла.

Подерой линии ξ относительно точки A называют множество оснований перпендикуляров, опущенных из A на всевозможные касательные к линии ξ [6, 7, 8]. В англоязычной литературе для данного объекта используют термин "pedal curve".

В евклидовой геометрии подерами линий второго порядка являются различные замечательные кривые (см. [6, 8]). Например, улитка Паскаля представляет подеры окружности, а подерами параболы являются рациональные циркулярные кривые третьего порядка [6]. Свойства подер коник евклидовой плоскости находят приложения в механике, архитектуре, технике, геодезии. В связи с этим актуально не только аналитическое исследование таких кривых, но и конструирование механихмов их вычерчивания [9].

Продолжая исследование замечательных кривых в гиперболической геометрии, мы открываем цикл работ, посвященных подерам овальных линий расширенной гиперболической плоскости. Приведем кратко основные результаты исследования подер орициклов.

Используя уравнение (2.23) из [10] и переход от канонического репера R второго типа плоскости H^2 к каноническому реперу R^* первого типа, мы предварительно находим каноническое уравнение орицикла ω с центром $S(-1:0:1)$ и принадлежащей ему точкой $Q(1-q:0:1+q)$ в репере R^*:

$$(q+1)x_1^2 + x_2^2 + (q-1)x_3^2 + 2qx_1x_3 = 0,\ q \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

При условии $q > 0$ или $q < 0$ орицикл ω (1) лежит в плоскости Лобачевского или соответственно в плоскости $\widehat{H}$. При нулевом значении параметра q орицикл ω (1) совпадает с абсолютом плоскости.

Если в качестве точки A в определении подеры выбрать точку координатной прямой A_1A_3 репера R^*, присвоив ей координаты $(a:0:1)$, где $a \in \mathbb{R}$, то подеру σ орицикла ω относительно точки A можно задать уравнением

$$\begin{gathered}
-(1+q)x_1^4 + \left(a^2-1-q(a+1)^2\right)x_2^4 + a^2(1-q)x_3^4 + 2(a-q+aq)x_1^3x_3 \\
-2a(1-q+aq)x_1x_3^3 + \left(a^2-2aq-2q-2\right)x_1^2x_2^2 + \left(4aq-q+1-a^2(1+q)\right)x_1^2x_3^2 \\
+\left(2aq+1+2a^2(q-1)\right)x_2^2x_3^2 + 2\left(a-q+a^2q\right)x_1x_2^2x_3 = 0.
\end{gathered} \tag{2}$$

Следовательно, подера орицикла плоскости H^2 является кривой не выше четвертого порядка. По уравнению (2) проводим классификацию подер орициклов в зависимости от положения орицикла по отношению к точке A. В частности, доказываем следующую теорему.

Теорема 1. *Пусть σ — подера орицикла ω плоскости $\Lambda^2\left(\widehat{H}\right)$ относительно точки A. Если поляра точки A относительно абсолюта плоскости $\Lambda^2\left(\widehat{H}\right)$ касается орицикла ω, то σ является крунодальной (акнодальной) кубической кривой. Если точка A совпадает с центром орицикла ω, то σ распадается на орицикл ω и его дважды взятую базу.*

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Розенфельд Б. А. Неевклидовы пространства. — М.: Наука, 1969. 548 с.

2. Ромакина Л. Н. Геометрия гиперболической плоскости положительной кривизны : в 4 ч. Ч. 1: Тригонометрия. — Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2013. 274 с.

3. Атанасян Л. С., Базылев В. Т. Геометрия : в 2 ч. Ч. 2. — М.: Просвещение, 1987. 352 с.

4. Ромакина Л. Н. Овальные линии гиперболической плоскости положительной кривизны // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2012. Том 12, выпуск 3. С. 37-44.

5. Ромакина Л. Н. Простые разбиения гиперболической плоскости положительной кривизны // Матем. сб. 2012. Том 203, № 9. С. 83-116.

6. Савелов С. А. Плоские кривые. Систематика, свойства, применения (справочное руководство). — М.: Физматлит, 1960. 294 с.

7. Смогоржевский А. С., Столова Е. С. Справочник по теории плоских кривых третьего порядка. — М.: Физматлит, 1961. 271 с.

8. Glaeser G., Stachel H., Odehnal B. The Universe of Conics. From the Ancient Greeks to 21st Century Developments. — Berlin: Springer, 2016. 488 c.

9. Шеховцов Г. А., Шеховцова Р. П. Прибор для построения подеры эллипса. Авторское свидетельство СССР № 910472. SU 1 113 283 A2. Публикация 1984.09.15.

10. Ромакина Л. Н. Геометрия гиперболической плоскости положительной кривизны : в 4 ч. Ч. 2: Преобразования и простые разбиения. — Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2013. 244 с.

———————————————————————————

УДК 511.32

Конформно-плоские гармонические приближенно транссасакиевые многообразия

А. Р. Рустанов (Россия, г. Москва)
Институт цифровых технологий и моделирования в строительстве; Московский государственный строительный университет
e-mail: aligadzhi@yandex.ru
С. В. Харитонова (Россия, г. Оренбург)
Институт математики и цифровых технологий; Оренбургский государственный университет
e-mail: hcb@yandex.ru

Conformally flat harmonic nearly trans-Sasakian manifolds

A. R. Rustanov (Russia, Moscow)
Institute of Digital Technologies and Modeling in Construction; Moscow State University of Civil Engineering
e-mail: aligadzhi@yandex.ru
S. V. Kharitonova (Russia, Orenburg)
Institute of Mathematics and Digital Technologies; Orenburg State University
e-mail: hcb@yandex.ru

Как хорошо известно [1], основным инвариантом псевдориманова многообразия (M^n, g) является тензор Вейля W конформной кривизны, вычисляемый по формуле

$$W(X,Y)Z = R(X,Y)Z + \frac{1}{n-2}\{\langle X,Z\rangle\, ricY - \langle Y,Z\rangle\, ricX + S(X,Z)Y - S(Y,Z)X\} + \\ + \frac{r}{(n-1)(n-2)}(\langle Y,Z\rangle\, X - \langle X,Z\rangle\, Y), \qquad (1)$$

или, в терминах своих ковариантных компонент,

$$W_{ijkl} = R_{ijkl} + \frac{1}{n-2}(S_{il}g_{jk} + S_{jk}g_{il} - S_{ik}g_{jl} - S_{jl}g_{ik}) + \\ + \frac{r}{(n-1)(n-2)}(g_{ik}g_{jl} - g_{il}g_{jk}). \qquad (2)$$

Здесь $ricX$ — оператор Риччи. Непосредственно проверяется, что W — алгебраический тензор кривизны. Поскольку W — тензор типа (3,1), он представляется в виде суммы 81 элемента спектра, т.е. тензоров того же типа (3,1), комплексно-линейных, комплексно-антилинейных, либо вещественных по своим аргументам. Элементы спектра тензора выражаются через сам тензор и эндоморфизм Φ, который, очевидно, конформно-инвариантен. Тензоры, составляющие спектр тензора W, сами являются конформными инвариантами, и их совокупность образует систему основных конформных инвариантов почти контактного метрического многообразия.

Определение 1. *AC-структура называется приближенно транссасакиевой (короче, NTS-) структурой, если ее линейное расширение принадлежит классу $W_1 \oplus W_4$ почти эрмитовых структур в классификации Грея-Хервеллы. AC-многообразие, снабженное NTS-структурой, называется NTS-многообразием [2].*

Определение 2. *NTS-структура с замкнутой контактной формой называется собственной NTS-структурой [2, 3].*

Определение 3. *Собственное NTS-многообразие с гармонической контактной формой называется гармоническим, а число $\chi = -\frac{1}{2n}\delta\eta$ — его характеристикой [2, 3].*

Пусть теперь M^{2n+1} — гармоническое NTS-многообразие. Существенными ненулевыми компонентами тензора Вейля на пространстве присоединенной G-структуры являются следующие компоненты:

$$1) W_{0a0\hat{b}} = R_{0a0\hat{b}} - \frac{1}{2n-1}(S_{00}\delta_a^b - S_{a\hat{b}}) + \frac{r}{2n(2n-1)}\delta_a^b =$$
$$= -\chi^2\delta_a^b + \frac{1}{2n-1}\{A_{ac}^{bc} - 3C^{bcd}C_{dca}\} + \frac{r}{2n(2n-1)}\delta_a^b;$$
$$2) W_{abcd} = R_{abcd} = -2C_{ab[cd]};$$
$$3) W_{ab\hat{c}\hat{d}} = R_{ab\hat{c}\hat{d}} + \frac{1}{2n-1}(S_{a\hat{d}}g_{b\hat{c}} + S_{b\hat{c}}g_{a\hat{d}} - S_{a\hat{c}}g_{b\hat{d}} - S_{b\hat{d}}g_{a\hat{c}}) +$$
$$+ \frac{r}{2n(2n-1)}(g_{a\hat{c}}g_{b\hat{d}} - g_{a\hat{d}}g_{b\hat{c}}) == 2C_{abh}C^{hcd} - 2\chi^2\delta_a^{[c}\delta_b^{d]} +$$
$$+ \frac{1}{2n-1}\{(A_{ah}^{dh} - 3C^{dhg}C_{gha} - 2n\chi^2\delta_a^d)\delta_b^c + (A_{bh}^{ch} - 3C^{chg}C_{ghb} -$$
$$-2n\chi^2\delta_b^c)\delta_a^d - (A_{ah}^{ch} - 3C^{chg}C_{gha} - 2n\chi^2\delta_a^c)\delta_b^d -$$
$$-(A_{bh}^{dh} - 3C^{dhg}C_{ghb} - 2n\chi^2\delta_b^d)\delta_a^c\} + \frac{r}{2n(2n-1)}(\delta_a^c\delta_b^d - \delta_a^d\delta_b^c);$$
$$4) W_{a\hat{b}c\hat{d}} = R_{a\hat{b}c\hat{d}} + \frac{1}{2n-1}(S_{a\hat{d}}g_{b\hat{c}} + S_{b\hat{c}}g_{a\hat{d}}) - \frac{r}{2n(2n-1)}g_{a\hat{d}}g_{b\hat{c}} =$$
$$= -A_{ac}^{bd} + C^{bdh}C_{hac} + \chi^2\delta_c^b\delta_a^d + \frac{1}{2n-1}\{(A_{ah}^{dh} - 3C^{dhg}C_{gha} - 2n\chi^2\delta_a^d)\delta_c^b +$$
$$+(A_{ch}^{bh} - 3C^{bhg}C_{ghc} - 2n\chi^2\delta_c^b)\delta_a^d\} - \frac{r}{2n(2n-1)}\delta_a^d\delta_c^b.$$

Именно эти выражения (и им сопряженные) и задают компоненты ненулевых основных конформных инвариантов гармонического NTS-многообразия.

Для гармонического NTS-многообразия не более четырех из основных конформных инвариантов могут быть отличны от нуля, а именно, конформные инварианты: $\mathcal{W}_1 = \underbrace{W}_{11}$ с компонентами $\{W_{0a0\hat{b}}, W_{0\hat{a}0b}\}$; $\mathcal{W}_2 = \underbrace{W}_{40}$ с компонентами $\{W_{abcd}, W_{\hat{a}\hat{b}\hat{c}\hat{d}}\}$; $\mathcal{W}_3 = \underbrace{W}_{44}$ с компонентами $\{W_{ab\hat{c}\hat{d}}, W_{\hat{a}\hat{b}cd}\}$; $\mathcal{W}_4 = \underbrace{W}_{50}$ с компонентами $\{W_{a\hat{b}c\hat{d}}, W_{\hat{a}b\hat{c}d}\}$.

Определение 4. *Гармоническое NTS-многообразие для которого $\mathcal{W}_i = 0$, будем называть гармоническим NTS-многообразием класса $\mathcal{W}_i$,i=1,2,3,4.*

Хорошо известен смысл обращения в нуль тензора Вейля W псевдориманова многообразия размерности свыше трех: это равносильно конформной плоскости многообразия [1]. Напомним, что псевдориманово многообразие (M, g) называется конформно плоским, если метрика g в некоторой окрестности каждой точки $m \in M$ допускает конформное преобразование в плоскую метрику. Хорошо известно, что всякое двумерное риманово многообразие конформно плоско.

Теорема 1. *Конформно-плоское гармоническое NTS-многообразие ненулевой характеристики либо является пространством постоянной отрицательной кривизны, либо является образом многообразия $S^6 \times \mathbf{R}$ при каноническом концциркулярном преобразовании.*

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Рашевский П. К. Риманова геометрия и тензорный анализ. — Москва: Наука, 1976, 664 с.

2. Кириченко В. Ф. О геометрии приближенно транссасакиевых многообразий // Доклады Академии Наук. 2004. Том 397, № 6. С. 733-736.

3. Rustanov A. R., Geometry of harmonic nearly trans-Sasakian manifolds [Электронный ресурс]. Режим доступа: https://www.mdpi.com/2075-1680/12/8/744.

Секция 11. Многомасштабное математическое моделирование в физике

УДК 51-72

Дифракция нестационарного акустического импульса на упругом теле с неоднородным покрытием

А. Э. Белкин (Россия, г. Тула)
Тульский государственный университет
e-mail: antonedurd2020@mail.ru

Diffraction of a nonstationary acoustic wave by an elastic body with an inhomogeneous coating

A. E. Belkin (Russia, Tula)
Tula State University
e-mail: antonedurd2020@mail.ru

Теория дифракции акустических волн находит сегодня всё больше областей применения, что требует разработки всё новых и более точных математических моделей рассеяния звука. Актуальность данной проблемы связана с тем, что многие реально наблюдаемые проявления дифракции волн требуют использования моделей, учитывающих их особенности. Так как при реальных дифракционных процессах воздействие акустического импульса длится на протяжении ограниченного временного отрезка, стационарные (то есть, гармонические) колебания не всегда могут играть роль адекватной модели. При этом, теория дифракции гармонических волн проработана существенно больше по сравнению с нестационарными: в число работ последних лет, посвящённых прямым задачам дифракции гармонических волн, входят, к примеру, [5], [6]; обратным задачам – [9]. Нестационарным волнам [11] также посвящён ряд работ: в качестве примера можно привести [1], [2], [3], [4], [7], [8]. В данных работах звуковой импульс рассеивается неоднородной упругой оболочкой, разделяющей жидкие среды. Представляет интерес также аналитическое решение задач дифракции акустических импульсов на упругих телах, покрытых неоднородными анизотропными слоями. В качестве простейших тел такого типа могут служить однородный шар с неоднородным покрытием или однородный цилиндр с неоднородным покрытием. В данной работе рассматривается последний в качестве примера. Далее приводится описание постановки задачи.

В пространство со введённой цилиндрической системой координат r, φ, z, заполненное идеальной жидкостью (плотность ρ_g, скорость звука c) помещён упругий однородный изотропный цилиндр с радиусом r_0, покрытый упругим радиально-неоднородным анизотропным цилиндрическим слоем. Радиус цилиндра с покрытием равен r_1. Ось Oz является осью цилиндра. Плотность однородного цилиндра равна ρ_0, модули упругости Ламе – λ_0 и μ_0. Плотность неоднородного покрытия – непрерывная функция $\rho\left(r\right)$, тензор модулей упругости – непрерывная функция $\Lambda\left(r\right)$. На цилиндр падает плоская акустическая волна [1]:

$$\psi_0 = s\left(ct + x\right) \cdot \left[H\left(ct + x\right) - H\left(c\left(t - t_0\right) + x\right)\right] \tag{1}$$

где $x = r\cos\varphi$; s – плотность сигнала; t_0 – продолжительность действия импульса; H – единичная функция Хевисайда. Фронт волны достигает пов-ти $r = r_1$ в момент $t = 0$. Требуется определить рассеянную волну ψ_s. Все уравнения далее записываются в безразмерных величинах, что достигается делением всех участвующих в задаче величин на характерные величины той же размерности.

Рассеянная волна ψ_s удовлетворяет волновому уравнению [12], записанному в цилиндрических координатах следующим образом (здесь и далее индексы после запятой указывают на дифференцирование по соответствующему параметру):

$$(\psi_s)_{,rr} + \frac{(\psi_s)_{,r}}{r} + \frac{(\psi_s)_{,\varphi\varphi}}{r^2} - (\psi_s)_{,tt} = 0 \qquad (2)$$

Поле смещений $\overline{u}$ в однородной изотропной части цилиндра однозначно определяется скалярными функциями Ψ и F посредством формулы $\overline{u} = \nabla\Psi + \nabla \times (\mathrm{F}\overline{e}_z)$, причём Ψ и F также удовлетворяют волновым уравнениям:

$$\begin{cases} \Psi_{,rr} + \frac{\Psi_{,r}}{r} + \frac{\Psi_{,\varphi\varphi}}{r^2} - \frac{\Psi_{,tt}}{\beta_l^2} = 0 \\ \mathrm{F}_{,rr} + \frac{\mathrm{F}_{,r}}{r} + \frac{\mathrm{F}_{,\varphi\varphi}}{r^2} - \frac{\mathrm{F}_{,tt}}{\beta_\tau^2} = 0 \end{cases} \qquad (3)$$

где $\beta_l = ((\lambda_0 + 2\mu_0)/\rho_0)^{0,5}$, $\beta_\tau = (\mu_0/\rho_0)^{0,5}$. Выражая тензор напряжений σ в изотропной части цилиндра через деформации ε посредством закона Гука $\sigma = \lambda_0 tr\,(\varepsilon) + 2\mu_0\varepsilon$, деформации ε – через смещения $\overline{u}$ с помощью формулы $\varepsilon = \nabla\overline{u}$, и смещения через Ψ и F, получаем формулы, выражающие компоненты σ_{rr} и $\sigma_{r\varphi}$ в однородном изотропном цилиндре через потенциалы Ψ и F.

В неоднородном анизотропном покрытии вектор смещений $\overline{u}$ (имеющий только 2 ненулевые компоненты u_r и u_φ) и тензор напряжений σ удовлетворяют общим уравнениям движения сплошной среды $\mathrm{Div}\,(\sigma) + \rho\overline{u}_{,tt} = 0$. Также, в неоднородном анизотропном покрытии выполняется закон Гука: $\sigma = \Lambda \cdot \nabla\overline{u}$.

Уравнения движения жидкости, однородной и неоднородной частей цилиндра дополняются условиями (граничными и начальными). Начальные условия устанавливают равенство нулю рассеянной волны ψ_s и всех компонент смещений $\overline{u}$ (в любой части цилиндра) и их производных по времени в момент $t = 0$. На пов-ти между внутренним цилиндром и покрытием $(r = r_0)$ граничное условие отражает непрерывность компонент смещений u_r, u_φ и напряжений σ_{rr}, $\sigma_{r\varphi}$. Условия на границе между цилиндром и жидкостью $(r = r_1)$ имеют форму

$$\begin{cases} (u_r)_{,t}\Big|_{r=r_1} = (\psi_0)_{,r}\Big|_{r=r_1} + (\psi_s)_{,r}\Big|_{r=r_1} \\ \sigma_{rr}|_{r=r_1} = \rho_g \left((\psi_0)_{,t}\Big|_{r=r_1} + (\psi_s)_{,t}\Big|_{r=r_1} \right) \\ \sigma_{r\varphi}|_{r=r_1} = 0 \end{cases} \qquad (4)$$

Также вводится условие излучения на бесконечности [1].

В отличие от случая стационарных колебаний, в данном случае не представляется возможным исключение временного множителя. Поэтому решение задачи осуществляется с помощью метода интегрального преобразования Фурье [10]. Каждая величина q (а также каждое уравнение и граничное условие) заменяется изображением, получаемым применением упомянутого преобразования: $\tilde{q}\,(r,\varphi,\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega t} q\,(r,\varphi,t)\,dt$.

Символ волны над величиной (оригиналом) обозначает её изображение. В отличие от оригинала, зависящего от безразмерного времени t, изображение зависит от безразмерной частоты ω. Зависимость от координат r, φ у оригинала и изображения имеет, вообще говоря, одинаковый характер. Важнейшим свойством преобразования Фурье является изображение производной $\widetilde{q_{,t}} = i\omega\tilde{q}$. Таким образом пр-ие Фурье позволяет заменить все производные величин по времени, что существенно упрощает решение. В частности, изображения волновых уравнений есть уравнения Гельмгольца.

Изображение падающей волны $\tilde{\psi}_0$ при использовании теоремы сложения цилиндрических функций принимает вид

$$\tilde{\psi}_0 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-i)^n \tilde{s}(\omega) J_n(\omega r) e^{in\varphi} \tag{5}$$

где J_n – ф-я Бесселя порядка n. Применяя преобразование Фурье к волновым уравнениям относительно ψ_s, Ψ, F и решая полученные ур-ия Гельмгольца методом разделения переменных, получаем представления искомых величин в виде бесконечных сумм с неизвестными коэффициентами $A_n^{(m)}$:

$$\tilde{X}^{(m)}(r,\varphi,\omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n^{(m)}(\omega)(-i)^n \tilde{s}(\omega) C_n^{(m)}(\omega r) e^{in\varphi} \tag{6}$$

где $\tilde{X}^{(1)} = \tilde{\psi}_s$; $\tilde{X}^{(2)} = \tilde{\Psi}$; $\tilde{X}^{(3)} = \tilde{\mathrm{F}}$; $C_n^{(1)}(\omega r) = H_n(\omega r)$; $C_n^{(2)}(\omega r) = J_n(\omega r/\beta_l)$; $C_n^{(3)}(\omega r) = J_n(\omega r/\beta_\tau)$; H_n – ф-я Ханкеля 1-ого рода порядка n. Функции $\tilde{u}_r$, $\tilde{u}_\varphi$, $\tilde{\sigma}_{rr}$, $\tilde{\sigma}_{r\varphi}$, являясь периодическими по φ, могут быть представлены в аналогичном виде:

$$\tilde{Y}^{(m)}(r,\varphi,\omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} U_n^{(m)}(r,\omega)(-i)^n \tilde{s}(\omega) e^{in\varphi} \tag{7}$$

где $\tilde{Y}^{(1)} = \tilde{u}_r$; $\tilde{Y}^{(2)} = \tilde{u}_\varphi$; $\tilde{Y}^{(3)} = \tilde{\sigma}_{rr}$; $\tilde{Y}^{(4)} = \tilde{\sigma}_{r\varphi}$; $U_n^{(m)}$ – неизвестные функции. Подстановка бесконечных сумм в изображения общих уравнения движения сплошной среды и закона Гука приводит к системе обыкновенных дифференциальных ур-ий относительно $U_n^{(m)}(r,\omega)$. Для однозначного определения неизвестных функций $U_n^{(m)}$ ур-ия следует дополнить изображениями граничных условий на внешней и внутренней поверхностях покрытия. В частности, изображение первого гран. условия на внешней пов-ти позволяет определить коэффициент разложения изображения рассеянной волны по известным коэффициентам разложения нормального смещения:

$$A_n^{(1)}(\omega) = (i \cdot U_n^{(1)}(r_1,\omega) - J_n'(r_1\omega))(H_n'(r_1\omega))^{-1} \tag{8}$$

Изображения условий контакта, связанные со смещениями, позволяют связать значения $U_n^{(m)}(r_0,\omega)$, $m = 1,2$, со значениями $A_n^{(2)}$, $A_n^{(3)}$. Аналогично, изображения условий контакта, связанные с напряжениями, позволяют связать значения $U_n^{(m)}(r_0,\omega)$, $m = 3,4$, со значениями $A_n^{(2)}$, $A_n^{(3)}$. Сравнивая данные условия, можно исключить $A_n^{(2)}$, $A_n^{(3)}$, выразив $U_n^{(3)}$ и $U_n^{(4)}$ через $U_n^{(1)}$ и $U_n^{(2)}$. Таким образом в краевой задаче учитывается влияние однородной части цилиндра без необходимости её участия в краевой задаче.

Краевая задача относительно неизвестных $U_n^{(m)}(r_0,\omega)$, $m = 1,2,3,4$ с граничными условиями при $r = r_0$ и $r = r_1$ может быть решена путём сведения к 2 задачам Коши с начальными условиями при $r = r_0$. Задачи Коши, в свою очередь, могут быть решены любым численным методом, к примеру, методом Рунге-Кутты. Решив краевую задачу и определив $U_n^{(1)}(r_1,\omega)$ для каждого n и ω, модем вычислить коэффициенты разложения изображения рассеянной волны $A_n^{(1)}(\omega)$. Таким образом, изображение $\tilde{\psi}_s$ известно. Искомый оригинал ψ_s находится посредством применения обратного преобразования Фурье:

$$\psi_s(r,\varphi,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n^{(1)}(\omega)(-i)^n \tilde{s}(\omega) H_n(\omega r) e^{in\varphi - i\omega t} d\omega \tag{9}$$

Непосредственное использование записанной формулы не представляется возможным, поэтому суммирование по n ограничивается некоторыми достаточно большими значениями n_{max}, а интегрирование проводится по отрезку $[\omega_{min};\omega_{max}]$. Данный отрезок определяется из того соображения, что изображение плотности сигнала $\tilde{s}(\omega)$ существенно отлично от нуля только в некотором диапазоне.

Таким образом, в работе описана общая идея и алгоритм решения задачи дифракции нестационарной волны на упругом теле с неоднородным анизотропным покрытием. При проведении численных исследований можно убедиться, что наличие неоднородности, анизотропии и их тип существенно влияют на характер рассеяния нестационарных волн как в ближней, так и в дальней зонах.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гаев А. В. Дифракция плоской нестационарной акустической волны на неоднородном трансверсально-изотропном сферическом слое. // Известия ТулГУ. Серия Информатика, 2001. Т.7, вып.3. С.29-38.

2. Гаев А. В. Дифракция сферической нестационарной акустической волны на неоднородном трансверсально-изотропном сферическом слое. // Дифференциальные уравнения и прикладные задачи. Сборник научных трудов – Тула: ТулГУ, 2003. С.72-78.

3. Гаев А. В. Нестационарное рассеяние плоского акустического импульса неоднородным трансверсально-изотропным цилиндрическим слоем. // Известия ТулГУ. Серия Информатика, 2002. Т.8, вып.3. С.51-56.

4. Гаев А. В. Рассеяние сферической нестационарной акустической волны неоднородным трансверсально-изотропным сферическим слоем. // Известия ТулГУ. Серия Механика, 2002. Т.8, вып.2. С.58-64.

5. Толоконников Л. А. О рассеянии плоской звуковой волны упругим эллиптическим цилиндром с несколькими полостями // Изв. ТулГУ. Естественные науки. 2012. Вып. 2. С. 157–164.

6. Толоконников Л. А. Определение акустического поля, рассеянного упругим сфероидом с несколькими сферическими полостями // Изв. ТулГУ. Естественные науки. 2012. Вып. 1. С. 73-80.

7. Толоконников Л. А., Гаев А. В. Дифракция плоских и сферических акустических нестационарных импульсов на неоднородной трансверсально-изотропной сферической оболочке. // Современные проблемы математики, механики, информатики: Тезисы докладов Всероссийской научной конференции – Тула: ТулГУ, 2002. С.143-145.

8. Толоконников Л. А., Гаев А. В. Рассеяние плоской нестационарной акустической волны неоднородным трансверсально-изотропным сферическим слоем. // Оборонная техника, 2003, №8. С.72-76.

9. Толоконников Л. А., Ларин Н. В., Скобельцын С. А. Моделирование неоднородного покрытия упругого цилиндра с заданными звукоотражающими свойствами // ПМТФ. 2017. № 4. С. 189–199.

10. Уфлянд Я. С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости. – М.-Л.: Изд-во АН СССР, 1967. – 403 с.

11. Филиппов И. Г., Егорычев О. А. Нестационарные колебания и дифракция волн в акустических и упругих средах. – М.: Машиностроение, 1977. – 304 с.

12. Шендеров Е. Л. Волновые задачи гидроакустики. Л.: Судостроение. 1972. 348 с.7. Т. 29. № 11. С. 89-98.

———————————————————————————————

УДК 51-72

Исследование влияния параметров метода конечных элементов на моделирование дифракции акустических волн

Д. Р. Бирюков (Россия, г. Тула)
Тульский государственный университет
e-mail: danilabirukov@rambler.ru

Investigation of parameters of the finite element method influence on diffraction of acoustic waves modeling

D. R. Biryukov (Russia, Tula)
Tula State University
e-mail: danilabirukov@rambler.ru

Среди разнообразных численных методов решения краевых задач для дифференциальных уравнений особое место занимает так называемый метод конечных элементов. Данный метод даёт универсальный способ решения не только дифференциальных уравнений в частных производных, но и интегральных уравнений, которые возникают при решении задач прикладной физики. Классические области применения метода конечных элементов (или, сокращённо, МКЭ) – это гидродинамика, механика деформируемого твёрдого тела, электродинамика, задачи теплообмена. В частности, использование метода МКЭ в гидроакустике рассматривается в большом количестве работ, к примеру, [3], [4], [5].

Как следует из названия метода конечных элементов, для решения задачи с его помощью область разбивается на конечные подобласти – собственно, элементы. Чаще всего элементы имеют форму многомерных (соответствующих размерности пространства) многогранников, вершины которых называются узлами. Совокупность узлов и элементов составляет конечно-элементную сетку. Наряду с глобальной прямоугольной декартовой координатной системой (условно $\{x_i\}_{i=1}^{imax}$, где $imax$ – размерность пространства) в каждом элементе вводится локальная в общем случае криволинейная координатная система $\{e_i\}_{i=1}^{imax}$ и совокупность координатных функций $\{f_n\left(e_1, e_2, \ldots, e_{imax}\right)\}_{n=1}^{s_{loc}}$ (s_{loc} – количество узлов элемента; коорд. ф-я может иметь ненулевые значения только в точках элемента). Произвольное поле $u\left(\overline{r}\right)$ внутри элемента аппроксимируется по закону

$$u\left(e_1, e_2, \ldots, e_{imax}\right) = \sum_{n=1}^{s} u^{(n)} f_n\left(e_1, e_2, \ldots, e_{imax}\right) \qquad (1)$$

где $u^{(n)}$ – значение поля u в n–ом узле данного элемента (n – локальная нумерация узлов элемента). В качестве u в первую очередь выступает искомая неизвестная краевой задачи. Узловые значения $\left\{u^{(m)}\right\}_{m=1}^{S_{glob}}$ (S_{glob} – общее число узлов в конечно-элементной сетке; m – глобальная нумерация узлов сетки) находятся путём решения системы линейных алгебраических уравнений, значения u в других точках (внутри элементов) определяются с помощью описанной процедуры интерполяции. Принцип построения системы линейных алгебраических уравнений описан, к примеру, в [1], [2], [6]: матрица системы состоит из коэффициентов при узловых значениях $u^{(n)}$.

Далее приведём описание задачи дифракции и её решения с помощью метода конечных элементов. Рассматривается двумерное или трёхмерное пространство (вообще говоря, неограниченное), заполненное идеальной жидкостью, с помещёнными в неё конечными по размеру линейно упругими телами $\{T_q\}$. Данные тела в общем случае являются неоднородными и анизотропными. В жидкости распространяется гармоническая звуковая волна, характеризуемая волновым числом k и циклической частотой ω. В качестве волнового поля может рассматриваться акустическое давление p, потенциал смещений или потенциал скоростей частиц жидкости: все три данные величины в случае гармонических колебаний отличаются постоянным множителем, вследствие чего могут считаться эквивалентными. Падающую волну обозначим p_0. Разность между результирующим p и падающим p_0 волновыми полями есть искомое рассеянное поле p_s.

Существует несколько способов использовать МКЭ применительно к задачам дифракции. Данные способы различаются моделированием дальней зоны акустического поля. В зоне вблизи тел $\{T_q\}$ выделяется шар (или круг, в трёхмерном случае) D, содержащий все рассеивающие тела. Для данного шара выполняется дискретизация. Пространство за пределами шара считается дальней зоной, в которой и ищется рассеянное поле. В первом способе внешнее пространство также разбивается на элементы, но являющиеся бесконечными (этот способ является модификацией МКЭ); во втором же способе конечно-элементная сетка ограничивается только областью D, а связь поля в ней с полем в дальней области задаётся с помощью граничных условий. Большой интерес представляет сравнение результатов решения задачи, получаемых данными двумя способами. В данном же исследовании рассматривается только второй способ.

Искомые узловые значения при решении задачи дифракции с помощью МКЭ является вектор неизвестных $\left(p^{(n)}, u_x^{(n)}, u_y^{(n)}, u_z^{(n)}\right)$. $p^{(n)}$ – результирующее акустическое давление в $n-$ом узле, отличное от нуля только в точках, относящихся к жидкости; $u_x^{(n)}, u_y^{(n)}, u_z^{(n)}$ – компоненты смещения в $n-$ом узле (в двумерных задачах отсутствует $u_z^{(n)}$), отличные от нуля только в точках, относящихся к упругим телам $\{T_q\}$. В узлах, расположенных на границах, присутствуют все упомянутые неизвестные.

В данном исследовании рассматривается влияние отдельных параметров МКЭ на решение задачи дифракции. В тезисе перечислим упомянутые параметры, для этого в качестве примера рассмотрим отдельный жидкий элемент (то есть, элемент, расположенный в области D, но вне тел $\{T_q\}$), обозначаемый здесь и далее E. Элементу соответствуют s_{loc} узлов и набор координатных функций $\{f_n\left(e_1, e_2, \ldots, e_{imax}\right)\}_{n=1}^{s_{loc}}$. Давление p в узле аппроксимируется следующим образом, по аналогии с (1):

$$p = \sum_{n=1}^{s} p^{(n)} f_n \tag{2}$$

Аналогичным образом аппроксимируются и компоненты смещения (что имеет значение, если участок границы элемента лежит на границе одного из тел $\{T_q\}$). Рассмотрим описывающее колебания жидкости в элементе уравнение Гельмгольца

$$\triangle p + k^2 p = 0 \tag{3}$$

($\triangle$ – оператор Лапласа) и граничные условия на внешней границе области D и на границе между жидкостью и T_q. Используя метод, предложенный в [1], [2], [6], можно получить из (3) уравнение, связывающее узловые значения давлений и смещений, соответствующие элементу E:

$$\int_E \left(\nabla f_n \cdot \nabla p - f_n k^2 p\right) dV - \int_{\partial_0 E} f_n \nabla p \cdot \overline{\eta} dS - \int_{\partial_q E} f_n \rho \omega^2 u_\eta dS = 0 \qquad (4)$$

Здесь $\partial_0 E$ – участок границы элемента, находящийся на внешней границе D, то есть соприкасающийся с дальней зоной (в случае отсутствия такового участка соответствующий интеграл равен нулю); $\partial_q E$ – участок границы элемента, лежащий на границе тела T_q (в случае отсутствия такового соответствующий интеграл равен нулю; при наличии границ с несколькими такими телами суммируются несколько интегралов по каждой границе); dV – дифференциал объёма (в двумерном случае – площади) элемента; dS – дифференциал границы элемента; ∇ – оператор набла; $\overline{\eta}$ – внешняя нормаль к границе элемента; $u_\eta = \overline{u} \cdot \overline{\eta}$ – смещение вдоль внешней нормали; ρ – плотность жидкости.

В уравнении (4) участвует координатная функция f_n. Величины p и u_η представляются в виде (2). Каждому узлу n элемента соответствует отдельное уравнение, содержащее функцию f_n и определяющее строку локальной матрицы элемента. Ячейки строки заполняются коэффициентами, стоящими в уравнении при неизвестных $p^{(n)}, u_x^{(n)}, u_y^{(n)}, u_z^{(n)}$. Свободные члены уравнений образуют правую часть локальной системы линейных алгебраических уравнений.

Аналогичным образом может быть получено уравнение для упругого элемента: в этом случае исходным является не уравнение Гельмгольца, а общие уравнения движения сплошной среды и обобщённый закон Гука. Из локальных матриц, построенных для всех жидких и упругих элементов, собирается глобальная матрица, соответствующая всей конечно-элементной сетке.

Свойства описанной конечно-элементной модели, определяющие точность получаемых результатов решения дифракционной задачи, зависят от ряда параметров. Приведём примеры подобных параметров. Первым из них является размер элементов сетки. Очевидно, при уменьшении максимального размера элементов растёт их количество и число узлов, что приводит к большей точности решения, но снижает его скорость, так как размер СЛАУ напрямую зависит от числа узлов сетки (прямо пропорционален ему). В то же время, количество локальных матриц, которые строятся в процессе решения, равно числу элементов сетки, и при его увеличении растёт время, затрачиваемое алгоритмом на вычисление локальных матриц.

Качественными параметрами конечно-элементной модели являются форма и порядок элементов. Наиболее часто используемые формы элементов, к примеру, в двумерном случае – треугольная и четырёхугольная. Как форма, так и порядок элементов существенно влияют на выбор координатных функций. В случае треугольного элемента первого порядка координатные функции являются линейными: $f_1 = 1 - e_1 - e_2$; $f_2 = e_1$; $f_3 = e_2$. Повышение порядка элемента приводит к повышению степени координатных функций и необходимости ввода дополнительных узлов: если треугольный элемент 1-ого порядка имеет 3 узла в точках-вершинах, то для треугольного элемента 2-ого порядка вводятся 3 дополнительных узла на сторонах треугольника. Повышение порядка элемента приводит к повышению точности решения без необходимости более мелкого разбиения сетки. В то же время повышение порядка элементов влечёт за собой дополнительные сложности при построении локальных матриц. В связи с этим, представляет интерес сравнение влияния на решение задачи (как на скорость, так и на результат решения) увеличение числа элементов сетки и повышение порядка элементов.

Для демонстрации усложнения работы над локальными матрицами при повышении порядка элементов рассмотрим уравнение, на основе которого строится матрица жидкого элемента. Первый интеграл в левой части данного уравнения содержит градиент координатной функции ∇f_n (что является особенностью дифракционных задач). Хотя f_n зависит от локальных координат, производные в данном случае берутся по глобальным координатам, что приводит, в частности, к необходимости вычисления значения выражения:

$$\frac{\partial f_n}{\partial x} = \sum_i \frac{\partial f_n}{\partial e_i}\frac{\partial e_i}{\partial x} \tag{5}$$

Вычисление производных $\frac{\partial f_n}{\partial e_i}$ не представляет сложности. Для вычисления $\frac{\partial e_i}{\partial x}$ необходимо выразить локальные координаты через глобальные. В случае элемента первого порядка требуемое аналитическое выражение можно получить, решая СЛАУ, так как координатные функции являются линейными. В случае элемента второго порядка функции уже являются квадратическими, и выражение локальных координат через глобальные является нетривиальной задачей. Для этого можно использовать численные методы, к примеру, метод Ньютона. Однако применение численных методов приводит также и к необходимости численного дифференцирования $\frac{\partial e_i}{\partial x}$, что дополнительно увеличивает количество вычислений. Таким образом, преимущество повышения порядка элементов вместо увеличения их количества является далеко не очевидным.

В качестве других важных параметров конечно-элементного алгоритма можно привести количество и распределение точек интегрирования в элементе и на его границах; размер шага для численного дифференцирования (при необходимости использования такового в алгоритме, к примеру, в элементах высокого порядка) и т.д. Исследование влияния подобных параметров позволит определить оптимальную конфигурацию конечно-элементных моделей при решении задач дифракции.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Михлин С.Г. Вариационные методы в математической физике. М.: Наука, 1970. 512 с.
2. Ректорис К. Вариационные методы в математической физике и технике. М.: Мир, 1985. 590 с.
3. Скобельцын С.А., Королев А.Н. Использование МКЭ для решения задачи о рассеянии звука ограниченной неоднородной анизотропной термоупругой пластиной // Вестник ТулГУ. Серия Математика. Механика. Информатика. 2007.Т. 13, вып. 2. С. 172–182.
4. Скобельцын С.А., Королев А.Н. Метод конечных элементов в задаче о рассеянии плоской упругой волны неоднородным цилиндром // Изв. ТулГУ. Серия Математика. Механика. Информатика. 2005. Т. 11. Вып. 5. С. 187–200.
5. Скобельцын С.А., Королев А.Н. Особенности конечно-элементной формулировки задач о рассеянии звука // Матер. междунар. научн. конф. «Современные проблемы математики, механики, информатики» Тула: ТулГУ, 2007. С. 205–207.
6. Cook R.D., Malkus D.S., Plesha M.E., Witt R.J. Concepts and Applications of Finite Element Analysis. New York: John Wiley & Sons, 2002. 736 p.

УДК 37.01

К вопросу о распространении света в неоднородной среде с центральной симметрией

Ю. В. Бобылев (Россия, г. Тула)
Тульский государственный педагогический университет им. Л.Н. Толстого
e-mail: bobylev.yu@mail.ru

А. И. Грибков (Россия, г. Тула)
Тульский государственный педагогический университет им. Л.Н. Толстого
e-mail: ks7a@yandex.ru
Р. В. Романов (Россия, г. Тула)
Тульский государственный педагогический университет им. Л.Н. Толстого
e-mail: rom_rom_vas@mail.ru

On the propagation of light in an inhomogeneous medium with central symmetry

Yu. V. Bobylev (Russia, г. Tula)
Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University
e-mail: bobylev.yu@mail.ru
A. I. Gribkov (Russia, г. Tula)
Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University
e-mail: ks7a@yandex.ru
R. V. Romanov (Russia, г. Tula)
Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University
e-mail: rom_rom_vas@mail.ru

В ряде предыдущих публикаций, например, [1, 2], авторы рассматривали вопросы, связанные с криволинейным прохождением света в неоднородных средах. Данная тема представляется весьма интересной, поскольку такое распространение света, описываемое хорошо известным законом Снеллиуса, сопровождается рядом любопытных и эффектных явлений, знакомство с которыми студентов педвузов и других людей, интересующихся физикой, будет полезным. К таким явлениям относятся, в частности, такие широко известные и популярные природные явления как миражи (фр. mirage–видимость) и рефракция (лат. refraction–преломление) [3].

В указанных выше работах были подробно рассмотрены как реальные эксперименты, так и результаты компьютерного моделирования по распространению света в пространственно неоднородных средах, обладающих декартовой симметрией. Это наиболее традиционные случаи симметрии сред, когда показатель преломления зависит только от одной из декартовых координат. Искривление траектории светового луча в среде с таким показателем преломления позволяет объяснить, в частности, возникновение миражей, и поэтому чаще всего встречается как в учебной, так и в научно-популярной литературе.

Вместе с тем интересно рассмотреть искривление светового луча в средах, показатель преломления которых обладает какой-либо другой симметрией, например, центральной. Возможности аналитического описания, компьютерного моделирования и проведения натурного эксперимента по распространению света в оптически прозрачной среде, обладающей центральной симметрией и посвящена настоящая работа.

Будем исходить из следующей модели: всё верхнее (Рис.1) полупространство заполнено средой, показатель преломления которой в любой точке пространства зависит только от расстояния данной точки до некоторой точки, которую примем за начало координат, то есть $n = n(r)$, и по нормали на заданном расстоянии r_0 в эту среду входит луч света.

Для описания дальнейшего пути луча естественно использовать сферическую систему координат, при этом, поскольку его движение происходит только в одной вертикальной плоскости, для его описания будет достаточно только двух координат (r, θ) . Уравнение, связывающее эти координаты, и будет уравнением траектории светового луча.

Будем исходить из уравнения эйконала ((др.-греч. $\varepsilon\iota\kappa\omega\nu$ — изображение) – функция, определяющая оптическую длину пути луча света между двумя произвольными точками) [4, с.118].

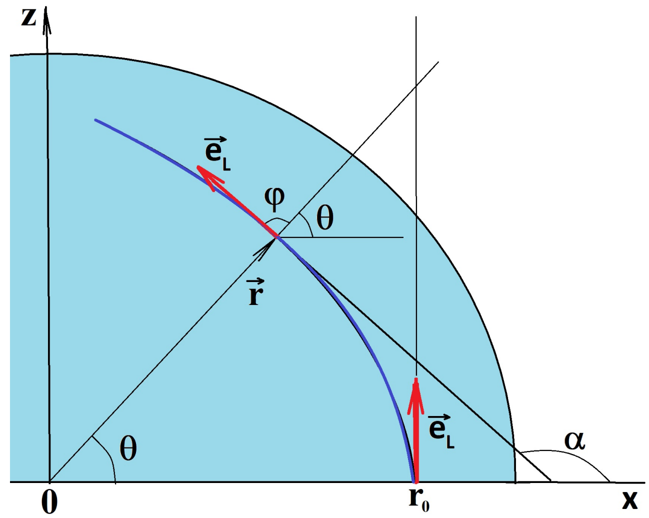


Рис. 1: Траектория луча в среде с центральной симметрией. К выводу уравнений (9) и (10).

$$(\nabla L)^2 = n^2(\vec{r}), \tag{1}$$

где $n(\vec{r})$ – показатель преломления среды, ∇ – набла-оператор (оператор Гамильтона), а вещественная скалярная функция $L(\vec{r})$ и называется эйконалом. Волновой фронт является поверхностью уровня функции $L(\vec{r})$, уравнение которой $L(\vec{r}) = const$, и, поскольку вектор ∇L ортогонален к волновому фронту, то геометрически световые лучи будут определяться как линии, ортогональные к волновым фронтам $L(\vec{r}) = const$, касательные к которым в каждой точке совпадают с направлением ∇L. При этом распространение света рассматривается как движение световой энергии по лучам [4, с. 120].

Дифференциальное уравнение для световых лучей можно получить следующим образом. Пусть параметрическое уравнение траектории света $\vec{r} = \vec{r}(s)$, где s – длина дуги луча, отсчитываемая от некоторой взятой на ней начальной точки. Тогда по аналогии с естественным способом описания движения

$$\vec{e}_L = \frac{d\vec{r}}{ds} = \frac{\nabla L}{|\nabla L|} \quad (\text{т.к.} \frac{|d\vec{r}|}{ds} = 1) \tag{2}$$

- единичный вектор, касательный к линии луча, ортогональный к поверхности волнового фронта. Из (2) с учётом (1) имеем

$$n(\vec{r})\frac{d\vec{r}}{ds} = \nabla L. \tag{3}$$

Продифференцировав (3) по s , с учётом определения производной по направлению и линейности оператора ∇ , соотношение (3) можно переписать в следующем виде:

$$\frac{d}{ds}(n(\vec{r})\frac{d\vec{r}}{ds}) = \nabla n(\vec{r}). \tag{4}$$

Это и есть векторное уравнение, которое определяет траекторию луча при заданном показателе преломления среды $n(\vec{r})$.

В случае рассматриваемой в настоящей работе среды с центральной симметрией данное уравнение можно существенно упростить. Для этого рассмотрим, как изменяется вдоль луча вектор $[\vec{r}, n(r)\vec{e}_L]$. Продифференцировав его по s , с учётом (2), и зависимости показателя преломления среды только от модуля радиус–вектора $n(\vec{r}) = n(r)$, имеем

$$\frac{d}{ds}\lceil\vec{r},n(r)\vec{e}_L\rceil=\lceil\frac{d\vec{r}}{ds},n(r)\vec{e}_L\rceil+\lceil\vec{r},\frac{d}{ds}n(r)\vec{e}_L\rceil=0. \qquad (5)$$

Следовательно, вдоль светового луча

$$\lceil\vec{r},n(r)\vec{e}_L\rceil=const \quad\rightarrow\quad |\lceil\vec{r},n(r)\vec{e}_L\rceil|=const \quad\rightarrow\quad rn(r)sin\varphi=const, \qquad (6)$$

где φ - угол между радиус – вектором $\vec{r}$ произвольной точки на траектории луча и касательной к этой траектории в данной точке (Рис. 1).

Чтобы получить в явном виде уравнение световых лучей в сферически симметричной среде, используем следующее соотношение, определяющее угол между радиус – вектором точки на плоской кривой, полярные координаты которой (r,θ) и касательной в этой точке [5, с. 310]

$$sin\varphi=\frac{r(\theta)}{\sqrt{r^2(\theta)+(\frac{dr(\theta)}{d\theta})^2}}. \qquad (7)$$

Из (7) и соотношения (6), которое в нашем случае (Рис.1) запишется в виде

$$rn(r)sin\varphi=r_0n(r_0), \qquad (8)$$

получаем дифференциальное уравнение

$$\frac{dr}{d\theta}=\frac{r}{n(r_0)r_0}\sqrt{n^2(r)r^2-n^2(r_0)r_0^2}, \qquad (9)$$

интегрируя которое, будем иметь следующее уравнение лучей в сферически симметричной среде [4, с. 128]

$$\theta=n(r_0)r_0\int\limits_{r_0}^{r}\frac{dr}{r\sqrt{n^2(r)r^2-n^2(r_0)r_0^2}}. \qquad (10)$$

В качестве некоторого теста правильности полученных уравнений, рассмотрим, например, простейший случай однородной среды, когда $n(r)=n(r_0)=const$, тогда как видно из (10), $n(r_0)$ сокращаются, а вычисление самого интеграла с помощью замены переменной интегрирования даёт

$$\theta=r_0\int\limits_{r_0}^{r}\frac{dr}{r\sqrt{r^2-r_0^2}}=-\int\limits_{1}^{\frac{r_0}{r}}\frac{d\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}=-arcsin\xi\Big|_1^{\frac{r_0}{r}}=-arcsin\frac{r_0}{r}+\frac{\pi}{2}, \qquad (11)$$

откуда получаем

$$\frac{r_0}{r}=cos\theta \quad\rightarrow\quad rcos\theta=r_0. \qquad (12)$$

Таким образом, при любых r и θ $x=r_0$, то есть уравнение прямой (Рис. 1), что и должно реализовываться в действительности.

Проводить ещё какие-либо расчёты по формуле (10), подставляя показатели преломления, определяемые произвольными функциями координат, здесь не будем, поскольку данные зависимости могут оказаться очень далёкими от реальности. В дальнейшем уравнение (10) будет использоваться для описания траектории светового луча в реальном эксперименте. Описание данного эксперимента и его компьютерное моделирование будут рассмотрены в наших следующих публикациях.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бауэр А. В, Бобылёв Ю. В., Грибков А. И., Романов Р. В. Криволинейное распространение света: натурные эксперименты, компьютерное моделирование, математическая теория и использование в обучении // Физика в школе, 2022, №5, С. 35-44.

2. Бобылёв Ю. В., Грибков А. И., Романов Р. В. К анализу свойств траектории светового луча в пространственно неоднородной среде // Алгебра, теория чисел, дискретная геометрия и многомасштабное моделирование: современные проблемы, приложения и проблемы истории: Материалы XX Международной конференции, посвященной 130-летию со дня рождения академика И. М. Виноградова. — Тула: Тул. гос. пед. ун-т им. Л. Н. Толстого, 2022. – С. 177-180

3. Сивухин Д. В. Общий курс физики. Учеб. пособие: Для вузов. В 5 т. Т. IV. Оптика. — 3-е изд., стереот. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. –792 с.

4. Борн М., Вольф Э. Основы оптики. М.: Наука, 1973. – 720 с.

5. Курант Р. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Том 1. М.: Наука, 1967. – 704с.

УДК 537.86

Об одном методе описания динамики заряженных частиц в нелинейной теории бесстолкновительной плазмы

Ю. В. Бобылев (Россия, г. Тула)
Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого
e-mail: bobylev.yu@mail.ru
В. А. Панин (Россия, г. Тула)
Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого
e-mail: panin@tspu.tula.ru

A method for describing the dynamics of charged particles in a nonlinear theory without a collisional plasma

Yu. V. Bobylev (Russia, г. Tula)
Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University
e-mail:bobylev.yu@mail.ru
V. A. Panin (Russia, г. Tula)
Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University
e-mail:panin@tspu.tula.ru

Одним из основных методов описания нелинейной динамики заряженных частиц в теории плазмы является метод, основанный на системе уравнений Максвелла-Власова [1]. Важным этапом в данной процедуре является решение кинетического уравнения Власова с самосогласованным полем в постановке как начальной, так и граничной задач. Использование для решения данного уравнения (с частными производными первого порядка) традиционных методов [2], сталкивается с большими математическими трудностями, а во многих случаях оказывается вообще невозможным. В связи с этим более удобным является использование для построения решения задачи Коши для уравнения Власова иного подхода, называемого «методом интегрирования по начальным данным», основная идея которого состоит в представлении одночастичной функции распределения в виде интеграла по начальным данным фазовых (координата – импульс) траекторий частиц [3]. Применение данного метода в задачах нелинейной электродинамики плазмы и рассматривается в настоящей работе на примере вывода уравнений двухпучковой неустойчивости.

Будем исходить из следующей достаточно общей математической модели пучково-плазменной системы, которой присущи все наиболее характерные черты явления пучковой неустойчивости в плазме. Рассмотрим цилиндрический металлический волновод с произвольным односвязным поперечным сечением, в котором находятся бесконечно тонкие в поперечном сечении ("игольчатые") совмещённые нерелятивистские электронные пучки. Волновод помещен в продольное сильное внешнее магнитное поле, препятствующее поперечным движениям электронов пучков.

Потенциальные (электростатические) возмущения в такой системе описываются следующими уравнениями [1]:

$$(\Delta_\perp + \frac{\partial^2}{\partial z^2})\varphi = -4\pi e\delta(\vec{r}_\perp - \vec{r}_b)\sum_\alpha S_\alpha \int f_\alpha(t,z,v)dv,$$
$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + v\frac{\partial f_\alpha}{\partial z} + \frac{e}{m}(-\frac{\partial \varphi}{\partial z})\frac{\partial f_\alpha}{\partial v} = 0. \tag{1}$$

Здесь φ - скалярный потенциал, α - номер пучка (α =1,2), z - координата в продольном направлении волновода, $\vec{r}_\perp$ - координата в его поперечном сечении, $\Delta_\perp$ - поперечная часть оператора Лапласа, v - составляющая скорости вдоль продольной оси волновода 0Z , e и m - заряд и масса электрона, $f_\alpha(t,z,v)$ - функция распределения частиц пучка номер α , S_α - площадь его поперечного сечения, а $\vec{r}_b$ - средняя координата пучков в поперечном сечении волновода. При написании уравнений (1) учтено, что в сильном продольном внешнем магнитном поле поперечное движение электронов запрещено, а продольное движение происходит под действием силы $\vec{F} = (0,0,-\frac{\partial\varphi}{\partial z})$. В этом случае функции распределения представимы в виде $P_\alpha(\vec{r}_\perp)f_\alpha(t,z,v)$, где $f_\alpha(t,z,v)$ удовлетворяют уравнениям Власова из системы (1), а $P_\alpha(\vec{r}_\perp)$ задают профили распределения частиц в поперечном сечении волновода. Для бесконечно тонких пучков $P_\alpha(\vec{r}_\perp) = S_\alpha\delta(\vec{r}_\perp - \vec{r}_b)$, где δ - дельта-функция Дирака [4]. Кроме того, предположено, что в случае нерелятивистского электронного пучка электромагнитное поле можно описывать в потенциальном приближении.

Полагаем, что в начальный момент времени функции распределения пучков удовлетворяют условиям:

$$f_\alpha(0,z,v) = n_\alpha f_{\alpha 0}(v). \tag{2}$$

Здесь n_α - невозмущенные плотности частиц пучка номер α (имеют смысл произведения $n_\alpha S_\alpha$ - погонные плотности, величины измеряемые экспериментально).

Представим решение уравнения Власова для функции распределения f_α в виде интеграла по начальным данным [3]:

$$f_\alpha(t,z,v) = \int\int dz_0 dv_{\alpha 0} f_{\alpha 0}(v)\delta(z - z_\alpha(t,z_0,v_{\alpha 0}))\delta(v - v_\alpha(t,z_0,v_{\alpha 0})). \tag{3}$$

Здесь $z_\alpha(t,z_0,v_{\alpha 0})$ и $v_\alpha(t,z_0,v_{\alpha 0})$ - решения характеристической системы

$$\frac{dz_\alpha}{dt} = v_\alpha, \qquad \frac{dv_\alpha}{dt} = -\frac{e}{m}\frac{\partial\varphi}{\partial z}, \tag{4}$$

с начальными условиями

$$z_\alpha(0) = z_0, \quad v_1(0) = v_{10}, \quad v_2(0) = v_{20}. \tag{5}$$

Подставляя далее (3) в (1), обозначая через $\varphi^{/} = -e\varphi/m$, и через $\widetilde{\omega}_\alpha = S_\alpha\omega_\alpha = S_\alpha\sqrt{4\pi e^2 n_\alpha/m}$ - ленгмюровские частоты частиц пучка номер α , производя с учётом (2), интегрирование по скоростям, получим следующие уравнения:

$$(\Delta_\perp + \frac{\partial^2}{\partial z^2})\varphi^{/} = \delta(\vec{r}_\perp - \vec{r}_b)\sum_\alpha \widetilde{\omega}_\alpha^2 \int\int dz_0 dv_{\alpha 0} f_{\alpha 0}(v)\delta(z - z_\alpha(t, z_0, v_{\alpha 0})) \tag{6}$$

Предположим, что начальное возмущение в рассматриваемой системе имеет характерный продольный размер (период) L , и, кроме того, будем считать, что известны собственные функции φ_m и собственные значения $k_{\perp m}^2$ поперечного сечения волновода. Тогда потенциал $\varphi^{/}$, как и все возмущённые величины можно представить в виде следующего двойного ряда:

$$\varphi^{/} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}(A_{nm}(t)\varphi_m(\vec{r}_\perp)exp(ink_z z) + k.c.), \tag{7}$$

где $k_z = 2\pi/L$ - основное продольное волновое число. Подставляя (7) в (6) и используя ортогональность систем функций $exp(ink_z z)$ и φ_m, будем иметь следующие выражения для коэффициентов разложения $A_{nm}(t)$:

$$A_{nm}(t) = \frac{\varphi_m(\vec{r}_b)}{\parallel \varphi_m \parallel (n^2k_z^2 + k_{\perp m}^2)}\sum_\alpha \widetilde{\omega}_\alpha^2 \rho_{\alpha n}, \tag{8}$$

где

$$\rho_{\alpha n} = \frac{k_z}{\pi}\int_0^{2\pi/k_z}\int f_{\alpha 0}(v)exp(-ink_z z_\alpha(t, z_0, v_{\alpha 0}))dz_0 dv_{\alpha 0} \tag{9}$$

Подставляя теперь (8) в (7) и затем в (4), получим следующие уравнения движения электронов пучков

$$\begin{aligned} \frac{dz_1}{dt} = v_1, \quad \frac{dv_1}{dt} = -\frac{i}{2}\frac{\omega_b^2}{k_z}\sum_\alpha \frac{\alpha_n}{n}\{(\rho_{1n} + \rho_{2n})exp(ink_z z_1) - k.c.\}, \\ \frac{dz_2}{dt} = v_2, \quad \frac{dv_2}{dt} = -\frac{i}{2}\frac{\omega_b^2}{k_z}\sum_\alpha \frac{\alpha_n}{n}\{(\rho_{1n} + \rho_{2n})exp(ink_z z_2) - k.c.\} \end{aligned} \tag{10}$$

Здесь

$$\alpha_{nm} = \sum_{m=1}^{\infty}\frac{n^2k_z^2}{n^2k_z^2 + k_{\perp m}^2}\frac{S_\alpha\varphi_m^2(\vec{r}_b)}{\parallel \varphi_m \parallel^2} \tag{11}$$

- безразмерный параметр. Вводя далее безразмерные величины

$$\tau = \omega_b t, \quad y_\alpha = ik_z z_\alpha, \ \eta_\alpha = \frac{k_z}{\omega_b}v_\alpha, \tag{12}$$

уравнения двухпучковой неустойчивости (уравнения движения (10), а также выражения (5) и (9)) можно записать в виде:

$$\frac{dy_1}{d\tau} = \eta_1, \quad \frac{d\eta_1}{d\tau} = -\frac{i}{2}\sum_{\alpha}\frac{\alpha_n}{n}\{(\rho_{1n}+\rho_{2n})exp(iny_1) - k.c.\},$$
$$\frac{dy_2}{d\tau} = \eta_2, \quad \frac{d\eta_2}{d\tau} = -\frac{i}{2}\sum_{\alpha}\frac{\alpha_n}{n}\{(\rho_{1n}+\rho_{2n})exp(iny_2) - k.c.\},$$
$$\rho_{\alpha n} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\int \widetilde{f}_{\alpha 0}(\eta_{\alpha 0})exp(-iny_\alpha(\tau, y_0, \eta_{\alpha 0}))dy_0 d\eta_{\alpha 0},$$
$$y_\alpha(0) = y_0 \in [0, 2\pi], \quad \eta_\alpha(0) = \eta_{\alpha 0}. \tag{13}$$

Здесь $\widetilde{f}_{\alpha 0}(\eta_{\alpha 0}) = \omega_b f_{\alpha 0}(v) \setminus k_z$ - начальная функция распределения, нормированная на 1:

$$\int_0^{2\pi}\int \widetilde{f}_{\alpha 0}(\eta_{\alpha 0})dy_0 d\eta_{\alpha 0} = 1 \tag{14}$$

Уравнения (13) и являются уравнениями двухпучковой неустойчивости. Как видно из этих уравнений, использование рассматриваемого в настоящей работе метода интегрирования по начальным данным позволило сформулировать задачу о двухпучковой неустойчивости в виде системы обыкновенных дифференциальных уравнений, то есть представить её в форме, не требующей применения обычно используемых при решении такого вида задач, довольно сложных методов интегрирования кинетического уравнения.

В качестве иллюстрации использования системы уравнений (13) в последующих работах мы предполагаем рассмотреть ряд случаев двухпучковой неустойчивости, в частности неустойчивости, соответствующей встречным пучкам.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кузелев М. В., Рухадзе А. А., Стрелков П. С. Плазменная релятивистская СВЧ - электроника. — М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2002. 544с.

2. Степанов В. В. Курс дифференциальных уравнений. — М.: Физматгиз, 1959. 468с.

3. Бобылёв Ю. В., Кузелев М. В., Рухадзе А. А. Задача Коши для кинетического уравнения Власова и метод интегрирования по начальным данным // Радиотехника и электроника. 2002. Том 47, № 2. С. 166-185.

4. Владимиров В. С. Обобщённые функции в математической физике. М.: Наука, 1979. 320с

———————————————————————————

УДК 669.056

Изменение статистических характеристик порошка сплава Ti-Zr-Nb в процессе гидридно-кальциевого синтеза[1]

Г. В. Маркова (Россия, г. Тула)
Тульский государственный университет
e-mail: galv.mark@rambler.ru

[1]Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда №22-23-20124, https://rscf.ru/project/22-23-20124/ и региона (Комитет Тульской области по науке и инновватике)

Д. В. Пермякова (Россия, г. Тула)
Тульский государственный университет
И. А. Алимов (Россия, г. Тула)
Тульский государственный университет
Д. О. Фролов (Россия, г. Тула)
Тульский государственный университет

The variation of statistical characteristics of Ti-Zr-Nb alloy powder in the process of calcium hydride synthesis

G. V. Markova (Russia, Tula)
Tula State University
e-mail: galv.mark@rambler.ru
D. V. Permyakova (Russia, Tula)
Tula State University
I. A. Alimov (Russia, Tula)
Tula State University
D. O. Frolov (Russia, Tula)
Tula State University

Низкомодульные сплавы системы Ti-Zr-Nb для медицинских применений могут быть получены с использованием разных технологий – литьем, механическим сплавлением, порошковой металлургией [1]. Последняя относится к числу наиболее перспективных современных технологических процессов, позволяющих не только получать гомогенные сплавы, но и обеспечивать необходимую пористость изделий, используемых в качестве имплантатов. Важнейшими технологическими свойствами порошков, ответственными за качество спеченных заготовок или изделий являются насыпная плотность, текучесть, прессуемость. Все эти свойства определяются морфологией и гранулометрическим составом порошка. В свою очередь, морфология порошков зависит от процессов, протекающих при их образовании. Например, при распылении, грануляции или осаждении из газовой фазы главным образом, образуются сферические или округлые частицы. В результате процессов восстановления, синтеза или разложения формируются губчатые порошки. При получении порошков методом электролиза порошинки приобретают дендритную морфологию, а при механическом измельчении хрупких материалов – осколочную. В процессе гидридно-кальциевого синтеза исследуемого сплава Ti-18Zr-15Nb, по данным электронной микроскопии образуются частицы губчатой морфологии. Состав и статистические характеристики образующегося порошка определяются температурно-временным режимом синтеза.

Цель работы – исследование параметров гранулометрического состава порошков сплава Ti-18Zr-15Nb, полученных по разным режимам гидридно-кальциевого восстановления из оксидов.

Для получения сплава Ti-18Zr-15Nb готовили смесь, состоящую из оксидов TiO_2 (марки SumTitan); ZrO_2 (марки ОСЧ 9-2); Nb_2O_5 (марки ТС); CaH_2 в соотношениях, необходимых для получения сплава Ti-18Zr-15Nb (Ti – 51,38 % масс., Zr – 26,30 % масс., Nb – 22,32 % масс.). Приготовленную смесь загружали в реакционную капсулу, помещали в контейнер, создавали вакуум и подавали аргон. Восстановление проводили в шахтной печи сопротивления при температурах 900, 1000, 1100 и 1200°C при продолжительности реакции без изотермической выдержки (τ=0 час.) и при выдержке в течение τ=6 час.

Структуру и форму частиц порошков изучали на инвертированном оптическом металлографическом микроскопе «AxioObserver. D1m» и на сканирующем электронном микроскопе JSM7600F (JEOL, Japan) при разных увеличениях.

Гранулометрический состав порошков исследовали на лазерном анализаторе частиц ANALYSETTE 22 MicroTec фирмы Fritsch. В качестве рабочей жидкости в блоке диспергирования использовали воду. Объем пробы для гранулометрического анализа составлял не менее 1250 частиц. При анализе методом лазерной дифракции частица условно считается идеальной сферой, диаметр которой измеряется. На основании полученных данных строят графики распределения частиц по размерам.

Фазовый состав полученных порошков определяли с использованием автоматизированного дифрактометра ДРОН-3 в монохроматическом CuK_α – излучении ($\lambda = 1,54178$Å). Для обработки дифракционных спектров использовали специализированный пакет программ. Относительные ошибки определения объемных долей фаз составляют 5 % об. Данные рентгеноструктурного анализа показали, что фазовый состав синтезированных порошков изменяется в процессе синтеза (табл. 1).

Таблица 1. Фазовый состав синтезированных порошков

Режим		Количество фазы, об.%					
T,°C	τ, час	TiO_2 (Ti_2O_3)	ZrO_2	Nb_2O_5	Nb*	Zr* (α и β)	Ti* (α и β)
900	0	72	20	8			
	6	3			14	23 (α и β)	60 (α)
1000	0	36	33	9	2		20
	6				18	8	74
1100	0				15	15	70
	6						100
1200	0						100
	6						100

*- восстановленные металлы и твердые растворы на их основе

На порошках, полученных после всех режимов синтеза провели анализ гранулометрического состава, по результатам которого построены гистограммы распределения частиц по размерам. На рисунке 1 приведены гистограммы после некоторых режимов синтеза.

Характер распределения частиц закономерно изменяется по мере повышения температуры и увеличения времени синтеза. От почти симметричной кривой $d(n)$ в полулогарифмических координатах на начальных стадиях синтеза вид распределения меняется до асимметричной с «хвостом» в сторону мелких частиц после синтеза при высоких температурах и большой длительности процесса. С помощью критерия Колмогорова-Смирнова была проведена проверка закона распределения, которая показала, что гипотеза о нормальном распределении должна быть отвергнута для всех экспериментально полученных распределений (табл. 2), поскольку для всех распределений $P < 0,05$.

Таблица 2. Проверка на нормальность по критерию Колмогорова-Смирнова

Режим	900, 0ч	900, 6ч	1000, 0ч	1000, 6ч	1100, 0ч	1100, 6ч	1200, 0ч	1200, 6ч
Критерий К.-С.	0,007	0,015	0,015	0,002	0,003	0,00005	0,0009	0,009

Полученные результаты соответствуют представлению о типичном распределении частиц порошка по размерам по логнормальному закону. В этом случае в качестве характеристик распределения, как принято в порошковой металлургии, используют параметры распределения: медианный диаметр D_m, модальное значение D_{mod}, а также параметры рассеяния случайных величин, в частности, ширину распределения (размах) $\mathrm{w} = D_{max} - D_{min}$. Анализ полученных

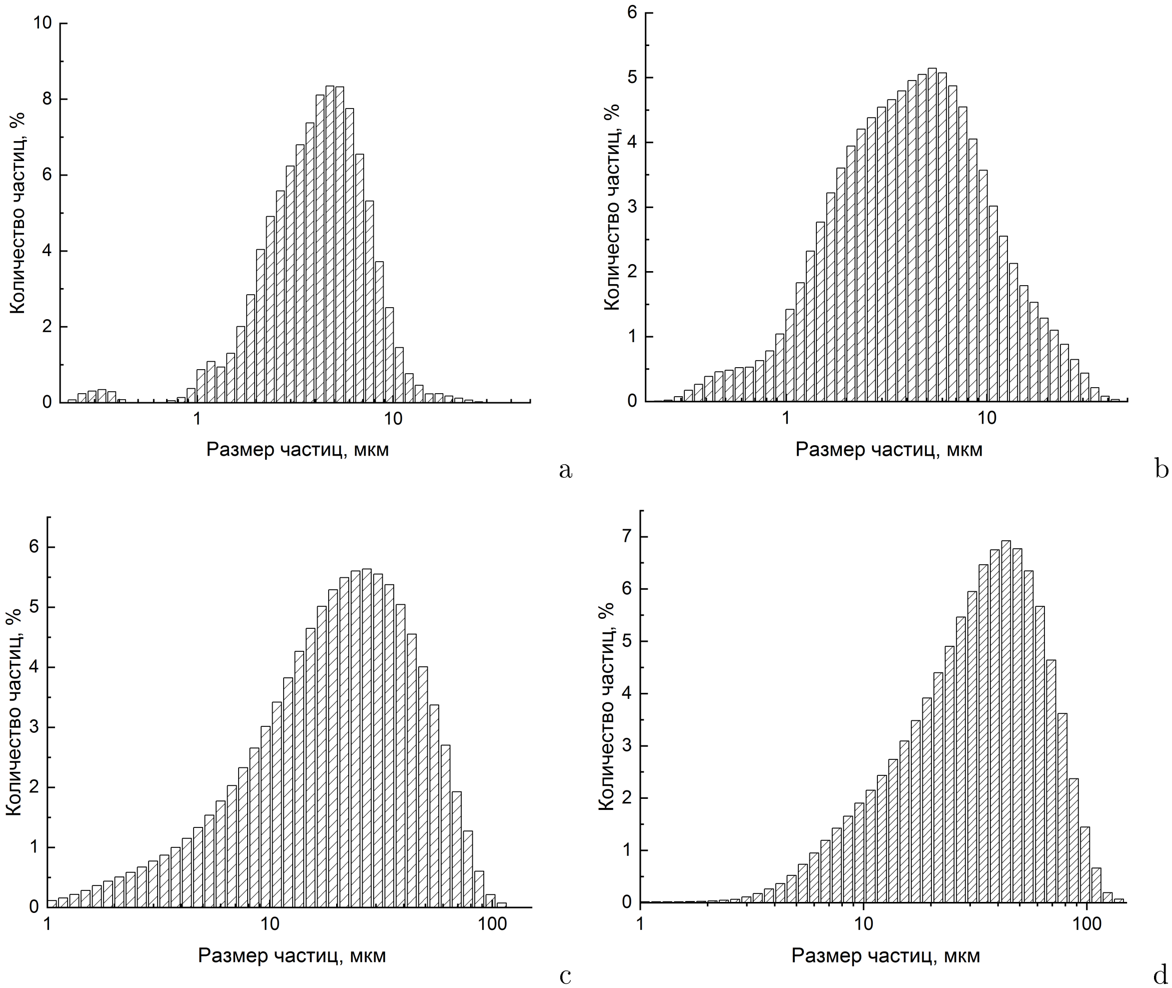


Рис. 1. Гистограммы: a – 900°C, 0час; b – 900°C, 6час; c – 1200°C, 0час; d – 1200°C, 6 час.

статистик показал, что по мере повышения температуры синтеза возрастают все статистические параметры распределений (табл. 3).

Отмечено, что большинство кривых распределения имеют мультимодальный характер. В связи с этим предпринята попытка разделения функции распределения частиц на парциальные составляющие. При этом руководствовались данными рентгеноструктурного анализа (табл. 1) и следующими допущениями:

1. Количество парциальных пиков, на которое проводили деление суммарных кривых распределений определяли в соответствии с фазовым составом синтезированного порошка. При этом подразумевали, что сразу после завершения химического восстановления оксидов получает развитие твердофазная диффузия, приводящая вначале к образованию твердых растворов замещения на основе главных компонентов сплава.

2. На первых этапах синтеза частицы восстановленных металлов не превышают по размеру частиц исходных оксидов.

3. После полного завершения процессов восстановления происходит постепенное обогащение твердого раствора на основе титана атомами циркония и ниобия до достижения равновесных концентраций, соответствующих образованию β - фазы.

4. Процессы агломерации частиц происходят главным образом после образования твердых растворов на основе восстановленных металлов в результате твердофазной диффузии.

Таблица 3. Статистические параметры функции распределения частиц по размерам

Статистические параметры	Режимы синтеза							
	900°C		1000°C		1100°C		1200°C	
	0ч.	6ч.	0ч.	6ч.	0ч.	6ч.	0ч.	6ч.
Ср. геометрич. медиана D_m, мкм	3,9	4,0	2,9	12,8	5,7	23,3	19,7	31,6
Мода D_{mod}, мкм	4,2	5,4	2,7	13,6	6,8	34,5	27,3	43,5
Ширина распределения w, мкм	30,4	38,4	38,3	86,8	48,7	98,1	97,8	123

В случае, когда экспериментально полученное распределение описывается несколькими логнормальными функциями, характеристиками каждой из них являются коэффициент A – площадь под кривой распределения (пропорциональна числу кристаллов) и два параметра: D_m* – медиана распределения парциального пика и w* – ширина распределения.

В построенном суммарном непрерывном полимодальном распределении каждая отдельная функция с ее параметрами описывает отдельную составляющую сложного состава, в формирование которой вносят вклад различные физические процессы. Разложение функций на парциальные составляющие и проведенный анализ параметров гауссианов порошка сплава показали следующее.

Парциальные максимумы, соответствующие частицам самых мелких фракций 2 – 10 мкм отвечают исходным оксидам и первым частицам восстановленных металлов. При повышении температуры синтеза значения моды этих парциальных пиков незначительно возрастают. После режима 1100°C, 6 часов эта группа максимумов практически исчезает. Начиная с режима 1100°C, 6 часов остаются только парциальные максимумы, отвечающие твердым растворам на основе титана. Одновременно на этой стадии в суммарной кривой распределения можно выделить парциальный пик, соответствующий формированию вторичных образований – агломератов частиц. При образовании агломератов развиваются процессы коалесценции. При этом образуется единая частица более равновесной конфигурации, что приводит к уменьшению поверхностной энергии за счет исчезновения поверхностей раздела вследствие слияния частиц. Парциальный пик, соответствующий агломератам, при температуре 1200°C увеличивает площадь с 55 до 85 % при увеличении времени синтеза до 6 часов, а средний размер агрегатов возрастает с 42 до 48 мкм. Вместе с тем увеличивается ширина распределения, что свидетельствует о неоднородности условий формирования частиц.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Конопацкий А. С., Дубинский С. М., Жукова Ю. С. и др. Экспериментальный поиск химических составов сверхупругих титановых сплавов с повышенными функциональными свойствами // МиТОМ. 2019. №6. с. 3 – 9.

——————————————————————————————

УДК 548.1

Экспериментально наблюдаемые дробные винтовые оси как евклидовы аппроксиманты осей политопов[1]

А. Л. Талис (Россия, г. Москва)
Институт элементоорганических соединений им. А. Н. Несмеянова Российской академии наук
e-mail: talishome@mail.ru
Я. В. Кучериненко (Россия, г. Москва)
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
e-mail: yar_kuch@mail.ru

Experimentally observed fractional helical axes as Euclidean approximants of polytope axes

A. L. Talis (Russia, Moscow)
A.N. Nesmeyanov Institute of Organoelement Compounds of Russian Academy of Sciences
e-mail: talishome@mail.ru
Ya. V. Kucherinenko (Russia, Moscow)
Lomonosov Moscow State University
e-mail: yar_kuch@mail.ru

В стержнях полимеров, биополимеров и плотноупакованных металлических кристаллов [1-5] экспериментально наблюдаются некристаллографические дробные винтовые оси L/m, осуществляющие поворот на $m \times 360°/L$. Винтовые оси порядка $L = 2, 3, 4, 6$ принадлежат классу кристаллографических осей, выделение которого определяется существованием симметрийной конструкции — трансляционной решетки кристалла. Можно предположить, что некристаллографические дробные оси также принадлежат некоторому классу осей, но задача определения симметрийной конструкции, выделяющей такой класс осей, не ставилась.

Известно, что симметрия спиральной подструктуры (наиболее общей формы линейной подструктуры) может определяться симметрией спиральных подструктур неевклидовых пространств, а некристаллографические дробные оси свойственны конструкциям n-мерной $3 < n \leqslant 8$ кристаллографии [6, 7]. Это позволило начать определение экспериментально обнаруженных спиралей с сопоставления им в 3-мерном евклидовом пространстве $\mathbb{E}^3$ периодических аппроксимант спиралей из 4-мерного аналога икосаэдра — политопа $\{3, 3, 5\}$, все 120 вершин которого принадлежат неевклидовому пространству 3-мерной сферы $\mathbb{S}^3$ [6, 7]. Действительно, некристаллографические дробные оси, например, 30/11, характерны для политопа $\{3, 3, 5\}$, в котором нами определена 40-вершинная спираль из 7-вершинных четверок, объединяемых по граням правильных тетраэдров (тетраблоков) [8]. Данная спираль с осью 20/9 позволила определить в $\mathbb{S}^3$ и $\mathbb{E}^3$ спирали с осями 40/9, 40/11.

Симметрия является геометрическим эквивалентом физического требования минимума свободной энергии системы [9], поэтому экспериментально наблюдаемую реализуемость таких аппроксимант можно объяснить некристаллографической симметрией, унаследованной ими от политопа $\{3, 3, 5\}$ и производных от него конструкций. В частности, широкую распространенность непериодической тетраэдрической спирали Коксетера-Бердийка (тетрагеликса)

[1] Обоснование структурных моделей выполнено в ИНЭОС в рамках госзадания №075-03-2023-642 Минобрнауки России. Расчет параметров моделей проведен в МГУ в рамках НИР №АААА-А16-116033010121-7

можно объяснить симметрией политопа $\{3,3,5\}$, содержащего соответствующую тетрагеликсу торическая спираль с осью 30/11. Примером подобной реализации является и кристалл β-Mn, допускающий представление в виде кубической решетки стержней из аппроксимант 8/3 тетрагеликса 30/11. В кристалле α-Mn можно выделить аппроксимант 11/4 тетрагеликса 30/11 и аппроксимант 7/3 спирали 20/9 из тетраблоков. Существование в кристалле α-Mn двух таких стержней отображает наличие симметрий 30/11 и 20/9 в политопе $\{3,3,5\}$ [5]. Экспериментально определенные параметры идеальной прямой α-спирали рассматриваются нами как реализация параметров аппроксиманта спирали 40/11, определяемой политопом 240 — алмазоподобным объединением двух политопов $\{3,3,5\}$ [4].

В качестве симметрийно-установленного класса осей, априори определяющего возможные дробные винтовые оси, нами выделены 50 базисных осей. Они определяются политопом $\{3,3,5\}$ и производными от него конструкциями, которые позволяют получить и составные (определяемые объединением базисных) оси. Например, наиболее близкий аппроксимант непериодического тетрагеликса – это составная ось 71/26, которая является объединением двух аппроксимант 30/11 и аппроксиманта 11/4 оси 30/11: $71/26 = (30+30+11)/(11+11+4)$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Müller U. Die Symmetrie von Spiralketten // Acta Crystallographica. 2017. B73, P. 443-452.

2. Clark E. S. The molecular conformations of polytetrafluoroethylene: forms II and IV // Polymer. 1999. V 40, P. 4659–4665.

3. De Rosa C., Auriemma F. Crystals and Crystallinity in Polymers. — Hoboken: Wiley, 2013. 461 p.

4. Samoylovich M., Talis A. Symmetry of helicoidal biopolymers in the frameworks of algebraic geometry: α-helix and DNA structures // Acta Crystallographica. 2014. A70, P. 186-198.

5. Talis A. L., Everstov A. A., Kraposhin V. S. Crystal structures of alpha and beta modifications of Mn as packing of tetrahedral helices extracted from a four-dimensional $\{3,3,5\}$ polytope // Acta Crystallographica. 2020. B76, P. 948–954.

6. Coxeter H. S. M. Regular Polytopes. — New York: Dover Publications. 1973.

7. Ishii Y. Propagating Local Positional Order in Tetrahedrally Bonded Systems // Acta Crystallographica. 1988. A44, P. 987-998.

8. Талис А. Л., Рабинович А. Л. Симметрия структур, аппроксимируемых цепями правильных тетраэдров // Кристаллография. 2019. Том 64, № 3. С. 341-350.

9. Вайнштейн Б. К. Современная кристаллография. Том 1. Симметрия кристаллов, методы структурной кристаллографии. — М: Наука, 1979. 384 с.

———————————————————————————————

УДК 539.3 + 539.5

О непрерывности континуума Коссера[1]

[1]при необходимости информация о финансировании

Д. О. Фролов (Россия, г. Тула)
Тульский государственный университет
e-mail: *fdolegovich@yandex.ru*

On the continuity of the Cosserat continuum

D. O. Frolov (Russia, Tula)
Tula State University
e-mail: *fdolegovich@yandex.ru*

1. Введение

В классической (симметричной) теории упругости твердое тело является сплошным и не имеет какой-либо структруры. На этом предположении построена вся механика сплошных сред [1]. Так, например, для описания деформации тела и возникающих в нем напряжений поступают следующим образом. Любое тело представляют множеством точек, положение которых в пространстве задается их радиус-векторами ($\mathbf{r_1}, \mathbf{r_2}, \mathbf{r_3}$ и т.д.) в выбранной системе координат. В случае деформации тела все его точки, строго говоря, смещаются. И если сфокусировать внимание на какой-нибудь одной точке N тела, то смещение выбранной точки изобразится вектором деформации $\mathbf{u}$. Такой подход позволяет ввести самую простую степень свободы движения точки – *поступательную*. После чего может быть построен тензор деформации тела u_{ik} и далее симметричный тензор напряжений σ_{ik}.

Одним из основных положений классической теории упругости является принцип напряжений Эйлера-Коши, согласно которого, на любой поверхности внутри тела действие одной части тела на другую эквивалентно системе распределенных сил, приложенных к поверхности, разделяющей тело [2]. Их появление в свою очередь эквивалентно действию равнодействующей, приложенной к центру площадки. Однако, в общем случае действие произвольной системы таких векторов приводит к появлению моментов сил. При этом в материале возникают не только напряжения, но и моментные напряжения, образующие, вообще говоря, несимметричные тензоры. Если считать, что массовые моменты и моментные напряжения равны нулю, то в этом случае остаются только симметричные напряжения. Разумеется, такая модель не может описать все особенности упругого поведения тел и, в частности, переход к неупругому поведению (когда симметрия тензорного поля напряжений нарушается). Ведь, в действительности, имеющиеся моментные напряжения ненулевые, что приводит к изменению условий равновесия и возможным поворотам бесконечно малых объемов в материале.

Первыми, кто обратил на этот важный факт внимание, были братья Коссера (1909). В своей фундаментальной работе [3] они показали, что более корректное описание материала при его деформации возможно только в том случае, если вместо материальной точки рассматривать динамику бесконечно малого физического объема. Так они ввели вторую *вращательную* степень свободы φ, наделив тем самым материальную точку свойствами твердого тела. В континууме Коссера спектр свойств материала расширен, благодаря ротационному механизму движения отдельных субструктур. Некоторое время на работу братьев Коссера не обращали внимания. Свое развитие идея упругого континуума, состоящего из большого количества тел-точек, нашла позднее в работах Аэро, Новацкого, Эрингена и других исследователей. Ими, фактически, были заложены основы современной (несимметричной) теории микрополярной упругости материалов с микроструктурой.

Моделирование упругого континуума Коссера в большинстве случаев развивается на основе уравнения непрерывности, известного ещё из механики сплошных сред. То же самое происходит и в случае с континуумом Максвелла, скажем. Исследование неупругого континуума Коссера предполагает введение дополнительных уравнений, связанных с перемещением и перераспределением дефектов структуры. Эти уравнения представлены в работах Лазаря [4]. При описании пластического поведения псевдоконтинуума Коссера большое распространение получила система уравнений непрерывности для дефектов Коссески и деВита [5].

В настоящей заметке я хотел бы показать, что при моделировании микрополярной среды с дефектами большой интерес могут представлять математические условия, раскрывающие особенности следа тензоров потока дислокаций и дисклинаций, на основе которых может быть построена мезоскопическая модель твердого тела.

2. Кинематика микрополярной среды

Для определенности будем говорить о малых деформациях. Введём кинематические величины, которые описывают полную (англ. Total – сокр. T) деформацию в теле. Зададим *тензор микрополярных деформаций* $\varepsilon^T_{k\ell}$, *тензор изгиба-кручения* κ^T_{mq}, *линейную скорость* смещения бесконечно малого элемента среды υ^T_ℓ и *скорость локальных микровращений* w^T_q. Имея ввиду, что полное смещение малого элемента u^T_ℓ, а вращение задается углом поворота φ^T_q, имеем

$$\begin{aligned} \varepsilon^T_{k\ell} &= u^T_{\ell,k} + \epsilon_{\ell kq}\varphi^T_q, \\ \kappa^T_{mq} = \varphi^T_{q,m} &= \frac{1}{2}\epsilon_{k\ell q}\varphi^T_{\ell k,m}, \\ \upsilon^T_\ell &= \dot{u}^T_\ell, \\ w^T_q = \dot{\varphi}^T_q &= \frac{1}{2}\epsilon_{k\ell q}\dot{\varphi}^T_{\ell k}, \end{aligned} \tag{1}$$

где $\epsilon_{k\ell q}$ – тензор Леви - Чевитты. Далее легко составить дифференциальные уравнения

$$\begin{aligned} \epsilon_{pmk}\kappa^T_{kq,m} &= 0, \\ w^T_{q,m} - \dot{\kappa}^T_{mq} &= 0, \\ \upsilon^T_{\ell,k} - \dot{\varepsilon}^T_{k\ell} - \epsilon_{k\ell q}w^T_q &= 0, \\ \epsilon_{pmk}\left(\varepsilon^T_{k\ell,m} + \epsilon_{k\ell q}\kappa^T_{mq}\right) &= 0, \end{aligned} \tag{2}$$

описывающие полную деформацию в любых телах.

Как известно пластическая деформация возникает благодаря наличию дефектов в материале и их движению, в то время как упругая обусловлена искажением кристаллической решетки и изменением сил межатомного взаимодействия в результате изменения расстояний между частицами среды. Это позволяет разделить упругую и пластическую составляющие

$$\begin{aligned} \varepsilon^T_{k\ell} &= \varepsilon_{k\ell} + \varepsilon^{pl}_{k\ell}, \\ \kappa^T_{kq} &= \kappa_{kq} + \kappa^{pl}_{kq}, \\ \upsilon^T_\ell &= \upsilon_\ell + \upsilon^{pl}_\ell, \\ w^T_q &= w_q + w^{pl}_q. \end{aligned} \tag{3}$$

По мере деформации плотность дефектов может меняться, так как с течением времени развиваются потоки дислокаций в различных направлениях и образуются вихри из дисклинаций. Производя подстановку соотношений (3) в систему равенств (1) нетрудно заметить, что тензоры плотности дислокаций $\alpha_{p\ell}$ и дисклинаций θ_{pq} могут быть представлены в виде

$$\alpha_{p\ell} = -\epsilon_{pmk}\left(\varepsilon^{pl}_{k\ell,m} + \epsilon_{k\ell q}\kappa^{pl}_{mq}\right), \quad \theta_{pq} = -\epsilon_{pmk}\kappa^{pl}_{kq,m}. \tag{4}$$

Таким же образом можно ввести потоки дислокаций $J_{k\ell}$ и дисклинаций S_{kq}, а именно

$$J_{k\ell} = -\upsilon^{pl}_{\ell,k} + \dot{\varepsilon}^{pl}_{k\ell} + \epsilon_{k\ell q} w^{pl}_q, \quad S_{kq} = -w^{pl}_{q,k} + \dot{\kappa}^{pl}_{kq}. \tag{5}$$

С другой стороны ясно как тензоры, определяющие дефекты и их динамику связаны с упругими деформациями в теле

$$\begin{aligned} \epsilon_{pmk}\left(\varepsilon_{k\ell,m} + \epsilon_{k\ell q}\kappa_{mq}\right) &= \alpha_{p\ell}, \\ \epsilon_{pmk}\kappa_{kq,m} &= \theta_{pq}, \\ \upsilon_{\ell,k} - \dot{\varepsilon}_{k\ell} - \epsilon_{k\ell q} w_q &= J_{k\ell}, \\ w_{q,k} - \dot{\kappa}_{kq} &= S_{kq}. \end{aligned} \tag{6}$$

Эта связь вытекает из выражений (1) и (3). В то же самое время непрерывность микрополярной среды определяется уравнениями баланса и распределением дефектов в пространстве

$$\begin{aligned} \theta_{pq,p} &= 0, \\ \dot{\theta}_{pq} + \epsilon_{pmk} S_{kq,m} &= 0, \\ \alpha_{p\ell,p} + \epsilon_{\ell pq}\theta_{pq} &= 0, \\ \dot{\alpha}_{p\ell} + \epsilon_{pmk}\left(J_{k\ell,m} + \epsilon_{k\ell q} S_{mq}\right) &= 0. \end{aligned} \tag{7}$$

Это легко проверить обычной подстановкой заданных величин. В контексте проводимого исследования особый интерес представляет связь следа каждого из тензоров $J_{k\ell}$ и S_{kq} с классическим уравнением непрерывности сплошной среды. Из (6) следует, что след J_{kk} равен

$$J_{kk} = \upsilon_{k,k} - \dot{\varepsilon}_{kk}. \tag{8}$$

Выясним физический смысл уравнения (8). Для этого перепишем его в другом виде

$$\frac{\partial \varepsilon_{kk}}{\partial t} - div\mathbf{v} = -J_{kk}. \tag{9}$$

Для свертки тензора плотности потока дисклинаций аналогично получаем

$$\frac{\partial \kappa_{kk}}{\partial t} - div\mathbf{w} = -S_{kk}. \tag{10}$$

Появление уравнения (10) в этой цепочке неизбежно, так как континуум описывается не только координатами x, y, z в прямоугольной с/к, отражающими трансляционные смещения, но и локальными поворотами φ отдельных элементов среды. Так как движение дефектов в структуре сопровождается образованием некоторых микроразрывов сплошности, например скоплением вакансий (что характерно для кристаллических сред), то левые части соотношений (9) и (10) будут отличными от нуля и равны скорости относительного неупругого изменения массы (или плотности дефектов) в некотором элементарном объеме среды

$$J_{kk} = -\upsilon^{pl}_{k,k} + \dot{\varepsilon}^{pl}_{kk}, \quad S_{kk} = -w^{pl}_{k,k} + \dot{\kappa}^{pl}_{kk}. \tag{11}$$

В этой связи можно составить условия, при которых возможно проводить моделирование этой и подобных ей сред [6]. *Данные условия* вытекают из соотношений (11). Если при движении дефектов элементы среды перемещаются без нарушения сплошности, то

$$J_{kk} = S_{kk} = 0 \quad \text{и} \quad -\upsilon^{pl}_{k,k} + \dot{\varepsilon}^{pl}_{kk} = 0, \quad -w^{pl}_{k,k} + \dot{\kappa}^{pl}_{kk} = 0. \tag{12}$$

Выполнение этих равенств возможно, если $\dot{\varepsilon}^{pl}_{kk} = \upsilon^{pl}_{k,k}$ и $\dot{\kappa}^{pl}_{kk} = w^{pl}_{k,k}$. При этом в частном случае полагаем $\dot{\varepsilon}^{pl}_{kk} = \upsilon^{pl}_{k,k} = 0$, $\dot{\kappa}^{pl}_{kk} = w^{pl}_{k,k} = 0$. Согласно (12) левые части уравнений (9) и (10) исчезают

$$\frac{\partial \varepsilon_{kk}}{\partial t} - div\mathbf{v} = 0, \quad \frac{\partial \kappa_{kk}}{\partial t} - div\mathbf{w} = 0. \tag{13}$$

При переходе к классической теории упругости должно выполняться $\varphi^T_q = 0, \kappa^T_{kq} = 0$ и $S_{kq} = 0$. В результате уравнение (10) пропадает и в системе (13) остается одно единственное уравнение. Свертка ε_{kk} есть ни что иное, как относительное упругое изменение объема элемента среды, соответствующее относительному изменению её плотности $\varepsilon_{kk} \sim -\delta\rho/\rho$. После замены ε_{kk} в (13) приходим к классическому уравнению непрерывности среды

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + div\rho\mathbf{v} = 0. \tag{14}$$

3. Заключение

Изложенные условия (12), раскрывающие смысл непрерывности континуума Коссера, и составленные уравнения (13) могут упростить путь построения (или развития) мезоскопической модели твердого тела, скажем, механической модели Марченко – Мисбаха для аморфных материалов [7] в силу своей простоты и преемственности по отношению к континуальной теории дислокаций.

Благодарности

Пользуясь случаем, выражаю глубокую признательность Левину Даниилу Михайловичу за полезную дискуссию и проявленный интерес к данной работе.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория упругости. – Москва: Наука, 1987. 247 с.
2. Ерофеев В. И. Братья Коссера и механика обобщенных континуумов // Вычислительная механика сплошных сред. 2009. Т. 2, №4. С. 5–10.
3. Cosserat E. , Cosserat F. Theorie des Corps Deformables. – Paris: Rue de la Sorbonne, 1909. 227 p.
4. Lazar M., Maugin G. Defects in gradient micropolar elasticity: I. Screw dislocation // Journal of the Mechanics and Physics of Solids. 2004. Vol. 52. pp. 2263–2284.
5. Kossecka E., deWit R. Disclination kinematics // Archives of Mechanics. 1977. Vol. 29, №5. pp. 633–651.
6. Ханнанов Ш. Х. Электроупругие поля движущихся дислокаций и дисклинаций в пьезоэлектрических кристаллах // ФТТ. 1999. Т. 41, вып. 7. С. 1210–1213.
7. Marchenko V. I., Misbah Ch. Model of plasticity of amorphous materials // Phys. Rev. E. 2011. Vol. 84. Iss. 2. pp. 021502 (1–7).

УДК 539.21:621.785

Автоволновые процессы в деформируемых изделиях 3d-технологии[1]

А. Н. Чуканов (Россия, г. Тула)
Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого
e-mail: *alexchukanov@yandex.ru*
Н. Н. Добровольский (Россия, г. Тула)
Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого
e-mail: *nikola.dobrovolsky@gmail.com*
Е. В. Цой (Россия, г. Тула)
Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого
e-mail: *tsoyev@tsput.ru*
А. А. Яковенко (Россия, г. Тула)
ООО «Металлург-Туламаш»
e-mail: *dispozisiiy100@yandex.ru*

Autowave processes in deformable products of 3D technology

A. N. Chukanov (Russia, Tula)
Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University
e-mail: *alexchukanov@yandex.ru*
N. N. Dobrovolsky (Russia, Tula)
Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University
e-mail: *nikola.dobrovolsky@gmail.com*
E. V. Tsoi (Russia, Tula)
Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University
e-mail: *tsoyev@tsput.ru*
A. A. Yakovenko (Россия, Тула)
LLC "Metallurgtulamash"
e-mail: *dispozisiiy100@yandex.ru*

1. Введение

Вопрос локализации пластической деформации при нагружении изделий аддитивных SLM технологий (АТ) и фиксации в них автоволновых деформационных процессов изучен недостаточно полно [1,2]. Их актуальность определяется, с одной стороны, растущим объёмом изделий SLM, используемых в ответственных и тяжело-нагруженных узлах современных машин и механизмов. С другой стороны, отсутствием всеобъемлющей информации о влиянии структурной неоднородности (анизотропии) на зарождение пластической деформации в отдельных микрообъёмах (локальных очагах пластичности) и волновой характер её распространения ЛПД в процессе их эксплуатации. Исследования тормозит мнение об отсутствии необходимости изучения волновой природы материалов АТ. Считается, что волновой процессы деформации реализуются при недопустимых нагрузках (аварийная ситуация). Авторы статьи считают

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Российского научного фонда проект № 23-29-00433: «Волновая деформация и её взаимосвязь с ортотропией структуры и физико-механических свойств в изделиях селективного лазерного сплавления».

подобный подход не верным. Ранее они выявили в анизотропных материалах АТ волновой характер пластической деформации [3,4]. Рассматривали вопрос достоверности зафиксированных волновых спектров с учётом погрешностей, выявленных при АЦП и обработке данных видеофиксации процесса нагружении.

Цель данной работы – на основе статистической обработки данных испытаний на растяжение подтвердить периодичность выявленных зависимостей характеристик волновой деформации и определить их кинетические параметры.

Материал и методики исследования. Объекты – образцы порошковой нержавеющей стали марки 03Х18Н12М2 (аналог *AISI* 316L), изготовленные по *SLM*-технологии в двух направлениях сканирования относительно платформы 3d-принтера ***SLM*280 2.0*HL*** Образцы с предварительно нанесенной разметочной сеткой подвергали растяжению (ГОСТ 1497-84, тип I). Процесс нагружения до разрушения фиксировали на цифровую фотокамеру *Canon EOS 250D* в режиме 4k и сохраняли в формате *.mov.* Полученные изображения с заданными временными интервалами обрабатывали в графических редакторах [5-7]. Определяли изменение длины элементов сетки li(мм) и их относительную деформацию - δ. Строили графики зависимостей их локальной относительной деформации (δ) по длине образца (l, мм) в определённое время (t, сек) [8,9]. Параллельно проводили металлографический анализ структуры образцов [10].

2. Результаты экспериментов их анализ

Вид графиков зависимостей δ=$f(l_i)$, δ=$f(t_i)$ и их анализ подтвердил наличие их периодичности (многостадийности) по времени испытаний и волнового характера локальных деформаций δ по длине образца. В структуре волновых спектров (δ=(l_i)), развивающихся в течении испытания, фиксировали движение отдельных максимумов локальной деформации. Отметили многостадийный периодический характер увеличения высоты максимумов в течении длительности нагружения образца δ=$f(t_i)$ [6].

Для исключения влияния на эти выводы погрешности, связанной с аналогово-цифровым преобразованием (АЦП) оптического изображения разметочной сетки, проецируемого на матрицу фотокамеры, и его количественным анализом в графических редакторах [6,7], полученные зависимости (δ=$f(l_i)$, δ=$f(t_i)$, подвергли статистической обработке. Из высот максимумов волновых спектров на зависимостях (δ=$f(l_i)$ исключали указанную погрешность, считая её неустранимой [9,10]. Математическая обработка этих зависимостей заключалась в статистической обработке (аппроксимации) полученных массивов локальных деформаций δ=$f(l_i)$ и δ=$f(t_i)$ на участках расчётной длины образца (l=42 мм); б - (l=52 мм) с максимальной пластической деформацией, фиксировавшейся во время испытания (t, сек). Строили графики полиномиальной аппроксимации протяжённости (Δt, сек) временных интервалов изменения деформации на указанных участках.

Наилучшее соответствие показала полиномиальная аппроксимация зависимости протяжённости (Δt, сек) временных интервалов изменения деформации на участке l=52 мм: y = -0,0861x^6 + 2,6571x^5 - 32,319x^4 + 195,69x^3 - 608,24x^2 + 882,33x - 410; RI = 0,9483 и на участке l=42 мм: y = -0,0174x^6 + 0,5268x^5 - 5,9436x^4 + 30,259x^3 - 65,541x^2 + 39,53x + 31; RI = 0,6563

На всех полученных зависимостях наблюдали явную периодичность. Кинетические зависимости отразили наличие максимумов скорости локализованной пластической деформации на различных участках длины образца, положение которых изменялось в течение нагружения образца.

На основе полученных моделей строили кинетические зависимостей волнового процесса - изменения скорости движения локальных максимумов пластичности и скорости деформации ($d\delta/dt$) и получали их количественные характеристики.

Полиномиальная аппроксимация зависимости скорости движения максимумов и их локальной деформации ($d\delta/dt$) от длительности испытания (t, сек) имела вид для участка l=42 мм: y = 5E-05x^6 - 0,0019x^5 + 0,0267x^4 - 0,1871x^3 + 0,6529x^2 - 1,0168x + 0,53; RI = 0,5159 и для участка l=52 мм: y = -8E-14x^6 + 5E-11x^5 - 1E-08x^4 + 1E-06x^3 - 7E-05x^2 + 0,0018x - 0,0123; RI = 0,1773.

Полученные результаты на основе сравнения уровня достоверности аппроксимации и величины доверительных интервалов позволили статистически достоверно зафиксировать локацию микрообъёмов с максимально высокой скоростью пластической деформации.

На основании полученных данных строили гистограммы изменения скорости деформации ($d\delta/dt$) на участках расчётной длины образца l=42мм и l=52мм с максимальной пластической деформацией от длительности испытания (t, сек).

Анализ полученных гистограмм подтвердил наличие в объёме нагруженных образцов формирование группы очагов (группы максимумов) локализованной деформации, перемещающихся по длине образца под действием растущей внешней нагрузки.

Достоверность полученных выводов дополнительно подтвердили результаты анализа комбинации кусочно-линейных ((δ =$f(t)$) и периодических (δ =$f(l_i)$) функции. Для выделения периодической компоненты указанных функций восстанавливали с помощью Фурье-интерполяции [11].

3. Выводы

1. Статистически достоверно подтвердили наличие ранее выявленного волнового многостадийного характера изменения скорости ЛПД.

2. Аппроксимация полученных зависимостей позволила уточнить количество, скорость и временные диапазоны развития микрообъёмов (очагов) локализованной пластической деформации на различных временных этапах испытаний и исключить влияние отмеченных погрешностей на достоверность наличия волновых спектров ЛПД.

3. Оценили скорость и временные диапазоны эволюционирования микрообъёмов локализованной пластической деформации в образцах 3d технологии.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Российского научного фонда проект № 23-29-00433: «Волновая деформация и её взаимосвязь с ортотропией структуры и физико-механических свойств в изделиях селективного лазерного сплавления».

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Панин В.Е., Гриняев Ю.В., Данилов В.И. и др. Структурные уровни пластической деформации и разрушения. Новосибирск, Наука, Сиб. отд-ние. 1990. 255 с.

2. Зуев Л.Б., Данилов В.И. Медленные автоволновые процессы при деформации твёрдых тел // Физическая мезомеханика.- 2003.- т.6.-3 1.- С. 75-94.

3. Чуканов А.Н. Анизотропия деформации при послойном лазерном синтезе изделий // «Перспективные технологии и материалы». Матер. ВНПК с межд. уч., (Севастополь, 14–16.10.2020 г.), Научное издание. - СевГУ. 222с., С. 169 -174.

4. Чуканов А.Н. Анизотропия физико-механических свойств при послойном лазерном синтезе // «Современные проблемы и направления развития металловедения и термической обработки металлов и сплавов», посвящ. 150-ю акад. А.А. Байкова: Сб. научн. статей МНПК. (18.09.2020 г); Сб. научн. статей. Курск: Юго-Зап. гос. ун-т, 2020. - 271 с. - С. 244-247.

5. Чуканов А.Н., Добровольский Н.Н., Цой Е.В., Матвеева *А.В. Машинное зрение в анализе* волновой деформации в анизотропных металлах // 2 МНПК (НТ-03) «Актуальные вопросы науки, нанотехнологий, производства», (9.12.2022, г. Курск), Сб. научн. статей. Россия, Юго-Западный государственный университет, - С. 397 – 404.

6. Чуканов А.Н., Цой Е.В., Яковенко А.А. Наблюдение волновых процессов при деформации изделий SLM технологии // Современные материалы, техника и технологии. - 2023. - №4(49). – С. (в печати).

7. Чуканов А.Н., Цой Е.В., Яковенко А.А., Малий Д.В., Гончаров С.С. Фотограмметрия в фиксации и анализе локализованной деформации 3d образцов//4 МНПК «Современные проблемы и направления развития металловедения и термической обработки металлов и сплавов», посвященная памяти академика А.А. Байкова (СМП-04)».- Сб. научн. тр. (15.09.2023 г.).- Юго-Зап. гос. ун-т, Курск: ЮЗГУ, 2023. (в печати).

8. Чуканов А.Н., Терёшин В.А., Цой Е.В., Матвеева А.В. Волновой характер деформации при растяжении изделий послойного лазерного синтеза // 7 ВНТК с межд. уч. «Перспективы развития технологий обработки и оборудования в машиностроении (МТО-62)» (10-11.02. 2022 г.): Сб. научн. статей., Курск: Юго-Зап. гос. ун-т, 2022. С. 206-210.

9. Чуканов А.Н., Терёшин В.А., Цой Е.В., Матвеева А.В. Структура волнового спектра пластической деформации изделий SLM-технологии//XVII МНПК «Современные инструментальные системы, информационные технологии и инновации».- Сб. научн. тр. (17-18.03.2022 г.).- Юго-Зап. гос. ун-т, Курск: ЮЗГУ, 2022. - 386 с. – С. 369-372.

10. Чуканов А.Н., Цой Е.В., Яковенко А.А. Матвеева А.В. Микроструктура, механические свойства и волновые процессы при деформации образцов сплава 316L SLM-технологии//4 МНПК «Современные проблемы и направления развития металловедения и термической обработки металлов и сплавов», посвященная памяти академика А.А. Байкова (СМП-04)».- Сб. научн. тр. (15.09.2023 г.).- Юго-Зап. гос. ун-т, Курск: ЮЗГУ, 2023. (в печати).

11. Чуканов А.Н., Добровольский *Н.Н.,* Сергеев А.Н., Басалов Ю.А., Цой Е.В., Матвеева А.В. А*налогово-цифровое преобразование* кусочно-линейных и периодических функций волновой деформации в металлах//Чебышевский сборник. - 2023.- т. 24. - Вып. - 2. - С. (в печати)

———————————————————————————

СОДЕРЖАНИЕ