Решение алгоритмических проблем в $C(p)\&T(q)$-группах и группах Кокстера

Кучеров Игорь Игоревич

Тульский государственный педагогический университет им. Л.Н. Толстого

couchman@list.ru

Тула–2012 г.

Содержание

С опорой, в основном, на источники [5], [4], [1], [6] в нашем обзоре рассматриваются:

- диаграммы над свободными группами: условия малой сократимости $C(p)$ и $T(q)$; дуальные карты; формулы кривизны; теоремы о площади и слое;
- решение проблем равенства и сопряженности для специального класса малосократимых групп;
- специальные диаграммы для групп Кокстера: условие малой сократимости, понятия деновской области и полосы, их связь с алгоритмом Дена; R-приводимость, специальная R-приводимость, специальная кольцевая приводимость; классификация диаграмм сопряженности;
- решение проблем равенства и сопряженности слов в группах Кокстера (большого типа).

Содержание

С опорой, в основном, на источники [5], [4], [1], [6] в нашем обзоре рассматриваются:

- диаграммы над свободными группами: условия малой сократимости $C(p)$ и $T(q)$; дуальные карты; формулы кривизны; теоремы о площади и слое;
- решение проблем равенства и сопряженности для специального класса малосократимых групп;
- специальные диаграммы для групп Кокстера: условие малой сократимости, понятия деновской области и полосы, их связь с алгоритмом Дена; R-приводимость, специальная R-приводимость, специальная кольцевая приводимость; классификация диаграмм сопряженности;
- решение проблем равенства и сопряженности слов в группах Кокстера (большого типа).

Содержание

С опорой, в основном, на источники [5], [4], [1], [6] в нашем обзоре рассматриваются:

- диаграммы над свободными группами: условия малой сократимости $C(p)$ и $T(q)$; дуальные карты; формулы кривизны; теоремы о площади и слое;
- решение проблем равенства и сопряженности для специального класса малосократимых групп;
- специальные диаграммы для групп Кокстера: условие малой сократимости, понятия деновской области и полосы, их связь с алгоритмом Дена; R-приводимость, специальная R-приводимость, специальная кольцевая приводимость; классификация диаграмм сопряженности;
- решение проблем равенства и сопряженности слов в группах Кокстера (большого типа).

Содержание

С опорой, в основном, на источники [5], [4], [1], [6] в нашем обзоре рассматриваются:

- диаграммы над свободными группами: условия малой сократимости $C(p)$ и $T(q)$; дуальные карты; формулы кривиизны; теоремы о площади и слое;
- решение проблем равенства и сопряженности для специального класса малосократимых групп;
- специальные диаграммы для групп Кокстера: условие малой сократимости, понятия деновской области и полосы, их связь с алгоритмом Дена; R-приводимость, специальная R-приводимость, специальная кольцевая приводимость; классификация диаграмм сопряженности;
- решение проблем равенства и сопряженности слов в группах Кокстера (большого типа).

Содержание

С опорой, в основном, на источники [5], [4], [1], [6] в нашем обзоре рассматриваются:

- диаграммы над свободными группами: условия малой сократимости $C(p)$ и $T(q)$; дуальные карты; формулы кривиизны; теоремы о площади и слое;
- решение проблем равенства и сопряженности для специального класса малосократимых групп;
- специальные диаграммы для групп Кокстера: условие малой сократимости, понятия деновской области и полосы, их связь с алгоритмом Дена; R-приводимость, специальная R-приводимость, специальная кольцевая приводимость; классификация диаграмм сопряженности;
- решение проблем равенства и сопряженности слов в группах Кокстера (большого типа).

Актуальность темы

Между малосократимыми группами и группами Кокстера существует глубокая связь, которая позволяет применять рассмотренные методы при дальнейшем исследовании различных алгоритмических проблем. Сюда относятся:

- проблемы степенной сопряженности для малосократимых групп и групп Кокстера большого типа;
- проблемы изоморфизма и финитной аппроксимируемости групп Кокстера экстрабольшого типа;
- оценки алгоритмической сложности проблем равенства и сопряженности, а также адаптация соответствующих алгоритмов для применения в криптографических системах с открытым ключом.

Актуальность темы

Между малосократимыми группами и группами Кокстера существует глубокая связь, которая позволяет применять рассмотренные методы при дальнейшем исследовании различных алгоритмических проблем. Сюда относятся:

- проблемы степенной сопряженности для малосократимых групп и групп Кокстера большого типа;
- проблемы изоморфизма и финитной аппроксимируемости групп Кокстера экстрабольшого типа;
- оценки алгоритмической сложности проблем равенства и сопряженности, а также адаптация соответствующих алгоритмов для применения в криптографических системах с открытым ключом.

Актуальность темы

Между малосократимыми группами и группами Кокстера существует глубокая связь, которая позволяет применять рассмотренные методы при дальнейшем исследовании различных алгоритмических проблем. Сюда относятся:

- проблемы степенной сопряженности для малосократимых групп и групп Кокстера большого типа;
- проблемы изоморфизма и финитной аппроксимируемости групп Кокстера экстрабольшого типа;
- оценки алгоритмической сложности проблем равенства и сопряженности, а также адаптация соответствующих алгоритмов для применения в криптографических системах с открытым ключом.

Актуальность темы

Между малосократимыми группами и группами Кокстера существует глубокая связь, которая позволяет применять рассмотренные методы при дальнейшем исследовании различных алгоритмических проблем. Сюда относятся:

- проблемы степенной сопряженности для малосократимых групп и групп Кокстера большого типа;
- проблемы изоморфизма и финитной аппроксимируемости групп Кокстера экстрабольшого типа;
- оценки алгоритмической сложности проблем равенства и сопряженности, а также адаптация соответствующих алгоритмов для применения в криптографических системах с открытым ключом.

Основное определение

Группа Кокстера

$$G = \langle a_i, i \in I, |I| < \infty; \quad \forall i, j \in J \ (a_i a_j)^{m_{ij}} \rangle$$

Здесь $m_{ij} \in M$, где M — симметрическая матрица Кокстера, у нее $m_{ii} = 1$ (т.е. по диагонали стоят 1) и при $i \neq j \ \ m_{ij} \geq 2$.

Понятие введено Х. Кокстером (H.S.M. Coxeter) в 1934 году. Оно возникло в теории дискретных групп, порождаемых отражениями относительно гиперплоскостей.

Всякая группа отражений — группа Кокстера (в качестве образующих надо взять отражения относительно гиперплоскостей, ограничивающих ее фундаментальный многогранник).

Всякая конечная группа Кокстера изоморфна некоторой группе отражений трехмерного евклидова пространства.

Основное определение

Группа Кокстера

$$G = \langle a_i, i \in I, |I| < \infty; \quad \forall i, j \in J \ (a_i a_j)^{m_{ij}} \rangle$$

Здесь $m_{ij} \in M$, где M — симметрическая матрица Кокстера, у нее $m_{ii} = 1$ (т.е. по диагонали стоят 1) и при $i \neq j \;\; m_{ij} \geq 2$.

Понятие введено Х. Кокстером (H.S.M. Coxeter) в 1934 году. Оно возникло в теории дискретных групп, порождаемых отражениями относительно гиперплоскостей.
Всякая группа отражений — группа Кокстера (в качестве образующих надо взять отражения относительно гиперплоскостей, ограничивающих ее фундаментальный многогранник).
Всякая конечная группа Кокстера изоморфна некоторой группе отражений трехмерного евклидова пространства.

Основное определение

Группа Кокстера

$$G = \langle a_i, i \in I, |I| < \infty; \quad \forall i, j \in J\ (a_i a_j)^{m_{ij}} \rangle$$

Здесь $m_{ij} \in M$, где M — симметрическая матрица Кокстера, у нее $m_{ii} = 1$ (т.е. по диагонали стоят 1) и при $i \neq j \ \ m_{ij} \geq 2$.

Понятие введено Х. Кокстером (H.S.M. Coxeter) в 1934 году. Оно возникло в теории дискретных групп, порождаемых отражениями относительно гиперплоскостей.

Всякая группа отражений — группа Кокстера (в качестве образующих надо взять отражения относительно гиперплоскостей, ограничивающих ее фундаментальный многогранник).

Всякая конечная группа Кокстера изоморфна некоторой группе отражений трехмерного евклидова пространства.

Основное определение

Группа Кокстера

$$G = \langle a_i, i \in I, |I| < \infty; \quad \forall i, j \in J \ (a_i a_j)^{m_{ij}} \rangle$$

Здесь $m_{ij} \in M$, где M — симметрическая матрица Кокстера, у нее $m_{ii} = 1$ (т.е. по диагонали стоят 1) и при $i \neq j \;\; m_{ij} \geq 2$.

Понятие введено Х. Кокстером (H.S.M. Coxeter) в 1934 году. Оно возникло в теории дискретных групп, порождаемых отражениями относительно гиперплоскостей.

Всякая группа отражений — группа Кокстера (в качестве образующих надо взять отражения относительно гиперплоскостей, ограничивающих ее фундаментальный многогранник).

Всякая конечная группа Кокстера изоморфна некоторой группе отражений трехмерного евклидова пространства.

Конечная группа Кокстера

Пример 1

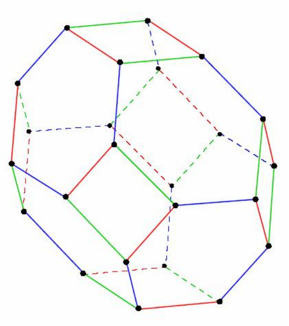
$$G = \langle a, b, c;\ a^2, b^2, c^2, (ab)^3, (bc)^3, (ac)^2 \rangle$$

Конечная группа Кокстера

Пример 1

$$G = \langle a, b, c;\ \ a^2, b^2, c^2, (ab)^3, (bc)^3, (ac)^2 \rangle$$

Граф этой группы — так называемый «полугранник Кэли»:

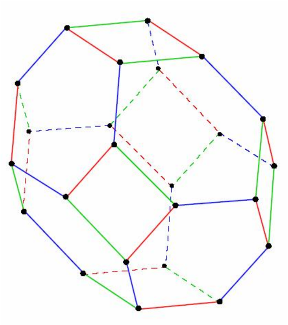


Конечная группа Кокстера

Пример 1

$$G = \langle a, b, c;\ \ a^2, b^2, c^2, (ab)^3, (bc)^3, (ac)^2 \rangle$$

Граф этой группы — так называемый «полугранник Кэли»:



Обратите внимание на *показатели* определяющих слов.

Бесконечная группа Кокстера

Граф на $\mathbb{E}^2$

Пример 2

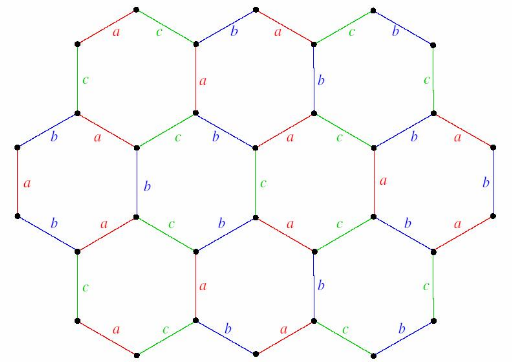
$$G = \langle a, b, c;\ a^2, b^2, c^2, (ab)^3, (bc)^3, (ac)^3 \rangle$$

Бесконечная группа Кокстера
Граф на $\mathbb{E}^2$

Пример 2

$$G = \langle a, b, c;\ \ a^2, b^2, c^2, (ab)^3, (bc)^3, (ac)^3 \rangle$$

Фрагмент графа группы:



Еще одна бесконечная группа Кокстера

Граф — уже на $\mathbb{H}^2$

Пример 3

$$G = \langle a, b, c;\ a^2, b^2, c^2, (ab)^2, (bc)^4, (ac)^6 \rangle$$

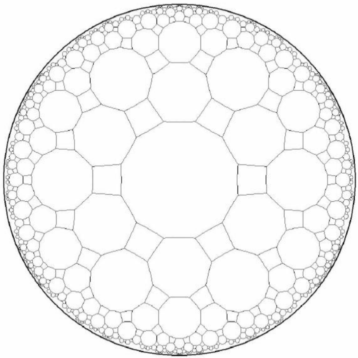
Еще одна бесконечная группа Кокстера

Граф — уже на $\mathbb{H}^2$

Пример 3

$$G = \langle a, b, c;\ a^2, b^2, c^2, (ab)^2, (bc)^4, (ac)^6 \rangle$$

Граф группы (для гиперболической плоскости взята модель Пуанкаре):



Условная классификация групп Кокстера

Аппель и Шупп, 1983 г.

Группа Кокстера

$G = \langle a_i, i \in I, |I| < \infty; \quad \forall i, j \in J \ (a_i a_j)^{m_{ij}} \rangle$
Здесь $m_{ij} \in M$, где M — симметрическая матрица Кокстера, у нее $m_{ii} = 1$ (т.е. по диагонали стоят 1) и при $i \neq j \quad m_{ij} \geq 2$.

Приведенные примеры показывают, что в зависимости от показателей m_{ij} определяющих слов группы Кокстера могут быть как конечными, так и бесконечными:

- $\forall m_{ij} = 2$ или $m_{ij} = \infty$ — прямоугольные группы ($\exists m_{ij} = 2$ — промежуточный случай);
- $\forall m_{ij} \geq 3$ — группы большого типа
- в частности, если $\forall m_{ij} \geq 4$ — группы экстрабольшого типа

Заметим, что у конечных групп лишь немногие показатели могут превосходить 2. Поэтому группы большого (и экстрабольшого) типа — бесконечные.

Условная классификация групп Кокстера
Аппель и Шупп, 1983 г.

Группа Кокстера

$G = \langle a_i, i \in I, |I| < \infty; \quad \forall i, j \in J \ (a_i a_j)^{m_{ij}} \rangle$
Здесь $m_{ij} \in M$, где M — симметрическая матрица Кокстера, у нее $m_{ii} = 1$ (т.е. по диагонали стоят 1) и при $i \neq j \quad m_{ij} \geq 2$.

Приведенные примеры показывают, что в зависимости от показателей m_{ij} определяющих слов группы Кокстера могут быть как конечными, так и бесконечными:

- $\forall m_{ij} = 2$ или $m_{ij} = \infty$ — прямоугольные группы ($\exists m_{ij} = 2$ — промежуточный случай);
- $\forall m_{ij} \geq 3$ — группы большого типа
- в частности, если $\forall m_{ij} \geq 4$ — группы экстрабольшого типа

Заметим, что у конечных групп лишь немногие показатели могут превосходить 2. Поэтому группы большого (и экстрабольшого) типа — бесконечные.

Условная классификация групп Кокстера
Аппель и Шупп, 1983 г.

Группа Кокстера

$G = \langle a_i, i \in I, |I| < \infty; \quad \forall i,j \in J \ (a_i a_j)^{m_{ij}} \rangle$
Здесь $m_{ij} \in M$, где M — симметрическая матрица Кокстера, у нее $m_{ii} = 1$ (т.е. по диагонали стоят 1) и при $i \neq j \quad m_{ij} \geq 2$.

Приведенные примеры показывают, что в зависимости от показателей m_{ij} определяющих слов группы Кокстера могут быть как конечными, так и бесконечными:

- $\forall m_{ij} = 2$ или $m_{ij} = \infty$ — прямоугольные группы ($\exists m_{ij} = 2$ — промежуточный случай);
- $\forall m_{ij} \geq 3$ — группы большого типа
- в частности, если $\forall m_{ij} \geq 4$ — группы экстрабольшого типа

Заметим, что у конечных групп лишь немногие показатели могут превосходить 2. Поэтому группы большого (и экстрабольшого) типа — бесконечные.

Условная классификация групп Кокстера

Аппель и Шупп, 1983 г.

Группа Кокстера

$G = \langle a_i, i \in I, |I| < \infty; \quad \forall i, j \in J\ (a_i a_j)^{m_{ij}} \rangle$
Здесь $m_{ij} \in M$, где M — симметрическая матрица Кокстера, у нее $m_{ii} = 1$ (т.е. по диагонали стоят 1) и при $i \neq j \quad m_{ij} \geq 2$.

Приведенные примеры показывают, что в зависимости от показателей m_{ij} определяющих слов группы Кокстера могут быть как конечными, так и бесконечными:

- $\forall m_{ij} = 2$ или $m_{ij} = \infty$ — прямоугольные группы ($\exists m_{ij} = 2$ — промежуточный случай);
- $\forall m_{ij} \geq 3$ — группы большого типа
- в частности, если $\forall m_{ij} \geq 4$ — группы экстрабольшого типа

Заметим, что у конечных групп лишь немногие показатели могут превосходить 2. Поэтому группы большого (и экстрабольшого) типа — бесконечные.

Условная классификация групп Кокстера
Аппель и Шупп, 1983 г.

Группа Кокстера

$G = \langle a_i, i \in I, |I| < \infty; \quad \forall i, j \in J \ (a_i a_j)^{m_{ij}} \rangle$
Здесь $m_{ij} \in M$, где M — симметрическая матрица Кокстера, у нее $m_{ii} = 1$ (т.е. по диагонали стоят 1) и при $i \neq j \quad m_{ij} \geq 2$.

Приведенные примеры показывают, что в зависимости от показателей m_{ij} определяющих слов группы Кокстера могут быть как конечными, так и бесконечными:

- $\forall m_{ij} = 2$ или $m_{ij} = \infty$ — прямоугольные группы ($\exists m_{ij} = 2$ — промежуточный случай);
- $\forall m_{ij} \geq 3$ — группы большого типа
- в частности, если $\forall m_{ij} \geq 4$ — группы экстрабольшого типа

Заметим, что у конечных групп лишь немногие показатели могут превосходить 2. Поэтому группы большого (и экстрабольшого) типа — бесконечные.

История вопроса

Макс Ден (Dehn), 1911 г.

Пусть группа задана с помощью порождающих и определяющих соотношений:

$$G = \langle X;\ R\rangle$$

Тогда при исследовании различных свойств группы G возникают три фундаментальные проблемы:

- Проблема равенства — за конечное число шагов выяснить $\forall w \in G$ верно ли, что $w =_G 1$;
  или, что то же: $\forall w, v \in G$ верно ли, что $w =_G v$?
- Проблема сопряженности — за конечное число шагов выяснить $\forall w, v \in G \quad \exists ?z \in G : \quad w =_G zvz^{-1}$?
- Проблема изоморфизма — за конечное число шагов выяснить $\forall G' = \langle X';\ R'\rangle$ верно ли, что $G \cong G'$?

Позднее были также выделены: проблема порядка, обобщенные проблемы равенства и сопряженности (для наборов слов), слабая и сильная проблемы степенной сопряженности, проблема вхождения в подгруппу (данного класса) и др.

История вопроса
Макс Ден (Dehn), 1911 г.

Пусть группа задана с помощью порождающих и определяющих соотношений:

$$G = \langle X;\ R \rangle$$

Тогда при исследовании различных свойств группы G возникают три фундаментальные проблемы:

- Проблема равенства — за конечное число шагов выяснить $\forall w \in G$ верно ли, что $w =_G 1$;
  или, что то же: $\forall w, v \in G$ верно ли, что $w =_G v$?
- Проблема сопряженности — за конечное число шагов выяснить $\forall w, v \in G \quad \exists ? z \in G : \quad w =_G zvz^{-1}$?
- Проблема изоморфизма — за конечное число шагов выяснить $\forall G' = \langle X';\ R' \rangle$ верно ли, что $G \cong G'$?

Позднее были также выделены: проблема порядка, обобщенные проблемы равенства и сопряженности (для наборов слов), слабая и сильная проблемы степенной сопряженности, проблема вхождения в подгруппу (данного класса) и др.

История вопроса

Макс Ден (Dehn), 1911 г.

Пусть группа задана с помощью порождающих и определяющих соотношений:

$$G = \langle X;\ R \rangle$$

Тогда при исследовании различных свойств группы G возникают три фундаментальные проблемы:

- Проблема равенства — за конечное число шагов выяснить $\forall w \in G$ верно ли, что $w =_G 1$;
  или, что то же: $\forall w, v \in G$ верно ли, что $w =_G v$?
- Проблема сопряженности — за конечное число шагов выяснить $\forall w, v \in G \ \ \exists ? z \in G : \quad w =_G zvz^{-1}$?
- Проблема изоморфизма — за конечное число шагов выяснить $\forall G' = \langle X';\ R' \rangle$ верно ли, что $G \cong G'$?

Позднее были также выделены: проблема порядка, обобщенные проблемы равенства и сопряженности (для наборов слов), слабая и сильная проблемы степенной сопряженности, проблема вхождения в подгруппу (данного класса) и др.

История вопроса

Макс Ден (Dehn), 1911 г.

Пусть группа задана с помощью порождающих и определяющих соотношений:

$$G = \langle X;\ R \rangle$$

Тогда при исследовании различных свойств группы G возникают три фундаментальные проблемы:

- Проблема равенства — за конечное число шагов выяснить $\forall w \in G$ верно ли, что $w =_G 1$;
  или, что то же: $\forall w, v \in G$ верно ли, что $w =_G v$?
- Проблема сопряженности — за конечное число шагов выяснить $\forall w, v \in G \ \ \exists ? z \in G : \quad w =_G zvz^{-1}$?
- Проблема изоморфизма — за конечное число шагов выяснить $\forall G' = \langle X';\ R' \rangle$ верно ли, что $G \cong G'$?

Позднее были также выделены: проблема порядка, обобщенные проблемы равенства и сопряженности (для наборов слов), слабая и сильная проблемы степенной сопряженности, проблема вхождения в подгруппу (данного класса) и др.

История вопроса

Макс Ден (Dehn), 1911 г.

Пусть группа задана с помощью порождающих и определяющих соотношений:

$$G = \langle X;\ R \rangle$$

Тогда при исследовании различных свойств группы G возникают три фундаментальные проблемы:

- Проблема равенства — за конечное число шагов выяснить $\forall w \in G$ верно ли, что $w =_G 1$;
  или, что то же: $\forall w, v \in G$ верно ли, что $w =_G v$?
- Проблема сопряженности — за конечное число шагов выяснить $\forall w, v \in G \quad \exists ?z \in G : \quad w =_G zvz^{-1}$?
- Проблема изоморфизма — за конечное число шагов выяснить $\forall G' = \langle X';\ R' \rangle$ верно ли, что $G \cong G'$?

Позднее были также выделены: проблема порядка, обобщенные проблемы равенства и сопряженности (для наборов слов), слабая и сильная проблемы степенной сопряженности, проблема вхождения в подгруппу (данного класса) и др.

Неразрешимость фундаментальных проблем теории групп

П.С. Новиков — 1952-54 гг., С.И. Адян — 1957 г.

Ден предъявил алгоритмы для решения проблем равенства и сопряженности для фундаментальных групп замкнутых ориентируемых многообразий.

Неразрешимость фундаментальных проблем теории групп

П.С. Новиков — 1952-54 гг., С.И. Адян — 1957 г.

Ден предъявил алгоритмы для решения проблем равенства и сопряженности для фундаментальных групп замкнутых ориентируемых многообразий.
Контрпримеры, показывающие неразрешимость проблем, поставленных Деном, даже в классе конечно порожденных групп, были предъявлены Новиковым — для проблем равенства и сопряженности, Адяном — для проблемы изоморфизма.
При этом из результатов Адяна следует, что

Неразрешимость фундаментальных проблем теории групп

П.С. Новиков — 1952-54 гг., С.И. Адян — 1957 г.

Контрпримеры, показывающие неразрешимость проблем, поставленных Деном, даже в классе конечно порожденных групп, были предъявлены Новиковым — для проблем равенства и сопряженности, Адяном — для проблемы изоморфизма.
При этом из результатов Адяна следует, что проблема распознавания почти любого свойства конечно определенной группы — алгоритмически неразрешима.

Неразрешимость фундаментальных проблем теории групп

П.С. Новиков — 1952-54 гг., С.И. Адян — 1957 г.

Контрпримеры, показывающие неразрешимость проблем, поставленных Деном, даже в классе конечно порожденных групп, были предъявлены Новиковым — для проблем равенства и сопряженности, Адяном — для проблемы изоморфизма.
При этом из результатов Адяна следует, что проблема распознавания почти любого свойства конечно определенной группы — алгоритмически неразрешима.
Доказательства Новикова и Адяна были позднее упрощены Бриттоном и Буном (Boone). Интересно, что неразрешимость проблемы равенства для полугрупп еще ранее доказана А.А. Марковым (1947 г.)

Неразрешимость фундаментальных проблем теории групп

П.С. Новиков — 1952-54 гг., С.И. Адян — 1957 г.

Контрпримеры, показывающие неразрешимость проблем, поставленных Деном, даже в классе конечно порожденных групп, были предъявлены Новиковым — для проблем равенства и сопряженности, Адяном — для проблемы изоморфизма.
При этом из результатов Адяна следует, что проблема распознавания почти любого свойства конечно определенной группы — алгоритмически неразрешима.
Доказательства Новикова и Адяна были позднее упрощены Бриттоном и Буном (Boone). Интересно, что неразрешимость проблемы равенства для полугрупп еще ранее доказана А.А. Марковым (1947 г.)
С тех пор алгоритмические проблемы рассматриваются только в конкретных классах групп.

Диаграммы над группами

Э. ван Кампен — 1933 г., Р. Линдон — 1966 г.

Исследования Дена 1910-х гг. опираются на геометрическую природу групп, которые он рассматривал. Позднее стали использоваться чисто алгебраические методы (В.А. Тартаковский, М.Д. Гриндлингер, Ж.Титс и др.).

Диаграммы над группами

Э. ван Кампен — 1933 г., Р. Линдон — 1966 г.

Исследования Дена 1910-х гг. опираются на геометрическую природу групп, которые он рассматривал. Позднее стали использоваться чисто алгебраические методы (В.А. Тартаковский, М.Д. Гриндлингер, Ж.Титс и др.).
Сегодня для наглядного вывода следствий из определяющих соотношений и, в частности, при решении проблем равенства и сопряженности используют диаграммы над свободными группами:

Диаграммы над группами

Э. ван Кампен — 1933 г., Р. Линдон — 1966 г.

Сегодня для наглядного вывода следствий из определяющих соотношений и, в частности, при решении проблем равенства и сопряженности используют диаграммы над свободными группами:
Если $G = \langle X;\ R\rangle$ и $F = \langle X\rangle$ — свободная группа, то, как известно, $G \cong F/N$, где $N = R^F$ — нормальное замыкание множества определяющих слов R в F.

Диаграммы над группами

Э. ван Кампен — 1933 г., Р. Линдон — 1966 г.

Если $G = \langle X;\ R\rangle$ и $F = \langle X\rangle$ — свободная группа, то, как известно, $G \cong F/N$, где $N = R^F$ — нормальное замыкание множества определяющих слов R в F.
Соответственно,

$$w =_G 1 \Leftrightarrow w \in R^F \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}: \quad w = \prod_{i=1}^{n} c_i r_i^{\varepsilon_i} c_i^{-1}, \quad \varepsilon_i = \pm 1 \qquad (1)$$

Легко видеть также, что $w =_G 1 \Rightarrow w^{-1} =_G 1$ и $w^* =_G 1$, где w^* — любой циклический сдвиг слова w.

Диаграммы над группами

Э. ван Кампен — 1933 г., Р. Линдон — 1966 г.

Соответственно,

$$w =_G 1 \Leftrightarrow w \in R^F \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}: \quad w = \prod_{i=1}^{n} c_i r_i^{\varepsilon_i} c_i^{-1}, \quad \varepsilon_i = \pm 1 \qquad (1)$$

Легко видеть также, что $w =_G 1 \Rightarrow w^{-1} =_G 1$ и $w^* =_G 1$, где w^* — любой циклический сдвиг слова w.

Понятие R-диаграммы

Дисковая R-диаграмма над свободной группой F — это связная односвязная ориентированная карта на евклидовой плоскости, граница каждой области которой имеет метку — элемент из R.

(При этом множество R д.б. симметризовано — все элементы циклически приведены + замкнутость относительно циклических сдвигов и взятия обратного).

Диаграммы над группами

Э. ван Кампен — 1933 г., Р. Линдон — 1966 г.

Понятие R-диаграммы

Дисковая R-диаграмма над свободной группой F — это связная односвязная ориентированная карта на евклидовой плоскости, граница каждой области которой имеет метку — элемент из R.

(При этом множество R д.б. симметризовано — все элементы циклически приведены + замкнутость относительно циклических сдвигов и взятия обратного).

Диаграммы строятся аналогично графу группы — только ребра помечены, в общем случае, не образующими, а подсловами определяющих слов.

Диаграммы над группами

Э. ван Кампен — 1933 г., Р. Линдон — 1966 г.

Понятие R-диаграммы

Дисковая R-диаграмма над свободной группой F — это связная односвязная ориентированная карта на евклидовой плоскости, граница каждой области которой имеет метку — элемент из R.

(При этом множество R д.б. симметризовано — все элементы циклически приведены + замкнутость относительно циклических сдвигов и взятия обратного).
Диаграммы строятся аналогично графу группы — только ребра помечены, в общем случае, не образующими, а подсловами определяющих слов.

Лемма ван Кампена

$\forall w \in G = F/N$ будет $w \in_F N$, или, что то же, $w =_G 1$
$\Leftrightarrow \exists$ дисковая R-диаграмма M, метка на границе которой $\varphi(\partial M) = w$.

Построение диаграммы

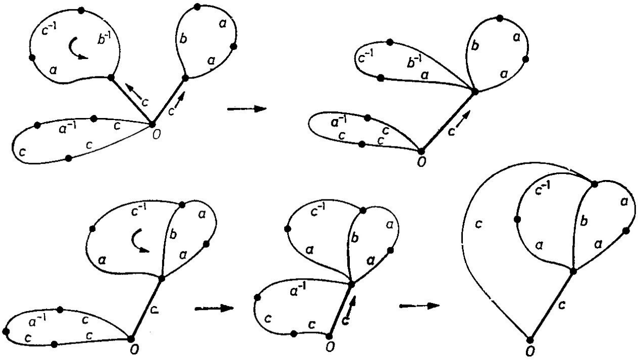
Пример

$$w = ca^2bc^{-1} \cdot cb^{-1}c^{-1}ac^{-1} \cdot ca^{-1}c^2 = ca^2c$$

Построение диаграммы

Пример

$$w = ca^2bc^{-1} \cdot cb^{-1}c^{-1}ac^{-1} \cdot ca^{-1}c^2 = ca^2c$$



Кольцевые диаграммы сопряженности

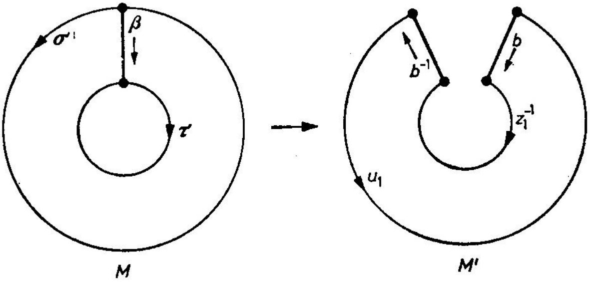
П. Шупп, 1968 г.

Для изучения сопряженности слов используются диаграммы специального вида:

Кольцевые диаграммы сопряженности

П. Шупп, 1968 г.

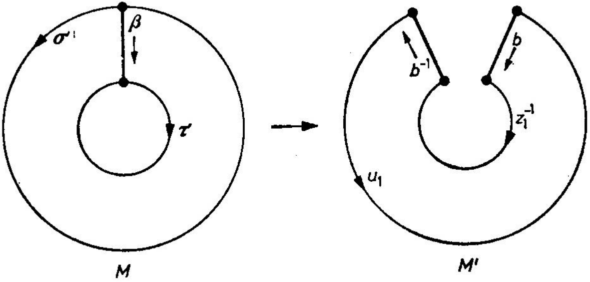
Для изучения сопряженности слов используются диаграммы специального вида:



Кольцевые диаграммы сопряженности

П. Шупп, 1968 г.

Для изучения сопряженности слов используются диаграммы специального вида:



Метки внутренней и внешней границ кольцевой диаграммы — циклические сдвиги сопряженных слов; метка пути, связывающего границы — сопрягающий элемент. В нашем случае:

$$u_1 = u^*, \quad z_1 = z^*, \quad bz^{-1}b^{-1}u_1 = 1 \Rightarrow u_1 = bz_1b^{-1}$$

Условия $C(p)$ и $T(q)$

Исследование группы, заданной копредставлением $G = \langle X;\ R\rangle$ возможно только если есть дополнительная информация о множестве определяющих слов R.

Условия $C(p)$ и $T(q)$

Определение

Кусок — общее начало каких-то двух элементов симметризованного множества:
$r_1, r_2 \in R$, где $r_1 = cb, r_2 = ct, r_1 \neq r_2^{-1} \Rightarrow c$— кусок.

Ясно, что кусок сокращается в произведении $r_1^{-1} r_2$.

Условия $C(p)$ и $T(q)$

Определение

Кусок — общее начало каких-то двух элементов симметризованного множества:
$r_1, r_2 \in R$, где $r_1 = cb, r_2 = ct, r_1 \neq r_2^{-1} \Rightarrow c$— кусок.

Ясно, что кусок сокращается в произведении $r_1^{-1} r_2$.

Условие $C(p)$

Никакое определяющее слово не состоит меньше, чем из p кусков.

Условия $C(p)$ и $T(q)$

Определение

Кусок — общее начало каких-то двух элементов симметризованного множества:
$r_1, r_2 \in R$, где $r_1 = cb, r_2 = ct, r_1 \neq r_2^{-1} \Rightarrow c$— кусок.

Ясно, что кусок сокращается в произведении $r_1^{-1} r_2$.

Условие $C(p)$

Никакое определяющее слово не состоит меньше, чем из p кусков.

Условие $T(q)$

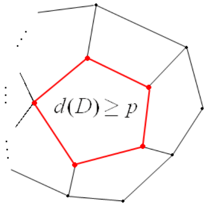
Если *не во всех* членах произвольной последовательности $r_1 r_2, \ r_2 r_3, \ \ldots, \ r_{h-1} r_h, \ r_h r_1$ неединичных произведений элементов $r_i \in R$ возникают сокращения (здесь $3 \leq h < q$).

Свойства (p,q)-карт

Если множество R удовлетворяет условию $C(p)\&T(q)$, и если соответствующая диаграмма приведена, т.е. никакой циклический путь не помечен словом, свободно приводимым к 1, это отражается на структуре диаграммы:

Свойства (p, q)-карт

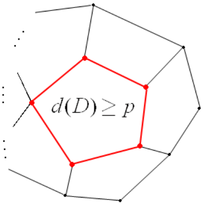
Если множество R удовлетворяет условию $C(p)\&T(q)$, и если соответствующая диаграмма приведена, т.е. никакой циклический путь не помечен словом, свободно приводимым к 1, это отражается на структуре диаграммы:



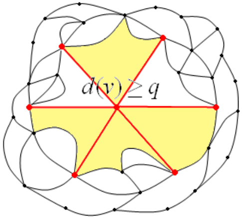
Степень любой *внутренней* области — не меньше p.

Свойства (p, q)-карт

Если множество R удовлетворяет условию $C(p)\&T(q)$, и если соответствующая диаграмма приведена, т.е. никакой циклический путь не помечен словом, свободно приводимым к 1, это отражается на структуре диаграммы:



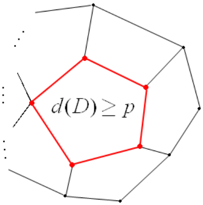
Степень любой *внутренней* области — не меньше p.



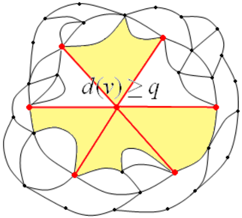
Степень любой внутренней вершины — не меньше q.

Свойства (p, q)-карт

Если множество R удовлетворяет условию $C(p)\&T(q)$, и если соответствующая диаграмма приведена, т.е. никакой циклический путь не помечен словом, свободно приводимым к 1, это отражается на структуре диаграммы:



Степень любой *внутренней* области — не меньше p.



Степень любой внутренней вершины — не меньше q.

Соответствующая диаграмма тогда называется (p, q)-картой (или $[p, q]$-картой — если степень *любой* области не меньше p).

Формулы Линдона (1966 г.)

Они получаются, если использовать формулу Гаусса-Бонне для кусочно-евклидовых комплексов или формулу Эйлера для связного графа $V - E + F = 1$ (в нашем случае это карта M, представляющая диаграмму группы):

$$p(Q-h) = \Sigma^{\bullet}_{M}\,[p-d(v)] + \Sigma^{\circ}_{M}\,[p-d(v)] + \frac{p}{q}\cdot\Sigma_{M}\,[q-d(D)] - \frac{p}{q}\cdot E^{\bullet};$$

$$p(Q-h) = \Sigma^{\bullet}_{M}\left[\frac{p}{q}+2-d(v)\right] + \Sigma^{\circ}_{M}\,[p-d(v)] + \frac{p}{q}\cdot\Sigma_{M}[q-d(D)] + \frac{p}{q}\cdot(V^{\bullet}-E^{\bullet}).$$

(Суммирование $\Sigma^{\bullet}_{M}$, Σ°_{M} ведется по граничным и внутренним областям M соответственно; Q — число связных компонент карты, h — число дыр в ней).

Формулы Линдона (1966 г.)

Они получаются, если использовать формулу Гаусса-Бонне для кусочно-евклидовых комплексов или формулу Эйлера для связного графа $V - E + F = 1$ (в нашем случае это карта M, представляющая диаграмму группы):

$$p(Q-h) = \Sigma^{\bullet}_{M}\left[p-d(v)\right] + \Sigma^{\circ}_{M}\left[p-d(v)\right] + \frac{p}{q}\cdot\Sigma_{M}\left[q-d(D)\right] - \frac{p}{q}\cdot E^{\bullet};$$

$$p(Q-h) = \Sigma^{\bullet}_{M}\left[\frac{p}{q}+2-d(v)\right] + \Sigma^{\circ}_{M}\left[p-d(v)\right] + \frac{p}{q}\cdot\Sigma_{M}[q-d(D)] + \frac{p}{q}\cdot(V^{\bullet}-E^{\bullet}).$$

(Суммирование $\Sigma^{\bullet}_{M}$, Σ°_{M} ведется по граничным и внутренним областям M соответственно; Q — число связных компонент карты, h — число дыр в ней).
В этих формулах $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{1}{2}$ — соотношение, обусловленное топологией $\mathbb{E}^2$; ясно, что пара (p,q) может принимать только значения $(3,6)$, $(4,4)$, $(6,3)$ — эти числа соответствуют условиям $C(p)$ и $T(q)$.

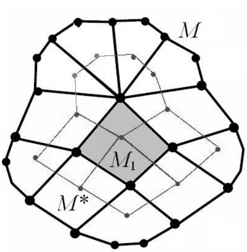
Формулы кривизны
Р. Линдон, 1966 г.

Они являются следствием формул Линдона для односвязной $[p,q]$-карты M (название связано с тем, что в частном случае получаем оценку кривизны фрагмента мозаики на евклидовой плоскости):

$$\Sigma^{\bullet}_{M}\left[\frac{p}{q}+2-d(v)\right]\geq p$$

Формулы кривизны
Р. Линдон, 1966 г.

$$\Sigma^{\bullet}_{M}\left[\frac{p}{q}+2-d(v)\right]\geq p$$



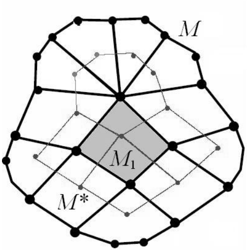
Привлекая понятие дуальной карты M^*, легко получить соответствующую оценку для внутренних степеней граничных областей (q,p)-карты M^*:

$$\Sigma^{\bullet}_{M^*}\left[\frac{p}{q}+2-i(D)\right]\geq p$$

Формулы кривизны

Р. Линдон, 1966 г.

$$\Sigma^{\bullet}_{M}\left[\frac{p}{q}+2-d(v)\right]\geq p$$



Привлекая понятие дуальной карты M^*, легко получить соответствующую оценку для внутренних степеней граничных областей (q,p)-карты M^*:

$$\Sigma^{\bullet}_{M^*}\left[\frac{p}{q}+2-i(D)\right]\geq p$$

Здесь $i(D)$ — внутренняя степень — число внутренних ребер граничной области D.

На рисунке карта M^* дуальна к M; M_1 получена из M удалением граничного слоя и дуальна к M^*.

Теорема о площади и проблема равенства
Р. Линдон, 1966 г.

Дальнейшее развитие идеи дуальной карты и граничного слоя позволяет оценить число вершин и число областей односвязной (p,q)-карты M:

$$V_M \leq \frac{q}{p^2}[\Sigma^{\bullet}_M\,(p - d(v))]^2; \quad F_M \leq \frac{p}{q^2}[\Sigma^{\bullet}_M\,(q - (D))]^2$$

Обратите внимание на *показатель* 2 в формулах.

Как мы видели выше (1), слово $w =_G 1$ равно произведению сопряженных к граничным меткам областей диаграммы. Данная оценка ограничивает число таких областей квадратичной функцией от $|w|$. Поэтому благодаря алгоритму простого перебора, верна:

Теорема Линдона

Пусть F – конечно порожденная свободная группа, R – конечное симметризованное множество элементов группы F и $N = R^F$. Если R удовлетворяет условию $C(6)$ или $C(4)\&T(4)$, или $C(3)\&T(6)$, то проблема равенства слов в группе $G = F/N$ разрешима.

Теорема о площади и проблема равенства

Р. Линдон, 1966 г.

Дальнейшее развитие идеи дуальной карты и граничного слоя позволяет оценить число вершин и число областей односвязной (p, q)-карты M:

$$V_M \leq \frac{q}{p^2}[\Sigma^{\bullet}_M (p - d(v))]^2; \quad F_M \leq \frac{p}{q^2}[\Sigma^{\bullet}_M (q - (D))]^2$$

Обратите внимание на *показатель* 2 в формулах.

Как мы видели выше (1), слово $w =_G 1$ равно произведению сопряженных к граничным меткам областей диаграммы. Данная оценка ограничивает число таких областей квадратичной функцией от $|w|$. Поэтому благодаря алгоритму простого перебора, верна:

Теорема Линдона

Пусть F – конечно порожденная свободная группа, R – конечное симметризованное множество элементов группы F и $N = R^F$. Если R удовлетворяет условию $C(6)$ или $C(4)\&T(4)$, или $C(3)\&T(6)$, то проблема равенства слов в группе $G = F/N$ разрешима.

Теорема о площади и проблема равенства

Р. Линдон, 1966 г.

Дальнейшее развитие идеи дуальной карты и граничного слоя позволяет оценить число вершин и число областей односвязной (p,q)-карты M:

$$V_M \leq \frac{q}{p^2}[\Sigma^{\bullet}_M\,(p-d(v))]^2; \quad F_M \leq \frac{p}{q^2}[\Sigma^{\bullet}_M\,(q-(D))]^2$$

Обратите внимание на *показатель* 2 в формулах.

Как мы видели выше (1), слово $w =_G 1$ равно произведению сопряженных к граничным меткам областей диаграммы. Данная оценка ограничивает число таких областей квадратичной функцией от $|w|$. Поэтому благодаря алгоритму простого перебора, верна:

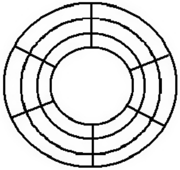
Теорема Линдона

Пусть F – конечно порожденная свободная группа, R – конечное симметризованное множество элементов группы F и $N = R^F$. Если R удовлетворяет условию $C(6)$ или $C(4)\&T(4)$, или $C(3)\&T(6)$, то проблема равенства слов в группе $G = F/N$ разрешима.

Теорема о слое и проблема сопряженности

П. Шупп, 1968 г.

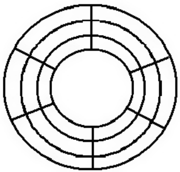
Глядя на рисунок кольцевой $[4,4]$-карты, можно сообразить, что не существует функции от длины граничной метки кольцевой карты, которая ограничивала бы число ее вершин или областей.

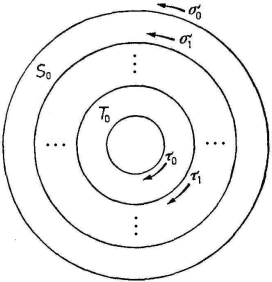


Теорема о слое и проблема сопряженности

П. Шупп, 1968 г.

Глядя на рисунок кольцевой $[4,4]$-карты, можно сообразить, что не существует функции от длины граничной метки кольцевой карты, которая ограничивала бы число ее вершин или областей.

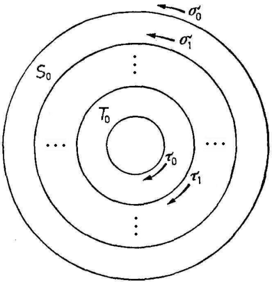




Однако в этом случае ограничено число областей в *граничных слоях* многослойной кольцевой карты:

$$\max_{i=0,k} \beta(S_i, T_i) \leq \frac{q}{p} \cdot \Sigma^{\bullet}_{M}[p - i(D)]$$

Теорема о слое и проблема сопряженности
П. Шупп, 1968 г.

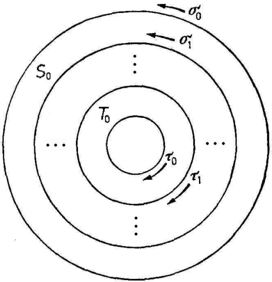


$$\max_{i=0,k} \beta(S_i, T_i) \leq \frac{q}{p} \cdot \Sigma^{\bullet}_M[p - i(D)]$$

С помощью этого утверждения можно оценить длины меток на граничных слоях S_i, T_i — они ограничены функцией от суммы длин $|u| + |z|$ сопряженных слов.
Кроме того, длины промежуточных сопрягающих слов ограничены числом $L/2$, $L = \max_{r \in R} |r|$.

Теорема о слое и проблема сопряженности

П. Шупп, 1968 г.



$$\max_{i=0,k} \beta(S_i, T_i) \leq \frac{q}{p} \cdot \Sigma^{\bullet}_{M}[p - i(D)]$$

С помощью этого утверждения можно оценить длины меток на граничных слоях S_i, T_i — они ограничены функцией от суммы длин $|u| + |z|$ сопряженных слов.

Кроме того, длины промежуточных сопрягающих слов ограничены числом $L/2$, $L = \max_{r \in R} |r|$.

Теорема Шуппа

Пусть F – конечно порожденная свободная группа, R — конечное симметризованное множество элементов группы F и $N = R^F$. Если R удовлетворяет условию $C(6)$ или $C(4)\&T(4)$, или $C(3)\&T(6)$, то проблема сопряженности слов в группе $G = F/N$ разрешима.

Диаграммы над свободным произведением

Группа Кокстера большого типа

$$G = \langle a_i,\ i \in I,\ |I| < \infty;\ \ \forall i, j \in I\ (a_i a_j)^{m_{ij}} \rangle$$

Здесь $m_{ij} \in M$, где M — симметрическая матрица Кокстера, у нее $m_{ii} = 1$ (т.е. по диагонали стоят 1) и при $i \neq j$ $m_{ij} \geq 3$.

Соотношения $a_i^2 = 1$ не позволяют считать такое задание малосократимым. Поэтому используется конструкция со свободным произведением.
$\forall i = \overline{0, k}$ $F_i := \langle a_i;\ a_i^2 \rangle$; $F := \prod_{i=1}^{n} * F_i$ — свободное произведение циклических групп порядка 2. Отождествим каждый образующий a_i группы F с его обратным a_i^{-1}.
Пусть $r_{ij} = (a_i a_j)^{m_{ij}}$, тогда в F существуют в точности две различные перестановки: $r_{ij} = (a_i a_j)^{m_{ij}}$ и $r_{ji} = (a_j a_i)^{m_{ij}}$, $i \neq j$.

Диаграммы над свободным произведением

Группа Кокстера большого типа

$$G = \langle a_i,\ i \in I,\ |I| < \infty;\ \ \forall i,j \in I\ (a_i a_j)^{m_{ij}} \rangle$$

Здесь $m_{ij} \in M$, где M — симметрическая матрица Кокстера, у нее $m_{ii} = 1$ (т.е. по диагонали стоят 1) и при $i \neq j$ $m_{ij} \geq 3$.

Обозначим $F_{ij} = F_i * F_j$, $G_{ij} = \langle a_i, a_j;\ \ a_i^2,\ a_j^2,\ r_{ij},\ r_{ji} \rangle$.
Обозначим через R_{ij} множество всех нетривиальных слов, циклически приведенных в свободном произвдении F_{ij} и равных 1 в группе G_{ij}. Элемент $r \in R_{ij}$ — соотношение типа (i,j).
Тогда $R = \cup_{i,j \in I} R_{ij}$ — симметризованное подмножество свободного произведения F, и группа Кокстера может быть задана копредставлением:

$$G = \langle A;\ \forall i = \overline{1,n}\ a_i^2,\ R \rangle$$

Диаграммы. Деновские области и полосы

К. Аппель — 1984 г., В.Н. Безверхний — 1994 г.

Учитывая, что $a_i = a_i^{-1}$ в F можно строить R-диаграммы над свободным произведением F так же, как над свободной группой. Поэтому $\exists$ связная односвязная приводимая диаграмма M группы Кокстера G большого типа с граничной меткой $w =_G 1$, областями которой являются R_{ij}-диаграммы с метками–соотношениями типа (i, j). Отсюда

Утверждение

Каждая приведенная связная односвязная R-диаграмма группы Кокстера большого типа удовлетворяет условию $C(6)$. При этом кусками являются *отдельные буквы* $a_i \in A$.

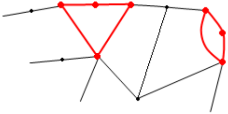
Диаграммы. Деновские области и полосы

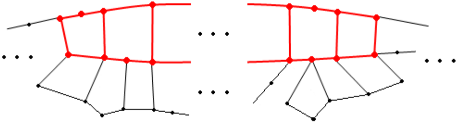
К. Аппель — 1984 г., В.Н. Безверхний — 1994 г.

Опираясь на формулы кривизны, можно доказать, что граничный слой диаграммы группы Кокстера большого типа содержат особые участки:

- Деновская область — у которой $i(\cdot) \leq 2$.
- Полоса — граничный участок, состоящий из последовательных областей $D_1, \ \ldots \ , D_n$, пересекающихся по ребру, причем

$$i(D_1) = i(D_n) = 3, \quad \forall k = \overline{2, n-1} \quad i(D_k) = 4$$





Алгоритм Титса, 1968 г.

Это исторически первый пример решения алгоритмической проблемы для групп Кокстера, основанный на использовании лексикографического упорядочения образующих. Последовательно применяем к данному слову каждое из соотношений $r_{ij} = r_{ji}$, пока оно дает сокращения типа $a_i^2 = 1$.

Алгоритм Титса, 1968 г.

Последовательно применяем к данному слову каждое из соотношений $r_{ij} = r_{ji}$, пока оно дает сокращения типа $a_i^2 = 1$.

Пример

Пусть $G = \langle a,\ b,\ c;\ \ a^2,\ b^2,\ c^2\ (ab)^3\ (bc)^7\ (ac)^2 \rangle$. Тогда: $aba = bab, \quad bcbcbcb = cbcbcbc, \quad ac = ca$. Произведем сокращения в слове $(abac(bc)^3)^7$:

$$(aba\ cbcbcbc)^7 = (ba\ bcbcbcb\ c)^7 = (bacbcbcb\ cc)^7 =$$

$$= (bacbcbcb)^7 = b(ac\ bcbc)^7 b = b(cabcbc)^7 b = bc(abcb)^7 cb =$$

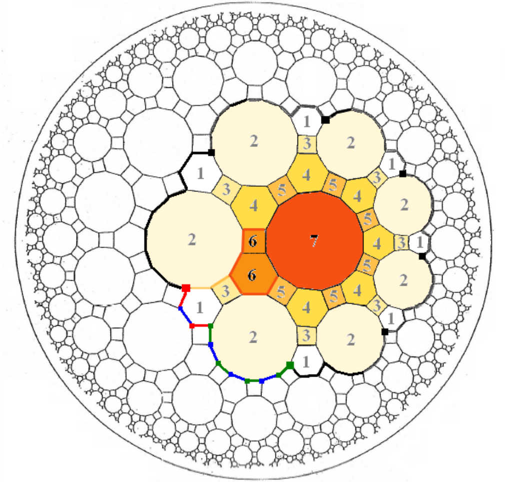
$$= bcab(c\ bab)^6 cbcb = bcab(ca\ ba)^6 cbcb = bcab(acba)\ 6cbcb =$$

$$= bc\ aba(cb)^6\ acbcb = bcbab(cb)^6 cabcb = bcba(bc)^7 abcb =$$

$$= bcbaabcb = bcbbcb = bccb = bb = 1$$

Алгоритм Титса, 1968 г.

Процесс сокращения можно видеть на графе группы (на $\mathbb{H}^2$):



Алгоритм Дэна для групп Кокстера большого типа

К. Аппель, П. Шупп — 1983 г.

Удаление деновской области D диаграммы M называется деновским сокращением, или R-сокращением; является R-приведенной, если она не содержит деновских областей.

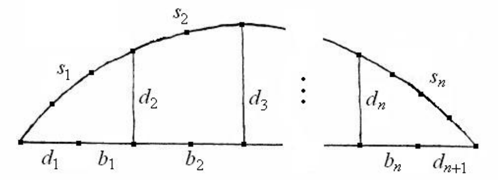
Замену диаграммы на диаграмму M_1, полученную из удалением полосы, назовем специальным R-сокращением. Если не содержит полос, то она называется специально R-приведенной.

Алгоритм Дэна для групп Кокстера большого типа

К. Аппель, П. Шупп — 1983 г.

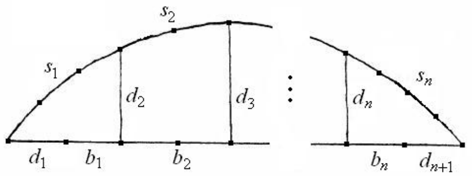
Удаление деновской области D диаграммы M называется деновским сокращением, или R-сокращением; является R-приведенной, если она не содержит деновских областей.

Замену диаграммы на диаграмму M_1, полученную из удалением полосы, назовем специальным R-сокращением. Если не содержит полос, то она называется специально R-приведенной.



Алгоритм Дэна для групп Кокстера большого типа

К. Аппель, П. Шупп — 1983 г.



Можно дать соответствующие «аналитические» определения для групповых слов. Например:

R-приводимость

Слово w в группе Кокстера большого типа назовем R-приводимым, если w приведено в F и содержит подслово s, являющееся подсловом некоторого соотношения $r \in R$, $\quad r = sb$, где $|b| \leq 2$.

Очевидна связь этого понятия с понятием деновской области.

Алгоритм Дэна для групп Кокстера большого типа

К. Аппель, П. Шупп — 1983 г.

Можно дать соответствующие «аналитические» определения для групповых слов. Например:

R-приводимость

Слово w в группе Кокстера большого типа назовем R-приводимым, если w приведено в F и содержит подслово s, являющееся подсловом некоторого соотношения $r \in R, \quad r = sb$, где $|b| \leq 2$.

Очевидна связь этого понятия с понятием деновской области. Поскольку в ходе $R-$ и специального R-приведения слова w получаем слово w', у которого $|w'| < |w|$, то имеет место:

Теорема

В группах Кокстера большого типа разрешима проблема равенства слов.

Общий подход

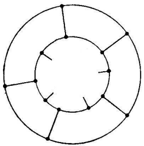
Как и при решении проблемы сопряженности в $C(p)\&T(q)$-группах, здесь основная идея — последовательное ограничение длин промежуточных между u и z сопряженных слов u_i:

$$u = h_1 u_1 h_1^{-1} \sim h_2 u_2 h_2^{-1} \sim \ldots \sim h_n u_n h_n^{-1} = z$$

Пусть σ, τ — внешний и внутренний циклы диаграммы сопряженности; K_σ, K_τ — ее внешний и внутренний граничный слои соответственно.

Общий подход

Пусть σ, τ — внешний и внутренний циклы диаграммы сопряженности; K_σ, K_τ — ее внешний и внутренний граничный слои соответственно.



Аналогом понятия полосы является понятие специального граничного слоя. Такой слой состоит из областей D_i, пересекающихся по ребру, причем ровно у одной $i(\cdot) = 3$, а у всех остальных — $i(D_j) = 4$.

Утверждение

Пусть кольцевая приведенная диаграмма группы Кокстера большого типа содержит специальный граничный слой (внешний или внутренний), каждая ее граничная область пересекается либо с σ, либо с τ, граничные метки $\varphi(\sigma)$ и $\varphi(\tau)$ циклически R-приведены. Пусть внешняя и внутренняя метки специального граничного слоя равны w и v соответственно. Тогда $|v| < |w|$.

Общий подход

Пусть σ, τ — внешний и внутренний циклы диаграммы сопряженности; K_σ, K_τ — ее внешний и внутренний граничный слои соответственно.
В более общем случае — когда граничные слои диаграммы не являются специальными — можно показать, что длины промежуточных сопряженных слов *не возрастают*.
С помощью формулы кривизны доказывается следующая

Лемма о гладкой границе

Рассмотрим кольцевую приведенную диаграмму группы Кокстера большого типа без специальных граничных слоев, такую, что каждая ее граничная область пересекается либо с σ, либо с τ, граничные метки $\varphi(\sigma)$ и $\varphi(\tau)$ специально R-приведены. Тогда

$$\Sigma^\bullet_\sigma\,(4-i(D))=0,\quad \Sigma^\bullet_\tau\,(4-i(D))=0.$$

Кольцевая диаграмма, о которой говорится в данной лемме, называется специальной.

Общий подход

Лемма о гладкой границе

Рассмотрим кольцевую приведенную диаграмму группы Кокстера большого типа без специальных граничных слоев, такую, что каждая ее граничная область пересекается либо с σ, либо с τ, граничные метки $\varphi(\sigma)$ и $\varphi(\tau)$ специально R-приведены. Тогда

$$\Sigma_\sigma^\bullet (4 - i(D)) = 0, \quad \Sigma_\tau^\bullet (4 - i(D)) = 0.$$

Кольцевая диаграмма, о которой говорится в данной лемме, называется специальной.

Следствие

Рассмотрим специальную кольцевую R-диаграмму группы Кокстера большого типа с граничными циклами σ и τ, σ' и τ' — внутренние граничные циклы внешнего и внутреннего граничных слоев соответственно. Тогда

$$|\varphi(\sigma')| \leq |\varphi(\sigma)|, \quad |\varphi(\tau')| \leq |\varphi(\tau)|.$$

Специальное кольцевое сокращение

В.Н. Безверхний, И.В. Добрынина — 2003 г.

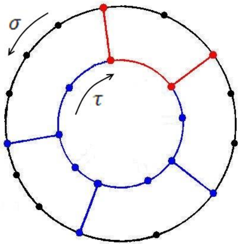
Алгоритм Дэна для проблемы равенства, как мы видели выше, основан на специальном R-приведении данного слова. Для данного специально R-приведенного слова можно также получить сопряженное слово меньшей длины.

Специальное кольцевое сокращение

В.Н. Безверхний, И.В. Добрынина — 2003 г.

Алгоритм Дэна для проблемы равенства, как мы видели выше, основан на специальном R-приведении данного слова. Для данного специально R-приведенного слова можно также получить сопряженное слово меньшей длины.

Кольцевая связная приведенная однослойная R-диаграмма, у которой граничные метки приведены в F, причем слово $\varphi(\sigma)$ $R-$ и специально R-приведено, $\varphi(\tau)$ — циклически $R-$ и специально R-приведено, — называется особо специальной R-диаграммой, если в ней $\exists$ только одна область D такая, что $|\varphi(\partial D \backslash (\partial D \cap \sigma))| = 3$, а для остальных областей, соответственно, имеем $|\varphi(\cdot)| = 4$.

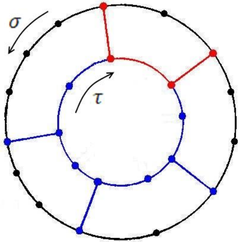


Замена слова $\varphi(\sigma)$ словом $\varphi(\tau)$ — специальное кольцевое R-сокращение.

Специальное кольцевое сокращение

В.Н. Безверхний, И.В. Добрынина — 2003 г.

Кольцевая связная приведенная однослойная R-диаграмма, у которой граничные метки приведены в F, причем слово $\varphi(\sigma)$ $R-$ и специально R-приведено, $\varphi(\tau)$ — циклически $R-$ и специально R-приведено, — называется особо специальной R-диаграммой, если в ней $\exists$ только одна область D такая, что $|\varphi(\partial D \backslash (\partial D \cap \sigma))| = 3$, а для остальных областей, соответственно, имеем $|\varphi(\cdot)| = 4$.



Замена слова $\varphi(\sigma)$ словом $\varphi(\tau)$ — специальное кольцевое R-сокращение.

Лемма

Существует алгоритм, позволяющий для любого циклически $R-$ и специально R-приведенного слова w группы G Кокстера большого типа установить, применимо ли к нему специальное кольцевое R-сокращение.

Алгоритм специального кольцевого R-сокращения

Построим для данного слова $w \in G$ особо специальную R-диаграмму с внешней граничной меткой $\varphi(\sigma) = w$.
Шаги алгоритма:

Алгоритм специального кольцевого R-сокращения

Построим для данного слова $w \in G$ особо специальную R-диаграмму с внешней граничной меткой $\varphi(\sigma) = w$.
Шаги алгоритма:

- 1. Разбиваем циклическое слово w (т.е. записанное на окружности) в направлении против часовой стрелки на подслова:
$$w = w_1 w_2 \dots w_n, \quad \forall s \; w_s \in G_{i_s j_s}.$$

Алгоритм специального кольцевого R-сокращения

Построим для данного слова $w \in G$ особо специальную R-диаграмму с внешней граничной меткой $\varphi(\sigma) = w$.
Шаги алгоритма:

- 1. Разбиваем циклическое слово w (т.е. записанное на окружности) в направлении против часовой стрелки на подслова:
$$w = w_1 w_2 \dots w_n, \quad \forall s \; w_s \in G_{i_s j_s}.$$
- 2. Выясняем, $\exists ? \; w_s : \; w_s = a_{i_s} a_{j_s} a_{i_s} \vee w_s = a_{j_s} a_{i_s} a_{j_s}$ в группе $G_{i_s j_s}$, причем $h = w_s a_{i_s} a_{j_s} a_{i_s}$ $(h = w_s a_{j_s} a_{i_s} a_{j_s})$ удовлетворяет условию
$$(\alpha) : \quad h \text{ — циклически приведенное слово.}$$
Если да, полагаем $k = s$ и переходим к п. 3, иначе — к п.1.

Алгоритм специального кольцевого R-сокращения

Построим для данного слова $w \in G$ особо специальную R-диаграмму с внешней граничной меткой $\varphi(\sigma) = w$.
Шаги алгоритма:

- 1. Разбиваем циклическое слово w (т.е. записанное на окружности) в направлении против часовой стрелки на подслова:
$$w = w_1 w_2 \dots w_n, \quad \forall s \; w_s \in G_{i_s j_s}.$$
- 2. Выясняем, $\exists ?\; w_s : \; w_s = a_{i_s} a_{j_s} a_{i_s} \vee w_s = a_{j_s} a_{i_s} a_{j_s}$ в группе $G_{i_s j_s}$, причем $h = w_s a_{i_s} a_{j_s} a_{i_s}$ $(h = w_s a_{j_s} a_{i_s} a_{j_s})$ удовлетворяет условию
$$(\alpha) : \quad h \text{ — циклически приведенное слово.}$$
Если да, полагаем $k = s$ и переходим к п. 3, иначе — к п.1.
- 3. Пусть $w_k = a_{i_k} a_{j_k} a_{i_k}$, и выполнено условие (α). Переходим к п. 3.1 — иначе к п. 1.

Алгоритм специального кольцевого R-сокращения

Построим для данного слова $w \in G$ особо специальную R-диаграмму с внешней граничной меткой $\varphi(\sigma) = w$.
Шаги алгоритма:

- 1. Разбиваем циклическое слово w (т.е. записанное на окружности) в направлении против часовой стрелки на подслова:
$$w = w_1 w_2 \dots w_n, \quad \forall s \; w_s \in G_{i_s j_s}.$$
- 2. Выясняем, $\exists ?\; w_s : \; w_s = a_{i_s} a_{j_s} a_{i_s} \vee w_s = a_{j_s} a_{i_s} a_{j_s}$ в группе $G_{i_s j_s}$, причем $h = w_s a_{i_s} a_{j_s} a_{i_s}$ $(h = w_s a_{j_s} a_{i_s} a_{j_s})$ удовлетворяет условию
$$(\alpha) : \quad h \text{ — циклически приведенное слово.}$$
Если да, полагаем $k = s$ и переходим к п. 3, иначе — к п.1.
- 3. Пусть $w_k = a_{i_k} a_{j_k} a_{i_k}$, и выполнено условие (α). Переходим к п. 3.1 — иначе к п. 1.
- 3.1. Полагаем $p = k + 1$.

Алгоритм специального кольцевого R-сокращения

Построим для данного слова $w \in G$ особо специальную R-диаграмму с внешней граничной меткой $\varphi(\sigma) = w$.
Шаги алгоритма:

- 3.2. В слове w_p выделяем начальное подслово $v \in G_{i_k j_p}$, приведенное в F.
  Выясняем, будет ли $v = a_{i_k} a_{j_p} a_{i_k} a_{j_p}$. Если да, проверяем, удовлетворяет ли $h = v a_{i_k} a_{j_p} a_{i_k} a_{j_p}$ условию (α) и переходим к п. 3.3 — иначе к п. 1.

Алгоритм специального кольцевого R-сокращения

Построим для данного слова $w \in G$ особо специальную R-диаграмму с внешней граничной меткой $\varphi(\sigma) = w$.
Шаги алгоритма:

- 3.2. В слове w_p выделяем начальное подслово $v \in G_{i_k j_p}$, приведенное в F.
  Выясняем, будет ли $v = a_{i_k} a_{j_p} a_{i_k} a_{j_p}$. Если да, проверяем, удовлетворяет ли $h = v a_{i_k} a_{j_p} a_{i_k} a_{j_p}$ условию (α) и переходим к п. 3.3 — иначе к п. 1.
- 3.3. В слове w_{p+1} выделяем начальное подслово $v \in G_{i_p j_p}$, приведенное в F. Выясняем, будет ли $v = a_{i_p} a_{j_p} a_{i_p} a_{j_p}$. Если да, проверяем, удовлетворяет ли $h = v a_{i_p} a_{j_p} a_{i_p} a_{j_p}$ условию (α) и переходим к п. 3.4 — иначе к п. 1.

Алгоритм специального кольцевого R-сокращения

Построим для данного слова $w \in G$ особо специальную R-диаграмму с внешней граничной меткой $\varphi(\sigma) = w$.
Шаги алгоритма:

- 3.2. В слове w_p выделяем начальное подслово $v \in G_{i_k j_p}$, приведенное в F.
  Выясняем, будет ли $v = a_{i_k} a_{j_p} a_{i_k} a_{j_p}$. Если да, проверяем, удовлетворяет ли $h = v a_{i_k} a_{j_p} a_{i_k} a_{j_p}$ условию (α) и переходим к п. 3.3 — иначе к п. 1.
- 3.3. В слове w_{p+1} выделяем начальное подслово $v \in G_{i_p j_p}$, приведенное в F. Выясняем, будет ли $v = a_{i_p} a_{j_p} a_{i_p} a_{j_p}$. Если да, проверяем, удовлетворяет ли $h = v a_{i_p} a_{j_p} a_{i_p} a_{j_p}$ условию (α) и переходим к п. 3.4 — иначе к п. 1.
- 3.4. Заменяем p на $p + 2$ и переходим к п. 3.2.

Алгоритм специального кольцевого R-сокращения

Построим для данного слова $w \in G$ особо специальную R-диаграмму с внешней граничной меткой $\varphi(\sigma) = w$.
Шаги алгоритма:

- 3.2. В слове w_p выделяем начальное подслово $v \in G_{i_k j_p}$, приведенное в F.
  Выясняем, будет ли $v = a_{i_k} a_{j_p} a_{i_k} a_{j_p}$. Если да, проверяем, удовлетворяет ли $h = v a_{i_k} a_{j_p} a_{i_k} a_{j_p}$ условию (α) и переходим к п. 3.3 — иначе к п. 1.
- 3.3. В слове w_{p+1} выделяем начальное подслово $v \in G_{i_p j_p}$, приведенное в F. Выясняем, будет ли $v = a_{i_p} a_{j_p} a_{i_p} a_{j_p}$. Если да, проверяем, удовлетворяет ли $h = v a_{i_p} a_{j_p} a_{i_p} a_{j_p}$ условию (α) и переходим к п. 3.4 — иначе к п. 1.
- 3.4. Заменяем p на $p+2$ и переходим к п. 3.2.

Алгоритм специального кольцевого R-сокращения

Таким образом, через конечное число шагов мы выясняем, можно ли для данного разбиения слова w построить приведенную кольцевую R-диаграмму M.
Если нельзя, то берем другое разбиение, для которого повторяем указанные в пп. 2 и 3 шаги.
Если мы построили особо специальную кольцевую R-диаграмму с внешней граничной меткой w и внутренней w', то $|w'| < |w|$.
Тогда пытаемся повторить процесс для слова w', и т. д.
В силу конечности длины исходного слова w этот процесс эффективен.

Сопряженность в подгруппе

Лемма

Пусть $u,\ v$ — сопряженные слова в группе G Кокстера большого типа, к которым неприменимо специальное кольцевое сокращение, $zuz^{-1} =_G v$. Пусть A — множество образующих G. Тогда если u — слово на образующих $A_J \subset A$ (но не является образующим из A_J), то $v \in G_J$ и

$$\exists z' \in G_J,\ z' =_G z : \quad z'uz'^{-1} =_{G_J} v$$

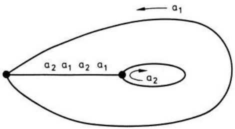
Сопряженность в подгруппе

Лемма

Пусть $u, \ v$ — сопряженные слова в группе G Кокстера большого типа, к которым неприменимо специальное кольцевое сокращение, $zuz^{-1} =_G v$. Пусть A — множество образующих G. Тогда если u — слово на образующих $A_J \subset A$ (но не является образующим из A_J), то $v \in G_J$ и

$$\exists z' \in G_J, \ z' =_G z : \quad z'uz'^{-1} =_{G_J} v$$

Отметим, что в простейшем случае, когда сопрягаются отдельные образующие $a_i, \ a_j$, минимальной диаграммой сопряженности является особая «петлевая» $(s-i)$-область (англ. *self-identified region*).

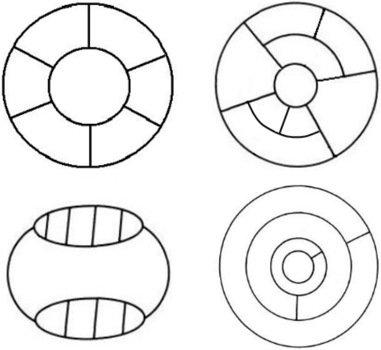


Если в приведенной диаграмме сопряженности специально сокращенных слов есть хотя бы одна $(s-i)$-область, то все ее области являются $(s-i)$-областями.

Классификация диаграмм сопряженности

В.Н. Безверхний, И.В. Добрынина — 2003 г.

В общем случае доказывается, что для пары слов, к которым неприменимо специальное кольцевое сокращение, можно эффективно установить, являются ли они граничными метками одной из диаграмм следующих типов:



Тупиковые слова и решение проблемы сопряженности

В.Н. Безверхний, И.В. Добрынина — 2003-5 гг.

Итак, длину циклического слова w группы G Кокстера большого типа укорачивают следующие преобразования:

- циклическое сокращение в свободном произведении F;
- циклическое R-сокращение в G (деновское сокрашение);
- циклическое специальное R-сокращение в G (удаление полос);
- кольцевое специальное R-сокращение в G;
- переход от к сопряженному слову w', $|w'| < |w|$ с помощью кольцевой диаграммы одного из классифицированных выше типов.

Тупиковые слова и решение проблемы сопряженности

В.Н. Безверхний, И.В. Добрынина — 2003-5 гг.

Итак, длину циклического слова w группы G Кокстера большого типа укорачивают следующие преобразования:

- циклическое сокращение в свободном произведении F;
- циклическое R-сокращение в G (деновское сокрашение);
- циклическое специальное R-сокращение в G (удаление полос);
- кольцевое специальное R-сокращение в G;
- переход от к сопряженному слову w', $|w'| < |w|$ с помощью кольцевой диаграммы одного из классифицированных выше типов.

Слово v, полученное из w и инвариантное относительно этих преобразований, называется тупиковым для w.

Тупиковые слова и решение проблемы сопряженности

В.Н. Безверхний, И.В. Добрынина — 2003-5 гг.

Итак, длину циклического слова w группы G Кокстера большого типа укорачивают следующие преобразования:

- циклическое сокращение в свободном произведении F;
- циклическое R-сокращение в G (деновское сокрашение);
- циклическое специальное R-сокращение в G (удаление полос);
- кольцевое специальное R-сокращение в G;
- переход от к сопряженному слову w', $|w'| < |w|$ с помощью кольцевой диаграммы одного из классифицированных выше типов.

Слово v, полученное из w и инвариантное относительно этих преобразований, называется тупиковым для w.

Лемма о минимальной длине сопряженного слова

Пусть $w \in G$ — слово, к которому неприменимо специальное кольцевое сокращение и v — тупиковое для w слово. Тогда никакое слово $u \in G$, $|u| < |v|$ — не сопряжено с w.

Тупиковые слова и решение проблемы сопряженности

В.Н. Безверхний, И.В. Добрынина — 2003-5 гг.

Лемма о минимальной длине сопряженного слова

Пусть $w \in G$ — слово, к которому неприменимо специальное кольцевое сокращение и v — тупиковое для w слово. Тогда никакое слово $u \in G$, $|u| < |v|$ — не сопряжено с w.

Наконец, в самом общем случае кольцевая приведенная R-диаграмма является либо n-слойной (после последовательного удаления n граничных слоев получаем пустую диаграмму), либо $C - n$-слойной (после удаления n граничных слоев остается какая-то непустая диаграмма).

Тупиковые слова и решение проблемы сопряженности

В.Н. Безверхний, И.В. Добрынина — 2003-5 гг.

Лемма о минимальной длине сопряженного слова

Пусть $w \in G$ — слово, к которому неприменимо специальное кольцевое сокращение и v — тупиковое для w слово. Тогда никакое слово $u \in G$, $|u| < |v|$ — не сопряжено с w.

Наконец, в самом общем случае кольцевая приведенная R-диаграмма является либо n-слойной (после последовательного удаления n граничных слоев получаем пустую диаграмму), либо $C - n$-слойной (после удаления n граничных слоев остается какая-то непустая диаграмма).

Лемма о шестиугольных областях

Пусть M — кольцевая приведенная R-диаграмма группы G Кокстера большого типа, причем ее граничные метки являются тупиковыми словами. Если — n-слойная либо $C - n$-слойная диаграмма $(n > 1)$, то степень любой ее области равна 6.

Тупиковые слова и решение проблемы сопряженности
В.Н. Безверхний, И.В. Добрынина — 2003-5 гг.

Пусть $u,\ v$ — слова, принадлежащие группе G Кокстера большого типа. Если они сопряжены и не являются сами образующими в G, то, учитывая все вышеизложенное, их можно считать тупиковыми. Поэтому существует кольцевая приведенная R-диаграмма M с граничными метками $\varphi(\sigma) = u,\ \varphi(\tau) = v$.
По лемме о минимальной длине сопряженного слова $|u| = |v|$.

Тупиковые слова и решение проблемы сопряженности

В.Н. Безверхний, И.В. Добрынина — 2003-5 гг.

Пусть u, v — слова, принадлежащие группе G Кокстера большого типа. Если они сопряжены и не являются сами образующими в G, то, учитывая все вышеизложенное, их можно считать тупиковыми. Поэтому существует кольцевая приведенная R-диаграмма M с граничными метками $\varphi(\sigma) = u$, $\varphi(\tau) = v$.
По лемме о минимальной длине сопряженного слова $|u| = |v|$.
Если — n-слойная диаграмма $(n > 1)$, то очевидно, что длина кратчайшего циклического пути, гомотопного σ и τ — не превосходит $|u|$.
Если же M — $C - n$-слойная R-диаграмма $(n > 1)$ — то, выделяя в ней максимальную n-слойную диаграмму M', также, как и выше, можно оценить длину кратчайшего в M' циклического пути, гомотопного граничным циклам.
Ограничительная оценка для оставшейся компоненты M'' получается из леммы о шестиугольных областях и теоремы о слое.

Тупиковые слова и решение проблемы сопряженности
В.Н. Безверхний, И.В. Добрынина — 2003-5 гг.

Если — n-слойная диаграмма $(n > 1)$, то очевидно, что длина кратчайшего циклического пути, гомотопного σ и τ — не превосходит $|u|$.
Если же M — $C - n$-слойная R-диаграмма $(n > 1)$ — то, выделяя в ней максимальную n-слойную диаграмму M', также, как и выше, можно оценить длину кратчайшего в M' циклического пути, гомотопного граничным циклам.
Ограничительная оценка для оставшейся компоненты M'' получается из леммы о шестиугольных областях и теоремы о слое.

Тупиковые слова и решение проблемы сопряженности

В.Н. Безверхний, И.В. Добрынина — 2003-5 гг.

Если — n-слойная диаграмма $(n > 1)$, то очевидно, что длина кратчайшего циклического пути, гомотопного σ и τ — не превосходит $|u|$.
Если же M — C – n-слойная R-диаграмма $(n > 1)$ — то, выделяя в ней максимальную n-слойную диаграмму M', также, как и выше, можно оценить длину кратчайшего в M' циклического пути, гомотопного граничным циклам.
Ограничительная оценка для оставшейся компоненты M'' получается из леммы о шестиугольных областях и теоремы о слое.
Значит, верна

Теорема Аппеля

В группе Кокстера большого типа разрешима проблема сопряженности слов.

Список литературы

- 1. Appel K., *On Artin groups and Coxeter groups of large type // Contemp. Math. 1984. № 33. P. 50-78.*
- 2. Levine A., *Quasiconvexity in Word-Hyperbolic Coxeter Groups. – Harvard University. Mathematics Department. 2005*
- 3. Безверхний В.Н., *Решение проблемы обобщенной сопряжённости слов в $C(p)\&T(q)$-группах. // Известия Тул. гос. ун-та. Сер. Математика. Механика. Информатика. 1998. 4. №3. С.5-13.*
- 4. Безверхний В.Н., Добрынина И.В., *Решение проблемы обобщенной сопряженности слов в группах Кокстера большого типа // Дискретная математика. 2005. 17. 3. 123-145.*
- 5. Линдон Р., Шупп П., *Комбинаторная теория групп. – М.: Мир, 1980.*
- 6. Ольшанский А.Ю., *Геометрия определяющих соотношений в группах. – М.: Наука, 1989.*