Библиотека Чебышевского сборника

Министерство образования и науки Российской Федерации
Российская академия наук
Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
Математический институт им. В. А. Стеклова РАН
Институт истории естествознания и техники им. С. И. Вавилова РАН
Московский педагогический государственный университет
Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого
Тульский государственный университет
Чебышевский фонд

АЛГЕБРА, ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ И ДИСКРЕТНАЯ ГЕОМЕТРИЯ: СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ И ПРИЛОЖЕНИЯ

Материалы XV Международной конференции, посвященной столетию со дня рождения профессора Николая Михайловича Коробова

Тула,
28–31 мая 2018 г.

Тула
ТГПУ им. Л. Н. Толстого
2018

ББК 22.132
УДК 511.6
А45

Председатель программного комитета –
В. Н. Чубариков

Сопредседатели программного комитета:
академик В. П. Платонов;
член-корреспондент В. М. Бухштабер

Ответственный секретарь – Н. М. Добровольский

Программный комитет:
В. А. Артамонов (Москва), И. Н. Балаба (Тула),
В. И. Берник (Минск, Белоруссия), В. А. Быковский (Хабаровск),
С. Б. Гашков (Москва), М. М. Глухов (Москва),
С. А. Гриценко (Москва), Е. И. Деза (Москва),
С. С. Демидов (Москва), Н. П. Долбилин (Москва),
М. В. Зайцев (Москва), А. М. Зубков (Москва), В. И. Иванов (Тула),
В. К. Карташов (Волгоград), П. О. Касьянов (Киев, Украина),
С. В. Конягин (Москва), М. А. Королёв (Москва),
В. Н. Кузнецов (Саратов), В. Н. Латышев (Москва),
А. Лауринчикас (Вильнюс, Литва), А. В. Михалёв (Москва),
С. П. Мищенко (Ульяновск), Ю. В. Нестеренко (Москва),
А. И. Нижников (Москва), А. Ю. Ольшанский (Нашвилл, США),
З. Х. Рахмонов (Душанбе, Таджикистан),
А. В. Устинов (Хабаровск), А. А. Фомин (Москва),
П. Цинтерхоф (Австрия), В. Г. Чирский (Москва)

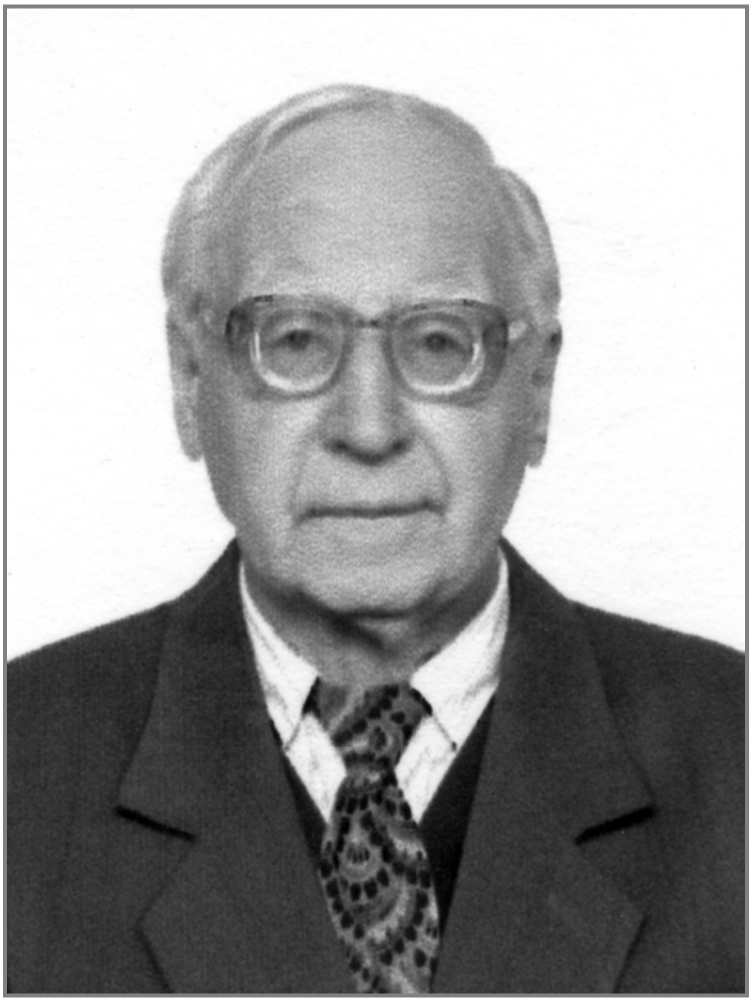
Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы
А45 и приложения: Материалы XV Междунар. конф., посвященной столетию со дня рождения профессора Николая Михайловича Коробова.– Тула: ТГПУ им. Л. Н. Толстого, 2018. – 392 с.

ISBN 978-5-6040489-4-8

ББК 22.132
УДК 511.6

Конференция проводится при финансовой поддержке РФФИ,
грант № 18-01-20030_г

ISBN 978-5-6040489-4-8



Выдающийся советский и российский математик,
доктор физико-математических наук, профессор
Николай Михайлович Коробов
(23.11.1917 – 25.10.2004)

Пленарные доклады

УДК 51(091)+(092)

Научное творчество Н. М. Коробова [1]

М. М. Глухов Россия, г. Москва, Академия криптографии Российской Федерации,
Н. М. Добровольский Россия, г. Тула, Тульский государственный педагогический университет имени Л. Н. Толстого,
И. Ю. Реброва Россия, г. Тула, Тульский государственный педагогический университет имени Л. Н. Толстого
glukhovmm@rambler.ru dobrovol@tspu.tula.ru i_rebrova@mail.ru

The scientific works of N. M. Korobova

M. M. Glukhov Russia, Moscow, Academy of cryptography of the Russian Federation,
N. M. Dobrovolsky Russia, Tula, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University,
I. Yu. Rebrova Russia, Tula, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University
glukhovmm@rambler.ru dobrovol@tspu.tula.ru i_rebrova@mail.ru

Встреча на четвертом курсе со своим будущим учителем и научным руководителем, членом-корреспондентом АН СССР Александром Осиповичем Гельфондом определила круг научных интересов Н. М. Коробова.

Теория чисел стала основным полем его научной и педагогической деятельности.

В 1940 году Н. М. Коробов окончил с отличием университет. В годы Великой Отечественной войны Николай Михайлович Коробов служил в рядах Красной Армии — преподавал высшую математику в Ленинградской военно-воздушной академии.

После демобилизации в 1945 году Николай Михайлович поступил в аспирантуру МГУ к Александру Осиповичу Гельфонду и в 1948 году защитил кандидатскую диссертацию по теме «Некоторые вопросы равномерного распределения».

В 1953 году Н. М. Коробов получил степень доктора физико-математических наук, защитив диссертацию по теме «Об арифметических свойствах показательных функций». Оппонентами по докторской диссертации были выдающиеся специалисты по теории чисел Ю. В. Линник, А. Я. Хинчин и Н. Г. Чудаков. В 1948 году Николай Михайлович начал преподавать на кафедре теории чисел механико-математического факультета Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова. Здесь в 1955 году ему было присвоено звание профессора.

Однако научная деятельность Н. М. Коробова была связана не только с Московским государственным университетом. На протяжении пятидесяти семи лет он проработал в системе Академии Наук:

- 1948–1972 — Математический институт АН СССР им. В. А. Стеклова;
- 1979–1988 — Вычислительный центр АН СССР;
- 1988–2004 — Институт истории естествознания и техники АН СССР — РАН им. С. И. Вавилова.

Научная деятельность Николая Михайловича Коробова развивалась в трех направлениях, в каждом из которых он добился выдающихся результатов:

1. Исследование вопросов распределения дробных долей;

[1]Исследование выполнено по гранту РФФИ №16-41-710194_р_центр_а

2. Исследование и оценки тригонометрических сумм и применение этих оценок к различным вопросам аналитической теории чисел;

3. Исследование вопросов приближённого вычисления кратных интегралов.

В рамках исследования вопросов распределения дробных долей Н. М. Коробовым: было введено понятие вполне равномерного распределения; были построены примеры вполне равномерно распределенных функций; были установлены связи между вполне равномерным распределением и свойствами чисел, нормальных по Борелю.

Николаем Михайловичем было также введено понятие совместно нормальных чисел, построены примеры таких чисел и указаны связи между вполне равномерным распределением и теорией совместно нормальных чисел.

Н. М. Коробов провел детальное изучение нормальных периодических систем и с их помощью получил неулучшаемые оценки в вопросе о суммах дробных долей показательных функций.

При исследовании тригонометрических сумм Коробовым впервые были рассмотрены тригонометрические суммы с так называемыми рекуррентными функциями. Для таких сумм он получил неулучшаемые оценки и применил их к исследованию распределения невычетов и первообразных корней в рекуррентных последовательностях.

Коробов впервые рассмотрел тригонометрические суммы с показательными функциями и получил полное описание сумм такого вида.

Им была получена также оценка суммы характеров, расширяющая область нетривиальности оценок Хассе-Вейля. Эта оценка показывает, что имеется интерференция для нулей локальной дзета-функции Римана кривой

$$y^2 \equiv f(x) \pmod{p},$$

где p — простое, а $f(x)$ — полином нечётной степени.

Николаем Михайловичем был предложен новый подход для усиления оценок классических сумм Вейля.

Эти оценки позволили ему существенно уточнить границу нулей дзета-функции Римана и усилить оценку остаточного члена в законе распределения простых чисел.

Оценку

$$\zeta(1+it) = O\left(\ln^{\frac{2}{3}}|t|\right), \quad t \to \infty,$$

опубликованную Н. М. Коробовым в работе 1958 года, не удалось усилить до сих пор. Эта работа оказала большое влияние на дальнейшее развитие метода тригонометрических сумм.

Одновременно с Николаем Михайловичем Коробовым подобные результаты в рамках проблемы оценок сумм Вейля были получены великим российским математиком Иваном Матвеевичем Виноградовым, о чем говорится во второй главе монографии А. Вальфиша «Welsche Exponentialsummen in der neueren Zahlentheorie», опубликованной в Берлине в 1963 году.

Третий цикл работ Николая Михайловича посвящен вопросам приближенного вычисления кратных интегралов. Введение неравномерных сеток для построения многомерных квадратурных формул позволило с помощью оценок полных рациональных тригонометрических сумм получить гарантированную оценку погрешности приближенного интегрирования, аналогичную оценке для метода Монте-Карло.

Соображения о сравнениях специального вида, не рассматривавшихся ранее, были им применены к построению многомерных квадратурных формул. Эти формулы являются оптимальными по порядку остаточного члена как для функций малой гладкости, так и для гладких периодических функций.

Теоретико-числовые квадратурные формулы он применил к вопросам интерполяции функций многих переменных и к приближённому решению интегральных уравнений.

Николай Михайлович предложил также экономные алгоритмы для получения оптимальных коэффициентов теоретико-числовых сеток.

Признанием научных заслуг Н. М. Коробова являются премия им. П. Л. Чебышёва АН СССР (1958) и исполнение им обязанностей учёного секретаря оргкомитета III Всесоюзного математического съезда в Москве в 1956 году, на котором председателем оргкомитета был академик И. М. Виноградов.

Николай Михайлович Коробов — автор более 70 научных работ, в том числе двух монографий, в которых ярко раскрывается педагогический талант крупного учёного — понятно и просто излагать сложные и трудные вопросы теории чисел и её приложений к приближённому анализу.

Первая монография — «Теоретико-числовые методы в приближенном анализе» — вышла двумя изданиями: в 1963 году и переработанное в 2004 году.

Вторая монография Коробова — «Тригонометрические суммы и их приложения» — вышла на русском языке в 1989 году, переведена на английский язык в 1992 году и на испанский язык в 1993 году.

Являясь долгие годы соруководителем научно-исследовательского семинара кафедры теории чисел МГУ, он остался в памяти участников как заинтересованный, внимательный, но строгий авторитет по оценке научной деятельности многих математиков из периферийных вузов, выступавших на семинаре в Москве.

Создание теоретико-числового метода в приближённом анализе неразрывно связано с работой в 1957–1961 годах в Математическом институте АН СССР семинара, которым руководили Н. М. Коробов, Н. С. Бахвалов и Н. Н. Ченцов.

Тридцать лет без перерыва в МГУ им. Ломоносова работал под руководством Николая Михайловича Коробова семинар по тригонометрическим суммам и их приложениям для студентов, аспирантов и научных работников.

За годы педагогической деятельности Н. М. Коробов подготовил многих учеников: более 20-ти из них защитили кандидатские диссертации, а 8 – докторские.

С 1 февраля 1988 года Н. М. Коробов по приглашению Адольфа Павловича Юшкевича начал работать в секторе истории математики Института истории естествознания и техники РАН им. С. И. Вавилова. Сотрудничество Николая Михайловича с Институтом не только не прекратило его теоретико-числовых исследований, но и расширило их за счёт исторических аспектов.

Работы Николая Михайловича Коробова в области истории математики такие, как «О теоретико-числовых методах приближенного интегрирования» (1994) и «О теоретико-числовых интерполяционных формулах» (2001), способствовали появлению интересных исследований по истории математического анализа и теории чисел.

В последние годы жизни Николай Михайлович Коробов:

- разрабатывал новые направления исследований по развитию теоретико-числового метода – специальные полиномы и комбинированные сетки
- совершенствовал алгоритмы вычисления оптимальных коэффициентов
- получал новые оценки погрешности квадратурных формул с параллелепипедальными сетками
- изучал глубокие вопросы поведения неполных частных цепных дробей.

Николай Михайлович Коробов прожил долгую насыщенную жизнь ученого (23.11.1917–25.10.2004), не дожив 29 дней до своего 87-летия.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Коробов Н. М. О функциях с равномерным распределением дробных долей // ДАН СССР. 1948. Т. 62. С. 21-22.
2. Коробов Н. М. О некоторых вопросах равномерного распределения. Дисс. к.ф.-м.н. М.: МГУ,1948.
3. Коробов Н. М. О суммах дробных долей // ДАН СССР. 1948. Т. 67. С. 781-782.
4. Коробов Н. М. Некоторые проблемы распределения дробных долей // УМН. 1949. Т. 4. N°1 (29). С. 189-190.
5. Коробов Н. М. Нормальные периодические системы и вопрос о суммах дробных долей // УМН. 1949. Т. 5. N°3 (37). С. 135-136.
6. Коробов Н. М. О некоторых вопросах равномерного распределения // ИАН. сер. матем. 1950. Т. 14. С. 215-238.
7. Коробов Н. М. О дробных долях показательной функции.// УМН, 1951, Т. 6, N°4 (44), С. 151.
8. Коробов Н. М. Нормальные периодические системы и их приложения к оценке сумм дробных долей // ИАН. сер. матем. 1951. Т. 15. С. 17-46.
9. Коробов Н. М. Дробные доли показательной функции // Труды МИАН. 1951. Т. 38. С. 87-96.
10. Коробов Н. М. Об одном вопросе диофантовых неравенств // Сообщения I-го конгресса Венгерских математиков. Будапешт. 1951. С. 259-262.
11. Коробов Н. М. О нормальных периодических системах // ИАН. сер. матем. 1952. Т. 16. С. 211-216.
12. Коробов Н. М. Некоторые многомерные задачи теории диофантовых приближений // ДАН СССР. 1952. Т. 84. С. 13-16.
13. Коробов Н. М., А. Г. Постников Некоторые общие теоремы о равномерном распределении дробных долей // ДАН СССР. 1952. Т. 84. С. 217-220.
14. Коробов Н. М. Многомерные задачи распределения дробных долей // ИАН. сер. матем. 1953. Т. 17. С. 389-400.
15. Коробов Н. М. Распределение невычетов и первообразных корней в рекуррентных рядах // ДАН СССР. 1953. Т. 88. № 4. С. 603-606.
16. Коробов Н. М. О некоторых задачах Чебышевского типа // ДАН СССР. 1953. Т. 89. С. 397-400.
17. Коробов Н. М. Неулучшаемые оценки тригонометрических сумм с показательными функциями // ДАН СССР. 1953. Т. 89. С. 597-600.
18. Коробов Н. М. Об арифметических свойствах показательных функций. Дисс.... д.ф.-м.н. М.: МИАН им. В.А. Стеклова АН СССР, 1953. 154 с.
19. Коробов Н. М. Числа с ограниченным отношением и их приложения к вопросам диофантовых приближений // ИАН. сер. матем. 1955. Т. 19. С. 361-380.

20. Коробов Н. М. Диофантовы приближения с показательными функциями // Труды 3-го Всесоюзного матем. съезда. 1956. Т. 2. С. 6-7.

21. Коробов Н. М. Рациональные тригонометрические суммы с показательными функциями, их обобщения и приложения // Труды 3-го Всесоюзного матем. съезда. 1956. Т. 2. С. 109.

22. Коробов Н. М. О вполне равномерном распределении и совместно нормальных числах // ИАН. сер. матем. 1956. Т. 20. С. 648-660.

23. Коробов Н. М. Приближенное вычисление кратных интегралов с помощью методов теории чисел // ДАН СССР. 1957. № 6. С. 1062-1065.

24. Коробов Н. М. Об оценке рациональных тригонометрических сумм // ДАН СССР. 1958. Т. 118. № 2. С. 231-232.

25. Коробов Н. М. О нулях функции $\zeta(s)$ // ДАН СССР. 1958. Т. 118. № 3. С. 431-432.

26. Коробов Н. М. Новые теоретикочисловые оценки // ДАН СССР. 1958, Т. 119. № 3. С. 433-434.

27. Коробов Н. М. О границе нулей функции Римана // УМН. 1958. Т. 13. № 2, С. 243-245.

28. Коробов Н. М. Оценки тригонометрических сумм и их приложения // УМН. 1958. Т. 13. № 4. С. 185-192.

29. Коробов Н. М. Оценки сумм Вейля и распределение простых чисел // ДАН СССР. 1958. Т. 123. № 1. С. 28-31.

30. Коробов Н. М. О некоторых теоретикочисловых методах приближенного вычисления кратных интегралов // Резюме докл. на заседании Моск. мат. об-ва. УМН. 1959. Т. 14, Вып. 2 (86) . С. 227-230.

31. Коробов Н. М. О приближенном вычислении кратных интегралов // ДАН СССР. 1959. Т. 524. № 6. С. 1207-1210.

32. Коробов Н. М. О приближенном решении интегральных уравнений // ДАН СССР. 128. № 2 (1959). С. 235-238.

33. Коробов Н. М. О частично рациональных тригонометрических суммах // ДАН СССР. 1959. Т. 125. № 6. С. 1193-1195.

34. Коробов Н. М. Вычисление кратных интегралов методом оптимальных коэффициентов // Вестн. Моск. ун-та. № 4 (1959). С. 19-25.

35. Коробов Н. М. Оценки тригонометрических сумм с вполне равномерно распределенными функциями // ДАН СССР. 1960. Т. 132. № 5. С. 1009-1012.

36. Коробов Н. М. Свойства и вычисление оптимальных коэффициентов // Докл. АН СССР 132. № 5 (1960). С. 1009-1012.

37. Коробов Н. М. Применение теоретикочисловых сеток в интегральных уравнениях и интерполяционных формулах // Тр. матем. ин-та им. В. А. Стеклова. Т. 60 (1961) . С. 195-210.

38. Коробов Н. М. О применении теоретикочисловых сеток // Вычислительные методы и программирование: Сб. Моск. ун-Т. 1962. С. 80-102.

39. Коробов Н. М. О применении теоретикочисловых сеток // Сб. работ ВЦ МГУ. 1. 1962. С. 80-102.

40. Коробов Н. М. О некоторых задачах теории чисел, возникающих из потребностей приближенного анализа // Сообщение на IV математическом съезде (не опубл.).

41. Коробов Н. М. О теоретикочисловых методах в приближенном анализе // Труды конф. по вычислительной математике и вычислительной технике. МГУ. Машгиз. 1963.

42. Карацуба А. А., Коробов Н. М. О теореме о среднем // ДАН СССР. 149. 1963. № 2. С. 245-248.

43. Коробов Н. М. Теоретикочисловые методы в приближенном анализе // М.: Физматгиз, 1963.

44. Коробов Н. М. Оценки сумм Вейля и их приложения // Труды Четвертого Всесоюзного математического съезда. Л.: Наука, 1964. Т. II. С. 112-116.

45. Бахвалов Н. С., Коробов Н. М., Ченцов Н. Н. Применение теоретикочисловых сеток к задачам приближенного анализа // Труды Четвертого Всесоюзного математического съезда. Л.: Наука, 1964. Т. II. С. 580-587.

46. Коробов Н. М. О задачах теории чисел, связанных с вычислением кратных интегралов // Тезисы кратких научных сообщений Международного конгресса математиков. Секция 3. М. 1966. № 4, С. 42-46.

47. Коробов Н. М. О некоторых вопросах теории диофантовых приближений // УМН. 1967. Т. 22. № 3 (135). С. 83-118.

48. Коробов Н. М. О методе тригонометрических сумм. (Добавление к книге Прахара „Распределение простых чисел".) // М.: Мир, 1967. С. 479-499.

49. Коробов Н. М. Двойные тригонометрические суммы и их приложения к оценке рациональных сумм // Мат. заметки. 1969. Т. 6. № 1. С. 25-34.

50. Коробов Н. М. Тригонометрические суммы с показательными функциями и распределение знаков периодических дробей // Мат. заметки. 1970. Т. 8. № 5. С. 641-651.

51. Коробов Н. М. Оценки суммы символов Лежандра // ДАН СССР. 1971. Т. 196. № 4. С. 764-767.

52. Коробов Н. М. О полных системах сравнений // Acta Arithm. 1972. V. XXI. P. 357-366.

53. Коробов Н. М. О распределении знаков в периодических дробях // Мат. сборник. 1972. Т. 4 (12). № 89 (131). С. 654-670.

54. Коробов Н. М., Митькин Д. А. О нижних оценках тригонометрических сумм // Вестник МГУ. 1977. № 5. С. 54-57.

55. Коробов Н. М. К вопросу о доказательстве теоремы о среднем // Воронежский теоретикочисловой сборник. 1977. Т. 187. С. 5-13.

56. Коробов Н. М. О кратных тригонометрических суммах // Вестник МГУ. № • 1981. С. 22-29.

57. Коробов Н. М. О вычислении оптимальных коэффициентов // ДАН СССР. 1982. Т. 267. № 2. С. 289-292.

58. Коробов Н. М. Об одной оценке А. О. Гельфонда // Вестн. МГУ. Сер.1. Математика, механика. 1983. № 3. С. 3-7.

59. Коробов Н. М. О некоторых вопросах теории диофантовых приближений // Тезисы докладов всесоюзной конференции „Теория трансцендентных чисел и ее приложения". 1983. С. 62.

60. Коробов Н. М. Об оценках тригонометрических сумм и сумм характеров // Диофантовы приближения, Изд. МГУ. 1985. С. 42-47.

61. Коробов Н. М. Тригонометрические суммы и их приложения // М.: Наука, 1989.

62. Англ. перевод: Exponential Sums and their Applications. Kluwer Academic Publishers. Dordrecht. Boston. London. 1992.

63. Исп. перевод: Las Sumas Trigonometricas y sus aplicaciones // Bilbao. 1993. Universidad Del Pais Vasco. Euskal Herriko Unibertsitatea. Servicio Editorial.

64. Коробов Н. М. Квадратурные формулы с комбинированными сетками // Математические заметки. 1994. Т. 55. Вып. 2. С. 83-90.

65. Коробов Н. М. О теоретикочисловых методах приближенного интегрирования // Историко-матем. исследования. СПб. 1994. Вып. XXXV. С. 285-301.

66. Коробов Н. М. Специальные полиномы и их приложения // Диофантовы приближения. Матем. записки. 1996. Т. 2. С. 77-89.

67. Коробов Н. М. О конечных цепных дробях // УМН. 1997. Т. 52. 3. С. 167-168.

68. Коробов Н. М. О теоретикочисловых интрполяционных формулах // Историко-матем. исследования. М.: „Янус // К". 2001. Вып. 6 (41). С. 266-276.

69. Коробов Н. М. О некоторых свойствах специальных полиномов // Чебышевский сборник. 2001. Т. 1. С. 40-49.

70. Добровольский Н. М., Коробов Н. М. Оптимальные коэффициенты для комбинированных сеток // Чебышевский сборник. 2001. Т. 2. С. 41-53.

71. Коробов Н. М. Об одной оценке в методе оптимальных коэффициентов // Современные проблемы математики, механики, информатики: Тезисы докладов Всероссийской научной конференции. Тула: ТулГУ. 2002. С. 39-40.

72. Добровольский Н. М., Коробов Н. М. Об оценке погрешности квадратурных формул с оптимальными параллелепипедальными сетками // Чебышевский сборник. 2002. Т. 3, вып. 1(3). С. 41-48.

73. Н. М. Коробов, Н. М. Добровольский Критерии оптимальности и алгоритмы поиска оптимальных коэффициентов // Чебышевский сб. 2007. Т. 8, вып. 4. С. 105–128.

УДК 511.238

О малоизвестном подлинно революционном вкладе Эвариста Галуа

С. Ф. Адлай Россия, г. Москва, Вычислительный центр им А. А. Дородницына ФИЦ ИУ РАН
Semjondlaj@gmail.com

On a little-known dinkum revolutionary contribution of Évariste Galois

S. F. Adlaj Russia, Moscow, Computing Center of the Federal Research Center "Informatics and Control"
Semjondlaj@gmail.com

В своём последнем письме [5], красноречиво описанном Германом Вейлем как «самая значимая рукопись во всей истории человечества», Эварист Галуа указал на достаточное и необходимое условие понижения степени модулярного уравнения уровня (простого числа) p. С этой целью он ввел проективную специальную линейную группу над простым полем, которую мы обозначим G_p,[1] и отметил, что сея группа проста, когда простое p строго превосходит число 3.[2] Он указал три исключительных простых числа, для которых группа G_p обладает подгруппой индекса, совпадающего с p. Таковы простые числа 5, 7 и 11. Для любого простого p, строго превышающего 11, гарантировано существование подгрупп индекса $p+1$ и не ниже. Эквивалентно сказанному, модулярное уравнение простого уровня $p \geqslant 5$, является понижаемым,[3] из степени $p+1$ до степени p, лишь при $p \in \{5, 7, 11\}$. Благодаря явному построению подгрупп, с индексами, соответствующими этим трём исключительным простым числам, Галуа должен, в частности, быть исключительно признан за внесение сокрушающего вклада в фактическое решение общего квинтического уравнения посредством его выявления как модулярного уравнения уровня 5. Хотя вклад Галуа, в формулировку достаточного и необходимого критерия разрешимости алгебраического уравнения в радикалах, признан, его основополагающий вклад в фактическое решение квинтического уравнения (до Эрмита и Клейна), едва ли кем-то осознан!

Бетти, в 1851 году [3], тщетно просил Лиувилля обнародовать результаты (неопубликованных) работ Галуа, а в 1854 году [4] показал, что конструкция Галуа даёт решение квинтическому уравнению посредством эллиптических функций.[4] Можно сопоставить каждому

[1]Группа G_p может рассматриваться как группа Галуа (в общепринятом смысле) соответствующего алгебраического уравнения, как мы далее поясним. Стандартным обозначением для G_p является $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{F}_p)$, где мы предполагаем, что индекс p соответствует простому числу.

[2]Сама концепция простоты группы, также введённая Галуа, является основой для классификации групп. Классификация конечных простых групп, названная «громадной теоремой», была (преждевременно) объявлена в 1981 году Даниэлем Горенштейном до её завершения в 2004 году (Майклом Ашбахером и Стивеном Смитом).

[3]Концепция понижения степени, ещё одна поразительная идея, всецело принадлежащая Галуа, которая как мы вскоре увидим, является исключительно основополагающим (но редко доведенным до осознания) шагом к фактическому решению квинтического уравнения.

[4]В 1830 году Галуа соревновался с Абелем и Якоби за "Grand Prix" Французской академии наук. Абель (посмертно) и Якоби были награждены (совместно), а работа Галуа (таинственно) исчезла! Сам факт, что утерянные работы Галуа содержали вклад в абелевы интегралы, либо неизвестен (многим), либо считается (некоторыми) ныне невостребованным. Справедливости ради, следует отметить некоторых исключительных математиков, таких как Гротендик который, в своей автобиографической книге Récoltes et Semailles, благородно и честно признался, что "Je suis persuadé d'ailleurs qu'un Galois serait allé bien plus loin encore que je n'ai été. D'une part à cause de ses dons tout à fait exceptionnels (que je n'ai pas reçus en partage, quant à moi)."

квинтическому уравнению, приведённому к форме Бринга-Джеррарда, соответствующее значение эллиптического модуля β (Якоби), как было сделано Эрмитом в 1958 году [6], реализуя тем самым конструкцию Галуа (в вычислении корней через значения эллиптической функции в точках, отделённых друг от друга расстояниями, кратными пятой периода). Группа G_5 действует (канонически) на шесть элементов проективной прямой $\mathrm{P}\mathbb{Z}_5$, которые мы обозначим вслед за Галуа как 0, 1, 2, 3, 4 и ∞. Затем, собирая их в тройку пар $\{(0,\infty)$, $(1,4)$, $(2,3)\}$, увидим, что группа G_5 порождает еще четыре тройки пар $\{(1,\infty)$, $(2,0)$, $(3,4)\}$, $\{(2,\infty)$, $(3,1)$, $(4,0)\}$, $\{(3,\infty)$, $(4,2)$, $(0,1)\}$, $\{(4,\infty)$, $(0,3)$, $(1,2)\}$. Вместе пять троек пар составляют пятиэлементное множество, на которое и действует G_5.[5] Галуа (в своём последнем письме) не записывает четыре тройки пар, которые мы записали после первой, и теперь, руководствуясь его краткостью, ограничимся записью только первого набора пар, который он представил для каждого из двух оставшихся случаев, при $p = 7$ и $p = 11$, соответственно: $\{(0,\infty)$, $(1,3)$, $(2,6)$, $(4,5)\}$ и $\{(0,\infty)$, $(1,2)$, $(3,6)$, $(4,8)$, $(5,10)$, $(9,7)\}$. В отличие от случая $p = 5$ альтернатива может быть представлена для случая $p = 7$, а именно $\{(0,\infty)$, $(1,5)$, $(2,3)$, $(4,6)\}$, и для случая $p = 11$, а именно $\{(0,\infty)$, $(1,6)$, $(3,7)$, $(4,2)$, $(5,8)$, $(9,10)\}$.

«Абсолютный инвариант» действия подгруппы Γ_2 модулярной группы $\Gamma := \mathrm{PSL}(2,\mathbb{Z})$, состоящей из дробно-линейных преобразований, конгруэнтных по модулю 2 тождественному перобразованию, является квадратом эллиптического модуля β^2. Фундаментальная область $\Gamma_2\backslash\mathcal{H}$ действия Γ_2 (на верхнюю полуплоскость $\mathcal{H}$) может быть получена из фундаментальной области $\Gamma\backslash\mathcal{H}$ после действия факторгруппы $\Gamma/\Gamma_2 \cong S_3$.[6] В частности, β^2, рассматриваемая как функция на $\mathcal{H}$, является периодической, с периодом 2. Зонке, в замечательной работе [7], определил модулярные уравнения для $\beta^{1/4}$ для всех нечётных простых чисел вплоть до числа 19, включительно. Его работа вместе с работой Бетти, вдохновила Эрмита (успешно) связать (общее) квинтическое уравнение в форме Бринга-Джеррарда с модулярным уравнением уровня 5, но у него не было иного выбора, кроме как признать важность ключевой идеи Галуа (в понижении степени модулярного уравнения).[7]

Модулярный многочлен для $\beta^{1/4}$ уровня 5 равен

$$\phi_5(x,y) := x^6 - y^6 + 5\,x^2y^2\,(x^2-y^2) + 4\,x\,y\,(1-x^4y^4),$$

и период $\beta^{1/4}$ (как аналитически продолженная функция) составляет 16. Обозначая корни $\phi_5(x,\, y=\beta^{1/4}(\tau))$, при фиксированном $\tau \in \mathcal{H}$,

$$y_5 = \beta^{1/4}(5\,\tau),\ y_m = -\beta^{1/4}\left(\frac{\tau+16\,m}{5}\right),\ 0 \leqslant m \leqslant 4,$$

вычисляется минимальный многочлен для $x_1 := (y_5-y_0)(y_4-y_1)(y_3-y_2)\,y$. Им оказывается

$$x^5 - 2000\,\beta^2\,(1-\beta^2)^2\,x + 1600\sqrt{5}\,\beta^2\,(1-\beta^2)^2\,(1+\beta^2).$$

[5]Действительно, именно этот пятиэлементный набор пришлось Эрмиту применить. Сея конструкция Галуа при $p = 5$, в отличие от двух оставшихся случаев, при $p = 7$ или $p = 11$, не оставляла иного выбора.

[6]Последняя факторгруппа совпадает с G_2, которая изоморфна S_3.

[7]Эрмит, по-видимому, принял католическую и монархическую идеологию Коши, во многом отличную от страстного отвержения Галуа социальных предубеждений и иерархических расставлений. В 1849 году Эрмит представил Французской академии наук мемуар о двояко периодических функциях, ссылаясь на Коши, но спор с Лиувиллем о приоритетности помешал его публикации. 14 июля 1856 года Эрмит был избран во Французскую Академию наук и (вероятно) ознакомлен Коши с идеями, вытекающими из «утерянных» работ Галуа (и ему не приписываемых). Т. Ротман предпринял жалкую попытку в «Genius and Biographers: The Fictionalization of Evariste Galois», которая появилась в American Mathematical Monthly, vol. 89, 1982, стр. 84-106 (и, прискорбно, получила премию письменности Лестера Р. Форда в 1983 году) спасти репутацию Коши, (неосознанно) предлагая дополнительные доказательства малодушия Коши и попутно удивиляя нас многими (необычными, но предвзятыми и необоснованными) суждениями, рассказывающими нам многое о самом Т. Ротмане, но вряд ли что-либо заслуживающее доверия о ком-либо ещё!

Таким образом, корень квинтического уравнения

$$x^5 - x + c,\ c := \frac{2\,(1+\beta^2)}{5^{5/4}\sqrt{\beta(1-\beta^2)}} = \frac{2\,(1+y^8)}{5^{5/4}\,y^2\sqrt{1-y^8}},^{8}$$

является

$$\frac{\sqrt{5}\,c\,x_1}{4\,(1+\beta^2)} = \frac{x_1}{2\sqrt{5\sqrt{5}\ ,\beta(1-\beta^2)}} = \frac{(y_5-y_0)(y_4-y_1)(y_3-y_2)}{2\,y\sqrt{5\sqrt{5}\,(1-y^8)}},$$

и потому выражается через коэффициенты λ_m и μ_m эллиптических многочленов $r_{m5}(x) = x^2 - \lambda_m x + \mu_m$, $0 \leqslant m \leqslant 5$.[9] Действительно, многочлены r_{m5} могут быть упорядочены так, чтобы для каждого m значение β_m^2 совпадало бы с y_m^8. Выражение для $y_m^8 = \beta_m^2$ может быть записано как

$$y_m^8 = \frac{s(\lambda_m,\,\mu_m,\,\beta)}{\beta^4 s(\lambda_m,\,\mu_m,\,1/\beta)},$$

где

$$s(\lambda,\,\mu,\,x) = \left(\frac{1+\lambda\,x}{\mu} + x^2\right)\left(4\,\lambda + \left(\frac{2\,\lambda^2}{\mu} + 4 + 5\,\mu\right)x + \lambda\left(\frac{2}{\mu}+3\right)x^2 + x^3\right),$$

а коэффициенты $\lambda_m = \gamma_m + (2\cdot\gamma_m)$ и $\mu_m = \gamma_m(2\cdot\gamma_m)$ удовлетворяют уравнению

$$\prod_{m=0}^{5}\left(x^2 - \lambda_m\,x + \mu_m\right) = x^{12} + \frac{62\,x^{10}}{5} - 21\,x^8 - 60\,x^6 - 25\,x^4 - 10\,x^2 + \frac{1}{5} +$$
$$+\,\alpha\,x^3\left(x^8 + 4\,x^6 - 18\,x^4 - \frac{92\,x^2}{5} - 7\right) + \ \alpha^2 x^4\left(\frac{x^6}{5} - 3\,x^2 - 2\right) - \frac{\alpha^3 x^5}{5} = R_5(x),$$

где $\alpha := 4(\beta + 1/\beta)$. Корни γ_m и $2\cdot\gamma_m$,[10] $0 \leqslant m \leqslant 5$, многочлена деления r_5 могут быть высокоэффективно вычислены по алгоритму, представленному в работе [1]. Вычисление пары, скажем γ_0 и γ_5, достаточно, чтобы вычислить все двенадцать корней, применяя формулу сложения вместе с формулой удвоения, как изложено в работе [2].

В наши дни забвение сменило изумление над ключевым шагом Галуа, по решению квинтического уравнения, понижающим степень модулярного уравнения, уровня 5, от 6 до 5,[11] и Галуа лишь упоминается наряду с Абелем в установлении того, что квинтическое уравнение не разрешимо в радикалах. Мы надеемся, что этот (искажённый) взгляд на (глубоко конструктивную) теорию Галуа останется безвозвратно в прошлом.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Адлай С. Ф. *Итерационный алгоритм вычисления эллиптического интеграла*// Задачи исследования устойчивости и стабилизации движения. 2011. С. 104-110.

[8]Следует отметить, что постоянный коэффициент c инвариантен относительно инверсий $\beta \mapsto -1/\beta$ и $\beta \mapsto (1-\beta)/(1+\beta)$. Здесь композиция последних двух инверсий является другой инверсией. Соответствующая четырехточечная орбита в фундаментальной области $\Gamma_2\backslash\mathcal{H}$ порождается отображением $\tau \mapsto 2/(2-\tau)$.

[9]Эллиптические многочлены были представлены в 2014 году на (седьмой) конференции PCA (http://pca.pdmi.ras.ru/2014/program) в докладе, озаглавленным «Модулярные полиномиальные симметрии», и на (семнадцатом) семинаре по компьютерной алгебре (http://compalg.jinr.ru/Dubna2014/abstracts.html) в докладе, названном «Эллиптические и коэллиптические полиномы». Подробности приведены в работе [2].

[10]В соответствии с обозначениями, используемыми в [2], $2\cdot\gamma_m$, означают, что формула удвоения применялось к γ_m.

[11]Например, S. Vlăduţ, в его книге «Kronecker's Jugendtraum and Modular Functions» (опубликованной Gordon and Breach в 1991 г.), (неправомерно) присваивает Эрмиту заслугу установления эквивалентности общего квинтического уравнения модулярному уравнению уровня 5.

2. Adlaj S. *Multiplication and division on elliptic curves, torsion points and roots of modular equations.* [Электронный ресурс], Режим доступа:

   http://www.ccas.ru/depart/mechanics/TUMUS/Adlaj/ECCD.pdf.

3. Betti E. *Sopra la risolubilità per radicali delle equazioni algebriche irriduttibili di grado primo* // Dagli Annali di Scienze matimatiche e fisiche, t. II (Roma, 1851): 5-19.

4. Betti E. *Un teorema sulla risoluzione analitica delle equazioni algebriche* // Dagli Annali di Scienze matimatiche e fisiche, t. V (Roma, 1854): 10-17.

5. Galois É. *"Lettre de Galois à M. Auguste Chevalier"* // Journal de Mathématiques Pures et Appliquées XI (1846): 408–415.

6. Hermite C. *"Sur la résolution de l'équation du cinquième degré"* // Comptes Rendus de l'Académie des Sciences XLVI(I) (1858): 508–515.

7. Sohnke L. *Equationes Modulares pro transformatione functionum Ellipticarum* // Journal de M. Crelle, t. XVI (1836): 97-130.

УДК 512.573

О приложениях полиномиально полных конечных квазигрупп

В. А. Артамонов Россия, Москва, Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
artamon@mech.math.msu.su

On applications of polynomially complete finite quasigroups

V. A. Artamonov Russia, Moscow, Moscow State University
artamon@mech.math.msu.su

Квазигруппой называется непустое множество Q с умножением xy, причем для любых $a, b \in Q$ уравнения $ax = b, \quad ya = b$ имеют едиственные решения $x = a \diagdown b, \quad y = b \diagup a$.

В работе рассматриваются конечные квазигрппы. Они важны для вопросов защиты информации [1, 2, 3]. Основную роль играют полиномиально полные квазигруппы, в которых любая операция является композицией основных операций $xy, x \diagdown y, x \diagup y$, всех констант и всех проекций $p_{in}(x_1, \ldots, x_n) = x_i,\ 1 \leqslant i \leqslant n$. Кроме того, нужно требовать, чтобы в Q не было бы подквазигрупп.

Квазигруппа Q аффинна, если в Q существует такая структура абелевой аддитивной группы $(Q, +)$, что умножение xy имеет вид $xy = \alpha(x) + \beta(y) + c$, где α, β — автоморфизмы $(Q, +)$, и $c \in Q$.

Известно, что конечная квазигруппа Q полиномиально полна в том и только в том случае, если она проста и не аффинна.

Каждая конечная квазигруппа Q порядка n задается своим латинским квадратом строки которой $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$, а также столбцы $\tau_1, \ldots, \tau_n$ являются перестановками в Q. Через $G(Q)$ обозначим подгруппу группы перестановок множества Q, порождаемую перестановками $\sigma_i \sigma_j^{-1},\ \tau_i \tau_j^{-1}, \quad i, j = 1, \ldots, n$. Показывается, что при изотопии $G(Q)$ переходит в сопряженную подгруппу в группе перестановок S_Q на Q.

Теорема 1. *Если $G(Q)$ действует дважды транзитивно в Q, то Q полиномиально полна. Это свойство сохраняется при изотопии.*

Последняя теорема справедлива и для n-квазигрупп.

Теорема 2. *[4] Любая квазигруппа, содержащая не менее трех элементов, изотопна квазигруппе без собственных подквазигрупп.*

Пусть заданы две квазигруппы K, Q и отображения

$$\Phi, \Lambda, \Gamma : K \to S_Q, \ \Psi, \Omega, \Theta : Q \to S_K. \tag{1}$$

На $K \times Q$ вводится новое умножение

$$(a, \alpha) * (b, \beta) = (\Psi_\alpha (\Omega_\alpha(a)\Theta_\alpha(b)), \ \Phi_b (\Lambda_b(\alpha)\Gamma_b(\beta))) . \tag{2}$$

Получается квазигруппа $K \bowtie Q$.

Теорема 3. *Пусть группы $G(K), G(Q)$ действуют дважды транзитивно на K, Q, причем $|K| < (|Q| - 1)!$, $|Q| < (|K| - 1)!$. Тогда существуют такие отображения из (1), что $G(K \bowtie Q)$ действует дважды транзитивно на $K \times Q$.*

Это позволяет строить полиномиально полные квазигруппы порядка 2^M, где $M \geqslant 3$, $M \neq 5$. По [4], получаются полиномиально полные квазигруппы этих порядков без подквазигрупп.

Теорема 4. *Существует конечная тернарная квазигруппа Q с умножением xyz, причем Q с любым из умножений при любом $a \in Q$, обладает тем свойством, что $G(Q)$ в ней действует 2-транзитивно.*

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Artamonov V.A., S. Chakrabarti S, Pal S.K. Characterization of Polynomially Complete Quasigroups based on Latin Squares for Cryptographic Transformations // J. Discrete Applied Mathematics. 2016. V. 200. P. 5–17

2. Artamonov V.A., S. Chakrabarti S, Pal S.K./ Characterizations of highly non-associative quasigroups and associative triples // Quasigroups and Related Systems. 2017. V. 25. P. 1–19.

3. Glukhov M.M. On applications of quasigroups in cryptography // Appl. Discrete Math. 2008. V. 2. P. 28-32.

4. Kepka T. A note on simple quasigroups // Acta Univ. Carolin. Math. Phys. 1978. V. 19, no 2. P. 59-60.

———————————————————————

УДК 511.3

Теоретико-числовые методы в приближенном анализе[1]

Л. Г. Архипова г. Москва, Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова,
В. Н. Чубариков г. Москва, Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова,
М. Л. Шарапова г. Москва, Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
chubarik2009@live.ru

Methods of the Number Theory to the Numerical Analysis

L. G. Arhipova Moscow, Lomonosov Moscow State University,
V. N. CHubarikov Moscow, Lomonosov Moscow State University,
M. L. SHarapova Moscow, Lomonosov Moscow State University
chubarik2009@live.ru

В 1957 г. Академия наук СССР отметила два важных успеха в математике: первое – теория очередей и ее применения, и второе – применение теории чисел к вычислению кратных интегралов. Во втором случае речь шла о работе Н.М.Коробова "Приближенное вычисление кратных интегралов при помощи методов теории чисел", опубликованной в 1957 г. в Докладах Академии наук. Это была первая работа по теории чисел в применении к кратным интегралам. Она по существу касалась взаимосязи метода Монте-Карло и теории равномерного распределения последовательностей по модулю единица в теории чисел.

Кстати, здесь уместно отметить, что Н.М.Коробов был первым, кто нашел взаимосвязь между значением кратного интеграла и значениями полных рациональных тригонометрических сумм.

В 1959 г. Н.М.Коробов опубликовал в Докладах АН СССР (т.124, № 6, 1207-1210) яркую работу "О приближенном вычислении кратных интегралов". В ней он определил понятие "оптимальные коэффициенты", доказал их существование и дал способ их нахождения. Подобный метод был открыт также в 1962 г. Е.Главкой [6], что лишь подчеркивает важность и полезность введенного понятия.

Своей теоремой о существовании оптимальных коэффициентов Н.М.Коробов поставил проблему о нахождении конструктивного метода их построения, и тем самым, вычисления кратного интеграла.

В центре этой проблемы находилась арифметическая задача: *при заданном натуральном числе n найти возможно большее число M такое, что сравнение*

$$a_1x_1 + \cdots + a_sx_s \equiv 0 \pmod n$$

имеет только тривиальное решение $\mathbf{x} \equiv \mathbf{0} \pmod n$, *если* $\bar{x_1} \dots \bar{x_n} \le M$, *где* $\bar{x} = \max\{1, |x|\}$.

Важно отметить, что по применению теоретико-числового метода в приближенном анализе проведены обширные исследования как самим Н.М.Коробовым, так и его научной школой, получен ряд ярких результатов. Итоги этой работы подведены Н.М.Коробовым в его монографии "Теоретико-числовые методы в приближенном анализе", М.:МНЦМО,2004.–288 с.

Здесь мы рассматриваем линейные квадратуры для классов функций от нескольких переменных, периодических по каждой переменной и разлагающихся в абсолютно сходящиеся ряды Фурье вида

$$f(\mathbf{x}) = f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\mathbf{m}\in\mathbf{Z}^n} c(\mathbf{m})\mathbf{e}^{\mathbf{2\pi i(m,x)}}, \tag{1}$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант $\mathcal{N}$ 16-01-00-071

где $\mathbf{m} = (m_1, \ldots, m_n)$,

$$c(\mathbf{m}) = c(\mathbf{m}; f) = \int_0^1 \cdots \int_0^1 f(\mathbf{x}) e^{-2\pi i (\mathbf{m}, \mathbf{x})}\, d\mathbf{x}. \qquad (2)$$

Нами решается задача построения с помощью методов теории чисел квадратурных формул, которые дают возможность точно интегрировать тригонометрические многочлены возможно более высокой степени при заданном числе узлов интегрирования.

Изложим исследования М.Л.Шараповой и автора [9, 10]. Нами изучаются кубатурные формулы для вычисления кратных интегралов от функций $f(\mathbf{x}) = f(x_1, \ldots, x_n)$, периодических по каждой переменной. Пусть $f(\mathbf{x})$ разлагается в абсолютно сходящийся ряд Фурье вида

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{k_1=-\infty}^{+\infty} \cdots \sum_{k_n=-\infty}^{+\infty} c(\mathbf{k}) e^{2\pi i (\mathbf{k}, \mathbf{x})},$$

где

$$c(\mathbf{k}) = \int_0^1 \cdots \int_0^1 f(\mathbf{x}) e^{-2\pi i (\mathbf{k}, \mathbf{x})} dx_1 \ldots dx_n.$$

В основе постановки задачи лежит утверждение о том, что эти формулы должны быть точны для тригонометрических многочленов возможно более высокой степени при заданном числе узлов интегрирования. Известно, что для алгебраических многочленов такими квадратурными формулами являются квадратуры Гаусса. Подобные формулы в периодическом случае называют аналогами квадратур Гаусса.

Мы ставим задачу эффективного построения кубатурных формул для кратного интеграла с сохранением, по возможности, свойств квадратурных формул для однократного интеграла. Итак, пусть задано число узлов интегрирования $N \geq 1$ кубатурной формулы. Отметим, что тригонометрический многочлен является линейной комбинацией мономов вида $e^{2\pi i (\mathbf{k}, \mathbf{x})}$, где $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n, \mathbf{k} = (k_1, \ldots, k_n)$ — вектор с целыми координатами. В рассматриваемых нами задачах переменные $x_1, \ldots, x_n$ являются "равноправными". Для обеспечения этого в кубатурных формулах ограничимся числом узлов N вида $N = N_1 \ldots N_n, N_1, \ldots, N_n \asymp N^{1/n}, (N_s, N_t) = 1$ при $s \neq t, 1 \leq s, t \leq n$.

Определим наборы чисел $M_1, \ldots, M_n$ и $M_1^*, \ldots, M_n^*$ из соотношений

$$N_s M_s = N, M_s M_s^* \equiv 1 \pmod{N_s}, s = 1, \ldots, n.$$

Справедлива китайская теорема об остатках: если переменные $k_s, 1 \leq s \leq n$, пробегают независимо соотвественно полные системы вычетов по модулям N_s, то

$$k \equiv M_1 M_1^* k_1 + \cdots + M_n M_n^* k_n \pmod{N}$$

пробегает полную систему вычетов по модулю N.

Это обстоятельство и обеспечивает, с одной стороны, близость кубатурной формулы с узлами интегрирования

$$\left(\frac{M_1^* k_1}{N_1}, \ldots, \frac{M_n^* k_n}{N_n} \right), 0 \leq k_1 \leq N_1 - 1, \ldots, 0 \leq k_n \leq N_n - 1$$

с квадратурной формулой, отвечающей узлам интегрирования $k/N, 0 \leq k \leq N-1$, и, с другой стороны, "равноправие" переменных $x_1, \ldots, x_n$.

Для кратных полных арифметических рациональных сумм специального вида автор нашел оценки с понижением, равным корню квадратному из длины промежутка суммирования полной суммы [12]. Отметим, что эти оценки относятся к многочленам от нескольких переменных, имеющих простые корни в конечном поле. К сожалению, подобных оценок для кратных корней установить не удается.

Пусть $p > 2$ — простое число, $n > 1, k > 1, r$ — натуральные числа, $p > n, q = p^k$, и пусть $f(x_1, \ldots, x_r)$ — многочлен с целыми коэффициентами,

$$f(x_1, \ldots, x_r) = \sum_{t_1=0}^{n} \cdots \sum_{t_r=0}^{n} a(t_1, \ldots, t_r) x_1^{t_1} \ldots x_r^{t_r}, \tag{1}$$

$a(0, \ldots, 0) = 0, (a(n, \ldots, n), \ldots, a(0, \ldots, 1), p) = 1$. Суммы вида

$$S(q; f; r) = S\left(p^k; f; r\right) = \sum_{x_1=1}^{q} \cdots \sum_{x_r=1}^{q} e^{2\pi i \frac{f(x_1, \ldots, x_r)}{q}} \tag{2}$$

называются кратными полными рациональными тригонометрическими суммами.

Будем говорить, что при $0 \le x_1, \ldots, x_r < p$, что многочлен (1) не имеет кратных особых точек по модулю p, если для любого решения системы сравнений

$$\begin{cases} f'_{x_1}(x_1, \ldots, x_r) \equiv 0 \pmod p, \\ \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots, \\ f'_{x_r}(x_1, \ldots, x_r) \equiv 0 \pmod p \end{cases} \tag{3}$$

определитель матрицы

$$\begin{pmatrix} f''_{x_1,x_1}(\bar{x}) & \ldots & f''_{x_1,x_r}(\bar{x}) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ f''_{x_r,x_1}(\bar{x}) & \ldots & f''_{x_r,x_r}(\bar{x}) \end{pmatrix} \tag{4}$$

не сравним с нулем по модулю p. Количество решений системы (3) при условии (4) обозначим через J.

Теорема 1. *Пусть p — простое число, $n > 1, k > 1, r$ — натуральные, $p > n$, $q = p^k$, $s = [k/2]$, $f(x_1, \ldots, x_r)$ — многочлен вида (1), удовлетворяющий условиям (3) и (4). Тогда для суммы (2) справедлива оценка*

$$|S(q; f; r)| = \left| \sum_{x_1=1}^{q} \cdots \sum_{x_r=1}^{q} e^{2\pi i \frac{f(x_1, \ldots, x_r)}{q}} \right| \le J p^{(k-s)r}.$$

Характер Дирихле χ по модулю p^k для любого a, взаимно простого с $p > 2$, можно представить в виде

$$\chi(a) = \exp\left(2\pi i l \frac{\operatorname{ind}_g a}{\phi(p^k)}\right),$$

где l — некоторый вычет по модулю p^k, g — первообразный корень по модулю $p^k, \operatorname{ind}_g a$ — индекс числа a по этому первообразному корню, т.е. $a \equiv g^{\operatorname{ind}_g a} \pmod{p^k}$, и $\chi(a) = 0$, если $p|a$. Характер χ по модулю p^k называется примитивным, если $(l, p) = 1$.

Далее мы развиваем новый подход к оценкам кратных сумм характеров Дирихле от многочленов с целыми коэффициентами. Пусть p — нечетное простое число, n, k — натуральные числа, $p > n, q = p^k, l$ — целое, и пусть $f(\bar{x}) = f(x_1, \ldots, x_r)$ — многочлен с целыми коэффициентами вида

$$f(x_1, \ldots, x_r) = \sum_{t_1=0}^{n} \cdots \sum_{t_r=0}^{n} a(t_1, \ldots, t_r) x_1^{t_1} \ldots x_r^{t_r},$$

причем χ — примитивный характер Дирихле по модулю, равному степени нечетного простого числа.

Рассмотрим суммы вида

$$S(f;\chi;p^k;r) = \sum_{x_1=1}^{p^k} \cdots \sum_{x_r=1}^{p^k} \chi(f(x_1,\ldots,x_r)). \tag{5}$$

Сформулируем оценку полной суммы примитивных характеров Дирихле по модулю, равному степени простого числа.

Теорема 2. *Пусть p — простое число, $n>1, k>1, r$ — натуральные, $p>n$, $q=p^k$, $s=[k/2]$,*

$$f(x_1,\ldots,x_r) = \sum_{t_1=0}^{n} \cdots \sum_{t_r=0}^{n} a(t_1,\ldots,t_r) x_1^{t_1}\ldots x_r^{t_r},$$

где коэффициенты $a(t_1,\ldots,t_r), 0\le t_1,\ldots,t_r\le n$, в совокупности взаимно просты с p, причем при $1\le x_1,\ldots,x_r\le p$ решения системы сравнений (3) удовлетворяют условиям (4).

Тогда

$$|S(f;\chi;p^k;r)| = |\sum_{x_1=1}^{p^k} \cdots \sum_{x_r=1}^{p^k} \chi(f(x_1,\ldots,x_r))| \le Jp^{(k-s)r}.$$

Сформулируем теорему 3 только для первого многочлена Бернулли, хотя подобная оценка имеет место для любого многочлена Бернулли степени $n\ge 1$.

Теорема 3. *Пусть $p>2$ — простое число, $n\ge 2, k\ge 2, r,$ — натуральные, $p>n$, $q=p^k$, $s=[k/2]$,*

$$f(x_1,\ldots,x_r) = \sum_{t_1=0}^{n} \cdots \sum_{t_r=0}^{n} a(t_1,\ldots,t_r) x_1^{t_1}\ldots x_r^{t_r},$$

$$(a(n,\ldots,n),\ldots,a(0,\ldots,1),a(0,\ldots,0),p)=1,$$

и выполняются условия (3) и (4). Тогда

$$|S(f;\rho;q;r)| = \left|\sum_{x_1=1}^{q} \cdots \sum_{x_r=1}^{q} \rho\left(\frac{f(x_1,\ldots,x_r)}{q}\right)\right| \le 0.5sJp^{(k-s)r}.$$

Заметим, что наш подход применим, как для оценки полных рациональных арифметических сумм других классов многочленов f, так и для оценки неполных сумм. Кроме того, оценка величины J представляет собой вариант теоремы Безу.

Л.Г.Архипова и автор [13] нашли показатель сходимости особого ряда σ следующей системы диофантовых уравнений

$$\begin{cases} x_1+\cdots+x_k = x_{k+1}+\cdots+x_{2k}, \\ y_1+\cdots+y_k = y_{k+1}+\cdots+y_{2k}, \\ x_1y_1+\cdots+x_ky_k = x_{k+1}y_{k+1}+\cdots+x_{2k}y_{2k}, \end{cases} \tag{1}$$

в которой неизвестные $x_1,\ldots,x_{2k},y_1,\ldots,y_{2k}$ принимают значения натуральных чисел от 1 до P, где $P\ge 1, k\ge 2$.

Пусть q_{10},q_{01},q_{11} — натуральные числа, $(a_{kl},q_{kl})=1, 0\le k,l\le 1, q=q_{10}q_{01}q_{11}$,

$$F(x,y) = a_{11}xy + a_{10}x + a_{01}y. \tag{2}$$

Тогда особый ряд σ или среднее значение кратной полной рациональной тригонометрической суммы

$$S(q, F(x,y)) = \sum_{x=1}^{q}\sum_{y=1}^{q} e^{2\pi i \frac{F(x,y)}{q}} \tag{3}$$

имеет вид

$$\sigma = \sum_{q_{11}=1}^{+\infty}\sum_{q_{10}=1}^{+\infty}\sum_{q_{01}=1}^{+\infty} 1\times$$

$$\times \sum_{\substack{a_{11}=0\\(a_{11},q_{11})=1}}^{q_{11}-1}\sum_{\substack{a_{10}=0\\(a_{10},q_{10})=1}}^{q_{10}-1}\sum_{\substack{a_{01}=0\\(a_{01},q_{01})=1}}^{q_{01}-1} |q^{-1}S(q, F(x,y))|^{2k}. \tag{4}$$

Теорема 4. *Особый ряд σ сходится при $k > 2$ расходится при $k \leq 2$.*

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Коробов Н. М. Приближенное вычисление кратных интегралов с помощью методов теории чисел // ДАН СССР, 1957, т.115, № 6, С. 1062–1065.

2. Коробов Н. М. О приближенном вычислении кратных интегралов // ДАН СССР, 1959, т.124, № 6, С. 1207–1210.

3. Коробов Н. М. Вычисление кратных интегралов методом оптимальных коэффициентов // Вестн. Моск. ун-та, 1959, № 4, С. 19–25.

4. Бахвалов Н. С. О приближенном вычислении кратных интегралов // Вестн. Моск. ун-та, 1959, № 4, С. 3–18.

5. Hua L.-K., Wan Y. Remarks concerning numerical integration // Sci. Rec., 1960, v.4(1), 8–11 (in Chinese).

6. Коробов Н. М. Теоретико-числовые методы в приближенном анализе. — М.: Физматгиз, 1963, 224с. (2-е изд. — М.: МЦНМО, 2004, 288 с.)

7. Воронин С. М., Темиргалиев Н. Т. О квадратурных формулах, связанных с дивизорами поля гауссовых чисел //Мат.заметки, 1989, т.46, № 2, С. 34–41.

8. Воронин С. М. О квадратурных формулах// Изв.РАН.Сер.мат., 1994, т.58, № 5, С. 189–194.

9. Чубариков В. Н., Шарапова М. Л. Об одной кубатурной формуле для периодических функций // Вестн. Моск. ун-та. Сер.I, Математика, механика. 2017. № 6. С. 59-62.

10. Чубариков В. Н., Шарапова М. Л. Об аналоге квадратуры Гаусса для периодических функций // Вестн. кибернетики. 2017. **28**, № 2. С. 60-65.

11. Чубариков В. Н. О квадратурных формулах// Докл.РАН., 2018, т., №, 1–4.

12. Чубариков В. Н. Кратные полные рациональные арифметические суммы от значений многочлена // Докл.РАН., 2018, т.478, № 1, С. 22–24.

13. Архипова Л. Г., Чубариков В. Н., Показатель сходимости особого ряда одной многомерной проблемы // Вестн. Моск. ун-та. Сер.I, Математика, механика. 2018. № 5. С. 59-62.

14. Виноградов И.М. Основы теории чисел. Изд. 10-е. — СПб.: Изд-во "Лань 2004, 176 с.

15. Бахвалов Н. С., Жидков Н. П., Кобельков Г. М. Численные методы: Учеб.пособие., Москва, Наука, 1987, 600 с.

УДК 512.552

Эндоморфизмы градуированных проективных модулей[1]

И. Н. Балаба Россия, г. Тула, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого
А. В. Михалёв Россия, г. Москва, Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
ibalaba@mail.ru

Endomorphisms of graded projective modules

I. N. Balaba Russia, Tula, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University,
A V. Mikhalev Russia, Moscow, Lomonosov Moscow State University
ibalaba@mail.ru

В предисловии к русскому изданию монографии Р. Бэра [1] А. Г. Курош писал, что в данной книге систематически изложена новая ветвь алгебры — проективная алгебра, связавшая проективную геометрию со многими разделами алгебры: с теорией структур и тел, с общей теорией ассоциативных колец и модулей, с теорией классических групп.

В докладе будут представлены результаты, касающиеся градуированной проективной алгебры, в эпицетре которых лежат эндоморморфизмы градуированных проективных модулей. Будут рассмотрены:

1) кольца эндоморфизмов градуированных модулей над градуированными телами, их изоморфизмы и антиизоморфизмы;

2) разные классы градуированных проективных модулей и их градуированные кольца эндоморфизмов;

3) проблема изоморфизма и антиизоморфизма градуированных колец эндоморфизмов;

4) градуированные линейные группы.

Все рассматриваемые кольца предполагаются ассоциативными с единицей, градуированные мультипликативной группой.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бэр Р. Линейная алгебра и проективная геометрия. — Москва: Изд-во Иностранной литературы, 1953. 400 с.

---

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект № 16-41-710194

УДК 519.4

Новые методы в решении алгоритмических проблем в группах Артина и Кокстера

В. Н. Безверхний Россия, г. Москва, Академия гражданской защиты МЧС России
vnbezv@rambler.ru

New methods in decision algorithmic problems in the groups Artin and Coxter

V. N. Bezverhnii Russia, Moscow, Academy of Civil Defence EMERCOM of Russia
vnbezv@rambler.ru

Пусть $S = \{s_1, s_2, \dots s_n\}$ — конечное множество и $M = (m_{st}), s,t \in S$ — симметрическая матрица Кокстера с индексами из множества S, такая, что $m_{st} = 1$ для любого $s \in S, m_{st} = m_{ts} \in \{2, 3, \dots, \infty\}$ для всех $s, t \in S, s \neq t$.

Свяжем с матрицей Кокстера конечный граф Г, между вершинами которого и множеством S установлено взаимно однозначное соответствие, причем если две вершины s, t графа Г соединены ребром, то данному ребру соответствует элемент m_{st} из M, если вершины s, t не соединены ребром, то данной паре соответствует $m_{st} = \infty$. Данный граф называется графом Кокстера.

С графом Кокстера Г связана группа Артина G_Γ со множеством образующих S и системой определяющих соотношений $\langle st\rangle^{m_{st}} = \langle ts\rangle^{m_{ts}}$, при $s \neq t$, $m_{st} \neq \infty$ где $< st >= stst\dots$ слово из чередующихся образующих s, t длины m_{st}. Зададим копредставление группы G_Γ

$$G_\Gamma =< s_1, \dots, s_n; < st >^{m_st} =< ts >^{m_{ts}}, s,t \in S, s \neq t, m_{st} \neq \infty > \tag{1}$$

Пусть G_Γ группа Артина имеет копредставление 1. Рассмотрим подгруппу в G_Γ порожденную образующими $s_i^2, i = \overline{1,n}$ и обозначим через $N_\Gamma =< s_i^2, i = \overline{1,n} >^{G_\Gamma}$ — нормальный делитель в G_Γ. Тогда фактор-группа G_Γ/N_Γ — группа Кокстера, соответствующая группе G_Γ с копредставлением

$$\overline{G_\Gamma} =< S; S_i^2 = 1, \forall s \in S, < s_t >^{m_{st}} =< ts >^{m_{ts}}, s,t \in S > \tag{2}$$

Если группа $\overline{G_\Gamma}$ — конечна, то соответствующая ей группа G_Γ называется группой Артина конечного типа. Данный класс групп содержит группы кос B_{n+1}, определенных Э. Артином в 1925 году, доказавшем разрешимость в них проблемы равенства слов.

Алгебраическая теория групп кос была построена А. А. Марковым [9], давшем новое доказательство разрешимости проблемы равенства слов в B_{n+1}.

Проблема сопряженности в B_{n+1} была решена Ф. А. Гарсайдом в 1969 [8].

Э. Брискорн и К. Сайто, используя идеи Гарсайда о единственности алгебраического представления элементов, доказали разрешимость проблемы равенства и сопряженности слов в группах Артина конечного типа [7].

П. Шупп и К. Аппель определили широкий класс групп Артина (Кокстера) большого ($m_{st} \geq 3$)и экстрабольшого типа ($m_{st} > 3$). Для групп экстрабольшого типа с помощью диаграмм ими были решены проблемы равенства и сопряженности слов [1].

Для групп большого типа К. Аппель [2] и В. Н. Безверхний [3] независимо решили проблемы равенства и сопряженности слов также диаграммным методом.

Дальнейшие исследования алгоритмических проблем используют структуру групп Артина и Кокстера.

Если граф Г группы Артина G_Γ является дерево-графом, то группа Артина называется группой Артина с древесной структурой.

Если G_Γ группа Артина с древесной структурой, то соответствующая ей группа Кокстера называется группой Кокстера с древесной структурой.

Пусть $S = \{s_1, s_2, \dots s_n\}$ образующие данной группы G_Γ, тогда компоненты симметрической матрицы Кокстера, соответствующей группе

$$G_\Gamma, M = \{m_{st}\}, s, t \in S, s \neq t, m_{st} \in \{2, 3, 4, \dots\}$$

.

Теорема 1. *В группе Артина (Кокстера) с древесной структурой разрешима проблема сопряженности слов.[5]*

В. Н. Безверхний определил класс групп Артина (Кокстера) с m-угольной структурой.[5]

Определение 1. *Группа Артина G_Γ заданная на множестве S называется группой с $m-$угольной структурой, если граф Γ состоит из $m-$угольников, $m \geq 3$; элементы соответствующей группе G_Γ матрицы Кокстера $m_{st}, s, t \in S$ принадлежат множеству $\{2, 3, \dots, \infty\}$[5]*

Теорема 2. *Пусть 1 группа Артина с m-угольной структурой, $m > 3$. Тогда в группе Артина G_Γ разрешимы проблемы равенства и сопряженности слов.[5]*

Теорема 3. *Пусть 2 группа Кокстера с m-угольной структурой, m>3. Тогда в группе $\overline{G_\Gamma}$ разрешимы проблемы равенства и сопряженности слов и степенной сопряженности слов.*

Пусть G_Γ — конечнопорожденная группа Артина, $\overline{G_\Gamma}$ — соответствующая группа Кокстера, и пусть Γ — граф Кокстера, соответствующий данной группе. Выделим в нем максимальный дерево-граф $\Gamma_0, \Gamma_0 \subset \Gamma$ которому будет соответствовать группа Артина G_{Γ_0} с древесной структурой. Через $\delta\Gamma$ обозначим замыкание графа Γ_0 и через $G_{\delta\Gamma}$ соответствующую ему группу Артина. Группа G_Γ является свободным произведением групп $G_{\delta\Gamma}$ и G_{Γ_0} объединенных по общим образующим групп $G_{\delta\Gamma}, G_{\Gamma_0}$, то есть по циклическим подгруппам, порожденных этими элементами. Обозначим в $G_\delta\Gamma$ эти образующие через $s_1^*, \dots, s_m^*$, а в G_{Γ_0} — $s_1, s_2, \dots s_m$.

Тогда $G_\Gamma = \langle G_{\Gamma_0} * G_{\delta\Gamma};\ s_1 = s_1^*, \dots, s_m = s_m^* \rangle$.

Теорема 4. *Каждый элемент $w \in G$ можно единственным образом представить в виде $w = uv$, где $u \in G_{\delta\Gamma}$,$v \in G_{\Gamma_0}$.*

Теорема 5. *Если в группе $G_{\delta\Gamma}$ разрешима проблема равенства слов, то и в группе G_Γ разрешима проблема равенства слов.*

Используя данную теорему можно доказать

Теорема 6. *В конечнопорожденной группе G_Γ Артина разрешима проблема равенства слов.*

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Appel K., Schupp P. Artin groups and infimte Coxter groups // Ivent. Math. 1983. № 72. P. 201-220.

2. Appel K., On Artin groups and Coxter groups of large type// Contempor Math. 1984. № 33. P. 50-78.

3. Безверхний В. Н. Решение проблемы сопряженности слов в группах Артина (Кокстера) большого типа// Алгоритмические проблемы теории групп и полугрупп. Тула:ТГПИ, 1986. С. 26-61.

4. Безверхний В. Н. Решение проблемы обобщенной сопряженности слов в группах Артина большого типа// Фундаментальная и прикладная математика. 1999. Том 5 №1. С. 1-38.

5. Безверхний В. Н. Карпова О. Ю. Проблема равенства и сопряженности слов в группах Артина с древесной структурой. // Известия ТулГу. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2006. Том 12 №.1. С. 67-82.

6. Безверхний В. Н. Решение проблемы равенства и сопряженности слов в некоторых группах Артина Кокстера // XII Международная Конференция Посвященная 80-летию В. Н. Латышева: тезисы докладов. Международная конференция (Тула, 21-25 апреля 2014 г.) — Тула, 2014. С.6.

7. Брискорн Э., Сайто К. Группы Артина и группы Кокстера. // Математика. 1974. Т. 18 № 6. С. 56-79.

8. Garsid F. A. The braid group and other groups//Quart. Math. Oxford ser(2). 1969. № 20, P. 235-254.

9. Марков А. А., Основы алгебраической теории кос// Тр. МИАН. Москва: АН СССР 1945. Том 16.

——

УДК 511.55

Решение алгебраического уравнения[1]

А. Д. Брюно Россия, г. Москва, Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН
abruno@keldysh.ru

Solving a polynomial equation

A. D. Bruno Russia, Moscow, Keldysh Institute of Applied Mathematics of RAS
abruno@keldysh.ru

Для нахождения глобальных приближённых решений алгебраического уравнения с n неизвестными при $n = 1$ предлагается ломаная Адамара, а при $n = 2$ — многогранник Адамара. Найденные решения переводятся в координатное подпространство: для $n = 1$ — сдвигом, а для $n = 2$ — заменой координат, использующей униформизацию кривой. Найденные приближённые решения можно уточнять методом Ньютона. Затем для $n = 2$ и $n = 3$ излагаются алгоритмы локального решения алгебраического уравнения вблизи особой (критической) точки для получения асимптотических разложений одномерных и двумерных ветвей. С помощью многоугольника Ньютона (при $n = 2$), многогранника Ньютона (при $n = 3$) и степенных преобразований эта задача сводится к ситуациям, аналогичным теореме о неявной функции. В частности, при локальном анализе решений одного уравнения от трёх неизвестных приходим к задаче о глобальной униформизации плоской алгебраической кривой и преобразовании её в координатную ось. После этого вблизи этой оси можно получить асимптотическое разложение куска изучаемой поверхности. Приведены примеры таких вычислений [1].

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант 18-01-00422.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Брюно А. Д. Решение алгебраического уравнения алгоритмами степенной геометрии // Препринт Института прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН. № 34, Москва, 2017. 28 с. DOI:10.20948/prepr-2017-34 URL: http://keldysh.ru/papers/2016/prep2017_34.pdf

———————————————————————————

УДК 511.3

Спектральные представления дзета-функций одноклассных мнимых квадратичных полей

В. А. Быковский Россия, г. Хабаровск, Хабаровского отделения ИПМ ДВО РАН
vab@iam.khv.ru

Spectral representations of Zeta functions of one-class imaginary quadratic fields

V. A. Bykovsky Russia, Khabarovsk, The Khabarovsk branch of the IPM DVO RAS
vab@iam.khv.ru

В докладе приводятся последние достижения по теории дзета-функций одноклассных мнимых квадратичных полей, полученные с помощью спектральных методов.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Быковский В. А. Об одной формуле суммирования в спектральной теории автоморфных функций и ее применение в аналитической теории чисел. // Докл. АН СССР, 1982, т. 264, № 2, с.275-277.

2. Кузнецов Н. В. Гипотеза Петерсона для форм веса нуль и гипотеза Линника I. // Мат.сборн., 1980, т.III, № 3.с.334–383.

3. Венков А. Б. Спектральная теория автоморфных функций. // Тр. Мат. ин-та АН СССР, 1981, 153.

4. Кузнецов Н. В. Спектральные методы в арифметических задачах. - В кн.: Аналитическая теория чисел и теория функций.I. Зап. научн. семин. ЛОМИ, 1978, т.76, с.159-166.

5. В. А. Быковский Спектральные разложения некоторых автоморфных функций и их теоретико-числовые приложения // Автоморфные функции и теория чисел. II, Зап. научн. сем. ЛОМИ, 134, Изд-во «Наука», Ленинград. отд., Л., 1984, с. 15–33.

———————————————————————————

УДК 511.331

Об одной задаче А. А. Карацубы

С. А. Гриценко Россия, г. Москва, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Московский физико-технический институт
s.gritsenko@gmail.com

On the Problem of A.A. Karatsuba

S. A. Gritsenko Russia, Moscow, Moscow state University M. V. Lomonosov, Moscow Institute of physics-technical
s.gritsenko@gmail.com

Пусть $\chi(n)$ — характер Дирихле по модулю k. Тогда $L-$функция Дирихле, отвечающая характеру χ, удовлетворяет функциональному уравнению

$$\xi(1-s,\overline{\chi}) = \varepsilon(\chi)\xi(s,\chi),$$

где

$$\xi(s,\chi) = (\frac{\pi}{k})^{-\frac{s+a}{2}}\Gamma(\frac{s+a}{2})L9s,\chi),$$

$$a = \begin{cases} 0, & \text{если } \chi(-1)=1, \\ 1, & \text{если } \chi(-1)=-1, \end{cases} \qquad \varepsilon(\chi) = \frac{i^a\sqrt{k}}{\tau(\chi)},$$

$$\tau(\chi) = \sum_{n=1}^{k}\chi(n)e^{2\pi i\frac{n}{k}}.$$

Пусть

$$\rho(s,\chi) = \varepsilon(\overline{\chi})(\frac{k}{\pi})^{1/2-s}\frac{\Gamma((1-s+a)/2)}{\Gamma((s+a)/2)},$$

$$e^{i\theta(t,\chi)} = (\rho(1/2+it,\chi))^{-1/2}, \quad Z(t,\chi) = e^{i\theta(t,\chi)}L(1/2+it,\chi).$$

Функция $Z(t,\chi)$ принимает вещественные значения при вещественных t и является аналогом известной функции Римана–Харди. Определим функцию

$$G(t) = \sum_{n=1}^{N}a_nZ(t,\chi_n),$$

где a_n — произвольные вещественные числа, $1 \leqslant n \leqslant N$.

Без ограничения общности считаем, что характеры $\chi_1,\ldots,\chi_N$ попарно различны, а числа a_n отличны от нуля при $n \in [1,N]$.

В 1991 году А.А. Карацуба разработал новый метод, при помощи которого доказал, что $G(t)$ имеет не меньше чем $T(\log T)^{1/\varphi(K)-\varepsilon}$ нулей нечетного порядка на интервале $(T,2T)$. Здесь $K=[k_1,\ldots,k_N]$. Если все характеры имеют одинаковую четность, то А.А. Карацуба оценил снизу число нулей нечетного порядка $G(t)$ на интервале $(T,2T)$ величиной $T(\log T)^{2/\varphi(K)-\varepsilon}$ ($\varepsilon > 0$ — любое).

В настоящем докладе будет представлена следующая теорема, доказанная автором.

Теорема 1. *Пусть $\varepsilon > 0$ — произвольно малое число. Пусть в приведенной системе вычетов по модулю K существует ровно m чисел $x_1, \dots, x_m$ таких, что*

$$\chi_1(x_j) = \cdots = \chi_N(x_j)$$

для любого j, $1 \leqslant j \leqslant m$.

Тогда функция $G(t)$ имеет на интервале $(T, 2T)$ не меньше чем

$$T(\log T)^{1/6+5\beta/6-\varepsilon}$$

нулей нечетного порядка, где $\beta = m/\varphi(K)$.

УДК 514.1+514.8+ 548.1

Множества Делоне и радиус регулярности

Н. П. Долбилин Россия, Москва, Математический институт им. В. А. Стеклова
dolbilin@mi.ras.ru

Delone Sets and the Regularity Radius

N. P. Dolbilin Russia, Moscow, Mathematical Steklov Institute
dolbilin@mi.ras.ru

The symmetry group $\mathrm{Sym}(X)$ of a discrete set $X \subset \mathbb{R}^d$ is the set of all Euclidean isometries that map X to itself. The atomic structure of crystalline materials exhibits a very high symmetry. One of the central problems of the local theory for regular systems is to explain genesis of the symmetry of crystalline structures through geometric features of their fragments of relatively small size.

The most suitable model of a solid, not important as amorphous as glass, or with an ordered structure like a crystal, is a Delone set. Remind, a *Delone set* is called a point set X in $\mathbb{R}^d$ such that for some positive r and R the two conditions hold:
(r-condition) an open ball $B^\circ_y(r)$ centered at any arbitrary point y of space contains at most one point from X;
(R-condition) a closed ball $B_y(R)$ centered at y with radius R contains at least one point $x \in X$.

It is reasonable for a given Delone set X to consider the parameter r as the supremum of all possible numbers with the r-condition, and to choose the parameter R as the infimum of all numbers with the R-condition.

The atomic structure of crystals can be presented, first of all, as a Delone set. However, the crystal structure possesses a rich symmetry. Crystal X can be defined as follows: X is a Delone set which is a union of finitely many $\mathrm{Sym}(X)$-orbits. From this it follows that an each orbit $\mathrm{Sym}(X)\cdot x$ is a regular system, i.e., a Delone set whose symmetry group acts point-transitively. The concept of the regular system generalizes the concept of the lattice. Though regular systems are arranged more complicate than lattices, by the Schoenflis-Bieberbach theorem, any regular system is a union of several translates of a lattice.

The goal of the local theory for regular systems is to describe the regularity properties and conditions in terms of clusters. Given $x \in X$ and $\rho > 0$, a subset of all points $x' \in X$ with distance $|xx'| \le \rho$ is a *ρ-cluster* $C_x(\rho)$ of the point x. Given x and y from X, two ρ-clusters $C_x(\rho)$ and $C_y(\rho)$ are said to be *equivalent* if for some Euclidean isometry g $g(x) = y$ and $g(C_x(\rho)) = C_y(\rho)$. For given ρ the number of all classes of ρ-clusters in X is denoted by $N(\rho)$. The *cluster counting function* $N(\rho)$ is a positive, integer-valued, non-decreasing function. It is obvious that for a regular system any two clusters of the same radius ρ. In other words, the counting cluster function $N(\rho) = 1$ for all $\rho > 0$.

The *regularity radius* $\hat{\rho}_d$ is defined by two conditions. First, equivalence of all $\hat{\rho}_d$-clusters in a Delone set $X \subset \mathbb{R}^d$, i.e., condition $N(\hat{\rho}_d) = 1$, implies the regularity of the set X. Second, $\hat{\rho}_d$ is the minimal value in the sense that for $\forall\varepsilon > 0$ there is a Delone set X with $N(\hat{\rho}_d - \varepsilon) = 1$, which is not a regular system.

It was proved that for $d = 2$, $\hat{\rho}_2 = 4R$ and for $d = 3$, $\hat{\rho}_3 \leq 10R$ (M. Stogrin, N. Dolbilin) As proved recently, $\hat{\rho}_d \geq d2R$, therefore

$$6R \leq \hat{\rho}_3 \leq 10R.$$

Now we will call a Delone set X in which all $2R$-clusters are assumed to be equivalent, i.e. $N(2R) = 1$, *locally isometric*. From $\hat{\rho}_d \geq d2R$ it follows that a locally isometric Delone set, generally saying, is not a regular systems. However, for some sets, i.e., for locally antipodal sets, as shown recently, the condition $N(2R) = 1$ implies X to be a regular system for any d (N. Dolbilin, A. Magazinov). We remind here that a Delone set is called a *locally antipodal* if every its $2R$-cluster is centrally symmetrical about its center.

Now we will focus on locally isometric Delone sets in $\mathbb{R}^3$. For such sets the groups $S_x(2R)$ of the $2R$-clusters contain no a rotation axis of the order to exceed 6 (M. Stogrin). This implies that the list of finite groups with the axis' orders less than 6. Assuming each group from this list as a group $S_x(2R)$ for a Delone set, by means of additional non-trivial geometric arguments one can prove that $\hat{\rho}_3 \leq 10R$.

On the background of the estimates $6R \leq \hat{\rho}_3 \leq 10R$ it is particularly interesting that for most groups, that are possible as $S_x(2R)$ for locally isometric sets, the condition $N(2R) = 1$ is sufficient for regularity of a Delone set in $\mathbb{R}^3$ (N. Dolbilin).

УДК 51(091)

От качественных представлений физики Аристотеля к математическим методам классической механики

Е. А. Зайцев Россия, г. Москва, Институт истории естествознания и техники РАН им. С. И. Вавилова
e_zaytsev@mail.ru

From the qualitative ideas of Aristotelian physics to mathematical methods of classical mechanics

E. A. Zaytsev Russia, Moscow, S. I. Vavilov Institute for the History of Science and Technology, RAS
e_zaytsev@mail.ru

Принципиальное отличие качественной физики Аристотеля (включая ее средневековые модификации) от количественной механики XVII в. состоит в том, что в ее основе лежит идея холизма.

Холизм как метафизическая доктрина утверждает, что целое есть нечто отличное от совокупности своих частей (Метафизика, VIII 6, 1045a10).

Можно сказать, что целое большее суммы своих частей в том смысле, что оно обладает качествами, которые не могут быть выведены из свойств его частей. Строго говоря, с точки зрения холизма, части не существуют до целого, точнее, они существуют только в возможности, которая становится реальностью при условии вхождения этих частей в состав целого.

Следствием метафизического холизма является эпистемологический холизм, согласно которому познание целой «вещи» (включая феномены) несводимо к познанию ее частей. Всякое целое образуется в результате движения, приводящего к объединению частей, поэтому познание целого должно включать в себя, помимо знания о частях, понятие об общих принципах этого движения [1].

В отличие от физики Аристотеля классическая механика строится, исходя из идеи редукционизма. С точки зрения редукционизма «вещь» определяется совокупностью своих частей и, следовательно, знание о ней сводится к знанию о составляющих ее элементах. Необходимым условием такой редукции является положение о том, что элементы существуют до целого и их свойства независимы от его свойств. Только в этом случае части целого могут быть выделены в чистом виде, без соотнесения с ним.

Проблема научной революции XVII в. сводится, таким образом, к выявлению причин, обусловивших отказ от холизма в пользу редукционизма.

В первую очередь это относится к теоретическому осмыслению феномена движения «по месту» или перемещения. В доклассической механике движение, обусловленное несколькими силами, рассматривалось как целостный феномен sui generis, несводимый к элементарным перемещениям, вызываемым этими силами. В классической механике, напротив, условием познания сложного движения является возможность его представления в виде совокупности (более точно – векторной суммы) элементарных перемещений. Редукция движения к сумме простейших движений лежит в основе его количественного описания.

В настоящей статье будет приведен ряд примеров из теории движения, иллюстрирующих противоположность идей холизма и редукционизма. Кроме того, будет показано, что в основе идеи редукции сложного движения к простым лежат изменения, произошедшие в технической механике XV–XVI вв.

Как известно, научная революция XVII в. началась с открытия Галилеем закона, в соответствии с которым траектория движения брошенного тела является параболой. В основе этого закона лежат три «редукционистских» постулата.

Первый постулат – закон инерции по отношению к горизонтальной составляющей движения.

Второй постулат – закон пропорциональной зависимости скорости от времени по отношению к вертикальной составляющей движения.

Третий постулат – закон параллелограмма движений, в соответствии с которым всякое сложное перемещение в пространстве допускает разложение на независимые компоненты.

В применении к брошенному телу это означает, что его движение является векторной суммой двух движений, осуществляющихся, соответственно, в горизонтальном и вертикальном направлении.

Редукционистский характер первых двух постулатов проявляется в представлении о принципиальной возможности выделения в составе сложного движения брошенного тела двух независимых от него элементарных движений. Третий же напрямую утверждает, что сложное движение брошенного тела редуцируется к сумме своих элементарных компонент.

Рассмотрим эти постулаты с точки зрения доклассического холизма. Начнем с третьего, являющегося квинтэссенцией идеи редукции. В соответствии с идеей примата целого над суммой частей, свойства элементарных движений, участвующих в производстве сложного движения, определяются формой этого движения. При вхождении в состав сложного движения элементарные движения меняют свои свойства.

Уточним сказанное посредством примеров из доклассической механики.

Элементарные движения могут быть однонаправленными или разнонаправленными в зависимости от направления действующих сил.

В первом случае редукция сложного движения к сумме простых невозможна из-за того, что действие объединенной силы может возрастать непропорционально, то есть приводить к результату, который превосходит сумму результатов, производимых каждой из сил. Иначе говоря, действие целой силы может быть больше суммы действий составляющих ее сил. Можно сказать и по-другому: действие одной из однонаправленных сил способно увеличить независимое действие другой (что, разумеется, абсурдно с точки зрения классической механики) [2; 3]. Этот тезис является, пожалуй, одним из самых ярких примеров нарушения принципа аддитивности в рамках доклассического холизма.

В случае сил, действующих в разных направлениях (под этот случай и подпадает бросание тела: на него действует и сила броска, и сила тяжести), холизм проявлялся по-другому. Доклассические механики полагали, что при совместном действии таких сил одна из них может ослабить действие другой. Иными словами, разнонаправленные силы теряют свою независимость. Поэтому общее движение не может быть сведено к частичным. Подобная точка зрения была широко распространена еще в конце XVI в. Так, Дж. Бенедетти (1530-1590) полагал, что импетус, которым обладает брошенное тело, уменьшает силу тяжести, действующую на тело, и что падение тела, тем самым, замедляется. Он писал о брошенном мяче: «Чем быстрее движется мяч насильственным движением, тем большей склонностью к движению по прямой линии он обладает и поэтому тем меньше он стремится к центру мира и от этого становится легче» [4, с. 285]. Заметим, что из представления Бенедетти следует парадоксальный (для классической механики) вывод: из двух тел одинакового веса и находящихся на одной высоте, брошенное в горизонтальном направлении упадет на землю позднее, чем падающее свободно.

Первый постулат (принцип инерции) также несет на себе черты редукционизма: в его основе лежит представление о принципиальной возможности выделения в чистом виде движения, осуществляющегося (i) в отсутствии силы, (ii) прямолинейно и (iii) равномерно. Все три свойства движения по инерции входят в противоречие с холизмом аристотелевской физики.

Движение в отсутствии силы невозможно, ибо всякое движение, по Аристотелю, предполагает наличие движущего, находящегося в постоянном контакте с движимым, т.е. составляющего с ним единое целое.

Движение по прямой линии невозможно из-за совместного действия на тело многих сил (оно проблематично даже в вертикальном направлении).

Равномерность невозможна в силу «одушевленного» характера сил: всякому движению в подлунном мире, указывал Аристотель, необходимо присуще ускорение, наступающее либо в начале, либо в середине, либо в конце («О небе» II, 6; 288a17-24).

Второй постулат (закон свободного падения) также носит редукционистский характер. Он предполагает возможность выделения движения с постоянным ускорением. Но выделение такого движения в чистом виде не представлялось возможным в силу действия множества привходящих обстоятельств. Необходимость их учета заставляла средневековых перипатетиков относить регулярные движения – равномерные, равноускоренные и равнозамедленные – к виртуальной реальности, возможной лишь в силу «абсолютного могущества Бога». В реальном природном мире они не могли быть реализованы [5].

Отказ от аристотелевского холизма и переход к редукционизму тесно связан с реализацией в XV-XVI вв. новых видов технического движения, в основе которых была заложена идея редукции. Это – кривошипно-шатунные механизмы, снабженные маховыми колесами, и подъемные устройства с противовесом.

Значение кривошипно-шатунных механизмов состоит в том, что используемое в них маховое колесо демпфирует естественные неравномерности вращения и тем самым подводит к мысли о принципиальной возможности движения с постоянной скоростью [6; 7]. Кроме того, реализованное в них движение служит весомым аргументом против представления о «промежуточном покое», который, по Аристотелю, обязательно наступает между двумя фазами возвратно-поступательного движения.

Значение подъемных устройств с противовесами определяется тем, что в них вместо животной силы, действие которой неаддитивно, используется аддитивная сила тяжести, что позволяет математически описывать соответствующие движения. Важным является также то, что уравновешивание тяжелого груза посредством противовеса позволяет перемещать его, прикладывая минимальную силу. Движение, осуществляемое посредством силы, которая может быть меньше любой, наперед заданной, явилось весомым аргументом против тезиса Аристотеля о необходимости действия внешней силы определенной величины и, соответственно, в пользу идеи движения по инерции [2; 3].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Зайцев Е. А. Категория количества в физике Аристотеля, средневековой натурфилософии и немецкой классической философии // Математика и реальность / Труды Московского семинара по философии математики (Под ред. В. А. Бажанова и др.). М.: Изд-во МГУ, 2014. С. 348-375.

2. Зайцев Е. А. Технологические предпосылки научной революции XVII века // Э. В. Ильенков и проблема человека в революционную эпоху. Материалы XIX Международной конференции «Ильенковские чтения». Москва: СГА, 2017. С. 266–274.

3. Зайцев Е. А. Всеобщее содержание природы в зеркале развития практической механики // Научные ведомости Белгородского государственного университета. Серия «Философия. Социология. Право». 2017. Вып. 41. С. 12–19.

4. Benedetti G. B. Diversarum speculationum mathematicarum et physicarum liber. Taurini, 1585.

5. Зайцев Е. А. У истоков теоретической механики: история превращения технического искусства в научную дисциплину // Институт истории естествознания и техники им. С. И. Вавилова РАН. Годичная научная конференция 2015. Т. 1. М., 2015. С. 132–141.

6. Зайцев Е. А. Искусственное и природное: концепция идеального Ильенкова и история механики // Философия Э. В. Ильенкова и современность. Материалы XVIII Международной конференция «Ильенковские чтения». Белгород, 2016. С. 42–46.

7. Зайцев Е. А. Идеальное движение // Научный результат. Социальные и гуманитарные исследования. 2016. Т. 2, № 2(8). С. 34–42.

УДК 517.5

Интегральная и поточечная задачи Турана для периодических функций[1]

В. И. Иванов Россия, Тула, Тульский государственный университет
ivaleryi@mail.ru

Integral and pointwise Turan problem for periodic functions

V. I. Ivanov Russia, Tula, Tula state University
ivaleryi@mail.ru

Доклад посвящен обсуждению интегральной и поточечной экстремальных задач Турана для периодических положительно определенных функций.

Пусть $\mathbb{T} = [0, 1)$ — компактная абелева группа с операцией сложения по модулю 1 (одномерный тор), $c(x) = \cos 2\pi x$, $\operatorname{supp} f$ — носитель функции f, $K_{\mathbb{T}}$ — класс 1-периодических непрерывных четных положительно определенных функций f, для которых $f(0) = 1$.

В теории вероятностей $K_{\mathbb{T}}$ — это класс действительных периодических характеристических функций. Класс $K_{\mathbb{T}}$ совпадает с множеством функций, разложение в ряд Фурье которых имеет вид

$$f(x) = \widehat{f}_0 + 2\sum_{k=1}^{\infty} \widehat{f}_k c(kx), \quad \widehat{f}_k \geq 0,\ k \in \mathbb{Z}_+, \quad \widehat{f}_0 + 2\sum_{k=1}^{\infty} \widehat{f}_k = 1.$$

Положительная определенность функции означает, что для любых наборов $\{c_k\}_{k=1}^N \subset \mathbb{C}$ и $\{x_k\}_{k=1}^N \subset \mathbb{T}$ выполнено неравенство

$$\sum_{k,l=1}^{N} f(x_k - x_l) c_k \bar{c}_l \geq 0.$$

Непрерывные положительно определённые функции находят широкое применение в теории функций, теории приближений, теории вероятностей, дискретной геометрии, аналитической теории чисел, теории временных рядов, оптике, кристаллографии, обработке сигналов. Экстремальные задачи в этих областях приводят к экстремальным задачам для положительно определенных функций. Среди них известны экстремальные задачи Турана, Фейера, Дельсарта, Бомана, Логана и другие. Мы остановимся на интегральной и поточечной задачах Турана.

Интегральная задача Турана. Для $0 < h \leq 1/2$ вычислить величину

$$T(h) = \sup\left\{\int_{-h}^{h} f(x)dx : f \in K_{\mathbb{T}}, \quad \operatorname{supp} f \subset [-h, h]\right\}. \tag{1}$$

Поточечная задача Турана. Для $0 < x < h \leq 1/2$ вычислить величину

$$T(x, h) = \sup\left\{f(x) : f \in K_{\mathbb{T}}, \quad \operatorname{supp} f \subset [-h, h]\right\}. \tag{2}$$

Задача (1) была поставлена в 1970 году П. Тураном в частной беседе с С.Б. Стечкиным в связи с возможными приложениями в аналитической теории чисел. Интегральная задача Турана (1) решена полностью (2006). Историю вопроса см. в [1, 2, 3, 4]. Поточечная задача Турана (2) еще далека от своего решения.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант № 16-01-00308.

Пусть $[x]$ — целая часть действительного числа x, $\{x\}$ — его дробная часть, $\langle x\rangle$ — расстояние до ближайшего целого. Для $h \in (0, 1/2)$ рассмотрим следующие множества

$$S_0\left(h\right) = \left\{\nu \in \mathbb{N} : \langle \nu h\rangle = 0\right\},\ S_1\left(h\right) = \left\{\nu \in \mathbb{N} : \langle \nu h\rangle \in (0, h)\right\},$$

$$S_2\left(h\right) = \left\{\nu \in \mathbb{N} : \langle \nu h\rangle \geqslant h\right\}.$$

Эти множества не пересекаются и $\mathbb{N} = S_0\left(h\right) \cup S_1\left(h\right) \cup S_2\left(h\right)$. Отметим, что для рационального $h = p/q$ (несократимая дробь)

$$S_0\left(\frac{p}{q}\right) = \{\nu q : \nu \in \mathbb{N}\}, \quad S_1\left(\frac{p}{q}\right) = \left\{\left[\frac{q\nu}{p}\right], \left[\frac{q\nu}{p}\right] + 1 : \nu \in \mathbb{N},\ \nu \neq ps\right\}.$$

Для иррационального h

$$S_0\left(h\right) = \emptyset,\ S_1\left(h\right) = \left\{\left[\frac{\nu}{h}\right],\ \left[\frac{\nu}{h}\right] + 1 : \nu \in \mathbb{N}\right\}.$$

Пусть

$$G_h(z) = \prod_{k \in S_0(h)} \left(1 - \left(\frac{z}{k}\right)^2\right)^2 \prod_{k \in S_1(h)} \left(1 - \left(\frac{z}{k}\right)^2\right),$$

$$\varphi_h(x) = 1 + 2\sum_{k=1}^{\infty} G_h(k) c(kx).$$

Теорема 1. *Если $h \in (0, 1/2]$, то $A_{\mathbb{T}}(h) = (\varphi_h(0))^{-1}$. Экстремальная функция $\varphi_h(x)/\varphi_h(0)$ положительна и не возрастает на отрезке $[0, h]$.*

Оценка сверху в теореме 1 получается с помощью квадратурной формулы, имеющей и самостоятельный интерес.

Теорема 2. *Для любой четной функции*

$$f(x) = \widehat{f}_0 + 2\sum_{k=1}^{\infty} \widehat{f}_k c(kx), \quad \sum_{k=1}^{\infty} |\widehat{f}_k| < \infty,$$

справедлива квадратурная формула

$$f(0) + 2\sum_{k=1}^{\infty} G_h(k) f(\langle kh\rangle) = \varphi_h(0)\widehat{f}_0 + 2\sum_{k=1}^{\infty} \widehat{f}_k \varphi_h(\langle kh\rangle)$$

с неотрицательными коэффициентами $\{G_h(k)\}$, $\{\varphi_h(\langle kh\rangle)\}$.

В поточечной задаче Турана мажоранта $T(x, h)$ найдена для всех x только при $h = 1/2$ [5]. Задачи Турана для рациональных h и x могут быть сведены к дискретным задачам Фейера.

Первая дискретная задача Фейера Для $p, q \in \mathbb{N}$, $p \leq q/2$, $(p, q) = 1$ вычислить величину

$$\lambda(p, q) = \sup t_{p-1}(0), \tag{3}$$

если

$$t_{p-1}(x) = 1 + 2\sum_{k=1}^{p-1} \widehat{t}_k c\Big(\frac{kx}{q}\Big) \geq 0, \quad x \in \mathbb{Z}_q = \{0, 1, \ldots, q-1\}.$$

Вторая дискретная задача Фейера Для $\nu, p, q \in \mathbb{N}$, $\nu + 1 \leq p \leq q/2$, $(\nu, p, q) = 1$ вычислить величину

$$\lambda(\nu, p, q) = \sup \widehat{t}_\nu, \tag{4}$$

если

$$t_{p-1}(x)=1+2\sum_{k=1}^{p-1}\widehat{t}_k c\Big(\frac{kx}{q}\Big)\ge 0,\quad x\in\mathbb{Z}_q=\{0,1,\dots,q-1\}.$$

Задачи (3), (4) являются дискретными вариантами непрерывных задач Фейера, в которых четные тригонометрические полиномы неотрицательны для всех $x\in\mathbb{T}$. Решения непрерывных задач Фейера известны.

Теорема 3. *Справедливы равенства*

$$T\Big(\frac{p}{q}\Big)=\lambda(p,q),\quad T\Big(\frac{\nu}{q},\frac{p}{q}\Big)=\lambda(\nu,p,q).$$

Экстремальные функции в задачах (1), (2) являются кусочно-линейными и определяются экстремальными полиномами в задачах (3), (4).

Теорема 3 для задачи (1) была доказана в [6]. Первоначальное решение задачи (1) для рациональных h было основано на решении задачи (3) [1, 2, 4].

Для всех p и q решение задачи (4) получено только при $\nu=p-1$. Пусть $F_{p-1,q}(x)$ — экстремальный полином в задаче $\lambda(p-1,q)$ (3).

Теорема 4. *Если $(p-1,q)=1$, q — нечетное, то*

$$\lambda(p-1,p,q)=\frac{1}{2c(1/2q)}\cdot\frac{F_{p-1,q}(0)}{F_{p-1,q}(1)}.$$

Если $(p-1,q)=1$, q — четное, то

$$\lambda(p-1,p,q)=\frac{F_{p-1,q}(0)}{2F_{p-1,q}(1)}.$$

Оценки сверху в теореме 4 доказываются с помощью следующих квадратурных формул.

Теорема 5. *Если $(p-1,q)=1$, q — нечетное, то для любого четного полинома*

$$f(x)=\widehat{f}_0+2\sum_{k=1}^{p-1}\widehat{f}_k c\Big(\frac{kx}{q}\Big)$$

справедлива квадратурная формула

$$\frac{1}{2c(1/2q)}\cdot\frac{F_{p-1,q}(0)}{F_{p-1,q}(1)}\widehat{f}_0-\widehat{f}_{p-1}=\sum_{k=0}^{p-2}A_k f(\overline{r}(2k+1)),\tag{5}$$

где

$$2\overline{r}(p-1)=1 \text{ в } \mathbb{Z}_q,\quad A_k>0\quad (k=0,1,\dots,p-2).$$

Если $(p-1,q)=1$, q — четное, то

$$\frac{F_{p-1,q}(0)}{2F_{p-1,q}(1)}\widehat{f}_0-\widehat{f}_{p-1}=\sum_{k=q/2-p+2}^{q/2}B_k f(\overline{r}k),\tag{6}$$

где

$$\overline{r}(p-1)=1 \text{ в } \mathbb{Z}_q,\quad B_k>0\quad (k=q/2-p+2,\dots,q/2).$$

Нули экстремальных полиномов в задаче $\lambda(p-1,p,q)$ (4) аппроксимируют нули экстремальных полиномов в непрерывной задаче Фейера на сетке $\frac{1}{q}\mathbb{Z}_q$, а узлы в квадратурных формулах (5), (6) совпадают с ними.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Иванов В. И., Рудомазина Ю. Д. О задаче Турана для периодических функций с неотрицательными коэффициентами Фурье и малым носителем // Матем. заметки. 2005. Т. 77. № 6. С. 941–945.

2. Иванов В. И., Горбачев Д. В., Рудомазина Ю. Д. Некоторые экстремальные задачи для периодических функций с условиями на их значения и коэффициенты Фурье // Труды ИММ УрО РАН. 2005. Т. 11. № 2. С. 92–111.

3. Иванов В. И. О задачах Турана и Дельсарта для периодических положительно определенных функций // Матем. заметки. 2006. Т. 80. № 6. С. 934–939.

4. Ivanov V. I., Ivanov A. V. Turán problems for periodic positive definite functions // Annales Univ. Sci. Budapest, Sect. Comp. 2010. Vol. 35. P. 219–237.

5. Arestov V. V., Berdysheva E. E., Berens H. On pointwise Turán's problem for positive definite functions // East J. Approx. 2003. Vol.9. No.1. P.31-42.

6. Горбачев Д. В., Маношина А. С. Экстремальная задача Турана для периодических функций с малым носителем и ее приложения // Матем. заметки. 2004. Т. 76. № 5. С. 688–700.

УДК 511.32

Об одном распределении, связанном с дробями Фарея (по совместной работе с А. В. Устиновым)[1]

М. А. Королев Россия, Москва, Математический институт им. В. А. Стеклова Российской Академии наук, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
korolevma@mi.ras.ru

A distribution connected with Farey fractions

M. A. Korolev Russia, Moscow, Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences, Lomonosov Moscow State University
korolevma@mi.ras.ru

Рациональные точки на плоских кривых второго порядка давно оказались предметом пристального изучения. В частности, общие формулы для координат рациональных точек единичной окружности $u^2 + v^2 = 1$ получаются из формул для т. н. пифагоровых троек

$$x = 2mn, \quad y = m^2 - n^2, \quad z = m^2 + n^2, \quad m, n \in \mathbb{Z},$$

задающих все целочисленные решения уравнения $x^2+y^2 = z^2$, известных с глубокой древности (см., например, [1, гл. IV], [2, с.с. 106-110, 375, 376]).

Доклад посвящен следующей задаче, которая, насколько известно, никем ранее не рассматривалась. Пусть $Q \geqslant 3$, и пусть

$$(u_0, v_0) = (1, 0), \quad (u_1, v_1), \quad (u_2, v_2), \quad \ldots, \quad (u_N, v_N), \quad (u_{N+1}, v_{N+1}) = (0, 1)$$

[1]При написании этой работы М.А.Королев пользовался поддержкой Программы Президиума РАН № 01 "Фундаментальная математика и ее приложения" (PRAS-18-01); А.В. Устинов выполнил эту работу в рамках госзадания 1.557.2016/1.4.

– все рациональные точки единичной окружности, лежащие в первой координатной четверти, упорядоченные по возрастанию величины $\varphi_j = \operatorname{arctg}(v_j/u_j)$ и такие, что знаменатели всех дробей u_j, v_j, $1 \leqslant j \leqslant N$, не превосходят Q. Пусть, далее, $\theta_j = \varphi_j - \varphi_{j-1}$ – длина дуги с концами в соседних точках. Спрашивается, как распределены величины θ_j при неограниченном возрастании Q? Поскольку

$$\sum_{j=1}^{N+1} \theta_j = \frac{\pi}{2},$$

то среднее значение длины дуги θ_j, равное $\pi/(2(N+1))$, ввиду асимптотики $N = N(Q) \sim Q/\pi$ имеет порядок Q^{-1}. Зададимся произвольным положительным $t > 0$ и обозначим через $N(Q;t)$ количество дуг с условием

$$\theta_j \leqslant \frac{t}{Q}.$$

Основным результатом является следующая

Теорема 1. *При $Q \to +\infty$ имеет место равенство*

$$N(Q;t) = N(Q)\int_0^t h(v)\,dv + O\big(t^{1/2}Q^{5/6}(\log Q)^{4/3}\big),$$

где

$$h(v) = \begin{cases} 0, & \textit{при} \quad 0 \leqslant v \leqslant \sqrt{2}; \\ v^{-2}\,(2\ln v - \ln 2), & \textit{при} \quad \sqrt{2} \leqslant v \leqslant 2; \\ v^{-2}\,(4\ln v - 3\ln 2), & \textit{при} \quad 2 \leqslant v \leqslant 4; \\ v^{-2}\,\big(2\ln v - 4\ln\big(1+\sqrt{1-4/v}\big) + \ln 2\big), & \textit{при} \quad 4 \leqslant v \leqslant 2\sqrt{2}+2; \\ v^{-2}\,(2\ln v - \ln 2), & \textit{при} \quad 2\sqrt{2}+2 \leqslant v \leqslant 8; \\ v^{-2}\,\big(11\ln 2 - 2\ln v - 8\ln\big(1+\sqrt{1-8/v}\big)\big), & \textit{при} \quad 8 \leqslant v \leqslant 3\sqrt{2}+4; \\ v^{-2}\,\big(4\ln 2 - 4\ln\big(1+\sqrt{1-8/v}\big)\big), & \textit{при} \quad v \geqslant 3\sqrt{2}+4, \end{cases}$$

а постоянная в знаке O – абсолютная.

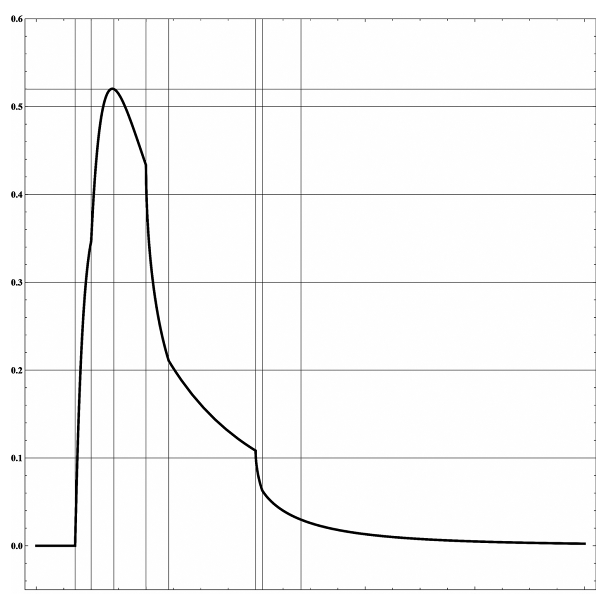


Рис. 1: График функции $h(v)$ на отрезке $0 \leqslant v \leqslant 10$.

Доказательство этого утверждения существенным образом опирается на теорему 1 из работы [3]. Плотность распределения $h(v)$ интересно сопоставить с функцией плотности распределения угла между соседними отрезками, соединяющими начало координат с примитивными точками в круге растущего радиуса, полученной в работе [4, сл. 0.4 теор. 0.3].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Dickson L.E. History of the theory of numbers. Vol. II. Diophantine analysis. — N.-Y., Chelsea Publ. Comp. 1971.

2. ван дер Варден Б.Л. Пробуждающаяся наука. Математика Древнего Египта, Вавилона и Греции. — М., ГИФМЛ, 1959.

3. Устинов А.В., О числе решений сравнения $xy \equiv l \pmod q$ под графиком дважды непрерывно дифференцируемой функции // Алгебра и анализ. 2008. Т. 20, № 5. С. 186–216.

4. Boca F.P., Cobeli C., Zaharescu A. Distribution of lattice points visible from the origin // Comm. Math. Phys. 2000. Vol. 213, № 2. P. 433–470.

УДК 511.3

К задаче аналитического продолжения рядов Дирихле как целых функций на комплексную плоскость

В. Н. Кузнецов Россия, г. Саратов, СГТУ им. Гагарина Ю. А.,
О. А. Матвеева Россия, г. Саратов
kuznetsovvalnik@gmail.com, olga.matveeva.0@gmail.com

On the problem of analytic continuation of Dirichlet series as integer functions on the complex plane

V. N. Kuznetsov Russia, Saratov, SSTU Gagarina
O. A. Matveeva Russia, Saratov
kuznetsovvalnik@gmail.com, olga.matveeva.0@gmail.com

В данной работе излагаются подходы к задаче аналитического продолжения рядов Дирихле как целых функций на комплексную плоскость, отличных от подхода Римана, основанного на функциональном уравнении.

В начале 80-х годов В. Н. Кузнецов разработал основные положения так называемого метода редукции к степенным рядам в задаче аналитического продолжения рядов Дирихле, в основе которого лежит изучение взаимосвязи аналитических свойств рядов Дирихле и граничных свойств соответствующих (с теми же коэффициентами, что и у рядов Дирихле) степенных рядов. Этот метод позволил доказать целостность скалярного произведения L-функций числовых полей в случае разложения L-функций в произведение классических L-функций, доказать аналитическую непродолжимость за границу единичного круга степенных рядов, соответсвующих L-функциям числовых полей, отличных от поля рациональных чисел, и многие другие результаты. В частности, (см. [1]), была доказана

Теорема 1. *Ряд Дирихле*

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}, \quad s = \sigma + it,$$

тогда и только тогда определяет целую функцию, удовлетворяющую условию

$$|f(s)\Gamma(s)| < e^{-\alpha|t|}, \quad 0 \le \sigma \le 1,$$

где $\Gamma(s)$ *— гамма-функция,* $\alpha > 0$ *и зависит от функции f(s), когда соответствующий степенной ряд*

$$g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$$

имеет конечные радиальные производные вида

$$\lim_{x\to 1-0} g^{(m)}(x) = \alpha m, \quad m = 0, 1, 2, \ldots.$$

Начиная с 2012 года в работах О. А. Матвеевой получил развитие так называемый аппроксимационный подход в задачах изучения аналитических свойств рядов Дирихле, основанный на построении последовательности полиномов Дирихле, приближающих в критической полосе функции, определяемые рядами Дирихле, и изучении тех свойств полиномов Дирихле, которые соответствуют определенным свойствам рядов Дирихле. По этому поводу см. работы [2], [3], [4].

Дальнейшее развитие аппроксимационного подхода позволило авторам получать новые результаты в задаче аналитического продолжения рядов Дирихле. Так в работе [5] было доказано следующее утверждение:

Теорема 2. *Ряд Дирихле*

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$$

с конечнозначными коэффициентами тогда и только тогда определяет целую функцию, удовлетворяющую условию

$$|f(s)\Gamma(s)| < e^{-\alpha|t|}, \quad 0 \le \sigma \le 1,\ \alpha > 0,$$

когда для любого натурального m *однозначно определяется алгебраический многочлен* $T_{m-1}(x)$ *степени* $m-1$ *такой, что для чезаровских средних от коэффициентов ряда:*

$$S^m(x) = T_{m-1}(x) + O(1),$$

где константа в символе "O"не зависит от x.

Аппроксимационный подход позволил получить условие аналитического продолжения рядов Дирихле с мультипликативными коэффициентами как целых функций на комплексную плоскость. Доказан следующий результат:

Теорема 3. *Ряд Дирихле*

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h(n)}{n^s},$$

где $h(n)$ *— конечнозначный числовой характер, удовлетворяющий условиям:*

1. *функция* $f(s)$ *— аналитична в полуплоскости* $\sigma > 0$ *и ограничена в полосе:* $0 < \sigma < \infty$, $t| \le T$, *константой, зависящей только от величины* T*;*
2. *степенной ряд*

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} h(n) x^n$$

имеет конечный предел в точке $x = 1$,

тогда и только тогда определяет целую функцию, когда функция $f(s)$ *является регулярной на мнимой оси.*

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кузнецов. В. Н. Об аналитическом продолжении одного класса рядов Дирихле // Вычислительные методы и программирование: межвуз. сб. науч. трудов. - Саратов: изд-во СГУ, 1987, с. 17–23

2. Матвеева. О. А. Аппроксимационные полиномы и поведение L-функций Дирихле в критической полосе // Известия Сарат. ун-та. Математика, Механика. Информатика — Саратов, изд-во СГУ, 2013, Вып. 4, ч. 2, с. 80 – 84

3. Матвеева О. А. О нулях полиномов Дирихле, приближающих в критической полосе L-функции Дирихле. // Чебышевский сборник — Тула: изд-во ТПГУ, 2013, т. 14, Вып. 2, с. 117 – 121

4. Матвеева. О. А. Аналитические свойства определенных классов рядов Дирихле и некоторые задачи теории L-функций Дирихле: Диссертация на соискание ученой степени к. ф.-м. н. — Ульяновск, 2014, 110 с.

5. Кузнецов В. Н., Матвеева О. А. К задаче аналитического продолжения рядов Дирихле с конечнозначными коэффициентами как целых функций на комплексную плоскость // Чебышевский сборник — Тула: изд-во ТПГУ, 2017, т. 18, Вып. 4, С. 285–295.

———————————————————————————

УДК 511.32

Дискретные теоремы о совместном распределении значений дзета-функций Римана и Гурвица[1]

А. Лауринчикас Литва, г. Вильнюс, Вильнюский университет
antanas.laurincikas@mif.vu.lt

Joint discrete value distribution theorems for the Riemann and Hurwitz zeta-functions

A. Laurinčikas Lithuania, Vilnius, Vilnius University
antanas.laurincikas@mif.vu.lt

In 1975, S.M. Voronin discovered [4] the universality of the Riemann zeta-function $\zeta(s)$, $s = \sigma + it$, on the approximation of non-vanishing analytic functions by shifts $\zeta(s + i\tau)$, $\tau \in \mathbb{R}$. The Hurwitz zeta-function $\zeta(s, \alpha)$, $0 < \alpha \leqslant 1$, defined, for $\sigma > 1$, by the Dirichlet series

$$\zeta(s, \alpha) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(m + \alpha)^s},$$

and by meromorphic continuation elsewhere, also is universal for rational and transcendental parameter α. The case of algebraic irrational α is an open problem.

In 2007, Mishou obtained [3] a joint universality theorem on simultaneous approximation of a pair of analytic functions by shifts $(\zeta(s + i\tau), \zeta(s + i\tau, \alpha))$ with transcendental α. Discrete versions of the Mishou theorem on the approximation by shifts $(\zeta(s + ikh), \zeta(s + ikh, \alpha))$, $h > 0$, and $(\zeta(s + ikh_1), \zeta(s + ikh_2, \alpha))$, $h_1 > 0$, $h_2 > 0$, were proved in [1] and [2], respectively.

[1]This research is funded by the European Social Fund according to the activity “Improvement of researchers” qualification by implementing world-class R&D projects’ of Measure No. 09.3.3-LMT-K-712-01-0037.

Our aim is to extend the above mentioned results of discrete type for the functions $\zeta(s)$ and $\zeta(s,\alpha)$. We consider the class $U(k_0)$ of functions $\varphi(t)$ defined for $t \geqslant k_0$, $k_0 \in \mathbb{N}$, and satisfying the conditions:

1° $\varphi(t)$ is a real-valued positive increasing function;

2° $\varphi(t)$ has a continuous derivative $\varphi'(t)$ such that

$$\varphi(2t) \max_{t \leqslant u \leqslant 2t} \left(\varphi'(u)\right)^{-1} \ll t;$$

3° The sequence $\{a\varphi(k) : k \geqslant k_0\}$ with every $a \neq 0$ is uniformly distributed modulo 1.

Let $D = \left\{s \in \mathbb{C} : \frac{1}{2} < \sigma < 1\right\}$, $\mathcal{K}$ be the class of compact subsets of the strip D with connected complements, $H(K)$, $K \in \mathcal{K}$, be the class of continuous functions on K that are analytic in the interior of K, and by $H_0(K)$, $K \in \mathcal{K}$, be the subclass of $H(K)$ of non-vanishing functions on K. Denote by $\mathbb{P}$ and $\mathbb{N}_0$ the sets of all prime numbers and of all non-negative integers, respectively. Then we have the following versions of the Mishou theorem.

Theorem 1. *Suppose that the set*

$$L(\mathbb{P},\alpha) = \{(\log p : p \in \mathbb{P}), (\log(m+\alpha) : m \in \mathbb{N}_0)\}$$

is linearly independent over the field of rational numbers $\mathbb{Q}$, and that $\varphi \in U(k_0)$. Let $K_1, K_2 \in \mathcal{K}$, and $f_1(s) \in H_0(K_1)$, $f_2(s) \in H(K_2)$. Then, for every $\varepsilon > 0$,

$$\liminf_{N\to\infty} \frac{1}{N-k_0+1} \# \left\{ k_0 \leqslant k \leqslant N : \sup_{s\in K_1} |\zeta(s+i\varphi(k)) - f_1(s)| < \varepsilon, \right.$$
$$\left. \sup_{s\in K_2} |\zeta(s+i\varphi(k),\alpha) - f_2(s)| < \varepsilon \right\} > 0.$$

Theorem 2. *Under conditions of Theorem* 1, the limit

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N-k_0+1} \# \left\{ k_0 \leqslant k \leqslant N : \sup_{s\in K_1} |\zeta(s+i\varphi(k)) - f_1(s)| < \varepsilon, \right.$$
$$\left. \sup_{s\in K_2} |\zeta(s+i\varphi(k),\alpha) - f_2(s)| < \varepsilon \right\} > 0$$

exists for all but at most countably many $\varepsilon > 0$.

Denote by $H(D)$ the space of analytic functions on D endowed with the topology of uniform convergence on compacta. Theorems 1 and 2 can be generalized for composite functions $F(\zeta(s),\zeta(s,\alpha))$, where $F : H^2(D) \to H(D)$ is a certain operator. Moreover, let $S = \{g \in H(D) : g(s) \neq 0 \text{ or } g(s) \equiv 0\}$, and

$$H_{a_1,\dots,a_r}(D) = \{g \in H(D) : g(s) \neq a_j,\ j = 1,\dots,r\},$$

where $a_1,\dots,a_r$ are arbitrary distinct complex numbers.

Theorem 3. *Suppose that the set $L(\mathbb{P},\alpha)$ is linearly independent over $\mathbb{Q}$, $\varphi \in U(k_0)$, $F : H^2(D) \to H(D)$ is a continuous operator such that $F(S \times H(D)) \supset H_{a_1,\dots,a_r}(D)$. For $r = 1$, let $K \in \mathcal{K}$, and $f(s) \in H(K)$ and $f(s) \neq a_1$ on K. For $r \geqslant 2$, let $K \subset D$ be an arbitrary compact subset, and $f(s) \in H_{a_1,\dots,a_r}(D)$. Then, for every $\varepsilon > 0$,*

$$\liminf_{N\to\infty} \frac{1}{N-k_0+1} \# \left\{ k_0 \leqslant k \leqslant N : \sup_{s\in K} |F(\zeta(s+i\varphi(k)),\zeta(s+i\varphi(k),\alpha)) - f(s)| < \varepsilon \right\} > 0.$$

Theorem 4. *Under conditions of Theorem* 3, the limit

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N-k_0+1}\#\left\{k_0\leqslant k\leqslant N:\sup_{s\in K}|F(\zeta(s+i\varphi(k)),\zeta(s+i\varphi(k),\alpha))-f(s)|<\varepsilon\right\}>0$$

exists for all but at most countably many $\varepsilon>0$.

Theorem 3 contains a certain information on the number of zeros of the function $F(\zeta(s+i\varphi(k)),$ $\zeta(s+i\varphi(k),\alpha))$.

Theorem 5. *Suppose that the set $L(\mathbb{P},\alpha)$ is linearly independent over $\mathbb{Q}$, $\varphi\in U(k_0)$ and $F:H^2(D)\to H(D)$ is a continuous operator such that $F(S\times H(D))\supset H_{a_1,\ldots,a_r}(D)$ with $\operatorname{Re}a_j\notin\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$, $j=1,\ldots,r$. Then, for every $\frac{1}{2}<\sigma_1<\sigma_2<1$, there exists a constant $c=c(\sigma_1,\sigma_2,\varphi,F)>0$ such that, for sufficiently large N, the function $F(\zeta(s+i\varphi(k)),\zeta(s+i\varphi(k),\alpha))$ has a zero in the disc*

$$\left|s-\frac{\sigma_1+\sigma_2}{2}\right|\leqslant\frac{\sigma_2-\sigma_1}{2}$$

for more than cN numbers k, $k_0\leqslant k\leqslant N$.

For example, the set $L(\mathbb{P},\alpha)$ is linearly independent over $\mathbb{Q}$ with transcendental α. Also, the function $\varphi(t)=t^{\beta}\log^{\beta_1}t\in U(2)$ with $\beta\in\mathbb{R}^+\setminus\mathbb{Z}^+$, $\beta_1\in\mathbb{R}^+$.

REFERENCES

1. Buivydas E., Laurinčikas A. A discrete version of the Mishou theorem // Ramanujan J. 2015. Vol. 38. P. 331–347.

2. Buivydas E., Laurinčikas A. A generalized joint discrete universality theorem for the Riemann and Hurwitz zeta-functions // Lith. Math. J. 2015. Vol. 55. P. 193–206.

3. Mishou H. The joint value-distribution theorem of the Riemann zeta-function and Hurwitz zeta-functions // Lith. Math. J. 2007. Vol. 47. P. 32–47.

4. Voronin S. M., Theorem on the “universality” of the Riemann zeta-function // Math USSR Izv. 1975. Vol. 9. P. 443–453.

———————————————————————————

УДК 512.5

Обобщение на алгебры Шевалле задачи А. И. Мальцева о коммутативных подалгебрах

В. М. Левчук Россия, г. Красноярск, Сибирский федеральный университет
Г. М. Сулейманова Россия, г. Абакан, Сибирский федеральный университет
vlevchuk@sfu-kras.ru, suleymanova@list.ru

Generalization of A.I. Mal'cev problem about commutative subalgebras for the Chevalley algebras

V. M. Levchuk Russia, Krasnoyarsk, Siberian Federal University,
G. S. Suleimanova Russia, Abakan, Siberian Federal University
vlevchuk@sfu-kras.ru, suleymanova@list.ru

Алгебру Шевалле $L_\Phi(K)$ над полем K, ассоциированную с системой корней Φ, характеризуют базой Шевалле, состоящей из элементов e_r ($r \in \Phi$) вместе с подходящей базой подалгебры Картана [1, § 4.4]. Подалгебру $N\Phi(K)$ с базой из элементов e_r ($r \in \Phi^+$) называем нильтреугольной.

А.И. Мальцев [3] описал коммутативные подалгебры наивысшей размерности в комплексных полупростых алгебрах Ли. Он решил эту задачу редукцией к аналогичной проблеме для максимальной нильпотентной подалгебры. В [2] поставлено обобщение этой задачи на алгебры Шевалле над произвольным полем.

Для решения обобщенной редукционной задачи в [2] авторами найдено описание абелевых идеалов наивысшей размерности в алгебре $N\Phi(K)$ классических типов и исследуется записанная там же гипотеза:

Верно ли, что любой абелев идеал наивысшей размерности алгебры $N\Phi(K)$ является абелевой подалгеброй наивысшей размерности этой алгебры?

Для исключительных типов обобщенная редукционная задача исследуется совместно с Е.А. Кирилловой, в частности, подтверждена указанная гипотеза. Заметим, что абелевы идеалы наивысшей размерности алгебры $N\Phi(K)$ не всегда являются абелевыми подалгебрами наивысшей размерности алгебры $L_\Phi(K)$ (например, это не так для случая $\Phi = E_6$ и char $K = 3$).

Выявлено, что в алгебре Шевалле $L_\Phi(K)$ над полем K каждая большая абелева подалгебра подалгебры $N\Phi(K)$, как правило, переводится автоморфизмом алгебры $L_\Phi(K)$ в идеал подалгебры $N\Phi(K)$. В частности, выявляется список исключений.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 16-01-00707.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Carter R., Simple groups of Lie type, Wiley and Sons, New York, 1972.

2. Levchuk V.M., Suleimanova G.S. The generalized Mal'cev problem on abelian subalgebras of the Chevalley algebras // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2015. № 4.P. 384-388.

3. Мальцев А. И. Коммутативные подалгебры полупростых алгебр Ли // Известия АН СССР, сер. матем. 1945. Т. 9. № 4. С. 291-300.

УДК 519.719.2

Линейный и разностный методы в криптографии (другой взгляд)

Ф. М. Малышев Москва, Математический институт им. В. А. Стеклова РАН
А. Е. Тришин Москва, ООО «Центр сертификационных исследований»
malyshevfm@mi.ras.ru, trishin17@yandex.ru

Linear and Differential Cryptanaysis: Another Viepoint

F. M. Malyshev Moscow, Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences
A. E. Trishin Moscow, Certification Research Center, LLC
malyshevfm@mi.ras.ru, trishin17@yandex.ru

Доклад относится к способам построения вероятностных линейных и разностных соотношений для отображений $F : V_N \to V_M$, задаваемых функциональными схемами. Здесь $V_N = GF(2)^N$. Вероятностное линейное соотношение, задаваемое парой вектор-столбцов $L' \in V_N^*$, $L'' \in V_M^*$ и записываемое в виде $aL' \simeq bL''$, $a \in V_N$, $b = F(a) \in V_M$, характеризуется преобладанием $\delta_{L',L''} = 2\mathbf{P}\{aL' = bL''\} - 1$, вычисляемом для равновероятного $a \in V_N$. Вероятностное разностное соотношение, задаваемое векторами разностей $D' \in V_N$, $D'' \in V_M$ и обозначаемое как (D', D''), можно воспринимать как вероятностную импликацию: если $a^{(1)} + a^{(2)} = D'$, то $b^{(1)} + b^{(2)} = D''$, $b^{(1)} = F(a^{(1)})$, $b^{(2)} = F(a^{(2)})$. Она оценивается разностной характеристикой $p_{D',D''} = p^F_{D',D''} = \mathbf{P}\{F(a + D') + F(a) = D''\}$, вычисляемой при равновероятном $a \in V_N$. Вероятностные линейные и разностные соотношения используются в методах определения криптографических ключей шифраторов, задаваемых, функциональными схемами.

Предлагаемая далее точка зрения на линейный и разностный методы формировалась независимо от многочисленных публикаций, относящихся к шифрпреобразованиям F частного вида.

Функциональная схема $\mathcal{F}$, задающая шифрпреобразование F, может представляться последовательностью выполняемых в определённом порядке линейных и нелинейных преобразований.

Пусть нелинейные преобразования $f_i : V_{n_i} \to V_{m_i}$, $x_i \mapsto y_i = f_i(x_i)$, $i = 1, \dots, k$, выполняются в этой программе в указанном порядке. Через $x_i \in V_{n_i}$ обозначено значение аргумента отображения f_i, которое, в конечном счёте, выражается через $a \in V_N$ и является результатом выполнения некоторых предыдущих операций.

В промежутках между нелинейными преобразованиями выполняются линейные преобразования.

Для некоторых двоичных матриц c_{ij} размера $m_i \times n_j$, $i = 0, 1, \dots, k$, $j = 1, \dots, k, k + 1$, $m_0 = N$, $n_{k+1} = M$, можно записать

$$x_j = ac_{0j} + \sum_{i=1}^{j-1} y_i c_{ij}, \quad j = 1, \dots, k, \quad b = ac_{0,k+1} + \sum_{i=1}^{k} y_i c_{i,k+1}.$$

Полагая $c_{ij} = 0$ при $i \geqslant j$, из блоков c_{ij} составляется матрица C размера

$$\left(N + \sum_{i=1}^{k} m_i\right) \times \left(\sum_{i=1}^{k} n_i + M\right),$$

для которой $(a, y_1, \dots, y_k)C = (x_1, \dots, x_k, b)$. Матрица C называется матрицей линейной среды функциональной схемы $\mathcal{F}$, в ней аккумулированы все линейные операции шифрпреобразования F. Линейная среда, обозначаемая той же буквой C, сама является функциональной схемой. Она получается удалением из функциональной схемы $\mathcal{F}$ каждого функционального элемента f_i, $i = 1, \ldots, k$, с сохранением n_i его двоичных входов, которые превращаются в выходы линейной среды C, и с сохранением m_i его двоичных выходов, которые становятся входами линейной среды $C\colon V_{N+\sum_{i=1}^k m_i} \to V_{M+\sum_{i=1}^k n_i}$.

Вероятностные линейные соотношения $aL' + bL'' \simeq 0$ получаются формальным сложением локальных вероятностных линейных соотношений $x_i l'_i + y_i l''_i \simeq 0$, $l'_i \in V^*_{n_i}$, $l''_i \in V^*_{m_i}$, $y_i = f_i(x_i)$, $i = 1, \ldots, k$, характеризующихся (локальными) преобладаниями $\delta_i = \delta^{f_i}_{l'_i, l''_i} = 2\mathbf{P}\{x_i l'_i = y_i l''_i\} - 1$, вычисляемыми в условиях равновероятных $x_i \in V_{n_i}$. Набор $\mathfrak{L} = ((l'_i, l''_i),\ i = 1, \ldots, k)$ должен быть согласованным в том смысле, что при некоторых $L' = L'_{\mathfrak{L}} \in V^*_N$, $L'' = L''_{\mathfrak{L}} \in V^*_M$ имеет место тождество $\sum_{i=1}^k (x_i l'_i + y_i l''_i) = aL' + bL''$.

В качестве грубого приближения для $\delta_{L',L''}$ рассматривают произведение $\tilde{\delta}_{\mathfrak{L}} = \delta_1 \cdot \ldots \cdot \delta_k$. Это **мотивируется** равенством $\delta_{L',L''} = \tilde{\delta}_{\mathfrak{L}}$, справедливым в условиях (как правило не выполняющихся) равновероятности $x_i \in V_{n_i}$, $i = 1, \ldots, k$, и независимости величин $\eta_i = x_i l'_i + y_i l''_i$, $i = 1, \ldots, k$. При максимизации $|\tilde{\delta}_{\mathfrak{L}}|$ желательно увеличивать число единичных сомножителей $|\delta_i|$. Пусть $\theta_{\mathfrak{L}} = |\{i \in \{1, \ldots, k\} |\, l''_i \neq 0\}|$ – число сомножителей в $\tilde{\delta}_{\mathfrak{L}}$, которые, возможно, не равны единице. Величину $\theta_C = \min_{\mathfrak{L}} \theta_{\mathfrak{L}}$ называем показателем рассеивания линейной среды C для линейного метода.

Эта же методика применима и к способу поиска многомерных (s-мерных) вероятностных линейных соотношений [1], нужно только вместо вектор-столбцов L', L'', l'_i, l''_i, $i = 1, \ldots, k$, рассматривать матрицы из s столбцов того же размера.

Благодаря имеющейся двойственности между способами построения линейных и разностных вероятностных соотношений [2], разностные соотношения (D', D'') аналогично строятся по согласованному набору $\mathfrak{D} = ((d'_i, d''_i),\ i = 1, \ldots, k)$, $d'_i \in Vn_i$, $d''_i \in V_{m_i}$, локальных разностных соотношений для f_i, характеризуемому произведением $\tilde{p}_{\mathfrak{D}} = \prod_{i=1}^k p^{f_i}_{d'_i, d''_i}$. Использование приближения $\tilde{p}_{\mathfrak{D}}$ для $p_{D'_{\mathfrak{D}}, D''_{\mathfrak{D}}}$ **мотивируется** аналогичными предположениями. При максимизации $\tilde{p}_{\mathfrak{D}}$ желательно увеличивать число единичных сомножителей среди $p^{f_i}_{d'_i, d''_i}$. Это приводит к понятию показателя рассеивания линейной среды C относительно разностного метода: $\theta'_C = \min_{\mathfrak{D}} \theta'_{\mathfrak{D}}$, $\theta'_{\mathfrak{D}} = |\{i \in \{1, \ldots, k\} |\, d'_i \neq 0\}|$.

Минимизация параметров $\tilde{\delta}_{\mathfrak{L}}$ и $\tilde{p}_{\mathfrak{D}}$ при синтезе шифраторов может рассматриваться как формализация имевшегося всегда негласного правила делать криптосхемы как можно более нелинейными. Это обеспечивается уменьшением модулей локальных преобладаний и разностных характеристик вместе с повышением коэффициентов рассеивания θ, θ' линейной среды C. Последним объясняется переход от SP-сетей (в которых к середине прошлого века конкретизировались принципы Шеннона по перемешиванию и рассеванию [3]) к XSL-схемам.

Возникла новая технология разработки шифраторов, основанная на гарантировании высоких показателей рассеивания θ, θ' линейной среды шифрпреобразований. Синтез новых шифраторов начинается с представления общей структуры, с построения линейной среды.

На предварительных эскизах нелинейные отображения не конкретизируются, рассматриваются в общем виде. Показатели рассеивания вычисляются до конкретизации нелинейных отображений. Чем больше эти показатели, тем легче потом гарантировать необходимую криптографическую стойкость относительно и других методов криптографического анализа путём специального тщательного подбора встраиваемых локальных нелинейных отображений. Показатели рассеивания θ, θ' (наряду с числом итераций и мощностью множества криптографических ключей) относятся к тем редким показателям, которые относительно несложно оцениваются, и при этом позволяют судить о криптографической стойкости шифратора. Они являются численными характеристиками для введённого Шенноном качественного понятия рассеивания. Показатели рассеивания θ, θ' на две итерации XSL-схем предоставляют характеристики рассеивания ρ_Λ, ρ'_Λ для отдельных участвющих в формировании линейной среды невырожденных линейных отображений $\Lambda \in GL(n, 2)$ [4].

Аналогичные показатели рассеивания линейной среды, отвечающие s-мерным линейным соотношениям и применённые к SP-сетям, предоставляют более тонкие характеристики рассеивания линейных невырожденных отображений, пригодные и для оценки рассеивания коммутаций [1].

Справедливы следующие теоремы.

Теорема 1. *Для* $L' \in V_N^*$, $L'' \in V_M^*$ *имеем:* $\delta_{L',L''} = \sum_{\mathfrak{L}:L'_{\mathfrak{L}}=L',L''_{\mathfrak{L}}=L''} \tilde{\delta}_{\mathfrak{L}}$.

Теорема 2. *Для* $D' \in V_N$, $D'' \in V_M$ *имеем:* $p_{D',D''} =$
$= \sum_{\mathfrak{D}:D'_{\mathfrak{D}}=D',D''_{\mathfrak{D}}=D''} \tilde{p}_{\mathfrak{D}} + \frac{1}{2^M} \sum_{(L',L'') \in V_N^* \times V_M^*} (-1)^{D'L'+D''L''} \sum_{\mathfrak{L}_1 \neq \mathfrak{L}_2:L'_{\mathfrak{L}_1}=L'_{\mathfrak{L}_2}=L',L''_{\mathfrak{L}_1}=L''_{\mathfrak{L}_2}=L''} \tilde{\delta}_{\mathfrak{L}_1} \tilde{\delta}_{\mathfrak{L}_2}$.

В частном случае значение $\delta_{L',L''}$ приведено в [5]. В свете этих теорем поиск линейных и разностных соотношений осуществляется путём максимизации модулей отдельных слагаемых $|\tilde{\delta}_{\mathfrak{L}}|$ и $\tilde{p}_{\mathfrak{D}}$ в точных выражениях для $\delta_{L',L''}$ и $p_{D',D''}$. Теоремы 1, 2 высвечивают основные недостатки предлагаемых способов построения линейных и разностных соотношений:

1) находятся не самые лучшие соотношения, а какие получатся;

2) не известно общих результатов о точности используемых приближений для преобладаний и разностных характеристик;

3) ориентируясь на $\tilde{\delta}_{\mathfrak{L}_0} = \max_{\mathfrak{L}} |\tilde{\delta}_{\mathfrak{L}}|$ и $\tilde{p}_{\mathfrak{D}_0} = \max_{\mathfrak{D}} \tilde{p}_{\mathfrak{D}}$ приходится уходить из областей, где реализуются $\delta = \max_{L',L''} |\delta_{L',L''}|$ и $p = \max_{D',D''} p_{D',D''}$.

Перечисленные недостатки не идут ни в какое сравнение с тем, что задачи максимизации $|\delta_{L',L''}|$ и $p_{D',D''}$ (как видно из теорем 1 и 2) существенно сложней максимизации $|\tilde{\delta}_{\mathfrak{L}}|$ и $\tilde{p}_{\mathfrak{D}}$.

Наиболее парадоксальное проявление недостатка 1) демонстрирует реализующая все 2^{M2^N} отображений $F\colon V_N \to V_M$ универсальная функциональная схема, точнее семейство функциональных схем с одной и той же линейной средой, для которых модули локальных линейных и разностных характеристик одинаковы. В результате для всех 2^{M2^N} отображений F предлагаемая методика построения линейных и разностных соотношений предоставит одни и те же "лучшие" соотношения.

Конечно, привлекаемые в **мотивациях** предположения о равновероятности $x_i \in V_{n_i}$, $i = 1, \ldots, k$, и независимости используемых событий как правило не выполняются, и, тем не менее, **ИНОГДА** имеют место приближённые равенства $\tilde{\delta}_{\mathfrak{L}_0} \approx \delta_{L'_{\mathfrak{L}_0},L''_{\mathfrak{L}_0}}$, $\tilde{p}_{\mathfrak{D}_0} \approx p_{D'_{\mathfrak{D}_0},D''_{\mathfrak{D}_0}}$, в которых убеждаемся с помощью экспериментально получаемых оценок. При малых значениях $|\tilde{\delta}_{\mathfrak{L}}|$, $\tilde{p}_{\mathfrak{D}}$ проверка должна проводиться как можно в большем числе ситуаций, искусственно формируемых путём вариации отображений $\tilde{f}_i : V_{n_i} \to V_{m_i}$, $i = 1, \ldots, k$. Ради увеличения $|\tilde{\delta}_{\mathfrak{L}}|$, $\tilde{p}_{\mathfrak{D}}$ изменяются только сами отображения f_i при заданных n_i и m_i. Линейная среда, определяющая структуру равенств в теоремах 1, 2, должна оставаться неизменной.

В реальности анализируется семейство шифрпреобразований F, параметризуемое ключами $X \in V_K$. Поиск вероятностных линейных и разностных соотношений должен проводиться в условиях фиксированного ключа X, поскольку для разных классов ключей свои наиболее эффективные соотношения, используемые затем в методах восстановления конкретного неизвестного ключа.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ерохин А. В., Малышев Ф. М., Тришин А. Е. Многомерный линейный метод и показатели рассеивания линейной среды шифрпреобразований. // Математические вопросы криптографии. 2017. Том 8 № 4. С. 29-62.

2. Малышев Ф. М. Двойственность разностного и линейного методов в криптографии. // Математические вопросы криптографии. 2014. Том 5 № 3. С. 35-47.

3. Месси Дж. Л. Введение в современную криптологию. ТИИЭР, 1988, т. 76, № 5, с. 24-42.

4. Малышев Ф.М., Трифонов Д.И. Рассеивающие свойства XSLP-шифров. // Математические вопросы криптографии. 2016. Т. 7 № 3. С. 47-60.

5. Daemen J., Rijmen V. The Design of Rijndael: AES - The Advanced Encryption Standard. Springer Verlag, 2002. 255 p.

УДК 511.331

Вычислительный аспект теоремы Гамбургера

Ю. В. Матиясевич Россия, Санкт-Петербург, Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В. А. Стеклова РАН
yumat@pdmi.ras.ru

Computational aspect of Hamburger's theorem

Yu. V. Matiyasevich Russia, St. Petersburg, St.Petersburg Department of V. A. Steklov Mathematical Institute of the Russian Academy of Sciences
yumat@pdmi.ras.ru

Riemann's zeta-function $\zeta(s)$ satisfies the well-known functional equation

$$g(s)\zeta(s) = g(1-s)\zeta(1-s) \tag{1}$$

where

$$g(s) \quad = \quad \pi^{-s/2}(s-1)\Gamma(s/2+1). \tag{2}$$

H. Hamburger established that the zeta function is identified by (1) inside a wide class of functions defined by Dirichlet series. Hamburger's theorem was extended to many other functions defined by Dirichlet series and satisfying corresponding functional equations.

The talk will present numerical techniques for solving functional equations. Namely, for a given functional equation we are to answer two questions:

- *how could we calculate (approximate) values of the initial coefficients of a Dirichlet series $D(s)$ satisfying this equation?*
- *how could we calculate (approximate) value of $D(s)$ for a given s (which need not lie in the half-plane of the convergence of the series)?*

The main idea consists in consideration of discrete versions of the given functional equation. They are the same equality but we demand that it should hold for a finite or countable set of points only.

Numerical examples (see [1]) show that finite Dirichlet series satisfying corresponding discrete versions of the functional equation of alternating zeta function give a very good approximations to this function inside and even to the left of the critical strip. This led the speaker to the following

Conjecture (discrete version of Hamburger theorem). *Riemann's zeta-function is the only function $D(s)$ defined for $\Re(s) > 1$ by a convergent Dirichlet series of the form*

$$D(s) = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} a_n n^{-s}$$

such that $(s-1)D(s)$ *is an entire function of finite order and*

$$g(m+1/2)D(m+1/2) = g(1/2-m)D(1/2-m), \qquad m = 1, 2, \ldots$$

where $g(s)$ *is defined by* (2).

Initial coefficients of Dirichlet series defining Ramanujan tau L-function and Davenport-Heilbronn function can be calculated (see [1, 2]) from the corresponding functional equation.

In the case of the functional equation satisfied by Dirichlet L-function with non-real character modulo 5 the situation is more complicated because this equation has a second, linear independent solution. In order to discover it one has to modify the functional equation (see [1]).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Matiyasevich Yu. V. Computational aspects of Hamburger's theorem. Preprint POMI 01/2018, [Электронный ресурс], Режим доступа: `http://www.pdmi.ras.ru/preprint/2018/18-01.html`.

2. Matiyasevich Yu. Computational rediscovery of Ramanujan's tau numbers. // Integers. 2018. Vol. 18A. [Электронный ресурс], Режим доступа: `http://math.colgate.edu/~integers/vol18a.html`.

УДК 512.55+512.545

Упорядоченные неассоциативные алгебраические структуры

А. В. Михалев Россия, Москва, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
Е. Е. Ширшова Россия, Москва, Московский педагогический государственный университет
shirshova.elena@gmail.com

Ordered nonassociative algebraic structures

A. V. Mikhalev Russian, Moscow, Lomonosov Moscow State University
E. E. Shirshova Russian, Moscow, Moscow Pedagogical State University
shirshova.elena@gmail.com

Пусть $R = < R, +, \cdot >$ – произвольное кольцо (возможно, неассоциативное).

Принято называть R *частично упорядоченным кольцом*, если $< R, +, \leqslant >$ является частично упорядоченной группой, удовлетворяющей условию

(1) из $a \leqslant b$ и $0 < c$ следуют неравенства $ac \leqslant bc$ и $ca \leqslant cb$ для всех $a, b, c \in R$.

Идеал P кольца R называется *первичным*, если в факторкольце R/P произведение ненулевых идеалов всегда отлично от нуля. *Первичным радикалом кольца* R называется пересечение всех первичных идеалов кольца R.

С середины прошлого века предпринимались попытки распространить понятие первичного радикала на частично упорядоченные алгебраические системы. В классе решеточно упорядоченных колец (l-колец) первоначально идея первичного радикала рассматривалось в работе Г. Биркгофа и Р. Пирса (подробнее см. [1]).

В работе А.В. Михалева и М.А. Шаталовой [2] уточнено определение l-первичного радикала и получено поэлементное описание l-первичного радикала в классе ассоциативных решеточно упорядоченных колец.

Известно, что не всякий частичный порядок аддитивной группы кольца обладает свойством (1).

Было замечено, что порядок аддитивной группы ряда колец может обладать свойством "противоположным"условию (1).

Пусть аддитивная группа $< R, +, \leqslant>$ кольца R является частично упорядоченной группой. Будем называть кольцо R *частично псевдоупорядоченным кольцом*, если выполняется условие:

(2) из $0 \leqslant a$ следуют неравенства $ab \leqslant a$ и $ba \leqslant a$ для всех элементов $b \in R$.

Если порядок аддитивной группы кольца является направленным, то кольцо называется *направленным псевдоупорядоченным кольцом.*

Порядок аддитивной группы кольца часто удовлетворяет условию (2) в кольцах без единицы (кольцах Ли, йордановых кольцах, например).

Целью настоящего сообщения является характеризация аналога первичного радикала кольца в классе направленных псевдоупорядоченных колец.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Биркгоф Г. Теория решеток. – М.: Наука, 1984. 568 с.

2. Михалев А. В., Шаталова М. А. Первичный радикал решеточно упорядоченных колец. // Сборник работ по алгебре /под ред. А.И. Кострикина. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1989. С. 178-184.

———————————————————————————

УДК 512.543.16

Асимптотика изопериметрических функций групп

А. Ю. Ольшанский США, Нашвилл; Россия, Москва, Университет Вандербилта, Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
alexander.olshanskiy@vanderbilt.edu

Asymptotics of isoperimetric functions of group

A. Yu. Olshanskii USA, Nashville; Russia, Moscow, Vanderbilt University, Moscow State University
alexander.olshanskiy@vanderbilt.edu

The minimal non-decreasing function $d(n)\colon \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ such that every word w vanishing in a group $G = \langle A \mid R\rangle$ and having length $||w|| \leqslant n$ is freely equal to a product of at most $d(n)$ conjugates of relators from $R^{\pm 1}$, is called the *isoperimetric* or *Dehn* function of the presentation $G = \langle A \mid R\rangle$. In other words, the isoperimetric function $d(n)$ of the presentation is the smallest function that bounds from above the areas of loops of length $\leqslant n$ in the Cayley complex $Cay(G)$,

On the one hand, it is well known that, up to equivalence, the only subquadratic isoperimetric function of finitely presented groups is the linear one. On the other hand, there is a huge class of isoperimetric functions $d(n)$ with growth at least n^4 (essentially all possible such isoperimetric functions) constructed by M. V. Sapir, J. C. Birget and E. Rips [3] and based on the time functions of Turing machines and S-machines. The class of isoperimetric functions n^α with $\alpha \in (2;4)$ remained more mysterious even though it has attracted quite a bit of attention (see [1]).

I fill the gap obtaining Dehn functions of the form n^α (and much more) for all real $\alpha \geqslant 2$ computable in reasonable time, for example, $\alpha = \pi$ or $\alpha = e$, or α is any algebraic number [2].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. N. Brady, M. Bridson, There is only one gap in the isoperimetric spectrum, Geometric and Functional Analysis, 10 (2000), 1053-1070.

2. A.Yu. Olshanskii, Polynomially-bounded Dehn functions of groups, submitted, see arXiv. org.math: 1710.00550, 2017, pp. 1 - 93 .

3. M. V. Sapir, J. C. Birget, E. Rips, Isoperimetric and isodiametric functions of groups, Annals of Mathematics, 157, 2(2002), 345-466.

УДК 512.75

Тэта-функции, арифметические кривые и арифметические поверхности

Д. В. Осипов Россия, г. Москва, Математический институт им. В. А. Стеклова Российской академии наук, Национальный исследовательский университет "Высшая школа экономики", Национальный исследовательский технологический университет “МИСиС”

d_osipov@mi.ras.ru

Theta functions, arithmetic curves and arithmetic surfaces

D. V. Osipov Russia, Moscow, Steklov Mathematical Institute of Russsian Academy of Sciences, National Research University Higher School of Economics, National University of Science and Technology “MISiS”

d_osipov@mi.ras.ru

В анализе хорошо известна формула суммирования Пуассона, которая связывает сумму произвольной функции из пространства Шварца на самодвойственной локально-компактной группе по элементам некоторой дискретной подгруппы с преобразованием Фурье этой же самой функции по элементам ортогональной подгруппы. В случае, если V — это свободная абелева группа, и на конечномерном вещественном векторном пространстве $V \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ задана евклидова норма $\| \ \|$ (такая пара: V и $\| \ \|$ называется евклидовой решеткой), то для гауссовой функции $f(x) = e^{\ \pi \|x\|^2}$ формула суммирования Пуассона будет выглядеть следующим образом:

$$\sum_{v \in V} e^{-\pi \|v\|^2} = (\operatorname{covol} V)^{-1} \sum_{\check{v} \in \check{V}} e^{-\pi \|\check{v}\|^2},$$

где в правой части формулы рассматривается двойственная абелева группа $\check{V}$ и двойственная евклидова норма $\| \ \|$ на векторном пространстве $\check{V} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$, кроме того число $\operatorname{covol} V$ — это кообъем решетки V, то есть, объем компактной группы $(V \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R})/V$ в индуцированной мере.

Пусть теперь $K \supset \mathbb{Q}$ — числовое поле (то есть конечное расширение поля $\mathbb{Q}$). Пусть E — кольцо целых в поле $\mathbb{Q}$. Тогда свободная абелева группа E с индуцированной евклидовой нормой $\| \, \|$ из вложения поля K в произведение его пополнений по всем архимедовым точкам (классам эквивалентности архимедовых нормирований) будет евклидовой решеткой. Беря сумму гауссовых функций по точкам этой решетки, как выше, получаем новый инвариант поля K. Он называется θ-инвариант (тэта-инвариант), так как есть значение тэта-функции с некоторым фиксированным аргументом.

Рассмотрения выше можно обобщить на произвольный проективный модуль M конечного ранга над кольцом целых алгебраических чисел E, снабженный евклидовой нормой $\| \, \|$ на пространстве $M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$. Пара $(M, \| \, \|)$ называется расслоением на арифметической кривой E. Тогда формула суммирования Пуассона переходит в формулу Римана-Роха для расслоения $(M, \| \, \|)$, см. [1]. Эта формула Римана-Роха является аналогом формулы Римана-Роха для кривых, определенных над конечным полем, в алгебраической геометрии.

В своем докладе я расскажу про обобщение введенных выше θ-инвариантов на арифметические поверхности. Простейшей арифметической поверхностью является проективная прямая над кольцом целых чисел. При этом роль архимедовых нормирований здесь будет играть фиксированное сечение арифметической поверхности над базой, как в вычислениях в [2].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. J.-B. Bost, Theta invariants of euclidean lattices and infinite-dimensional hermitian vector bundles over arithmetic curves, e-print arXiv:1512.08946 [math.NT], https://arxiv.org/abs/1512.08946.

2. Осипов Д. В., Арифметические поверхности и адельные факторгруппы // Изв. РАН. Сер. матем., 82:4 (2018) (в печати), электронный препринт arXiv:1801.02282 [math.AG], https://arxiv.org/abs/1801.02282.

УДК 51(091)+(092)

Физико-математические исследования в ТГПУ им. Л. Н. Толстого за 80 лет [1]

В. А. Панин Россия, г. Тула, Тульский государственный педагогический университет имени Л. Н. Толстого
К. А. Подрезов Россия, г. Тула, Тульский государственный педагогический университет имени Л. Н. Толстого
И. Ю. Реброва Россия, г. Тула, Тульский государственный педагогический университет имени Л. Н. Толстого
info@tsput.ru kpodrezov@yandex.ru i_rebrova@mail.ru

Physical and mathematical research in TSPU them. L. N. Tolstoy in 80 years

V. A. Panin Russia, Tula, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University
K. A. Podrezov Russia, Tula, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University
I. Yu. Rebrova Russia, Tula, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University
info@tsput.ru kpodrezov@yandex.ru i_rebrova@mail.ru

Физико-математический факультет был создан одновременно с самим институтом осенью 1938 года. И физико-математической кафедрой, и факультетом в этом году руководил физик доцент Пальгунов Петр Петрович.

Осенью 1939 года из Самаркандского университета на факультет были приглашены выпускники МГУ, молодые ученые, кандидаты физико-математических наук, супруги Павел Васильевич Соловьев (1906-1943 гг.) и Валентина Михайловна Гущина (1907-2006 гг.), а также кандидат физико-математических наук Лев Мейнгардович Шифнер. С этого времени до февраля 1945 года кафедру математики и физики в ТГПИ возглавлял Л. М. Шифнер, а на должность декана физмата был назначен П. В. Соловьев. Но в 1941 году началась Великая отечественная война, П. В. Соловьев как и многие студенты физмата ушёл на войну и в 1941-42 годах деканом факультета становится Валентина Михайловна Гущина. Она проработала на этом посту 20 лет.

Научная работа по математике в это время велась по двум направлениям: математическому анализу и дифференциальным уравнениям. О плодотворности этих исследований можно судить по работам Л. М. Шифнера [8, 9].

В 1950 году на факультете функционируют уже две математические кафедры: кафедра математического анализа (зав. кафедрой Слугинов Серапион Петрович, на кафедре 8 человек) и кафедра геометрии и алгебры (зав. кафедрой Н. П. Петрушкин, на кафедре 8 человек). С 1956-57 учебного года образовываются три математические кафедры: кафедра алгебры (зав. кафедрой В. Д. Подсыпанин), кафедра элементарной математики (зав. кафедрой Н. П. Петрушкин), кафедра математического анализа (зав. кафедрой В. М. Гущина).

С 1950 года на факультете открывается первая аспирантура по теории чисел (научный руководитель доцент В. Д. Подсыпанин). С 1952 года по 1960 год на факультете работает выдающийся историк математики, доктор физико-математических наук, профессор Марк Яковлевич Выгодский. В 50-е годы на факультете работал ученик Г. Харди и Дж. Литлвуда доктор физико-математических наук, профессор Виктор Иосифович Левин. О научной и педагогической деятельности В. И. Левина можно прочитать в работе [1].

В 1964 году физико-математический факультет был разделен на два факультета: математический и физико-технический. Деканом физико-технического факультета стал доцент

[1]Исследование выполнено по гранту РФФИ №16-41-710194_р_центр_а

Г. Б. Куперман. В это время на факультете работает доктор физико-математических наук, профессор Всеволод Исидорович Арабаджи — специалист в области геофизики, оказавший большое влияние на выбор научного пути будущего доктора физико-математических наук, профессора Анатолия Николаевича Никитина, который стал геофизиком и последние годы своей жизни успешно работал в ОИЯФ (г. Дубна).

С 1967 года по 1977 год деканом математического факультета был доцент Гайдуков Иван Иванович. В этот период с 1968 года по 1972 год кафедрой алгебры и геометрии заведовал доктор физико-математических наук Гриндлингер Мартин Давидович. Теоретико-числовая научная школа, основанная В. Д. Подсыпаниным, трансформировалась в алгебраическую научную школу. Многие преподаватели кафедры прошли эту школу и успешно защитили кандидатские диссертации: А. Е. Устян, А. А. Чеботарь, В. Г. Дурнев, В. А. Гринблат, В. Н. Безверхний, Э. В. Роллов, Ю. А. Игнатов, Б. П. Ваньков, И. С. Безверхняя, А. И. Некрицухин.

С 1977 года деканом математического факультета избирается Устян Ашот Енофович и работает в этой должности до 2010 года. В этот период на математическом факультете успешно функционировали две математических школы: Тульская теоретико-числовая школа, о работе которой можно подробно прочитать в статье [4], и Тульская алгебраическая школа, сведения о которой можно почерпнуть в работах [2, 3, 5].

В ноябре 1978 года на базе физико-технического факультета организовываются два факультета: индустриально-педагогический и физический. Новый этап в проведении физических исследований связан с работой ректора ТГПИ им. Л. Н. Толстого, доктора физико-математических наук, профессора, член-корреспондента АПН СССР Виктора Анатольевича Буравихина в период с 1977 по 1981 годы. В это время в ТГПИ им. Л. Н. Толстого успешно проводятся исследования в области магнетизма и микроэлектроники. Сейчас эти исследования в области наноразмерных гетероструктур успешно продолжает доктор физико-математических наук, профессор Юрий Филлипович Головнёв и его ученики.

Другое направление физических исследований в ТГПИ, а затем в ТГПУ им. Л. Н. Толстого, связано с плодотворным сотрудничеством с московскими исследователями под руководством доктора физико-математических наук, профессора Анри Амвросьевича Рухадзе. Были защищены несколько кандидатских диссертаций и три докторских: В. В. Северьянов (1993г.), В. А. Панин (1995г.), Ю. В. Бобылёв (2007г.). Некоторые итоги исследований в этой области были подведены в 2011 году на Международной конференции "Многомасштабное моделирование структур и нанотехнологии" в работах [6, 7]. Эта конференция стала традиционной, и в сентябре 2017 года у нас прошла уже IV Международная конференция по этой тематике.

В 1993 году прошла первая Международная конференция "Современные проблемы теории чисел и её приложения". Председателем программного комитета той конференции был профессор Сергей Борисович Стечкин. Род Стечкины хорошо известен в Туле. Среди выдающихся представителей этого рода академик, Герой социалистического труда Борис Сергеевич Стечкин и знаменитый конструктор стрелкового оружия Игорь Яковлевич Стечкин. Надо отметить, что нынешняя XV конференция проходит в год 25-летия проведения таких конференций в Туле.

Эти конференции внесли существенный вклад в математическую жизнь в стране. В частности, на IV-ой Международной конференции "Современные проблемы теории чисел и её приложения", посвящённой 180-ой годовщине со дня рождения академика Пафнутия Львовича Чебышёва и 110-ой годовщине со дня рождения академика Ивана Матвеевича Виноградова, был организован Чебышёвский сборник, который в настоящее время не только входит в список ВАК, индексируется в электронных базах данных MathSciNet Американского математического общества и Zentralblatt MATH издательства Springer, Russian Science Citation Index (RSCI) (русская коллекция Web of Science), реферируется РЖ «Математика» (Россия, ВИНИТИ), «Mathematical Reviews» (США, American Mathematical Society), но и с 2017 года журнал индексируется в международной библиографической и реферативной базе данных Scopus.

Подводя итог краткому обзору научных исследований в ТГПУ им. Л. Н. Толстого, обращаем ваше внимание, что накопленный в нашем вузе научный потенциал в последнее время направлен на решение проблем "Цифровых средств производства инженерного анализа". В ноябре 2017 года прошла первая Всероссийская конференция с международным участием «Цифровые средства производства инженерного анализа», а сейчас проходит подготовка уже второй конференции этого направления. Сейчас в университете проходит наладка вычислительного кластера высокой производительности, ориентированного на решение проблем "Цифровых средств производства инженерного анализа".

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. И. Е. Базилевич, Б. М. Болотовский, Е. К. Годунова, А. И. Маркушевич Виктор Иосифович Левин (к шестидесятилетию со дня рождения) // УМН, 1970. Т. 25, вып. 1(151). С. 205–210.

2. В. Н. Безверхний, И. В. Добрынина, Ю. Э. Трубицын, А. Е. Устян М. Д. Гриндлингер — основатель Тульской алгебраической школы (к 85–летию профессора) // Чебышевский сб. 2017. Т. 18, вып. 1. С. 160–166.

3. В. Н. Безверхний, А. Е. Устян, И. В. Добрынина 70-летие профессора Валерия Георгиевича Дурнева // Чебышевский сб. 2017. Т. 18, вып. 2. С. 279–297.

4. Добровольский Н. М., Реброва И. Ю., Устян А. Е., Подсыпанин Ф. В., Подсыпанин Е. В. Тульская школа теории чисел (к 105-летнему юбилею Владимира Дмитриевича Подсыпанина (16.01.1910 - 11.10.1968) и 65-летию Тульской школы теории чисел) // В сборнике: Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы и приложения Материалы XIII Международной конференции. Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого. 2015. С. 20-85.

5. И. В. Добрынина, А. Е. Устян, Ю. Э. Трубицын К 75-летию доктора физико-математических наук, профессора Безверхнего Владимира Николаевича // Чебышевский сб. 2015. Т. 16, вып. 1. С. 291–300.

6. В. А. Панин Некоторые методы моделирования плазменно-пучкового взаимодействия в замедляющих системах различного вида // Многомасштабное моделирование структур и нанотехнологии: Материалы междунар. науч.-практ. конф. Тула, 3-7 октября 2011. Тула: изд-во ТГПУ им Л. Н. Толстого. С. 110–115.

7. В. А. Панин Численное моделирование различных механизмов стабилизации неустойчивости РЭП в плазме // Многомасштабное моделирование структур и нанотехнологии: Материалы междунар. науч.-практ. конф. Тула, 3-7 октября 2011. Тула: изд-во ТГПУ им Л. Н. Толстого. С. 116–121.

8. Л. М. Шифнер Об интегрировании в конечном виде некоторых дифференциальных систем // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1940. Т. 4, вып. 3. С. 341–348 .

9. Л. М. Шифнер Еще об интегрировании дифференциальных систем в конечном виде // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1940. Т. 4, вып. 4-5. С. 417–422.

УДК 517.5

Параллельные полумарковские процессы в задачах группового управления объектами[1]

А. Н. Привалов, Россия, г. Тула, Тульский государственный педагогический университет имени Л. Н. Толстого
Е. В. Ларкин Россия, г. Тула, Тульский государственный университет
dvgmail@mail.ru

The parallel semi-markov processes in objects group control tasks

A. N. Privalov Russia, Tula, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University
E. V. Larkin Russia, Tula, Tula State University
dvgmail@mail.ru

Исследуется функционирование сложных объектов, управляемых ЭВМ. Показано, что абстрактным аналогом функционирования каждого контура управления является ординарный полумарковский процесс. Указанной абстракции недостаточно для аналитического моделирования объекта в целом, поэтому для описания синхронизационных процессов необходима более сложная модель, которая получается интегрированием ординарных процессов в комплексный полумарковский процесс. Для определения подобной абстракции введен термин «функциональные состояния», которые получаются как все возможные комбинации структурных состояний. Предложен метод определения элементов полумарковской матрицы комплексного процесса. Показано, каким образом могут быть определены временные интервалы блужданий по комплексному полумарковскому процессу.

Необходимость управления сложными многоконтурными объектами достаточно часто встречается в инженерной практике. Характерным объектом управления, с этой точки зрения, является мобильный робот, который включают ряд единиц бортового оборудования, каждая из которых управляется своим контроллером и функционирует по своему собственному алгоритму. [1, 2]. Функционирование каждого контура управления приводит к достижению корпоративной цели функционирования объекта в целом, поэтому он не может рассматриваться отдельно от других контуров. Таким образом, для управления объектом в целом необходимо уметь оценивать состояния всех контуров в произвольный момент времени. [3, 4].

В свою очередь, управление сложными объектами является цифровым и осуществляется с помощью ЭВМ Фон Неймановского типа. которая функционирует в соответствии с заложенными в ее программное обеспечение алгоритмами. Известно, что работа каждого отдельного контура может быть описана с использованием теории полумарковских процессов [5, 6] вследствие следующих особенностей управляющих алгоритмов [5, 6, 7]:

управляющие алгоритмы являются циклическими и разделяются на операторы, таким образом, после достижения оператора «конец» алгоритм мгновенно возвращается в оператор «начало;

каждая операция связана с определенным физическим состоянием единицы оборудования;

все операторы циклического алгоритма являются актуальными, таким образом, из любого оператора существует хотя бы один путь к любому оператору, и в любой оператор существует хотя бы один путь из любого оператора;

Время интерпретации оператора случайно и определяется с точностью до плотности распределения, переключение в сопряженные операторы происходит случайным образом.

[1]Исследование было проведено в соответствии с Госзаданием Минобрнауки № 2.3121.2017/ПЧ

Таким образом, состояния полумарковского процесса являются абстрактными аналогами состояний контуров управления. При исследовании множества контуров, связанных общей целью знания состояния отдельных единиц оборудования, входящих в объект управления, недостаточно. Таким образом, необходим механизм объединения множества полумарковских процессов в один комплексный случайный процесс. Это позволит определить так называемые функциональные состояния, под которыми понимается комбинация состояний отдельных контуров управления в текущий момент времени. Полумарковские процессы, описывающие сложные системы, в настоящее время используются недостаточно, что определяет необходимость и актуальность исследований в данной области.

M-параллельный полумарковский процесс может быть определен как множество, состоящее из M ординарных процессов

$$\mu = \bigcup_{m=1}^{M} \mu_m; \tag{1}$$

$$\mu_m \bigcap \mu_k = \left(\begin{array}{l} \emptyset, \text{ when } m \neq k; \\ \mu_m \text{ otherwise}; \end{array} \right.$$

$$\mu_m = \{A_m, h_m(t)\}, \tag{2}$$

где μ_m - ординарный полумарковский процесс [8, 9, 10]; $A_m = \left\{a_{1(m)}, ..., a_{j(m)}, ..., a_{J(m)}\right\}$ - множество состояний; $h_m(t) = \left[h_{j(m),n(m)}(t)\right] = p_m \otimes f_m(t)$ - полумарковская матрица размером $J(m) \times J(m)$; $p_m = \int_0^\infty h_m(t)\,dt = \left[p_{j(m),n(m)}\right]$ - стохастическая матрица размером $J(m) \times J(m)$; $f_m(t) = \left[\frac{h_{j(m),n(m)}(t)}{p_{j(m),n(m)}(t)}\right] = \left[f_{j(m),n(m)}(t)\right]$ - матрица чистых плотностей распределения.

Структура процесса (2) показана на рис. 1 а. Подобные процессы принадлежат категории эргодических полумарковских процессов. процессы μ_m, $1 \leqslant m \leqslant M$, функционируют одновременно, и для правильного управления системой в целом необходимо сформировать модель сложного полумарковского процесса.

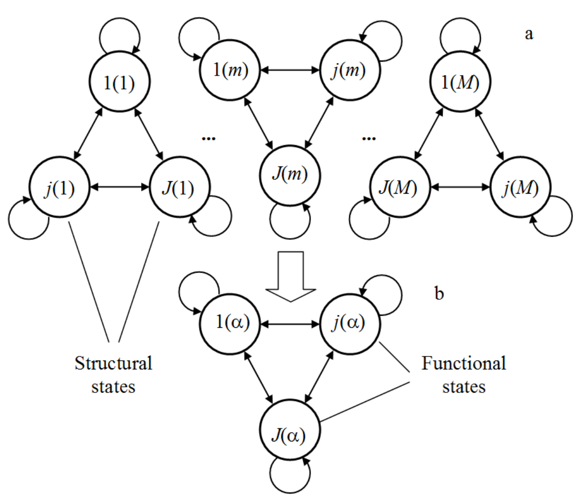


Рис. 2: Параллельный (a) и комплексный (b) полумарковские процессы

Таким образом, выше предложен общий подход к аналитическому описанию M-параллельного полумарковского процесса и показано, что оп сводим к ординарному полумарковскому процессу, вероятностные и временные характеристики которого вычисляются с помощью достаточно простых математических операций. Дальнейшие исследования в данной области могут быть направлены на построение моделей сложных многоконтурных объектов управления, описания функционирования отдельных контуров управления, использование более грубых абстракций, в частности, строго Марковские процессов для описания, а также развитие чисто числовых методов оценки состояний сложного полумарковского процесса.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Tzafestas S.G. Introduction to Mobile Robot Control. Elsevier, 2014. 692 Pp.
2. Kahar1 S., Sulaiman1 R., Prabuwono1 A.S., Akma N. Ahmad S.A., Abu Hassan M.A. A Review of Wireless Technology Usage for Mobile Robot Controller // 2012 International Conference on System Engineering and Modeling (ICSEM 2012). International Proceedings of Computer Science and Information Technology IPCSIT. Vol. 34. Pp. 7 - 12.
3. Cook G. Mobile robots: Navigation, Control and Remote Sensing. Wiley-IEEE Press, 2011. 319 Pp.
4. Siciliano B. Springer Handbook of Robotics. Springer-Verlag Berlin Heidelberg. 2008. 1611 Pp.
5. Larkin E.V., Ivutin A.N. Estimation of Latency in Embedded Real-Time Systems // 3-rd Meditteranean Conference on Embedded Computing (MECO-2014). Budva, Montenegro, 2014. - Pp. 236 - 239.
6. Larkin E.V., Ivutin A.N., Kotov V.V., Privalov A.N. Semi-Markov Modeling of Command Execution by Mobile robots // Interactive Collaborative Robotics (ICR 2016) Budapest, Hungary, Lecture Notes in Artifical Intelligence. Subseries of Lecture notes in Computer Science. Springer, 2016. Pp. 189 - 198.
7. Buttazo G.C. Hard Real-Time Computing Systems. Predictable Scheduling Algorithms and Applications. Springer Science+Buseness Media. LLC 2011. 521 Pp.

УДК 511.325

Суммы значений неглавных характеров по последовательности сдвинутых простых чисел

З. Х. Рахмонов Таджикистан, г. Душанбе, Институт математики им. А. Джураева Академии наук Республики Таджикистан
zarullo-r@rambler.ru

Sums of values of non-principal characters over shifted primes

Z. Kh. Rakhmonov Tajikistan, Dushanbe, A. Juraev Institute of Mathematics, Academy of Sciences of the Republic of Tajikistan
zarullo-r@rambler.ru

Метод оценок тригонометрических сумм с простыми числами И.М. Виноградова позволил ему решить ряд арифметических проблем с простыми числами. Одна из них касается распределения значений неглавного характера на последовательностях сдвинутых простых чисел. В 1943 г. он [1] доказал: *если q — простое нечётное, $(l,q)=1$, $\chi(a)$ – неглавный характер по модулю q, тогда*

$$|T_1(\chi)| \ll x^{1+\varepsilon}\left(\sqrt{\frac{1}{q}+\frac{q}{x}}+x^{-\frac{1}{6}}\right). \qquad (1)$$

При $x \gg q^{1+\varepsilon}$ эта оценка нетривиальна, и из неё следует *асимптотическая формула для числа квадратичных вычетов (невычетов)* $\mod q$ *вида* $p-l$, $p \leqslant x$.

Гольдбаховым числом называют число, представимое в виде суммы двух нечетных простых чисел. Задача о распределении таких чисел в "коротких" арифметических прогрессиях возникла при попытке решить бинарную проблему Гольдбаха. Первый результат условного характера здесь принадлежит Ю.В.Линнику [2]. В предположении расширенной гипотезы Римана он показал, что имеет место неравенство

$$G(D,l) \leq D \ln^6 D,$$

где $G(D,l)$ – наименьшее Гольдбахово число в арифметической прогрессии $Dk+l$, $k=0,1,2,\ldots$. Этот результат был уточнен К.Прахаром и Ю.Вангом. Они при тех же предложениях доказали, что

$$G(D,l) \leq D(\ln D)^{3+\varepsilon}.$$

М.Ютила [3] в 1968 г. доказал безусловную теорему. Он, воспользовавшись оценкой (1), показал, что если D – нечетное простое число, то

$$G(D,l) \ll D^{\frac{11}{8}+\varepsilon}.$$

Затем И.М. Виноградов получил нетривиальную оценку $T_1(\chi)$ при $x \geqslant q^{0,75+\varepsilon}$, где q — простое число [4]. Этот результат был неожиданным. Дело в том, что $T_1(\chi)$ можно записать в виде суммы по нулям соответствующей L — функции Дирихле. Тогда, в предположении справедливости расширенной гипотезы Римана для $T_1(\chi)$, получится нетривиальная оценка, но только при $x \geqslant q^{1+\varepsilon}$.

Казалось, что получилось то, чего не может быть. Ю.В. Линник в 1971 г. писал по этому поводу: *«Весьма важны исследования И.М. Виноградова в области асимптотики характеров Дирихле. Уже в 1952 г. была получена оценка суммы характеров Дирихле от сдвинутых простых чисел $T_1(\chi)$, которая давала степенное понижение по сравнению с x уже при $x > q^{0,75+\varepsilon}$. Эта оценка имеет принципиальное значение, так как по глубине превосходит то, что дает непосредственное применение расширений гипотезы Римана, и, по-видимому, в этом направлении является истиной более глубокой, чем указанная гипотеза (если гипотеза верна). Недавно эту оценку удалось улучшить А.А. Карацубе.»*

А.А. Карацуба в 1968 году разработал метод, который позволил ему получить нетривиальную оценку коротких сумм характеров в конечных полях фиксированной степени [5]. В 1970 году с помощью развития этого метода в соединении с методом И.М. Виноградова он доказал следующее утверждение [5]: *если q — простое, $\chi(a)$ – неглавный характер по модулю q, $x \geqslant q^{\frac{1}{2}+\varepsilon}$, тогда*

$$T_1(\chi) \ll xq^{-\frac{1}{1024}\varepsilon^2}.$$

А.А. Карацуба применил эти оценки для нахождения асимптотических формул для количества квадратичных вычетов и невычетов вида $p+k$ и количества произведений сдвинутых простых чисел вида $p(p'+k)$ в арифметической прогрессии с растущей разностью [5].

Автор обобщил оценку (1) на случай составного модуля и доказал следующее утверждение [8]: *пусть D – достаточно большое натуральное число, χ — неглавный характер по модулю D, χ_q – примитивный характер, порождённый характером χ, q_1 — произведение простых чисел, делящих D, но не делящих число q, тогда*

$$T_1(\chi) \leqslant x \ln^5 x \left(\sqrt{\frac{1}{q} + \frac{q}{x}\tau^2(q_1)} + x^{-\frac{1}{6}}\tau(q_1) \right) \tau(q).$$

Применяя эту оценку, он [6] также доказал, для достаточно большого нечетного натурального числа D имеет место оценка

$$G(D,I) \ll D^{c+\varepsilon},$$

где ε – положительное, сколь угодно малое постоянное число, c — нижняя грань чисел a таких, что для некоторой постоянной $A > 2$,

$$\sum_{\chi\, mod\, D} N(\alpha, T, \chi) \ll (DT)^{2a(1-\alpha)} (\ln DT)^{A}.$$

Из "плотностной" теоремы Хаксли следует, что при $A = 14$ в последней формуле $c \leqslant \frac{6}{5}$.

В 2010 году Дж.Б. Фридландер, К. Гонг, И.Е. Шпарлинский [7] для составного q показали, что нетривиальная оценка суммы $T_1(\chi_q)$ существует, когда x – длина суммы – по порядку меньше q. Они доказали следующее: *для примитивного характера χ_q и всякого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, что для всех $x \geqslant q^{\frac{8}{9}+\varepsilon}$ имеет место оценка*

$$T_1(\chi_q) \ll xq^{-\delta}. \tag{2}$$

Автор [8] в 2013 году доказал, что *если q – достаточно большое натуральное число, χ_q – примитивный характер по модулю q, $(l, q) = 1$, ε – положительное, сколь угодно малое постоянное число, $x \geqslant q^{\frac{5}{6}+\varepsilon}$, тогда*

$$T_1(\chi_q) \ll x \exp\left(-\sqrt{\ln q}\right).$$

В 2017 г. Bryce Kerr в [9] доказал оценку (2), то есть для $T_1(\chi_q)$ получил оценку с степенным понижением уже при $x \geqslant q^{\frac{5}{6}+o(1)}$.

В 2017 году автор [10] доказал теорему: *пусть D – достаточно большое натуральное число, χ — неглавный характер по модулю D, χ_q – примитивный характер по модулю q, порожденный характером χ, q – свободное от кубов, $(l, D) = 1$, ε – положительное, сколь угодно малое постоянное число, тогда при $x \geqslant D^{\frac{1}{2}+\varepsilon}$, имеем*

$$T_1(\chi) \ll x \exp\left(-0,6\sqrt{\ln D}\right).$$

Как уже выше было отмечено, нетривиальные оценки суммы $T_1(\chi)$, χ – неглавный характер по модулю D, D – простое число, были приложены в задачах о наименьшей гольдбаховых числах и о распределении произведений сдвинутых простых чисел в коротких арифметических прогрессиях. При решении этих задач для составного модуля D, наряду с нетривиальными оценками суммы $T_1(\chi)$, для примитивных характеров, нужны такие же оценки и для производных характеров. Поэтому естественно рассматривать задачу о нетривиальной оценке суммы $T_1(\chi)$, χ – неглавний характер по составному модулю D.

Доклад посвящен нетривиальной оценки суммы $T(\chi)$ для всех неглавних характеров по модулю, являющаяся составным числом. Сформулируем основной результат.

Теорема 1. *Пусть D – достаточно большое натуральное число, χ — неглавный характер по модулю D, $(l, D) = 1$, ε – положительное, сколь угодно малое постоянное число. Тогда при $x \geqslant D^{\frac{5}{6}+\varepsilon}$, имеем*

$$T(\chi) = \sum_{n\leqslant x} \Lambda(n)\chi(n-l) \ll x \exp\left(-0,6\sqrt{\ln D}\right),$$

где постоянная под знаком $\ll$ зависит только от ε.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Виноградов И. М. Уточнение метода оценки сумм с простыми числами // Известия АН СССР. Серия математическая. 1943. Том 7, С. 17-34.
2. Линник Ю. В. Некоторые условные теоремы, касающиеся бинарной проблемы Гольдбаха // Известия АН СССР. Серия математическая 1952. Том. 16. № 6. С. 503-520.
3. Jutila M. On the least Goldbach's number in an arithmetical progression with a prime difference // Ann. Univ. Turku., Ser. A I 118, № 5, 8 p. (1968).
4. Виноградов И. М. Новый подход к оценке суммы значений $\chi(p+k)$ // Известия АН СССР. Серия математическая 1952. Том. 16. С. 197-210.
5. Карацуба А. А. Арифметические проблемы теории характеров Дирихле // УМН. 2008. Том 63. Выпуск 4(382). С. 43–92.
6. Рахмонов З. Х. О распределении значений характеров Дирихле // УМН. 1986. Том 41. № 1. С. 201-202.
7. Фридландера Дж. Б., Гонг К., Шпарлинский И. Е. Суммы значений характеров на сдвинутых простых числах // Математические заметки. 2010. Том 88. Выпуск 4. С. 605-619.
8. Рахмонов З. Х. Суммы характеров с простыми числами // Чебышевский сборник. 2014. Том 15. Вывуск 2(50). С. 73-100.
9. B. Kerr, On certain exponential and character sums. — Auastralia: UNSW, PhD Thesis, 2017, 115 p.
10. Рахмонов З. Х. Суммы значений неглавных характеров по последовательности сдвинутых простых чисел // Труды МИАН. 2017. Т. 299. С. 234-260.

УДК 512.542–514.12

К теории паркетогранников[1]

А. В. Тимофеенко Россия, г. Красноярск, Красноярский государственный педагогический университет имени В. П. Астафьева
A.V.Timofeenko62@mail.ru

To the theory of Parquet-Hedron

A. V. Timofeenko Russia, Krasnoyarsk, Krasnoyarsk State Viktor Astafyev Pedagogical University
A.V.Timofeenko62@mail.ru

Изучение паркетогранников началось сразу после завершения классификации выпуклых многогранников с правильными гранями, [1, 2]. На стр. 8 работы [1] её автор отмечает: «Ю. А. Пряхин уже осуществил в основном отыскание на основе излагаемых нами результатов

[1]Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, Правительства Красноярского края, Красноярского краевого фонда поддержки научной и научно-технической деятельности в рамках научного проекта №16–41–240670.

поиск всех простых правильно-гранных многогранников с „условными ребрами “(см.§4)». Полный список этих тел появился шесть лет спустя [3, 4] и сравнительно недавно стали известными все выпуклые тела с правильными или составленными так из правильных многоугольников гранями, что каждая вершина такого многоугольника служит и вершиной грани, [5, 6, 7]. В дополнение к известным правильногранным телам добавилось ещё 78 тел, некоторые грани которых относятся к одному из следующих типов:

$$(3,6,3,6),(3,12,4^2,12),(3,12^2,3,12^2),(3,30,5^3,30),(3,30,5,30,3,30^2). \qquad (1)$$

Паркетогранником назовём выпуклый многогранник, обладающий правильными или паркетными гранями. Напомним, *паркетным* называется выпуклый многоугольник, составленный из конечного и большего единицы числа равноугольных многоугольников, [8]. Поскольку углы паркетного многоугольника такие, как у правильных многоугольников, то каждой вершине паркетного многоугольника можно приписать число сторон правильного многоугольника с углами, равными углу в данной вершине паркетного. «Чередование углов при обходе вершины паркетного многоугольника называем его типом и характеризуем одним символом,» [8]. Например, символ $(3,6,3,6)$ означает, что у многоугольника 4 вершины, углы при которых последовательно равны углам правильных треугольника, шестиугольника, треугольника, шестиугольника. Очевидно, равносторонний многоугольник такого типа сложен из двух правильных треугольников, а представителем типа $(3^2,6^2)$ служит трапеция, сложенная из трёх правильных треугольников. Известно, что существует 23 типа паркетных многоугольников и только четырём из них соответствуют правильные многоугольники. Изображения представителей оставшихся 19 типов можно найти в работе [9]. В свою очередь, из 19 этих типов лишь девяти могут соответствовать равносторонние паркетные многоугольники. Они обладают типами следующего предположения.

Гипотеза. *Кроме известных равнорёберных паркетогранников с правильными гранями или гранями типов (1) существует только четыре равнорёберных паркетогранника. Они являются призмами, в основаниях которых лежат паркетные многоугольники типов* $(4,12,6,12,4,12^2)$, $(6^2,12^2,6^2,12^2)$, $(6,12^2,6,12^2,6,12^2)$ *и* $(6,12^4,6,12^4)$.

Любой из оставшихся десяти типов паркетных многоугольников нельзя представить равноугольным многоугольником. При построении паркетогранников с такими гранями возникает вопрос: «Каким минимальным количеством чисел измеряются длины рёбер паркетогранника, типы некоторых граней которого не могут быть представлены равносторонним многоугольником?» Известен тип паркетогранников, каждый представитель которого имеет не менее четырёх различных рёбер.

Переход от равнорёберных паркетогранников к телам с различными рёбрами требует классификации типов паркетогранников, а не расмотрения их с точностью до подобия. Ещё в 1974 г. замечено, [8], что классификацию типов паркетогранников можно провести по схеме, которая привела к нахождению всех правильногранных выпуклых тел, [1]. Однако путь от схемы до самого доказательства не выглядит коротким. Прежде всего необходимо сформулировать само понятие тип многогранника.

Типом вершины многогранника и, в частности, многоугольника называется упорядоченный набор чисел $n_1,n_2,\dots,n_k$, равных величинам плоских углов k граней, встречающихся в данной вершине при обходе вокруг вершины от ее плоского угла к смежному ее плоскому углу, затем — к смежному со вторым углом третьему плоскому углу вершины. Если $k>3$, то необходимо перейти к четвертому и, быть может, следующему за ним плоскому углу вершины. Числа $n_1,n_2,\dots,n_k$ в обозначении типа вершины паркетогранника будем брать натуральными согласно принятому выше соглашению. Поскольку подобные многогранники мы не различаем, относя к подобию и несобственное (по другой терминологии второго рода) преобразование, меняющее с фиксированным коэффициентом расстояние между точками и их образами, то к одному типу относятся все типы, полученные из данного, циклической перестановкой его чисел, обратной перестановкой и их произведениями таких перестановок. Если на множестве всех типов вершин, равных данному типу, ввести лексикографический порядок, т.е. как при записи натурального числа арабскими цифрами, то наиболее употребительной будет запись наименьшего типа. Согласно сказанному выше, типом многоугольника называется упорядоченный набор типов его вершин, соответствующий расположению вершин при обходе по границе многоугольника.

Типом многогранника называется алгебраическая модель, носителем которой служит упорядоченный набор типов вершин, а каждое множество отношений состоит из упорядоченных наборов номеров вершин грани. Среди 73 выпуклых паркетогранников, составленных из правильногранных пирамид с единичными рёбрами при условии, что рёбра соединений имеют длину не больше двух, [10], 58 тел имеют различные типы. Составленный из четырёх тетраэдров и трёх четырёхугольных пирамид трёхскатный купол M_4 (рис. 3) представлен ниже

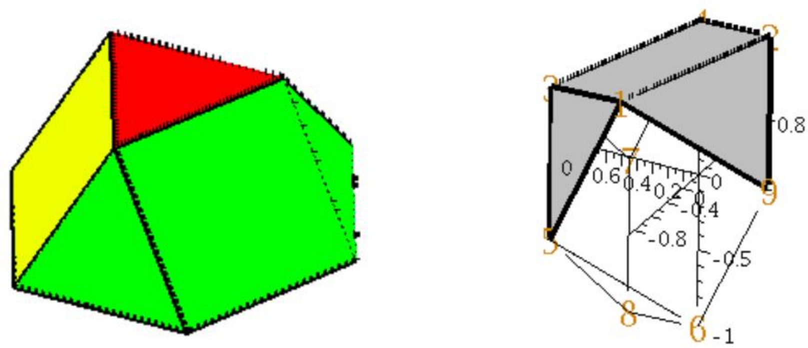


Рис. 3: Закраска соответствует сборке тела M_4 из правильногранных пирамид (слева) и его отличных от 6-угольной фундаментальным граням (справа)

своими алгебраическими моделями, каждая из которых задана фундаментальными вершинами и порождающими группы его симметрий.

Предложение 1. *Множество вершин тела M_4 совпадает с объединением орбит вершин 1 и 2 типов $(3,4,3,4)$ и $(3,4,6)$ соответственно, соединённых ребром $[1,2]$, при действии группы, порождённой отражениями от плоскостей α и β, причём α содержит биссектрисы шестидесятиградусных углов вершины 1, а β перпендикулярна выходящим из вершин 1 и 2 параллельным рёбрам и удалена от ребра $[1,2]$ на половину его длины.*

Предложение 2. *Множество вершин многогранника M_4 равно объединению орбит вершин $(\sqrt{3}/3, 0, \sqrt{6}/3)$ и $(\sqrt{3}/2, 1/2, 0)$ при действии группы, порождённой поворотом*

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ и отражением } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Применение алгебраического моделирования позволяет программировать процесс нахождения всех типов выпуклых паркетогранников.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Залгаллер В. А. Выпуклые многогранники с правильными гранями // Зап. науч. семин. ЛОМИ. 1967. Том 2. С. 5-221.

2. Johnson N. W. Convex polyhedra with regular faces // Canad. J. Math. 1966. Vol. 18. P. 169-200.

3. Иванов Б. А. Многогранники с гранями, сложенными из правильных многоугольников // Укр. геом. сб. 1971. Том 10. С. 20-34.

4. Пряхин Ю. А. О выпуклых многогранниках с правильными гранями // Укр. геом. сб. 1973. Том 14. С. 83-88.

5. Гурин А. М., Залгаллер В. А. К истории изучения выпуклых многогранников с правильными гранями и гранями, составленными из правильных // Тр. С.- Петербург. мат. о-ва. 2008. Том 14. С. 215-294.

6. Тимофеенко А. В. О соединении несоставных многогранников // Алгебра и анализ. 2009. Том 21 № 3. С. 165-209.

7. Тимофеенко А. В. К перечню выпуклых правильногранников // Современные проблемы математики и механики. Том VI. Математика. Выпуск 3. К 100-летию со дня рождения Н.В.Ефимова./ Под ред. И.Х.Сабитова и В.Н.Чубарикова. - М.: Изд-во МГУ, 2011, С. 155-170.

8. Пряхин Ю. А. Выпуклые многогранники, грани которых равноугольны или сложены из равноугольных // Зап. научн. сем. ЛОМИ. 1974. Том 45. Изд-во «Наука», Ленинград. отд., Л. С. 111-112.

9. Тимофеенко А. В. Статья в журнале // Чебышевский сборник. 2011. Том 12 № 2(38). С. 118-126.

10. Тимофеенко А. В., Судак Д. Н., Черепухина А. А. Составленные не более, чем из 16 правильногранных пирамид выпуклые тела с такими как у пирамид или вдвое большими рёбрами // Международная школа-семинар «Современная геометрия и её приложения». Международная научная конференция «Современная геометрия и её приложения»: сборник трудов. – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 2017. С. 140-142.

———————————————————————

УДК 511.3

Многочлены Коробова

А. В. Устинов Россия, г. Хабаровск, Хабаровского отделения ИПМ ДВО РАН
ustinov.alexey@gmail.com

The Korobov Polynomials

A. V. Ustinov Russia, Khabarovsk, The Khabarovsk branch of the IPM DVO RAS
ustinov.alexey@gmail.com

В 2001 году Коробов ввёл новый класс специальных полиномов, которые сегодня известны как полиномы Коробова. Их естественно считать дискретными аналогами полиномов Бернулли. Первоначально Коробов использовал их для интерполяции функций многих переменных, заданных на решётках. В дальнейшем оказалось, что полиномы Коробова обладают интересными арифметическими свойствами, о которых и будет рассказано в докладе.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Коробов Н. М. Специальные полиномы и их приложения. — Диофантовы приближения. Матем. записки, 1996, т. 2, с. 77–89.

2. Коробов Н. М. О некоторых свойствах специальных полиномов. — Чебышевский сборник, т. 1, 40–49, Тула, 2001.

3. Устинов А. В. О формулах суммирования и интерполяции. — Чебышевский сборник, т. 1, 52–71, Тула, 2001.

4. Устинов А. В. Об одном обобщении чисел Стирлинга. — Чебышевский сборник, т. 3, № 2(4), с. 107–122, Тула, 2002.

5. Устинов А. В. Полиномы коробова и теневой анализ. // Чебышевский сборник, 2003. Т. IV. Вып. 4. С.

УДК 512.541

Двойственные абелевы группы ранга 1

А. А. Фомин Россия, г. Москва, Московский Государственный Педагогический Университет
alexander.fomin@mail.ru

Dual abelian groups of rank 1

A. A. Fomin Russia, Moscow, Moscow Pedagogical State University
alexander.fomin@mail.ru

Последовательность целых неотрицательных чисел и символов ∞, занумерованная всеми простыми числами, называется характеристикой. Каждая характеристика $\chi = (m_p)$ определяет кольцо $Z_\chi = \prod\limits_p K_p$, где $K_p = Z_{p^{m_p}}$ является кольцом классов вычетов по модулю p^{m_p}, если $m_p < \infty$, или $K_p = \widehat{Z}_p$ - кольцо целых p-адических чисел, если $m_p = \infty$. Если две характеристики связаны соотношением $\chi = (m_p) \geq \kappa = (k_p)$, т.е. $m_p \geq k_p$ для всех простых чисел p, то естественным образом возникает гомоморфизм колец $Z_\chi \to Z_\kappa$, который называется спуском от большей характеристики к меньшей.

Абелева группа A называется факторно делимой [1], если она содержит свободную подгруппу конечного ранга F так, что факторгруппа A/F является делимой периодической группой, при этом сама группа A не содержит ненулевых делимых периодических подгрупп. Ранг группы F называется рангом факторно делимой группы A.

В аддитивной группе кольца Z_χ рассмотрим сервантную оболочку единицы $1 \in Z_\chi$, то есть подгруппу R^χ, состоящую из всех элементов $a \in Z_\chi$, для которых существуют целые числа $n \neq 0$ и m такие, что $na = m \cdot 1$. Если характеристика χ имеет нулевой тип, т.е. соответствует натуральному числу n, то полагаем $R^\chi = Z_n \oplus Q$, где Q - аддитивная группа рациональных чисел.

Теорема 1. *(Давыдова [2]) Все группы R^χ являются факторно делимыми группами ранга 1. При этом, всякая факторно делимая группа ранга 1 изоморфна некоторой группе R^χ.*

В случае $\chi \geq \kappa$ гомоморфизм спуска $Z_\chi \to Z_\kappa$ определяет гомоморфизм групп $R^\chi \to R^\kappa$. Таким образом, мы получаем спектр гомоморфизмов факторно делимых групп ранга 1.

$$(1) \qquad R^\chi \to R^\kappa, \qquad \chi \geq \kappa.$$

Заметим, что все группы R^χ являются кольцами (подкольцами колец Z_χ для характеристик ненулевого типа). Гомоморфизмы спектра (1) также являются гомоморфизмами колец.

Группа R^χ является группой без кручения тогда и только тогда, когда характеристика χ является идемпотентной, то есть состоит из нулей и бесконечностей. В остальных случаях группы R^χ являются смешанными.

Теперь мы рассмотрим подгруппы аддитивной группы рациональных чисел, которые содержат аддитивную группу целых чисел. Хорошо известно, что такие подгруппы находятся во взаимно однозначном соответствии с характеристиками, а именно $Z \subset R_\chi \subset Q$, где χ является характеристикой единицы в группе R_χ. При этом, если $\chi \geq \kappa$, то $R_\kappa \subset R_\chi$. Таким образом, решетка таких подгрупп изоморфна решетке характеристик.

Мы также получаем спектр гомоморфизмов

$$(2) \qquad R_\kappa \to R_\chi, \qquad \chi \geq \kappa,$$

где гомоморфизмы являются тождественными вложениями.

Следующую теорему, а также другие свойства этих групп, можно найти в [3].

Теорема 2. *Группы R^χ и R_χ являются взаимно двойственными в смысле двойственности [1]. Спектры гомоморфизмов (1) и (2) также являются взаимно двойственными в смысле той же двойственности.*

Заметим, что группа R_χ является подкольцом кольца рациональных чисел Q тогда и только тогда, когда характеристика χ идемпотентна. В этом случае группа R_χ является факторно делимой.

Таким образом, спектры (1) и (2) пересекаются по идемпотентным характеристикам. В пересечении получается следующее.

Пусть $\chi \geq \kappa$ - две идемпотентные характеристики. Обозначим через $\overline{\chi}$ характеристику, которая получается из характеристики χ заменой нулей на бесконечности и бесконечностей на нули. Тогда получаем

$$\overline{\chi} \leq \overline{\kappa}, R^\chi = R_{\overline{\chi}}, R^\kappa = R_{\overline{\kappa}},$$

гомоморфизм $R^\chi \to R^\kappa, \chi \geq \kappa$, спектра (1) совпадает с гомоморфизмом $R_{\overline{\chi}} \to R_{\overline{\kappa}}, \overline{\chi} \leq \overline{\kappa}$ спектра (2).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. A. A. Fomin, W. Wickless, Quotient divisible Abelian groups, Proc. Amer. Math. Soc., 1998, Vol. 126, 45-52.

2. О. И. Давыдова, Факторно делимые группы ранга 1, Фундамент. и прикл., 2007, том 13, выпуск 3, 25-33.

3. A. A. Fomin, On the quotient divisible group theory. 2, J. of Math. Sci., 2018, Vol. 230, No. 3, 457-483.

УДК 511

Бесконечная трансцендентность значений гипергеометрических F-рядов

В. Г. Чирский Россия, г. Москва, Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, Российская академия народного хозяйства и государственной службы при Президенте Российской Федерации, Московский педагогический государственный университет
vgchirskii@yandex.ru

Infinite transcendence of the values of hypergeometric F-series

V. G. Chirskii Russia, Moscow, M. V. Lomonosov Moscow State University, The Russian Presidential Academy of National Economy and Public Administration, Moscow State Pedagogical University
vgchirskii@yandex.ru

Устанавливаются условия, при которых значения в целых алгебраических точках рядов вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\mu_1)_n \dots (\mu_k)n}{(\lambda_1)_n \dots (\lambda_l)_n} ((k-l)z)^{(k-l)n},$$

$k > l, \mu_i, \lambda_i \in \mathbb{Q}$, λ_i — не целые отрицательные числа, представляют собой бесконечно алгебраически независимые почти полиадические числа.

———————————————————————————

1. Группы

УДК 512.54

О многообразиях представлений одного класса конечно порожденных групп

А. Н. Адмиралова Беларусь, г. Минск, Белорусский государственный университет
В. В. Беняш-Кривец Беларусь, г. Минск, Белорусский государственный университет
al.admiralova@gmail.com,benyash@bsu.by

On representation varieties of one class of finitely generated groups

A. N. Admiralova Belarus, Minsk, Belarusian State University
V. V. Beniash-Kryvets Belarus, Minsk, Belarusian State University
al.admiralova@gmail.com,benyash@bsu.by

Пусть $G = \langle g_1, \ldots, g_m \rangle$ — конечно порожденная группа, K — алгебраически замкнутое поле нулевой характеристики. Тогда любое линейное представление $\rho : G \to GL_n(K)$ однозначно определяется набором элементов $\rho(g_1), \ldots, \rho(g_m)$. Эти элементы удовлетворяют всем определяющим соотношениям группы G и, таким образом, имеет место вложение $\rho \mapsto (\rho(g_1), \ldots, \rho(g_m))$ множества $\hom(G, GL_n(K))$ в $GL_n(K)^m$. Образ $\hom(G, GL_n(K))$ относительно этого вложения является аффинным K-многообразием $R_n(G) \subset GL_n(K)^m$, и это многообразие называют многообразием n-мерных представлений группы G ([1]).

О структуре многообразий $R_n(G)$ в общем случае известно немного. Однако для некоторых классов групп такие описания получены. В статьях [2] и [3] описаны многообразия представлений фундаментальных групп компактных ориентируемых и неориентируемых поверхностей. В работе [4] исследованы многообразия представлений групп Баумслага-Солитера для взаимно простых p и q, в [5] результаты работы [4] расширены на случай не взаимно простых показателей p и q. В статье [6] описаны структура и свойства многообразий представлений групп, имеющих копредставление

$$H = \langle x_1, y_1, \ldots, x_g, y_g, t \mid t([x_1, y_1] \ldots [x_g, y_g])^p t^{-1} = ([x_1, y_1] \ldots [x_g, y_g])^q \rangle,$$

где $g \geqslant 2$, а p и q взаимно просты.

В предлагаемом сообщении мы рассматриваем следующий класс групп

$$G = \langle a_1, \ldots, a_s, b_1, \ldots, b_k, x_1, y_1, \ldots, x_g, y_g, t \mid a_1^{m_1} = \ldots = a_s^{m_s} = 1,\ tU^p t^{-1} = U^q \rangle, \qquad (1)$$

где $U = [x_1, y_1] \ldots [x_g, y_g] W(a_1, \ldots, a_s, b_1, \ldots, b_k)$, $g \geqslant 2$, $m_i \geqslant 2$ для $i = 1, \ldots, s$ и $W(a_1, \ldots, a_s, b_1, \ldots, b_k)$ — приведенное слово (возможно, пустое) от образующих $a_1, \ldots, a_s$, $b_1, \ldots, b_k$.

Для формулировки основных результатов нам необходимы следующие утверждения. Далее через E_n мы будем обозначать единичную матрицу порядка n.

Предложение 1. *Пусть C_l — циклическая группа порядка l. Для произвольного разбиения $\alpha = (k_1, \ldots, k_l)$ числа n на l неотрицательных частей положим*

$$V_\alpha = \left\{ X Z_\alpha X^{-1} \mid X \in GL_n(K) \right\},$$

где $Z_\alpha = \operatorname{diag}(E_{k_1}, \gamma E_{k_2}, \ldots, \gamma^{l-1} E_{k_l})$. Тогда V_α является неприводимой компонентой многообразия представлений $R_n(C_l)$ размерности $n^2 - \sum_{i=1}^{l} k_i^2$. При этом $V_\alpha \cap V_\beta = \varnothing$ при $\alpha \neq \beta$ и $R_n(C_l) = \cup V_\alpha$, где объединение берется по всем возможным разбиениям α. Общее число неприводимых компонент $R_n(C_l)$ равно C_{n+l-1}^{l-1}.

Обозначим через u_i и v_i сумму показателей при a_i И b_i в слове $W(a_1, \ldots, a_s, b_1, \ldots, b_k)$ соответственно. Пусть d — наибольший общий делитель чисел $v_1, \ldots, v_k$, если не все v_i равны нулю, и пусть $d = 1$ в противном случае. Пусть m — наименьшее общее кратное чисел $m_1, \ldots, m_s$, ε — первообразный корень из единицы степени m и $F = \mathbb{Q}(\varepsilon)$. Далее, пусть $\Omega(p, q)$ множество таких матриц $A \in GL_n(K)$, что A^p и A^q сопряжены, и пусть $A \in \Omega(p, q)$.

Для каждого i, $1 \leqslant i \leqslant m_i$, выберем разбиение $\alpha_i = (k_{i,1}, \ldots, k_{i,m_i})$ числа n на m_i неотрицательных слагаемых. Пусть $V_{\alpha_i} = \left\{XZ_{\alpha_i}X^{-1} \mid X \in GL_n(K)\right\}$ соответствующая неприводимая компонента $R_n(C_{m_i})$, определенная в предложении 1. Рассмотрим многообразие

$$T(\alpha_1, \ldots, \alpha_s, A) = \{(A_1, \ldots, A_s, B_1, \ldots, B_k, X_1, Y_1, \ldots, X_g, Y_g) \in \\ V_{\alpha_1} \times \ldots \times V_{\alpha_s} \times GL_n(K)^{k+2g} \mid [X_1, Y_1] \ldots [X_g, Y_g] W(A_1, \ldots, A_s, B_1, \ldots, B_k) = A\}$$

Предложение 2. *1) Если не все v_i равны нулю, то $T(\alpha_1, \ldots, \alpha_s, A)$ имеет d неприводимых компонент, которые мы обозначим $T(\alpha_1, \ldots, \alpha_s, A, i)$, $1 \leqslant i \leqslant d$. Каждая из этих компонент является F-рациональным многообразием размерности $(2g+s+k-1)n^2 - \sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{m_i}$.*

2) Если все v_i равны нулю, то $T(\alpha_1, \ldots, \alpha_s, A)$ является пустым множеством в случае $\prod_{i=1}^{s} \det Z_{\alpha_i}^{u_i} \neq \det A$, и является неприводимым F-рациональным многообразием размерности $(2g + s + k - 1)n^2 - \sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{m_i} +1$ в случае $\prod_{i=1}^{s} \det Z_{\alpha_i}^{u_i} = \det A$. В случае непустоты будем обозначать это многообразие $T(\alpha_1, \ldots, \alpha_s, A, 1)$.

Для каждого i, $1 \leqslant i \leqslant d$, рассмотрим морфизм

$$\Psi_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_s,A,i)} : T(\alpha_1, \ldots, \alpha_s, A, i) \times GL_n(K) \times Z(A) \to GL_n(K)^{s+k+2g+1}, \\ (A_1, \ldots, A_s, B_1, \ldots, B_k, X_1, Y_1, \ldots, X_g, Y_g, C, z) \mapsto C(A_1, \ldots, A_s, B_1, \ldots, B_k, X_1, Y_1, \ldots, X_g, Y_g, z_0 z),$$

где z_0 — некоторая фиксированная матрица, такая что $z_0 A^p z_0^{-1} = A^q$, а $Z(A)$ обозначает централизатор матрицы A. Пусть $W(\alpha_1, \ldots, \alpha_s, A, i)$ обозначает замыкание образа морфизма $\Psi_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_s,A,i)}$ в топологии Зарисского. Справедлива следующая

Теорема 1. *Многообразия $W(\alpha_1, \ldots, \alpha_s, A, i)$ содержатся в $R_n(G)$ и являются неприводимыми компонентами $R_n(G)$. Этими многообразиями исчерпываются все неприводимые компоненты $R_n(G)$. Каждое многообразие $W(\alpha_1, \ldots, \alpha_s, A, i)$ является F-рациональным многообразием размерности $\dim T(\alpha_1, \ldots, \alpha_s, A, i) + n^2 + \dim Z(A^h) - \dim Z(A)$, где $h =$ НОД(p, q), а размерности $T(\alpha_1, \ldots, \alpha_s, A, i)$ определены в предложении 2.*

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Lubotzky A., Magid A. Varieties of representations of finitely generated groups // Memoirs AMS. 1985. V. 58, N 336. P. 1–116.

2. Benyash-Krivetz V.V., Rapinchuk A.S., Chernousov V.I. Representation varieties of the fundamental groups of compact orientable surfaces // Israel J. Math. 1996. V. 93. P. 29–71.

3. Беняш-Кривец В.В., Черноусов В.И. Многообразия представлений фундаментальных групп компактных неориентируемых поверхностей // Матем. сборник. 1997. Т. 188, № 7. С. 47–92.

4. Беняш-Кривец В.В., Говорушко И.О. Многообразия представлений и характеров групп Баумслага-Солитера. // Алгебра, геометрия и теория чисел. Сборник статей. К 75-летию со дня рождения академика Владимира Петровича Платонова. Труды МИАН. 2016. Т. 292. МАИК, М. С. 26–42.

5. Беняш-Кривец В.В., Говорушко И.О. Многообразия представлений групп Баумслага-Солитера в случае не взаимно простых показателей // Весцi НАН Беларуси. Сер. фiз.-мат. навук. 2016. № 1. С. 52–56.

6. Адмиралова А. Н., Беняш-Кривец В. В. О многообразиях представлений и характеров одного класса групп с одним соотношением. // Вестник БГУ, сер. 1. 2016. № 3. С. 166–172.

———————————————————————————

УДК 519.4

Решение проблемы сопряженности слов в некотором классе подгрупп групп Артина с древесной структурой

В. Н. Безверхний Россия, г. Москва, Академия гражданской защиты МЧС России
Н. Б. Безверхняя Россия, г. Москва, Академия гражданской защиты МЧС России
vnbezv@rambler.ru

Solution of the problem of conjugacy words in certain class subgroups of the Artin's group with three-structure

V. Bezverhniy Russia, Moscow, Academy of Civil Defence EMERCOM of Russia
N. Bezverhnyaya Russia, Moscow, Academy of Civil Defence EMERCOM of Russia
vnbezv@rambler.ru

Пусть – $S = \{s_1, s_2, \ldots s_n\}$ конечное множество слов, и $M = (m_st), s, t \in S$ – симметрическая матрица Кокстера с индексами из множества S, такая, что $m_st = 1$ для любого $s \in S, m_{st} = m_{ts} \in \{2, 3, \ldots, \infty\}$ для всех $s, t \in S, s \neq t$.

Свяжем с матрицей Кокстера конечный граф Γ, между вершинами которого и множеством S установлено взаимно однозначное соответствие, причем если две вершины s, t графа Γ соединены ребром, то данному ребру соответствует элемент m_{st} из M, если вершины s, t не соединены ребром, то данной паре соответствует $m_{st} = \infty$.

С графом Кокстера Γ связана группа Артина G_Γ со множеством образующих S и системой определяющих соотношений $st^{m_{st}} = ts^{m_{ts}}$, при $s \neq t, m_{st} \neq \infty$, где $< st >= stst \ldots$ слово из чередующихся образующих s, t длины m_{st}.

Зададим копредставление группы G_Γ

$$G_\Gamma = \langle s_1, \ldots, s_n; \langle st^{m_{st}} \rangle = \langle ts \rangle^{m_{ts}}, s, t \in S, s \neq t, m_{st} \neq \infty \rangle \tag{1}$$

Пусть G_Γ группа Артина с конечной системой образующих S и копредставлением 1. Рассмотрим подгруппу в G_Γ порожденную образующими $S_i^2, i = \overline{1, n}$ и обозначим через $N_\Gamma = \langle \{S_i^2\}, i = \overline{1, n} \rangle^{G_\Gamma}$ - нормальный делитель в G_Γ. Тогда фактор-группа G_Γ / N_Γ есть группа Кокстера, соответствующая группе G_Γ и имеющая следующее копредставление

$$\overline{G_\Gamma} = \langle S; S_i^2 = 1, \forall s \in S, \langle s_x t \rangle^{m_{st}} = \langle ts \rangle^{m_{ts}}, s, t \in S \rangle \tag{2}$$

Если группа $\overline{G_\Gamma}$ – конечна, то соответствующая ей группа G_Γ называется группой Артина конечного типа.

Э. Брискорн и К. Сайто, используя идеи Гарсайда [6], доказали разрешимость проблемы равенства и сопряженности слов в группах Артина конечного типа [5].

П. Шупп и К. Аппель определили широкий класс групп Артина (Кокстера) большого и экстрабольшого типа.

Группа Артина G_Γ есть группа Артина большого типа с $S = \{s_1, s_2, \dots s_n\}$ системой образующих, если $\forall s, t \in S, s \neq t, m_{st} \geqslant 3$; и экстрабольшого типа, если $\forall s, t \in S, s \neq t, m_{st} \geqslant 4$. В этих классах групп рядом авторов были решены проблемы равенства и сопряженности слов [1],[2],[3],[4].

Если граф Γ группы Артина G_Γ является дерево-графом, то группа Артина называется группой Артина с древесной структурой.

Если G_Γ группа Артина с древесной структурой, то соответствующая ей группа Кокстера называется группой Кокстера с древесной структурой.

Пусть $S = \{s_1, s_2, \dots s_n\}$ образующие группы Артина (Кокстера) с древесной структурой G_Γ, тогда компоненты симметрической матрицы Кокстера, соответствующей группе G_Γ,$M = \{m_{st}\}, s, t \in S, s \neq t, m_{st} \in \{2, 3, 4, \dots\}$

Определение 1. *Будем говорить, что в группе G разрешима проблема сопряженности слов, если существует алгоритм, позволяющий установить для любых слов $w, v \in G$ разрешимо ли в G уравнение $zwz^{(-1)} = v, z \in G$.*

Теорема 1. *В группе Артина (Кокстера) с древесной структурой разрешима проблема сопряженности слов. Основной целью статьи является доказательство разрешимости проблемы сопряженности слов в N_Γ - подгруппах группы Артина G_Γ с древесной структурой.*

Теорема 2. *Пусть G_Γ группа Артина с древесной структурой и N_Γ подгруппа группы G_Γ. Тогда существует алгоритм, позволяющий для любых слов $w, v \in N_\Gamma$ установить, сопряжены ли они в N_Γ.*

Как было указано в теореме 1., в группах Артина с древесной структурой разрешима проблема сопряженности слов.

Пусть $w, v \in N_\Gamma$ где G_Γ группа Артина с древесной структурой и пусть w, v сопряжены в G_Γ то есть существует слово z из G_Γ такое, что

$$z^{(-1)}wz = v \tag{3}$$

Лемма 1. *Пусть G_Γ конечно порожденная группа Артина и N_Γ подгруппа группы G_Γ. Тогда для любого $w \in G_\Gamma$ можно эффективно установить принадлежит ли w подгруппе N_Γ.*

Пусть z удовлетворяющий 3, не принадлежит N_Γ то есть $\theta(w) \neq 1$ где θ гомоморфизм группы G_Γ на группу $\overline{G_\Gamma} = G_\Gamma / N_\Gamma$.

Теорема 3. *В группе Артина с древесной структурой централизатор любого элемента $w \in G_\Gamma$ есть конечно порожденная подгруппа и существует алгоритм, выписывающий образующие этого централизатора.*

Следствие 1. *В группе Кокстера $\overline{G_\Gamma}$ с древесной структурой централизатор любого элемента $w \in \overline{G_\Gamma}$ есть конечно порожденная подгруппа и существует алгоритм, выписывающий образующие централизатора $C_{\overline{G_\Gamma}}(w)$.*

Лемма 2. *В группах Артина (Кокстера) с древесной структурой разрешима проблема вхождения в конечно порожденную подгруппу.*

Пусть $C_{G_\Gamma}(w)$ централизатор элемента $w \in G_\Gamma$

Лемма 3. *Пусть F какое-то решение уравнения $z^{(-1)}wz = v$, то есть*

$$F^{(-1)}wF = v, w, v \in G_\Gamma$$

тогда множество всех решений данного уравнения образует смежный класс $F^{(-1)}C_{G_\Gamma}(w)$ подгруппы $C_{G_\Gamma}(w)$ в G_Γ.

Рассмотрим гомоморфизм $\theta : G_\Gamma \to G_\Gamma/N_\Gamma = \overline{G_\Gamma}$ и пусть $\theta(C_{G_\Gamma})(w))$ и $\Theta(z_0)$ где z_0 фиксированное решение уравнения $z^{(-1)}wz = v$ образы соответственно $C_{G_\Gamma}(w)$ и z_0 в G_Γ.

Лемма 4. *Пусть z_0 решение уравнения $z^{(-1)}wz = v$ где w, v принадлежат N_Γ. Слова w, v сопряжены в N_Γ. тогда и только тогда, когда $\theta(z_0) \in \theta(C_{G_\Gamma}(w)$.*

Лемма 4 завершает доказательство теоремы.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Appel K., Schupp P. Artin groups and infimte Coxter groups // Ivent. Math. 1983. № 72. P. 201-220.
2. Appel K., On Artin groups and Coxter groups of large type// Contempor Math. 1984 № 33. P. 50-78.
3. Безверхний В. Н. Решение проблемы сопряженности слов в группах Артина (Кокстера) большого типа // Алгоритмические проблемы теории групп и полугрупп. Тула: ТГПИ. 1986. С. 26-61.
4. Безверхний В. Н. Решение проблемы обобщенной сопряженности слов в группах Артина большого типа // Фундаментальная и прикладная математика.1999. Том 5 № 1. С. 1-38.
5. Брискорн Э., Сайто К. Группы Артина и группы Кокстера // Математика. 1974. Том 18 № 6. С. 56-79.
6. Garsid F. A. The braid group and other groups//Quart. Math, Oxford ser(2). 1969. № 20. P. 235-254.

———————————————————————————

УДК 512.54

О подгруппах в группах Артина с древесной структурой

В. Н. Безверхний Россия, г. Москва, Академия гражданской защиты МЧС России
И. В. Добрынина Россия, г. Тула, Тульский государственный педагогический университет имени Л. Н. Толстого
vnbezv@rambler.ru, dobrynirina@yandex.ru

On subgroups in Artin groups with tree structure

V. N. Bezverkhnii Russia, Moscow, Academy of Civil Defence EMERCOM of Russia
I. V. Dobrynina Russia, Tula, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University
vnbezv@rambler.ru, dobrynirina@yandex.ru

Рассмотрим конечно порожденную группу Артина G, заданную копредставлением

$$G =< a_1, ..., a_n; \langle a_i a_j \rangle^{m_{ij}} = \langle a_j a_i \rangle^{m_{ji}}, i, j = \overline{1, n}, i \neq j >,$$

где $\langle a_i a_j \rangle^{m_{ij}}$ – слово длины m_{ij}, состоящее из m_{ij} чередующихся букв a_i и a_j, $i \neq j$, m_{ij} – число, соответствующее симметрической матрице Кокстера (m_{ij}): $m_{ii} = 1, m_{ij} \in \mathbb{N} \setminus \{1\} \cup \{\infty\}$, $i \neq j$. В случае $m_{ij} = \infty$ определяющего соотношения между образующими a_i, a_j нет.

Добавляя к определяющим соотношениям группы Артина G соотношения вида $a_i^2 = 1$, $i = \overline{1, n}$, получим представление группы Кокстера.

Группа Артина (Кокстера) называется группой Артина (Кокстера) большого типа, если $m_{ij} \geq 3$ для любых $i \neq j$, и группой Артина (Кокстера) экстрабольшого типа, если $m_{ij} > 3$ для любых $i \neq j$.

Если группе Артина G соответствует конечный дерево-граф Γ такой, что вершинам графа Γ соответствуют образующие $a_i, i = \overline{1,n}$, а всякому ребру e, соединяющему вершины с образующими a_i и a_j, соответствует соотношение $\langle a_i a_j \rangle^{m_{ij}} = \langle a_j a_i \rangle^{m_{ji}}$, то мы имеем группу Артина с древесной структурой.

Группу Артина с древесной структурой G можно представить как древесное произведение двупорожденных групп Артина, объединенных по бесконечным циклическим подгруппам. При этом от графа Γ группы G перейдем к графу $\overline{\Gamma}$ следующим образом: вершинам графа $\overline{\Gamma}$ поставим в соответствие группы Артина на двух образующих

$$G_{ij} =< a_i, a_j; \langle a_i a_j \rangle^{m_{ij}} = \langle a_j a_i \rangle^{m_{ji}} >,$$

а всякому ребру $\overline{e}$, соединяющему вершины, соответствующие G_{ij} и G_{jk} – циклическую подгруппу $< a_j >$.

К центральной теме комбинаторной теории групп относится изучение свойств подгрупп данных групп. Для групп Кокстера экстрабольшого типа, соответствующих матрице Кокстера $(m_{ij}), i, j = \overline{1,n}$, с $m_{ij} \geq 3k+1, i \neq j$, И. Каповичем и П. Шуппом доказано [1], что всякая k-порожденная подгруппа без кручения является свободной.

Для групп Кокстера с древесной структурой свободные подгруппы изучались авторами в работе [2], где доказано, что всякая конечно порожденная подгруппа без кручения группы Кокстера с древесной структурой свободна.

Рассмотрим вопрос о свободных подгруппах в группах Артина с древесной структурой. Прежде всего отметим ряд важных утверждений.

В [3] доказана разрешимость проблем равенства и сопряженности слов в группах Артина с древесной структурой.

В работе [4] В. Н. Безверхним и О. В. Платоновой доказана следующая теорема:

Теорема 1. *Группа Артина G с древесной структурой свободна от кручения.*

Рассмотрим группу Артина на двух образующих

$$G_{ij} =< a_i, a_j; \langle a_i a_j \rangle^{m_{ij}} = \langle a_j a_i \rangle^{m_{ji}} > .$$

Пусть $m_{ij} = 2$, тогда G_{ij} абелева.

Пусть $m_{ij} \geq 3$, тогда G_{ij} является группой Артина большого типа и ее строение описано в работе [5]:

если $m_{ij} = 2k+1$, то $G_{ij} \simeq < x, y; x^{2k+1} = y^2 >$;

если $m_{ij} = 2k$, то $G \simeq < t, x; t x^k t^{-1} = x^k >$.

Теорема 2. *Пусть H – конечно порожденная подгруппа группы Артина G с древесной структурой, причем для любого $g \in G$ и любой подгруппы $G_{ij}, i \neq j$, выполнено равенство $H \cap g G_{ij} g^{-1} = E$, где E – единичная подгруппа. Тогда H является свободной.*

Лемма 1. *Существует алгоритм, позволяющий для любой конечно порожденной подгруппы H группы Артина G с древесной структурой и любой циклической подгруппы $< w >$ из группы Артина G_{ij} найти образующие пересечения $H \cap < w >$.*

Лемма 2. *Существует алгоритм, позволяющий для любого слова $v \in G$ и любой конечно порожденной подгруппы H выяснить, пусто или нет пересечение $vH \cap < w >$, где $< w >$ – произвольная циклическая подгруппа из G_{ij}.*

Теорема 3. *Пусть H – конечно порожденная подгруппа группы Артина G с древесной структурой, причем пересечение H с любой подгруппой, сопряженной $< a_i >, i = \overline{1, n}$, есть единичная подгруппа. Тогда существует алгоритм, описывающий процесс построения свободных подгрупп в H.*

В доказательстве основных результатов используются идеи В. Н. Безверхнего [6] о приведении множества образующих конечно порожденной подгруппы к специальному множеству:

Теорема 4. *Пусть группа $G = \langle \prod_{s=1}^{n} *G_s; \varphi_{ji}(U_{ij}) = U_{ji} \rangle$ есть древесное произведение групп, объединенных по изоморфным подгруппам $U_{ij} < G_i$ и $U_{ji} < G_j$ с помощью фиксированного набора конструктивных изоморфизмов $\{\varphi_{ij}\} : \varphi_{ji}(U_{ij}) = U_{ji}$. Тогда, если подгруппы U_{ij} и U_{ji} обладают условием максимальности и в сомножителях разрешимы*

1) проблема вхождения;

2) проблема пересечения классов смежности любой конечно порожденной подгруппы $H < G_i$ с подгруппой $U_{ij} < G_i$;

3) существует алгоритм, выписывающий образующие пересечения любой конечно порожденной подгруппы $H < G_i$ с подгруппой $U_{ij} < G_i$,

то существует алгоритм, преобразующий любое конечное множество слов W из G в специальное, порождающее подгруппу, совпадающую с подгруппой, порожденной множеством слов W.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Kapovich I., Schup P. Bounded rank subgroups of Coxeter groups, Artin groups and one-relator groups with torsion // London Math. Soc. 2004. Vol. 88. P. 89-113.

2. Безверхний В. Н., Добрынина И. В. О проблеме свободы в группах Кокстера с древесной структурой // Известия Тульского государственного университета. Естественные науки. 2014. № 1-1. С. 5-13.

3. Безверхний В. Н., Карпова О. Ю. Проблемы равенства и сопряженности слов в группах Артина с древесной структурой // Известия Тульского государственного университета. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2006. Том 12 № 1. С. 67-82.

4. Безверхний В. Н., Карпова О. Ю. О кручении в группах Артина с древесной структурой // Известия Тульского государственного университета. Естественные науки. 2008. № 1. С. 6-17.

5. Безверхний В. Н. Решение проблемы обобщенной сопряженности слов в группах Артина большого типа // Фундаментальная и прикладная математика. 1998. Том 5 № 1. С. 1-39.

6. Безверхний В. Н. О пересечении подгрупп в HNN-группах // Фундаментальная и прикладная математика. 1998. Том 4 № 1. С. 199-222.

УДК 519.4

Решение проблемы обобщенной сопряженности слов в свободном произведении

В. Н. Безверхний Россия, г. Москва, Академия гражданской защиты МЧС России
Е. С. Логачева Россия, г. Тула, Тульский государственный педагогический университет имени Л. Н. Толстого
vnbezv@rambler.ru, Logacheva-es@mail.ru

Proved of problem generalized conjugacy words in free product free groups with amalgamation

V. N. Bezverhnii Russia, Moscow, Academy of civil protection of EMERCOM of Russia
E. S. Logacheva Russia, Tula, Tula state pedagogical university by Leo Tolstoy
vnbezv@rambler.ru, Logacheva-es@mail.ru

В работе рассматривается проблема обобщенной сопряженности слов в свободном произведении свободных групп с циклическим объединением.

Пусть свободные $F_m = \langle a_1, \ldots, a_m \rangle, F_n = \langle b_1, \ldots, b_n \rangle$ группы рангов m и n соответственно. Рассмотрим свободные произведения F_m, F_n, объединенных по циклическим подгруппам. Пусть $C_1 = \langle u^p(a_\nu) \rangle < F_m$, $C_2 = \langle v^q(b_\mu) \rangle < F_n$ изоморфные циклические подгруппы, где $u(a_\nu)$ и $v(b_\mu)$ не являются истинными степенями в соответствующих свободных группах. Тогда группа $G = F_m *_{C_1=C_2} F_n$ имеет копредставление

$$G = \langle a_1, \ldots, a_m, b_1, \ldots, b_n; u^p(a_\nu) = v^q(b_\mu) \rangle. \tag{1}$$

Группы F_m, F_n будем называть сомножителями группы G. Обозначим через C подгруппы C_1 и C_2. Тогда свободное произведение (1) будем записывать следующим образом $G = F_m *_C F_n$, где $u(a_\nu) = u(a_1, \ldots, a_m)$, $v(b_\mu) = v(b_1, \ldots, b_n)$.

В группе G разрешима проблема сопряженности слов [1].

Определение 1. *Будем говорить, что в группе B разрешима проблема обобщенной сопряженности слов, если существует алгоритм, позволяющий для любых двух множеств слов $\{w_i\}, \{v_i\}$, $i = \overline{1,n}$, принадлежащих B определить, существует ли $z \in B$ такое, что*

$$z^{-1}w_1 z = v_1, z^{-1}w_2 z = v_2, ..., z^{-1}w_n z = v_n. \tag{2}$$

Теорема 1. [3] *В свободной группе разрешима проблема обобщенной сопряженности слов.*

Для любого $w \in F_m *_C F_n$ имеет место следующее представление $w = g_1 g_2 \ldots g_s$, где для любых i, $1 \leqslant i \leqslant s$, g_i принадлежит F_m либо F_n, g_i не содержится в объединяемой подгруппе и любые два соседних g_i , g_{i+1} принадлежат разным сомножителям, которое называется нормальным представлением w, число s будем называть слоговой длиной w и обозначать $\|w\| = s$. Слово $w = g_1 g_2 \ldots g_s$, называется циклически несократимым, если g_1 и g_s принадлежат разным сомножителям группы G.

Лемма 1. *Пусть в группе $G = F_m *_C F_n$ имеет место равенство $z^{(-1)} h_1 z = h_2$, где $h_1, h_2 \in C$, тогда $h_1 = h_2$ и $z \in \langle u(a_\nu), v(b_\mu) \rangle$.*

Лемма 2. *Пусть* $\{w_i\}, \{v_i\}$, $i = \overline{1,k}$, *два множества слов из группы* $G = F_m *_C F_n$, *сопряженные в* G, *то есть существует* $z \in G$ *такое, что* $\Lambda_{i=1}^{k}(z^{-1}w_i z = v_i)$. *Тогда*

1. Если каждое из $\{w_i\}, \{v_i\}$, $i = \overline{1,k}$, *сопряжено в* G *соответственно с* h_i, h'_i, *принадлежащих объединяемой подгруппе,* $w_i = s_i^{-1} h_i s_i$, $v_i = t_i^{-1} h'_i t_i$, *тогда* $h_i = h'_i$.

2. Если для всех i, $1 \leqslant i \leqslant k$, $w_i \in F_m$, $v_i \in F_m$ *(либо одновременно принадлежат* F_n*) и не сопряжены с элементами из объединяемой подгруппы, то множества* $\{w_i\}, \{v_i\}$ *сопряжены в* F_m *(*F_n*).*

3. Если для всех i, $1 \leqslant i \leqslant k$, $w_i = s_i^{-1} w_{i_0} s_i$, $v_i = t_i^{-1} v_{i_0} t_i$, *где* $\|w_{i_0}\| = \|v_{i_0}\| > 1$, w_{i_0}, v_{i_0} *циклически несократимы, тогда для всех* i, $1 \leqslant i \leqslant k$, *существует* $w_{i_0}^*$ *циклическая перестановка* w_{i_0}, *сопряженная с* v_{i_0}.

Данная лемма является обобщением теоремы Магнуса [2] для группы $F_m *_C F_n$.

Теорема 2. *В группе* $G = F_m *_C F_n$ *разрешима проблема обобщенной сопряженности слов.*

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Lipschuts S. The generalisation Dehn's result on the conjugacy problem // Prog. Amer. Math. Sjc. 1966. V 150. P. 759-762.

2. Магнус В., Каррас А., Солитер Д. Комбинаторная теория групп. — М: Наука, 1974. 456 с.

3. Линдон Р., Шупп П. Комбинаторная теория групп. — М: Мир, 1980. 445 с.

УДК 519.4

Сопряженность слов в некотором классе групп Артина

В. Н. Безверхний Россия, г. Москва, Академия гражданской защиты МЧС России
А. Угаров Россия, г. Тула, Тульский государственный педагогический университет имени Л. Н. Толстого
vnbezv@rambler.ru

About the problem conjugacy words in the some classes groups Artin

V. N. Bezverhnii Russia, Moscow, Academy of Civil Defence EMERCOM of Russia
A. Ugarov Russia, Tula, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University
vnbezv@rambler.ru

Пусть – $S = \{s_1, s_2, \dots s_n\}$ конечное множество слов, и $M = (m_{st}), s, t \in S$– симметрическая матрица Кокстера с индексами из множества S, такая, что $m_{ss} = 1$ для любого $s \in S, m_{st} = m_{ts} \in \{2, 3, \dots, \infty\}$ для всех $s, t \in S, s \neq t$.

Свяжем с матрицей Кокстера конечный граф Γ, между вершинами которого и множеством S установлено взаимно однозначное соответствие, причем если две вершины s, t графа Γ соединены ребром, то данному ребру соответствует элемент m_{st} из M, если вершины s, t не соединены ребром, то данной паре соответствует $m_{st} = \infty$. Назовем так определенный граф графом Кокстера.

С графом Кокстера Γ связана группа Артина G_Γ со множеством образующих S и системой определяющих соотношений $< st >^{m_{st}} = < ts >^{m_{ts}}$, при $s \neq t$, $m_{st} \neq \infty$ где $< st >= stst\dots$ слово из чередующихся образующих s, t длины m_{st}.

Группа Артина G_Γ есть группа Артина экстрабольшого типа, если $\forall s,t \in S, s \neq t, m_{st} \geq 4$ [1].

В. Н. Безверхним был определен класс групп Артина с древесной структурой. Если граф Γ группы Артина G_Γ является дерево-графом, то группа Артина называется группой Артина с древесной структурой. Для групп Артина с древесной структурой элементы матрицы Кокстера m_{st},s,$t \in S$ принадлежат множеству $\{2, 3, \ldots, \infty\}$

Рассмотрим группу G с копредставлением $G_1 = \langle a_1, a_2, \ldots, a_k | \langle a_i a_j \rangle_{ij}^{m} \rangle = \langle a_j a_i \rangle^{m_{ij}} \rangle$ которой соответствует дерево-граф Γ, $m_{ij} \in \{2, 3, \ldots, \infty\}$. Заметим, что если вершины графа Γ не соединены ребром, то данным вершинам соответствует $m = \infty$.

Пусть $G_2 = \langle b_1, \ldots, b_n;\ \langle b_i b_j \rangle^{m_{ij}} = \langle b_j b_i \rangle^{m_{ji}} \rangle$, где $m_{ij} \geqslant 4$ при $i \neq j$ есть группа Артина экстрабольшого типа. Рассмотрим группу $G = G_1 *_{a=b} G_2$ являющуюся свободным произведением групп G_1, G_2 объединенных по циклическим подгруппам $\langle a \rangle \subset G_1, \langle b \rangle \subset G_2$,где a, b образующие соответствующих групп.

Лемма 1. *В каждой из групп G_1, G_2 – разрешимы проблемы равенства и сопряженности слов [1],[2].*

Лемма 2. *В группе Артина G_1 с древесной структурой [2] и в группе Артина G_2 экстрабольшого типа разрешима проблема вхождения в циклическую подгруппу.[3]*

Теорема 1. *В группе $G = G_1 *_{a=b} G_2$ разрешима проблема равенства слов.*

Используя диаграммы [4] сопряженности слов над группой $G = G_1 *_{a=b} G_2$, представляющие собой последовательность поддиаграмм каждая из которых является диаграммой над одним из сомножителей G, объединенных между собой по ребру с меткой из объединяемой подгруппы, доказывается следующая

Теорема 2. *В группе $G = G_1 *_{a=b} G_2$, являющейся свободным произведением группы Артина с древесной структурой и группы Артина экстра большого типа, объединенных по образующим a, b этих групп разрешима проблема сопряженности слов.*

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Appel K., Schupp P. Artin groups and infimte Coxter groups // Ivent. Math. 1983. № 72. P. 201-220.

2. Безверхний В. Н. Карпова О. Ю. Проблема вхождения в циклическую подгруппу в группах Артина с древесной структурой. // Чебышевский сборник. Тула. ТГПУ. 2008. Том 9 № 1(25). С.30-50.

3. Безверхний В. Н. Кузнецова А. Н. Проблема вхождения в циклическую подгруппу в группах Артина большого типа. // Известия тульского гос. Университета, Серия Математика. Механика. Информатика. Тула. 2005. Том 11 № 1. С. 76-93.

4. Р. Линдон, П. Шупп. Комбинаторная теория групп. М.: Мир. 1980. 445 с.

———————————————————————————

УДК 512.542

О конечных группах с заданной факторизацией[1]

А. Ф. Васильев Республика Беларусь, г. Гомель, Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины
Т. И. Васильева Республика Беларусь, г. Гомель, Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины, Белорусский государственный университете транспорта
Д. Н. Симоненко Республика Беларусь, г. Гомель, Белорусский государственный университете транспорта
formation56@mail.ru, tivasilyeva@mail.ru, dsimonenkon@mail.ru

On finite groups with a given factorization

A. F. Vasil'ev Republic of Belarus, Gomel, Francisk Scorina Gomel State University
T. I. Vasil'eva Republic of Belarus, Gomel, Francisk Scorina Gomel State University, Belarusian State University of Transport
D. N. Simonenko Republic of Belarus, Gomel, Belarusian State University of Transport
formation56@mail.ru, tivasilyeva@mail.ru, dsimonenkon@mail.ru

Рассматриваются только конечные группы. В 1938 году Фиттинг доказал нильпотентность группы, являющейся произведением своих нормальных нильпотентных подгрупп. Этот результат послужил основой исследований классов групп $\mathfrak{F}$, замкнутых относительно произведений заданных $\mathfrak{F}$-подгрупп. В 1953 году Хупперт [1] привел пример несверхразрешимого произведения двух нормальных сверхразрешимых подгрупп. В 1957 году Бэр [2] показал, что группа, представимая в произведение своих нормальных сверхразрешимых подгрупп, сверхразрешима тогда и только тогда, когда ее коммутант нильпотентен. В 1971 году Фрисен [3] установил сверхразрешимость группы $G = AB$, где A и B — нормальные сверхразрешимые подгруппы, имеющие взаимно простые индексы в G.

Пусть $\mathfrak{F}$ — некоторая формация. Хорошо известна следующая задача: найти условия, при которых $\mathfrak{F}$ содержит всякую группу $G = AB$, где $A \in \mathfrak{F}$ и $B \in \mathfrak{F}$.

Напомним [4], что группа $G = AB$ называется *произведением взаимно перестановочных подгрупп* A и B, если A перестановочна с каждой подгруппой из B и B перестановочна с каждой подгруппой из A. Изучению таких факторизаций групп посвящены многочисленные работы различных авторов. Основные результаты, полученные в этом направлении до 2010 года, изложены в монографии [4].

В настоящем сообщении мы продолжаем исследования, начатые в работе [5]. Через $\mathcal{K}_G$ [4] обозначается множество всех (с точностью до изоморфизма) композиционных факторов группы G и через $\mathcal{K}_G^a$ множество всех (с точностью до изоморфизма) абелевых композиционных факторов группы G. Если группа $G = AB$ есть произведение своих взаимно перестановочных подгрупп A и B, то $\mathcal{K}_G = \mathcal{K}_A \cup \mathcal{K}_B$ [4].

Определение 1. *Пусть $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{X}$ — классы групп, причем $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{X}$. Класс $\mathfrak{F}$ называется слабо MP-замкнутым в $\mathfrak{X}$, если $\mathfrak{F}$ содержит всякую $\mathfrak{X}$-группу $G = AB$, являющуюся произведением своих взаимно перестановочных $\mathfrak{F}$-подгрупп A и B, причем $\mathcal{K}_G^a \backslash \mathcal{K}_A^a \cap \mathcal{K}_G^a \backslash \mathcal{K}_B^a = \emptyset$. Пустой класс считается слабо MP-замкнутым в любом классе групп $\mathfrak{X}$.*

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке научной темы «Применение локального метода Гашюца в теории критических групп» номер гос. регистрации - 20160789, входящей в государственную программу научных исследований Республики Беларусь на 2016-2020 годы «Конвергенция 2020», подпрограмма «Методы математического моделирования сложных систем».

Отметим, что в классе всех разрешимых групп из условия $(|G : A|, |G : B|) = 1$ следует $\mathcal{K}_G^a \backslash \mathcal{K}_A^a \cap \mathcal{K}_G^a \backslash \mathcal{K}_B^a = \emptyset$.

Задача 1. *Пусть $\mathfrak{F}$ — формация (класс Фиттинга, класс Шунка) и $\mathfrak{X}$ — класс групп, причем $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{X}$. Для данного класса $\mathfrak{X}$ описать все формации (классы Фиттинга, классы Шунка) $\mathfrak{F}$, слабо MP-замкнутые в $\mathfrak{X}$.*

Теорема 1. *Пусть $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{F}$ — насыщенные формации, содержащие все сверхразрешимые π-группы для $\pi = \pi(\mathfrak{F})$, причем $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{X}$. Пусть H и F — максимальные внутренние локальные экраны $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{F}$ соответственно. Формация $\mathfrak{F}$ является слабо MP-замкнутой в $\mathfrak{X}$ тогда и только тогда, когда формация слабо $F(p)$ MP-замкнута в $H(p)$ для любого простого p.*

Данная теорема позволяет получать как известные, так и новые результаты для различных конкретных формаций $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{F}$.

Отметим, что формации всех сверхразрешимых групп и всех групп с нильпотентным коммутантом не являются слабо MP-замкнутыми.

Приведем некоторые примеры слабо MP-замкнутых формаций.

Подгруппа H группы G называется $\mathbb{P}$-*субнормальной* в G [6], если либо $H = G$, либо существует цепь подгрупп $H = H_0 < H_1 < \cdots < H_{n-1} < H_n = G$ такая, что индекс $|H_i : H_{i-1}|$ — простое число для любого $i = 1, \ldots, n$. Группа, у которой любая силовская подгруппа является $\mathbb{P}$-субнормальной, называется *расширенно сверхразрешимой*. Класс всех расширенно сверхразрешимых групп образует наследственную насыщенную формацию разрешимых групп [6].

Следствие 1. *[7] Пусть группа $G = AB$ — произведение взаимно перестановочных расширенно сверхразрешимых подгрупп A и B, причем $(|G : A|, |G : B|) = 1$. Тогда G расширенно сверхразрешима.*

Обозначим через $\mathcal{A}$ класс всех разрешимых групп, каждая силовская подгруппа которых является абелевой. Тогда класс $\mathfrak{N}\mathcal{A}$ всех групп, являющихся расширением нильпотентных групп с помощью $\mathcal{A}$-групп, образует наследственную насыщенную формацию.

Следствие 2. *Пусть группа $G = AB$ — произведение взаимно перестановочных $\mathfrak{N}\mathcal{A}$-подгрупп A и B, причем $(|G : A|, |G : B|) = 1$. Тогда G принадлежит $\mathfrak{N}\mathcal{A}$.*

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Huppert B. Monomiale Darstellung endlicher Gruppen // Nagoya Math. J. 1953. V. 6. S. 93-94.

2. Baer R. Classes of finite groups and their properties // Illinois J. Math. 1957. V. 1 № 2. P. 115-187.

3. Friesen D. K. Products of Normal Supersolvable Subgroups // Proc. Amer. Math. Soc. 1971. V. 30 № 1. P. 46-48.

4. Ballester-Bolinches A., Esteban-Romero R., Asaad M. Products of Finite Groups. — Berlin/New York: Walter de Gruyter, 2010. 334 p.

5. Васильев А. Ф., Васильева Т. И., Симоненко Д. Н. О MP-замкнутых насыщенных формациях конечных групп // Известия вузов. Математика. 2017. № 6. С. 9-17.

6. Васильев А. Ф., Васильева Т. И., Тютянов В. Н. О конечных группах сверхразрешимого типа // Сиб. мат. журн. 2010. Том 51 № 6. С. 1270-1281.

7. Васильев А. Ф., Васильева Т. И., Тютянов В. Н. О произведениях $\mathbb{P}$-субнормальных подгрупп в конечных группах // Сиб. мат. журн. 2012. Том 53 № 1. С. 59-67.

———————————————————————————————————————

УДК 512.542

О проективных свойствах подгрупп конечных групп[1]

Т. И. Васильева Республика Беларусь, г. Гомель, Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины, Белорусский государственный университете транспорта
tivasilyeva@mail.ru

On projective properties of subgroups of finite groups

T. I. Vasil'eva Republic of Belarus, Gomel, Francisk Scorina Gomel State University, Belarusian State University of Transport
tivasilyeva@mail.ru

Все рассматриваемые группы конечные. Пусть π — некоторое множество простых чисел. Согласно фундаментальной теореме Холла-Чунихина всякая π-разрешимая группа обладает свойствами D_π и $D_{\pi'}$. Для группы G свойство D_π означает выполнимость условий: 1) G имеет по крайней мере одну π-холлову подгруппу, 2) любые две π-холловы подгруппы сопряжены в G, 3) каждая π-подгруппа группы G содержится в некоторой ее π-холловой подгруппе.

Пусть $\mathfrak{F}$ — класс групп. Подгруппа H группы G называется $\mathfrak{F}$-покрывающей, если она принадлежит $\mathfrak{F}$ и из условий $H \le U \le G$, $V \trianglelefteq U$, $U/V \in \mathfrak{F}$ всегда следует, что $HV = U$.

В π-разрешимой группе π-холловы и π'-холловы подгруппы являются примерами $\mathfrak{F}$-покрывающих подгрупп в случае, когда $\mathfrak{F}$ совпадает с классом всех π-групп, соответственно, всех π'-групп. Во всякой π-разрешимой группе существует в точности один класс сопряженных $\mathfrak{F}$-покрывающих подгрупп, если $\mathfrak{F}$ — класс Шунка, состоящий из π-замкнутых групп и содержащий все π'-группы [1]. В общем случае $\mathfrak{F}$-подгруппа π-разрешимой группы может не содержаться в $\mathfrak{F}$-покрывающей подгруппе.

Л. А. Шеметковым в [2] была предложена задача нахождения условий, при которых $\mathfrak{F}$-подгруппа группы содержится в ее $\mathfrak{F}$-покрывающей подгруппе ($\mathfrak{F}$ — некоторый класс групп).

Рассмотрению отдельных случаев решения этой задачи посвящено данное сообщение.

Определение 1. *[3] Подгруппа H группы G арифметически вкладывается в подгруппу F из G, если из условий $\langle H, F\rangle \le U \le G$ и $V \trianglelefteq U$ всегда следует $\pi(HV/V) \subseteq \pi(FV/V)$.*

Теорема 1. *Пусть $\mathfrak{F}$ — класс всех π-разложимых групп. Если абнормальная $\mathfrak{F}$-подгруппа H π-разрешимой группы G арифметически вкладывается в каждую $\mathfrak{F}$-покрывающую подгруппу из G, то H содержится в некоторой $\mathfrak{F}$-покрывающей подгруппе группы G.*

Напомним [4], что K_π-подгруппой группы G называется самонормализуемая π-разложимая подгруппа, чей порядок делится на наибольший π'-делитель группы G. Легко показать, что если π-разрешимая группа имеет нормальную π-холлову подгруппу, то множество всех π-разложимых покрывающих подгрупп совпадает с множеством всех K_π-подгрупп группы. В этом случае нормальность π-холловой подгруппы существенна (см. пример из [5]).

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке научной темы «Конечные группы нильпотентного и сверхразрешимого типов, их нечеткие аналоги и приложения» номер гос. регистрации - 20160353, входящей в государственную программу научных исследований Республики Беларусь на 2016-2020 годы «Конвергенция 2020» подпрограмма «Методы математического моделирования сложных систем».

Следствие 1. *Пусть G — π-замкнутая π-разрешимая группа. Если абнормальная π-разложимая подгруппа H группы G арифметически вкладывается во всякую K_π-подгруппу из G, то H содержится в некоторой K_π-подгруппе группы G.*

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Васильева Т. И. Конечные π-разрешимые группы и их проекторы // ДАН БССР. 1985. Том 29 № 3. С. 197-200.
2. Шеметков Л. А. Формации конечных групп. — Москва: Наука, 1978. 278 с.
3. Васильева Т. И. О вложении подгрупп в проекторы конечны разрешимых групп // Известия Гомельского гос. университета им. Ф. Скорины. 2004. № 6(27). С. 126-129.
4. Романовский А. В. Группы с холловскими нормальными делителями // Конечные группы. Минск: Наука и техника, 1966. С. 98-115.
5. Beidleman J. Formations and π-closure in finite groups // Compos. Math. 1971. V. 23 № 3. P. 347-356.

———————————————————————

УДК 511.32

Определяемость p–локальной группы аддитивной группой минимального кольца расщепления

С. В. Вершина Россия, г. Москва, Московский Педагогический Государственный Университет
svetlanavershina@gmail.com

Determination of p-local group by the additive group of minimal splitting ring

S. V. Vershina Russia, Moscow, Moscow State Pedagogical University
svetlanavershina@gmail.com

Обозначим через $\mathfrak{L}_p(K)$ категорию p–локальных групп без кручения конечного ранга с полем расщепления $K \subset \widehat{\mathbb{Q}}_p$ — подполем поля p–адических чисел $\widehat{\mathbb{Q}}_p$. Кольцо $R = K \cap \widehat{\mathbb{Z}}$ — подкольцо кольца целых p–адических чисел $\widehat{\mathbb{Z}}_p$ называется кольцом расщепления группы $A \in \mathfrak{L}_p(K)$, если $A \otimes R \cong F \oplus D$, где F — свободный R–модуль, D — делимый R–модуль. В работе [1] поставлен вопрос: определить, когда p–локальная группа без кручения определяется с точностью до изоморфизма совокупностью ее колец расщепления. Для групп конечного ранга достаточно рассмотреть минимальное кольцо расщепления R.

В данной работе рассматривается вопрос об определяемости p–локальной группы без кручения A аддитивной группой R^+ минимального кольца расщепления R группы A для квадратичного и кубического расширения поля рациональных чисел $\mathbb{Q}$.

Рассмотрим следующие классы групп категории $\mathfrak{L}_p(K)$: $\mathcal{A}_1$ — неразложимые группы ранга больше 1; $\mathcal{A}_2$ — группы ранга 2 p–ранга 1; $\mathcal{A}_3$ — группы ранга 3 p–ранга 1;$\mathcal{A}_4$ — группы ранга 3 p–ранга 2. Классы $\mathcal{A}_2, \mathcal{A}_3, \mathcal{A}_4$ являются подклассами класса $\mathcal{A}_1$.

Теорема 1. *Всякая p–локальная группа без кручения A класса $\mathcal{A}_1$ с квадратичным полем расщепления определяется с точностью до изоморфизма в классе $\mathcal{A}_1$ аддитивной группой минимального кольца расщепления R группы A.*

Теорема 2. *Всякая p–локальная группа без кручения A класса $\mathcal{A}_2$ с кубическим полем расщепления определяется с точностью до изоморфизма в классе $\mathcal{A}_2$ аддитивной группой минимального кольца расщепления R группы A.*

Теорема 3. *Всякая p–локальная группа без кручения A класса $\mathcal{A}_3$ с кубическим полем расщепления определяется с точностью до изоморфизма в классе $\mathcal{A}_3$ аддитивной группой минимального кольца расщепления R группы A.*

Замечание 1. *В классе $\mathcal{A}_4$ существуют неизоморфные группы, имеющие одно и то же минимальное кольцо расщепления. В классе групп ранга 1 только две группы: $\mathbb{Z}_p^+$ — аддитивная группа кольца рациональных чисел с знаменателями взаимно простыми с простым числом p, $\mathbb{Q}^+$ — аддитивная группа рациональных чисел. Эти группы неизоморфны, но имеют одно и то же минимальное кольцо расщепления $\mathbb{Z}_p$. С учетом работы [2], указанными классами исчерпываются все неразложимые группы категории $\mathfrak{L}_p(K)$ для квадратичного и кубического расширения K поля рациональных чисел $\mathbb{Q}$.*

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Glaz S., Vinsonhaler C., Wickless W. Splitting rings for p–local torsion–free groups // Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics. 1995. vol. 171. pp. 223–241.

2. Vershina S. V. Indecomposable p–local torsion-free groups with quadratic and cubic splitting fields // Journal of Mathematical Sciences. 2018. Volume 230 (3). pp. 364–371.

———————————————————————————

УДК 511.32

Вполне разложимые однородные факторно делимые абелевы группы

Е. В. Гордеева Россия, г. Москва, Московский Государственный Педагогический Университет
katrin.gord@me.com

Completely decomposable homogeneous quotient divisible abelian groups

E. V. Gordeeva Russia, Moscow, Moscow Pedagogical State University
katrin.gord@me.com

Определение 1 ([1]). *Группа A называется факторно делимой, если она не содержит ненулевых периодических делимых подгрупп, но содержит такую свободную подгруппу F конечного ранга, что A/F - периодическая делимая группа.*

Линейно независимую систему $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_s\}$, порождающую группу F, будем называть базисом факторно делимой группы A, а ранг группы F - рангом факторно делимой группы A.

Определение 2 ([2]). *Для элемента a из группы A и простого p определим m_p как наименьшее неотрицательное целое число, такое что элемент $p^{m_p}a$ делится на любую степень p в группе A. Если такого числа не существует, полагаем $m_p = \infty$. Характеристика $(m_{p_1}, m_{p_2}, \ldots, m_{p_n}, \ldots)$ называется кохарактеристикой элемента a в группе A и обозначается $cochar(a)$.*

Для любого простого числа p положим две характеристики (m_p) и (k_p) равными тогда и только тогда, когда $m_p = k_p$. Аналогично $(m_p) \leqslant (k_p)$ тогда и только тогда, когда $m_p \leqslant k_p$.

Теорема 1 ([3]). *Если x-базисный элемент факторно делимой группы A ранга 1, то $cochar(x) \geqslant cochar(a)$ для любого $a \in A$. В частности, кохарактеристики двух различных базисных элементов в группе A совпадают.*

Определение 3 ([3]). *Для факторно делимой группы A ранга 1 будем называть кохарактеристику любого ее базисного элемента кохарактеристикой группы A и обозначать $cochar(A)$.*

Определение 4. *Факторно делимая группа A называется вполне разложимой, если она является прямой суммой факторно делимых групп ранга 1.*

Если все эти факторно делимые группы ранга 1 имеют одинаковую кохарактеристику χ, то A называется однородной кохарактеристики χ.

Основным результатом является следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть A - факторно делимая вполне разложимая однородная группа кохарактеристики $\chi = (m_p)$, то есть $A = A_1 \oplus A_2 \oplus \ldots \oplus A_n$, e_i - базисный элемент A_i для любого $i = 1, 2, \ldots, n$. Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n$ произвольный базис группы A, тогда существуют $B_1, B_2, \ldots, B_n$ подгруппы группы A, такие что:*

1. *$B_1, B_2, \ldots, B_n$ факторно делимые ранга 1 и кохарактеристики χ;*
2. *$x_1 \in B_i$ - базис B_i для любого $i = 1, 2, \ldots, n$;*
3. *$A = B_1 \oplus B_2 \oplus \ldots \oplus B_n$.*

Следствие 1. *Если A вполне разложимая однородная факторно делимая группа, то любой элемент любого базиса группы A имеет одну и ту же кохарактеристику χ.*

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. A. A. Fomin, W. Wickless, Quotient divisible Abelian groups, Proc. Amer. Math. Soc., 1998, Vol. 126, 45-52.

2. А. А. Фомин, К теории факторно делимых групп. II, Фундамент. и прикл. матем., 2015, том 20, выпуск 5, 157–196.

3. О. И. Давыдова, Факторно делимые группы ранга 1, Фундамент. и прикл. матем., 2007, том 13, выпуск 3, 25-33.

УДК 510.53+512.54.0+512.54.03+512.54.05
+512.543.72

Об уравнениях с ограничениями на решения в свободных группах

В. Г. Дурнев Россия, г. Ярославль, Ярославский государственный университет имени П. Г. Демидова
О. В. Зеткина Россия, г. Ярославль, Ярославский государственный университет имени П. Г. Демидова
А. И. Зеткина Россия, г. Ярославль, Ярославский государственный университет имени П. Г. Демидова
durnev@uniyar.ac.ru, ovzetkina@yandex.ru

On the equations with constrains in free groups

V. G. Durnev Russia, Yaroslavl, Yaroslavl State Pavel Demidov University
O. V. Zetkina Russia, Yaroslavl, Yaroslavl State Pavel Demidov University
A. I. Zetkina Russia, Yaroslavl, Yaroslavl State Pavel Demidov University
durnev@uniyar.ac.ru, ovzetkina@yandex.ru

Обозначим через F_m — свободную группу ранга m со свободными образующими $a_1, \ldots, a_m$. При $m = 2$ вместо a_1 и a_2 будем писать a и b соответственно.

Вопрос о разрешимости позитивной теории свободной группы был сведен Ю.И. Мерзляковым [1] к следующей проблеме:

существует ли алгоритм, позволяющий для произвольного уравнения

$$w\,(\,x_1,\,\ldots\,,\,x_n,\,a_1,\,\ldots\,,\,a_m\,)\;=\;1$$

в свободной группе счетного ранга определить, имеет ли оно такое решение $g_1, \ldots, g_n$, *что*

$$g_1 \in F_{m_1},\; g_2 \in F_{m_2},\, \ldots\,,\, g_t \in F_{m_t}\,,$$

где $m_1 \leqslant m_2 \leqslant \ldots \leqslant m_t$, F_{m_i} *- свободная группа с образующими* $a_1, \ldots, a_{m_i}$.

Г.С. Маканиным [2] построил искомый алгоритм, и тем самым доказал разрешимость позитивной теории свободной группы.

Хорошо известно, что вопрос о точности матричного представления Гасснера группы крашеных кос эквивалентен вопросу об отсутствии нетривиального решения в свободной группе F_m уравнения

$$x_1a_1x_1^{-1} \cdot x_2a_2x_2^{-1} \cdots x_ma_mx_m^{-1} \;=\; a_1 \cdot a_2 \cdots a_m,$$

удовлетворяющего условию

$$x_1 \in F_m^{(2)}, \ldots\, x_n \in F_m^{(2)},$$

где $F_m^{(2)}$ — второй коммутант свободной группы F_m. Обобщая эти ситуации Г.С. Маканин поставил в "Коуровской тетради" [3] следующую проблему для уравнений в свободных группах

"9.25. *Указать алгоритм, который по уравнению*

$$w\,(\,x_1, \ldots, x_n, a_1, \ldots, a_m\,) \;=\; 1$$

в свободной группе F_m *и списку конечно порожденных подгрупп* $H_1, \ldots, H_n$ *группы* F_m *позволял бы узнать, существует ли решение этого уравнения с условием*

$$x_1 \in H_1, \ldots, x_n \in H_n''.$$

В. Диекерт [4] показал, что проблема определения по произвольному уравнению

$$w\,(\,x_1, \ldots, x_n, a_1, \ldots, a_m\,) \,=\, 1$$

в свободной группе F_m и списку *регулярных подмножеств* (языков) $H_1, \ldots, H_n$ группы F_m узнать, существует ли решение этого уравнения с условием

$$x_1 \,\in\, H_1, \ldots, x_n \,\in\, H_n$$

разрешима и принадлежит классу $PSPACE$. Так как конечно порожденные подгруппы являются регулярными подмножествами, то тем самым решается и проблема Г.С. Маканина.

Представляет интерес исследование различных обобщений проблемы Г.С. Маканина для свободных групп, получающихся путем ослабления ограничений, налагаемых на подгруппы $H_1, \ldots, H_n$.

Теорема 1. *В свободной группе F_2 со свободными образующими a и b можно построить такое уравнение*

$$w\,(\,x,\, x_1,\, \ldots\,,\, x_n,\, a,\, b\,) \,=\, 1$$

с неизвестными $x_1, x_2, \ldots, x_n$, константами a и b и параметром x, что не существует алгоритма, позволяющего для произвольного натурального числа k определить, существует ли решение уравнения

$$w\,(\,a^k,\, x_1,\, \ldots\,,\, x_n,\, a,\, b\,) \,=\, 1,$$

удовлетворяющее условию

$$x_1 \,\in\, [F_2,\, F_2],\, \ldots\,,\, x_t \,\in\, [F_2,\, F_2],$$

где t — некоторое фиксированное число между 1 и n.

Далее существенно усиливается этот результат. Причем в определенном смысле это усиление близко к окончательному.

В ряде работ [5], [6], [7] и [8] рассматривались уравнения вида

$$w\,(\,x_1,\, \ldots\,,\, x_n\,) \,=\, g(\,a_1,\, \ldots, a_m\,),$$

где $w\,(\,x_1,\, \ldots\,,\, x_n\,)$ — групповое слово в алфавите неизвестных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, т. е. не содержит констант $a_1, \ldots, a_m$, а $g(\,a_1,\, \ldots, a_m\,)$ — слово в алфавите констант $a_1, \ldots, a_m$, т. е. не содержит неизвестных. Они получили название уравнений, разрешенных относительно неизвестных, или уравнений с правой частью. Проблема разрешимости для таких уравнений иногда называется проблемой подстановки или проблемой сравнения с образцом.

Обозначим через $[u, v]$ коммутатор элементов u и v, т. е. $[u, v] = uvu^{-1}v^{-1}$.

Теорема 2. *В свободной группе F_2 со свободными образующими a и b можно построить такое семейство разрешенных относительно неизвестных уравнений*

$$w\,(\,x^k,\, x_1,\, \ldots\,,\, x_n\,) \,=\, [\,a,\, b\,],$$

где $w\,(\,x^k,\, x_1,\, \ldots\,,\, x_n\,)$ — групповое слово в алфавите неизвестных $x,\, x_1, x_2, \ldots, x_n$, что невозможен алгоритм, позволяющий для произвольного натурального числа k определить, существует ли решение уравнения

$$w\,(\,x^k,\, x_1,\, \ldots\,,\, x_n\,) \,=\, [\,a,\, b\,],$$

удовлетворяющее условию

$$x_1 \,\in\, [F_2,\, F_2],\, \ldots\,,\, x_t \,\in\, [F_2,\, F_2],$$

где t — некоторое фиксированное число между 1 и n.

Теорема 3. *Невозможен алгоритм, позволяющий по произвольному уравнению вида*

$$w(x_1, \ldots, x_n) = [a, b]$$

в свободной группе F_2 *определить, имеет ли оно такое решение* $g_1, \ldots, g_n$, *что*

$$g_1 \in F_2^{(2)}.$$

Заметим, что слово $[a, b]$, стоящее в правой части рассматриваемых в доказанной теореме уравнений, имеет длину 4. Следующая теорема показывает невозможность дальнейшего уменьшения длины правой части.

Теорема 4. *Существует полиномиальный алгоритм, позволяющий по произвольному разрешенному относительно неизвестных уравнению вида*

$$w(x_1, \ldots, x_n) = g(a, b),$$

где $w(x_1, \ldots, x_n)$ — *групповое слово в алфавите неизвестных* $x_1, x_2, \ldots, x_n$, *а* $g(a, b)$ — *элемент длины меньше 4 свободной группы* F_2 *со свободными образующими* a *и* b *определить, существует ли решение этого уравнения, удовлетворяющее условию*

$$x_1 \in F_2^{(s)}, \ldots, x_t \in F_2^{(s)},$$

где t — *произвольное фиксированное число между 1 и* n.

Для уравнений с одним неизвестным ситуация иная.

Пусть $\mathbb{N}$ — r-й коммутант $F_n^{(r)}$ свободной группы F_r или r-й член $(F_m)_r$ ее нижнего центрального ряда.

Теорема 5. *Существует полиномиальный алгоритм, позволяющий по любому уравнению с одним неизвестным*

$$w(x_1, a_1, \ldots, a_n) = 1$$

в свободной группе F_n *определить имеет ли оно такое решение* x_1, *что* $x_1 \in \mathbb{N}$

Обозначим через φ_i следующий эндоморфизм свободной группы F_m ранга m со свободными образующими $a_1, \ldots, a_m$

$$\varphi_i(a_j) \rightleftharpoons a_j \text{ при } j \neq i, \quad \varphi_i(a_i) \rightleftharpoons 1.$$

По аналогии с группой кос эндоморфизм φ_i назовем “ *эндоморфизмом выдергивания* i*-ой образующей*”.

Полагаем

$$P_n^{(i)} \rightleftharpoons Ker\,\varphi_i \quad P_m \rightleftharpoons \bigcap_{i=1}^{m} P_m^{(i)}$$

и назовем $P_m^{(i)}$ *подгруппой* i*-чистых элементов*, а P_m — *подгруппой чистых или гладких элементов.*

Ясно, что P_m — нормальная подгруппа группы F_m, содержащаяся в ее коммутанте $F_m^{(1)}$ $(P_m \subseteq F_m^{(1)})$ и $P_2 = F_2^{(1)}$, но при $m \geqslant 3$ $P_m \neq F_m^{(1)}$.

Теорема 6. *При* $m \geqslant 3$ *невозможен алгоритм, позволяющий по произвольному уравнению в группе* F_m

$$w(x_1, \ldots, x_n, a_1, \ldots, a_m) = 1$$

определить, имеет ли оно такое решение $x_1, \ldots, x_n$, *что* $x_1 \in P_m$.

Теорема 7. *Проблема разрешимости в свободной группе F_2 для уравнений вида $w(x_1, \ldots, x_n) = [a, b]$, где $w(x_1, \ldots, x_n)$ — слово в алфавите неизвестных, а $[a, b]$ — коммутатор свободных образующих a и b группы F_2 является NP-трудной.*

Заметим, что слово $[a, b]$ имеет длину 4. Для слов g длины меньше 4 ситуация принципиально иная как показывает следующая теорема.

Теорема 8. *Проблема разрешимости для уравнений вида $w(x_1, \ldots, x_n) = g$, где $w(x_1, \ldots, x_n)$ — групповое слово в алфавите неизвестных $\{x_1, \ldots, x_n, \ldots\}$, а g — групповое слово длины меньше 4 в алфавите $\{a, b\}$ свободных образующих группы F_2 полиномиально разрешима.*

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Мерзляков Ю. И. Позитивные формулы на свободных группах. // Алгебра и логика. 1966. Том 5 № 4. С. 25-42.
2. Маканин Г. С. Универсальная теория и позитивная теория свободной группы. // Известия АН СССР. Серия математика. 1984. Том 48 № 4. С. 735-749.
3. Коуровская тетрадь. Издание 17-е, дополненное и включающее Архив решенных задач. — Новосибирск: Институт математики СО РАН, 2010. 78 с.
4. Diekert V. Makanin's Algorithm for Solving Word Equations with Regular Constraints. Preliminary version of the chapter in M. Lothaire. Algebraic Combinatorics on Words. Report Nr. 1998/02. Fakultat Informatik. Universitat Stuttgart. 1998.
5. Хмелевский Ю. И. Системы уравнений в свободной группе. I, II. // Известия АН СССР. Серия математика. 1971. Том 35 № 6. С. 1237-1268. 1972. Том 36 № 1. С. 110-179.
6. Schupp P. E. On the substitution problem for free groups. // Proc. Amer. Math. Soc. 1969. Volume 23. P. 421-423.
7. Edmunds C. C. On the endomorphisms problem for free group. // Com. Algebra. 1975. Volume 3. P. 7-20.
8. Дурнев В. Г. О проблеме разрешимости для уравнений с одним коэффициентом. // Матем. заметки. 1996. Том 59, № 6. С. 832-845.

УДК 519.4

О централизаторе элементов группы Кокстера с древесной структурой

О. В. Инченко Тула, Тульский государственный университет
inchenko_ov@mail.ru

On centralizer of elements of Coxeter's group with tree structure

O. V. Inchenko Tula, Tula State University
inchenko_ov@mail.ru

Пусть G конечно порожденная группа Кокстера с копредставлением

$$G = \langle a_1, ...a_n; (a_i)^2, (a_i a_j)^{m_{ij}}, i, j = \overline{1,n} \rangle$$

имеет древесную структуру, т.е. между вершинами конечного дерева-графа Γ и образующими группы G можно установить соответствие такое, что если a_i и a_j являются вершинами ребра e, то ребру соответствует соотношение вида $(a_i a_j)^{m_{ij}} = 1$, $i \neq j$, $m_{ij} \geq 2$.

Класс конечно порожденных групп Кокстера с древесной структурой был выделен В. Н. Безверхним в 2003 году [1].

Понятия циклически несократимого, R-несократимого и $\overline{R}$ несократимого слова будем считать известными [2], [3].

Теорема 1.[2]. *Пусть w - циклически R и $\overline{R}$- несократимое слово в группе Кокстера с древесной структурой G. $w^n = 1$ в группе G, тогда и только тогда, когда $w \in G_{ab}$, где группа G_{ab} имеет представление $G_{ab} = \langle a, b;\ a^2, b^2, (ab)^{m_{ab}} \rangle$.*

Теорема 2.[2]. *Слова v и w, длина каждого из которых равна единице в группе Кокстера G, сопряжены тогда и только тогда, когда существует ломанная, состоящая из ребер дерева-графа Γ, которая соединяет вершины соответствующие данным образующим группы, и каждому из ребер выделенного пути соответствует соотношение с нечетным числом Кокстера.*

Теорема 3.[4]. *В группе Кокстера с древесной структурой разрешима проблема степенной сопряженности слов.*

Лемма 1.[5]. *Пусть G - конечно порожденная группа Кокстера с древесной структурой с множеством образующих A, $|A| < \infty$. И пусть $w \in G$, w – циклически R и $\overline{R}$- несократимое, тупиковое слово не равное единице в G. Слово w сопряжено некоторому слову $v \in G_j$, то есть существует слово $z \in G$ такое, что $z^{-1}wz = v$, где $|v| \geqslant 2$, G_j - параболическая подгруппа с множеством образующих A_j, $A_j \subset A$. Тогда w, z - слова на образующих A_j, $C_G(w) = C_{G_j}(w)$, где $C(w)$ - централизатор элемента w.*

Целью работы является описание структуры централизатора элементов конечно порожденной группы Кокстера с древесной структурой.

Лемма 2.[6]. *Пусть w – циклически R - несократимое слово в G, $w \in G_{ab}$, $|w| > 1$, где подгруппа G_{ab} имеет копредставление $G_{ab} = \left\langle a, b; a^2, b^2, (ab)^{m_{ab}} \right\rangle$. Тогда централизатор элемента w есть циклическая группа конечного порядка, порожденная элементом длины два.*

Определение 1.[6]. Ребро e_i дерева – графа Γ назовем *замыкающим* ребром некоторого пути, если ему соответствует четное число Кокстера.

Теорема 4.[6]. *Пусть слово $w \in G$ такое, что $|w| = 1$, то есть $w = a_i$, $i = \overline{1,n}$. Тогда централизатор элемента w есть подгруппа вида*

$$C(w) = \langle \tilde{z}_1, \tilde{z}_2, .., \tilde{z}_s, w\,; \tilde{z}_r^2 = 1, w^2 = 1, r = \overline{1,s} \rangle,$$

где $\tilde{z}_r$ - циклически сократимое слово вида $\tilde{z}_r = z_1 z_2 .. z_{t-1} z_0 z_{t-1}^{-1} .. z_2^{-1} z_1^{-1}$, $z_i \in G_{ab}$, подслово z_0 соответствует замыкающему ребру и $|z_i| = m_{ab} - 1$, $i = \overline{0, t-1}$.

Пусть слово $w \in G$, $|w| = 1$ и централизатор слова w имеет вид:

$$C(w) = \left\langle \tilde{z}_1, \tilde{z}_2, .., \tilde{z}_s, w\,; \tilde{z}_r^2 = 1, w^2 = 1, r = \overline{1, s} \right\rangle$$

Обозначим через $C_w(w)$ подгруппу полученную из $C(w)$ вычеркиванием из множества порождающих слов элемента w. Полученная подгруппа будет иметь следующее копредставление:

$$C_w(w) = \langle z_1, z_2, .., z_s; z_r^2 = 1, r = \overline{1, s} \rangle$$

Лемма 3.[6]. *Пусть слово $w \in G$ такое, что $|w| = 1, C(w)$ - централизатор элемента w. Тогда группа $C_w(w)$ является свободным произведением циклических групп порядка два и $C(w) = \left\langle w | w^2 \right\rangle \times C_w(w)$.*

Теорема 6. *Централизатор циклически R и $\overline{R}$- несократимого слова w бесконечного порядка конечно порожденной группы Кокстера с древесной структурой G такого, что w не является степенью никакого слова из G есть либо бесконечная циклическая группа, либо абелева группа порожденная двумя элементами, один из которых имеет бесконечный порядок, а другой - конечный.*

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. В.Н. Безверхний О группах Артина, Кокстера с древесной структурой //V Международная конференция "Алгебра и теория чисел. Современные проблемы и приложения": тезисы докладов. Международная конференция - Тула, 2003, С. 33-34.

2. В.Н. Безверхний, О.В. Инченко Проблемы равенства и сопряженности в группах Кокстера с древесной структурой //Чебышевский сборник. 2005. Том 6 выпуск 2. С. 81-90.

3. В.Н. Безверхний, О.В. Инченко О кручении в группах Кокстера с древесной структурой // Чебышевский сборник. 2005. Том 6 выпуск 1. С. 5-12

4. В.Н. Безверхний, О.В. Инченко Проблема степенной сопряженности слов в группах Кокстера с древесной структурой // Известия ТулГУ Серия Математика. Механика. Информатика. 2005. Т. 11. С.63-76.

5. В.Н. Безверхний, О.В. Инченко Разрешимость проблемы вхождения в параболические подгруппы в группах Кокстера с древесной структурой // Известия ТулГУ Серия Дифференциальные уравнения и прикладные задачи. 2006. Выпуск 1. С.47-58.

6. В.Н. Безверхний, О.В. Инченко Централизатор элементоа конечного порядка конечно порожденной группы Кокстера с древесной структурой // Чебышевский сборник. 2008. Том 9 выпуск 1(25). С.17-28

———————————————————————————

УДК 511.32

Ширина вербальных подгрупп аномальных произведений с бесконечной циклической группой

Д. З. Каган Россия, г. Москва, ФГБУ «Научный центр по комплексным транспортным проблемам» Минтранса РФ, Российский университет дружбы народов (РУДН)
dmikagan@gmail.com

The width of verbal subgroups in anomalous products

D. Z. Kagan Moscow, Russia, Scientific Center of Complex Transport Problems of Ministry of Transport of RF (SCCTP), Peoples Friendship University of Russia (RUDN)
dmikagan@gmail.com

Шириной вербальной подгруппы [1] $V(G)$ относительно множества слов V называется наименьшее число $m \in \mathcal{N} \bigcup \{+\infty\}$ такое, что всякий элемент подгруппы $V(G)$ записывается в виде произведения не более чем m значений слов $V^{\pm 1}$. Рассматриваются конечные собственные множества слов V, так как в противном случае ширина $V(G)$ всегда будет конечна.

Напомним, что множество слов V называется собственным, а подгруппу $V(G)-$ собственной, если $V(F_2) \neq E$ и $V(F_2) \neq F_2$.

Понятие ширины вербальных подгрупп было введено Ю. И. Мерзляковым [1] в 1967 году. Результаты для свободных произведений были получены А. Х. Ремтуллой. Было доказано, что ширина всякой собственной вербальной подгруппы $V(G)$ будет бесконечна в свободном произведении неединичных групп $G = A * B$, за исключением $Z2 * Z2$.

В. А. Файзиевым [2] был получен результат о бесконечности ширины вербальных подгрупп в свободном произведении с объединением $A *_U B$, если $|A : U| \geq 2$, $|B :: U| \geq 3$. В последствии И.В. Добрынина [3] доказала бесконечность ширины вербальных подгрупп для свободных произведений с объединением $A *_U B$, при выполнении следующих условий: $|A : U| \geq 2$ и $|B : U| \geq 3$. И.В. Добрыниной и В.М. Безверхним [4] были также получены некоторые результаты о бесконечности ширины вербальных подгрупп в группах с двумя образующими и одним определяющим соотношением. В.Г. Бардаковым [5] доказана бесконечность ширины всякой собственной вербальной подгруппы для HNN-расширений, где связные подгруппы отличны от базовой группы.

Р. И. Григорчук [6] установил условия бесконечности для коммутантных собственных вербальных подгрупп в свободных произведениях с объединением и HNN-расширениях. Вербальная подгруппа $V(G)$ называется коммутантной, если V содержит только коммутаторные слова - слова, лежащие в коммутанте совободной группы F_n'. В работах автора [7],[8] были доказаны утверждения, продолжающие результаты Григорчука. В частности, решен вопрос об условиях бесконечности ширины собственных коммутантных вербальных подгрупп для групп с одним определяющим соотношением и нетривиальным центром. Доказаны некоторые утверждения о коммутантных вербальных подгруппах для аномальных произведений.

В работе [9] приводится обзор полученных различными алгебраистами результатов о ширине вербальных подгрупп.

Доказательство бесконечности ширины коммутантных вербальных подгрупп, как правило, основано на построении для рассматриваемых группах специальных функций - нетривиальных псевдохарактеров. Для произвольных вербальных подгрупп, необязательно коммутантных, этот метод неприменим. Из существования на группе G нетривиальных псевдохарактеров не следует бесконечность ширины вербальных подгрупп, порожденных не только коммутаторными словами. С помощью псевдохарактеров невозможно доказать бесконечность ширины для вербальных подгрупп, порожденных степенями x^s. Поэтому, доказательство бесконечности ширины вербальных подгрупп в общем случае не может основываться на применении псевдохарактеров.

В данной работе рассматривается ширина вербальных подгрупп для аномальных произведений, в которых одним из множителей является бесконечная циклическая подгруппа.

Напомним определение аномальных произведений, введеное С.Д. Бродским [10] в 1984 году.

Определение 1. *Пусть $F = A * B$ — свободное произведение некоторых групп A и B, w — циклически несократимый элемент группы F. При этом, элементы длины один (принадлежащие группам A или B) не считаются циклически несократимыми по определению. Тогда, фактор-группа $G = F/ < w^F >$ свободного произведения F по нормальному замыканию элемента w называется аномальным произведением групп A и B с аномалией w и обозначается $AwB, AwB = F/ < w^F >$.*

В формулировках используется понятие группы, для которой выполнена теорема о свободе.

Определение 2. *Пусть $C = G * G * \ldots * G/ << w >>$ — свободное произведение нескольких изоморфных копий группы B, на которое наложено одно дополнительное соотношение w, считаемое циклически несократимым. Если любая подгруппа C, порожденная всеми копиями G, за исключением одной, элементы из которой входят в дополнительное соотношение w, является свободным произведением этих копий, то говорят, что для группы G выполнена теорема о свободе.*

Теорема 1. *Пусть группа G равна аномальному произведению групп A и $B, G = AwB$. Пусть также группа A - бесконечная циклическая, группа B - не равна нормальному замыканию никакого своего элемента, и для группы B выполнена теорема о свободе. Пусть также сумма всех степеней порождающего свободной группы $A =< x >_\infty$, с которыми он входит в запись аномалии $w = x^{k_1}b_1 \ldots x^{k_l}b_l$, равна нулю: $\sum_{i=1}^{l} k_i = 0$. Тогда ширина всякой собственной вербальной подгруппы $V(G)$ группы G, определенной конечным множеством слов V, бесконечна относительно V.*

Теорема 2. *Пусть группа $G = AwB$ является аномальным произведением групп A и B, при этом группа $A =< x >_\infty$ - бесконечная циклическая, группа B - не является конечно порожденной. Пусть также сумма всех степеней порождающего $< x >$, с которыми он входит в запись аномалии $w = x^{k_1}b_1 \ldots x^{k_l}b_l$, равна нулю: $\sum_{i=1}^{l} k_i = 0$. Тогда ширина всякой собственной вербальной подгруппы $V(G)$ группы G, определенной конечным множеством слов V, бесконечна относительно V.*

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Мерзляков Ю. И. Рациональные группы. — Москва: Изд-во Наука, 1987.

2. Faiziev V. A.Об устойчивости одного функционального уравнения на группах // Успехи мат. наук. 1993. 48, №1. 193-194.

3. Добрынина И. В. Решение проблемы ширины в свободных произведениях с объединением // Фундаментальная и прикладная математика. 2009. Т. 15, №1. С. 23-30.

4. Добрынина И. В., Безверхний В. Н. О ширине в некотором классе групп с двумя образующими и одним определяющим соотношением // Труды института математики и механики УрО

5. Бардаков В. Г. О ширине вербальных подгрупп некоторых свободных конструкций // Алгебра и логика. 1997. Т. 36, №5. С. 494 — 517.

6. Григорчук Р. И. Ограниченные когомологии групповых конструкций // Математические заметки. 1996. Т. 59, №4. С. 546 — 550.

7. Каган Д. З. Псевдохарактеры на аномальных произведениях локально индикабельных групп // Фундаментальная и прикладная математика. 2006. Т.12, №3. С. 55 — 64.

8. Каган Д. З. Нетривиальные псевдохарактеры на группах с одним определяющим соотношением и нетривиальным центром // Математический сборник. 2017. Т.208, №1. С. 80 — 96.

9. Добрынина И.В., Каган Д.З. О ширине вербальных подгрупп в некоторых классах групп // Чебышевский сборник. 2015. Т.16, №4, С. 150 — 163.

10. Бродский С. Д. Уравнения над группами и группы с одним определяющим соотношением // Сибирский математический журнал. 1984. Т. 25, №2. С. 84-103. С.

УДК 512.541

Кольца на двойственных абелевых группах

Компанцева Е. И. Россия, г. Москва, МПГУ, Финансовый университет при Правительстве РФ
kompantseva@yandex.ru

Rings on dual abelian groups

Kompantseva E. I. Russia, Moscow, MPSU, Financial University under the Government of the RF
kompantseva@yandex.ru

Кольцом на абелевой группе A называется кольцо, аддитивная группа которого совпадается с A. В [1, проблема 94] сформулирована проблема описания абсолютных радикалов абелевой группы. Под абсолютным радикалом Джекобсона абелевой группы A называется пересечение $J^*(A)$ радикалов Джекобсона всех ассоциативных колец на A.

При изучении аддитивных групп полупростых колец в [2] было введено понятие факторно делимой абелевой группы без кручения, которое затем обобщается на случай смешанных групп [3]. В [3] определена двойственность между категорией $\mathcal{QTF}$ абелевых групп без кручения конечного ранга с фиксированными максимальными линейно независимыми системами и категорией $\mathcal{QD}$ смешанных факторно делимых абелевых групп с фиксированными базисами, в обеих категориях в качестве морфизмов рассматриваются квазигомоморфизмы. В [4] показано что указанная двойственность сохраняет прямые разложения, а также ранг группы. В частности, вполне разложимой абелевой группе $A = \bigoplus\limits_{i=1}^{n} A_i$ ранга n двойственна прямая сумма $A^* = \bigoplus\limits_{i=1}^{n} A_i^*$ факторно делимых групп ранга без кручения 1.

Настоящая работа посвящена изучению взаимосвязи между свойствами колец на вполне разложимой абелевой группе конечного ранга и двойственной ей факторно делимой группе. Как обычно, будем обозначать через P множество всех простых чисел, $r(A)$ – ранг группы A, $t(A)$ – тип однородной группы A.

Теорема 1. *Пусть* $A = \bigoplus_{i=1}^{n} A_i$ *– вполне разложимая абелева группа,* $r(A_i) = 1$, $t(A_i)$ *– идемпотентный тип,* $P_i = \{p \in P \mid pA_i \neq A_i\}$. *Пусть* $A^* = \bigoplus_{i=1}^{n} A_i^*$, *где* A_i^* *– факторно делимая группа, двойственная группе* A_i $(i \in I)$. *Тогда* $J^*(A) = \bigoplus_{i=1}^{n}(\bigcap_{p \in P_i} pA_i)$, $J^*(A^*) = \bigoplus_{i=1}^{n}(\bigcap_{p \in P \setminus P_i} pA_i^*)$. *(Полагаем* $\bigcap_{p \in \varnothing} pG = 0$ *для любой группы* G*).*

Из теоремы 1 следует, в частности, что существование полупростого кольца на вполне разложимой абелевой группе конечного ранга не влечёт существования такого кольца на двойственной группе.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Fuchs L. Infinite Abelian Aroups. Vol. 1., Vol. 2 New York-London: Academic Press, 1973.
2. Beaumont R., Pierce R. Torsion free rings // Illinois J. Math., 5 (1961). P. 61—98.
3. Fomin A.A., Wickless W. Quotient divisible abelian groups // Proc. Amer. Math. Soc. 1998. V 126, No. 1, P. 45–52.
4. Fomin A.A. A category of matrices representing two categories of abelian groups // Fundam. Prikl. Mat., 13 (2007), No. 3, P. 223–244.

———————————————————————————————————

УДК 512.543

Необходимые условия нильпотентной аппроксимируемости некоторых древесных произведений групп[1]

А. Е. Куваев Россия, г. Иваново, Ивановский государственный университет
alexander@kuvaev.me

Necessary conditions for the residual nilpotence of certain tree products of groups

A. E. Kuvaev Russia, Ivanovo, Ivanovo State University
alexander@kuvaev.me

Настоящая работа продолжает исследования, начатые в [1, 2, 3], и в определенной мере дополняет статью [4]. Её целью служит отыскание необходимых условий локальной нильпотентной аппроксимируемости древесных произведений, все вершинные группы которых локально удовлетворяют нетривиальным тождествам.

Определение 1. *Группу* X *будем называть локально удовлетворяющей нетривиальному тождеству, если каждая конечно порождённая подгруппа группы* X *удовлетворяет некоторому нетривиальному тождеству (не обязательно одному и тому же для всех подгрупп).*

Определение 2. *Будем говорить, что группа* X *локально аппроксимируется нильпотентными группами, если любая её конечно порождённая подгруппа нильпотентно аппроксимируема.*

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Ивановского государственного университета.

Определение 3. *Деревом будем называть связный ациклический неориентированный граф (количество вершин и рёбер в нём не обязано быть конечным).*

Определение 4. *Пусть $T = (V, E)$ — некоторое дерево с множеством вершин V и множеством рёбер E, содержащее хотя бы две вершины. Сопоставим каждой вершине $v \in V$ некоторую группу F_v, а каждому ребру $e = \{u, v\} \in E$ — группу H_e и вложения $\varphi_{eu}\colon H_e \to F_u$, $\varphi_{ev}\colon H_e \to F_v$. Тогда древесным произведением групп F_v $(v \in V)$ называется группа*

$$F = \langle *F_v;\ H_e\ (v \in V, e \in E)\rangle, \tag{1}$$

образующими которой являются образующие групп F_v $(v \in V)$, а определяющими соотношениями — соотношения групп F_v и для каждого ребра $e = \{u, v\} \in E$ всевозможные соотношения вида $h\varphi_{eu} = h\varphi_{ev}$, где $h \in H_e$.

Хорошо известно, что тождественные отображения порождающих групп F_v $(v \in V)$ в группу F продолжаемы до вложений и, стало быть, группы F_v можно считать подгруппами группы F. При этом для каждого ребра $e = \{u, v\} \in E$ образы группы H_e относительно вложений φ_{eu} и φ_{ev} оказываются совпадающими и их можно отождествить с группой H_e, рассматривая последнюю как подгруппу в F_u и F_v.

Определение 5. *Группы F_v $(v \in V)$ будем называть вершинными, а подгруппы H_e — рёберными.*

Определение 6. *Подгруппа Y группы X называется p'-изолированной в этой группе для некоторого простого числа p, если для каждого простого числа $q \neq p$ и для каждого элемента $x \in X$ из включения $x^q \in Y$ следует, что $x \in Y$.*

Первым результатом настоящей работы является следующая

Теорема 1. *Пусть F — древесное произведение вида (1). Пусть также для всякого ребра $e = \{u, v\} \in E$ подгруппа H_e содержится в своих вершинных группах F_u, F_v собственным образом и имеет хотя бы в одной из них индекс, больший 2. Если каждая группа F_v $(v \in V)$ локально удовлетворяет нетривиальному тождеству и группа F локально аппроксимируется нильпотентными группами, то существует простое число p такое, что для любого ребра $e = \{u, v\} \in E$ подгруппа H_e p'-изолирована в группах F_u и F_v.*

Определение 7. *Пусть F — древесное произведение вида (1) и для любых двух рёбер e, f, инцидентных одной вершине v, имеет место равенство $H_e\varphi_{ev} = H_f\varphi_{fv}$. Тогда в группе F все рёберные подгруппы оказываются совпадающими, поэтому последняя имеет вид*

$$F = \langle *F_v;\ H\ (v \in V)\rangle \tag{2}$$

и называется свободным произведением семейства групп $\{F_v \mid v \in V\}$ с одной объединённой подгруппой H.

Из теоремы 1 вытекает приводимое ниже следствие 1, являющееся обобщением основного результата статьи [1].

Следствие 1. *Пусть F — свободное произведение вида (2) и подгруппа H содержится во всех вершинных группах F_v $(v \in V)$ собственным образом. Если каждая группа F_v $(v \in V)$ локально удовлетворяет нетривиальному тождеству и группа F локально аппроксимируется нильпотентными группами, то существует простое число p такое, что подгруппа H p'-изолирована во всех группах F_v $(v \in V)$.*

Таким образом, благодаря тому, что в группе вида (2) все рёберные подгруппы совпадают, удается отказаться от условия, согласно которому всякая рёберная подгруппа должна иметь индекс, больший 2, хотя бы в одной из содержащих её вершинных групп. Существует возможность избавиться от данного условия и в общем случае, заменив его другими ограничениями. Справедлива

Теорема 2. *Пусть F — древесное произведение вида (1), всякая рёберная подгруппа отлична от содержащих её вершинных групп и не является изолированной хотя бы в одной из них. Пусть также для любых двух рёбер e, f, инцидентных одной вершине v, подгруппа $H_e \cap H_f$ имеет конечный индекс в подгруппах H_e и H_f. Если каждая группа F_v ($v \in V$) локально удовлетворяет нетривиальному тождеству и группа F локально аппроксимируется нильпотентными группами, то существует простое число p такое, что для любого ребра $e = \{u, v\} \in E$ подгруппа H_e p'-изолирована в группах F_u и F_v.*

Конкретным примером применения теоремы 2 служит приводимое далее следствие 2. Если для некоторого ребра $e = \{u, v\} \in E$ подгруппа H_e имеет в своих вершинных группах F_u, F_v конечные индексы, то она не является изолированной ни в одной из них и для каждого ребра f, инцидентного вершине u или v, высекает в подгруппе H_f подгруппу конечного индекса. Поэтому имеет место

Следствие 2. *Пусть F — древесное произведение вида (1). Пусть также всякая рёберная подгруппа отлична от содержащих её вершинных групп и имеет в них конечные индексы. Если каждая группа F_v ($v \in V$) локально удовлетворяет нетривиальному тождеству и группа F локально аппроксимируется нильпотентными группами, то существует простое число p такое, что для любого ребра $e = \{u, v\} \in E$ подгруппа H_e p'-изолирована в группах F_u и F_v.*

Чтобы пояснить смысл полученных необходимых условий заметим, что в некоторых группах и для некоторых типов подгрупп p'-изолированность равносильна отделимости конечными p-группами (см, напр., [5, 6, 7]). В ряде случаев это позволяет доказать критерии нильпотентной аппроксимируемости свободных конструкций групп. Примеры применения данной техники можно найти в [8], результаты такого типа анонсированы также в [9] и [10].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Азаров Д. Н., Иванова Е. А. К вопросу о нильпотентной аппроксимируемости свободного произведения с объединением локально нильпотентных групп // Научные труды Ивановского государственного университета. Математика. 1999. Вып. 2. С. 5–7.

2. Савельичева Н. С., Соколов Е. В. Одно необходимое условие нильпотентной аппроксимируемости HNN-расширения нильпотентной группы // Вестник Ивановского государственного университета. Сер.: Естественные, общественные науки. 2015. Вып. 1. С. 64–68.

3. Sokolov E. V. A necessary condition for the residual nilpotence of HNN-extensions // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2018. Vol. 39, № 2. P. 281–285.

4. Куваев А. Е., Соколов Е. В. Необходимые условия аппроксимируемости обобщенных свободных произведений и HNN-расширений групп // Известия высших учебных заведений. Математика. 2017. № 9. С. 36–47.

5. Логинова Е. Д. Финитная аппроксимируемость свободного произведения двух групп с коммутирующими подгруппами // Сибирский математический журнал. 1999. Т. 40, № 2. С. 395–407.

6. Соколов Е. В. Об отделимости подгрупп нильпотентных групп в классе конечных π-групп // Сибирский математический журнал. 2014. Т. 55, № 6. С. 1381–1390.

7. Соколов Е. В. Об отделимости подгрупп нильпотентно аппроксимируемых групп в классе конечных π-групп // Сибирский математический журнал. 2017. Т. 58, № 1. С. 219–229.

8. Иванова Е. А. О нильпотентной аппроксимируемости обобщённых свободных произведений групп : дисс... канд. физ.-мат. наук / Иван. гос. ун-т. Иваново, 2004. 92 с.

9. Соколов Е. В. Некоторые аппроксимационные свойства обобщённых свободных произведений групп // Чебышевский сборник. 2012. Т. 13, вып. 1. С. 143–149.

10. Соколов Е. В. Нильпотентная аппроксимируемость некоторых свободных конструкций групп // Материалы XIII Международной конференции «Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы и приложения», посвящённой 85-летию профессора С. С. Рышкова (Тула, 25–30 мая 2015 г.) — Тула: Изд-во Тул. гос. пед. ун-та им. Л. Н. Толстого, 2015. С. 101–103.

УДК 512.542

Об $\mathfrak{F}$-гиперцентральных дисперсивных подгруппах конечных групп

В. И. Мурашко Беларусь, г. Гомель, Гомельский Государственный Университет имени Франциска Скорины
mvimath@yandex.ru

On the $\mathfrak{F}$-hypercentral subgroups with ordered Sylow tower of finite groups

V. I. Murashka Belarus, Gomel, Francisk Skorina Gomel State University
mvimath@yandex.ru

Рассматриваются только конечные группы. В работе используются стандартные терминология и обозначения, которые, если необходимо, могут быть найдены в [1, 2].

Понятие гиперцентра естественно возникает в связи с определением нильпотентной группы через центральные ряды. Б. Хупперт ввел понятие $\mathfrak{F}$-гиперцентра, где $\mathfrak{F}$ – локальная формация. Л. А. Шеметков распространил понятие $\mathfrak{F}$-гиперцентра на случай ступенчатой формации $\mathfrak{F}$ (см. [1, §7]). Эти определения опираются на понятие экрана (формационной функции).

В монографии [3] Л.А. Шеметковым и А.Н. Скибой было предложено определение $\mathfrak{F}$-гиперцентра для алгебраических систем, включающее случай конечных групп. Это определение не использует понятие экрана (формационной функции) и позволяет ввести понятие $\mathfrak{F}$-гиперцентра группы для произвольной формации $\mathfrak{F}$.

Пусть $\mathfrak{X}$ — класс групп. Напомним [3, с. 127–128], что главный фактор H/K группы G называется *$\mathfrak{X}$-центральным*, если $H/K \rtimes G/C_G(H/K) \in \mathfrak{X}$. *$\mathfrak{X}$-гиперцентром* группы G называется наибольшая нормальная подгруппа G, все G-главные факторы ниже которой $\mathfrak{X}$-центральны в G. Обозначается $\mathrm{Z}_{\mathfrak{X}}(G)$.

Отметим, что согласно классическому результату Д. Барнса и О. Кегеля (см. [2, с. 335]), при таком определении всякая $\mathfrak{F}$-группа совпадает со своим $\mathfrak{F}$-гиперцентром для любой формации $\mathfrak{F}$. Однако, обратное утверждение не всегда верно.

Известно (см., например, [4, с. 10-11]), что $\mathfrak{X}$-гиперцентр существует в любой группе и если $\mathfrak{F}$ — формация, то $\mathrm{Z}_{\mathfrak{F}}(G/\mathrm{Z}_{\mathfrak{F}}(G)) \simeq 1$ и $\mathrm{Z}_{\mathfrak{F}}(G)N/N \leq \mathrm{Z}_{\mathfrak{F}}(GN/N)$. Однако не было даже установлено, что для произвольной нормально наследственной формации гиперцентр является идемпотентном, т.е. $\mathrm{Z}_{\mathfrak{F}}(\mathrm{Z}_{\mathfrak{F}}(G)) = \mathrm{Z}_{\mathfrak{F}}(G)$. Данный результат был получен только в случае, когда $\mathfrak{F}$ — нормально наследственная композиционная формация. При этом доказательство существенным образом опирается на понятие композиционного экрана.

Теорема 1. *Пусть $\mathfrak{F}$ — (нормально) наследственная формация и H — (нормальная) подгруппа группы G. Тогда*

1. $\mathrm{Z}_{\mathfrak{F}}(G) \cap H \leq \mathrm{Z}_{\mathfrak{F}}(H)$.
2. $\mathrm{Z}_{\mathfrak{F}}(G) = \mathrm{Z}_{\mathfrak{F}}(\mathrm{Z}_{\mathfrak{F}}(G))$.
3. $H\mathrm{Z}_{\mathfrak{F}}(G) \in \mathfrak{F}$.

Также нами было установлено следующее свойство $\mathfrak{F}$-гиперцентра.

Предложение 1. *Пусть $\mathfrak{F}$ — класс групп, G_1 и G_2 — группы. Тогда*

$$\mathrm{Z}_{\mathfrak{F}}(G_1 \times G_2) = \mathrm{Z}_{\mathfrak{F}}(G_1) \times \mathrm{Z}_{\mathfrak{F}}(G_2).$$

В работе [5] для формации $\mathfrak{F}$ было начато исследование класса групп $z\mathfrak{F} = (G : \mathrm{Z}_{\mathfrak{F}}(G) = G)$. Напомним, что всякое отображение множества всех классов групп в себя называется операцией на классах групп. Операция c на классах групп называется операцией замыкания, если $\mathfrak{X} \subseteq c\mathfrak{X} = c(c\mathfrak{X}) \subseteq c\mathfrak{H}$ для любых классов групп $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{H}$.

Теорема 2. *Операция z является операцией замыкания.*

Напомним, что группа, имеющая нормальный ряд, факторы которого изоморфны силовским подгруппам, называется дисперивной; через $\pi(G)$ обозначается множество простых делителей порядка группы G; Syl_pG — множество силовских p-подгрупп G. Нами доказано

Теорема 3. *Пусть $\mathfrak{F}$ — z-замкнутая наследственная формация и N — дисперсивная нормальная подгруппа группы G. Следующие утверждения эквивалентны:*

(1) $N \leq \mathrm{Z}_{\mathfrak{F}}(G)$.

(2) $P \leq \mathrm{Z}_{\mathfrak{F}}(N_G(P))$ *для любых* $P \in \mathrm{Syl}_pN$ *и* $p \in \pi(N)$.

Напомним [6], что подгруппа H группы G называется *$\mathbb{P}$-субнормальной* если или $H = G$, или существует цепь подгрупп $H = H_0 < \cdots < H_n = G$ такая, что $|H_i : H_{i-1}|$ — простое число. Группа G называется *w-сверхразрешимой* [6] (*v-сверхразрешимой* [7]), если все силовские (циклические примарные) подгруппы G $\mathbb{P}$-субнормальны в G.

Следствие 1. *Пусть N — нормальная подгруппа группы G, обладающая силовской башней сверхразрешимого типа. Тогда и только тогда*

(a) (Р. Бэр, [8]) $N \leq \mathrm{Z}_{\mathfrak{U}}(G)$, когда $N_G(P)/C_G(P) \in (H|\, H/\mathrm{O}_p(H)$ абелева экспоненты, делящей $p-1)$ для любых $P \in \mathrm{Syl}_p(N)$ и $p \in \pi(N)$.

(b) [9] $N \leq \mathrm{Z}_{w\mathfrak{U}}(G)$, когда $N_G(P)/C_G(P) \in (H|$ все силовские подгруппы $H/\mathrm{O}_p(H)$ абелевы экспоненты, делящей $p-1$, и $\mathbb{P}$-субнормальны$)$ для любых $P \in \mathrm{Syl}_p(N)$ и $p \in \pi(N)$.

(d) [10] $N \leq \mathrm{Z}_{v\mathfrak{U}}(G)$, когда $N_G(P)/C_G(P) \in (H|$ все циклические примарные подгрупп $H/\mathrm{O}_p(H)$ имеют экспоненту, делящую $p-1$, и $\mathbb{P}$-субнормалны$)$ для любых $P \in \mathrm{Syl}_p(N)$ и $p \in \pi(N)$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Шеметков Л. А. Формации конечных групп. — М.: Наука, 1978. 272 с.
2. Doerk K., Hawkes T. Finite soluble groups. — Berlin — New York: Walter de Gruyter, 1992. 891 p.
3. Шеметков Л. А., Скиба А. Н. Формации алгебраических систем. — М.: Наука, 1989. 256 с.
4. Guo, W. Structure theory for canonical classes of finite groups. — Heidelberg — New-York — Dordrecht — London: Springer, 2015. 359 p.
5. Ballester-Bolinches A., Perez-Ramos M. D. On a question of L. A. Shemetkov // Communications in Algebra. 1999. Vol. 27 № 11. P. 5615-5618.
6. Васильев А. Ф., Васильева Т. И., Тютянов В. Н. О конечных группах сверхразрешимого типа // Сиб. мат. журн. 2010. Том 51 № 6. С. 1270-1281.
7. Monakhov V. S., Kniahina V. N. Finite groups with $\mathbb{P}$-subnormal subgroups // Ricerche di Matematica. 2013. Vol. 62. P. 307-322.
8. Baer R. Classes of finite groups and their properties // Illinois J. Math. 1957. Vol. 1. P. 318-326.
9. Murashka V. I. On analogues of Baer's theorems for widely supersoluble hypercenter of finite groups // Asian-European J. Math. 2018. Vol. 11 № 3. 8 p. DOI:10.1142/S1793557118500432.
10. Мурашко В. И. Свойстав класса конечных групп с $\mathbb{P}$-субнормальными циклическими примарными подгруппами // Доклады НАН Беларуси. 2014. Том 58 № 1. С. 5-8.

———————————————————————————————

УДК 512.541

Умножения на факторно делимых абелевых группах ранга 1

Нгуен Т. К. Ч. Россия, г. Москва, Московский государственный педагогический университет
trangnguyen.ru@gmail.com

Multiplications on quotient divisible abelian groups of rank 1

Nguyen T. Q. T. Russia, Moscow, Moscow Pedagogical State University
trangnguyen.ru@gmail.com

Умножением на абелевой группе G называется гомоморфизм $\mu: \ G\otimes G \to G$. Абелева группа G с заданным на ней умножением называется кольцом на группе G. Множество $MultG$ всех умножений на группе G является абелевой группой относительно операции сложения. Зависимость между строением абелевой группы и свойствами колец на ней изучалась в работах Л. Фукса, Р. Бьюмонта, Р. Пирса, С. Фейгельстока, Е. Компанцевой, Р. Андрушкевича и других. В [1] сформулирована проблема изучения TI-групп. Абелева группа G называется TI-группой, если любое кольцо на G является филиальным. Кольцо R называется филиальным, если из $I \lhd J \lhd R$ следует $I \lhd R$ для любых подколец I, J кольца R [2]. В [1] описаны периодические TI-группы, а также периодическая часть смешанных TI-групп.

Настоящая работа посвящена изучению умножений на факторно делимых абелевых группах. Абелева группа G называется факторно делимой, если она не содержит ненулевых делимых периодических подгрупп, но содержит свободную подгруппу F конечного ранга, такую что G/F – делимая периодическая группа. Факторно делимые абелевы группы без кручения были введены в [3]. В [4] понятие факторно делимой группы было обобщено на смешанные абелевы группы, там же показано, что категория факторно делимых групп с квазигогоморфизмами в качестве морфизмов двойственна категории абелевых групп без кручения конечного ранга с квазигогоморфизмами в качестве морфизмов. В [1] показано, что любая абелева группа без кручения ранга 1 является TI-группой. Учитывая, что двойственность У. Уиклесса – А. Фомина сохраняет ранг без кручения, изучение смешанных факторно делимых групп также должно основываться на исследовании смешанных факторно делимых групп ранга 1.

Теорема 1. *Если A – факторно делимая абелева группа ранга 1, то $MultA \cong A$.*

Теорема 2. *Любая факторно делимая группа ранга 1 является TI-группой.*

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Andruszkiewicz R., Woronowicz M. On TI-groups // Recent Results in Pure and Applied Mathematics, Podlasie, 2014. P. 33–41.
2. Ehrlich G. Filial rings // Portugal. Math. 42(1983-1984). P. 185–194.
3. Beaumont R., Pierce R. Torsion free rings // Illinois J. Math., 5 (1961). P. 61—98.
4. A.A. Fomin, W. Wickless Quotient divisible abelian groups // Proc. Amer. Math. Soc. 1998. V 126, No. 1, P. 45–52.

———————————————————————————

УДК 519.4

Обобщенная сопряженность слов в некотором классе групп Артина

О. Ю. Платонова Россия, г. Новомосковск, Новомосковский институт (филиал) «Российский Химико-Технологический Университет им. Д. И. Менделеева»
zarodey@rambler.ru

Generalized conjugacy of words in a certain class of Artin groups

O. U. Platonova Russia, Novomoskovsk, Novomoskovsk Institute (branch) Mendeleev Russian University of chemical technology
zarodey@rambler.ru

Пусть G — конечно порожденная группа Артина с копредставлением
$G = \langle a_1, a_2, ..., a_n; \langle a_i a_j \rangle^{m_{ij}} = \langle a_j a_i \rangle^{m_{ji}} \rangle$, где $\langle a_i a_j \rangle^{m_{ij}} = a_i a_j a_i ...$ - слово длины m_{ij}, состоящее из m_{ij} чередующихся букв a_i и $a_j, i \neq j$, m_{ij} - число, соответствующее симметрической матрице Кокстера, $m_{ij} \geq 2$ при $i \neq j$. Если к определяющим соотношениям группы Артина добавить соотношения вида: $\forall i \in I, a_i^2 = 1$, то получим копредставление соответствующей группы Кокстера.

К. Аппелем и П. Шуппом [1] в 1983 г. выделены классы групп Артина большого и экстрабольшого типа. Если $m_{ij} \geq 3$ для всех $i \neq j$, то G называется группой Артина (Кокстера) большого типа. Если же $m_{ij} > 3$, то группа называется группой Артина (Кокстера) экстрабольшого типа. П. Шупп и К. Аппель показали разрешимость проблемы равенства и сопряженности слов для групп Артина и Кокстера экстрабольшого типа. В. Н. Безверхним и

А.Н. Кузнецовой получено, что группы Артина большого типа являются группами без кручения [8], и в данном классе групп разрешима проблема вхождения в циклическую подгруппу . К. Аппелем и независимо В.Н, Безверхним была решена проблема сопряженности слов [2] , а также В.Н. Безверхним получено решение проблемы обобщенной сопряженности слов для групп Артина большого типа. В.Н. Безверхним были выделены конечно порожденные группы Артина и Кокстера с древесной структурой [3].

Пусть G - конечно порожденная группа Артина. Каждой конечно порожденной группе Артина G соответствует конечный граф Γ^*, между вершинами которого и образующими группы можно установить соответствие такое, что если a_i и a_j являются вершинами ребра e, то ребру соответствует соотношение вида $\langle a_i a_j \rangle^{m_{ij}} = \langle a_j a_i \rangle^{m_{ji}}$ для группы G. Группа Артина G имеет древесную структуру, если граф Γ^* является дерево - графом.

В графе Γ^* всегда можно выделить максимальное дерево-граф Γ, который соответствует группе, имеющей древесную структуру, для которой группа Артина с графом Γ^* является гомоморфным образом.

Теорема 1.[4]. В группе Артина с древесной структурой разрешима проблема равенства слов.

Теорема 2.[4]. В группе Артина с древесной структурой разрешима проблема сопряженности слов.

Теорема 3. [5] Группа Артина с древесной структурой свободна от кручения.

Теорема 4. [6] В группах Артина с древесной структурой разрешима проблема вхождения в циклические подгруппы данных групп.

Теорема 5.[7] В группе Артина с древесной структурой разрешима проблема степенной сопряженности.

Теорема 6.[9] В группах Артина с древесной структурой разрешима проблема пересечения циклических подгрупп, т. е. по любым двум словам $w, v \in G$ можно установить, существуют ли натуральные числа m и n, что слова w^m и v^n равны в группе G.

В данном классе групп нами было получено описание централизатора элементов.

Проблема обобщенной сопряженности слов состоит в том, что необходимо установить существует ли алгоритм, позволяющий для любых двух конечных множеств слов $\{w_i\}_{i=\overline{1,n}}, \{v_i\}_{i=\overline{1,n}}$ из группы определить, существует ли такое z из той же группы, что $\&_{i=1}^{n}(z^{-1}w_i z = v_i)$.

Теорема 6. Централизатор конечно порожденной подгруппы H группы Артина с древесной структурой есть конечно порожденная подгруппа, и существует алгоритм, выписывающий образующие централизатора.

Теорема 7. В группах Артина с древесной структурой типа разрешима проблема обобщенной сопряженности слов.

Теорема 8. Пусть G - конечно порожденная группа Артина с древесной структурой и $\{w_i\}_{i=\overline{1,n}}, \{v_i\}_{i=\overline{1,n}}$ - слова из G . Если F - какое-то решение системы $\&_{i=1}^{n}(z^{-1}w_i z = v_i)$, то множество слов $C_G(H) \cdot F$, где $C_G(H)$ - централизатор подгруппы H , порожденный словами $\{w_i\}_{i=\overline{1,n}}$, является множеством всех решений системы.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Appel K., Schupp P. Artin groups and infinite Coxter groups. // Invent. Math. - 1983. - V. 72. - P. 201-220.

2. Безверхний В.Н. Решение проблемы сопряженности слов в группах Артина и Кокстера большого типа. // Алгоритмические проблемы теории групп и полугрупп: Межвузовский сборник научных трудов. - 1983. - С.26-62.

3. Безверхний В.Н. О группах Артина, Кокстера с древесной структурой. // Алгебра и теория чисел: Современные проблемы и приложения. - Тезисы докладов V Международной конференции. - Тула. - 2003.- С. 33 - 34.

4. Безверхний В.Н., Карпова О.Ю. Проблемы равенства и сопряженности слов в группах Артина с древесной структурой // Известия Тульского государственного университета. Серия Математика. Механика. Информатика. - 2006. - Том 12. - Выпуск 1. - С.67-82.

5. Безверхний В.Н., Карпова О.Ю. О кручении в группах Артина с древесной структурой // Известия Тульского государственного университета. Естественные науки. - 2008. - Выпуск 2. - С.6-17.

6. Безверхний В.Н., Карпова О.Ю. Проблема вхождения в циклическую подгруппу в группах Артина с древесной структурой. // Чебышевский сборник. Тула: ТГПУ, 2008. Т9. Вып.1(25). С.30-50.

7. Безверхний В.Н., Карпова О.Ю. Решение проблемы степенной сопряженности в группах Артина с древесной структурой // Известия Тульского государственного университета. Естественные науки. Естественные науки. - 2009. - Выпуск 3. - С.42-59.

8. Безверхний В.Н., Кузнецова А.Н. Решение проблемы вхождения в циклическую подгруппу в группах Артина большого типа. // Известия ТулГУ. - Серия Математика. Механика. Информатика.. - Т.11. - 2005. - С.76-94.

9. Платонова О.Ю. Проблема пересечения циклических подгрупп в группах Артина с древесной структурой // Чебышевский сборник. - 2010. - Том 11.- Выпуск 2(34). - С.85-96.

Конечные группы с заданными подгруппами

С. В. Путилов Россия, Брянск, ФГБОУ ВО Брянский государственный университет имени академика И.Г. Петровского (БГУ)
algebra.bru@yandex.ru

Finite groups with certain subgroups

S. V. Putilov Russia, Bryansk, Of the Bryansk state University named after academician I. G. Petrovsky (BGU)
algebra.bru@yandex.ru

Теорема 1. *Если в конечной группе нормализатор центра каждой силовской подгруппы имеет индекс равный степени простого числа, то группа не простая.*

Теорема 2. *Если в конечной группе любая ненильпотентная максимальная подгруппа имеет индекс равный простому числу, то группа разрешима или сверхразрешима.*

Теоремы 1-2 усиливают соответственно результаты из [1, лемма 4] и [2, теорема 1.3].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Го Вэньбинь. Конечные группы с заданными индексами нормализаторов силовских подгрупп // Сиб. матем. журн., 1996, Т. 37, № 2, с. 295-300.

2. C. Zhang. A note on finite groups with the indices of some maximal subgroups being primes // Intern. J. of Group Theory, 2017, vol. 6, № 2, pp 17-20.

———————————————————————————

УДК 512.543

Об аппроксимируемости корневыми классами HNN-расширений ограниченных разрешимых групп с центральными связанными подгруппами

Е. В. Соколов Россия, г. Иваново, Ивановский государственный университет
ev-sokolov@yandex.ru

On the root class residuality of HNN-extensions of bounded solvable groups with central associated subgroups

E. V. Sokolov Russia, Ivanovo, Ivanovo State University
ev-sokolov@yandex.ru

Известно [1], что для произвольного класса групп $\mathcal{C}$, замкнутого относительно взятия подгрупп, следующие утверждения равносильны.

1. Для любой группы X и для любой субнормальной последовательности $Z \leqslant Y \leqslant X$ с факторами из класса $\mathcal{C}$ найдется нормальная подгруппа T группы X, лежащая в Z и такая, что $X/T \in \mathcal{C}$.

2. Класс $\mathcal{C}$ замкнут относительно взятия декартовых сплетений.

3. Класс $\mathcal{C}$ замкнут относительно взятия расширений и для любых двух групп X, $Y \in \mathcal{C}$ содержит декартово произведение $\prod_{y\in Y} X_y$, где X_y — изоморфная копия группы X для каждого $y \in Y$.

Будем называть класс $\mathcal{C}$ *корневым*, если он замкнут относительно взятия подгрупп и удовлетворяет любому из утверждений 1—3.

Легко видеть, что корневыми являются многие классы групп, аппроксимируемость которыми рассматривается в литературе. Поэтому, изучая аппроксимируемость той или иной группы произвольным корневым классом групп (удовлетворяющим, возможно, некоторым дополнительным ограничениям), удается продвинуться в решении сразу нескольких задач, ранее исследовавшихся независимо друг от друга. Первые результаты об аппроксимируемости произвольными корневыми классами свободных конструкций групп были получены для обычных свободных произведений и свободных произведений с объединенной подгруппой. Применительно к HNN-расширениям аналогичные исследования начались несколько позже (см. [2, 3, 4, 5]). Настоящая работа также посвящена изучению аппроксимируемости корневыми классами HNN-расширений и в определенной мере дополняет результаты статьи [5].

Пусть всюду далее $G^* = \langle G, t;\ t^{-1}Ht = K,\ \varphi\rangle$ — HNN-расширение группы G с подгруппами H и K, связанными посредством изоморфизма $\varphi\colon H \to K$. Пусть также $H_1 = H$, $K_1 = K$ и, если подгруппы H_i и K_i уже определены, то $H_{i+1} = H_i \cap K_i$, $K_{i+1} = H_{i+1}\varphi$. Если для некоторого $n \geq 1$ имеет место равенство $H_n = K_n$, то, как легко видеть, подгруппа E группы G^*, порожденная подгруппой H_n и элементом t, оказывается расщепляемым расширением подгруппы H_n при помощи бесконечной циклической группы с порождающим t.

Д. И. Молдаванским в [6] был предложен «метод спуска и подъёма совместимых подгрупп», позволяющий в случае, когда подгруппы H и K лежат в центре группы G, свести вопрос о финитной аппроксимируемости HNN-расширения G^* к решению, вообще говоря, более простой задачи о финитной аппроксимируемости расщепляемого расширения E. В [7] тот же подход был применен к исследованию аппроксимируемости HNN-расширений конечными p-группами. Автору удалось обобщить указанный метод на случай аппроксимируемости произвольным корневым классом, состоящим из периодических групп и замкнутым относительно взятия фактор-групп. Ниже приводится несколько утверждений, полученных с использованием данного обобщения.

Напомним, что подгруппа Y группы X называется *π'-изолированной* в этой группе для некоторого множества простых чисел π, если для любого элемента $x \in X$ и для любого простого числа $q \notin \pi$ из включения $x^q \in Y$ следует, что $x \in Y$. Легко видеть, что пересечение любого числа π'-изолированных подгрупп снова является π'-изолированной подгруппой. Поэтому можно говорить о наименьшей π'-изолированной подгруппе группы X, содержащей заданную подгруппу Y. Она называется *π'-изолятором* подгруппы Y в группе X и далее будет обозначаться через $\mathcal{I}_{\pi'}(X,Y)$.

Следуя [8], абелеву группу будем называть *π-ограниченной*, если в произвольной ее фактор-группе все примарные компоненты периодической части, соответствующие числам из множества π, конечны. Нильпотентную (разрешимую) группу назовем *π-ограниченной*, если она обладает конечным центральным (соответственно субнормальным) рядом с абелевыми π-ограниченными факторами. Легко видеть, что полициклические и конечно порожденные нильпотентные группы являются, соответственно, π-ограниченными разрешимыми и π-ограниченными нильпотентными для любого непустого множества простых чисел π. Отметим также, что если π содержит все простые числа, то π-ограниченная разрешимая группа оказывается ограниченной разрешимой в смысле А. И. Мальцева [9].

Всюду далее будем предполагать, что $\mathcal{C}$ — корневой класс групп, состоящий только из периодических групп, содержащий хотя бы одну неединичную группу и замкнутый относительно взятия фактор-групп. Будем считать также, что H и K — собственные центральные подгруппы группы G. Через $\pi(\mathcal{C})$ обозначим множество всех простых делителей порядков элементов всевозможных групп из класса $\mathcal{C}$. Следующая теорема представляет собой обобщение основных результатов работ [6] и [7].

Теорема 1. *Пусть группа G $\mathcal{C}$-аппроксимируема и выполняется хотя бы одно из следующих трех условий:*

(α) *подгруппы H и K конечно порождены;*

(β) *множество $\pi(\mathcal{C})$ конечно и подгруппы H и K $\pi(\mathcal{C})$-ограничены;*

(γ) *класс $\mathcal{C}$ состоит из конечных групп, подгруппы H и K $\pi(\mathcal{C})$-ограничены и $\pi_1(\mathcal{C})'$-изолированы в группе G для некоторого конечного подмножества $\pi_1(\mathcal{C})$ множества $\pi(\mathcal{C})$.*

Пусть также для любого $i \geqslant 0$ и для любой подгруппы $N \leqslant H_{i+1}K_{i+1}$ такой, что $(H_{i+1}K_{i+1})/N \in \mathcal{C}$, фактор-группа $K_i/\mathcal{I}_{\pi(\mathcal{C})'}(K_i, N)$ $\mathcal{C}$-аппроксимируема.

HNN-расширение G^* $\mathcal{C}$-аппроксимируемо тогда и только тогда, когда

(1) *$H_n = K_n$ для некоторого n;*

(2) *подгруппа E, порожденная подгруппой H_n и элементом t, $\mathcal{C}$-аппроксимируема;*

(3) *подгруппы H и K $\pi(\mathcal{C})'$-изолированы в группе G.*

При применении теоремы 1 наибольшую сложность представляет проверка условия, наложенного на изоляторы подгрупп. Для упрощения данной задачи можно рассмотреть такой класс групп $\mathcal{C}$, что множество $\pi(\mathcal{C})$ содержит все простые числа (конкретный пример — класс всех конечных разрешимых групп). В этом случае, как легко видеть, любая подгруппа оказывается $\pi(\mathcal{C})'$-изолированной и исследуемый вопрос сводится к изучению $\mathcal{C}$-аппроксимируемости некоторых гомоморфных образов групп K_i. С помощью данного подхода получается

Следствие 1. *Пусть множество $\pi(\mathcal{C})$ содержит все простые числа, группа G является расширением ограниченной разрешимой (в смысле А. И. Мальцева) группы при помощи $\mathcal{C}$-группы и выполняется хотя бы одно из следующих двух условий:*

(α) *подгруппы H и K конечно порождены;*

(β) *класс $\mathcal{C}$ состоит из конечных групп, подгруппы H и K π'-изолированы в группе G для некоторого конечного множества π простых чисел.*

HNN-расширение G^* $\mathcal{C}$-аппроксимируемо тогда и только тогда, когда $H_n = K_n$ для некоторого n.

Если множество $\pi(\mathcal{C})$ содержит не все простые числа, для применения теоремы 1 необходимо располагать описанием $\pi(\mathcal{C})'$-изоляторов подгрупп группы G. Такое описание получено автором для ограниченных нильпотентных групп и групп, аппроксимируемых ограниченными нильпотентными группами без кручения (см. [8] и [10] соответственно). Эти результаты позволяют доказать

Следствие 2. *Пусть G — расширение $\pi(\mathcal{C})$-ограниченной нильпотентной группы при помощи $\mathcal{C}$-группы и выполняется хотя бы одно из следующих трех условий:*

(α) *подгруппы H и K конечно порождены;*

(β) *множество $\pi(\mathcal{C})$ конечно и подгруппы H и K $\pi(\mathcal{C})$-ограничены;*

(γ) *класс $\mathcal{C}$ состоит из конечных групп, подгруппы H и K $\pi_1(\mathcal{C})'$-изолированы в группе G для некоторого конечного подмножества $\pi_1(\mathcal{C})$ множества $\pi(\mathcal{C})$.*

HNN-расширение G^* $\mathcal{C}$-аппроксимируемо тогда и только тогда, когда

(1) *$H_n = K_n$ для некоторого n;*

(2) *подгруппа E, порожденная подгруппой H_n и элементом t, $\mathcal{C}$-аппроксимируема;*

(3) *подгруппы $\{1\}$, H и K $\pi(\mathcal{C})'$-изолированы в группе G.*

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Sokolov E. V. A characterization of root classes of groups // Communications in Algebra. 2015. Vol. 43. P. 856–860.

2. Tieudjo D. On root-class residuality of some free constructions // JP Journal of Algebra, Number Theory and applications. 2010. Vol. 18, № 2. P. 125–143.

3. Туманова Е. А. Об аппроксимируемости корневыми классами HNN-расширений групп // Моделирование и анализ информационных систем. 2014. Т. 21, № 4. С. 148–180.

4. Туманова Е. А. Об аппроксимируемости корневыми классами групп Баумслага–Солитэра // Сибирский математический журнал. 2017. Т. 58, № 3. С. 700–709.

5. Соколов Е. В., Туманова Е. А. Аппроксимируемость корневыми классами HNN-расширений с центральными циклическими связанными подгруппами // Математические заметки. 2017. Т. 102, № 4. С. 597–612.

6. Молдаванский Д. И. Финитная аппроксимируемость некоторых HNN-расширений групп // Вестник Ивановского государственного университета. Сер.: Биология, Химия, Физика, Математика. 2002. Вып. 3. С. 123–133.

7. Молдаванский Д. И. Аппроксимируемость конечными p-группами некоторых HNN-расширений групп // Вестник Ивановского государственного университета. Сер.: Биология, Химия, Физика, Математика. 2003. Вып. 3. С. 102–116.

8. Соколов Е. В. Об отделимости подгрупп нильпотентных групп в классе конечных π-групп // Сибирский математический журнал. 2014. Т. 55, № 6. С. 1381–1390.

9. Мальцев А. И. О гомоморфизмах на конечные группы // Ученые записки Ивановского государственного педагогического института. 1958. Т. 18. С. 49–60.

10. Соколов Е. В. Об отделимости подгрупп нильпотентно аппроксимируемых групп в классе конечных π-групп // Сибирский математический журнал. 2017. Т. 58, № 1. С. 219–229.

УДК 512.542

О p-нильпотентности группы с нормально вложенными максимальными подгруппам из некоторых силовских подгрупп

А. А. Трофимук Беларусь, г. Гомель, Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины
alexander.trofimuk@gmail.com

On p-nilpotency of a group with normally embedded maximal subgroups of some Sylow subgroups

A. A. Trofimuk Belarus, Gomel, Francisk Skorina Gomel State University
alexander.trofimuk@gmail.com

Рассматриваются только конечные группы. Все обозначения и используемые определения соответствуют [1], [2].

Через $\mathcal{M}(G)$ обозначим множество всех максимальных подгрупп из всех силовских подгрупп группы G. Одним из первых результатов, связанных с изучением строения группы по заданным ограничениям на $\mathcal{M}(G)$, принадлежат Сринивасану, см. [3]. Он установил сверхразрешимость группы G, в которой все подгруппы из $\mathcal{M}(G)$ нормальны в группе G. В дальнейшем группы с ограничениями на подгруппы из $\mathcal{M}(G)$ исследовались в работах многих авторов, см. литературу в [4].

Подгруппа H называется S-вложенной в G, см. [5, 6], если существует нормальная подгруппа N такая, что HN является S-перестановочной в G и $H \cap N \leq H_{sG}$, где H_{sG} — наибольшая S-перестановочная подгруппа группы G, содержащаяся в H. В работе [7] изучено строение группы в зависимости от S-вложенных подгрупп. В частности, из теоремы 2.3 [7] следует p-нильпотентность группы, у которой каждая подгруппа из $\mathcal{M}(P)$ S-вложена в G, где P — силовская p-подгруппа из G и $p \in \pi(G)$ такое, что $(|\,G\,|, p-1) = 1$.

Рассмотрим ещё одно обобщение нормальности:

подгруппа H группы G называется нормально вложенной в G, если для каждой силовской подгруппы P из H существует нормальная подгруппа K группы G такая, что P — силовская подгруппа в K, см. [8, I.7.1]. Ряд результатов, связанных со строением группы с нормально вложенными подгруппами, представлен в [8].

Заметим, что понятия S-вложенной и нормально вложенной подгруппы образуют две различные концепции.

Например, в симметрической группе S_5 степени 5 некоторая максимальная подгруппа H из силовской 2-подгруппы является силовской в нормальной знакопеременной подгруппе A_5, т.е. H нормально вложена в S_5. Однако, H не является S-вложенной. В группе $G_1 = A_4$ максимальная подгруппа M из силовской 2-подгруппы не является нормально вложенной в G_1. Однако, M является S-вложенной.

В настоящей работе изучено строение группы при условии, что каждая подгруппа из $\mathcal{M}(P)$ нормально вложена в G, где P — силовская p-подгруппа из H и $p \in \pi(G)$ такое, что $(|\,G\,|, p-1) = 1$.

Доказывается следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть H — нормальная подгруппа группы G такая, что фактор-группа G/H p-нильпотентна и P — силовская p-подгруппа из H, где $p \in \pi(G)$ такое, что $(|\, G\,|, p-1) = 1$. Если каждая подгруппа из $\mathcal{M}(P)$ нормально вложена в G, то G p-нильпотентна.*

Следствие 1. *Пусть H — нормальная подгруппа группы G такая, что фактор-группа G/H p-нильпотентна и P — силовская p-подгруппа из H, где p — наименьшее в $\pi(G)$. Если каждая подгруппа из $\mathcal{M}(P)$ нормально вложена в G, то G p-нильпотентна.*

Следствие 2. *Пусть P — силовская p-подгруппа из G, где $p \in \pi(G)$ такое, что $(|\, G\,|, p-1) = 1$. Если каждая подгруппа из $\mathcal{M}(P)$ нормально вложена в G, то G p-нильпотентна.*

Следствие 3. *Пусть p — наименьшее в $\pi(G)$ и P — силовская p-подгруппа из G. Если каждая подгруппа из $\mathcal{M}(P)$ нормально вложена в G, то G p-нильпотентна.*

Следствие 4. *Если каждая подгруппа из $\mathcal{M}(G)$ нормально вложена в G, то G имеет силовскую башню сверхразрешимого типа.*

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Huppert B. Endliche Gruppen I. — Berlin; Heidelberg; New York: Springer-Verl., 1967.
2. Монахов В. С. Введение в теорию конечных групп и их классов. — Минск: Вышэйшая школа, 2006.
3. Srinivasan S. Two sufficient conditions for supersolvability of finite group // Israel J. Math. 1980. V. 35. P. 210-214.
4. Monakhov V. S., Trofimuk A. A. Finite groups with subnormal non-cyclic subgroups // J. Group Theory. 2014. V. 17 № 5. P. 889-895.
5. Guo W. Structure Theory for Canonical Classes of Finite Groups. — Berlin; Heidelberg; New-York: Springer-Verlag, 2015.
6. Guo W., Shum K. P., Skiba A. N. On solubility and supersolubility of some classes of finite groups // Sci. China Ser. A. 2009. V. 52 № 2. P. 272-286.
7. Guo W., Lu Y., Niu W. S-embedded subgroups of finite groups // Algebra Logika. 2010. V. 49 № 4. P. 433-450.
8. Doerk K., Hawkes T. Finite soluble groups. — Berlin-New York: Walter de Gruyter, 1992.

УДК 512.543

Об аппроксимируемости корневыми классами некоторых HNN-расширений нильпотентных групп[1]

Е. А. Туманова Россия, г. Иваново, Ивановский государственный университет
helenfog@bk.ru

On the root class residuality of certain HNN-extensions of nilpotent groups

E. A. Tumanova Russia, Ivanovo, Ivanovo State University
helenfog@bk.ru

Понятие корневого класса было введено К. Грюнбергом [1] в 1957 году. Согласно данному им определению класс групп $\mathcal{K}$ называется *корневым*, если он замкнут относительно взятия подгрупп и прямых произведений конечного числа сомножителей, а также удовлетворяет следующему условию, которое теперь обычно называют *условием Грюнберга*: если X — некоторая группа и $1 \leqslant Z \leqslant Y \leqslant X$ — субнормальный ряд группы X такой, что $X/Y \in \mathcal{K}$ и $Y/Z \in \mathcal{K}$, то в группе X найдется нормальная подгруппа T такая, что $T \leqslant Z$ и $X/T \in \mathcal{K}$. Перечисленные в приведенном определении условия дают возможность доказать ряд весьма общих утверждений об аппроксимируемости произвольными корневыми классами, что в свою очередь открывает дорогу к исследованию аппроксимируемости ими свободных конструкций групп. Однако, условие Грюнберга не позволяет легко разграничить корневые и некорневые классы. Это было сделано Е. В. Соколовым [2], установившим, что класс групп $\mathcal{K}$ является корневым тогда и только тогда, когда он замкнут относительно взятия подгрупп и расширений, а также вместе с любыми двумя группами X, $Y \in \mathcal{K}$ содержит декартово произведение $\prod_{y\in Y} X_y$, где X_y — изоморфная копия группы X для каждого $y \in Y$. Из последнего утверждения вытекает, в частности, что пересечение любого числа корневых классов — снова корневой класс. Нетрудно показать также, что класс, состоящий лишь из конечных групп, будет корневым в точности тогда, когда он замкнут относительно взятия подгрупп и расширений.

Легко видеть, что корневыми являются многие классы, аппроксимируемость которыми рассматривается в литературе: класс всех конечных групп, конечных p-групп (где p — простое число), конечных π-групп (где π — непустое множество простых чисел), всех разрешимых групп, конечных разрешимых групп, разрешимых групп без кручения и др. Поэтому, изучая аппроксимируемость произвольным корневым классом групп, как правило, удается получить сразу несколько интересных результатов. Исследованию аппроксимируемости корневыми классами свободных конструкций групп (свободных произведений с объединенной подгруппой и HNN-расширений) в последние годы было посвящено довольно много статей (см., напр., [2]—[9]). В частности, в работе автора [4] этот вопрос изучался применительно к HNN-расширениям с совпадающими связанными подгруппами.

Всюду далее будем считать, что B — некоторая группа, H — ее подгруппа, φ — некоторый автоморфизм подгруппы H и $G = (B,\ t;\ t^{-1}Ht = H,\ \varphi)$ — HNN-расширение группы B, в котором обе связанные подгруппы совпадают с H. Если подгруппа H нормальна в группе B, то она нормальна и во всей группе G. Поэтому можно рассмотреть подгруппу $\mathrm{Aut}_G(H)$ группы $\mathrm{Aut}\,H$, составленную из таких автоморфизмов подгруппы H, которые служат ограничениями на эту подгруппу всевозможных внутренних автоморфизмов группы G. Оказывается, что именно свойства группы $\mathrm{Aut}_G(H)$ во многом определяют, будет ли аппроксимироваться HNN-расширение G тем или иным классом групп. Так, в случае, когда группа $\mathrm{Aut}_G(H)$ конечна, имеет место следующий критерий.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 18-31-00187

Теорема 1 ([4, теорема 3]). *Пусть $\mathcal{K}$ — корневой класс групп, замкнутый относительно взятия фактор-групп, H — нормальная подгруппа группы B, $\mathrm{Aut}_G(H)$ — конечная группа. HNN-расширение G $\mathcal{K}$-аппроксимируемо тогда и только тогда, когда*

1) *группа $\mathrm{Aut}_G(H)$ принадлежит классу $\mathcal{K}$,*

2) *фактор-группа B/H $\mathcal{K}$-аппроксимируема,*

3) *семейство $\mathfrak{S} = \{S \trianglelefteq B \mid B/S \in \mathcal{K} \wedge (H \cap S)\varphi = H \cap S\}$ нормальных подгрупп группы B является фильтрацией, т. е. пересечение всех входящих в него подгрупп тривиально.*

Теорема 1 относится к числу так называемых «фильтрационных» критериев. Общей проблемой при использовании подобных утверждений является сложность проверки свойств фигурирующих в их формулировках семейств подгрупп (в данном случае семейства $\mathfrak{S}$). Поэтому возникает задача отыскания ограничений, при которых осуществить указанную проверку становится проще. В настоящей работе доказана приводимая далее теорема 2, получающаяся из теоремы 1 путем наложения дополнительных условий на группу B, а также на класс $\mathcal{K}$ или подгруппу H.

Напомним [10], что абелева группа называется *π-ограниченной* для некоторого множества простых чисел π, если в каждой ее фактор-группе все примарные компоненты периодической части, соответствующие числам из множества π, конечны. Нильпотентная группа называется *π-ограниченной*, если она обладает конечным центральным рядом с абелевыми π-ограниченными факторами. В работе [10] исследованы некоторые свойства изоляторов подгрупп π-ограниченных нильпотентных групп, которые и играют решающую роль при проверке третьего условия из формулировки теоремы 1.

Теорема 2. *Пусть $\mathcal{K}$ — корневой класс групп, замкнутый относительно взятия фактор-групп, $\pi(\mathcal{K})$ — множество всех простых делителей порядков всевозможных конечных $\mathcal{K}$-групп, B — $\pi(\mathcal{K})$-ограниченная нильпотентная группа, H — нормальная подгруппа группы B, $\mathrm{Aut}_G(H)$ — конечная группа.*

Если класс $\mathcal{K}$ содержит хотя бы одну непериодическую группу, то группа G $\mathcal{K}$-аппроксимируема тогда и только тогда, когда $\mathrm{Aut}_G(H) \in \mathcal{K}$.

Если класс $\mathcal{K}$ состоит только из периодических групп и выполняется хотя бы одно из следующих условий:

1) *все группы из класса $\mathcal{K}$ конечны,*

2) *множество $\pi(\mathcal{K})$ конечно,*

3) *подгруппа H конечно порождена,*

то группа G $\mathcal{K}$-аппроксимируема тогда и только тогда, когда $\mathrm{Aut}_G(H) \in \mathcal{K}$ и фактор-группа B/H $\mathcal{K}$-аппроксимируема.

Конкретными примерами применения теоремы 2 служат следующие два утверждения.

Следствие 1. *Пусть π — множество всех простых чисел, B — π-ограниченная нильпотентная группа, H — нормальная подгруппа группы B, $\mathrm{Aut}_G(H)$ — конечная группа. Тогда следующие утверждения равносильны.*

1) *Группа G аппроксимируется разрешимыми группами.*

2) *Группа G аппроксимируется конечными разрешимыми группами.*

3) *Группа $\mathrm{Aut}_G(H)$ разрешима.*

Следствие 2. *Пусть π — непустое множество простых чисел, B — π-ограниченная нильпотентная группа, H — нормальная подгруппа группы B, $\mathrm{Aut}_G(H)$ — конечная группа. Группа G аппроксимируется классом $\mathcal{FS}_\pi$ всех конечных разрешимых π-групп тогда и только тогда, когда $\mathrm{Aut}_G(H) \in \mathcal{FS}_\pi$ и периодическая часть фактор-группы B/H является π-группой.*

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Gruenberg K. W. Residual properties of infinite soluble groups // Proc. London Math. Soc. Ser. 3. 1957. Vol. 7. P. 29–62.

2. Sokolov E. V. A characterization of root classes of groups // Communications in Algebra. 2015. Vol. 43. P. 856–860.

3. Туманова Е. А. Об аппроксимируемости обобщенных свободных произведений корневыми классами групп // Моделирование и анализ информационных систем. 2013. Т. 20, № 1. С. 133–137.

4. Туманова Е. А. Об аппроксимируемости корневыми классами HNN-расширений групп // Моделирование и анализ информационных систем. 2014. Т. 21, № 4. С. 148–180.

5. Туманова Е. А. Об аппроксимируемости корневыми классами групп обобщенных свободных произведений с нормальным объединением // Известия вузов. Математика. 2015. № 10. С. 27–44.

6. Соколов Е. В. Об аппроксимируемости относительно сопряженности некоторых свободных конструкций групп корневыми классами конечных групп // Математические заметки. 2015. Т. 97, № 5. С. 767–780.

7. Соколов Е. В., Туманова Е. А. Достаточные условия аппроксимируемости некоторых обобщенных свободных произведений корневыми классами групп // Сибирский математический журнал. 2016. Т. 57, № 1. С. 171–185.

8. Туманова Е. А. Об аппроксимируемости корневыми классами групп Баумслага–Солитэра // Сибирский математический журнал. 2017. Т. 58, № 3. С. 700–709.

9. Соколов Е. В., Туманова Е. А. Аппроксимируемость корневыми классами HNN-расширений с центральными циклическими связанными подгруппами // Математические заметки. 2017. Т. 102, № 4. С. 597–612.

10. Соколов Е. В. Об отделимости подгрупп нильпотентных групп в классе конечных π-групп // Сибирский математический журнал. 2014. Т. 55, № 6. С. 1381–1390.

2. Полугруппы и универсальные алгебры

УДК 512.572

Прямые суммы сильно связных унарных алгебр, их тождества и квазитождества

В. К. Карташов Россия, г. Волгоград, Волгоградский государственный социально-педагогический университет
А. В. Карташова Россия, г. Волгоград, Волгоградский государственный социально-педагогический университет
kartashovvk@yandex.ru, kartashovaan@yandex.ru

Direct sums of strongly connected unary algebras, their identities and quasiidentities

V. K. Kartashov Russia, Volgograd, Volgograd State Socio-Pedagogical University
A. V. Kartashova Russia, Volgograd, Volgograd State Socio-Pedagogical University
kartashovvk@yandex.ru, kartashovaan@yandex.ru

Унарная алгебра $\mathcal{A} = \langle A, \Omega \rangle$ называется *сильно связной*, если она порождается любым своим элементом.

Если унарная алгебра $\mathcal{A}$ представляется в виде объединения попарно непересекающихся унарных алгебр $\mathcal{A}_i$, $i \in I$, то $\mathcal{A}$ называется их *прямой суммой.*

Унарная алгебра $\mathcal{A} = \langle A, \Omega \rangle$ называется *коммутативной* , если $fg(a) = gf(a)$ для любых $f, g \in \Omega$, $a \in A$.

В работе рассматриваются прямые суммы сильно связных коммутативных унарных алгебр. В дальнейшем мы будем называть эти алгебры ssc-алгебрами (sums of strongly connected algebras).

Такие алгебры широко используются в различных областях математики, в частности, в теории автоматов, в дискретной математике ([1], [2]).

Далее через Ω^* обозначается свободный моноид слов над алфавитом Ω.

Теорема 1. *Конечная унарная алгебраь $\langle A, \Omega \rangle$ конечного типа является ssc-алгеброй тогда и только тогда, когда она принадлежит многообразию, определяемому тождеством вида $wx = x$ для некоторого слова $w \in \Omega^*$, содержащего все сигнатурные символы из Ω.*

Отсюда вытекает

Следствие 1. *Конечные ssc-алгебры образуют псевдомногообразие.*

Основное внимание в данном сообщении уделяется базисам тождеств и квазитождеств ssc-алгебр.

Пусть $\mathfrak{M}$ – многообразие алгебраических систем сигнатуры Ω и $T_V(\mathfrak{M})$ – эквациональная теория класса $\mathfrak{M}$ (т. е. совокупность всех тождеств, истинных на классе $\mathfrak{M}$). Подмножество $\Sigma \subseteq T_V(\mathfrak{M})$ называется *базисом тождеств* многообразия $\mathfrak{M}$, если класс всех алгебраических систем, на котором истинны все тождества из Σ, совпадает с $\mathfrak{M}$.

Базис Σ называется *независимым*, если для любого тождества $\varphi \in \Sigma$ найдется алгебраическая система $\mathcal{A}$ сигнатурыΩ, на которой все тождества из $\Sigma \setminus \{\varphi\}$ истинны, а φ ложно. Аналогично определяется независимый базис квазитождеств.

Г.Биркгоф [3] доказал, что всякая конечная унарная алгебра конечного типа имеет конечный базис тождеств. А.И. Мальцевым было установлено [4, с.352] установлено, что всякое многообразие унарных алгебр с одной операцией имеет базис, состоящий из одного тождества.

Эти работы явились источником новых идей вокруг проблемы нахождения базисов тождеств и квазитождеств.

Позднее в [5] было доказано, что любое многообразие коммутативных унарных алгебр конечного типа имеет конечный базис тождеств.

В работах [6], [7] доказано, что любой конечный унар имеет конечный базис квазитождеств, а любой конечнопорожденный унар – независимый базис квазитождеств. При этом установлено существование континуума квазимногообразий унаров, которые не имеют независимого базиса квазитождеств.

И.П. Бесценный [8] приводит необходимые и достаточные условия существования конечного базиса для трехэлементной унарной алгебры конечного типа. В.А. Горбуновым [9] был приведен пример трехэлементной унарной алгебры, не имеющей независимого базиса квазитождеств. В [10] рассматриваются унарные алгебры специального типа с нулем, найден критерий существования конечного базиса квазитождеств для таких алгебр.

В настоящем сообщении анонсируется

Теорема 2. *Всякая конечная коммутативная ssc-алгебра имеет конечный базис квазитождеств.*

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ciŕic M., Bogdanovic S. Lattices of subautomata and direct sum decompositions of automata // Algebra Colloquium. 1999. Volume 6 № 1. P. 71-88.

2. Карташова А. В. О решетках конгруэнций прямых сумм сильно связных коммутативных унарных алгебр // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2003. Том 13 выпуск 4(2). С. 57-62.

3. Birkhoff G. On the structure of abstract algebras // Proc. Camb. Philos. Soc. 1935. Volume 31 (part 4). P. 432-454.

4. Мальцев А. И. Алгебраические системы. — М.: Наука, 1970. 392 с.

5. Kartashov V. K. On the finite axiomatizability of varieties of commutative unary algebras // J. Math. Sci. 2010. Volume 164 № 1. P. 56-59.

6. Карташов В. К. Квазимногообразия унаров // Математические заметки. 1980. Том 27 № 1. С. 7-20.

7. Карташов В. К. Квазимногообразия унаров с конечным числом циклов // Алгебра и логика. 1980. Том 19 № 2. С. 173-193.

8. Бесценный И. П. Квазитождества конечных унарных алгебр // Алгебра и логика. 1989. Том 28 № 5. С. 493-512.

9. Горбунов В. А. Покрытия в решетках квазимногообразий и независимая аксиоматизируемость // Алгебра и логика. 1977. Том 16 № 5. С. 507-548.

10. Casperson D., Hyndman J., Mason J., Nation J. B., Schaan B. Existence of finite bases for quasi-equations of unary algebras with 0 // Internat. J. Algebra Comput. 2015. Volume 25 № 6. P. 927-950.

УДК 512.567.5

Строение дистрибутивных решеток топологий коммутативных унарных алгебр

А. В. Карташова Россия, г. Волгоград, Волгоградский государственный социально-педагогический университет
kartashovaan@yandex.ru

The structure of distributive topology lattices of commutative unary algebras

A. V. Kartashova Russia, Volgograd, Volgograd State Socio-Pedagogical University
kartashovaan@yandex.ru

Пусть $\mathcal{A} = \langle A, \Omega\rangle$ – произвольная алгебра и σ – топология на ее носителе A. Сигнатурная n-арная операция F называется *непрерывной* относительно топологии σ, если для любых элементов $a_1, a_2, \ldots, a_n \in A$ и произвольной окрестности U элемента $F(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ найдутся окрестности $U_1, U_2, \ldots, U_n$ элементов $a_1, a_2, \ldots, a_n$, соответственно, такие, что $F(U_1, U_2, \ldots, U_n) \subseteq U$. Если относительно топологии σ непрерывна каждая сигнатурная операция алгебры $\mathcal{A}$, то σ называется *топологией на алгебре* $\mathcal{A}$. Нетрудно убедиться, что такие топологии образуют полную решетку по включению. Будем называть ее решеткой топологий алгебры $\mathcal{A}$ и обозначать через $\Im(\mathcal{A})$. Решетка, двойственная к решетке конгруэнций произвольной алгебры $\mathcal{A}$, вкладывается в решетку $\Im(\mathcal{A})$ в качестве подрешетки [1].

В работе [1] охарактеризованы классы унаров, т. е. алгебр с одной унарной операцией, решетка топологий которых является модулярной, дистрибутивной, булевой, решеткой с дополнениями, с псевдодополнениями, либо цепью. Описан класс дистрибутивных решеток, реализуемых решетками топологий унаров.

Унарная алгебра $\mathcal{A} = \langle A, \Omega\rangle$ называется *коммутативной* , если $fg(a) = gf(a)$ для любых $f, g \in \Omega$, $a \in A$.

В [2] описаны коммутативные унарные алгебры, решетка топологий которых является цепью.

В данной заметке приведено описание класса всех коммутативных унарных алгебр с конечным числом операций, решетки топологий которых дистрибутивны либо булевы. Охарактеризован класс дистрибутивных решеток, реализуемых решетками топологий коммутативных унарных алгебр с конечным числом операций.

Унарная алгебра называется *сильно связной*, если она порождается любым своим элементом.

Пусть $\mathcal{A} = \langle A, \Omega\rangle$ – коммутативная сильно связная унарная алгебра и Ω^* –свободный моноид слов с порождающим множеством Ω относительно композиции. Будем называть алгебру $\mathcal{A}$ *циклической*, если найдется такое слово $u \in \Omega^*$, что для любой операции $f \in \Omega$ справедливо равенство $f = u^n$, где n – некоторое целое неотрицательное число.

Далее обозначим через $\mathcal{E}$ класс всех таких конечных коммутативных унарных алгебр $\mathcal{A}$, что выполнены следующие условия:

1) все однопорожденные подалгебры алгебры $\mathcal{A}$ содержат не более двух элементов;

2) алгебра $\mathcal{A}$ имеет одноэлементную подалгебру $\langle\{e\}, \Omega\rangle$, и для любых двух различных элементов a, b алгебры $\mathcal{A}$, отличных от e, найдется операция $f \in \Omega$ такая, что $f(a) = a$, $f(b) = e$.

Теорема 1. *Пусть $\mathcal{A} = \langle A, \Omega\rangle$ – произвольная коммутативная унарная алгебра с конечным числом операций. Тогда решетка $\Im(\mathcal{A})$ топологий этой алгебры дистрибутивна в том и только в том случае, если выполнено одно из следующих условий:*

1) $\mathcal{A}$ – конечная циклическая алгебра;

2) $\mathcal{A}$ – однопорожденная алгебра с порождающим элементом a, причем $\langle A \setminus \{a\}, \Omega\rangle$ – конечная циклическая алгебра;

3) $\mathcal{A} \in \mathcal{E}$.

Теорема 2. *Пусть $\mathcal{A} = \langle A, \Omega\rangle$ – произвольная коммутативная унарная алгебра с конечным числом операций. Тогда решетка $\Im(\mathcal{A})$ топологий этой алгебры булева в том и только в том случае, если выполнено одно из следующих условий:*

1) $\mathcal{A}$ – конечная циклическая алгебра и число $|A|$ свободно от квадратов;

2) $\mathcal{A}$ – однопорожденная алгебра с порождающим элементом a, причем $\langle A \setminus \{a\}, \Omega\rangle$ – конечная циклическая алгебра и число $|A| - 1$ свободно от квадратов;

3) $\mathcal{A} \in \mathcal{E}$.

Теорема 3. *Пусть L – произвольная дистрибутивная решетка. Тогда L изоморфна решетке $\Im(\mathcal{A})$ топологий некоторой коммутативной унарной алгебры $\mathcal{A}$ с конечным числом операций тогда и только тогда, когда L изоморфна решетке L_n натуральных делителей некоторого целого неотрицательного числа n.*

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Kartashova A. V. On lattices of topologies of unary algebras // J. of Math. Sci. 2003. Volume 114 № 2. P. 1086-1118.

2. Карташова А. В. О конечных решетках топологий коммутативных унарных алгебр // Дискрет. матем. 2009. Том 21 выпуск 3. С. 119-131.

УДК 512.567.5 + 512.572 + 512.579

Полигоны над прямоугольными группами с тождествами в решётке конгруэнций

И. Б. Кожухов Россия, г. Москва, Национальный исследовательский университет «МИЭТ», МГУ им. М. В. Ломоносова.
kozhuhov_i_b@mail.ru

Acts over rectangular groups with identities in congruence lattice

I. B. Kozhukhov Russia, Moscow, National Research University «MIET», Moscow Lomonosov State University.
kozhuhov_i_b@mail.ru

Решётку конгруэнций универсальной алгебры A мы будем обозначать Con$A$. Это полная решётка с наименьшим элементом $\Delta = \{(a, a) | a \in A\}$ и наибольшим элементом $\nabla = A \times A$. Решётка конгруэнций является важной характеристикой алгебры, и изучению решёток конгруэнций алгебр и алгебр с условиями на решётку конгруэнций посвящено значительное число работ. К ним относятся работы по простым алгебрам (т.е. Con$A = \{\Delta, \nabla\}$) – простым группам, полугруппам, кольцам, модулям, а также артиновым и нётеровым, подпрямо неразложимым, дистрибутивным и модулярным алгебрам. В последнем случае в решётке конгруэнций выполняется нетривиальное решёточное тождество: тождество дистрибутивности $(x \vee y) \wedge z = (x \wedge z) \vee (y \wedge z)$ или модулярности $(x \wedge z) \vee (y \wedge z) = (x \vee (y \wedge z)) \vee z$. В связи с этим кажется естественным рассмотрение алгебр A, у которых решётка Con$A$ удовлетворяет хотя бы одному нетривиальному тождеству.

Полигон X над полугруппой S – это множество, на котором действует полугруппа, т.е. определено отображение $X \times S \to X$, $(x, s) \mapsto xs$, удовлетворяющее условию $x(st) = (xs)t$ при $x \in X$, $s, t \in S$ (см. [1]). Полигон над полугруппой – это алгебраическая модель автомата (здесь X – множество состояний, S – полугруппа входных сигналов). В то же время понятие полигона тождественно понятию унарной алгебры.

Прямоугольной группой называется полугруппа $S = L \times G \times R$, где L – полугруппа левых нулей, G – группа, а R – полугруппа правых нулей. Прямоугольная группа является рисовской матричной полугруппой (см. [2], гл. 3) $\mathcal{M}(G, I, \Lambda, P)$, где $p_{\lambda i} = e$ при всех $i \in I$, $\lambda \in \Lambda$ (e – единица группы G).

В работе [3] была анонсирована следующая теорема: при $|I|, |\Lambda| < \infty$ всякий полигон над полугруппой $S = \mathcal{M}(G, I, \Lambda, P)$ обладает следующим свойством: Con$X$ удовлетворяет нетривиальному тождеству в том и только том случае, если X конечен. Оказывается, в случае прямоугольных групп от условия $|I| < \infty$ можно отказаться. Таким образом, имеет место

Теорема 1. *Пусть X – полигон над прямоугольной группой $S = L \times G \times R$, где $|G| < \infty$. Решётка конгруэнций Con$X$ удовлетворяет нетривиальному тождеству в том и только том случае, если X конечен.*

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Kilp M., Knauer U., Mikhalev A. V. Monoids, acts and categories. — N.-Y.—Berlin, W. de Gruyter, 2000. 529 p.

2. Клиффорд А., Престон Г. Алгебраическая теория полугрупп, т. 1. – М., Мир, 1972. 286 с.

3. Кожухов И. Б., Пряничников А. М. Полигоны с тождествами в решётке конгруэнций / Материалы международной конференция «Алгебра и теория алгоритмов»: тезисы докладов. Международная конференция (Иваново, 21-24 марта 2018 г.) — Иваново, 2018. С. 120-121.

УДК 512.577

Автоморфизмы некоторых конечных магм [1]

А. В. Литаврин Россия, г. Красноярск, Сибирский федеральный университет
asplitav@gmail.com

Automorphisms of some finite magmas

A. V. Litavrin Russia, Krasnoyarsk, Siberian Federal University
asplitav@gmail.com

Как обычно, *магмой* называем алгебраическую систему с одной бинарной алгебраической операцией. В частности, магмами являются полугруппы, моноиды, квазигруппы и группы. Для каждой алгебраической системы $\mathfrak{A}$ определена группа автоморфизмов Aut ($\mathfrak{A}$) (см. [1, 1, стр. 21]).

[1] Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант 16-01-00707.

Данная работа посвящена изучению групп автоморфизмов некоторых магм $\mathfrak{A} = (V, *)$ с конечным множеством носителем V и порождающим подмножеством $M \subset V$ таким, что справедливы равенства $V = M \cup (M * M)$, $|M * M| = |M| \cdot |M|$. Основные результаты работы представлены ниже в виде теорем 1 и 2.

Изучение автоморфизмов классических групп началось достаточно давно. В 1928 году вышла работа [2], которая дает описание автоморфизмов группы $PSL_n(P)$ над произвольным полем P для $n \geqslant 3$. Исследования автоморфизмов классических линейных групп отражаются в известных обзорах [3], [4] и др. Кроме того, активно изучались автоморфизмы групп Шевалле (с.м. [5], [6] ,[7]). С группами автоморфизмов традиционно связывают следующую задачу:

Задача 1. *Описать группу автоморфизмов Aut* $(\mathfrak{A})$ *некоторой фиксированной алгебраической системы* $\mathfrak{A}$.

К примеру, Дж.Гиббс в 1970 году решил задачу 1, когда $\mathfrak{A}$ есть унипотентный радикал U в подгруппе Бореля группы лиева типа над полем P при $P = 2P = 3P$ (см. [5]). Описание группы автоморфизмов $Aut(U)$ завершил В.М. Левчук в 1990 году (см. [6]).

В 1946 году вышла работа Г.Биркгофа [8], в которой доказывается следующее утверждение: *каждая группа является группой всех автоморфизмов некоторой алгебры.* В 1958 году Д. Гроот опубликовал работу [9], в которой было установлено, что *всякая группа есть группа всех автоморфизмов некоторого кольца.* Оба этих результата можно интерпретировать как решение следующей задачи:

Задача 2. *Для фиксированной группы G и фиксированного класса $\mathcal{K}$ алгебраических систем определить системы $\mathfrak{A} \in \mathcal{K}$ (не обязательно все) такие, что $G \cong H \leq Aut$ $(\mathfrak{A})$ для некоторой подгруппы H группы Aut* $(\mathfrak{A})$. *Либо показать, что в классе $\mathcal{K}$ таких систем $\mathfrak{A}$ нет.*

Говорят, что определено *представление группы G автоморфизмами алгебраической системы* $\mathfrak{A}$, если определен некоторый гомоморфизм $g: \ G \to Aut\ (\mathfrak{A})$. Еще в таком случае говорят, что задана пара $(\mathfrak{A}, G)$. Представление называют *точным*, если гомоморфизм $g: \ G \to Aut\ (\mathfrak{A})$ является изоморфизмом (в этом случае, пара $(\mathfrak{A}, G)$ называется точной).

О различных типах задач, связанных с автоморфизмами, подробно написано в [1, стр 122]. Например, задача 1 – задача г) в [1, стр 124]. Параграф 2 в [1, стр 108] посвящен вопросам существования представлений некоторой группы G группами автоморфизмов подходящих алгебраических систем $\mathfrak{A}$. Последнее тесно связано с задачей 2.

В работе [10] была приведена классификация конечных магм (группоидов) $\mathfrak{A} = (X, *)$ с 2-транзитивной группой автоморфизмов Aut $(\mathfrak{A})$ на множестве X.

Как обычно, множество всех перестановок α конечного множества $\{1, ..., n\}$ обозначим символом S_n. В данной работе решается задача 2, когда $\mathcal{K}$ – это класс конечных магм без полугрупп и квазигрупп, а $G = S_n$. Частные решение этой задачи дает

Теорема 1. *Для всякого натурального числа k симметрическая группа перестановок S_k изоморфна группе автоморфизмов Aut* $(\mathfrak{D})$ *некоторой магмы $\mathfrak{D} = (D, *)$ с конечным множеством носителем D, причем $|D| = k + k^2$. При этом в магме $\mathfrak{D}$ можно выделить подмагму $\mathfrak{T}$, которая будет являться полугруппой. Все элементы полугруппы $\mathfrak{T}$ будут идемпотентами. Кроме того, в магме $\mathfrak{D}$ можно выделить $m \geqslant k$ различных подмагм, которые будут являться моноидами.*

Таким образом, определены точные пары $(\mathfrak{D}, S_k)$, где $\mathfrak{D}$ – системы из теоремы 1.

В связи с задачей 2 для S_k, в данной работе, возникают магмы $\mathfrak{S}$, которые вводит

Определение 1. *Для каждого натурального числа k вводим следующие множества:*

$$M_k := \{a_1, ..., a_k\}, \quad B_k := \{b_{ij} \mid i, j = 1, ..., k\}, \quad V_k := M_k \cup B_k,$$

$$S_k^m := \{(\varepsilon_1, ..., \varepsilon_m) \mid \varepsilon_i \in S_k, \ i = 1, ..., m\}.$$

Далее, фиксируем кортеж $q = (\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, ..., \beta_k, \beta'_1, ..., \beta'_k) \in S_k^{2+2k}$ и два связанных с этим кортежем множества $\widetilde{Q} := \{\alpha_1, \alpha_2\}, \ Q := \{\beta_1, ..., \beta_k, \beta'_1, ..., \beta'_k\}$.

Если $\alpha \in S_n$ и $x \in \{1, ..., n\}$, то $\alpha(x)$ – образ элемента x под действием перестановки $\alpha(x)$.

На множестве V_k зададим бинарную алгебраическую операцию $*$ такую, что справедливы равенства:

$$\begin{gathered} a_i * a_j = b_{\alpha_1(i), \alpha_2(j)}, \quad a_s * b_{ij} = b_{\beta_s(i), \beta_s(j)}, \\ b_{ij} * a_s = b_{\beta'_s(i), \beta'_s(j)}, \quad b_{mv} * b_{ij} = b_{mj} \quad (m, v, s, i, j = 1, ..., k). \end{gathered} \tag{1}$$

Тогда через

$$\mathfrak{S} = \mathfrak{S}(k, q) = (V_k, *)$$

обозначим магму $\mathfrak{S}$ с множеством носителем V_k и бинарной алгебраической операцией $*$, которую задают равенства (1).

Данные магмы $\mathfrak{S}$ не обладают нейтральными элементами и не являются полугруппой или квазигруппой. Не трудно увидеть, что множество M_k удовлетворяет равенству $V_k = M_k \cup (M_k * M_k)$, следовательно, M_k – *порождающее множество* магмы $\mathfrak{S}$.

Символом $C(\widetilde{Q})$ будем обозначать централизатор множества $\widetilde{Q}$ в группе S_k. В множестве S_k выделим подмножество $A(Q)$ перестановок α таких, что при любых номерах $1 \leqslant s, i \leqslant k$ будут справедливы тождества

$$\beta_{\alpha(s)}(\alpha(i)) = \alpha(\beta_s(i)), \quad \beta'_{\alpha(s)}(\alpha(i)) = \alpha(\beta'_s(i)).$$

Можно показать, что $A(Q)$ – подгруппа в S_k.

В данной работе для конечных магм $\mathfrak{S} = (V_k, *)$ исследуется задача 1; результаты представлены в виде

Теорема 2. *Для магмы $\mathfrak{S} = (V_k, *)$ справедлив изоморфизм*

$$Aut\ (\mathfrak{S}) \cong C(\widetilde{Q}) \cap A(Q).$$

Кроме того, для всякого автоморфизма ϕ можно подобрать перестановку $\alpha \in C(\widetilde{Q}) \cap A(Q)$ такую, что действие ϕ на V_k определяется правилом

$$\phi \ : \ a_i \to a_{\alpha(i)}, \quad i = 1, ..., k; \qquad b_{uv} \to b_{\alpha(u), \alpha(v)}, \quad u, v = 1, ..., k.$$

Из теоремы 2 видно, что магмы $\mathfrak{S}(k, q) = (V, *)$ не обладают транзитивными на V группами автоморфизмов, при любых параметрах $k \in \mathbb{N}$ и $q \in S_k^{2+2k}$. Таким образом, эти магмы не попадают в классификацию из [10].

Стоит отметить, что при описании групп автоморфизмов в работе [6] использовались свойства характеристических подсистем. При исследовании групп автоморфизмов магм $\mathfrak{S}$ также используется характеристичность некоторых подмагм и, что интересно некоторых, подмножеств множества носителя, которые даже не являются подмагмами.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Плоткин Б.И. Группы автоморфизмов алгебраических систем – Москва: Издательство Наука. 1966. 604 С.

2. Schreier O., van der Varden B.L. Die Automorphismen der projektiven Gruppen // Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg, 1928, Vol. 6, P. 303вЂ“322.

3. Мерзляков Ю.И. Автоморфизмы классических групп. – Москва: Издательство Мир. 1976.

4. Hahn A. J. Homomorphisms of algebraic and classical groups: a survay / A. J. Hahn, D. G. James, B. Weisfelier // Can. Math. Soc. – 1984. – No. 4. – P. 249–296.

5. Gibbs J. Automorphisms of certain unipotent groups // J. Algebra. 1970. Vol. 14. No. 2. P. 203–228.

6. Левчук В.М. Автоморфизмы унипотентных подгрупп групп Шевалле //Алгебра и логика. 1990. Т. 29. № 2. С. 141–161. №3. С. 316 – 338.

7. Bunina E. I. Automorphisms of Chevalley groups of different types over commutative rings // J. Algebra. 2012. Vol. 355. No.1. P. 154 – 170.

8. Биркгоф Г. О группах автоморфизмов. Revista de la Union Math. Argentina 11, № 4, 1946, С. 155-157.

9. Groot, J. Automorphism groups of rings, in: Int. Congr. of Mathematicians, Edinburgh, 1958, P. 18.

10. Ильиных А.П. Классификация конечных группоидов с 2-транзитивной группой автоморфизмов // Математический сборник. 1994. Т.185. № 6. С. 51–78.

УДК 512.57

Алгебры n-местных операций и мультиопераций

Н. А. Перязев Россия, г. Санкт-Петербург, Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет «ЛЭТИ» им. В. И. Ульянова (Ленина)
nikolai.baikal@gmail.com

Algebras of n-ary Operations and Multioperations

N. A. Peryazev Russia, Saint-Petersburg, The First Electrotechnical University
nikolai.baikal@gmail.com

Пусть A – произвольное конечное множество, $B(A)$ — множество всех подмножеств A, n — натуральное число. Отображение f декартовой степени A^n в $B(A)$ называется n-местной мультиоперацией на A. Если при этом все образы одноэлементные, то f называем n-местной операцией. Для множества всех n-местных мультиопераций на A используем обозначение M_A^n, а для множества всех n-местных операций — O_A^n. Очевидно выполняется $O_A^n \subset M_A^n$.
Ранг k мультиоперации определим так: $k = |A|$.

Мультиоперации $f \in M_A^n$, где $A = \{a_0, ..., a_{k-1}\}$ можно представлять как отображения

$$f : \{2^0, 2^1, ..., 2^{k-1}\}^n \to \{0, 1, ..., 2^k - 1\},$$

получаемых из f при кодировке

$$a_i \to 2^i; \ \ \varnothing \to 0; \ \ \{a_{i_1}, ..., a_{i_s}\} \to 2^{i_1} + ... + 2^{i_s}.$$

Ввиду этой кодировки не умоляя общности используем обозначения M_k^n и O_k^n для множества всех n-местных мультиопераций и операций ранга k.

Для задания конкретной мультиоперации удобно пользоваться векторной формой. Если f n-местная мультиоперация ранга k, то $f = (\alpha_1, ..., \alpha_{k^n})$ векторная форма, где $\alpha_i \in \in \{0, 1, ..., 2^k - 1\}$ и $\alpha_i = f(2^{i_1}, ..., 2^{i_n})$, а $(i_1, ..., i_n)$ есть представление $i-1$ в системе исчисления по основанию k n-разрядным числом.

Определим некоторые мультиоперации так:
n-местная пустая мультиоперация
$\theta^n(a_1, ..., a_n) = \varnothing$;
n-местная полная мультиоперация
$\pi^n(a_1, ..., a_n) = A$;
n-местная мультиоперация проектирования по i аргументу
$e_i^n(a_1, ..., a_n) = \{a_i\}$;
бинарная мультиоперация пересечения
$f_\cap(a, b) = \{a\} \cap \{b\}$.

Приведем примеры мультиопераций ранга 3 в векторной форме:
$\theta^2 = (000000000)$, $\pi^2 = (777777777)$, $f_\cap = (100020004)$, $e_1^2 = (111222444), e_2^2 = (124124124)$.

Определим следующие метаоперации на множестве мультиопераций:
Суперпозиция мультиопераций $f \in M_A^n$ и $f_1, ..., f_n \in M_A^m$

$$(f * f_1, ..., f_n)(a_1, ..., a_m) = \bigcup_{b_i \in f_i(a_1, ..., a_m)} f(b_1, ..., b_n).$$

Легко понять, что для операций получается общепринятое определение суперпозиции.
Разрешимость f по i аргументу, где $i \in \{1, ..., n\}$

$$(\mu_i f)(a_1, ...a_n) = \{a \mid a_i \in f(a_1, ..., , a_{i-1}, a, a_{i+1}, ..., a_n)\}.$$

Легко видно, что:

$$b \in (\mu_i f)(a_1, ..., , a_{i-1}, c, a_{i+1}, ..., a_n) \Longleftrightarrow c \in f(a_1, ..., , a_{i-1}, b, a_{i+1}, ..., a_n)\}.$$

Пример в векторной форме $f = (305274615)$, $\mu_1 f = (165720427)$, $\mu_2 f = (514236615)$.
Пересечение f и g

$$(f \cap g)(a_1, ..., a_n) = f(a_1, ..., a_n) \cap g(a_1, ..., a_n).$$

Определение 1. *Алгеброй n-местных мультиопераций над множеством A при $n \geq 2$ называется любое подмножество $R \subseteq M_A^n$, содержащее все n-местные мультиоперации проектирования, пустую мультиоперацию и замкнутое относительно метаопераций суперпозиции и разрешимостей [1]. При $n = 1$ необходимо дополнительно потребовать содержание полной мультиоперации и замыкание относительно метаоперации пересечения [2].*

Введем обозначение $\langle R \rangle_n$ для алгебры n-местных мультиопераций над A порожденной множеством $R \subseteq M_A^n$ и W_k^n для упорядоченного по включению множества всех алгебр n-местных мультиопераций ранга k (этот порядок является решеточным).

Определение 2. *Алгеброй n-местных операций над множеством A при $n \geq 1$ называется любое подмножество $K \subseteq O_A^n$, содержащее все n-местные операции проектирования и замкнутое относительно метаоперации суперпозиции.*

Введем обозначение $[K]_n$ для алгебры n-местных операций над A порожденной множеством $K \subseteq O_A^n$ и V_k^n для упорядоченного по включению множества всех алгебр n-местных операций ранга k (порядок так же решеточный).

При исследовании клонов рассматривались аналогичные алгебры [3, 4, 5].

Определим полутождество перестановочности для $f \in M_A^n$ и $g \in M_A^m$:

$$(f * (g * e_1^{nm}, \dots, e_m^{nm}), \dots, (g * e_{(n-1)m+1}^{nm}, \dots, e_{nm}^{nm})) \subseteq$$
$$\subseteq (g * (f * e_1^{nm}, e_{m+1}^{nm}, \dots, e_{(n-1)m+1}^{nm}), \dots, (f * e_m^{nm}, e_{2m}^{nm}, \dots, e_{nm}^{nm})). \tag{1}$$

Будем говорить, что f *стабильна относительно* g и g *нормальна относительно* f.

Пусть $g \in M_A^m$

$$S^n(g) = \{f \mid f \in O_A^n \text{ и } f \text{ стабильна относительно } g\} \text{ — } n\text{-}\textit{стабилизатор } g. \tag{2}$$

Пусть $f \in O_A^n$

$$N^m(f) = \{g \mid g \in M_A^m \text{ и } g \text{ нормальна относительно } f\} \text{ — } m\text{-}\textit{нормализатор } f. \tag{3}$$

Пусть $R \subseteq M_A^m$. Тогда

$$S^n(R) = \bigcap_{g \in R} S^n(g) \tag{4}$$

n-*стабилизатор* множества мультиопераций R.

Пусть $K \subseteq O_A^n$. Тогда

$$N^m(K) = \bigcap_{f \in K} N^m(f) \tag{5}$$

m-*нормализатор* множества операций K.

Напомним (смотри, например, в [6]), что для двух упорядоченных множеств P, Q пара соответствий $\rho : P \to Q$ и $\pi : Q \to P$ определяет связь Галуа, если выполняется два условия:

1) для любых $p_1, p_2 \in P$ и $q_1, q_2 \in Q$ если $p_1 \leq p_2$ и $q_1 \leq q_2$, то $\rho(p_1) \geq \rho(p_2)$ и $\pi(q_1) \geq \pi(q_2)$;

2) для любых $p \in P$ и $q \in Q$ верно $\pi(\rho(p)) \geq p$ и $\rho(\pi(q)) \geq q$.

Если при этом выполняется $\pi(\rho(p)) = p$, то связь Галуа совершенна в P и $\rho(\pi(q)) = q$, то совершенна в Q.

Теорема 1. *Пара соответствий S^n и N^m определяет связь Галуа между множествами V_k^n и W_k^m.*

Рассмотрим подробнее вариант ранга $k = 2$.

В этом случае число алгебр фиксированной местности легко вычисляется. Получаем:
$|V_2^1| = 6$; $|V_2^2| = 26$; $|V_2^3| = 46$;
$|W_2^1| = 19$; $|W_2^2| = 44$; $|W_2^3| = 54$;
при $n \geq 4$ выполняется $|V_2^n| = |V_2^{n-1}| + 8$, $|W_2^n| = |W_2^{n-1}| + 8$ и $|V_2^n| = |W_2^{n-1}|$.

Теорема 2. *Пара соответствий S^n и N^m при $4 \leq n \leq m + 1$ является совершенной в V_2^n связью Галуа.*

Теорема 3. *Пара соответствий S^n и N^m при $n \geq m + 1$ является совершенной в W_2^m связью Галуа.*

Следствие 1. *Для ранга 2 и $n \geq 4$ верно:*
1) для любого множества $K \subseteq O_2^n$ выполняется $[K]_n = S^n(N^m(K))$ для $n \leq m + 1$;
2) для любого множества $R \subseteq M_2^m$ выполняется $\langle R \rangle_m = N^m(S^n(R))$ для $n \geq m + 1$;
3) упорядоченные множества V_2^n и W_2^{n-1} антиизоморфны.

Для ранга 3 отметим, что $|V_3^1| = 699$ приведено в [7], а $|W_3^1| = 2079040$ утверждается в [2].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Перязев Н. А., Шаранхаев И. К. Алгебры мультиопераций // Algebra and Model Theory 11. Collection of hahers. — Novosibirsk: NSTU Publisher, 2007. P. 102-111.
2. Казимиров А. С., Перязев Н. А. Алгебры унарных мультиопераций // Международная конференция «Мальцевские чтения».: тезисы докладов. — Новосибирск, 2013. С. 156.
3. Крохин А. А. Моноидальные интервалы в решетках клонов // Алгебра и логика. 1995. Том 34 № 3. С. 288-310.
4. Черепов А. Н., Черепов И. А. Классы сохранения оснований в многозначных логиках // Труды 4-й Международной конференции «Дискретные модели в теории управляющих систем». М.:МАКС Пресс, 2000. – С.135–136.
5. Пинус А. Г. Фрагменты функциональных клонов как метод исследования последних // Algebra and Model Theory 11. Collection of hahers. — Novosibirsk: NSTU Publisher, 2007. P. 118-129.
6. Оре О. Теория графов. — М.: Изд-во Наука, 1980. 336 с.
7. Lau D. Function Algebras on Finite Sets. — Springer-Verlag Berlin YeideWater Resourses Research, 2006. 668 p.

———————————————————————————————

УДК 512.53

О некоторых свойствах идемпотентов частично упорядоченных моноидов

В. Б. Поплавский Россия, г. Саратов, Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского
poplavskivb@mail.ru

On some properties of idempotents of the partial ordered monoids

V. B. Poplavski Russia, Saratov, Saratov State University
poplavskivb@mail.ru

1. Первичные и вторичные идемпотенты частично упорядоченных моноидов

Пусть $\mathbf{X}$ – частично упорядоченный моноид, т. е. полугруппа с единицей 1, на которой задан стабильный относительно полугрупповой операции умножения частичный порядок $\leq$.

Определение 1. *Пусть существует наибольшее решение уравнения $xa = a$ для некоторого $a \in \mathbf{X}$, тогда обозначим его через a^R. Если существует наименьшее решение уравнения $xa = a$, то обозначим его через a_R. Соответственно, если для уравнения $ax = a$ существует наибольшее решение, то обозначим его через a^L, и если среди решений уравнения $ax = a$ существует наименьшее, то обозначим его через a_L.*

Теорема 1. *Если a^R, a_R, a^L, a_L существуют, то они являются идемпотентами моноида $\mathbf{X}$.*

Доказательство.Из определения 1 следует, что $1 \leq a^R$. Умножая последнее неравенство на a^R, получаем $a^R \leq a^R a^R$.

С другой стороны, $(a^R a^R)a = a^R(a^R a) = a$ и, следовательно, из определения 1 следует, что $(a^R a^R) \leq a^R$. Получаем равенство $a^R = a^R a^R$.

Аналогичным образом можно доказать равенство $a^L = a^L a^L$, а учитывая, что $a_R \leq 1$ и $a_L \leq 1$, можно показать и идемпотентность элементов a_R и a_L.

□

Теорема 2. *Если a^R, a_R, a^L, a_L существуют, то выполняются следующие равенства:*

$$(a^R)^R = (a^R)^L = a^R, \qquad (a^L)^L = (a^L)^R = a^L,$$

$$(a_L)_L = (a_L)_R = a_L, \qquad (a_R)_R = (a_R)_L = a_R.$$

Доказательство.Из неравенства $1 \leq a^R$ получаем

$$(a^R)^R \leq (a^R)^R a^R = a^R, \quad (a^R)^L \leq a^R (a^R)^L = a^R.$$

Это позволяет записать $(a^R)^R \leq a^R$, $(a^R)^L \leq a^R$.

С другой стороны, сравнивая равенства $a^R a^R = a^R$, $(a^R)^R a^R = a^R$, $a^R(a^R)^L = a^R$ и учитывая максимальность элементов $(a^R)^R$, $(a^R)^L$, имеем $a^R \leq (a^R)^R$, $a^R \leq (a^R)^L$, что доказывает равенство $(a^R)^R = (a^R)^L = a^R$.

Остальные равенства доказываются аналогично.

□

Теорема 3. *Пусть e – идемпотент моноида $\mathbf{X}$. Тогда следующие условия равносильны:*

$$1 \leq e \Longleftrightarrow e = e^R \Longleftrightarrow e = e^L;$$

$$e \leq 1 \Longleftrightarrow e = e_R \Longleftrightarrow e = e_L.$$

Доказательство.Пусть $1 \leq e = ee$. Тогда существует решение уравнения $xe = e$. Из неравенства $1 \leq e = xe$ получаем $x \leq xe = xxe = e$, т.е. e является наибольшим решением уравнения $e = xe$. Следовательно e^R существует и $e = e^R$. Таким же способом можно показать, что $e = e^L$.

Если выполняется равенство $e = e^R$, то из неравенства $1 \leq e^R$ получаем $1 \leq e$.

Аналогично доказывается эквивалентность $e \leq 1 \Longleftrightarrow e = e_R \Longleftrightarrow e = e_L$.

□

Определение 2. *Идемпотент e назовем вторичным идемпотентом, порожденным заданным на моноиде порядком $\leq$, если он сравним с единицей моноида $\mathbf{X}$, т. е. $e \leq 1$ или $1 \leq e$.*

Идемпотент назовем первичным в противном случае, т. е. если он не сравним с единицей заданным на моноиде частичным порядком $\leq$.

Таким образом, если идемпотент e – вторичный, то выполняется либо $e = e^R = e^L$, либо $e = e_R = e_L$. В случае $e = e^R = e^L$ идемпотент e назовем *вторичным идемпотентом максимального типа*, в случае $e = e_R = e_L$ идемпотент e назовем *вторичным идемпотентом минимального типа.*

Из теорем 1 и 2 получаем, что, если существуют элементы a^R, a_R, a^L, a_L для некоторого $a \in \mathbf{X}$, то они являются вторичными идемпотентами. Будем называть их соответственно *R-вторичными идемпотентами максимального, минимального типа или L-вторичными идемпотентами максимального, минимального типа, порожденными элементом a.*

Множества всех идемпотентов, первичных идемпотентов, вторичных идемпотентов максимального и минимального типов будем обозначать символами E, E_0, $E^{\uparrow}$ и $E_{\downarrow}$ соответственно. Заметим, что $E_0 \cap E^{\uparrow} = \emptyset$, $E_0 \cap E_{\downarrow} = \emptyset$, $E^{\uparrow} \cap E_{\downarrow} = \{1\}$, что следует из теоремы 3, и $E = E_0 \cup E^{\uparrow} \cup E_{\downarrow}$.

Справедливо следующее утверждение, которое мы приводим без доказательства.

Теорема 4. *Пусть* $\mathbf{X}$ *– моноид и* $\leq$ *– некоторый стабильный частичный порядок на нем. Тогда выполняются следующие эквивалентности, если все входящие в них вторичные идемпотенты существуют:*

$$a^R \leq b^R \leftrightarrow a^R \cdot b^R = b^R \cdot a^R = b^R; \quad a_R \leq b_R \leftrightarrow a_R \cdot b_R = b_R \cdot a_R = a_R;$$
$$a^L \leq b^L \leftrightarrow a^L \cdot b^L = b^L \cdot a^L = b^L; \quad a_L \leq b_L \leftrightarrow a_L \cdot b_L = b_L \cdot a_L = a_L;$$
$$a^L \leq b^R \leftrightarrow a^L \cdot b^R = b^R \cdot a^L = b^R; \quad a_L \leq b_R \leftrightarrow a_L \cdot b_R = b_R \cdot a_L = a_L;$$
$$a^R \leq b^L \leftrightarrow a^R \cdot b^L = b^L \cdot a^R = b^L; \quad a_R \leq b_L \leftrightarrow a_R \cdot b_L = b_L \cdot a_R = a_R.$$

Множество идемпотентов E любой полугруппы $\mathbf{X}$ всегда можно частично упорядочить, вводя так называемый *естественный порядок* $\preceq$, определяемый для элементов $a, b \in E$ следующим образом: $a \preceq b \Leftrightarrow a = a \cdot b = b \cdot a$ (см. [1, 2] и [3, §7.1]).

Из теоремы 4 получаем следующее утверждение.

Теорема 5. *Какой бы стабильный порядок* $\leq$ *ни был на моноиде* $\mathbf{X}$ *всегда выполняется равенство* $\leq = \preceq$ *на множестве вторичных идемпотентов минимального типа* $E_{\downarrow} \subseteq \mathbf{X}$*, и равенство* $\leq = \succeq$ *на множестве вторичных идемпотентов максимального типа* $E^{\uparrow}$*, где* $\preceq$ *– естественный порядок на множестве идемпотентов* $E \subseteq \mathbf{X}$*, а частичный порядок* $\succeq = \preceq^{-1}$ *является обратным для естественного порядка* $\preceq$ *.*

2. Примеры моноидов и их идемпотентов

Пусть $(\mathbf{X}, \wedge, 1)$ – нижняя полурешетка с наибольшим элементом 1 в качестве единицы моноида, которым является эта полурешетка. Очевидно, что в этом случае все элементы моноида X являются вторичными идемпотентами минимального типа: $X = E_{\downarrow}$.

Аналогично, если $(\mathbf{X}, \vee, 0)$ – верхняя полурешетка с наименьшим элементом 0 в качестве единицы моноида, которым является эта полурешетка. В этом случае выполняется равенство $X = E^{\uparrow}$.

Приведем пример нетривиального строения множества идемпотентов. Рассмотрим множество всех бинарных отношений $B(M)$ на множестве M ($|M| \geq 3$), которое определяется как множество всевозможных подмножеств декартова квадрата $M \times M$ с частичным порядком включения $\subseteq$. На множестве $B(M)$ определена стандартным образом структура моноида с операцией умножения бинарных отношений и единицей $\Delta = \{(x,x) | x \in M\}$. Заметим, что частичный порядок включения $\subseteq$ стабилен относительно умножения бинарных отношений. Для этого частично упорядоченного моноида $(B(M), \subseteq)$ вторичными идемпотентами минимального типа являются все бинарные отношения ρ, для которых выполняется $\rho \subseteq \Delta$, например, $\rho = \{(x,x),(y,y)\}$ для любых $x, y \in M$. Очевидно также, что множество первичных идемпотентов E_0 непусто. Например,

$$\{(x,x),(x,y),(y,y),(y,x)\} \in E_0 \subset B(M).$$

Множество вторичных идемпотентов максимального типа $E^{\uparrow}$ содержит также элементы, отличные от Δ. Например, $\Delta \cup \{(x,y),(y,x)\} \in E^{\uparrow} \subset B(M)$.

Примеры построения вторичных идемпотентов максимального типа в полугруппах матриц с элементами из произвольной булевой алгебры, их свойства, применения, а также сравнения естественных порядков на полугруппах булевых матриц можно найти в [4], [5], [6].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Вагнер В. В. Обобщенные группы // ДАН СССР. 1952. № 84. С. 1119—1122.

2. Mitsch H. A Natural Partial Order for Semigroups // Proceedings of the Amer. Math. Society. Vol. 97, № 3 (1986). P. 384—388.

3. Клиффорд А., Престон Г. Алгебраическая теория полугрупп: в 2т. – М.:"МИР 1972. Т. 2. 422 с.

4. Поплавский В. Б. Об идемпотентах алгебры булевых матриц. // Известия Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2012. Т. 12. Вып. 2. С. 26-33.

5. Поплавский В. Б. Делимость идемпотентов полугруппы булевых матриц // Математика, механика: сб. науч. тр., Саратов: Изд-во Сарат. ун-та. 2016. Вып. 18. С. 57-60.

6. Поплавский В. Б. О частичных порядках на множестве булевых матриц // Электронные информационные системы. 2017. №3 (14) С.105-113.

———————————————————————————————————————

УДК 512.567.5 + 512.579

Алгоритм построения решётки конгруэнций полигона

А. М. Пряничников Россия, г. Москва, Национальный исследовательский университет «МИЭТ», МГУ имени М. В. Ломоносова
genary@ya.ru

Algorithm for constructing lattice of congruences of act

A. M. Pryanichnikov Russia, Moscow, National Research University «MIET», Moscow Lomonosov State University
genary@ya.ru

Полигон X над полугруппой S (см. [1]) – это множество X месте с отображением $X \times S \to X$, $(x, s) \mapsto xs$ таким, что $x(st) = (xs)t$ при $x \in X$, $s, t \in S$. Понятие полигона является алгебраическим выражением понятия автомата (без выхода). Кроме того, понятие полигона фактически совпадает с понятием унарной алгебры.

Пусть Con$X$ обозначает решётку конгруэнций полигона X. В этой решётке наименьшим элементом является отношение равенства $\triangle = \{(x, x) | x \in X\}$, а наибольшим – универсальное отношение $\nabla = X \times X$. Интерес для изучения представляют алгебры с различными условиями на решётку конгруэнций. В частности, в работе [2] это сделано для полигонов над прямоугольными связками, т.е. полугруппами вида $L \times R$, где L и R обозначают соответственно полугруппу левых и полугруппу правых нулей.

Пусть X – полигон над полугруппой S. Простейший алгоритм построения решётки конгруэнций полигона состоит из двух этапов: порождение решётки Eq X отношений эквивалентности на множестве X, затем проверка каждого разбиения на выполнение для него определения конгруэнции. Кодирование разбиения осуществляется с помощью битовых масок. Предлагается более быстрый алгоритм, также основанный на битовых масках, но ещё использующий образующие полугруппы и полигона.

Избавимся от порождения всевозможных разбиений полигона, запуская процесс порождения решётки с образующих элементов полигона и полугруппы.

Приблизительно время работы простого алгоритма составляет: $O(B_n)(1 + nm)$, где n – число элементов полигона X, B_n – n-ое число Белла, m – число элементов в полугруппе. Более быстрый предложенный алгоритм имеет асимптотику: $O(\tilde{n} \cdot \tilde{m})$, где $\tilde{n}$ – число образующих полигона X, $\tilde{m}$ – число образующих полугруппы S.

Так как данный алгоритм является частью более общего алгоритма проверки выполнения в решётке какого-либо тождества, актуальным является дальнейшее улучшение его асимптотики.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Kilp M., Knauer U., Mikhalev A. V., Monoids, acts and categories. N.Y. - Berlin, Walter de Gruyter, 2000.

2. Кожухов И. Б., Пряничников А. М., Условия модулярности решётки конгруэнций полигона над прямоугольной связкой (в печати).

———————————————————————————

УДК 512.577

О формациях унарных алгебр

А. Л. Расстригин Россия, г. Волгоград, Волгоградский государственный социально-педагогический университет
rasal@fizmat.vspu.ru

On formations of unary algebras

A. L. Rasstrigin Russia, Volgograd, Volgograd State Socio-Pedagogical University
rasal@fizmat.vspu.ru

Класс алгебраических систем называется *формацией*, если он замкнут относительно взятия гомоморфных образов и конечных подпрямых произведений. Формации получили широкое распространение и сыграли важную роль в теории конечных групп [1]. Понятие формации групп было расширено до понятия формации алгебраических систем в [2]. Разными авторами изучались формации произвольных алгебр [3, 4], а также формации конкретных типов алгебраических систем [5, 6].

Алгебра называется *унарной*, если все операции этой алгебры унарные. Унарные алгебры имеют отличия по сравнению с такими классическими алгебрами как группы, кольца, решетки и т. п. Например, класс унарных алгебр не образует конгруэнц-модулярного многообразия. В этой связи такие алгебры вызывают значительный интерес и служат источником примеров в универсальной алгебре.

Унарные алгебры с одной операцией называются *унарами*. Для конечных алгебр такого вида полностью описана [7] решетка формаций по отношению включения классов и показано, что каждая такая формация является наследственной. Формация называется *наследственной*, если вместе с каждой алгеброй она содержит и любую ее подалгебру. В настоящем сообщении мы рассматриваем коммутативные унарные алгебры с двумя операциями. Унарная алгебра называется *коммутативной*, если любые две её операции перестановочны, т. е. являются эндоморфизмами этой алгебры. Для таких алгебр известно описание [8] подпрямо неразложимых алгебр, полученное в теории автоматов.

Псевдомногообразием [9] называется класс конечных алгебр, замкнутый относительно взятия подалгебр, фактор-алгебр и конечных прямых произведений. Таким образом, всякая наследственная формация, которая состоит из конечных алгебр, является псевдомногообразием и для нее применимо синтаксическое описание последних [10].

Теорема 1. *Каждая формация конечных коммутативных унарных алгебр с двумя операциями является наследственной формацией.*

Следствие 1. *Каждая формация конечных коммутативных унарных алгебр с двумя операциями является псевдомногообразием.*

Следствие 2. *Пусть C — класс всех конечных коммутативных унарных алгебр с двумя операциями и F — формация алгебр из C. Тогда существует такая последовательность тождеств $e_1, e_2, \ldots$, что $A \in C$ принадлежит F тогда и только тогда, когда в A выполнены все тождества e_n, кроме конечного числа.*

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Шеметков Л. А. Формации конечных групп. — М.: Наука, 1978.
2. Шеметков Л. А., Скиба А. Н. Формации алгебраических систем. — М.: Наука, 1989.
3. Guo W., Shum K. P. Minimal formations of universal algebras // Discuss. Math. Gen. Algebra Appl. 2001. Vol. 21, no. 2. P. 201–205.
4. Guo W., Shum K. P. Formation operators on classes of algebras // Communications in Algebra. 2002. Vol. 30, no. 7. P. 3457–3472.
5. Ballester-Bolinches A., Pin J.-É., Soler-Escrivà X. Formations of finite monoids and formal languages: Eilenberg's theorem revisited // Forum Mathematicum. 2012. Vol. 26, no. 6. P. 1731–1761.
6. Lihová J., Pócs J. On formations of lattices // Acta Universitatis Matthiae Belii, series Mathematics. 2009. No. 15. P. 63–72.
7. Расстригин А. Л. Формации конечных унаров // Чебышевский сборник. 2011. Том 12, № 2 (38). С. 102–109.
8. Ésik Z., Imreh B. Subdirectly irreducible commutative automata // Acta Cybernetica. 1981.Vol. 5, no. 3. P. 251–260.
9. Eilenberg S. Automata, languages, and machines. Vol. B. — Academic Press, New York, 1976.
10. Ash C. J. Pseudovarieties, generalized varieties and similarly described classes // Journal of Algebra. 1985. Vol. 92, no. 1. P. 104–115.

———————————————————————————

УДК 512.579

О рисовском замыкании на универсальных алгебрах

В. Л. Усольцев Россия, г. Волгоград, Волгоградский государственный социально-педагогический университет
usl2004@mail.ru

On Rees closure on universal algebras

V. L. Usoltsev Russia, Volgograd, Volgograd State Socio-Pedagogical University
usl2004@mail.ru

В [1] А. Г. Пинус вводит понятие гамильтонова замыкания на универсальных алгебрах как оператора замыкания на решетке $SubA$ подалгебр алгебры A, ставящего в соответствие произвольной подалгебре $B \in SubA$ наименьшую подалгебру алгебры A, включающую в себя B и являющуюся классом некоторой конгруэнции на A.

Нами вводится в рассмотрение конструкция, близкая к описанной выше — оператор замыкания на решетке подалгебр произвольной универсальной алгебры, связанный с понятиями подалгебры и конгруэнции Риса. В [2] понятие конгруэнции Риса, восходящее к теории полугрупп, обобщается на произвольные универсальные алгебры. Возникающие при этом определения, приведенные ниже, даны в формулировках монографии [3].

Обозначим через $\triangle_A$ и $\bigtriangledown_A$ соответственно нулевую и единичную конгруэнции алгебры A, а через $ConA$ — решетку ее конгруэнций. Подалгебра B алгебры A называется подалгеброй Риса, если $B^2 \cup \triangle_A$ есть конгруэнция алгебры A. Конгруэнция $\theta \in ConA$ называется конгруэнцией Риса, если $\theta = B^2 \cup \triangle_A$ для некоторой подалгебры B алгебры A. Алгебра A называется алгеброй Риса, если любая ее подалгебра является подалгеброй Риса.

Пусть A — произвольная универсальная алгебра. Определим отображение C_R из решетки $SubA$ в $SubA$, поставив в соответствие произвольной подалгебре $B \in SubA$ наименьшую по включению подалгебру Риса $\overline{B}_R$ алгебры A, содержащую B. Определение корректно, так как совокупность подалгебр Риса, включающих в себя B, непуста (она содержит, например, алгебру A) и замкнута относительно произвольных пересечений. Подалгебру $\overline{B}_R$ назовем рисовским замыканием подалгебры B.

Предложение 1. *Отображение $C_R : SubA \to SubA$, определенное выше, является оператором замыкания на решетке $SubA$.*

Предложение 2. *Оператор рисовского замыкания C_R в общем случае не коммутирует с операциями $\wedge$ и $\vee$ на $SubA$.*

Положим $\emptyset \in SubA$. В [2] показано, что при этом условии совокупность всех подалгебр Риса алгебры A образует решетку Sub_RA относительно включения. Там же изучались некоторые свойства этой решетки. Из предложения 2 следует, что решетка Sub_RA в общем случае не является подрешеткой в $SubA$.

Назовем подалгебру $B \in SubA$ рисовски замкнутой, если $\overline{B}_R = B$. Очевидно, что подалгебра рисовски замкнута тогда и только тогда, когда она является подалгеброй Риса. Это утверждение позволяет рассматривать решетку подалгебр Риса Sub_RA как решетку рисовски замкнутых подалгебр алгебры A, и использовать рисовское замыкание при изучении Sub_RA.

Неодноэлементная алгебра A называется рисовски простой [4], если любая ее конгруэнция Риса является тривиальной.

Предложение 3. *Алгебра A рисовски проста тогда и только тогда, когда рисовское замыкание любой ее непустой неодноэлементной подалгебры совпадает с A.*

Алгеброй с операторами называется универсальная алгебра $\langle A, \Omega\rangle$ сигнатуры $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$, где Ω_1 произвольна и непуста, а Ω_2 состоит из унарных операций, перестановочных с любой операцией из Ω_1, то есть, действующих как эндоморфизмы относительно операций из Ω_1. Унарные операции из Ω_2 называются операторами.

Предложение 4. *Пусть $\langle A, \Omega\rangle$ — произвольная алгебра с оператором $f \in \Omega$ и идемпотентными основными операциями. Если решетка $Sub_R\langle A, \Omega\rangle$ является цепью, то унар $\langle A, f\rangle$ содержит не более одного одноэлементного подунара.*

Если f — унарная операция из сигнатуры Ω, то унар $\langle A, f\rangle$ называется унарным редуктом алгебры $\langle A, \Omega\rangle$. Через C_h^t, где $h \geqslant 1$, $t \geqslant 0$, обозначается унар $\langle A, f\rangle$ с порождающим элементом a, заданный определяющим соотношением $f^t(a) = f^{t+h}(a)$. Элемент a унара называется периодическим, если $f^t(a) = f^{t+h}(a)$ для некоторых $t \geqslant 0$ и $h \geqslant 1$. Через $T(A)$ обозначается множество периодических элементов унара A. Если a — периодический элемент, то наименьшее из чисел t, для которых $f^t(a) = f^{t+n}(a)$ при некотором $n \geqslant 1$, называется глубиной элемента a и обозначается через $t(a)$. Глубиной $t(A)$ унара A называется наибольшая из глубин его периодических элементов, если $T(A) \neq \emptyset$. Если множество $\{t(a) \mid a \in T(A)\}$ не ограничено, то говорят, что унар имеет бесконечную глубину. Унар $\langle A, f\rangle$ называется связным, если для любых $x, y \in A$ выполняется условие $f^n(x) = f^m(y)$ для некоторых $n, m \geqslant 0$, и несвязным в противном случае. Максимальный по включению связный подунар унара A называется компонентой связности унара A. Через D_k обозначается подунар связного унара с одноэлементным подунаром, состоящий из всех элементов с глубиной, не превосходящей k.

В [5] показано, что на любом унаре $\langle A, f\rangle$ можно так задать операцию Пиксли $p(x, y, z)$, что алгебра $\langle A, p, f\rangle$ становится алгеброй с оператором f. Эта операция определяется следующим образом. Пусть $x, y \in A$. Положим $M_{x,y} = \{n \in \mathrm{N} \cup \{0\} \mid f^n(x) = f^n(y)\}$, а также $k(x, y) = \min\ M_{x,y}$, если $M_{x,y} \neq \emptyset$ и $k(x, y) = \infty$, если $M_{x,y} = \emptyset$. Положим далее

$$p(x, y, z) \overset{def}{=} \begin{cases} z, & \text{если } k(x, y) \leqslant k(y, z) \\ x, & \text{если } k(x, y) > k(y, z). \end{cases} \tag{1}$$

В [6], на основе подхода, предложенного в [5], на произвольном унаре $\langle A, f\rangle$ задается операция меньшинства $s(x, y, z)$, перестановочная с операцией f:

$$s(x, y, z) \overset{def}{=} \begin{cases} z, & \text{если } k(x, y) < k(y, z); \\ y, & \text{если } k(x, y) = k(y, z); \\ x, & \text{если } k(x, y) > k(y, z). \end{cases} \tag{2}$$

Аналогичным способом в [7] на произвольном унаре $\langle A, f\rangle$ задается операция большинства $m(x, y, z)$, перестановочная с f:

$$m(x, y, z) \overset{def}{=} \begin{cases} z, & \text{если } k(x, y) \geqslant k(y, z); \\ x, & \text{если } k(x, y) < k(y, z). \end{cases} \tag{3}$$

Теорема 1. *Пусть $\langle A, d, f\rangle$ — алгебра с оператором f и тернарной операцией d, заданной по одному из правил (1)–(3). Тогда справедливы следующие утверждения:*
1) Если унарный редукт $\langle A, f\rangle$ алгебры $\langle A, d, f\rangle$ не содержит одноэлементных подунаров, то решетка $Sub_R\langle A, d, f\rangle$ является двухэлементной цепью $\{\emptyset, A\}$.
2) Пусть унарный редукт $\langle A, f\rangle$ алгебры $\langle A, d, f\rangle$ является связным унаром с одноэлементным подунаром. Если $t(A)$ конечна, то решетка $Sub_R\langle A, d, f\rangle$ является цепью длины $t(A)+1$. Если же $t(A)$ бесконечна, то решетка $Sub_R\langle A, d, f\rangle$ изоморфна частично упорядоченному множеству $\langle N \cup \{0\}, \leqslant\rangle$ с присоединенной внешней единицей.

3) Если унарный редукт $\langle A, f\rangle$ алгебры $\langle A, d, f\rangle$ несвязен и содержит хотя бы один одноэлементный подунар, то решетка $Sub_R\langle A, d, f\rangle$ изоморфна кардинальной сумме цепей, пополненной внешними нулем и единицей, где слагаемым суммы взаимно однозначно соответствуют компоненты связности унара $\langle A, f\rangle$, содержащие одноэлементный подунар. Для каждой компоненты связности B с одноэлементным подунаром, соответствующее ей слагаемое кардинальной суммы либо является цепью длины $t(B)$ (в случае, если $t(B)$ конечна), либо изоморфно цепи $\langle N\cup\{0\}, \leqslant\rangle$ с присоединенной внешней единицей (если $t(B)$ бесконечна).

Следствие 1. *Атомами решетки $Sub_R\langle A, d, f\rangle$ являются либо одноэлементные подалгебры алгебры $\langle A, d, f\rangle$, либо, в случае их отсутствия, сама алгебра $\langle A, d, f\rangle$. Других атомов в $Sub_R\langle A, d, f\rangle$ нет.*

Следствие 2. *Если унарный редукт $\langle A, f\rangle$ алгебры $\langle A, d, f\rangle$ не содержит одноэлементных подунаров, то единственным коатомом решетки $Sub_R\langle A, d, f\rangle$ является пустая подалгебра. В противном случае, если $\langle A, f\rangle$ связный, то решетка $Sub_R\langle A, d, f\rangle$ имеет единственный коатом $D_{t(A)-1}$ только при условии $t(A) < \infty$; при $t(A) = \infty$ коатомов в $Sub_R\langle A, d, f\rangle$ нет. Если же унар $\langle A, f\rangle$ несвязен, то коатомами $Sub_R\langle A, d, f\rangle$ являются его компоненты связности, содержащие одноэлементные подунары, и только они.*

Следствие 3. *Решетка $Sub_R\langle A, d, f\rangle$ является цепью тогда и только тогда, когда унарный редукт $\langle A, f\rangle$ алгебры $\langle A, d, f\rangle$ содержит не более одного одноэлементного подунара.*

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Пинус А. Г. Гамильтоново замыкание на универсальных алгебрах // Сибирский математический журнал. 2014. Том 55 № 3(325). С. 610–616.

2. Tichy R. F. The Rees congruences in universal algebras // Publ. Inst. Math. (Beograd). 1981. Vol. 29. P. 229–239.

3. Chajda I., Eigenthaler G., Langer H. Congruence classes in universal algebra. — Vienna: Heldermann-Verlag, 2003. 192 p.

4. Усольцев В. Л. Алгебры Риса и конгруэнц-алгебры Риса в одном классе алгебр с оператором и основной операцией почти единогласия // Чебышевский сборник. 2016. Том 17 № 4(60). С. 157–166.

5. Карташов В. К. Об унарах с мальцевской операцией // Международный семинар «Универсальная алгебра и ее приложения», посвященный памяти профессора Л. А. Скорнякова: тезисы докладов. Международный семинар (Волгоград, 6-11 сентября 1999 г.) — Волгоград: Перемена, 1999. С. 31–32.

6. Усольцев В. Л. Свободные алгебры многообразия унаров с мальцевской операцией p, заданного тождеством $p(x, y, x) = y$ // Чебышевский сборник. 2011. Том 12 № 2(38). С. 127—134.

7. Усольцев В. Л. О строго простых тернарных алгебрах с операторами // Чебышевский сборник. 2013. Том 14 № 4(48). С. 196—204.

———————————————————————————

УДК 512.732

Категории многообразий Ботта-Самельсона[1]

В. В. Щиголев Финансовый университет при правительстве Российской Федерации
shchigolev_vladimir@yahoo.com

Categories of Bott-Samelson varieties

V. V. Shchigolev Financial University under the Government of the Russian Federation
shchigolev_vladimir@yahoo.com

Пусть G — связная полупростая алгебраическая группа, B — ее борелевская подгруппа и $T \subset B$ — максимальный тор. Любой последовательности простых отражений $s = (s_1, \dots, s_r)$ группы Вейля W соответствует многообразие Ботта-Самельсона

$$\mathrm{BS}(s) = P_1 \times \dots \times P_r / B^r,$$

где $P_i = B \cup Bs_iB$ — параболическая подгруппа, соответствующая отражению s_i, и B^r действует на прямом произведении параболических подгрупп следующим образом:

$$(g_1, g_2, \dots, g_r) \cdot (b_1, b_2, \dots, b_r) = (g_1b_1, b_1^{-1}g_2b_2, \dots, b_{r-1}^{-1}g_rb_r).$$

Так как максимальный тор T действует непрерывно на BS, то мы можем рассматривать T-эквивариантные когомологии $H_T^\bullet(\mathrm{BS}, k)$ с любым коммутативным кольцом коэффициентов, которое мы в данной работе считаем областью главных идеалов. Аналогичным образом можно рассмотреть T-эквивариантные когомологии точки $S = H_T^\bullet$ (относительно тривиального действия тора). Хорошо известно, что S — градуированное коммутативное кольцо. Пусть $\mathbf{GrMod}(S)$ — категория градуированных S-модулей и $\mathbf{Top}(T)$ — категория T-пространств, то есть топологический пространств с непрерывным действием тора T. Взятие T-эквивариантных когомологий можно рассматривать как контравариантный функтор $H_T^\bullet : \mathbf{Top}(T) \to \mathbf{GrMod}(S)$.

Мы определяем категорию $\widetilde{\mathbf{Seq}}$, объектами которой являются многообразия Ботта-Самельсона. Каждый морфизм $\mathrm{BS}(s) \to \mathrm{BS}(s')$ этой категории определяется некоторым отношением между последовательностями s и s', обобщающим случай, когда s — подпоследовательность последовательности s'. Если ограничиться только морфизмами последнего вида, то мы получим хорошо известную категорию, которую мы обозначим через $\mathbf{Seq}$. Эта категория в отличие от $\widetilde{\mathbf{Seq}}$ естественно вложена в $\mathbf{Top}(T)$. Основной целью работы является конструкция контравариантного функтора $\tilde{H} : \widetilde{\mathbf{Seq}} \to \mathbf{GrMod}(S)$, для которого коммутативна следующая диаграмма:

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{Seq} \arrow[r, hook] \arrow[dr] & \mathbf{Top}(T) \arrow[r, "H_T^\bullet"] & \mathbf{GrMod}(S) \\
& \widetilde{\mathbf{Seq}} \arrow[ur, "\widetilde{H}"'] &
\end{tikzcd}$$

Несмотря на отсутствие функтора $\widetilde{\mathbf{Seq}} \to \mathbf{Top}(T)$, коммутативно дополняющего эту диаграмму, такие функторы существуют из явно описанных категорий, промежуточных между $\mathbf{Seq}$ и $\widetilde{\mathbf{Seq}}$.

———————————————————————————————

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ №16-01-00756.

УДК 512. 548

Эндоморфизмы полуабелевых n-групп

Н. А. Щучкин Россия, г. Волгоград, Волгоградский государственный социально-педагогический университет
nikolaj_shchuchkin@mail.ru

Endomorphisms of semiabelian n-groups

N. A. Shchuchkin Russia, Volgograd, Volgograd State Socio-Pedagogical University
nikolaj_shchuchkin@mail.ru

1. Введение. Одной из основных проблем для полуабелевых n-групп является нахождение $(n, 2)$-почтиколец, которые были бы изоморфны $(n, 2)$-почтикольцам эндоморфизмов некоторых полуабелевых n-групп. Такие $(n, 2)$-почтикольца найдены для полуциклических и коциклических n-групп.

2. Предварительные сведения. На полуабелевой n-группе $\langle G, f\rangle$ для элемента c определим сложение $a + b = f(a, c, \ldots, c, \bar{c}, b)$. Здесь $\bar{c}$ — решение уравнения $f(c, \ldots, c, x) = c$. Получим абелеву группу G. Для автоморфизма $\varphi(x) = f(c, x, c, \ldots, c, \bar{c})$ и элемента $d = f(c, \ldots, c)$ группы G верны равенства

$$\varphi(d) = d, \quad \varphi^{n-1}(x) = x \text{ для любого элемента } x \in G, \tag{1}$$

$$f(a_1, \ldots, a_n) = a_1 + \varphi(a_2) + \ldots + \varphi^{n-2}(a_{n-1}) + a_n + d \tag{2}$$

для любых элементов $a_1, \ldots, a_n \in G$. Группу G называют ретрактом n-группы $\langle G, f\rangle$. Верно и обратно: в абелевой группе G для автоморфизма φ и элемента d с условиями (1) задается полуабелева n-группа $\langle G, f\rangle$, где f действует по (2). Такую n-группу $\langle G, f\rangle$ называют (φ, d)-определенной на G и обозначают $der_{\varphi,d}G$. Известно, что для абелевых n-групп и только для них автоморфизм φ является тождественным.

Если ретракт n-группы является циклической группой, то ее называют полуциклической [1]. На группе целых чисел Z строим n-группу $\langle Z, f_1\rangle = der_{1_Z,l}Z$, где $0 \le l \le [\frac{n-1}{2}]$, она будет абелевой полуциклической. На группе Z зададим не абелеву полуциклическую n-группу $\langle Z, f_2\rangle = der_{\varphi,0}Z$ для $n = 2k + 1$, $k \in N$, где $\varphi(z) = -z$. Любая бесконечная полуциклическая n-группа изоморфна $\langle Z, f_1\rangle$ либо $\langle Z, f_2\rangle$ для нечетных n (см. [2]). В первом случае будем говорить, что такая n-группа имеет тип $(\infty, 1, l)$, а во втором случае — имеет тип $(\infty, -1, 0)$. Если n-группа порождается одним элементом a, то ее называют циклической. Примером циклической n-группы служит $\langle Z, f_1\rangle = der_{1_Z,1}Z$. Любая бесконечная циклическая n-группа изоморфна этой n-группе (см. [2]).

Конечной полуциклической n-группой будет $\langle Z_k, f\rangle = der_{\varphi,l}Z_k$. Если φ — тождественный автоморфизм, то $\langle Z_k, f\rangle$ будет абелевой полуциклической n-группой. Среди них имеются циклические, в этом случае НОД $(l, n-1, k) = 1$. Любая абелева полуциклическая n-группа порядка k изоморфна $der_{1_{Z_k},l}Z_k$, где $l \mid$ НОД $(n-1, k)$, в этом случае будем говорить, что такая n-группа имеет тип $(k, 1, l)$. Любая циклическая n-группа порядка k изоморфна $der_{1_{Z_k},1}Z_k$. Если же φ — не тождественный автоморфизм, то $\varphi(z) = mz$ для любого $z \in Z_k$, где $1 < m < k$ и m взаимно прост с k. Кроме того, число m удовлетворяет сравнению $lm \equiv l \pmod k$ и показатель числа m по модулю k делит $n - 1$ (согласно (1)). Любая не абелева полуциклическая n-группа порядка k изоморфна $der_{\varphi,l}Z_k$, где $l \mid$ НОД $(\frac{m^{n-1}-1}{m-1}, k)$, в этом случае будем говорить, что такая n-группа имеет тип (k, m, l) (см. [2]).

Абелеву n-группу $\langle G, f\rangle$ называют коциклической, если найдется такая пара элементов $c_1, c_2 \in G$, что любой гомоморфизм ψ из $\langle G, f\rangle$ в абелеву n-группу $\langle B, f'\rangle$, где $(c_1, c_2) \notin Ker\ \psi$, является мономорфизмом. Абелева n-группа будет коциклической тогда и только тогда, когда она изоморфна $\langle Z_{p^k}, f\rangle = der_{1_{Z_{p^k}}, p^t} Z_{p^k}$, где $p^t \mid$ НОД $(n-1, p^k)$, либо $\langle Z(p^\infty), f\rangle = der_{1_{Z(p^\infty)},0} Z(p^\infty)$, где $Z(p^\infty)$ — квазициклическая группа [3] (p — простое число).

3. Р е з у л ь т а т ы.

Теорема 1. *В Z выделим $P = \{m | ml \equiv l \pmod{n-1}, 0 \le l \le [\frac{n-1}{2}]\}$ и на P определим операцию $h(m_1, \ldots, m_n) = m_1 + \ldots + m_n$. Тогда алгебра $\langle P, h, \cdot\rangle$, где $\cdot$ — умножение целых чисел, будет $(n,2)$-кольцом, которое изоморфно $(n,2)$-кольцу эндоморфизмов n-группы $\langle Z, f_1\rangle = der_{1_Z, l} Z$.*

Следствие 1. *Для n-группы типа $(\infty, 1, l)$ ее $(n,2)$-кольцо эндоморфизмов изоморфно $(n,2)$-кольцу $\langle P, h, \cdot\rangle$ из теоремы 1.*

Следствие 2. *Для бесконечной циклической n-группы ее $(n,2)$-коль-цо эндоморфизмов изоморфно $(n,2)$-кольцу $\langle P, h, \cdot\rangle$, построенному в теореме 1 при $l = 1$.*

Теорема 2. *Пусть $\langle E, g, \circ\rangle$ — $(n,2)$-почтикольцо эндоморфизмов бесконечной полуциклической n-группы $\langle Z, f_2\rangle = der_{\varphi,0} Z$, где n — нечетное натуральное число и $\varphi(z) = -z$ для любого z. Выбираем n-группу $\langle Z \times Z, h\rangle = \langle Z, f_2\rangle \times \langle Z, f_2\rangle$ и на множестве $Z \times Z$ определим бинарную операцию $\diamond$ по правилу $(m_1, u_1) \diamond (m_2, u_2) = (m_1 m_2, m_1 u_2 + u_1)$. Тогда $\langle Z \times Z, h, \diamond\rangle$ будет $(n,2)$-почтикольцом, которое изоморфно $\langle E, g, \circ\rangle$.*

Следствие 3. *Для n-группы типа $(\infty, -1, 0)$ ее $(n,2)$-почтикольцо эндоморфизмов изоморфно $(n,2)$-почтикольцу $\langle Z \times Z, h, \diamond\rangle$ из теоремы 2.*

Теорема 3. *Пусть $\langle E, g, \circ\rangle$ — $(n,2)$-почтикольцо ($(n,2)$-кольцо) эндоморфизмов n-группы $der_{\varphi,l} Z_k$, где $\varphi(z) = mz$ для любого $z \in Z_k$, $1 < m < k$, НОД$(m,k) = 1$, m удовлетворяет сравнению $lm \equiv l \pmod{k}$, показатель числа m по модулю k делит $n-1$ и $l \mid$ НОД$(\frac{m^{n-1}-1}{m-1}, k)$ (n-группы $der_{1_{Z_k}, l} Z_k$, где $l \mid$ НОД$(n-1, k)$). В n-группе $\langle P, h\rangle = der_{\varphi,l} Z_k \times der_{\varphi,0} Z_l$ (в абелевой n-группе $\langle P, h\rangle = der_{1_{Z_k}, l} Z_k \times der_{1_{Z_l}, 0} Z_l$) определим бинарную операцию $(u_1, v_1) \diamond (u_2, v_2) = (u_2 s_1 + u_1, v_2 s_1 + v_1)$, где $s_1 \in Z_k$ и $s_1 - 1 = s_0 + v_1 \frac{k}{l}$, где s_0 — решение сравнения $x \equiv \frac{\frac{m^{n-1}-1}{m-1} u_1}{l} \pmod{\frac{k}{l}}$ ($x \equiv \frac{n-1}{l} \pmod{\frac{k}{l}}$). Тогда алгебра $\langle P, h, \diamond\rangle$ будет $(n,2)$-почтикольцом ($(n,2)$-кольцом), которое изоморфно $\langle E, g, \circ\rangle$.*

Следствие 4. *Для n-группы типа (k, m, l) ($(k, 1, l)$) ее $(n,2)$-почтикольцо ($(n,2)$-кольцо) эндоморфизмов изоморфно $(n,2)$-почтикольцу ($(n,2)$-кольцу) $\langle P, h, \diamond\rangle$ из теоремы 3.*

Следствие 5. *Пусть $\langle E, g, \circ\rangle$ — $(n,2)$-кольцо эндоморфизмов циклической n-группы порядка k. В n-группе $\langle Z_k, f\rangle = der_{1_{Z_k}, 1} Z_k$ определим операцию $u_1 \diamond u_2 = u_1 \cdot u_2 \cdot (n-1) + u_1 + u_2$, где $\cdot$ — умножение в Z_k. Тогда алгебра $\langle Z_k, f, \diamond\rangle$ будет $(n,2)$-кольцом, которое изоморфно $\langle E, g, \circ\rangle$.*

Теорема 4. *(Теорема 3, [3]) Две коциклические n-группы, имеющие изоморфные $(n,2)$-кольца эндоморфизмов, изоморфны.*

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гальмак А. М. n-Арные группы : Часть 1. — Гомель: Гомельский гос. университет им. Ф. Скорины, 2003. 195 с.

2. Щучкин Н. А. Полуциклические n-арные группы // Известия ГГУ им. Ф. Скорины. 2009. 3 (54). С. 186-194.

3. Щучкин Н. А. Коциклические n-группы // Известия вузов. Математика. 2017. № 10. С. 89-93.

———————————————————————————————————————

3. Кольца и модули

УДК 512.62+004.421.6

Обобщённый дискриминант многочлена и его вычисление[1]

А. Б. Батхин Россия, г. Москва, Институт прикладной математики
им. М. В. Келдыша РАН, Московский физико-технический институт
batkhin@gmail.com

Generalized discriminant of a polynomial and its computation

A. B. Batkhin Russia, Moscow, Keldysh Institute of Applied Mathematics of RAS,
Moscow Institute of Physics and Technology
batkhin@gmail.com

Рассматривается обобщение классического дискриминанта вещественного многочлена, которое определяется с помощью линейного оператора Хана, понижающего степень многочлена на единицу. Исследуется структура обобщённого дискриминантного множества вещественного многочлена, т. е. множество всех значений пространства коэффициентов, при которых многочлен и результат применения к нему оператора Хана имеют равные корни. Структура обобщённого дискриминантного множества многочлена степени n описывается в терминах разбиения числа n. Предлагается конструктивный алгоритм построения полиномиальной параметризации обобщённого дискриминантного множества в пространстве коэффициентов многочлена. Основные алгоритмы, описанные в работе, реализованы в виде библиотек в системах компьютерной алгебры `Maple` и `SymPy`. Работа является развитием работ автора по вычислению дискриминантного множества вещественного многочлена.

Пусть $f_n(x)$ — приведённый многочлен n-й степени с произвольными коэффициентами:

$$f_n(x) \equiv x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_n. \tag{1}$$

Пространство $\Pi \equiv \mathbb{R}^n$ его коэффициентов $a_1, a_2, \ldots a_n$ назовём **пространством коэффициентов** многочлена (1).

Пусть $\mathbb{P}$ — пространство многочленов над $\mathbb{R}$ и пусть на $\mathbb{R}$ определено взаимно-однозначное отображение

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto qx + \omega, \quad q, \omega \in \mathbb{R}, \quad q \neq \{-1, 0\},$$

с неподвижной точкой $\omega_0 = \omega/(1-q)$. Отображение g индуцирует линейный оператор (оператор Хана) $\mathcal{A}_g$

$$(\mathcal{A}_g f)(x) \equiv \begin{cases} \dfrac{f(qx+\omega) - f(x)}{(q-1)x + \omega}, & x \neq \omega_0, \\ f'(\omega_0), & x = \omega_0, \end{cases} \tag{2}$$

на $\mathbb{P}$, удовлетворяющий двум условиям.

1. Условие понижения порядка: $\deg(\mathcal{A}_g f_n)(x) = n - 1$. В частности, $\mathcal{A}_g x = 1$.

2. Аналог правила Лейбница: $(\mathcal{A}_g, x f_n)(x) = f_n(x) + g(x)(\mathcal{A}_g f_n)(x)$.

Очевидно, что оператор Хана $\mathcal{A}_g$ может рассматриваться как обобщение следующих операторов:

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант 18-01-00422.

- q-дифференциального оператора Джексона $(\mathcal{A}_q f)(x) = \dfrac{f(qx) - f(x)}{(q-1)x}$, при $\omega = 0$ и $q \neq 1$;
- разностного оператора $(\Delta_\omega f)(x) = \dfrac{f(x+\omega) - f(x)}{\omega}$ при $q = 1$;
- классического дифференциального оператора d/dx при $(q, \omega) \to (1, 0)$.

Определение 1. *Пару корней t_i, t_j, $i, j = 1, \ldots, n$, $i \neq j$, многочлена $f_n(x)$ назовём **g-связанной**, если $g(t_i) = t_j$.*

Рассмотрим следующую задачу.

Задача 1. *Исследовать в пространстве коэффициентов Π многочлена $f_n(x)$ множество, на котором этот многочлен имеет по крайней мере пару g-связанных корней t_i, t_j. Такое множество назовём **g-дискриминантным** множеством многочлена $f_n(x)$ и обозначим $\mathcal{D}_g(f_n)$.*

Определение 2. *Определим **обобщённый дискриминант** $D_g(f)$ многочлена $f(x)$, порождённый линейным оператором $\mathcal{A}_g$, как результант пары многочленов $f(x)$ и $(\mathcal{A}_g f)(x)$: $D_g(f) = (-1)^{n(n-1)/2} \mathrm{Res}\,(f, \mathcal{A}_g f)$.*

Определение 3. ***Последовательностью** $\mathrm{Seq}_g^{(k)}(t_1)$ **g-связанных корней** длины k назовём конечную последовательность $\{t_i\}$, $i = 1, \ldots, k$, каждый член которой начиная со второго, является g-связанным корнем предыдущего члена последовательности: $g(t_i) = t_{i+1}$. Начальный корень t_1 назовём **порождающим корнем** соответствующей последовательности.*

Множество $\mathcal{D}_g(f_n)$ состоит из алгебраических многообразий $\mathcal{V}_l$ размерностей l, $1 \leqslant l \leqslant n-1$. Общее число этих многообразий, а также число различных многообразий $\mathcal{V}_l$, имеющих фиксированную размерность l, зависит от числа различных разбиений $p(n)$ степени n многочлена $f_n(x)$.

Определение 4. *Разбиением λ натурального числа n называется всякая конечная неубывающая последовательность натуральных чисел $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_k$, для которой $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = n$. Каждое из разбиений запишем в виде $\lambda = [1^{n_1} 2^{n_2} 3^{n_3} \ldots]$, где n_i — число повторений слагаемого i в разбиении.*

Рассмотрим разбиение $\lambda = [1^{n_1} 2^{n_2} \ldots i^{n_i} \ldots]$ натурального числа n. Величина i в разбиении λ задаёт длину последовательности g-связанных корней для соответствующего порождающего корня t_i, а n_i — число различных порождающих корней, задающих последовательность корней длины i. Тогда $l = \sum_i n_i$ есть число различных порождающих корней многочлена $f_n(x)$ для фиксированного набора параметров (q, ω) и $\sum_i i n_i = n$. Любое разбиение λ числа n определяет некоторую структуру g-связанных корней многочлена, и этой структуре соответствует в пространстве коэффициентов Π некоторое алгебраическое многообразие $\mathcal{V}_l^i$, $i = 1, \ldots, p_l(n)$, размерности l по числу различных порождающих корней t_i. Число таких многообразий размерности l равно $p_l(n)$, а общее число многообразий всех возможных размерностей равно $p(n) - 1$.

Теорема 1. *Пусть в пространстве Π имеется многообразие $\mathcal{V}_l$, $\dim \mathcal{V}_l = l$, на котором многочлен $f_n(x)$ имеет l различных последовательностей g-связанных корней, причём последовательность корней $\mathrm{Seq}_g^{(m)}(t_1)$ имеет длину $m > 1$. Другие корни $(l-1)$-е последовательности не являются g-связанными со всеми корнями последовательности $\mathrm{Seq}_g^{(m)}(t_1)$.*

Пусть $\mathbf{r}_l(t_1,\ldots,t_l)$ *— параметризация многообразия* $\mathcal{V}_l$*, тогда для* $0<k<m$ *следующая формула*

$$\mathbf{r}_l(t_1,\ldots,t_l,t_{l+1}) = \mathbf{r}_l(t_1,\ldots,t_l) + \sum_{i=1}^{k}\binom{k}{i}_q \frac{[m-i]_q!}{[m]_q!}\left(\mathcal{A}_g^i\mathbf{r}_l\right)(t_1)\{t_{l+1};t_1\}_{i;g} \tag{3}$$

задаёт параметризацию части многообразия $\mathcal{V}_{l+1}$*, на котором имеется две последовательности корней* $\mathrm{Seq}_g^{(m-k)}(g^k(t_1))$ *и* $\mathrm{Seq}_g^{(k)}(g(t_{l+1}))$*, а остальные последовательности корней такие же, как на исходном многообразии* $\mathcal{V}_l$*.*

Здесь $[n]_q!$ — q-факториал, $\binom{k}{i}_q$ — q-биномиальные (Гауссовы) коэффициенты, а

$$\{x;t\}_{n;g} \equiv \prod_{i=0}^{n-1}(x-g^i(t)), \quad \{x;t\}_{0;q}=1,$$

— g-бином, являющийся обобщением классического бинома.

Начиная с разбиения $[n^1]$, которому соответствует представление многочлена $f_n(x)$ в виде g-бинома $\{x;t_1\}_{n;g}$, получаем представление $\mathbf{r}_1(t_1)$ многообразия $\mathcal{V}_1$ в виде элементарных симметрических многочленов σ_i, $i=1,\ldots,n$, вычисленных на корнях $g^j(t_1)$, $j=0,\ldots,n-1$. Последовательно применяя преобразование (3), получаем параметрическое представление всех остальных многообразий $\mathcal{V}_k$ размерностей от 2 до $n-1$ включительно. Для тех многообразий $\mathcal{V}_k$, на которых многочлен $f_n(x)$ может иметь комплексно-сопряжённые корни, требуется выполнить дополнительную процедуру, продолжающую параметризацию $\mathbf{r}_k$ на всё многообразие.

Поскольку на каждом шаге параметризация $\mathbf{r}_k(t_1,\ldots,t_k)$ остаётся полиномиальной, то имеет место утверждение.

Утверждение 1. *Для фиксированных значений параметров* q,ω *оператора Хана* (2) *g-дискриминантное множество* $\mathcal{D}_g(f_n)$ *многочлена* $f_n(x)$ *допускает полиномиальную параметризацию каждого из своих многообразий* $\mathcal{V}_l^k$*,* $l=1,\ldots,n-1$*,* $k=1,\ldots,p_l(n)$*.*

Для вычисления параметризации множества $\mathcal{D}_g(f_n)$ реализованы библиотеки в системах компьютерной алгебры `Maple` и `SymPy`. Их описание и применение к некоторым задачам приведено в [1].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Батхин А. Б. Вычисление обобщенного дискриминанта вещественного многочлена // Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша, М., 2017, № 88. DOI: 10.20948/prepr-2017-88

———————————————————————————

УДК 513.6

О ранге бирациональной композиции квадратичных форм

А. А. Бондаренко Беларусь, г. Минск, Белорусский государственный университет
bondarenko@bsu.by

On the rank of a birational composition of quadratic forms

A. A. Bondarenko Belarus, Minsk, Belarusian State University
bondarenko@bsu.by

Пусть $f(X)$ и $g(Y)$ — невырожденные квадратичные формы размерности m и n над полем K, $\operatorname{char} K \neq 2$.

Определение 1. *Если произведение $f(X)g(Y)$ бирационально эквивалентно над K квадратичной форме $h(Z)$ над K размерности $m+n$, то будем говорить, что квадратичные формы $f(X)$ и $g(Y)$ образуют бирациональную композицию $h(Z)$ над K.*

Первые результаты по проблеме композиции восходят к Гурвицу, который изучал задачу о сумме квадратов. Классические результаты Гурвица и Радона по этой задаче хорошо известны [1]. В [2] получены первые общие теоремы о бирациональной композиции квадратичных форм над полем K, полное решение проблемы бирациональной композиции квадратичных форм над локальным полем дано в [3], над полем функций — в [4].

Основная цель настоящего сообщения — исследование зависимости ранга бирациональной композиции квадратичных форм в зависимости от ранга исходных форм.

Если $f(X)$ либо $g(Y)$ изотропны над K, то согласно теореме 1 из [2] бирациональная композиция $f(X)$ и $g(Y)$ всегда существует и в качестве $h(Z)$ подходит любая квадратичная форма размерности $m+n$, невырожденная часть которой изотропна. Поэтому в зависимости от выбора $h(Z)$ ранг $h(Z)$ может принимать любое значение от 2 до $m+n$.

Совсем иное получается если $f(X)$ и $g(Y)$ — анизотропные над K квадратичные формы. В этом случае, согласно теореме 2 из [2], если существует бирациональная композиция $h(Z)$ над K, то $h(Z)$ определена однозначно с точностью до эквивалентности над К. И, следовательно, ранг $h(z)$ есть число постоянное и $\operatorname{rank} h(Z) \leqslant m+n$. Имеет место любопытный факт, который имеет много применений. А именно, справедлива

Теорема 1. *Пусть $h(Z)$ — бирациональная композиция анизотропных квадратичных форм над K. Тогда* $\operatorname{rank} h(Z) < \operatorname{rank} f(X) + \operatorname{rank} g(Y)$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Lam K.Y. Topological methods for studying the composition of quadratic forms. // Quadratic and Hermitian forms, Conf. Hamilton. Ont. 1983. CMS Conf. Proc. 1984. No 4. P. 173–192.

2. Бондаренко А.А. Бирациональная композиция квадратичных форм. // Изв. НАН Беларуси. Сер.физ.-мат. наук. 2007. № 4. С. 56–61.

3. Бондаренко А.А. Бирациональная композиция квадратичных форм над локальным полем. // Матем. сб. 2009. Т. 85, № 5. С. 661–670.

4. Бондаренко А.А. Бирациональная композиция квадратичных форм над полем функций. // Изв. НАН Беларуси. Сер.физ.-мат. наук. 2014. № 3. С. 28–32.

УДК 519.48

О свойствах деления в кольцах

Р. Х. Вахитов Россия, г. Воронеж, Воронежский государственный педагогический университет
algebraist@yandex.ru

About the properties of division rings

R. H. Vakhitov Russia, Voronezh, Voronezh state pedagogical University
algebraist@yandex.ru

Операция деления в кольце R может обладать следующими 8 простейшими свойствами:

1) $\forall a, b \in R\,(a \neq 0 \Rightarrow \exists x \in R\ ax = b)$ (кольцо с левым делением);

2) $\forall a, b \in R\,(a \neq 0 \Rightarrow \exists y \in R\ ya = b)$ (кольцо с правым делением);

3) $\forall a, b \in R\,(ab = 0 \Rightarrow (a = 0 \vee b = 0))$ (кольцо без делителей нуля);

4) $\exists e \in R\ \forall a \in R\ ea = a$ (кольцо с левыми единицами);

5) $\exists e \in R\ \forall a \in R\ ae = a$ (кольцо с правыми единицами);

из 4) и 5) следует, что левые и правые единицы совпадают.

Следующие 3 свойства рассматриваются в кольце R с единицей 1:

6) $\forall a \in R\,(a \neq 0 \Rightarrow \exists b \in R\ ba = 1)$ (кольцо с левыми обратными элементами);

7) $\forall a \in R\,(a \neq 0 \Rightarrow \exists b \in R\ ab = 1)$ (кольцо с правыми обратными элементами);

8) $\forall a \in R\,(a \neq 0 \Rightarrow \exists b \in R\ ba = ab = 1)$ (кольцо с обратными элементами).

Условие 3) равносильно тому, что уравнение $ax = b$ (или $ya = b$), $a \neq 0$, имеет не более одного решения.

Рассмотрим классы колец, такие, что для двух классов найдется хотя бы одно условие из 1) – 8), которое выполняется для колец одного из классов и не выполняется для колец другого класса. В этой работе общий признак колец одного из таких классов будем называть D-типом. Априори существует 256 вариантов выполнения или не выполнения условий 1) – 8). Между свойствами 1) – 8) имеются некоторые зависимости, из-за чего не все D-типы колец существуют. Так как условия 6) – 8) имеют место только для колец с единицей, а из 8) следует 6) и 7), то число D-типов уменьшается до 64. Так как в кольцах с единицей из 1) следует 7), а из 2) следует 6), то мы приходим к выводу, что число D-типов не больше 50.

Теорема. *Число D-типов правоальтернативных (альтернативных, ассоциативных) колец равно 7.*

В неассоциативных кольцах элемент $(a, b, c) = (ab)c - a(bc)$ называется ассоциатором. Кольцо называется альтернативным, если в нем выполняются тождества правой и левой альтернативности $(a, b, b) = 0$ и $(b, b, a) = 0$. Кольцо называется правоальтернативным, если для него выполняются тождество правой альтернативности и правое тождество Муфанг $(a, b, c)b + (a, bc, b) = 0$. В альтернативном кольце выполняется правое тождество Муфанг и тождество эластичности $(a, b, a) = 0$. В правоальтернативных кольцах имеет место тождество Михеева $(a, a, b)^4 = 0$ [1]. Отсюда следует, что правоальтернативные кольца без делителей 0 альтернативны.

Доказательство теоремы следует из следующих утверждений:

а) правоальтернативное кольцо с правым делением не содержит делителей 0;

б) правоальтернативное кольцо с левым делением не содержит делителей 0;

в) альтернативное кольцо с однозначным правым или левым делением содержит 1;

г) в альтернативных (эластичных) кольцах односторонние единицы являются единицей, и односторонние обратные элементы являются обратными элементами;

д) правоальтернативное кольцо с обратными элементами не содержит делителей 0;

е) альтернативное кольцо без делителей 0 и с обратными элементами является кольцом с делением;

ж) правоальтернативное кольцо с левыми обратными элементами является кольцом с обратными элементами;

з) правоальтернативное кольцо с правыми обратными элементами является кольцом с обратными элементами.

Примерами 7 D-типов колец являются любое поле, кольцо целых чисел $\mathbf{Z}$, кольцо четных целых чисел $2\mathbf{Z}$, прямые произведения $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$ и $2\mathbf{Z} \times 2\mathbf{Z}$, две алгебры над любым полем с базисом $\{e, f\}$, с таблицами умножения базисных элементов $xe = x$, $xf = 0$, и $ex = x$, $fx = 0$, где $x =\in \{e, f\}$.

Похожая задача о свойствах группоидов рассмотрена в [2].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Жевлаков К. А., Слинько А. М., Шестаков И. П., Ширшов А. И. Кольца, близкие к ассоциативным. М. : Наука, 1978. 432 с.

2. Раухман А. Группоиды // Квант. 1981. №2. С. 14–17. С. 56–61.

УДК 512.556

Определяемость T_1-пространств решеткой подалгебр с единицей полуколец непрерывных частичных числовых функций [1]

Е. М. Вечтомов Россия, г. Киров, Вятский государственный университет
Е. Н. Лубягина Россия, г. Киров, Вятский государственный университет
vecht@mail.ru, shishkina.en@mail.ru

Determination of T_1 -spaces by a lattice of subalgebras with identity semirings of continuous partial numerical functions

E. M. Vechtomov Russia, Kirov, Vyatka State University
E. N. Lubyagina Russia, Kirov, Vyatka State University
vecht@mail.ru, shishkina.en@mail.ru

Продолжается изучение подалгебр полуколец $CP(X)$ непрерывных частичных функций на топологических пространствах X со значением в топологическом поле $\mathbf{R}$ действительных чисел. Рассматриваются решетка $A(X)$ всех подалгебр полукольца $CP(X)$ и ее подрешетка $A_1(X)$ подалгебр с единицей 1.

Теме определяемости топологических пространств различными алгебрами функций на них посвящена обзорная статья [1]. Теорема определяемости хьюиттовских пространств X решеткой всех подалгебр колец $C(X)$ доказана в работе [2]. Определяемость T_1 пространств X решеткой $A(X)$ получена в [3]. В настоящей работе решена задача абсолютной определяемости T_1 пространств X решеткой $A_1(X)$.

Отметим, что основы теории полуколец непрерывных частичных числовых функций заложены в [4], [5, глава 8].

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке государственного задания Минобрнауки РФ «Полукольца и их связи», проект № 1.5879.2017/8.9

Полукольцом (*в широком смысле*) называется алгебраическая структура с двумя ассоциативными бинарными операциями сложения $(+)$ и умножения $(\cdot)$, такими, что умножение дистрибутивно относительно сложения с обеих сторон. В нашей работе под *полукольцом* понимается полукольцо с коммутативными операциями сложения и умножения. Поле $\mathbf{R}$ всех действительных чисел является коммутативным полукольцом с делением с мультипликативным нулем 0 и единицей 1.

Для топологического пространства X через $C(X)$ обозначается кольцо всех непрерывных действительнозначных функций на X, а через $CP(X) = \bigcup\{C(Y) : Y \subseteq X\}$ — полукольцо всех непрерывных частичных $\mathbf{R}$-значных функций на X с поточечными операциями сложения и умножения частичных функций f и g на их общей области определения $D(f) \cap D(g)$. Считаем, что $C(\varnothing) = \{\varnothing\}$. Полукольцо $CP(X)$ имеет единицу 1 и поглощающий элемент $\varnothing$.

Подалгеброй в полукольце $CP(X)$ называется произвольное его подполукольцо, выдерживающее умножение на числа из $\mathbf{R}$. Пустое множество $\varnothing$ также считается подалгеброй в $CP(X)$. Относительно отношения включения $\subseteq$ множество $A(X)$ образует полную решетку с наименьшим элементом $\varnothing$ и наибольшим элементом $CP(X)$, а $A_1(X)$ будет полной решеткой с наименьшим элементом $\mathbf{R}$ — подалгеброй констант в $CP(X)$. Точной нижней гранью непустого подмножества в $A(X)$ будет их пересечение, а точная верхняя грань подалгебр $A, B \in A(X)$ равна $A \vee B = A \cup B \cup (A + B + AB)$.

Топологическое пространство называется T_1-*пространством*, если все его одноточечные подмножества замкнуты, и называется T_0-*пространством*, если любые две его различные точки имеют разные замыкания.

Для любого подмножества Y топологического пространства X обозначим через 0_Y и 1_Y такие функции из $CP(X)$, что $D(0_Y) = D(1_Y) = Y$, $0_Y = 0$ и $1_Y = 1$ на Y. Имеем $0_\varnothing = 1_\varnothing = \varnothing$. Для точек $x \in X$ будем писать $0_x = 0_{\{x\}}$ и $1_x = 1_{\{x\}}$.

Атомы (коатомы) решетки $A(X)$ называются также минимальными (максимальными) подалгебрами полукольца $CP(X)$. Элемент a решетки L с наименьшим элементом θ называется ее *предатомом*, если a строго больше ровно двух элементов решетки L: θ и некоторого ее атома.

В предложении 1 [3] описаны все атомы и предатомы решеток $A(X)$:
атомами решетки $A(X)$ являются в точности одноэлементные подалгебры $\{0_Y\}$, $Y \subseteq X$; предатомы решетки $A(X)$ — это в точности подалгебры $e\mathbf{R}$ по всем $e \in CP(X)$, принимающим ровно одно значение 1 ($e = 1_Y$ при $Y \neq \varnothing$) или ровно два значения 0 и 1.

Для решеток $A_1(X)$ справедливо аналогичное

Предложение 1. *Имеют место следующие утверждения:*

1) атомы решетки $A_1(X)$ исчерпываются подалгебрами $\boldsymbol{R} \cup 1_Y\boldsymbol{R}$ по всем собственным подмножествам Y топологического пространства X и подалгебрами $\boldsymbol{R} \vee e\boldsymbol{R}$, где функция $e \in C(X)$ принимает ровна два значения 0 и 1;

2) предатомы решетки $A_1(X)$ совпадают с подалгебрами $\boldsymbol{R} \vee e\boldsymbol{R}$ решетки $A(X)$ по всем $e \in CP(X) \setminus C(X)$, принимающим ровно два значения 0 и 1.

Заметим, что $\mathbf{R} \vee e\mathbf{R}$ совпадает с множеством всех функций из $C(D(e))$, являющихся константами на множествах $\{x \in D(e) : e(x) = 0\}$ и $\{x \in D(e) : e(x) = 1\}$.

Скажем, что T_1-пространство X *абсолютно определяется решеткой* $A_1(X)$, если для любого топологического пространства Y изоморфность решеток $A_1(X)$ и $A_1(Y)$ влечет гомеоморфность пространств X и Y.

Предложение 1 позволяет описать топологию любого T_1-пространства X в терминах атомов и коатомов решетки $A_1(X)$ и, соответственно, доказать следующую теорему.

Теорема 1. *Произвольное T_1-пространство X абсолютно определяется решеткой $A_1(X)$.*

Поскольку для любого топологического пространства Y подалгебра $\mathbf{R}$ в решетке $A(Y)$ определяется как специальный предатом, содержащий «наибольший» атом 0_Y, то из теоремы 1 вытекает

Следствие 1 ([3]). *Любое T_1-пространство X абсолютно определяется решеткой $A(X)$.*

Пример 1. *Рассмотрим двухточечное топологическое пространство $X = \{x, y\}$ с антидискретной топологией или топологией связного двоеточия. Имеем*

$$CP(X) = \boldsymbol{R} \cup 1_x\boldsymbol{R} \cup 1_y\boldsymbol{R} \cup \{\varnothing\}$$

и

$$A_1(X) = \{\boldsymbol{R}, \boldsymbol{R} \cup 1_x\boldsymbol{R}, \boldsymbol{R} \cup 1_y\boldsymbol{R}, \boldsymbol{R} \cup \{\varnothing\}, \boldsymbol{R} \cup 1_x\boldsymbol{R} \cup \{\varnothing\}, \boldsymbol{R} \cup 1_y\boldsymbol{R} \cup \{\varnothing\}, CP(X)\}.$$

Решетка $A_1(X)$ содержит три атома $\boldsymbol{R} \cup 1_x\boldsymbol{R}, \boldsymbol{R} \cup 1_y\boldsymbol{R}, \boldsymbol{R} \cup \{\varnothing\}$ и не содержит предатомов. Ее подрешетка $\{\boldsymbol{R}, \boldsymbol{R} \cup 1_x\boldsymbol{R}, \boldsymbol{R} \cup 1_y\boldsymbol{R}, \boldsymbol{R} \cup 1_x\boldsymbol{R} \cup \{\varnothing\}, CP(X)\}$ является диамантом. Следовательно, решетки $A_1(X)$ и $A(X)$ не модулярны. Негомеоморфные антидискретное двухточечное пространство и связное двоеточие имеют изоморфные решетки подалгебр с единицей полуколец непрерывных частичных $\boldsymbol{R}$-значных функций. Значит, теорема об абсолютной определяемости неверна для T_0-пространств.

В силу примера 1 имеет место аналог предложения 3 [3]:

Теорема 2. *Для любого топологического пространства X решетка $A_1(X)$ дистрибутивна, если X одноточечно, и не модулярна, если X содержит более одной точки.*

Подпространство Y топологического пространства X называется *C-расширяемым*, если каждая функций из $C(Y)$ продолжается до некоторой функции из $C(X)$.

Из предложения 4 [3] вытекает следующая

Теорема 3. *Если x — точка топологического пространства X, такая, что подпространство $X \setminus \{x\}$ C-расширяемо, и A — максимальная подалгебра с единицей кольца $C(X)$, то множества $CP(X) \setminus C(X \setminus \{x\})$ и $(CP(X) \setminus C(X)) \cup A$ будут максимальными подалгебрами с единицей полукольца $CP(X)$.*

Заметим, что в случае конечного дискретного пространства X максимальные подалгебры кольца $C(X)$ суть в точности его максимальные идеалы $M_x = \{f \in C(X) : f(x) = 0\}$ и подалгебры с единицей $A_{x,y} = \{f \in C(X) : f(x) = f(y)\}$ по всем точкам $x \neq y$ из X.

Следствие 2. *Для конечного дискретного пространство X максимальные подалгебры с единицей полукольца CP(X) исчерпываются подалгебрами вида $CP(X) \setminus C(X \setminus \{x\})$ и $(CP(X) \setminus C(X)) \cup A_{x,y}$, $x, y \in X$, $x \neq y$.*

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Вечтомов Е. М. Вопросы определяемости топологических пространств алгебраическими системами непрерывных функций // Итоги науки и техн. Алгебра. Топология. Геометрия. М.: ВИНИТИ, 1990. Том 28. С. 3-46.

2. Вечтомов Е. М. Решетка подалгебр колец непрерывных функций и хьюиттовские пространства // Математические заметки. 1997. Том 62. № 5. С. 687-693.

3. Вечтомов Е. М., Лубягина Е. Н. Определяемость T_1-пространств решеткой подалгебр полуколец непрерывных частичных действительнозначных функций на них // Вестник Сыктывкарского университета. Серия 1. Математика. Механика. Информатика. 2017. Вып. 1(22). С. 21-28.

4. Вечтомов Е. М., Лубягина Е. Н. Полукольца непрерывных частичных действительнозначных функций //CEUR-WS.org_Vol-1894. Proceedings of the 48th International Youth School-Conference «Modern Problems in Mathematics and its Applications» Yekaterinburg, Russia, February 5-11, 2017. С. 20-29.

5. Вечтомов Е. М., Лубягина Е. Н., Сидоров В. В., Чупраков Д. В. Элементы функциональной алгебры. В 2-х т. / под ред. Е. М. Вечтомова. — Киров: ООО «Издательство «Радуга-ПРЕСС», 2016. Том 1, 384 с.; Том 2, 316 с.

———————————————————————————————

УДК 512.55

К теории мультипликативно циклических полуколец[1]

Е. М. Вечтомов Россия, г. Киров, Вятский государственный университет
И. В. Орлова Россия, г. Киров, Вятский государственный университет
Д. В. Чупраков Россия, г. Киров, Вятский государственный университет
vecht@mail.ru, lubyagina@yandex.ru, chupdiv@yandex.ru

To the theory of multiplicative cyclic semirings

E. M. Vechtomov Russia, Kirov, Вятский государственный университет
I. V. Orlova Russia, Kirov, Вятский государственный университет
D. V. Chuprakov Russia, Kirov, Вятский государственный университет
vecht@mail.ru, lubyagina@yandex.ru, chupdiv@yandex.ru

Предварительные сведения. Мультипликативно циклические полукольца с коммутативны сложением, с нулем 0 и единицей $1 \neq 0$ были определены и начали изучаться в работе [1]. Задача исследования конечных циклических полуколец поставлена там же (задача 8).

Введем необходимые определения и обозначения.

Полукольцом (в широком смысле, по Вандиверу) называется алгебраическая структура $\langle S, +, \cdot \rangle$ с ассоциативными бинарными операциями сложения $+$ и умножения $\cdot$, такими, что умножение дистрибутивно относительно сложения с обеих сторон. Полукольцо с единицей называется *полутелом*, если каждый его элемент обратим. *Полуполя* — это полутела с коммутативным умножением.

Полукольцо S называется (*мультипликативно*) *циклическим*, если оно обладает образующим элементом a таким, что все элементы в S, отличные от нуля 0 и единицы 1 (при наличии 0 или 1) являются натуральными степенями элемента a; при этом будем считать элемент a отличным от 0 и 1 и писать $S = (a)$.

Мультипликативная полугруппа циклического полукольца (a) имеет вид $\{a^m : m \in \mathbb{N}\}$ или $\{a^m : m \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$, возможно с присоединенным нулевым элементом. Во втором случае имеем циклическое полукольцо $\{a^0, a, a^2, \ldots\}$ с единицей $1 = a^0$.

Произвольные циклические полукольца с 1 рассматривались в [3]. Циклические полукольца с единицей с коммутативным сложением изучались в [6], а с некоммутативным сложением — в [4, 5]. В пленарном докладе [7] дан обзор развития теории циклических полуколец.

Строение бесконечных циклических полуколец известно [1, с. 28], [3, теорема 1]. Строение конечных полутел выяснил Вайнерт (см. [4, теорема A]), на основании чего получается описание циклических полуполей [4, предложение 3]. Конечные циклические полукольца (a)

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке государственного задания Минобрнауки РФ «Полукольца и их связи», проект № 1.5879.2017/8.9.

с нулем являются либо конечными цепями по сложению (a — нильпотентный элемент), либо конечными полями (a — обратимый элемент), либо конечными циклическими полукольцами без нуля с присоединенным нулем [2, параграф 3], [4, параграф 1].

Поэтому далее можно рассматривать только конечные циклические полукольца без нуля, не являющиеся полуполями.

Редукция к циклическим полукольцам с единицей. Хорошо известно, что любая конечная циклическая полугруппа (a), не являющаяся группой, в зависимости от отсутствия или наличия единицы 1 имеет вид:

$$S = \{a, \ldots, a^k, a^{k+1}, a^{k+2}, \ldots, a^{k+n}\}, \text{ где } k \in \mathbb{N},\ a^{k+n+1} = a^{k+1}, \text{ либо}$$
$$T = \{1, a, \ldots a^k, a^{k+1}, \ldots,\ a^{k+n-1}\}, \text{ где } k \in \mathbb{N}, a^{k+n} = a^k.$$

Задавая на мультипликативных полугруппах S и T всевозможные полукольцевые операции сложения, мы получим все конечные циклические полукольца, отличные от полуполей. Биекция $a^m \leftrightarrow a^{m-1}$, $m \in \mathbb{N}$, между ними позволяет переносить операцию сложения с S на T, и обратно.

Теорема 1. *Между классом всех циклических полуколец без единицы и классом всех циклических полуколец с единицей существует естественное взаимно однозначное соответствие.*

Тем самым, изучение циклических полуколец без единицы сводится к исследованию циклических полуколец с единицей.

Следствие 1 ([9]). *Любая конечная циклическая полугруппа без единицы (a) допускает структуру циклического полукольца, как с идемпотентным сложением ($a + a = a$), так и с неидемпотентным сложением ($a + a \neq a$).*

Заметим, что сложение в бесконечных циклических полукольцах идемпотенто.

Если из конечного циклического полукольца T с единицей 1 удалить 1, то получим циклическое полукольцо $\{a, \ldots, a^k, a^{k+1}, \ldots, a^{k+n-1}\}$ без единицы в случае $k \neq 1$ (при $k = 1$ получаем циклическое полуполе со своей единицей a^n).

Заметим, что пример 3 из [9] показывает, что из неизоморфных конечных циклических полуколец с единицей отбрасыванием единицы можно получить одно и то же циклическое полукольцо без единицы.

Кроме того, в работе [9, примеры 1 и 3] приведен пример трехэлементного циклического полукольца без единицы, которое не может быть получено из четырехэлементных циклических полуколец с единицей 1 отбрасыванием 1.

Конечные циклические полукольца с полурешеточным сложением. Если над элементами полугруппы T определить коммутативное идемпотентное сложение и задать порядок $a^i \leqslant a^j \Leftrightarrow a^i + a^j = a^j$ для любых $i, j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, получим конечное циклическое полукольцо $\langle T, +, \cdot \rangle$ с полурешеточным сложением. Элемент a^k будет поглощающим, как по умножению, так и по сложению [7, теорема 5] и, следовательно, наибольшим элементом полурешетки $\langle T, \leqslant \rangle$.

Циклическое $(k + 1)$-элементное полукольцо с единицей, полурешеточным умножением и образующим элементом a однозначно определяется множеством показателей $I = \{i : 1 \leqslant a^i\}$ элементов верхнего конуса единицы [8, предложение 2]). При этом множество I образует идеал [8, предложение 1] в полукольце первых k целых неотрицательных чисел с классическими операциями и добавленным бесконечным элементом k. Идеал I конечен и, следовательно, имеет конечный базис. Показатель k поглощающего элемента не является базисным.

Для каждого идеала $J = \langle g_1, g_2, \ldots, g_l \rangle$ полукольца целых неотрицательных чисел $\mathbb{N} \cup \{0\}$ циклическое $(k+1)$-элементное полукольцо S с полурешеточным сложением, заданное идеалом $I = \{\min\{j, k\} : j \in J\} \cup \{k\}$, назовем *полукольцом, ассоциированным с идеалом J*.

Следующее предложение позволяет строить все ассоциированные с идеалом J полукольца.

Предложение 1 ([8, следствие 1]). *Пусть J — идеал полукольца $\mathbb{N} \cup \{0\}$. Циклическое $(n+1)$-элементное полукольцо S с полурешеточным умножением, ассоциированное с J, существует тогда и только тогда, когда выполняется двойное неравенство $M < k \leqslant \min \bigcup_{i=1}^{m-1} \big((J \cap J_i) \setminus J_{p_i}\big)$, где M и m — наибольший и, соответственно, наименьший базисные элементы идеала J, $J_i = J + i$, $p_i = \min(J \cap J_i)$.*

В заключение сформулируем теорему, описывающую циклические полукольца, ассоциированные с двухпорожденными идеалами $\langle g_1, g_2 \rangle$ полукольца $\mathbb{N} \cup \{0\}$. В [8] она доказана для случая $(g_1, g_2) = 1$.

Из [8, лемма 8] следует, что для любых натуральных чисел g_1 и g_2 таких, что $g_1 < g_2$ и g_1 не делит g_2, каждое натуральное число $t \leqslant g_1$, кратное $d = (g_1, g_2)$, единственным образом представимо в виде линейной комбинации $t = v_1 g_1 + v_2 g_2$ с целыми коэффициентами v_1 и v_2, удовлетворяющими неравенствам $|v_1| \leqslant \frac{g_2}{2d}$, $|v_2| \leqslant \frac{g_1}{2d}$, причем, хотя бы одно из неравенств строгое. Пусть $t^-_{g_1,g_2}$ — отрицательное слагаемое указанного линейного представления числа t.

Теорема 2. *Пусть $J = \langle g_1, g_2 \rangle$ — идеал полукольца $\mathbb{N} \cup \{0\}$, $g_1 < g_2$ и $d = (g_1, g_2)$. Для каждого натурального числа k, удовлетворяющего неравенству*

$$g_2 < k \leqslant \frac{g_1 g_2}{d} + \min\big\{t^-_{g_1,g_2} : t = dt' < g_1, t' \in \mathbb{N}\big\},$$

существует единственное циклическое $(k+1)$-элементное полукольцо с полурешеточным сложением, ассоциированное с идеалом J.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Вечтомов Е. М. Введение в полукольца. — Киров: Изд-во Вятского гос. пед. ун-та, 2000. 44 с.

2. Вечтомов Е. М. О свойствах полутел // Математический вестник педвузов Волго-Вятского региона. 2001. Вып. 3. С. 11–20.

3. Вечтомов Е. М., Бестужев А. С., Лубягина И. В. Полукольца с циклическим умножением // Тезисы Международной конференции «Алгебра и математическая логика», посвященной 100-летию В. В. Морозова. — Казань: Изд-во КФУ, 2011. С. 51–52.

4. Вечтомов Е. М., Лубягина И. В. Циклические полукольца с идемпотентным некоммутативным сложением // Фундаментальная и прикладная математика. 2012. Т. 17. Вып. 1. С. 33–52.

5. Вечтомов Е. М., Орлова (Лубягина) И. В. Циклические полукольца с неидемпотентным некоммутативным сложением // Фундаментальная и прикладная математика. 2015. Т. 20. Вып. 6. С. 17–41.

6. Бестужев А. С., Вечтомов Е. М. Циклические полукольца с коммутативным сложением // Вестник Сыктывкарского университета. Серия 1: Математика. Механика. Информатика. 2015. Вып. 20. С. 8–39.

7. Вечтомов Е. М., Бестужев А. С., Орлова И. В. Строение циклических полуколец // Сборник материалов IX науч. конф. ЭКОМОД-2016 «Математическое моделирование развивающейся экономики, экологии и технологий» [электронный ресурс]. — Киров: Изд-во ВятГУ, 2016. С. 21–30. Режим доступа: www.researchgate.net/publication/305388022_IX_Vserossijskaa_naucnaa_konferencia_Matematiceskoe_modelirovanie_razvivausejsa_ekonomiki_ekologii_i_tehnologij_ EKOMOD-2016

8. Ведерникова А. В., Чупраков Д. В. О структуре конечных циклических полуколец с идемпотентным коммутативным сложением // Вестник Сыктывкарского университета. Серия 1: Математика. Механика. Информатика. 2017. Вып. 2(23). С. 92–109.

9. Вечтомов Е. М., Орлова И. В. Конечные циклические полукольца без единицы // Алгебра и теория алгоритмов [Электронный ресурс]: Всероссийская конференция, посвященная 100-летию факультета математики и компьютерных наук Ивановского государственного университета: сборник материалов. — Иваново: Иван. гос. ун-т, 2018. С. 113–115. Режим доступа: http://math.ivanovo.ac.ru/math-ivsu-100/materials.html

————————————————————————————————

УДК 511.32

Канонический базис Гензеля-Шафаревича для формальных модулей Хонды[1]

С. В. Востоков Россия, г. Санкт-Петербург, Санкт-Петербургский государственный университет
Р. П. Востокова Россия, г. Санкт-Петербург, Санкт-Петербургский государственный университет, Балтийский государственный технический университет "Военмех"
Е. В. Иконникова Россия, г. Санкт-Петербург, Санкт-Петербургский государственный университет
sergei.vostokov@gmail.com, rvostokova@yandex.ru, ikonnikovaev@gmail.com

Canonical Hensel-Shafarevich basis in Honda formal modules

S. V. Vostokov Russia, Saint Petersburg, Saint Petersburg State University
R. P. Vostokova Russia, Saint Petersburg, Saint Petersburg State University, Baltic State Technical University "Voenmech"
E. V. Ikonnikova Russia, Saint Petersburg, Saint Petersburg State University
sergei.vostokov@gmail.com, rvostokova@yandex.ru, ikonnikovaev@gmail.com

1. Обозначения

Пусть

- k – локальное поле характеристики 0,
- $\bar{k} = \mathbb{F}_q$, $q = p^f$, $p \neq 2$.
- k'/k – конечное неразветвленное расширение с униформизующей π
- K – n-мерное локальное поле $(K = K_n, K_{n-1}, \dots, K_1, K_0,\ K_1 = k)$ $K = k'((t_2))\dots((t_n))$
- L – конечное расширение K, $(L = L_1((T_2))\dots((T_n)))$, L_1 – конечное расширение K_1 и $L_i = L_1((T_2))\dots((T_i)))$
- $\sigma : K \to K$

$$\sigma(t_i) = t_i^p,$$

на k' σ совпадает с автоморфизмом Фробениуса.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РНФ 16-11-10200

- $\triangle$ – оператор на $K[[X]]$:
$$\triangle(\sum c_i X^i) = \sum \sigma(c_i) X^{pi}$$

- $\mathcal{D}$ – степеннной ряд от $\triangle$ с коэффициентами из $\mathcal{O}_K$ (умножение определяется так: $\triangle \cdot a = \sigma(a) \cdot \triangle$)

2. Предварительные сведения

2.1. Тип формальной группы

Пусть $F(X,Y) \in \mathcal{O}_K[[X,Y]]$ – формальная группа. Тогда F строго изоморфна p-типической F_p с логарифмом $\lambda_p(X) = \sum\limits_{i=0}^{\infty} c_i X^{p^i}$

Предложение 1. *Пусть F_p — p-типическая формальная группа. Тогда существует единственный $u_p(\triangle) \in \pi + \mathcal{D}\triangle$ (тип of F_p), т.ч. $\lambda_p(X) = (\pi u_p^{-1}(\triangle))(X)$.*

2.2. Оператор $\mathcal{A}$

Предложение 2. *Пусть F – p-типическая формальная группа над $\mathcal{O}_K$ типа $u = \pi - a_h B\triangle^h$, $B \in 1 + \mathcal{D}\triangle$, и пусть $\lambda_1(X) = (\pi u^{-1}(\triangle))(X)$, где $u_1 = u^{\sigma^h} \circ B^{-1}$. Тогда*

1. *λ_1 является логарифмом некоторой p-типической формальной группы F_1 над $\mathcal{O}_K$*

2. *существует $[\pi a_h^{-1}]_{F,F_1} \in Hom_{\mathcal{O}_K}(F, F_1)$, такой что*
$$[\pi a_h^{-1}]_{F,F_1}(X) \equiv X^{p^h} \mod \pi$$

Таким образом мы получаем последовательность формальных групп и гомоморфизмов f_i

$$F \to F_1 \to \ldots \to F_N$$

$$f^{(m)} = f_{m-1} \circ \ldots \circ f_1 \circ f$$

2.3. Отображение Артина-Хассе

Определим

- $E_F : K[[X]]_0 \to F(K[[X]]_0)$
$$E_F(\varphi) = \lambda^{-1}(\pi u_0^{-1} \circ \varphi)$$

- $l_F : F(K[[X]]_0) \to K[[X]]_0$
$$l_F(\psi) = \frac{u_0}{\pi} \circ \lambda(\psi)$$

Лемма 1. *E_F и l_F задают обратные друг другу изоморфизмы $\mathcal{O}_K$-модулей $\mathcal{O}_K[[X]]_0$ и $F(\mathcal{O}_K[[X]]_0)$, а также $K[[X]]_0$ и $F(K[[X]]_0)$.*

2.4. Примарные элементы

Определение 1. *Элемент $\omega \in F_N(\mathfrak{M})$ называется примарным, если $K(\widetilde{\omega})/K$ неразветвлено (где $f^{(N)}(\widetilde{\omega}) = \omega$).*

- $W_F^N = Ker[\pi^N]_F \subset F(\mathfrak{M})$
- $\{z_1, \ldots, z_h\}$ – множество образующих W_F^N (как модуля над $\mathcal{O}_K$)
- $s = f^{(N)} \circ \underline{z}$
- $\widehat{b} = b + b^{\triangle} + \ldots + b^{\triangle^{h-1}}$

Предложение 3.

$$\omega(b) = E_N(\widehat{b}\lambda_N(s))|_{X=\Pi}$$

– корректно определенный элемент $F_N(\mathfrak{M})$, и, более того, является примарным.

3. Основные результаты

- $g_0 = \pi_{N-1}X + X^{p^h}$
- $g_{\rho,a} = \pi_{N-1}X + \pi_{N-1}aX^{p^\rho} + X^{p^h}, a \in \mathcal{O}_K, 1 \leq \rho < fh$
- G_0, $G_{\rho,a}$ – соответствующие формальные группы типа u_{N-1} (изоморфные F_N)
- $\mathcal{E}_N^0$, $\mathcal{E}_N^{\rho,a}$ – соответствующие изоморфизмы.

Теорема 1. *Элементы*

$$\omega_i(b), b \in \mathcal{O}_K, \quad 1 \leq i \leq h,$$

$$\mathcal{E}_N^0(\theta\Pi^{i_1}T_2^{i_2}\ldots T_n^{i_n}),$$

$$\mathcal{E}_N^{\rho,a}(\theta\Pi^{i_1}T_2^{i_2}\ldots T_n^{i_n}),$$

$\theta \in \mathcal{R}$, $a \in \mathcal{O}_K^*$, $1 \leq \rho < fh$, $\pi \nmid \overrightarrow{i}$, $0 < i_n \leq e_* = p^h e_n/(p^h-1)$ являются множеством образующих для $F_N(\mathfrak{M})$.

Теорема 2. *Элементы*

$$\widetilde{\omega}_i(b), b \in \mathcal{O}_K, \quad 1 \leq i \leq h,$$

$$\widetilde{\mathcal{E}}_N^0(\theta\Pi^{i_1}T_2^{i_2}\ldots T_n^{i_n}),$$

$$\widetilde{\mathcal{E}}_N^{\rho,a}(\theta\Pi^{i_1}T_2^{i_2}\ldots T_n^{i_n}),$$

$\theta \in \mathcal{R}$, $a \in \mathcal{O}_K^*$, $1 \leq \rho < fh$, $\pi \nmid \overrightarrow{i}$, $0 < i_n \leq e_* = p^h e_n/(p^h-1)$ являются множеством образующих для $F(\mathfrak{M})$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. С. В. Востоков, ”Канонический базис Гензеля–Шафаревича в полных дискретно-нормированных полях”, Вопросы теории представлений алгебр и групп. 22, Зап. научн. сем. ПОМИ, 394, ПОМИ, СПб., 2011, 174–193
2. M. Hazewinkel, Formal Groups and Applications, Pure Appl. Math., 78, Academic Press, New York, 1978
3. О. В. Демченко, ”Формальные группы Хонды: арифметика группы точек”, Алгебра и анализ, 12:1 (2000), 132–149

—————————————————————————————————

УДК 512.552+512.572

Об одном идеале, порожденном коммутаторами

Г. С. Дерябина Россия, г. Москва, Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана
А. Н. Красильников Бразилия, г. Бразилиа, Университет Бразилиа
galina_deryabina@mail.ru, alexeikras@gmail.com

On a certain ideal generated by commutators

G. Deryabina Russia, Moscow, Bauman Moscow State Technical University
A. Krasilnikov Brazil, Brasilia, University of Brasilia
galina_deryabina@mail.ru, alexeikras@gmail.com

Исследование лиевски нильпотентных ассоциативных алгебр было начато в 1947 году Дженнигсом и с тех пор велось разными авторами с разных точек зрения. Последние 10–15 лет такие алгебры привлекали повышенное внимание. Это было вызвано, с одной стороны, отрицательным решением в 1999 году проблемы Шпехта над полем простой характеристики А.Я. Беловым, А.В. Гришиным и В.В. Щиголевым и той ролью, которую алгебра Грассмана и другие лиевски нильпотентные класса 2 ассоциативные алгебры сыграли в этом решении, см. монографию [1] и работы, приведенные там в библиографии. С другой стороны, повышенный интерес к этим алгебрам был вызван появлением в 2007 году пионерской работы Б. Фейгина и Б. Шойхета [2] и последовавшей за ней серии работ П. Этингофа и других авторов, см. обзор [3] и работы, приведенные там в библиографии.

Пусть R — ассоциативное и коммутативное кольцо с единицей; пусть A — ассоциативная R-алгебра с единицей. Напомним, что левонормированный коммутатор $[a_1, a_2, \dots, a_n]$ $(a_i \in A)$ определяется рекурсивно: $[a_1, a_2] = a_1a_2 - a_2a_1$, $[a_1, \dots, a_{n-1}, a_n] = \big[[a_1, \dots, a_{n-1}], a_n\big]$ для любых $n > 2$, $a_i \in A$. Пусть $T^{(n)}(A)$ — двусторонний идеал в A, порождённый всеми коммутаторами $[a_1, \dots, a_n]$, где $a_i \in A$. Алгебра A называется лиевски нильпотентной класса не более $n-1$, если $[a_1, \dots, a_n] = 0$ для всех $a_i \in A$, то есть если $T^{(n)}(A) = 0$.

Пусть A — ассоциативная R-алгебра с единицей, порожденная (как алгебра с единицей) множеством X. Для исследования лиевски нильпотентной факторалгебры $A/T^{(n)}(A)$ важно знать "хорошее" (близкое к минимальному) порождающее множество идеала $T^{(n)}(A)$, которое, в частности, было бы конечным, если конечно множество X. Идеал $T^{(2)}(A)$, очевидно, порождается как двусторонний идеал в A всеми коммутаторами $[x_1, x_2]$ $(x_i \in X)$, которые образуют для него "хорошее" множество порождающих. "Хорошее" множество порождающих идеала $T^{(3)}(A)$ будет состоять из коммутаторов $[x_1, x_2, x_3]$ и элементов $[x_1, x_2][x_3, x_4] + [x_1, x_3][x_2, x_4]$, где $x_i \in X$ для всех i; оно было найдено В. Н. Латышевым в 1963 году.

Описание "хорошего" множества порождающих идеала $T^{(4)}(A)$ зависит от того, обратим или нет элемент 3 ($= 1+1+1$) в R. Если $1/3 \in R$, то $T^{(4)}(A)$ порождается элементами

$$\begin{gathered}[x_1,x_2,x_3,x_4] \qquad (x_i \in X), \\ [x_1,x_2][x_3,x_4,x_5] \qquad (x_i \in X), \\ \big([x_1,x_2][x_3,x_4][x_1,x_3][x_2,x_4]\big)[x_5,x_6] \qquad (x_i \in X).\end{gathered} \tag{1}$$

Это было доказано в 1978 году И.Б. Воличенко [4] и позднее независимо переоткрывалось другими авторами. Данный результат, вообще говоря, перестаёт быть верным, если $1/3 \notin R$ (например, если $R = \mathbb{Z}$), поскольку тогда, вообще говоря, $[x_1,x_2][x_3,x_4,x_5] \notin T^{(4)}(A)$, см. [5, Theorem 1.1].

Основным результатом нашего сообщения является следующая

Теорема 1. *Пусть R — произвольное ассоциативное и коммутативное кольцо с единицей, A — ассоциативная R-алгебра с единицей, порожденная множеством X. Тогда $T^{(4)}(A)$ порождается элементами*

$$[x_1,x_2,x_3,x_4] \qquad (x_i \in X), \tag{2}$$

$$[x_1,x_2][x_3,x_4,x_5] + [x_1,x_3][x_2,x_4,x_5] \qquad (x_i \in X), \tag{3}$$

$$\big([x_1,x_2][x_3,x_4] + [x_1,x_3][x_2,x_4]\big)[x_5,x_6] \qquad (x_i \in X). \tag{4}$$

Отметим,что идеал $T^{(4)}(A)$ содержит элементы $3[x_1,x_2][x_3,x_4,x_5]$ для всех $x_i \in X$ (см. [5, Theorem 1.1]), поэтому, если $1/3 \in R$, то $[x_1,x_2][x_3,x_4,x_5] \in T^{(4)}(A)$ $(x_i \in X)$. Ясно, что в этом случае порождающие идеала $T^{(4)}(A)$ вида (3) могут быть заменены на порождающие вида (1).

Замечание 1. *В [6] было доказано, что над любым R идеал $T^{(4)}(A)$ порождается элементами (2)–(4) вместе с элементами*

$$[x_1,x_2,x_3][x_4,x_5,x_6] \qquad (x_i \in X) \tag{5}$$

и

$$[x_1,x_2][x_3,x_4,x_5] + [x_1,x_5][x_3,x_4,x_2] \qquad (x_i \in X); \tag{6}$$

более простое доказательство этого результата приведено в [7]. В теореме 1 мы доказываем, что элементы видов (5) и (6) лежат в идеале, порожденном элементами видов (2)–(4). Это легко сделать для элементов вида (6) и несколько сложнее — для элементов вида (5).

Замечание 2. *В работе [8] было найдено "хорошее" порождающее множество для идеала $T^{(5)}(A)$ алгебры A над любым ассоциативным и коммутативным кольцом с единицей R. Это множество состоит из элементов 8 видов. С другой стороны, в [9] найдены различные "хорошие" порождающие множества идеала $T^{(n)}(A)$ для любого n при условии, что $1/3 \in R$.*

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Kanel-Belov A., Karasik Ya., Rowen L. H., Computational Aspects of Polynomial Identities: Volume l, Kemer's Theorems. — Boca Raton-London-New York: CRC Press, 2016, 408 p.

2. Feigin B., Shoikhet B. On $[A, A]/[A, A, A]$ and on a W_n-action on the consecutive commutators of free associative algebras // Mathematical Research Letters. 2007. Vol. 14. P. 781–795.

3. Abughazalah N., Etingof P. On properties of the lower central series of associative algebras // Journal of Algebra and its Applications. 2016. Vol. 15. 1650187 (24 pages).

4. Воличенко И. Б. T-идеал, порожденный элементом $[x_1, x_2, x_3, x_4]$. — Минск: Ин-т матем. АН БССР, Препринт № 22, 1978, 13 с.

5. Krasilnikov A. The additive group of a Lie nilpotent associative ring // Journal of Algebra. 2013. Vol. 392. P. 10–22.

6. Deryabina G., Krasilnikov A. The torsion subgroup of the additive group of a Lie nilpotent associative ring of class 3 // Journal of Algebra. 2015. Vol. 428. P. 230–255.

7. Дерябина Г.С. О соотношениях в универсальных лиевски нильпотентных ассоциативных алгебрах класса 3 // Математика и математическое моделирование. МГТУ им. Н.Э. Баумана. 2016. № 6. С. 15–29.

8. da Costa E. A., Krasilnikov A. Relations in universal Lie nilpotent associative algebras of class 4 // Communications in Algebra. 2018. Vol. 46 № 3. P. 1367–1386.

9. Dias Jr. C.W.G., Krasilnikov A. On Lie nilpotent associative algebras. arXiv:1709.05728 [math.RA]

———————————————————————————————

УДК 512.552

О степени нильпотентности квантово-лиевски нильпотентных алгебр [1]

Е. А. Киреева Россия, г. Москва, Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана,
В. В. Щиголев Россия, г. Москва, Финансовый университет при правительстве Российской Федерации
eakireeva@yandex.ru, shchigolev_vladimir@yahoo.com

On the nilpotence degree of quantum-Lie nilpotent algebras

E. A. Kireeva Russia, Moscow, Bauman Moscow State Technical University,
V. V. Shchigolev Russia, Moscow, Financial University under the Government of the Russian Federation
eakireeva@yandex.ru, shchigolev_vladimir@yahoo.com

Пусть K — поле, A — свободная ассоциативная K-алгебра без единицы со свободными порождающими $x_1, x_2, \ldots$. Элемент $v = v(x_1, \ldots, x_n) \in A$ называется *тождеством* ассоциативной K-алгебры M, если $v(f_1, \ldots, f_n) = 0$ для любых $f_1, \ldots, f_n \in M$. В этом случае выражение $v = 0$ также называют тождеством алгебры M. Например, всякая коммутативная алгебра удовлетворяет тождеству $[x, y] = 0$, где $[x, y] = xy - yx$ — *коммутатор* или *лиевский коммутатор* элементов x и y, нильпотентная алгебра степени s удовлетворяет тождеству $x_1 x_2 \ldots x_s = 0$ и не удовлетворяет тождеству $x_1 x_2 \ldots x_{s-1} = 0$. Если $\{v_t \mid t \in \Omega\}$ — произвольное, но фиксированное множество тождеств, то класс всех ассоциативных K-алгебр, удовлетворяющих одновременно всем тождествам v_t $(t \in \Omega)$, называется *многообразием*.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ 16-01-00756

Идеал V свободной алгебры A называется *T-идеалом,* если V — вполне характеристический идеал в A, то есть $\alpha(V) \subset V$ для любого эндоморфизма α алгебры A. Хорошо известно, что между множеством всех многообразий ассоциативных K-алгебр и множеством всех T-идеалов алгебры A существует естественное взаимнооднозначное соответствие. Если $\mathbf{V}$ — многообразие ассоциативных K-алгебр, V — соответствующий этому многообразию T-идеал в A, то факторалгебра A/V с порождающими $x_1+V, x_2+V, \ldots$ называется *свободной алгеброй* многообразия $\mathbf{V}$ или *относительно свободной ассоциативной алгеброй.*

Квантовый аналог универсальной обёртывающей алгебры полупростой алгебры Ли был введён В.Г. Дринфельдом [1] и М. Джимбо [2]. Это определение тесно связано с определением квантовой плоскости и, как следствие, с понятием квантового коммутатора

$$[x, y]_q = xy - q\,yx,$$

где q — некоторый обратимый элемент основного поля K.

Положим

$$f_0(x_1) = x_1, \quad f_s(x_1, \ldots, x_s, x_{s+1}) = [f_{s-1}(x_1, \ldots, x_s), x_{s+1}]_q.$$

Будем говорить, что ассоцитивная алгебра является q-нильпотентной степени не выше s, если она удовлетворяет тождеству

$$f_s(x_1, \ldots, x_s, x_{s+1}) = 0. \tag{7}$$

Случаи алгебр, удовлетворяющих тождеству (1) для $s = 1, 2$ были рассмотрены в [3].

Обозначим символом $A_{s,q}(K)$ свободную алгебру счётного ранга многообразия ассоциативных K-алгебр, задаваемого тождеством (1), то есть многообразия ассоциативных K-алгебр, q-нильпотентных степени не выше s. Обозначим символом g мультипликативный порядок элемента q (который может быть и бесконечным). Для всяких $s \in \mathbb{Z}, s \geqslant 0$ и $g \in \mathbb{N}, g > 1$ обозначим

$$N(s, g) = s + \left[\frac{s}{g-1}\right] + 1. \tag{8}$$

Формулу (2) будем также считать имеющей смысл и для $g = \infty$, полагая $\left[\frac{s}{\infty-1}\right] = 0$.

Для случая $q \neq \pm 1$ доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть $s \in \mathbb{N}$, $g \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}, g > 2$. Тогда*
если $g > s+1$, то алгебра $A_{s,q}(K)$ является нильпотентной степени $s+1$,
если $\frac{s}{2} + 1 < g \leqslant s+1$, то алгебра $A_{s,q}(K)$ является нильпотентной степени $s+2$,
если $2 < g \leqslant \frac{s}{2} + 1$, то алгебра $A_{s,q}(K)$ является нильпотентной степени x, где
$s+2 \leqslant x \leqslant N(s, g)$.

Для случая $q = -1$ доказана следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть $q = -1$, характеристика K не равна 2, $s \in \mathbb{N}$. Тогда алгебра $A_{s,q}(K)$ является нильпотентной степени $2s+1$.*

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Дринфельд В.Г. Алгебры Хопфа и квантовое уравнение Янга-Бакстера // Докл. Акад. наук СССР **283** (1985) С. 1060-1064

2. Jimbo M. A q-difference analogue of $U(\mathfrak{g})$ and the Yang-Baxter equation // Lett. Math. Phys. **10** (1985) P. 63-69.

3. Киреева Е.А. О квантовой лиевской нильпотентности ступени 2. // Математика и математическое моделирование, # 03, июнь 2016.

УДК 512.5

Максимальные абелевы идеалы нильтреугольной подалгебры алгебры Шевалле исключительного типа над полем

Е. А. Кириллова Россия, г. Красноярск, Сибирский федеральный университет
kea92@bk.ru

Maximal abelian ideals of the niltrianglular subalgebra of the Chevalley algebra of an especial type over a field

E. A. Kirillova Russia, Krasnoyarsk, Siberian Federal University
kea92@bk.ru

А. И. Мальцев в 1945 г. исследовал [1] проблему нахождения максимальных абелевых подалгебр в алгебрах Шевалле над полем комплексных чисел. Он показал, что эта задача сводится к нахождению коммутативных подалгебр нильтреугольной подалгебры $N\Phi(C)$ алгебры Шевалле.

В работе [2] В. М. Левчуком и Г. С. Сулеймановой сформулированы:

Обобщённая редукционная задача: *описать коммутативные подалгебры наивысшей размерности в подалгебре $N\Phi(K)$ алгебры Шевалле $L_\Phi(K)$.*

Гипотеза: *всякий абелев идеал наивысшей размерности алгебры $N\Phi(K)$ является абелевой алгеброй наивысшей размерности.*

Исследование посвящено получению описания максимальных абелевых идеалов алгебры $N\Phi(K)$ типа G_2 и F_4, а также изучению для этих случаев приведённой выше гипотезы.

Пусть Φ — система корней евклидова пространства. Ассоциированная с ней алгебра $N\Phi(K)$ над полем K характеризуется базисом $\{e_r(r \in \Phi^+)\}$.

Высота $\mathrm{ht}(r)$ корня r определяется как сумма коэффициентов из разложения корня по базису. Для алгебры $N\Phi(K)$ может быть определена подалгебра $L_i = \langle Ke_r | r \in \Phi^+,\ \mathrm{ht}(r) \geqslant i\rangle$.

Пусть $\{r\}^+$ — множество корней $s \in \Phi^+$ таких, что в разложении по базе корня $s - r$ все коэффициенты неотрицательны. Через $T(r)$ обозначаем подалгебру в $N\Phi(K)$ с базисом $\{e_s \mid s \in \{r\}^+\}$.

Теорема 1. Максимальный коммутативный идеал алгебры $NG_2(K)$ над полем K совпадает с

- L_3, если char K $\neq 2, 3$;
- L_3,
  $K(e_{b+a} + de_{b+2a}) + L_4,\ (d \in K)$,
  $K(e_b + de_{b+3a}) + Ke_{b+a} + L_5,\ (d \in K)$ или
  $Ke_a + Ke_{b+a} + L_4$, если char K=2;
- L_2 или
  $K(e_b + de_{b+3a}) + Ke_{b+a} + Ke_{b+2a} + L_5,\ (d \in K)$, если char K=3.

Следствие 1. Коммутативными идеалами наивысшей размерности алгебры $NG_2(K)$ над полем K являются:

- L_3 размерности 3, если char K $\neq 2, 3$;
- $Ke_a + Ke_{b+a} + L_4$ размерности 4, если char K=2;
- L_2 или $K(e_b + de_{b+3a}) + Ke_{b+a} + Ke_{b+2a} + L_5$, $(d \in K)$ размерности 4, если char K=3.

Теорема 2. Максимальный коммутативный идеал алгебры $NF_4(K)$ над полем K характеристики не 2 совпадает с

- $T(1220)$,
- $T(1221) + T(0122)$ или
- $T(1221) + K(e_{1220} + de_{1122})$, $(d \in K)$.

Следствие 2. Коммутативные идеалы наивысшей размерности алгебры $NF_4(K)$ над полем K характеристики не 2 исчерпываются идеалом $T(1221) + T(0122)$ размерности 9.

Пусть для положительной системы корней Φ^+ введено регулярное упорядочение. Любой элемент $a \in N\Phi(K)$ можно записать в виде суммы $a = a_1e_{r_1} + a_2e_{r_2} + \ldots + a_ne_{r_n}$ $(a_i \neq 0)$, где $r_1, r_2, \ldots, r_n$ — корни из Φ^+, упорядоченные по возрастанию. В таком случае корень r_1 называют *первым углом* элемента a. При рассмотрении произвольной подалгебры $M \subseteq N\Phi(K)$ *множество первых углов всех её элементов* обозначают как $\mathcal{L}_1(M)$.

Подмножество Ψ системы корней Φ называют *коммутативным*, если для любых двух корней $r, s \in \Psi$ известно, что $r + s \notin \Phi$. Подмножество Ψ системы корней Φ называют *n-коммутативным*, если для любых двух корней $r, s \in \Psi$ известно, что в алгебре $N\Phi(K)$ над полем K характеристики n произведение $e_r * e_s = 0$. Очевидно, что в случае $p(\Phi)!K = K$ понятия коммутативности и n-коммутативности совпадут.

В рамках исследования гипотезы из [2] была доказана

Лемма. Наивысшая размерность коммутативных подалгебр алгебры $N\Phi(K)$ над полем K характеристики n равна наивысшему порядку n-коммутативного подмножества системы корней Φ.

Использование этой леммы и описания коммутативных [1] и n-коммутативных [3] подмножеств корней позволяет сделать вывод об истинности гипотезы для алгебры $NG_2(K)$ над произвольным полем K и алгебры $NF_4(K)$ над полем K характеристики не 2.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Мальцев А. И. Коммутативные подалгебры полупростых алгебр Ли // Изв. АН СССР. Сер. матем., 9:4 (1945), с. 291–300.
2. Levchuk V. M., Suleimanova G. S. The generalized Mal'cev problem on abelian subalgebras of the Chevalley algebras // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2015. Vol. 86. № 4. P. 384–388.
3. Вдовин Е. П. Большие абелевы унипотентные подгруппы конечных групп Шевалле // Алгебра и логика, т. 40 (2001), № 5, с. 523—544.

УДК 512

Унитарный аналог линеаризационного трюка Хигмана и его применения[1]

В. И. Копейко Россия, г. Элиста, Калмыцкий государственный университет имени Б. Б. Городовикова
kopeiko52@mail.ru

Unitary analog Higman's linearization trick and it applications

V. I. Kopeiko Russia, Elista, The B. B. Gorodovikov Kalmyk State University
kopeiko52@mail.ru

Напомним основные определения и обозначения унитарной $K-$теории [1]. Пусть (R, λ, Λ) - унитарное кольцо, где R - ассоциативное кольцо с 1, на котором задана инволюция $x \to \bar{x}$, λ - центральный элемент кольца R, удовлетворяющий условию $\lambda \cdot \bar{\lambda} = 1$, Λ - аддитивная подгруппа R такая, что $\Lambda_{min} = \{x - \lambda\bar{x}, x \in R\} \leq \Lambda \leq \Lambda_{max} = \{x \in R : x = -\lambda\bar{x}\}$, причем $\bar{x}\Lambda x \subseteq \Lambda$ для любого $x \in R$. В литературе унитарное кольцо (R, λ, Λ) называют также форменным кольцом с системой параметров Λ и симметрией λ. Отметим, что множество $\bar{\Lambda} = \{\bar{x}, x \in \Lambda\}$ также является системой параметров в R. Продолжим инволюцию на кольцо матриц $M_r(R)$, положив $(a_{ij})^* = (\overline{a_{ji}})$.

Определение 1. *Матрица $a = (a_{ij})(\in M_r(R))$ называется $\Lambda-$эрмитовой, если $a = -\lambda a^*$ и все диагональные элементы матрицы a содержатся в Λ.*

Для натурального r положим $I_r^\lambda = \begin{pmatrix} 0 & e_r \\ \lambda e_r & 0 \end{pmatrix}$, где e_r - единичная матрица порядка r.

Определение 2. *Матрица $\alpha = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_{2r}(R)$, где $a, b, c, d \in M_r(R)$ называется $\Lambda-$унитарной, если $\alpha^* I^\lambda \alpha = I^\lambda$ и все диагональные элементы матриц ab^*, cd^* содержатся в Λ.*

Из равенства $\alpha^* I^\lambda \alpha = I^\lambda$ следует, что произвольная $\Lambda-$унитарная матрица - обратима. Множество $U_{2r}^\lambda(R, \Lambda)$ всех $\Lambda-$унитарных матриц порядка $2r$ образует группу, которая называется (гиперболической) $\Lambda-$унитарной группой. Подгруппа $EU_{2r}^\lambda(R, \Lambda)$ группы $U_{2r}^\lambda(R, \Lambda)$, порожденная матрицами вида $H(a) = diag(a, (a^*)^{-1})$, $T_{12}(b) = \begin{pmatrix} e_r & b \\ 0 & e_r \end{pmatrix}$, $T_{21}(c) = \begin{pmatrix} e_r & 0 \\ c & e_r \end{pmatrix}$, где $a \in E_r(R)$, b - $\bar{\Lambda}-$эрмитова, c - $\Lambda-$эрмитова называется элементарной (гиперболической) $\Lambda-$унитарной группой.

Определим вложение

$$U_{2r}^\lambda(R, \Lambda) \to U_{2r+2s}^\lambda(R, \Lambda) : \alpha = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \to \alpha \perp e_{2s} = \begin{pmatrix} a & 0 & b & 0 \\ 0 & e_s & 0 & 0 \\ c & 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_s \end{pmatrix}$$

и пусть $U^\lambda(R, \Lambda) = \cup U_{2r}^\lambda(R, \Lambda)$, $EU^\lambda(R, \Lambda) = \cup EU_{2r}^\lambda(R, \Lambda)$ — стабильные группы. В силу унитарного аналога леммы Уайтхеда [1], группа $EU^\lambda(R, \Lambda)$ совпадает с коммутантом группы $U^\lambda(R, \Lambda)$ и, в частности, корректно определена (абелева) группа

$$K_1 U^\lambda(R, \Lambda) = U^\lambda(R, \Lambda)/EU^\lambda(R, \Lambda).$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект №16-01-00148)

Унитарный аналог линеаризационного трюка Хигмана (ср. предложение 5.1, глава 12 в [2]) над кольцом многочленов имеет следующий вид:

Теорема 1. *Пусть* $\alpha = \alpha(X) \in U_{2r}^{\lambda}(R[X], \Lambda[X])$. *Тогда найдутся целое* $s \geq 0$, *матрицы* $\gamma_1, \gamma_2 \in EU_{2(r+s)}^{\lambda}(R[X], \Lambda[X])$ *такие, что*

$$\gamma_1(X)(\alpha(0)^{-1} \perp e_{2s})(\alpha(X) \perp e_{2s})\gamma_2(X) = \begin{pmatrix} e_{r+s} - aX & bX \\ -cX^n & e_{r+s} + a^*X + \cdots + (a^*)^n X^n \end{pmatrix}$$

при некоторых натуральном n, $a, b, c (\in M_{r+s}(R))$, *удовлетворяющих следующим условиям:*

1) матрицы b *и* ab *являются* $\bar{\Lambda}-$*эрмитовыми, причем* $ab = ba^*$;

2) матрицы c *и* ca *являются* $\Lambda-$*эрмитовыми, причем* $ca = a^*c$;

3) $bc = a^{n+1}$, $cb = (a^*)^{n+1}$.

Данный результат является усилением предложения 2 из [3], при этом, в отличие от линейного случая алгебраической $K-$теории [2], линеаризуется только верхняя половина $\Lambda[X]-$унитарной матрицы, представляющей элемент группы $K_1U^{\lambda}(R[X], \Lambda[X])$, что вполне согласуется со следующим замечанием.

Замечание 1. *Если* $\alpha_1 = \begin{pmatrix} a & b \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} a & b \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} \in U_{2r}^{\lambda}(R, \Lambda)$, *то* $\alpha_1\alpha_2^{-1} = T_{21}(c_1d_2^* + \lambda d_1c_2^*) \in EU_{2r}^{\lambda}(R, \Lambda)$ *и, следовательно, классы матриц* α_1, α_2 *в группе* $K_1U^{\lambda}(R, \Lambda)$ *- совпадают. Таким образом, любой элемент группы* $K_1U^{\lambda}(R, \Lambda)$ *однозначно определяется верхней половиной* $\Lambda-$*унитарной матрицы, представляющей данный элемент. В действительности любой из половинок такой матрицы - верхней, нижней, правой или левой.*

Унитарный аналог линеаризационного трюка Хигмана (ср. предложение 5.6, глава 12 в [2]) над кольцом лорановских многочленов имеет следующий вид:

Теорема 2. *Пусть* $\alpha \in U_{2r}^{\lambda}(R[X, X^{-1}], \Lambda[X, X^{-1}])$ *и пусть* $\alpha_0 (\in U_{2r}^{\lambda}(R, \Lambda))$ *- образ* α *при пополнении* $R[X, X^{-1}] \to R : X - 1 \to 0$. *Тогда найдутся целое* $s \geq 0$, *натуральное* n, *матрицы* $\gamma_1, \gamma_2 \in EU_{2(r+s)}^{\lambda}(R[X, X^{-1}], \Lambda[X, X^{-1}], X-1)$ *такие, что верхняя половина матрицы* $\gamma_1 \cdot diag(X^n e_r, X^{-n} e_r) \perp e_{2s} \cdot (\alpha_0 \perp e_{2s})^{-1} \cdot \alpha \perp e_{2s} \cdot \gamma_2$ *имеет вид* $(e_{r+s} - a \cdot (X-1)\ b \cdot (X-1))$ *при некоторых* $a, b (\in M_{r+s}(R))$ *таких, что* b *и* ab *являются* $\bar{\Lambda}-$*эрмитовыми матрицами, причем* $ab = ba^*$.

Отметим, что при любом целом n матрица $diag(X^n e_r, X^{-n} e_r) \in U_{2r}^{\lambda}(R[X, X^{-1}], \Lambda[X, X^{-1}], X - 1)$. Описанные унитарные аналоги линеаризационного трюка Хигмана применяются при решении задачи гомотопизации унитарного K_1-функтора [3], при изучении структуры унитарной нильпотентной по Бассу K_1-группа унитарного кольца [4] и при изучении структуры унитарной K_1-группы кольца лорановских многочленов над унитарными кольцами.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Bass H. Unitary algebraic $K-$theory // Lecture Notes Math. 1973. V. 343. P. 57-265.

2. Басс Х. Алгебраическая $K-$теория. — Москва: Изд-во Мир, 1973. 592 с.

3. Копейко В. И. Гомотопизация унитарного K_1-функтора // Алгебра и анализ. 2008. Том 20 № 5. С. 99-108.

4. Копейко В. И. Нильпотентная по Бассу унитарная K_1-группа унитарного кольца // Записки научных семинаров ПОМИ. 2017.Том 460. С. 134-157.

——————————————————————————————

УДК 512.552+512.545

О некоторых классических радикалах $\mathcal{K}$-упорядоченных ассоциативных алгебр

Ю. В. Кочетова Россия, г. Москва, Московский педагогический государственный университет
jkochetova@mail.ru

On some classical radicals of $\mathcal{K}$-ordered associative algebras

J. V. Kochetova Russia, Moscow, Moscow Pedagogical State University
jkochetova@mail.ru

Рассмотрим для ассоциативных алгебр первичный радикал, радикал Бэра и квазирегулярный радикал (радикал Джекобсона) (см. [1], глава 1), а для $\mathcal{K}$-упорядоченных алгебр над частично упорядоченными полями — l-первичный радикал и нижний слабо разрешимый l-радикал (см. [5]).

Напомним, что *решёточно $\mathcal{K}$-упорядоченной алгеброй* (или *l-алгеброй*) называется алгебра A над частично упорядоченным полем P с определённым на ней $\mathcal{K}$-порядком $\leqslant$, относительно которого A является векторной решёткой над P (см. [2], глава 15) и из $x \geqslant 0$ следует, что $x + xy \geqslant 0$ и $x + yx \geqslant 0$ для всех $y \in A$ (см. [3], [4]).

Известно (см. [1], § 1.1), что первичный радикал $\mathrm{rad}(A)$ произвольной ассоциативной алгебры A совпадает с её радикалом Бэра $\mathfrak{B}(A)$ и состоит из тех и только тех элементов $a \in A$, что любая m-система σ, содержащая a, содержит и нулевой элемент. Напомним, что непустое подмножество σ ассоциативной алгебры A называется *m-системой*, если для любых $x, y \in \sigma$ найдётся элемент $z \in A$, зависящий от x и y, такой, что $xzy \in \sigma$ (см. [1], § 1.1, определение 5).

В [5] автором был введён аналог понятия m-системы для случая $\mathcal{K}$-упорядоченных алгебр — понятие насыщенной системы (см. [5], определение 3.2.2): непустое подмножество σ l-алгебры A над частично упорядоченным полем называется *насыщенной системой*, если для любых $x, y \in \sigma$ существует элемент $z \in I_x I_y$ такой, что $z \in \sigma$ (здесь I_x, I_y — наименьшие l-идеалы в A, содержащие x и y соответственно).

Понятие насыщенной системы тесно связано с понятием l-первичного радикала алгебры, что помогает при исследовании его свойств. Так, благодаря использованию понятия насыщенной системы автором получено описание поэлементного строения l-первичного радикала произвольной решёточно $\mathcal{K}$-упорядоченной алгебры A, аналогичное указанному выше описанию первичного радикала ассоциативных алгебр через m-системы. А именно, l-$\mathrm{rad}_{\mathcal{K}}(A)$ совпадает со множеством таких элементов $a \in A$, для каждого из которых любая насыщенная система σ, содержащая a, содержит и нулевой элемент.

Сравнивая для решёточно $\mathcal{K}$-упорядоченной ассоциативной алгебры A над частично упорядоченным полем описания первичного и l-первичного радикалов с использованием m-систем и насыщенных систем, получаем следующую цепочку включений для l-первичного, первичного и квазирегулярного радикалов A:

$$l - \mathrm{rad}_{\mathcal{K}}(A) \subseteq \mathrm{rad}(A) \subseteq \mathfrak{J}(A). \tag{1}$$

А если ассоциативная алгебра A над линейно упорядоченным полем является к тому же конечномерной, а порядок на ней — линейным, то цепочка неравенств (1) преобразуется в цепочку равенств

$$l - \mathrm{rad}_{\mathcal{K}}(A) = \mathrm{rad}(A) = \mathfrak{J}(A) = A. \tag{2}$$

Цепочка равенств (2) всегда выполняется в любой конечномерной нильпотентной ассоциативной алгебре над линейно упорядоченным полем, поскольку согласно следствию 1 из [6] такую алгебру можно линейно $\mathcal{K}$-упорядочить.

В [5] для решёточно $\mathcal{K}$-упорядоченной алгебры A над направленным полем автором построен аналог радикала Бэра ассоциативной алгебры — нижний слабо разрешимый l-радикал $\mathfrak{B}_l(A)$, — и доказано, что $\mathfrak{B}_l(A) = l\text{-}\mathrm{rad}_{\mathcal{K}}(A)$.

Напомним, что ассоциативная алгебра A называется $\mathfrak{B}$-полупростой, $\mathfrak{J}$-полупростой или $\mathfrak{B}_l$-полупростой, если соответствующий её радикал равен нулю (см. [1], [5]).

Пусть A — ассоциативная l-алгебра над направленным полем. Тогда, учитывая цепочку неравенств (1), получаем, что из $\mathfrak{B}$-полупростоты алгебры A всегда следует её $\mathfrak{B}_l$-полупростота, а из $\mathfrak{J}$-полупростоты A — и её $\mathfrak{B}$-полупростота и её $\mathfrak{B}_l$-полупростота.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Андрунакиевич В.А., Рябухин Ю.М. Радикалы алгебр и структурная теория. — М.: Наука, 1979. 496 с.
2. Биркгоф Г. Теория решеток. — М.: Наука, 1984. 568 с.
3. Копытов В.М. Упорядочение алгебр Ли // Алгебра и логика. 1972. Т. 11 № 3. С. 295–325.
4. Кочетова Ю.В. О l-первичном радикале решеточно упорядоченных алгебр // Фундаментальная и прикладная математика. 2011/2012. Т. 17 вып. 5. С. 55–68.
5. Кочетова Ю.В., Ширшова Е.Е. Первичный радикал решёточно $\mathcal{K}$-упорядоченных алгебр // Фундаментальная и прикладная математика. 2013. Т. 18 вып. 1. С. 85–158.
6. Кочетова Ю.В., Ширшова Е.Е. О линейно упорядоченных линейных алгебрах // Фундаментальная и прикладная математика. 2009. Т. 15 вып. 1. С. 53–63.

УДК 512.643

О длине пар обобщённо коммутирующих матриц[1]

О. В. Маркова Россия, г. Москва, Московский государственный университет
М. В. Ломономова
ov_markova@mail.ru

On the length of generalized-commuting pairs of matrices

O. V. Markova Russia, Moscow, M. V. Lomonosov Moscow State University
ov_markova@mail.ru

Определение 1. Длиной конечной системы порождающих $\mathcal{S}$ *конечномерной ассоциативной алгебры* $\mathcal{A}$ *над произвольным полем называется наименьшее натуральное число* $l(\mathcal{S})$, *такое что слова длины не большей* $l(\mathcal{S})$ *порождают данную алгебру как векторное пространство.* Длиной алгебры *называется максимум длин её систем порождающих, обозначим её* $l(\mathcal{A})$.

[1]Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ, грант 16-01-00113.

Для полной матричной алгебры $M_n(\mathbb{F})$ над полем $\mathbb{F}$ задача вычисления длины как функции порядка матриц n поставлена в 1984 г. и до сих пор не решена. Тем не менее для конкретных подмножеств и собственных подалгебр часто удаётся явно вычислить длину или получить хорошие оценки. Например, в работе А. Паза [1] было установлено, что длина любой коммутативной подалгебры алгебры $M_n(\mathbb{C})$ над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$ не больше $n-1$. В [2, 3] было показано, что эта оценка справедлива и в случае, когда поле произвольно, и удалось описать коммутативные подалгебры, длина которых максимальна.

В данном сообщении будут представлены результаты о длине пар матриц, удовлетворяющих соотношениям, обобщающим условие коммутирования. Будут рассмотрены пары квази-коммутирующих матриц (матрицы $A, B \in M_n(\mathbb{F})$ *квази-коммутируют*, если AB и BA линейно зависимы) и пары, удовлетворяющие соотношению $AB = DBA$ для заданной диагональной матрицы D с двумя собственными числами.

Пары квази-коммутирующих матриц можно разделить на следующие классы: (I) коммутативные пары, (II) пары с нильпотентным произведением и (III) общий случай — пары не лежащие в (I)$\cup$(II).

Теорема 1. *1. Для произвольной пары $\mathcal{S}$ из класса (I)$\cup$(II) и порождённой ей алгебры $\mathcal{A}$ справедливы оценки $1 \leqslant l(\mathcal{S}) \leqslant l(\mathcal{A}) \leqslant n-1$.*
2. Для произвольного $l = 1, \ldots, n-1$ в классе (I)$\cup$(II) существует пара $\mathcal{S}$, для которой $l = l(\mathcal{S}) = l(\mathcal{A})$.

Другими словами, реализуемыми значениями длины в этом случае будут все целые значения из отрезка между минимальным и максимальным значениями.

В общем случае квази-коммутирующая пара $\mathcal{S} = \{A, B\} \subset M_n(\mathbb{F})$ из класса (III) удовлетворяет соотношению $AB = \varepsilon BA$, где множитель ε обязательно является первообразным корнем из единицы порядка k при некотором $k \leq n$.

Теорема 2. *1. Для длины произвольной пары $\mathcal{S} = \{A, B\} \subset M_n(\mathbb{F})$ из класса (III), удовлетворяющей соотношению $AB = \varepsilon BA$ с множителем ε, являющимся первообразным корнем из единицы порядка k, справедливы оценки*

$$2k-2 \leqslant l(\mathcal{S}) \leqslant n-r+k-2,$$

где r — остаток от деления n на k;
2. Число $l \in \mathbb{N}$ является значением длины такой пары тогда и только тогда, когда $l \in [2k-2, n-1] \cup \{n-r+k-2\}$.

Как следствие, видно, что в отличие от класса (I)$\cup$(II), реализуемыми значениями длины в этом случае будут все целые значения из отрезка между минимальным значением и числом $n-1$, являющимся максимальным значением для класса (I)$\cup$(II), и одно особое максимальное значение.

В качестве обобщения квази-коммутирования будут рассмотрены пары, удовлетворяющие соотношению $AB = DBA$ для заданной диагональной матрицы D с двумя собственными числами d_1, d_2, в дополнительном ограничении, что матрицы A и B коммутируют с матрицей D. В этом случае в некотором базисе $D = d_1 E_{n_1} \oplus d_2 E_{n_2}$, где E_t — единичная матрица размера t. Тогда по теореме об общем виде матрицы, коммутирующей с данной жордановой матрицей, имеем $A = A_1 \oplus A_2$, $B = B_1 \oplus B_2$, где $\{A_i, B_i\} \subset M_{n_i}(\mathbb{F})$ — квази-коммутирующая пара с множителем квази-коммутирования d_i, $i = 1, 2$.

В случае, когда обе пары $\{A_i, B_i\}$, $i = 1, 2$ лежат в классе (I)$\cup$(II), доказано, что выполнен аналог теоремы 1.

В остальных случаях показано, что

$$l(\{A, B\}) = \max\{l(\{A_1, B_1\}), l(\{A_2, B_2\})\},$$

и результаты о реализуемости следуют из теорем 1–2.

Доклад частично основан на работах [4, 5] (совместно с А.Э. Гутерманом и Ф. Мерманом).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Paz A. An application of the Cayley–Hamilton theorem to matrix polynomials in several variables// Linear Multilinear Algebra. 1984. V. 15. P. 161-170.
2. Guterman A. E., Markova O. V. Commutative matrix subalgebras and length function// Linear Algebra Appl. 2009. V. 430. P. 1790-1805.
3. Маркова О. В. Характеризация коммутативных матричных подалгебр максимальной длины над произвольным полем// Вестн. Моск. унив. Сер.1. Математика. Механика. 2009. № 5. С. 53-55.
4. Гутерман А. Э., Маркова О. В. Проблема реализуемости значений длины для пары квазикоммутирующих матриц// Зап. научн. семи. ПОМИ. 2015. Т. 439. 59-73.
5. Guterman A. E., Markova O. V., Mehrmann V. Lengths of quasi-commutative pairs of matrices// Linear Algebra Appl. 2016. V. 498. P. 450-470.

УДК 512.5

О существовании почти нильпотентных многообразий коммутативных метабелевых алгебр с нецелыми экспонентами

Н. П. Панов Россия, г. Ульяновск, Ульяновский государственный университет
nppanov@yandex.ru

On existence of almost nilpotent varieties of commutative metabelian algebras with non-integer exponents

N. P. Panov Russia, Ulyanovsk, Ulyanovsk State University
nppanov@yandex.ru

Основным результатом работы [1] является доказательство существования почти нильпотентного многообразия алгебр над полем нулевой характеристики, верхняя и нижняя экспоненты которого не являются целыми числами. Данное многообразие порождается алгеброй с тождеством $x(yz) \equiv 0$, определение которой дано в той же работе.

По аналогии с конструкцией упомянутой алгебры определим алгебру A над полем K нулевой характеристики, удовлетворяющую тождествам коммутативности $xy - yx \equiv 0$ и метабелевости $(xy)(zt) \equiv 0$. Так как в алгебре A любой ненулевой моном равен моному с левонормированной расстановкой скобок, то договоримся для краткости опускать скобки и обозначать через R_a оператор правого умножения на образующую a, например $a^2(R_aR_b)^2 = a^2abab$. Оператор правого умножения на свободную образующую будем обозначать соответствующей прописной буквой, например $x_0X^2 = x_0xx$.

Пусть алгебра A задана образующими z, a, b и определяющими соотношениями:

1. $uv - vu = 0, \quad u, v \in A,$
2. $a^2 = b^2 = ab = za = zb = 0,$

3. $z^2 w(R_a, R_b) z = 0, \quad \deg w \geqslant 0,$

4. $(z^2 w(R_a, R_b))(z^2 w'(R_a, R_b)) = 0, \quad \deg w, \deg w' \geqslant 0,$

5. $z^2 (R_a^2 R_b)^k b = z^2 (R_a^2 R_b)^k abb = z^2 (R_a^2 R_b)^k aaa = 0, \quad k = 0, 1, 2, \ldots,$

6. $z^2 (R_a^2 R_b)^k aba = -z^2 (R_a^2 R_b)^k aab, \quad k = 0, 1, 2, \ldots,$

где w, w' — ассоциативные мономы от операторов R_a, R_b.

Подстановкой элементов алгебры A проверяются тождества:

$$x_0 y_0 X^4 \equiv 0 \tag{1}$$

$$\sum_{\sigma \in S_3} (-1)^\sigma x_0 y_0 X_{\sigma(1)} \ldots X_{\sigma(2)} \ldots X_{\sigma(3)} \equiv 0, \tag{2}$$

$$x_0 y_0 X^2 Y^2 Z^2 \equiv 0,$$

$$x_0 y_0 X^3 Z_1 \ldots Z_s Y^2 \equiv 0, \quad x_0 y_0 X^2 Z_1 \ldots Z_s Y^3 \equiv 0,$$

где остаток от деления s на 3 равен 2, S_3 — симметрическая группа.

Для каждого $n \geqslant 1$ определим KS_n-модуль $L_n = span\{x_0 y_0 x_{\sigma(1)} \ldots x_{\sigma(n)} \mid \sigma \in S_n\}$, который является вполне приводимым, и фактор-модуль $L_n(A) = L_n/(L_n \cap Id(A))$. В разложении соответствующего $L_n(A)$ характера $\chi_n^L(A)$ в сумму неприводимых характеров χ_λ ненулевые кратности $m_\lambda^L(A)$ отвечают разбиениям $\lambda \vdash n$, которые при $n \geqslant 3$ в силу тождества 2 состоят из двух частей, $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2)$. При этом в силу тождества 1 и по определению ненулевых мономов алгебры A выполняются неравенства

$$\frac{n-4}{4} < \lambda_2 < \frac{n+2}{3}, \; n = 4, 5, \ldots.$$

Для таких разбиений λ по лемме 3.3 работы [2] размерности $\deg \chi_\lambda$ неприводимых подмодулей в разложении $L_n(A)$, начиная с некоторого n, удовлетворяют неравенствам

$$\frac{1}{\sqrt{\pi n^3}} \Phi\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{n}\right)^n < \deg \chi_\lambda < \Phi\left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3n}\right)^n,$$

где $\Phi(\alpha) = \frac{1}{\alpha^\alpha (1-\alpha)^{1-\alpha}}$, $\alpha \in (0, \frac{1}{2}]$.

С помощью рассуждений из работы [1] можно доказать, что кратности $m_\lambda^L(A)$ сверху ограничены полиномом от n. При этом выполняются неравенства

$$c_{n+2}(A) \leqslant \frac{(n+2)(n+1)}{2} L_n(A), \; n = 1, 2, \ldots.$$

Следовательно, верхняя $\overline{\exp}(A)$ и нижняя $\underline{\exp}(A)$ экспоненты алгебры A удовлетворяют неравенствам

$$1.75 < \Phi(1/4) \leqslant \underline{\exp}(A) \leqslant \overline{\exp}(A) \leqslant \Phi(1/3) < 1.89.$$

Так как по теореме 1 работы [3] в многообразии $var(A)$ найдется почти нильпотентное подмногообразие, то

Теорема 1. *Существует почти нильпотентное многообразие коммутативных метабелевых алгебр, верхняя и нижняя экспоненты которого не являются целыми числами.*

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Мищенко С. П. Почти нильпотентные многообразия дробной экспоненты существуют // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1, Математика. Механика. 2016. № 3. С. 42-46.

2. Giambruno A., Mishchenko S., Zaicev M. Codimensions of algebras and growth functions // Advances in Mathematics. 2008. Vol. 217, no. 3. P. 1027-1052.

3. Mishchenko S., Valenti A. An almost nilpotent variety of exponent 2 // Israel Journal of Mathematics. 2014. Vol. 199, no. 1. P. 241-257.

———————————————————————————————————

УДК 511.32

Многообразия йордановых алгебр, имеющие почти полиномиальный рост

А. В. Попов Россия, г. Ульяновск, Ульяновский государственный университет
klever176@rambler.ru

Jordan algebras varieties with almost polinomial growth

A. V. Popov Russia, Ulyanovsk, Ulyanovsk State University
klever176@rambler.ru

В докладе будет рассказано о новом примере многообразия йордановых алгебр, имеющего почти полиномиальный рост, а также сформулированы некоторые вопросы о свойствах таких многообразий.

1. Некоторые определения. Пусть $\mathbb{F}$ – поле нулевой характеристики, а $\mathcal{V}$ – некоторое многообразие линейных алгебр над $\mathbb{F}$. Как известно, изучение структуры многообразия $\mathcal{V}$ равносильно изучению последовательности пространств

$$\left\{P_n(\mathcal{V}) = {}^{P_n}\!\big/_{P_n \cap T(\mathcal{V})}\right\}_{n\geqslant 1}, \tag{1}$$

где P_n – подпространство свободной линейной алгебры счетного ранга $\mathbb{F}\{X\}$, образованное полилинейными мономами от образующих $x_1, \ldots, x_n \in X$, а $T(\mathcal{V})$ – идеал тождеств многообразия $\mathcal{V}$ в $\mathbb{F}\{X\}$.

Пространства $P_n(\mathcal{V})$ обладают структурой $\mathbb{F}S_n$-модулей (см. [1]), а их характеры $\chi_n(\mathcal{V})$ образуют последовательность *кохарактеров многообразия* $\mathcal{V}$. Основной интерес представляют разложения кохарактеров в суммы неприводимых характеров:

$$\chi_n(\mathcal{V}) = \sum_{\lambda \vdash n} m_\lambda(\mathcal{V})\, \chi_\lambda,$$

где $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_k)$ – разбиения числа n, а χ_λ и $m_\lambda(\mathcal{V})$ – соответствующие неприводимые характеры и их кратности.

Последовательность $c_n(\mathcal{V}) = \dim P_n(\mathcal{V}) = \sum\limits_{\lambda \vdash n} m_\lambda(\mathcal{V})$ называют последовательностью *коразмерностей многообразия* $\mathcal{V}$.

В зависимости от асимптотического поведения последовательности $c_n(\mathcal{V})$ говорят о многообразиях полиномиального, экспоненциального и сверхэкспоненциального роста.Особый интерес представляют многообразия со следующим экстремальным свойством: всякое их собственное подмногообразие имеет полиномиальный рост, а рост самого многообразия больше полиномиального. Такие многообразия называются многообразиями *почти полиномиального роста.*

В классе йордановых алгебр известно два многообразия почти полиномиального роста, помимо многообразия, о котором будет идти речь дальше. Это:

1. многообразие $\mathcal{V}_1$, определенное тождеством $(x_1x_2)(y_1y_2) \equiv 0$ (см. [2, 3]);

2. многообразие $\mathcal{V}_2 = \mathrm{var}\left(UT_2^{(+)}\right)$ (см. [4]).

2. Многообразие $\mathcal{V}_3$. Определим йорданову алгебру A следующим образом:

Пусть V – векторное пространство с базисом $\{e_1, e_2, \ldots\}$, $\Lambda(V)$ – его внешняя алгебра и $\Lambda^0(V)$ – подалгебра алгебры $\Lambda(V)$, порожденная множеством V. Рассмотрим пространство $A = \Lambda^0(V) \oplus V$ и определим умножение на A правилом $(u + x)(v + y) = u \wedge y + v \wedge x$, где $u, v \in \Lambda^0(V)$, $x, y \in V$ (см. [5, пример 2, стр. 104]).

Данная алгебра, является классическим примером йордановой разрешимой алгебры. Присоединяя единицу к алгебре A, получим уже не разрешимую йорданову алгебру $A^{\#}$. Как следует из следующих теорем, многообразие, порожденное алгеброй $A^{\#}$, обладает свойством почти полиномиального роста.

Теорема 1. *Пусть $\mathcal{V}_3 = \mathrm{var}\left(A^{\#}\right)$. Тогда:*

1. *базис тождеств многообразия $\mathcal{V}_3$ образуют тождества*

$$(x_1x_2, y, z) \equiv (x_1, y, z) + (x_2, y, z)$$
$$((x, t, t), y, z) \equiv -3((x, y, t), t, z),$$

где $(x, y, z) = (xy)z - x(yz)$;

2. *последовательность кохарактеров $\chi_n(\mathcal{V}_3) = \sum_{k=2}^{n} \chi_{\left(k,1^{n-k}\right)} + \sum_{k=2}^{n-2} \chi_{\left(k,2,1^{n-k-2}\right)}$;*

3. *последовательность коразмерностей $c_n(\mathcal{V}_3) = (n-2)2^{n-2} + 1$.*

Теорема 2. *Пусть $\mathcal{V}$ – собственное подмногообразие многообразия $\mathcal{V}_3$. Тогда $\mathcal{V}$ имеет полиномиально ограниченный рост.*

3. Свойства многообразий йордановых алгебр почти полиномиального роста. Известно, что многообразия $\mathcal{V}_1$ и $\mathcal{V}_2$ являются специальными ([6, 7]), т.е. все алгебры, входящие в них, являются специальными йордановыми алгебрами. Естественным является следующий вопрос:

Задача 1. *Верно ли, что многообразие $\mathcal{V}_3$ является специальным многообразием?*

Можно поставить и более общий, и по всей видимости, значительно более сложный вопрос:

Задача 2. *Верно ли, что любое многообразие йордановых алгебр, имеющее почти полиномиальный рост, является специальным многообразием?*

Пусть $\mathcal{V}$ – произвольное многообразие йордановых алгебр. Будем говорить, что многообразие $\mathcal{V}$ удовлетворяет свойству левонормированности скобок, если любой элемент относительно свободной алгебры $\mathbb{F}\{X, \mathcal{V}\}$ может быть представлен как линейная комбинация мономов с левонормированной расстановкой скобок.

Утверждение 1. *Многообразия $\mathcal{V}_1$, $\mathcal{V}_2$ и $\mathcal{V}_3$ удовлетворяют свойству левонормированности скобок.*

Аналогично, возникает следующий вопрос:

Задача 3. *Верно ли, что любое многообразие йордановых алгебр, имеющее почти полиномиальный рост, удовлетворяет свойству левонормированности скобок?*

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Giambruno A., Zaicev M. Polynomial Identities and Asymptotic Methods. Mathematical Surveys and Monographs, AMS, Providence, RI, 2005. V. 122. 352 p.

2. Drensky V., Rachkova T. Varieties of metabelian Jordan algebras // Serdica. 1989. Vol. 15 № 4, P. 293–301. (1989)

3. Мищенко С. П., Попов А. В. Многообразие йордановых алгебр, определяемое тождеством $(xy)(zt) \equiv 0$, имеет почти полиномиальный рост // Математические заметки. 2010. Т. 87 № 6. С. 877–884.

4. Попов А. В. Многообразие йордановых алгебр $\operatorname{var}\left(UT_2\left(F\right)^{(+)}\right)$ имеет почти полиномиальный рост // Вестник Московского университета. Серия 1. Математика. Механика. 2012. № 5. С. 49–52.

5. Жевлаков К. А., Слинько А. М., Шестаков И. П., Ширшов А. И. Кольца, близкие к ассоциативным. — М.: Наука, 1978. 432 с.

6. Сверчков С. Р. О разрешимых индекса 2 йордановых алгебрах // Математический сборник. 1983. Т. 121(163) № 1(5). С. 40–47.

7. Слинько А. М. О специальных многообразиях йордановых алгебр // Математические заметки. 1979. Т. 26 № 3. С. 337–344.

———

4. Прикладная и компьютерная алгебра, криптография и дискретная математика

УДК 531.01

Теория АнтиКАМ

Д. Л. Абраров Россия, г. Москва, Вычислительный центр им. А. А. Дородницына ФИЦ ИУ РАН
abrarov@yandex.ru

AntiKAM Theory

D. L. Abrarov Russia, Moscow, Dorodnicyn Computing Centre, FRC CSC RAS
abrarov@yandex.ru

Хорошо известная и ставшая неотъемлемой частью теории возмущений так называемая КАМ-теория (Колмогорова-Арнольда-Мозера) оказывается неприменимой к модельным задачам классической механики — таким как, например, задача о тяжелом волчке и ньютонова задача трех тел.

Это является следствием того, что основа КАМ-теории — теорема Лиувилля-Арнольда — оказывается неприменимой к модельным задачам классической механики в силу наличия специальных граничных условий «классических решений интегрируемой задачи» на бесконечности формального вещественного времени $t = \infty$, пропускаемых в классическом рассмотрении.

Вместе с тем, после учета этих «скрытых граничных условий» КАМ-теория оказывается удивительно конструктивной. Например, диофантов аспект КАМ-теории, ассоциированный с так называемыми малыми знаменателями, после эквивариантного аналитического продолжения фазового потока соответствующих гамильтоновых дифференциальных уравнений в $t = \infty$, становится существенно «функционально-арифметическим»: он в точности соответствует свойству модулярности эллиптических кривых с рациональными коэффициентами.

Также удивительно и то, что образ каждого эквивариантного «КАМ-объекта» становится его смысловым антиподом. Это и объясняет аббревиатуру «АнтиКАМ».

В рамках такой модельной задачи как задача о вращении тяжелого твердого тела наиболее ярко виден физический смысл пропускаемого классикой граничного условия — это канонический 3d-аналог вертикального равновесия классического математического маятника (подробности — см. [1], [2]). Поэтому фазовый поток этой классической системы, описываемой обыкновенными дифференциальными уравнениями Эйлера-Пуассона, демонстрирует эффекты, конкретно аргументирующие аббревиатуру «АнтиКАМ». В этом контексте результаты из [1], [2], [3] в проекции на КАМ-теорию можно сформулировать качественно следующим образом.

Теорема 1. *(Механический смысл АнтиКАМ-теории в контексте волчков).* **КАМ-теория** *описывает колебания угловой скорости около «нижних равновесий» интегрируемых тяжелых волчков — канонически определяемых 3d-аналогов нижнего равновесия классического математического маятника.*

АнтиКАМ-теория *описывает колебания угловой скорости около «универсального канонического верхнего равновесия множества аналитических тяжелых волчков», канонически представляемого фазовым потоком потока волчка Ковалевской.*

Теорема 2. *(«Аналитическая теорема Лиувилля-Арнольда» для общих уравнений Эйлера-Пуассона). Каждому объекту из классической теоремы Лиувилля-Арнольда соответствует его конструктивный «антипод», получаемый эквивариантным аналитическим продолжением «классического объекта» в* $t = \infty$*:*

1. *Конечномерное гладкое симплектическое многообразие, представляющее фазовое пространство –*
   (a) $\mathbf{R}$*-аналитическая стандартная сфера* $\mathbf{S^4}$*;*
   (b) *универсальная полустабильная эллиптическая кривая* $\mathbf{E}/\mathbf{Q}$ *([1]);*
   (c) *пространство модулей полустабильных кривых* $\mathbf{E}/\mathbf{Q}$.
2. *Фазовый поток на слоении Лиувилля –*
   (a) *бесконечномерное функциональное многообразие —* $\mathbf{R}$*-аналитический геодезический поток на стандартной сфере* $\mathbf{S^4}$*;*
   (b) *модулярная параметризация универсальной эллиптической кривой* $\mathbf{E}/\mathbf{Q}$.
3. *Гладкий лиувиллев тор как совместный уровень полного набора интегралов –*
   (a) *трехмерная* $\mathbf{R}$*-аналитическая сфера* $\mathbf{S^3}$*;*
   (b) *универсальная модулярная кривая* $\mathbf{X}(\mathbf{E}/\mathbf{Q})$.
4. *Прямолинейная обмотка тора*
   (a) $\mathbf{R}$*-аналитическая трехмерная бутылка Клейна;*
   (b) *модулярная параметризация кривой* $\mathbf{X}(\mathbf{E}/\mathbf{Q})$.
5. *Лиувиллев блок –*
   (a) *двойственная* $\mathbf{R}$*-аналитическая трехмерная бутылка Клейна;*
   (b) *модулярная параметризация кривой* $\mathbf{E}/\mathbf{Q}$.
6. *Решения в эллиптических функциях (тета-функциях Якоби), специализированные «по родам» и соответствующим им интегрируемым случаям –*

   общее решение уравнений Эйлера-Пуассона в специальных глобальных дзета-функциях $e^{\zeta(\mathbf{s},\mathbf{E}/\mathbf{Q})}$ *([1],[2]), имеющее структуру конечно-порожденного функционального CW-комплекса.*
7. *Полный набор формальных интегралов –*

   $\mathbf{R}$*-аналитическая алгебра Ли* $\mathbf{G_2}^{\mathbf{an}}$ *с* $\mathbf{R}$*-аналитической скобкой — аналитическим тождеством Якоби*
   $$\{\mathbf{H},\{\mathbf{F},\mathbf{G}\}\}+\{\mathbf{F},\{\mathbf{G},\mathbf{H}\}\}+\{\mathbf{G},\{\mathbf{H},\mathbf{F}\}\}=\frac{i}{2}$$
8. *Переменные «угол» –*

   группы Шафаревича классов изогенности кривых $\mathbf{E}/\mathbf{Q}$.
9. *Переменные «действие» –*

   двойственные группы Шафаревича классов изогенности кривых $\mathbf{E}/\mathbf{Q}$.

Соответственно, антипод основной **КАМ-теоремы** для уравнений Эйлера-Пуассона выглядит следующим образом.

Теорема 3. *(АнтиКАМ-теорема для уравнений Эйлера-Пуассона).*

Качественные выводы **КАМ-теории***: при «небольшом» аналитическом возмущении любого отдельного интегрируемого по Лиувиллю-Арнольду случая для уравнений Эйлера-Пуассона*

(a) *«иррациональные торы Колмогорова-Арнольда» «слегка деформируются»;*

(b) *«рациональные торы Колмогорова-Арнольда» разрушаются так, что степень их разрушения «пропорциональна» «величине возмущения», а разрушающиеся образы рациональных торов все время «остаются зажатыми» между соответствующими» иррациональными торами.*

Качественные выводы **АнтиКАМ-теории***: любое аналитическое возмущение фазового потока уравнений Эйлера-Пуассона представляется отображением деформации полустабильных кривых* $\mathbf{E}/\mathbf{Q}$ *([2]) и конструктивно представляется элементом конечно-порожденной* $\mathbf{R}$*-аналитической алгебры Ли* $\mathbf{G_2}^{\mathbf{an}}$ *ранга 19 ([3]).*

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Абраров Д.Л. Дзета-функции и L-функции в гамильтоновой динамике. М.: ВЦ РАН, 2010, 225 с.

2. Абраров Д.Л. Дзета-модель классической механики. Теоретические и прикладные аспекты. LAP Lambert Academic Publishing, 2016, 276 с.

3. Абраров Д.Л. Глобальная разрешимость по Лиувиллю уравнений Эйлера-Пуассона. Труды Всероссийской научной конференции "Моделирование коэволюции природы и общества: проблемы и опыт. К 100-летию со дня рождения академика Н.Н. Моисеева 2017, с.84-93.

4. Абраров Д.Л. Математическая модель гравитационного потенциала системы "Земля-Луна"в виде общего решения ньютоновой задачи трех тел. Инженерный журнал: наука и инновации, 2018, вып.2 (74).

УДК 512+519.6+511

Разложение поворота в сумму отражения и проектирования на вектор с растяжением

К. Ю. Богачев Россия, г. Москва, Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
Е. А. Морозова Россия, г. Москва, Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
Н. Н. Ченцова Россия, г. Москва, Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
П. Н. Сорокин Россия, г. Москва, Федеральной государственное учреждение Федеральный научный центр Научно-исследовательский институт системных исследований РАН
bogachev@mech.math.msu.su, nataly.chentsova@gmail.com, s_p_n_1974@bk.ru

The decomposition of each rotation into the sum of two operators: the reflection and expanding projection to the vector

K. Yu. Bogachev Russia, Moscow, Lomonosov Moscow State University
E. A. Morozova Russia, Moscow, Lomonosov Moscow State University
N. N. Chentsova Russia, Moscow, Lomonosov Moscow State University
P. N. Sorokin Russia, Moscow, The Federal National Promotion The Federal Scientific Centre Science Research Institute of the System Analyze at Russian Academy of Science
bogachev@mech.math.msu.su, nataly.chentsova@gmail.com, s_p_n_1974@bk.ru

Посвящается светлой памяти Н.С.Бахвалова, Н.М.Коробова, Н.Н.Ченцова

Дж.Уилкинсон в [1] поставил задачу: найти связь метода отражений [2] и метода плоских вращений [3]. В работе [4] предложен алгоритм метода быстрых вращений, отличный от алгоритма плоских вращений. В настоящей работе найдена связь метода быстрых вращений с преобразованием отражения.

Теорема 1. *Пусть $n \in \mathbb{N}$ и пусть произвольные неколлинеарные вектора-столбцы $a^{(n)}, e^{(n)} \in \mathbb{R}^n$ с координатами $(a^{(n)})_i$, $(e^{(n)})_i \in \mathbb{R}$ с индексами $i = \overline{1,n}$ задают двумерное подпространство $\Pi^{(2)} \in \mathbb{R}^n$:*

$$\Pi^{(2)} = \Pi^{(2)}(a^{(n)}\&e^{(n)}) = \{x^{(n)} \in \mathbb{R}^n : \exists\, \alpha, \beta \in \mathbb{R},\, x^{(n)} = \alpha a^{(n)} + \beta e^{(n)}\}.$$

Тогда поворот $T^{(n)} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ на угол $\varphi(a^{(n)}\&e^{(n)})$ в подпространстве $\Pi^{(2)}$, переводящий вектор $a^{(n)}$ в вектор $(|a^{(n)}|/|e^{(n)}|)\cdot e^{(n)}$ и оставляющий на месте каждый вектор, ортогональный к подпространству $\Pi^{(2)}$, можно разложить в сумму матрицы отражения $H^{(n)} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ и матрицы проектирования $\Delta^{(n)} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ на вектор $e^{(n)}$ с растяжением:

$$T^{(n)} = H^{(n)} + \Delta^{(n)}.$$

Пусть $I^{(n)} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ — матрица тождественного оператора:

$$(I^{(n)})_{ij} = \begin{cases} 1, & i = k, \\ 0, & i \neq k, \end{cases} \qquad i, j = \overline{1,n},$$

$A^{(n,1)}$, $E^{(n,1)} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ — матрицы, чьи матричные элементы с индексами $(i,1)$ равны i-ым координатам векторов-столбцов $a^{(n)}, e^{(n)} \in \mathbb{R}^n$:

$$(E^{(n,1)})_{i,1} = (e^{(n)})_i, \quad (A^{(n,1)})_{i,1} = (a^{(n)})_i, \quad i = \overline{1,n}.$$

Скалярное произведение двух векторов-столбцов $a^{(n)}, e^{(n)} \in \mathbb{R}^n$ задается формулой:

$$(a^{(n)}, e^{(n)}) = \sum_{1 \le i \le n} (a^{(n)})_i \cdot (e^{(n)})_i = (A^{(n,1)})^T \cdot E^{(n,1)} = (E^{(n,1)})^T \cdot A^{(n,1)}.$$

Длина вектора-столбца $a^{(n)} \in \mathbb{R}^n$ задается формулой:

$$|a^{(n)}| = \sqrt{(a^{(n)}, a^{(n)})} = \sqrt{\sum_{1 \le i \le n} (a^{(n)})_i^2} = \sqrt{(A^{(n,1)})^T \cdot A^{(n,1)}}.$$

$\cos\varphi(a^{(n)} \& e^{(n)})$ — косинус угла между векторами-столбцами $a^{(n)}, e^{(n)} \in \mathbb{R}^n$ задается формулой:

$$\cos\varphi(a^{(n)} \& e^{(n)}) = \frac{(a^{(n)}, e^{(n)})}{|a^{(n)}| \cdot |e^{(n)}|} = \frac{(A^{(n,1)})^T \cdot E^{(n,1)}}{|a^{(n)}| \cdot |e^{(n)}|} = \frac{(E^{(n,1)})^T \cdot A^{(n,1)}}{|e^{(n)}| \cdot |a^{(n)}|}.$$

Два вектора-столбца $a^{(n)}, e^{(n)} \in \mathbb{R}^n$ являются неколлинеарными, если

$$a^{(n)} \ne 0, \quad e^{(n)} \ne 0,$$
$$|(a^{(n)}, e^{(n)})| \ne |a^{(n)}| \cdot |e^{(n)}|.$$

Тогда матрица отражений $H^{(n)} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ задается формулой:

$$H^{(n)} = I^{(n)} - 2 \cdot \frac{\left(\frac{A^{(n,1)}}{|a^{(n)}|} + \frac{E^{(n,1)}}{|e^{(n)}|}\right) \cdot \left(\frac{A^{(n,1)}}{|a^{(n)}|} + \frac{E^{(n,1)}}{|e^{(n)}|}\right)^T}{\left|\frac{a^{(n)}}{|a^{(n)}|} + \frac{e^{(n)}}{|e^{(n)}|}\right|^2},$$

а матрица проектирования $\Delta^{(n)} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ на вектор-столбец $e^{(n)} \in \mathbb{R}^n$ с растяжением задается формулой:

$$\Delta^{(n)} = 2 \cdot \frac{E^{(n,1)}}{|e^{(n)}|} \cdot \frac{(A^{(n,1)})^T}{|a^{(n)}|}.$$

Лемма 1. *В условиях теоремы 1 матрица отражений $H^{(n)} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ является симметричной и ортогональной*

$$(H^{(n)})^T = H^{(n)}, \quad (H^{(n)})^2 = (H^{(n)})^T \cdot H^{(n)} = H^{(n)} \cdot (H^{(n)})^T = I^{(n)},$$

и для нее справедливо

$$H^{(n)} e^{(n)} = -(|e^{(n)}|/|a^{(n)}|) \cdot a^{(n)}, \quad H^{(n)} a^{(n)} = -(|a^{(n)}|/|e^{(n)}|) \cdot e^{(n)}.$$

Лемма 2. *В условиях теоремы 1 матрица $T^{(n)} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ является ортогональной*

$$(T^{(n)})^T \cdot T^{(n)} = T^{(n)} \cdot (T^{(n)})^T = I^{(n)},$$

и для нее справедливо

$$T^{(n)} a^{(n)} = (|a^{(n)}|/|e^{(n)}|) \cdot e^{(n)}, T^{(n)} e^{(n)} = -(|e^{(n)}|/|a^{(n)}|) \cdot a^{(n)} + 2\cos\varphi(a^{(n)} \& e^{(n)}) \cdot e^{(n)}.$$

Более того для всех $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ справедливо:

$$\cos\varphi((\alpha a^{(n)} + \beta e^{(n)}) \& T^{(n)}(\alpha a^{(n)} + \beta e^{(n)})) = \cos\varphi(a^{(n)} \& e^{(n)}).$$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Уилкинсон Дж. Алгебраическая проблема собственных значений. — М.: Наука, 1970. 564 с., Wilkinson J.H. The algebraic eigenvalue problem. Clarendon press, Oxford, 1965.

2. Householder A. S. Unitary triangulation of a nonsymmetric matrix. J. ACM, 1958, v. 5, pp. 339-342.

3. Givens W. Computation of plane initary rotations transforming a general matrix to triangular form. J. Soc. Industrial Appl. Math, 1958, 6, 26-50.

4. Сорокин П. Н., Ченцова Н. Н. Расчетные формулы для модифицированного метода вращений // 25-ая международная конференция "Математика. Компьютер. Образование": тезисы докладов. Международная конференция (Пущино, 29 января - 3 февраля 2018 г.) — Москва-Ижевск, 2018, С. 151.

———————————————————————————

УДК 510.3: 517.51

О функциональном контуре конечного треугольного массива чисел

А. Д. Бреки Россия, г. Санкт-Петербург, ФГАОУ ВО «Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого»
albreki@yandex.ru

About the functional contour of terminating triangular massif of numbers

A. D. Breki Russia, St. Petersburg, Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University
albreki@yandex.ru

В работе приведены сведения о функциональном контуре конечного треугольного массива чисел. Показано, что произвольному значению функции трёх переменных можно поставить в соответствие треугольный массив вещественных чисел. Приведены примеры треугольных массивов с функциональными контурами, определяемыми различными функциями.

Пусть $X = \{X_1, X_2, \ldots, X_m\}$ множество, состоящее из m конечных и упорядоченных подмножеств чисел. Причём длины этих подмножеств соответственно равны $|X_1| = n$; $|X_2| = n-1$; $|X_3| = n-2$, $|X_2| = n-m+1$, $\ldots$, $|X_m| = 1$. Обозначим символом $x_{i,j}$ - j-й элемент i-го подмножества, и расположим элементы множества X следующим образом$\begin{pmatrix} x_{i,j} & & x_{i,j+1} \\ & x_{i+1,j} & \end{pmatrix}$, в результате можно записать[1, 2, 3]:

$$X = \begin{pmatrix} x_{1,1} & & x_{1,2} & & x_{1,3} & & \ldots & & x_{1,n} \\ & x_{2,1} & & x_{2,2} & & \ldots & & x_{2,n-1} & \\ & & x_{3,1} & & \ldots & & x_{3,n-2} & & \\ & & & \ldots & & \ldots & & & \\ & & & & x_{n,1} & & & & \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Множество X, представленное в виде (1), является конечным треугольным массивом.
Пусть элементы в массиве (1) взаимосвязаны между собой определённым правилом:

$$x_{i+1,j} = \varphi(x_{i,j}; x_{i,j+1}). \tag{2}$$

Подмножества конечного треугольного массива:

1. $X_{\text{в}} = \{x_{1,j}|\ j = 1, 2, \ldots, n\}$,

2. $X_{\text{л}} = \{x_{i,1}|\ i = 1, 2, \ldots, m = n\}$,

3. $X_{\text{п}} = \{x_{i,n-i+1}|\ j = 1, 2, \ldots, n = m\}$,

совместно образуют «контур» данного массива и пересекаются следующим образом $X_{\text{в}} \cap X_{\text{л}} = \{x_{1,1}\}$, $X_{\text{в}} \cap X_{\text{п}} = \{x_{1,n}\}$, $X_{\text{п}} \cap X_{\text{л}} = \{x_{n,1}\}$. Элементы, не входящие в «контур», образуют «ядро» данного массива (рис.1).

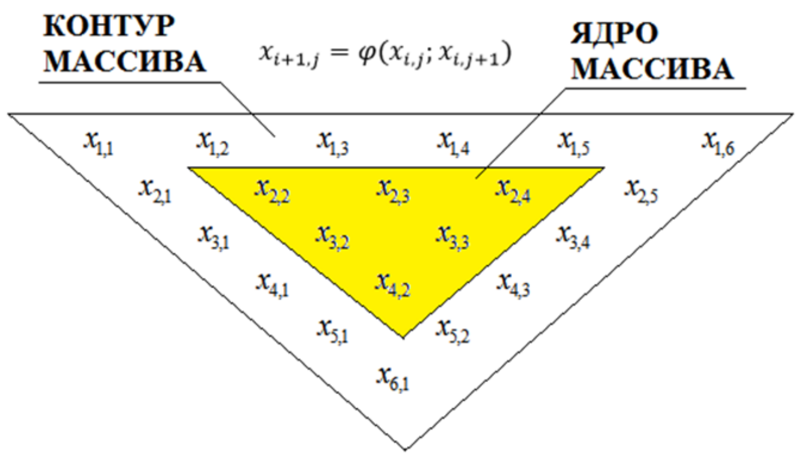


Рис. 4: Контур и ядро треугольного массива в общем виде

Положим далее, что элементы ядра массива известны, а элементы контура не определены. Возьмём произвольную функцию от трёх аргументов $\mathcal{K} = f(x, y, z)$ и положим, что один из аргументов равен произвольному элементу из $\boldsymbol{X_B}$, другой – произвольному элементу из $\boldsymbol{X_Л}$, третий – произвольному элементу из $\boldsymbol{X_П}$ (при этом два аргумента функции могут быть равны двум элементам в «вершинах» (углах) массива, а третий аргумент в этом случае приравнивается к любому элементу, кроме оставшегося «углового») (рис.2).

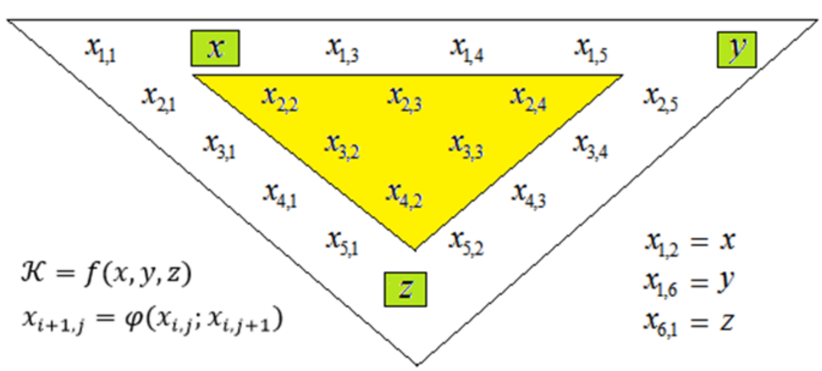


Рис. 5: Пример расположения аргументов функции в контуре массива

При подстановке значений аргументов в контур треугольного массива, мы, в соответствии с правилом (2) делаем его определённым. Таким образом, при изменении значений аргументов, с одной стороны, меняется значение функции, а с другой стороны, определяется и изменяется контур треугольного массива чисел. Можно поставить в соответствие значению функции треугольный массив чисел. В случае отсутствия аргументов в контуре он будет неопределённым, а в случае их наличия – он будет функционально определённым контуром (или кратко – функциональным контуром).

В заключении приведём краткий простейший пример конечного треугольного массива с функциональным контуром (рис.3).

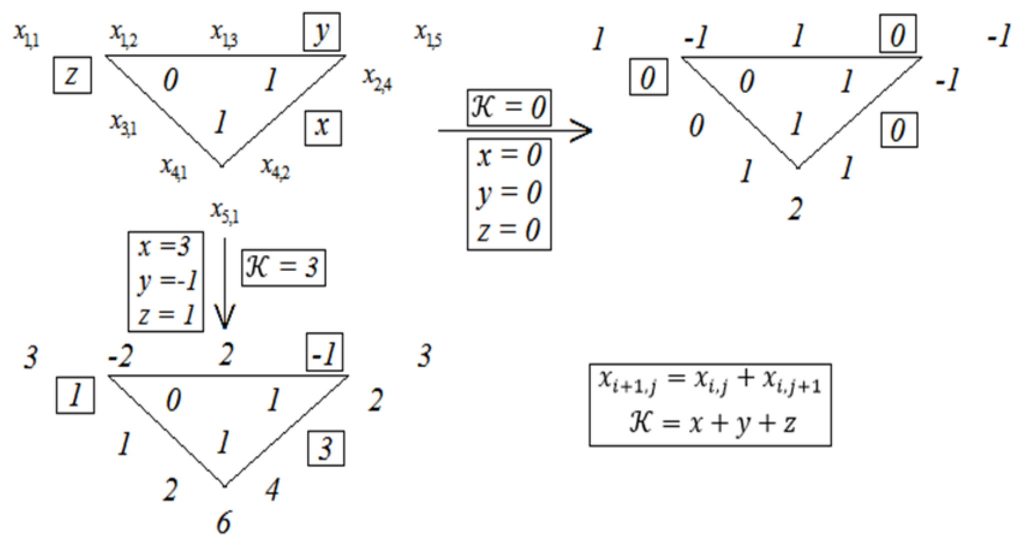


Рис. 6: Краткий пример треугольного массива с функциональным контуром: два варианта значений элементов

Для функции двух переменных, сама функция может находиться в контуре (равна элементу контура с некоторыми индексами) вместе со своими аргументами и определять его значения и изменения. Результаты исследований могут быть использованы в трибологии [1-3] и важнейших технологических приложениях [4, 5].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бреки А.Д. Закономерности обобщённого треугольника Паскаля, связанные с фрикционным взаимодействием материалов // Материалы 4-й международной научно-практической конференции «Современное машиностроение. Наука и образование». – 19 – 20 июня 2014. – СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2014. – С. 309 –318.

2. Бреки А.Д., Гвоздев А.Е., Колмаков А.Г. Использование обобщенного треугольника Паскаля для описания колебаний силы трения материалов // Материаловедение. 2016. № 11. С. 3 – 8.

3. Breki A.D., Gvozdev A.E., Kolmakov A.G. Application of generalized pascal triangle for description of oscillations of friction forces // Inorganic Materials: Applied Research, 2017. V.8. №4. P.509-514.

4. Применение теории пластичности дилатирующих сред к процессам уплотнения порошков металлических систем / Э.С. Макаров, А.Е. Гвоздев, Г.М. Журавлев, А.Н. Сергеев, И.В. Минаев, А.Д. Бреки, Д.В. Малий//Чебышевский сборник. 2017. Т.18. Вып. 4. С. 1-17.

5. Бреки А.Д. Закономерности обобщённого треугольника Паскаля, связанные с фрикционным взаимодействием материалов // Материалы 4-й международной научно-практической

конференции «Современное машиностроение. Наука и образование». – 19 – 20 июня 2014. – СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2014. – С. 309 –318.

УДК 519.175.3

Перечисление помеченных эйлеровых кактусов без треугольников

В. А. Воблый Россия, г. Москва, Всероссийский Институт Научной и Технической Информации Российской Академии Наук, Московский Государственный Технический Университет им. Н. Э. Баумана
А. К. Мелешко Россия, г. Москва, Московский Государственный Технический Университет им. Н. Э. Баумана
vitvobl@yandex.ru, akmeleshko@gmail.com

Enumeration of labeled Eulerian cacti without triangles

V. A. Voblyi Russia, Moscow, Russian Institute of Scientific and Technical Information RAS, Moscow Bauman State Technical University
A. K. Meleshko Russia, Moscow, Moscow Bauman State Technical University
vitvobl@yandex.ru, akmeleshko@gmail.com

Кактусом называется связный граф, в котором нет ребер, лежащих более чем на одном простом [1, с. 93]. Все блоки кактуса – ребра или простые циклы. Эйлеровы графы являются графами без мостов [2]. Поэтому все блоки эйлерова кактуса – простые циклы.

Теорема 1. *Пусть ET_n – число помеченных эйлеровых кактусов без треугольников с n вершинами. При $n \geq 4$ верна формула*

$$ET_n = (n-1)! \sum_{k=1}^{[\frac{n-1}{3}]} \binom{n-2k-2}{k-1} \frac{n^{k-1}}{k! 2^k} \qquad (1)$$

Доказательство.Пусть C_n – число помеченных графов с n вершинами, а B_n – число помеченных блоков с n вершинами. Введем производящую функцию: $B(z) = \sum_{n=3}^{\infty} B_n \frac{x^n}{n!}$.

В работе [3] было получено соотношение

$$C_n = \frac{(n-1)!}{n} [z^{n-1}] \exp(nB(z)) = \frac{(n-1)!}{n} [z^{-1}] \exp(nB(z)) z^{-n},$$

где $[z^n]$ – коэффициентный оператор, $[z^{-1}]$ – оператор формального вычета. Эта формула верна для подкласса связных графов, у которых все блоки принадлежат некоторому множеству 2-связных графов [4]. Обозначая через $\bar{B}(z)$ экспоненциальную производящую функцию для числа блоков помеченных эйлеровых кактусов без треугольников, получим

$$ET_n = \frac{(n-1)!}{n} [z^{-1}] \exp(n\bar{B}(z)) z^{-n},$$

Так как число помеченных циклов с n вершинами равно $(n-1)!/2$, имеем

$$\bar{B}(z) = \frac{1}{2} \sum_{n=4}^{\infty} (n-1)! \frac{z^n}{n!}, \bar{B}'(z) = \frac{1}{2} \sum_{n=3}^{\infty} z^n = \frac{z^3}{2(1-z)}.$$

Следовательно,
$$ET_n = \frac{(n-1)!}{n}[z^{-1}]\exp\Big(\frac{nz^3}{2(1-z)}\Big)z^{-n}.$$

Разлагая экспоненту в степенной ряд, найдем
$$ET_n = \frac{(n-1)!}{n}[z^{-1}]\sum_{k=0}^{\infty}\frac{n^k z^{3k-n}}{2^k(1-z)^k}.$$

Используя известный ряд: $(1-z)^{-r} = \sum_{m=0}^{\infty}\binom{m+r-1}{r-1}z^m$,
получим
$$ET_n = \frac{(n-1)!}{n}[z^{-1}]\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\binom{m+k-1}{k-1}\frac{n^k z^{3k-n+m}}{k!2^k} = (n-1)!\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n-2k-2}{k-1}\frac{n^{k-1}}{2^k k!}.$$

Учитывая, что биномиальный коэффициент обращается в нуль при $n-2k-2 < k-1$, получим утверждение теоремы.

□

Теорема 2. *Для числа ET_n помеченных эйлеровых кактусов без треугольников с n вершинами при $n \to \infty$ верна асимптотическая формула*
$$ET_n \sim c_1 n^{-5/2} a_1^n n!,$$
где $c_1 \approx 0.1019844368$, $a_1 \approx 2.1748800796$.

Доказательство.
Используем теорему Флажоле-Седжвика [5]:
Обозначим
$$F(N,n) = [z^N]a(z)(b(z))^n = \frac{1}{2\pi i}\oint a(z)(b(z))^n\frac{dz}{z^{N+1}}$$
Пусть функции $a(z)$ и $b(z)$ удовлетворяют следующим условиям:

1. Функции $a(z) = \sum_{j\geq 0} a_j z^j$ и $u(z) = \sum_{j\geq 0} u_j z^j$ аналитические в точке $z=0$ и имеют неотрицательные коэффициенты, кроме того $b(0) \neq 0$.
2. НОД $\{j \mid b_j > 0\} = 1$.
3. Если $R \leq 0$ радиус сходимости $b(z)$, то радиус сходимости $a(z)$ не меньше R.

Через T обозначим величину $T = lim_{x\to R-0}\frac{xb'(x)}{b(x)}$. Пусть λ положительное число такое, что $0<\lambda<T$, и пусть r – единственный действительный корень уравнения $r\frac{b'(r)}{b(r)} = \lambda$. Обозначим $\sigma = \frac{d^2}{dr^2}(\ln b(r) - \lambda\ln r)$.

Тогда для $N = \lambda n$ целого при $n\to\infty$ и $N\to\infty$ верно асимптотическое равенство
$$F(N,n) \sim a(r)\frac{(b(r))^n}{r^{n+1}\sqrt{2\pi n\sigma}}.$$

Формула (1) может быть представлена в виде
$$ET_n = \frac{(n-1)!}{n}[z^n]\left\{z\Big(\exp\Big(\frac{z^3}{2(1-z)}\Big)\Big)^n\right\} = \frac{(n-1)!}{n}F(N,n),$$

где $N=n, \lambda=1, a(z)=z, b(z)=\exp\Big(\frac{z^3}{2(1-z)}\Big)$.

Так как ряд для $\bar{B}(z)$ сходится при $|z| < 1$ оператор формального вычета является контурным интегралом. Очевидно, функции $a(z)$ и $b(z)$ аналитические в точке $z = 0$ и $b(0) = 1$. Функция $b(z)$ имеет положительные коэффициенты, так как $b(z) = \exp(\bar{B}(z))$ и $\bar{B}(z)$ – производящая функция для числа помеченных блоков частного вида. Поскольку $b_2 > 0, b_3 > 0$, имеем НОД $\{j|b_j > 0\} = 1$. Так как $z = 1$ – ближайшая к началу координат особая точка $b(z)$, радиус сходимости R функции $b(z)$ равен 1. Очевидно, $a(z)$ имеет бесконечный радиус сходимости. Таким образом, условия 1-3 теоремы Флажоле-Седжвика выполнены. Найдем $T = \lim_{x\to 1-0} \frac{xb'(x)}{b(x)} = \lim_{x\to 1-0} \frac{x^3(3-2x)}{2(1-x)^2} = +\infty$, $0 < \lambda < T$. В нашем случае уравнение $r\frac{b'(r)}{b(r)} = \lambda$ имеет вид $\frac{r^3(3-2r)}{2(1-r)^2} = 1$. Решая это уравнение с помощью Wolfram Mathematica, видим, что его единственным действительный корнем является число $r = 0.5780287568$.
Вычисляя величину

$$\sigma = \Big(\frac{b'(r)}{b(r)}\Big)' + \frac{\lambda}{r^2} = \Big(\frac{r^2(3-2r)}{2(1-r)^2}\Big)' + \frac{1}{r^2} = -\frac{r(3-3r+r^2)}{(1-r)^3} + \frac{1}{r^2}.$$

получим $\sigma = 15.3021455101$. Также с помощью Wolfram Mathematica вычислим

$$c_1 = \frac{a(r)}{r\sqrt{2\pi\sigma}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} = 0.1019844368, a_1 = \frac{b(r)}{r} = 2.1748800796.$$

Окончательно при $n \to \infty$ имеем асимптотику

$$ET_n = \frac{(n-1)!}{n}F(N,n) \sim \frac{(n-1)!}{n}\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}n^{-1/2}\Big(\frac{b(r)}{r}\Big)^n \sim n!c_1 n^{-5/2}a_1^n.$$

□

Следствие 1. *Почти все помеченные эйлеровы кактусы содержат треугольники.*

Доказательство.Известно [6], что для числа D_n помеченных эйлеровых кактусов с n вершинами при $n \to \infty$ верна асимптотическая формула $D_n \sim cn^{-5/2}a^n n!$, где $c \approx 0.1079436709, a \approx 2.5424753735$. Следовательно, в силу теоремы 2 имеем

$$\lim_{n\to\infty}\frac{ET_n}{D_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{c_1 n^{-5/2}a_1^n}{cn^{-5/2}a^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{c_1}{c}\Big(\frac{a_1^n}{a}\Big)^n = 0,$$

т.е. асимптотически почти все помеченные эйлеровы кактусы содержат треугольники.

□

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Харари Ф., Палмер Э. Перечисление графов. — Москва: Изд-во Мир, 1977. 324 с.

2. Воблый В. А. Перечисление помеченных эйлеровых кактусов // XI Международный семинар «Дискретная математика и ее приложения»: тезисы докладов. Международный семинар — Москва МГУ, 2012. С. 275-277.

3. Воблый В. А. Об одной формуле для числа помеченных связных графов // Дискретный анализ и исследование операций. 2012. Том 19 № 4. С. 48-59.

4. Labelle G., Leroux P., Ducharme M. G. Graph weights arising from Mayer's theory of cluster integrals. // Seminaire Lotharingien de Combinatoire 54, 2007. Article B54m.

5. Flajolet Ph., Sedgewick R. Analytic Combinatorics. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2009. 810 p.

6. Мелешко А. К., Воблый В. А. Асимптотическое перечисление помеченных эйлеровых кактусов // XVII Международная конференция «Проблемы теоретической кибернетики»: тезисы докладов. Международная конференция (Казань, 16-20 июня 2014 г.) — Казань, 2014. С. 58-60.

———————————————————————————

УДК 519.173.3

О числе помеченных последовательно-параллельных трициклических блоков

В. А. Воблый Россия, г. Москва, Всероссийский Институт Научной и Технической Информации Российской Академии Наук, Московский Государственный Технический Университет им. Н. Э. Баумана
А. К. Мелешко Россия, г. Москва, Московский Государственный Технический Университет им. Н. Э. Баумана
vitvobl@yandex.ru, akmeleshko@gmail.com

On enumeration of labeled series – parallel tricyclic blocks

V. A. Voblyi Russia, Moscow, Russian Institute of Scientific and Technical Information RAS, Moscow Bauman State Technical University
A. K. Meleshko Russia, Moscow, Moscow Bauman State Technical University
vitvobl@yandex.ru, akmeleshko@gmail.com

Цикломатическим числом связного графа называется увеличенная на единицу разность между числом ребер графа и числом его вершин. Под k - циклическим графом понимается связный граф с цикломатическим числом равным k. Гомеоморфный тип – это общий граф (допускаются петли и кратные ребра), не содержащий вершин степени 2, из которого с помощью подразбиения ребер могут быть получены все графы данного класса гомеоморфных графов. Граф называется последовательно - параллельным, если он не сожержит полного графа K_4, как минора графа, и подразбиений полного графа K_4 [1]. Последовательно-параллельные графы применяются при построении коммуникационных сетей [2].

Лемма 1. *[3] Пусть гомеоморфный тип H – связный гладкий общий граф, отличный от изолированной вершины или петли, и H имеет a вершин, b ребер (петля также – ребро), b_0 петель, b_i пучков ребер кратности i, $A(H)$ – порядок вершинно-реберной групыы автоморфизмов графа H. Тогда число помеченных графов C_n с n вершинами и гомеоморфным типом H равно:*

$$C_n = \frac{n!}{2^{b_0} A(H)} Coef_{x^{n-a}} \frac{x^{b+b_0-\sum_{i=1}^{b} b_i} \prod_{i=1}^{b} (x+i(1-x))^{b_i}}{(1-x)^b}$$

Теорема 1. *Число помеченных последовательно-параллельных трициклических блоков при $n \geq 5$ равно*

$$TSP_n = \frac{n!}{5760}(n-3)(n-4)(3n^3+36n^2+71n+50)$$

Доказательство.

Все гомеоморфные типы трициклических блоков изображены на рис. 1[4]:

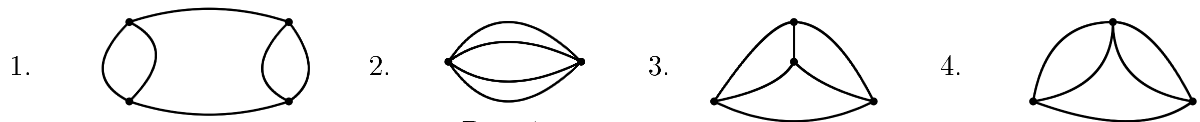


Рис. 1

Из них только гомеоморфный тип под номером 3 не является последовательно-параллельным графом, так как является полным графом K_4. Тогда в силу леммы 1, получим

$$a = 4, b = 6, b_0 = 0, b_1 = 6, b_2 = b_3 = b_4 = b_5 = b_6 = 0, A(H) = 24,$$

$$TB_{3,n} = \frac{n!}{24} Coef_{x^{n-4}} \frac{1}{(1-x)^6} = \frac{n!}{24} Coef_{x^{n-4}} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+5}{5} x^k = \frac{n!}{24} \binom{n+1}{5} =$$

$$= \frac{n!}{2880}(n+1)n(n-1)(n-2)(n-3)$$

В [5] была получена формула для числа помеченных трициклических блоков:

$$TB_n = \frac{n!}{1152}(n-3)(n^4 + 4n^3 - 15n^2 - 46n - 40)$$

Тогда

$$TSP_n = \frac{n!}{1152}(n-3)(n^4 + 4n^3 - 15n^2 - 46n - 40) - \frac{n!}{2880}(n+1)n(n-1)(n-2)(n-3) =$$

$$= \frac{n!}{5760}(n-3)(n-4)(3n^3 + 36n^2 + 71n + 50).$$

Получили утверждение теоремы.

□

Следствие 1. *При равномерном распределении вероятностей, вероятность P_n того, что помеченный трициклический блок является последовательно-параллельным графом, равна* $\frac{3}{5}$

Доказательство.

При $n \to \infty$ верны асимптотические равенства для числа помеченных последовательно-параллельных блоков: $TSP_n \sim \frac{n!n^5}{1920}$ и для числа помеченных трициклических блоков: $TB_n \sim \frac{n!n^5}{1152}$.

Тогда вероятность того, что помеченный трициклический блок является последовательно-параллельным графом, равна

$$\lim_{n\to\infty} P_n = \lim_{n\to\infty} \frac{TSP_n}{TB_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^5 n!}{1920} \frac{1152}{n^5 n!} = \frac{3}{5}$$

□

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Bodirsky M., Gimenez O, Kang M, Noy M. Enumeration and limit laws for series – parallel graphs // European Journal of Combinatorics. 2007. Vol 28. P. 2091-2105.
2. Radhavan S. Low-connectivity network design on series-parallel graphs. //Networks. 2004. Vol. 43. No 3. P. 101-117.
3. Степанов В. Е. О некоторых особенностях строения случайного графа вблизи критической точки. // Теория вероятн. и ее применения. 1987. Т. 32 Вып. 4. С. 633–657.
4. Ford G. W., Uhlenbeck G. E. Combinatorial problems in theory graphs. IV. // Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 1957. Vol. 43. P. 163-167
5. Wright E. M. The number of connected sparsely edged graphs II. Smooth graphs and blocks. // 1977. Vol. 175. P. 335-349.

———————————————————————————————

УДК 512.643.2

Многомерно-детерминантные тождества и неравенства

А. С. Гаспарян Россия, г. Переславль-Залесский
armenak.gasparyan@yandex.ru

Multidimensional Determinantal Identities and Inequalities

A. S. Gasparyan Russia, Pereslavl-Zalesskii
armenak.gasparyan@yandex.ru

Общеизвестна роль неравенств в математике. Широкий класс неравенств образуют детерминантные неравенства, т.е. неравенства, содержащие определители того или иного вида. Сотни таких неравенств представлены отдельными статьями в математической литературе, а в монографии Митриновича, Печарича и Финка [1] детерминантным неравенствам посвящена отдельная глава.

В данном докладе будет представлен обзор результатов автора по систематическому обобщению множества различных детерминантных неравенств, как классических, так и сравнительно недавно опубликованных, на многомерные определители. Основным методом доказательства неравенств при этом является метод детерминантных тождеств. В связи с этим представлены многомерно-детерминантные тождества, лежащие в основе доказательств и в свою очередь являющиеся обобщениями хорошо известных детерминантных тождеств, таких как тождества Бине-Коши [2], Лагранжа [3], тождества Мюира и МакМагона [4], тождества Андреева, Коркина и Сонина [1].

Объём тезиса позволит мне лишь кратко перечислить несколько избранных примеров таких неравенств и соответствующих обобщений.

Примеры

1. Неравенство Грама

Для $\forall \vec{x}^{(1)}, \ldots, \vec{x}^{(m)} \in R^n$ имеет место

$$\det(\Gamma(\vec{x}^{(1)}, \ldots, \vec{x}^{(m)})) = \det(< \vec{x}^{(i)} | \vec{x}^{(j)} >) \geqslant 0, \tag{1}$$

где $<\vec{x}^{(i)}|\vec{x}^{(j)}>=\sum_{k=1}^n x_k^{(i)}x_k^{(j)}$. Равенство имеет место тогда и только тогда, когда векторы $\vec{x}^{(1)},\ldots,\vec{x}^{(m)}$ линейно зависимы.

Обобщение

Для $\forall\vec{x}^{(1)},\ldots,\vec{x}^{(m)}\in R^n$ и для $\forall\sigma=(\sigma_1,\ldots,\sigma_{2k})\in\{0,1\},\sum\sigma_r\in\{0,2,\ldots,2k\}$, имеет место неравенство

$$\Big|\Gamma_{2k}(\vec{x}^{(1)},\ldots,\vec{x}^{(m)})\Big|^{(\sigma)}\geqslant 0, \tag{2}$$

где $\Gamma_{2k}(\vec{x}^{(1)},\ldots,\vec{x}^{(m)})=\| <\vec{x}^{(i_1)}|\cdots|\vec{x}^{(i_{2k})}>\|$,
$<\vec{x}^{(i_1)}|\cdots|\vec{x}^{(i_{2k})}>=\sum_{j=1}^n x_j^{(i_1)}\cdots x_j^{(i_{2k})}$, и

$$|A_{i_1\ldots i_{2k}}|^{(\sigma)}=\frac{1}{m!}\sum_{\pi_1,\ldots,\pi_{2k}\in S_m}\prod_{r=1}^{2k}(sign(\pi_r))^{(\sigma_r)}\prod_{j=1}^{m}A_{\pi_1(j)\ldots\pi_{2k}(j)}.$$

2. Неравенство Коши-Буняковского-Шварца

Частный случай неравенства Грама (1) при $m=2$ суть неравенство Коши-Буняковского-Шварца

$$\begin{vmatrix} <\vec{x}^{(1)}|\vec{x}^{(1)}> & <\vec{x}^{(1)}|\vec{x}^{(2)}> \\ <\vec{x}^{(2)}|\vec{x}^{(1)}> & <\vec{x}^{(2)}|\vec{x}^{(2)}> \end{vmatrix} =<\vec{x}^{(1)}|\vec{x}^{(1)}>\cdot<\vec{x}^{(2)}|\vec{x}^{(2)}>-<\vec{x}^{(1)}|\vec{x}^{(2)}>^2\geqslant 0. \tag{3}$$

Равенство имеет место тогда и только тогда, когда векторы $\vec{x}^{(1)}$ и $\vec{x}^{(2)}$ пропорциональны.

Обобщение

Для $\forall\vec{x}^{(1)},\vec{x}^{(1)}\in R^n$ и для $\forall\sigma\in\{0,1\}^{2k},|\sigma|=2d,d\in\{0,1,\ldots,k\}$ имеет место неравенство

$$\Big|<\vec{x}^{(i_1)}|\cdots|\vec{x}^{(i_{2k})}>\Big|^{(\sigma)}_{i_1,\ldots,i_{2k}=1,2}=$$
$$\sum_{s=0}^{2d}(-1)^s\binom{2d}{s}\sum_{r=0}^{2k-2d}\binom{2k-2d}{r}(\underbrace{\vec{x}^{(1)},\ldots,\vec{x}^{(1)}}_{2k-s-r},\underbrace{\vec{x}^{(2)},\ldots,\vec{x}^{(2)}}_{s+r})\cdot$$
$$\cdot(\underbrace{\vec{x}^{(1)},\ldots,\vec{x}^{(1)}}_{s+r},\underbrace{\vec{x}^{(2)},\ldots,\vec{x}^{(2)}}_{\text{2k-s-r}})\geqslant 0. \tag{4}$$

Опять же, равенство имеет место тогда и только тогда, когда векторы $\vec{x}^{(1)}$ и $\vec{x}^{(2)}$ пропорциональны.

3. Неравенства Чебышева

Для любых двух последовательностей $\{a_i\},\{b_i\}\in R^n$, одновременно возрастающих или убывающих, имеет место неравенство

$$n\sum_{i=1}^n a_ib_i-\sum_{i=1}^n a_i\sum_{i=1}^n b_i\geqslant 0 \tag{5}$$

Знак неравенства меняется на обратный, если $\{a_i\}$ и $\{b_i\}$ — монотонные последовательности противоположного смысла.

Обобщение

Пусть задано p последовательностей $\{a_i^{(r)}\} \in R^n, r = 1, \ldots, p$, из которых первые d последовательности (d чётно) монотонны, причём d_1 возрастающих и $d - d_1$ убывающих. Пусть, кроме того, $\{m_i^{(1)}\}, \{m_i^{(2)}\}, \{a_i^{(d+1)}\}, \ldots, \{a_i^{(p)}\} \in R_+^n$. Тогда имеет место неравенство

$$(-1)^{d_1} \sum_{k_1,\ldots,k_p=0,1} (-1)^{\sum_{r=1}^{d} k_r} \left(\sum_{i=1}^{n} m_i^{(1)} (a_i^{(1)})^{k_1} \cdots (a_i^{(p)})^{k_p} \right) \cdot \\ \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} m_i^{(2)} (a_i^{(1)})^{1-k_1} \cdots (a_i^{(p)})^{1-k_p} \right) \geqslant 0. \quad (6)$$

4. Неравенства Ньютона

Для $\forall t_1, \ldots, t_k \in R$ и для $\forall r \in 1, \ldots, k-1$ имеет место неравенство

$$p_{r-1}(t_1, \ldots, t_k) p_{r+1}(t_1, \ldots, t_k) - p_r^2(t_1, \ldots, t_k) \leqslant 0, \quad (7)$$

Обобщение

Для $\forall t_1, \ldots, t_k \in R$, для $\forall l \in N$, и $r = 0, 1 \ldots, k - 2l$ имеет место неравенство

$$(-1)^l \sum_{s=0}^{2l} (-1)^s \binom{2l}{s} p_{r+s}(t_1, \ldots, t_k) p_{r+2l-s}(t_1, \ldots, t_k) \geqslant 0. \quad (8)$$

Несколько замечаний по поводу приведённых выше неравенств (2), (4), (6), (8). Неравенство (2) содержит в качестве частных случаев не только неравенство (1), но и множество других неравенств, обобщающих известные детерминантные неравенства. Интегральные аналоги неравенств (2), (4) и (6) позволяют получить довольно общие неравенства для гамма- и бета-функции Эйлера и их обобщений, а также для множества специальных функций. Неравенство (8), будучи обобщением неравенств Ньютона, в свою очередь служит отправным пунктом для доказательства общих неравенств для произвольных гиперболических многочленов, для обобщения неравенства А.Д.Александрова для смешанных дискриминантов и, в частности, неравенства Егорычева для перманентов, а также для обобщения неравенства Турана для многочленов Лежандра и ряда других специальны функций.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Mitrinovic D.S., Pecaric J.E., Fink A.M., Classical and New Inequalities in Analysis, Kluwer, 1993.

2. Гантмахер Ф.Р., Теория матриц, Наука, 1967.

3. Харди Г.Г.,Литтлвуд Дж.Е., Полиа Г. Неравенства, М., ИЛ, 1948.

4. Рыбников К.А., Введение в комбинаторный анализ, М., МГУ, 1985.

5. Соколов Н.П, Введение в теорию многомерных матриц, Наукова думка, 1972.

6. Гаспарян А.С., О некоторых приложениях многомерных матриц, М.,1983.

———————————————————————————

УДК 519.95

О сложности решения уравнений в некоторых конечных полях и кольцах

С. Б. Гашков[1] Москва, МГУ им. М. В. Ломоносова sbgashkov@gmail.com
И. Б. Гашков Швеция, Карлстад, Университет Карлстада igor.gachkov@kau.se
А. Б. Фролов [2] Москва, Исследовательский университет МЭИ abfrolov@mail.ru

Под вычислением понимается вычисление с помощью *схемы* (т.е. неветвящейся программы) в *базисе* B, состоящем из *операций* $\omega(x_1, x_2) : E^2 \to E$, где E — данное конечное множество. *Схемой с входами* $x_1, \dots, x_n$ называется последовательность функций $f_i(x_1, \dots, x_n) : E^n \to E$, $i = 1, \dots, l$, начинающаяся с *селекторных* функций $e_i(x_1, \dots, x_n) = x_i$, $i = 1, \dots, n$ (т.е. с переменных x_i), в которой каждая функция $f_i(x_1, \dots, x_n)$ (некоторые переменные у них могут быть *фиктивными*) вычисляется с помощью некоторой *базисной операции* $\omega(y_1, y_2)$ и каких-то предыдущих функций f_{k_r}, $k_r < i$, $r = 1, 2$:

$$f_i(x_1, \dots, x_n) = \omega(f_{k_1}(x_1, \dots, x_n), f_{k_2}(x_1, \dots, x_n)).$$

Сложностью схемы называется число $l - n$ функций в ней (кроме селекторных функций, которые рассматриваются как *входы схемы*). Схема *вычисляет* функцию $g(x_1, \dots, x_n)$, если эта функция встречается в последовательности $f_i(x_1, \dots, x_n)$, $i = 1, \dots, l$. Схема вычисляет *вектор- функцию* $(g_1, \dots, g_m)$, если все ее функции g_i встречаются в последовательности f_i, $i = 1, \dots, l$.

Сложностью вычисления функции g (или вектор-функции $(g_1, \dots, g_m)$) схемами в данном базисе B называется *минимальная* сложность схемы в этом базисе, реализующей данную функцию (вектор-функцию). Сложность булевых вычислений (вычислений в случае $E = \{0, 1\}$) называется часто также *битовой сложностью*.

Обозначим $\lambda(p) = \lceil \log_2 p \rceil$ — длину двоичной записи числа p, $M(n)$ — битовую сложность умножения двичных $n-$битных чисел, а $M_p(n)$ сложность умножения многочленов степени меньшей n над полем $GF(p)$, где под сложностью понимается число пераций сложения-вычитания и умножения-деления в этом поле. Известно (см. [1, 2]), что $M_p(n) \le n \log n \psi(n)$, $M(n) \le n \log n \psi(n)$, где функция $\psi(n)$ растет медленнее любой итерации логарифма. Для битовой сложности $M(GF(p^n))$ умножения в произвольном поле $GF(p^n)$ известна очевидная оценка $O(M(\lambda(p))M_p(n))$.

Известно, что при $q = 3 \mod 4$ квадратный корень в поле $GF(q)$ вычисляется по формуле $\sqrt{x} = x^{(q+1)/4}$. В частности, это верно при $q = p^r$, где $p = 3 \mod 4$, r нечетно.

Если выбрать в $GF(p^r)$ полиномиальный базис, то число операций в поле $GF(p)$ для извлечения квадратного корня в поле $GF(p^r)$ равно $O(\lambda(r)M(r)) + r^{1+o(1)}$. Если полиномиальный базис определяется неприводимым биномом (это возможно только при $p > 2$) или является оптимальным нормальным базисом (определение см., напр. в [3]), то слагаемое $r^{1+o(1)}$ можно отбросить.

В поле $GF(p^s)$, где $p = 3 \mod 4$, s — четно, этот алгоритм не работает. Пусть $s = 2^k r$, r нечетно.

Теорема 1. *При k достаточно большом в сравнении с r сложность извлечения квадратного корня по порядку равна сложности умножения в поле $GF(p^s)$, то есть $O(M(\lambda(p))M_p(s))$.*

Справедливо более общее утверждение.

[1]Грант РФФИ № 18–01–00337 и 17–01–00485
[2]Грант РФФИ 17–01–00485

Теорема 2. *Решение уравнений степени не выше четырех в поле $GF(p^s)$, где $s = 2^k r$, $k \to \infty$, p, r фиксированы, при использовании подходящего базиса можно выполнить с битовой сложностью*

$$O(M(2^k)M(r) + \lambda(r)M(r))\lambda(p) + kr^{1+o(1)}.$$

Если базис в поле $GF(p^r)$ определяется неприводимым биномом или является оптимальным нормальным базисом, то слагаемое $kr^{1+o(1)}$ можно отбросить.

В случае колец вычетов $\mathbb{Z}_{p^n}$ при простых p справедлива

Теорема 3. *Для произвольного $f(x) \in \mathbb{Z}_{p^n}[X]$ степени d битовая сложность вычисления одного корня (если он есть) равна*

$$O(dM(n\lambda(p)) + M(\lambda(p))\lambda(\lambda(p)) \log_2 n + dpM(\lambda(p))).$$

При фиксированном p и растущем n эта оценка превращается в $O(dM(n\lambda(p))$. В частности, такая же оценка получается при извлечении корней любой степени[3]

С помощью теоремы 3 можно доказать, что справедлива

Теорема 4. *Битовая сложность вычисления всех целых корней у многочлена $f(x) \in \mathbb{Z}[X]$ степени d с коэффициентами по модулю меньшими 2^n равна*

$$O(d^3M(n) + d2^{2d}nM(d + \lambda(n)) + d^2M(2^{2d}n)) = O_d(M(n)).$$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Fuerer M. Faster Integer Multiplication// SIAM Journal on Computing. 2009. **39**, № 3. 979—1005.
2. Harvey D.,van der Hoeven J., Lecerf G. Faster polynomial multiplication over finite fields. ArXive.org> cs> arXive: 1407.3361. 12 Jul 2014
3. Болотов А.А., Гашков С.Б., Фролов А.Б. Часовских А.А. Элементарное введение в эллиптическую криптографию. Алгебраические и алгоритмические основы. М.: URSS 2012.

———————————————————————————

[3]Число корней степени d в кольцах $\mathbb{Z}_{p^n}$ при $n > 1$ может быть больше d.

УДК 511.2

Об одном способе выбора коэффициентов в обобщенном бинарном алгоритме вычисления НОД и некоторых классах сокращений

Д. А. Долгов Россия, г. Казань, Казанский (Приволжский) федеральный университет, Институт вычислительной математики и информационных технологий
Dolgov.kfu@gmail.com

An one approach of choosing coefficients in the generalized binary gcd algorithm and some reduction classes

D. A. Dolgov Russia, Kazan, Kazan (Volga Region) Federal University, Institute of Computational Mathematics and Information Technologies
Dolgov.kfu@gmail.com

Операция вычисления наибольшего общего делителя (НОД, gcd) часто используется в различных теоретико-числовых и криптографических алгоритмах. K-арный алгоритм [1, 1] — один из наиболее быстрых алгоритмов вычисления НОД. Пусть $A > B > 0$ — 2 нечетных натуральных числа. Необходимо найти коэффициенты x, y, такие что выполняется $xA + yB \ = \ 0 \ (mod \ k)$ для некоторого фиксированного целого k (обычно k берут простым): $gcd(A, B) = gcd(B, |(xA+yB)/k|)$. Выбрав $k = 2^s$, получим обобщеннный бинарный алгоритм. В [3] был предложен новый способ выбора коэффициентов x, y для обобщенного бинарного алгоритма [4], рассматриваемый в рамках статьи.

Определение 1. *T-остаток — последние t разрядов в двоичном разложении числа u: $u \ mod \ 2^t$. T-остаток числа u обозначается как u_t.*

Определение 2. *Длина числа u в двоичном представлении обозначается как $len(u)$ и равна $\lfloor log_2(u) \rfloor + 1$.*

$A * B_t - B * A_t \ = \ 0 \ (mod \ 2^t)$. Выбор T-остатков в качестве коэффициентов позволяет моментально вычислять коэффициенты, ускорив работу алгоритма.

Рассмотрим 1 итерацию, проанализировав сокращение A/C, где $C = (x * A + y * B)/2^s$.

Пусть X, Y — целочисленные дискретные случайные величины. $X, Y \ \in \ [2^n, 2^{n+1}]$, $n \in N$. Рассмотрим нечетную реализацию случайных величин X, Y. Пусть $\xi = max(X, Y)$, $\nu = min(X, Y)$. Реализации ξ, ν представим в двоичном виде. На t позиции стоит 1 из 4 вариатов: 00, 01, 10 или 11. $\#(\xi, \nu) = 2^{n-2} * (2^{n-1} - 1)$. $R_{i,j} = (\xi * \nu_t - \nu * \xi_t)/2^w$, $w \geq t$, на t позиции стоят i, j. R_{11L} — максимальное сокращение для бинарного алгоритма НОД $\xi/((\xi - \nu)/2^v)$, $v \geq 1$.

Оценим вероятность, что бинарный алгоритм НОД имеет наибольшее сокращение для 2 чисел одинаковой длины. 10 обязательно встретиться в двоичном разложении нечетных реализаций ξ, ν. Если в разложении есть только 10, и 11 не лежит нигде кроме последнего разряда, то обозначим так: $\overline{00}\overline{01}10\overline{11}$. Обозначим двоичное представление числа так: $5 = 101_2$. Для $m > 1$ $\{0\}^m$ или $\{1\}^m$ означают последовательность 0 или 1 длины m.

Исследование вероятностей позволит выявить оптимальную в среднем длину параметра t. Выявление классов чисел, на которых обобщенный бинарный алгоритм дает наибольшее сокращение позволит построить эффективный бинарный алгоритм НОД, способ выбора коэффициентов в котором будет зависеть от поступающих чисел.

Лемма 1. *$P((\frac{\xi}{R_{11L}} \geq \frac{\xi}{|R_{10}|}) \cap \overline{00}\overline{01}10\overline{11}) = 0$, $n \geq 5$.*

Лемма 2. *Пусть* $\xi = 11X11_2$, $\nu = 10...01_2$, X *— любая комбинация 0 и 1, за исключением* $X \neq \{01\}^r$, $r > 1$. *Тогда,* $P(((\frac{\xi}{R_{11L}} < \frac{\xi}{|R_{10}|}) \cap (\frac{\xi}{R_{11L}} < \frac{\xi}{|R_{00}|})) \cap 00\overline{0}\overline{1}10\overline{1}\overline{1}) = 1$.

Лемма 3. *Пусть* $\xi = 11\{01\}^r 11_2$, $\nu = 10...01_2$, $n+1 = 2d$, $d, r > 1$. *Тогда,*
$P(((\frac{\xi}{R_{11L}} = \frac{\xi}{|R_{10}|}) \cap (\frac{\xi}{R_{11L}} = \frac{\xi}{|R_{00}|})) \cap 00\overline{0}\overline{1}10\overline{1}\overline{1}) = 1$.

Гипотеза. *Пусть* $\xi = 1011X011_2$, $\nu = 10...01_2$, X *— любая комбинация 0 и 1, за исключением* $X \neq \{0011\}^r$, $r > 1$. *Тогда,* $P(((\frac{\xi}{R_{11L}} < \frac{\xi}{|R_{10}|}) \cap (\frac{\xi}{R_{11L}} < \frac{\xi}{|R_{00}|})) \cap 00\overline{0}\overline{1}10\overline{1}\overline{1}) = 1$.

Гипотеза. *Пусть* $\xi = 1011\{0011\}^r 011_2$, $\nu = 10...01_2$, $r > 1$. *Тогда,*
$P(((\frac{\xi}{R_{11L}} = \frac{\xi}{|R_{10}|}) \cap (\frac{\xi}{R_{11L}} = \frac{\xi}{|R_{00}|})) \cap 00\overline{0}\overline{1}10\overline{1}\overline{1}) = 1$.

Следующий факт опирается на описанные выше результаты. В случае подтверждения описанных выше гипотез, данный факт будет считаться окончательно доказанным.

Гипотеза. $P(((\frac{\xi}{R_{11L}} \geq \frac{\xi}{R_{10}}) \cap (\frac{\xi}{R_{11L}} \geq \frac{\xi}{R_{00}})) \cap 00\overline{0}\overline{1}10\overline{1}\overline{1}) \leq \frac{Q}{2^{n-2}(2^{n-1}-1)}$, *где*
$Q = 2^{n-1} - 2^{n-3} - 2^{n-6} + \lfloor (n-3)/2 \rfloor + \lfloor (n-6)/2 \rfloor + 1$.

Доказательство.
Число нечетных чисел из $[2^n; 2^{n+1}]$ равно 2^{n-1}. $\#(\xi) = 2^{n-1} - 1$, т.к $\xi \neq \nu$ согласно их выбора. Если $\xi = 11X11$, имеем $\sum_{z=1}^{n-3} \binom{n-3}{z} = 2^{n-3} - 1$. $\#\{11\{01\}^r 11\} = \lfloor (n-3)/2 \rfloor$, $r > 1$. Если $\xi = 1011X011$, имеем $\sum_{z=1}^{n-6} \binom{n-6}{z} = 2^{n-6} - 1$. $\#\{1011\{0011\}^r 011\} = \lfloor (n-6)/4 \rfloor$, $r > 1$.

□

Гипотеза. *Пусть* $\xi = 111X1_2$, $\nu = 100Y1_2$, X *— любая комбинация 0 и 1,* $Y = \neg X$.
Тогда, $P(((\frac{\xi}{R_{11L}} < \frac{\xi}{|R_{10}|}) \cap (\frac{\xi}{R_{11L}} < \frac{\xi}{|R_{00}|})) \cap \overline{0}0011 0\overline{1}\overline{1}) = 1$.

Гипотеза. *Пусть* $\xi = 11\{0\}^{\lfloor \frac{n-4}{2} \rfloor} 1X\{0\}^{n-5} 1_2$, $\nu = 10\{1\}^{\lfloor \frac{n-4}{2} \rfloor} 0Y\{1\}^{n-5} 1_2$, $X \in \{0,1\}$, $Y = \neg X$. *Тогда,* $P(((\frac{\xi}{R_{11L}} < \frac{\xi}{|R_{10}|}) \cap (\frac{\xi}{R_{11L}} < \frac{\xi}{|R_{00}|})) \cap \overline{0}00110\overline{1}\overline{1}) = 1$.

Гипотеза. *Пусть* $\xi = 11\{0\}^{n'} 1X1_2$, $\nu = 10\{1\}^{n'} 0Y1_2$, $Y = \neg X$, $X \in \{0...0, 0...01, 0...010, 10...0, 10...01, 110...0, 1110...0\}$, $len(X) = n - 3 - n'$, $n' \in [1, \lfloor \frac{n-6}{4} \rfloor]$, n' *— целое.*
Тогда, $P(((\frac{\xi}{R_{11L}} < \frac{\xi}{|R_{10}|}) \cap (\frac{\xi}{R_{11L}} < \frac{\xi}{|R_{00}|})) \cap \overline{0}00110\overline{1}\overline{1}) = 1$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Sorrenson J. The k-ary gcd algorithm // Computer Sciences Technical Report. 1990. № 979.
2. Sorrenson J. Two fast GCD Algorithms // J.Alg. 1994. Том 16 № 1. С. 110-144.
3. Dolgov D. A. GCD calculation in the search task of pseudoprime and strong pseudoprime numbers // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2016. Том 37 № 6. С. 734-739.
4. Weber K. The accelerated integer GCD algorithm // Journal ACM Transactions on Mathematical Software. 1995. Том 25 № 1. С. 111-122.

УДК 519.688

Пользовательские рекурсивные функции в Maxima

Есаян А. Р. Россия, г. Тула, Тульский государственный педагогический университет имени Л. Н. Толстого
esayanalbert@mail.ru

User recursive functions in Maxima

A. R. Esayan Russia, Tula, State Lev Tolstoy Pedagogical University
esayanalbert@mail.ru

1. Введение

В последнее время школы и вузы по многим причинам вынуждены переходить на свободно распространяемое программное обеспечение (СПО). Среди математических пакетов несомненными лидерами здесь являются кроссплатформенные системы Maxima (WxMaxima) [1, 2, 3] и GeoGebra [4]. И хотя в Интернете по Maxima имеются немало доступных учебно-методических разработок, ряд важных вопросов описаны в них недостаточно полно или не совсем правильно. Например, это касается рекурсии, используемой в информатике как практически ориентированное знание с изящным и эффективным инструментарием для реальных вычислений. В настоящей заметке затрагивается весьма важный и интересный вопрос об особенностях создания пользовательских рекурсивных функций в Maxima и работе с ними. Делается это на различных вариантах наглядной и интересной задачи о разрезании прямоугольного параллелепипеда на кубы, используя те или правила.

2. Постановка задач

Пусть P – прямоугольный параллелепипед со сторонами x, y и z, длины которых являются натуральными числами. Не ограничивая общности можно считать $0 < x \leq y \leq z$. В докладе дается постановка 9 задач ($A1 - A4, B1 - B5$) на разрезание P на кубы. Во всех предлагаемых задачах требуется составить рекурсивную программу-функцию, по которой подсчитывается, сколько всего кубов или сколько всего и каких кубов с целыми сторонами можно вырезать из P, если руководствоваться теми или иными правилами. Эти правила и конкретизируются в упомянутых задачах, причем в любом случае на каждом шаге вырезается куб с наибольшей возможной стороной, то есть речь всегда идет о некотором жадном алгоритме [5].

Если прямоугольный параллелепипед P разрезан на кубы и N их количество, то

$$floor(y/x) * floor(z/x) \leq N \leq x \cdot y \cdot z.$$

Что касается нахождения минимального значения Nm для N, то в общем виде решение такой задачи, по-видимому, дело не простое. По крайней мере нам оно неизвестно. А результаты вычислений по приводимым ниже рекурсивным функциям для подсчета N по специальным правилам можно рассматривать как получение оценки сверху для Nm при конкретных P.

Отметим, что жадные алгоритмы разрезания P не всегда дают наименьшее значение для N. Пусть, например, рассматривается P со сторонами $6 \times 6 \times 5$. При разметке основания P, приведенной на рис. 1, разрезать P можно на $2 \times 2 + 3 \times 3 = 13$ кубов. Если же использовать жадный алгоритм, каждый раз вырезая куб с наибольшим возможным ребром, то получим $1 + 6 \times 5 + 5 \times 5 = 56$ кубов.

Приведем формулировки некоторых из упомянутых задач.

Задача А1. *Разрезания тела рис. 2 на 3 части.*

Составить рекурсивную программу-функцию для подсчета общего количества кубов, получаемых вырезанием их из параллелепипеда, если руководствоваться такими правилами:

1. параллелепипед и первый вырезаемый из него куб должны иметь общее ребро. Далее вырезается наибольшее возможное количество таких же кубов, как и в первый раз, если, конечно, это возможно. После выполнения первого пункта в общем случае от параллелепипеда останется тело в виде "уголка"(буквы "Г"), показанное на рис. 2. В нем части α, β и γ – прямые параллелепипеды, причем части α и γ, части β и γ, или все три части α, β и γ могут отсутствовать;
2. при наличии всех трех частей оставшееся тело разрежем на три части α, β и γ. При отсутствии только α или только β тело уже является прямым параллелепипедом. При отсутствии и α, и β нет и тела;
3. если во втором пункте получены параллелепипеды, то к каждому из них рекурсивно применим процедуры пунктов 1 и 2, в противном случае вырезать кубы уже не из чего и процесс завершен.

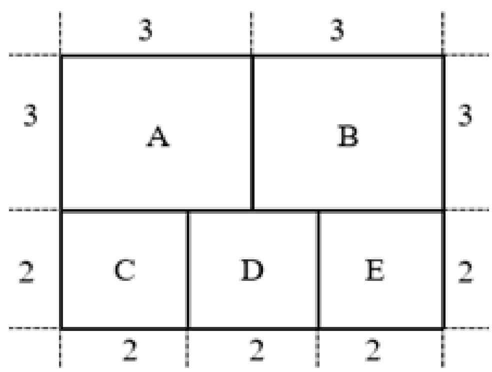


Рис. 7: Схема для разрезания на кубы параллелепипеда размером $5 \times 6 \times 6$

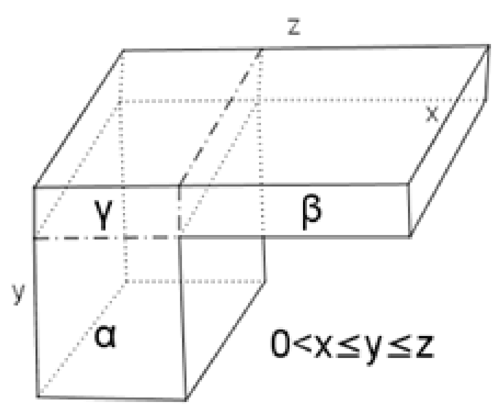


Рис. 8: Вырезание кубов из параллелепипеда размером $x \times y \times z$

Задача В1. *Разрезания тела рис. 2 на 3 части.*

Решим задачу А1, но результат должен быть возвращен в виде матрицы с двумя строками. В первой из них должны быть размещены длины сторон последовательно вырезаемых кубов, а во второй – их количество.

Например, по параллелепипеду со сторонами $a = 3$, $b = 6$ и $c = 8$ должны получить матрицу $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 12 \end{pmatrix}$

Задача А4. *Разрезания тела рис. 2 на 2 части.* Составить рекурсивную программу-функцию для подсчета общего количества кубов, получаемых вырезанием их из параллелепипеда, если руководствоваться такими правилами:

1. см. пункт 1 из А1;
2. при наличии обеих частей α и β исходный параллелепипед разрежем на две части, добавляя γ к α или γ к β случайным образом с помощью генератора псевдослучайных чисел. При наличии только α или только β тело уже является параллелепипедом. При отсутствии и α, и β нет и тела;
3. см. пункт 3 из А1.

Приведем код для решения лишь одной задачи – $A4$. Это блочная пользовательская симметрическая рекурсивная функция $cut4(x, y, z)$ с прямой рекурсией. Вычисления по $cut4$ для параллелепипеда P со сторонами $x = 17$, $y = 19$, $z = 77$ показали возможность разрезания P на 657 кубов.

3. Код к задаче А4

```
(%i43) cut4(x, y, z):=block([r, t],
       if x*y*z=0 then 0
       else ([x, y, z]:sort([x, y, z]),
       r:floor(y/x)*floor(z/x), t:oddp(random(ran)),
       if (t and mod(z, x) $\ge$ mod(y, x)) then
       (r:r+cut4(x, y, mod(z, x))+
                         cut4(x, mod(y, x), z-mod(z, x)))
                 else (r:r+cut4(x, y-mod(y, x), mod(z, x))+
                         cut4(x, mod(y, x), z))))$
```

Контрольные примеры

```
(%i50) s1:make_random_state(654321)$
       set_random_state(s1)$ ran:1101$
       a:17$ b:19$ c:77$ cut4(a, b, c)];
(%050) 657
```

Выводы. По набору возможностей система Maxima близка к таким коммерческим продуктам, как Mathematica и Maple. Она органично сочетает в себе числовые и символьные вычисления, обладает простым и удобным встроенным языком программирования с поддержкой как прямых, так и косвенных рекурсивных вычислений, и ее миграция в школы и вузы заслуживает всяческого поощрения.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Есаян А. Р., Чубариков В. Н., Добровольский Н. М., Якушин А. В. Maxima. Данные и графика. – Тула: Изд-во Тул. гос. пед. ун-та им. Л. Н. Толстого, 2011. -367 с.

2. Есаян А. Р., Чубариков В. Н., Добровольский Н. М., Якушин А. В. Программирование в Maxima. – Тула: Изд-во Тул. гос. пед. ун-та им. Л. Н. Толстого, 2012. -351 с.

3. http://maxima.sourceforge.net/ Maxima Manual. Version 5.41.0, 2018 г. -1154 с.

4. Есаян А. Р., Н. М. Добровольский, Е. А Седова, А. В. Якушин. Динамическая математическая образовательная среда GeoGebra/ Уч. пос., Ч. 1, Изд. центр Тулгоспедуниверситета, -2017, 417с.

—————————————————————————————

УДК 519.[172-178]

Комбинаторные и групповые свойства деревьев процессов Linux

Н. Н. Ефанов Российская Федерация, г. Долгопрудный, Московский физико-технический интститут (государственный университет)
nefanov90@gmail.com

Combinatorial and Group Properties of Linux Process Trees

N. N. Efanov Russian Federation, Dolgoprudnyy, Moscow Institute of Physics and Technology (State University)
nefanov90@gmail.com

Структуры данных, естественным образом возникающие в различных системах компьютерной инженерии, позволяют строить математические модели технических процессов из прямых принципов функционирования данных систем, открывая широкие возможности решения возникающих прикладных задач. Одной из таких задач является восстановление состояния исполняемой среды – виртуальной машины, контейнера, группы или выделенного процесса – с целью поддержки сохранения по контрольным точкам или живой миграции [1]. Целевой структурой одного из подходов к решению является дерево процессов операционной системы, в котором вершины описывают процессы, а рёбра – иерархические связи между ними (Рис. 9), а решением – поиск последовательностей системных вызовов, приводящих к данному дереву процессов [2, 3].

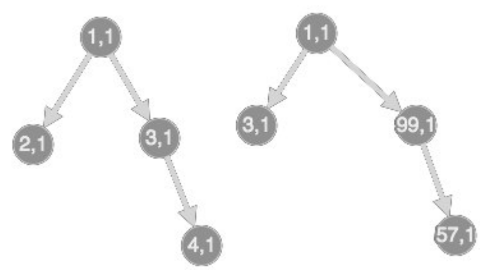


Рис. 9: Два функционально эквивалентных дерева процессов. Идентификаторы $< 1 >$, $< 2 >$ – идентификаторы процесса P, и сессии S соответственно. Корневой процесс всегда имеет идентификаторы “1,1”.

1. Оценки числа деревьев

Наиболее тривиальным подходом к восстановлению является прямое порождение нужного дерева процесса некоторым переборным алгоритмом. Целью данной работы является демонстрация сложности такого решения, ввиду комбинаторных оценок количества деревьев, а также выделение ключевых математических свойств дерева процессов, с рекомендацией целевых методов решения задачи.

Оценка количества различных деревьев процессов, поддерживающих системный вызов fork() приводится в работе [2]:

$$F(n) = \sum_{i=2}^{n-1} i^{i-2} \tag{1}$$

Данный результат в точности соответствует суммированию количества различных остовных деревьев на n вершинах, получаемых из формулы Кейли [2, 3, 4], с учётом одной выделенной вершины для корневого процесса. Данная работа не учитывает возможность прямой генерации деревьев со строгим соответствием идентификаторов процесса, сессии, группы и т.д. Тем не менее, простейший алгоритм генерации, без учёта особенностей задачи, будет считать различными функционально эквивалентные деревья, как на Рис. 9.

Утверждение 1. *Количество генерируемых деревьев процессов без рассмотрения функциональной эквивалентности равняется:*

$$F(n) = \sum_{i=2}^{n-1} \binom{2^{16}-2}{(i-1)} (i-1)! i^{i-2} \tag{2}$$

Доказательство.

Зафиксируем число процессов N. Учёт одного лишь идентификатора P влечёт за собой функциональную эквивалентность деревьев, полученных из некоторого произвольного дерева перестановкой идентификаторов P в вершинах, без учёта корневой. P может изменяться от 2 до 2^{16}, таким образом, выбор идентификаторов можно совершить $(2^{16}-2)!$ способами, а число способов назначить множество значений P $(N-1)$ – процессам равно числу размещений $(N-1)$ в $(2^{16}-2)$:

$$\binom{2^{16}-2}{(N-1)} (N-1)!$$

что в точности равно поправке из формулы (2) к формуле (1).

□

Таким образом, идентификаторы некорневых процессов образуют симметрическую группу S_{N-1}, что позволяет выполнять любые перестановки на множестве данных идентификаторов, а также применять алгоритмически эффективные структуры для их хранения [2, 3].

Рассмотрение идентификаторов сессии вносит поправку, также рассмотренную в работе [2]. Поправка на неразличимость функционально эквивалентных деревьев полученную ранее формулу как:

$$F(n) = \sum_{i=2}^{n-1} \binom{2^{16}-2}{(i-1)} (i-1)! i^{i-2} 2^{i-1} \sum_{j=0}^{2^{l-1}} 2^{(\mathbf{f}(j)\mathbf{k})}, \tag{3}$$

где $\mathbf{f}(j)$ – вектор-функция размерности l-количества уровней дерева, возвращающая j-й бинарный вектор в порядке инкрементального перечисления, $\mathbf{k}$ – вектор, составленный из суммарного количества потомков на уровнях $1 \ldots l$ соответственно.

Такая оценка числа деревьев говорит о неэффективности прямой генерации, что мотивирует поиск более строгих методов восстановления, к примеру, использование разбора деревьев в специальных грамматических формализмах, поддерживающих разбор контекста [2, 3, 5].

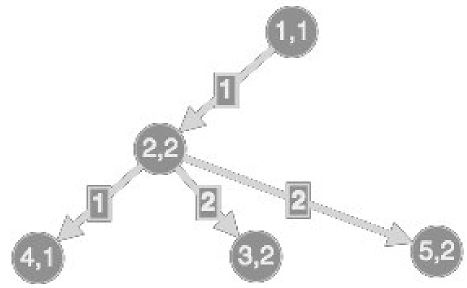


Рис. 10: Группировка процессов в сессии 1 и 2. Наследование демонстрируется значениями на рёбрах.

2. Группировка процессов и заключающие правила

В поддержку построения указанных выше способов восстановления деревьев, следует рассмотреть свойство группировки процессов в сессии: идентификатор S наследуется процессом от родителя, таким образом, сессия сохраняется, либо порождается новая (Рис. 10). Следовательно, при восстановлении цепочек системных вызовов требуется учитывать, порождён ли некоторый процесс от родительского состояния до выполнения setsid() или после. Простейшие правила проверки заключаются в восходящем поиске идентификатора сессии ребёнка по текущей ветви дерева: V_test.s in [V_above.s] ?== True. Подобные операции сравнения, как и свойства группировки процессов по атрибутам – группам процессов и пользователей, пространствам имён, свойственны деревьям процессов и мотивируют построение эффективных алгоритмов данных процедур.

3. Системный вызов exit() и удаление вершин из дерева процессов

При корректном завершении процесса информация о нём удаляется из системы, а процессы-потомки переупорядочиваются к корневому процессу как поддеревья [3]. Вопрос восстановления информации о завершенных процессах восходит к набору эвристических правил восстановления [3], и также рассматривается в работе.

4. Заключение

Описанные выше особенности выделяют ограничения и заключают свойства решения задачи восстановления цепочек системных вызовов формальными грамматиками системных вызовов, построение которых является ключевым подходом автора [2, 3].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Mirkin A., Kuznetsov A., Kolyshkin K. Containers checkpointing and live migration // Proceedings of the In Ottawa Linux Symposium. 2008. V. 2.

2. Ефанов Н. Н., Емельянов П. В. Построение формальной грамматики системных вызовов // М. Информационное обеспечение математических моделей. 2017. С. 83–90.

3. Efanov N. N., Emelyanov P. V. Constructing the formal grammar of system calls // In Proceedings of the 13th Central & Eastern European Software Engineering Conference in Russia (CEE-SECR'17). 2017. Article 12. 5 pages.

4. Cayley A. A theorem on trees.// Collected Mathematical Papers. 1897. V. 13, P. 26–28.

5. Kallmeyer L., Satta G. A polynomial-time parsing algorithm for TT-MCTAG // In Proceedings of the Joint Conference of the 47th Annual Meeting of the ACL and the 4th International Joint Conference on Natural Language Processing of the AFNLP. 2009. V. 2. P. 994–1002.

УДК 519.214+519.212.3

Предельные распределения экстремальных расстояний до ближайшего соседа

А. М. Зубков Россия, г. Москва, Математический институт им. В. А. Стеклова РАН
О. П. Орлов Россия, г. Москва, Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
zubkov@mi.ras.ru, olegorlov92@gmail.com

Limit distributions of extreme distances to the nearest neighbor

A. M. Zubkov Russia, Moscow, Steklov Mathematical Institute of RAS
O. P. Orlov Russia, Moscow, Moscow State University
zubkov@mi.ras.ru, olegorlov92@gmail.com

Введение

Пусть на метрическом пространстве (B, ρ) задана вероятностная мера Q, удовлетворяющая условию

$$Q\left(\{y \in B : \rho(y, x) \leqslant z\}\right) = w(z) \quad \text{для любого} \quad x \in B, \tag{1}$$

и $\xi_1, \ldots, \xi_n$ — независимые случайные элементы B с распределением Q. Естественными примерами таких мер являются равномерные распределения на многомерных сферах, торах и двоичных кубах.

Для каждого $i \in \{1, \ldots, n\}$ введём случайную величину $\zeta_i = \min_{j \neq i} \rho(\xi_i, \xi_j)$ — расстояние от точки ξ_i до ее ближайшего соседа. Пусть $\zeta_{(1)} \leqslant \ldots \leqslant \zeta_{(n)}$ — вариационный ряд, составленный из величин $\zeta_1, \ldots, \zeta_n$. Тогда величина $\phi_n = \zeta_{(1)} = \min_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \rho(\xi_i, \xi_j)$ является минимальным попарным расстоянием между точками выборки (минимальным расстоянием до ближайшего соседа), а величина $\psi_n = \zeta_{(n)} = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \zeta_i$ является максимальным расстоянием до ближайшего соседа.

В докладе сформулированы теоремы о предельном распределении величин ϕ_n и ψ_n в случае произвольного метрического пространства и в случае двоичного куба. Доказательства основаны на методе Чена-Стейна и модификации метода моментов, предложенной Б. А. Севастьяновым [1].

Случайные величины, связанные с расстояниями до ближайших соседей для различных подпространств евклидова пространства (как правило, для многомерных торов), изучались многими авторами (см., например, [2, 3, 4, 5, 6]); расстояния до ближайших соседей используются при построении статистических критериев равномерности распределения (см., например, [7, 8, 9, 10]), в алгоритмах классификации, поиска и т. п.

Формулировки результатов

В теоремах 1 и 2 рассматриваются схемы серий, в которых при изменении параметра n могут изменяться пространство B, метрика ρ и мера Q.

Теорема 1. *Если* $C_n^2 w(r_n) \to \lambda \in (0, \infty)$ *при* $n \to \infty$, *то*

$$\mathsf{P}\left(\phi_n > r_n\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} e^{-\lambda}.$$

В формулировке следующей теоремы используется величина

$$L_2(z) = \inf_{\substack{x_1, x_2 \in B \\ \rho(x_1, x_2) \geqslant z}} Q\left(\bigcup_{i=1}^{2} \{y \in B : \rho(y, x_i) \leqslant z\}\right), \quad z \geqslant 0, \tag{2}$$

равная минимальной вероятностной мере объединения двух таких шаров радиуса z, что расстояние между их центрами больше z.

Теорема 2. *Пусть последовательность* r_n *такова, что выполнены условия:*
1) $n(1 - \omega(r_n))^n \to \lambda \in (0, +\infty)$ *при* $n \to \infty$,
2) $n^2(\omega(2r_n) - \omega(r_n))(1 - L_2(r_n))^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$
Тогда

$$\mathsf{P}(\psi_n \leqslant r_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} e^{-\lambda}.$$

Далее рассматривается случай двоичного куба. Пусть $\xi_1, \ldots, \xi_n$ — независимая равномерная выборка из $\{0,1\}^T$. Через $\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ обозначим метрику Хемминга, $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \{0,1\}^T$. Статистики ϕ_n и ψ_n определяются как во введении. Их можно использовать для проверки гипотезы о равновероятности и независимости элементов выборки $\xi_1, \ldots, \xi_n$.

Теорема 3. *Если* $n, T \to \infty$ *и* s_n *меняются так, что*

$$\frac{1}{2^T} \sum_{k=0}^{s_n} C_T^k = \frac{2\lambda}{n^2}(1 + o(1)),$$

то

$$\mathsf{P}(\phi_n > s_n) \to e^{-\lambda}.$$

Теорема 4. *Пусть* $n, T \to \infty$. *Если последовательность целых чисел* r_n *такова, что выполнены условия:*
1) $n\left(1 - \frac{1}{2^T}\sum_{k=0}^{r_n} C_T^k\right)^n \to \lambda \in (0, +\infty)$,
2) $r_n/T \to \alpha \in [0, 1/2)$,
то

$$\mathsf{P}(\psi_n \leqslant r_n) \to e^{-\lambda}.$$

Замечание. Если выполнены условия теоремы 4, то $\mathsf{P}(\psi_n \leqslant r_n - 1) \to 0$ и $\mathsf{P}(\psi_n \leqslant r_n + 1) \to 1$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Севастьянов Б. А.* Предельный закон Пуассона в схеме сумм зависимых случайных величин. — Теория вероят. и ее примен., **17**:4 (1972), 733-738.

2. *Silverman B., Brown T.* Short distances, flat triangles and Poisson limits. — J. Appl. Probab., **15** (1978), 815–825.

3. *Henze N.* The limit distribution for maxima of «weighted» r-th nearest-neighbor distances. — J. Appl. Prob., **19** (1982), 344–354

4. *Penrose M. D., Yukich J. E.* Laws of large numbers and nearest neighbor distances. — Advances in Directional and Linear Statistics, Berlin: Physica-Verlag HD, 2011, 189–199

5. *Baryshnikov Yu., Penrose M. D., Yukich J. E.* Gaussian limits for generalized spacings. — Ann. Appl. Probab., **19**:1 (2009), 158-185

6. *Barbour A. D., Lars Holst, Svante Janson.* Poisson Approximation. — Clarendon Press, Oxford, 1992. pp. 144-148.

7. *Bickel P. J., Breiman L.* Sums of functions of nearest neighbor distances, moment bounds, limit theorems and a goodness of fit test. — Ann. Probab., **11**:1 (1983), 185–214

8. *Schilling M. F.* Goodness of fit testing in R^m based on the weighted empirical distribution of certain nearest neighbor statistics. — Ann. Statist., **11**:1 (1983), 1–12

9. *Schilling M. F.* An infinite-dimensional approximation for nearest neighbor goodness of fit tests. — Ann. Statist., **11**:1 (1983), 13–24

10. *L'écuyer P., Cordeau J.-F., Simard R.* Close-point spatial tests and their application to random number generators. — Oper. Res., **48**:2 (2000) 308–317

—————————————————————————————

УДК 512.77

Алгоритм построения кривых, возникающих из геометрических кодов Гоппы

Ю. С. Касаткина Россия, г. Калининград, Российская академия народного хозяйства и государственной службы при Президенте РФ (Западный филиал)
А. С. Касаткина Россия, г. Калининград, Российская академия народного хозяйства и государственной службы при Президенте РФ (Западный филиал)
yuliya_kasatkina@list.ru, kasatkina_ana@mail.ru

On algorithm for constructing curves arising from geometrical Goppa Codes

Yu. S. Kasatkina Russia, Kaliningrad, Russian Presidential Academy of National Economy and Public Administration
A. S. Kasatkina Russia, Kaliningrad, Russian Presidential Academy of National Economy and Public Administration
yuliya_kasatkina@list.ru, kasatkina_ana@mail.ru

В работе описан алгоритм построения кривых, соответствующих подкодам малого веса кода Гоппы $C_L(D, aP_\infty)$, определенного над конечным полем F_p.

Линейный код Гоппы над конечным полем определяется следующим образом. Пусть C – абсолютно неприводимая гладкая проективная кривая над полем F_p. Пусть $P_1, \ldots, P_n$ – различные F_p-рациональные точки на C и дивизор $D = P_1 + \ldots + P_n$. Дивизор G такой, что носители G и D не пересекаются. Линейное пространство

$$L(G) = \{f \in F_p(C)^* \,|(f) + G \geqslant 0\} \cup \{0\}$$

порождает линейное отображение

$$Ev : L(G) \to F_p^n, \quad f \mapsto (f(P_1), \dots, f(P_n)).$$

Образ этого отображения есть линейный $[n,k]$-код $C_L(D,G)$ над конечным полем F_p.

Первый шаг алгоритма связан с построением подкода малого веса. Способ построения такого кода описан в работе [1]. Пусть D_r – r-мерный подкод рационального кода Гоппы $C_L(D, aP_\infty)$ носитель которого удовлетворяет условию

$$|\chi(D_r)| = d_r(C_L(D, aP_\infty)).$$

Следующий шаг связан с построением векторного пространства U такого что

$$Tr_{Con(D)}(U) = \left\{ Tr_{Con(D)}(R) \,|R \in U \right\} = D_r,$$

где Tr – отображение следа $Tr : F_{p^m} \to F_p$. Элементам базиса c_{R_i} подкода D_r поставим в соответствие кривые Артина-Шрайера C_{R_i} с аффинным уравнением

$$y_i^p - y_i = R_i(x), 1 \le i \le r,$$

здесь элемент $R_i(x) \in U$ соответствует слову c_{R_i} [3].

Подкоду D_r поставим в соответствие кривую C_{D_r} над полем F_{p^m}, задаваемую расслоенным произведением кривых C_{R_i}.Таким образом, подкоду наименьшего веса соответствует кривая над полем F_{p^m}.

Проиллюстрируем работу алгоритма на примере. Рассмотрим геометрический код Гоппы $C_L(D, 3P_\infty)$ над полем F_5 с порождающей матрицей

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 4 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Длина этого кода равна 5, размерность – 4, минимальное расстояние равно двум.

Пусть D_1 – одномерный подкод кода $C_L(D, 3P_\infty)$ на котором достигается первый обобщенный вес Хемминга [4]. В данном случае этот вес равен двум. Код D_1 порождается кодовым словом $c_1 = (0,0,0,1,4)$. Элементу c_1 соответствует многочлен

$$R_1(x) = 2x^{11} + 4x^7 + 3x^6 + 2x^3 + 3x^2 + x + \alpha^{15}$$

такой, что $Tr_{Con(D)}(R_1) = c_1$. Элемент α здесь такой, что $F_5(\alpha) \cong F_{5^2}$.

Таким образом, кодовому слову $(0,0,0,1,4)$ соответствует кривая Артина-Шрайера C_{R_1} над полем F_{5^2} с аффинным уравнением

$$y^5 - y = 2x^{11} + 4x^7 + 3x^6 + 2x^3 + 3x^2 + x + \alpha^{15}.$$

Род этой кривой равен 20 [2]. Редукция степени многочлена R_1 может привести к кривой рода 4 над полем F_{5^2}, на которой существует 36 рациональных точек.

Второй обобщенный вес Хемминга равен трем. Двумерный подкод D_2, носитель которого удовлетворяет условию $|\chi(D_2)| = d_2(C_L(D, 3P_\infty))$, порождается матрицей

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Подкоду D_2 поставим в соответствие кривую C_{D_2} над полем F_{5^2}, задаваемую расслоенным произведением кривых

$$\begin{aligned} y^5 - y &= 2x^{11} + 4x^7 + 3x^6 + 2x^3 + 3x^2 + x + \alpha^{15}, \\ y^5 - y &= 2x^{11} + 4x^7 + 2x^3 + 3x + \alpha^{15}. \end{aligned}$$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Касаткина Ю.С., Касаткина А.С. О конструкции кривой, соответствующей подкоду наименьшего веса рационального кода Гоппы //Вестник Волгоградского государственного университета. Серия 1, Математика. Физика. 2016. №4(35). С. 75-83.

2. Касаткина Ю.С., Касаткина А.С. Анализ рода кривой, соответствующей подкоду наименьшего веса рационального кода Гоппы //Вестник Волгоградского государственного университета. Серия 1, Математика. Физика. 2014. №4(23). С. 6-10.

3. Касаткина Ю.С., Касаткина А.С. О представлении подкодов рационального кода Гоппы в виде след-кода // XIII Международная конференция «Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы и приложения», посвященной восьмидесятипятилетию со дня рождения профессора Сергея Сергеевича Рышкова.: материалы конференции. Тульский государственный педагогичекий университет им. Л.Н. Толстого. 2015. С. 195-199.

4. Wei V.K. Generalized Hemming Weights for Linear Codes // IEEE Trans.Inform. Theory. 1991. V.37. P. 1412-1418.

УДК 519.17

Бесконечные серии простых обобщённых графов де Брейна

Ф. М. Малышев Москва, Математический институт им. В. А. Стеклова РАН
malyshevfm@mi.ras.ru

Infinite series of simple generalized de Brein graphs

F. M. Malyshev Moscow, Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences
malyshevfm@mi.ras.ru

Граф де Брейна на $n = m^r$ вершинах, $n > 1$, $r \geqslant 1$, является графом переходов состояний неавтономного автомата в виде регистра сдвига на r ячеек, в каждой ячейке которого может содержаться элемент конечного алфавита X, $|X| = m$. При входе $\varepsilon \in X$ состояние автомата $(x_1, \dots, x_r) \in S = X^r$ за один такт переходит в состояние $(\varepsilon, x_1, \dots, x_{r-1})$. Широкое распространение этот автомат получил, в частности, благодаря его свойству *быстрого обновления*, состоящего в том, что из любого начального состояния $\left(x_1^{(0)}, \dots, x_r^{(0)}\right)$ за минимально возможное число тактов $r = \left\lceil \log_{|X|} |S| \right\rceil$ при независимых равновероятных входах $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r)$ автомат может оказаться в любом состоянии из S с одной и той же вероятностью $\frac{1}{|S|}$. Другие автоматы со свойством *быстрого обновления* можно строить с помощью обобщённых графов де Брейна или, кратко, ∂-графов.

Определение 1. *Ориентированный граф Γ на n вершинах, $n > 1$, называется ∂-графом порядка $r \geqslant 1$, если для любой пары его вершин существует единственный направленный путь длины r из одной вершины в другую.*

При $r = 1$ ∂-граф – это полный граф на n вершинах вместе с петлями на каждой вершине. Из определения 1 следует, что ∂-граф сильно связен, в ∂-графе не может быть двух различных направленных путей длины $l \leqslant r$ с общим началом и концом, в частности, исключены параллельные дуги и две петли на одной вершине. Каждая вершина в ∂-графе содержится на единственном ориентированном цикле, длина которого делит r. Эти циклы не пересекаются. Дуги, несодержащиеся на этих циклах, будем представлять пунктирными стрелками. Если в ∂-графе Γ порядка r у всех дуг поменять направление на противоположное, то получится тоже ∂-граф порядка r, обозначаемый как $\overline{\Gamma}$. Двойственный ∂-графу Γ порядка r граф Γ^+ (см. [1]) будет ∂-графом порядка $r+1$. Напомним, что в графе Γ^+ вершинами являются дуги графа Γ и в Γ^+ есть дуга из вершины e_1 в вершину e_2 тогда и только тогда, когда в Γ конец дуги e_1 совпадает с началом дуги e_2. Граф де Брейна на m^r вершинах является двойственным к графу де Брейна на m^{r-1} вершинах.

Определение 2. *∂-граф Γ порядка $r > 1$ называется **простым**, если он не изоморфен Γ_1^+ ни для какого ∂-графа Γ_1 порядка $r-1$.*

Под окрестностью $\Gamma(v)$ вершины v ориентированного графа Γ будем понимать множество концов всех дуг, исходящих из v. Если в ориентированном графе Γ для любой пары вершин их окрестности либо совпадают, либо не пересекаются, то будем говорить, что в графе Γ выполнено $\mathcal{N}$-свойство. Из приводимой далее теоремы 2 работы [2] будет следовать, что ∂-граф Γ порядка r является простым тогда и только тогда, когда для него $\mathcal{N}$-свойство не выполняется, то есть найдётся пара вершин v_1, v_2, для которых $\Gamma(v_1) \cap \Gamma(v_2) \neq \varnothing$ и $\Gamma(v_1) \neq \Gamma(v_2)$. Из теоремы 2 следует также, что ∂-граф Γ простой тогда и только тогда, когда граф $\overline{\Gamma}$ простой.

Приведём две теоремы из работы [2].

Теорема 1. [2]. *Пусть Γ – ∂-граф порядка $r \geqslant 1$. Тогда: число $n > 1$ вершин графа Γ есть r-я степень целого числа $m > 1$; из каждой вершины Γ выходит ровно m дуг; в каждую вершину Γ входит ровно m дуг; число петель в Γ равно m.*

Теорема 2. [2]. *Пусть Γ – ∂-граф порядка $r > 1$, обладающий $\mathcal{N}$-свойством. Тогда существует и единственный с точностью до изоморфизма ∂-граф $\Gamma_1 = \Gamma^-$ порядка $r-1$, для которого $\Gamma_1^+ \cong \Gamma$.*

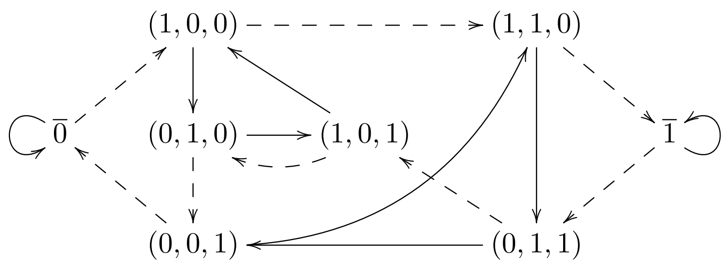
В свете теоремы 1 множество вершин ∂-графа порядка r представляется в виде X^r, $|X| = m$, а дугами являются $(x_1, \dots, x_r) \to F(x_1, \dots, x_r, \varepsilon)$, $\varepsilon, x_1, \dots, x_r \in X$, для некоторого отображения $F\colon X^{r+1} \to X^r$. Требования определения 1 равносильны тому, что отображение $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r) \mapsto F(F(\dots F(F(x_1, \dots, x_r, \varepsilon_1), \varepsilon_2), \dots, \varepsilon_{r-1}), \varepsilon_r)$ является биекцией множества X^m при любых $x_1, \dots, x_r \in X$.

Далее считаем $m = 2$. Тогда по определению 1 для каждой вершины есть ровно одна входящая пунктирная дуга и ровно одна исходящая пунктирная дуга. В результате каждому ∂-графу Γ порядка r на $n = 2^r$ вершинах ставится в соответствие две подстановки π_0, π_1 степени n, для π_0 цикловую структуру образуют сплошные дуги, а для π_1 – пунктирные дуги. По определению 1 у подстановки π_0 длины циклов являются делителями r, длины циклов подстановки π_1 не могут быть делителями r. По теореме 1 при $m = 2$ у ∂-графа порядка $r \geqslant 1$ не может быть более двух автоморфизмов, поскольку имеется ровно 2 петли, а пунктирность дуги является инвариантом.

При $r = 2$ простых ∂-графов на $n = 4 = 2^2$ вершинах нет. На 4-х вершинах имеется только граф де Брейна, который не является простым. Действительно по теореме 1 при $n = 4$ для ∂-графа порядка 2 у подстановки π_0 два цикла длины 1 и один цикл длины 2. Подстановка π_1 может быть только полноцикловой, состоящей из одного цикла длины 4. Этим граф Γ определяется однозначно.

Теорема 3. *При $r = 3$ на $n = 8 = 2^3$ имеются ровно два неизоморфных простых ∂-графа порядка 3, получающиеся один из другого изменением направлений дуг.*

На 8 вершинах, тем самым, имеется ровно 3 неизоморфных ∂-графа порядка 3: два простых и граф де Брейна. Один простой ∂-граф G_3 из теоремы 3 представлен на рисунке. Параметризация вершин



на рисунке векторами из $V_3 = GF(2)^3$ учитывает близость графа G_3 с графом де Брейна. (На рисунке $\overline{0} = (0,0,0)$, $\overline{1} = (1,1,1)$.) У графа де Брейна из вершины $(x_1, x_2, x_3) \in V_3$ выходят дуги в вершины (ε, x_1, x_2), $\varepsilon \in GF(2)$. У графа G_3 из вершины $(x_1, x_2, x_3) \in V_3$ выходят дуги в вершины $(\varepsilon, x_1 + \varepsilon(x_2+1)x_3, x_2)$, $\varepsilon \in GF(2)$. Аналогом этого графа для всех $r \geqslant 3$ будет граф G_r на множестве $GF(2)^r$ с дугами $(x_1, \dots, x_r) \to (\varepsilon, x_1 + \varepsilon(x_{r-1}+1)x_r, x_2, \dots, x_{r-1})$, $\varepsilon, x_1, \dots, x_r \in GF(2)$.

Теорема 4. *Для всех $r \geqslant 3$ графы G_r и $A_r = \overline{G}_r$ являются простыми не изоморфными ∂-графами порядка r.*

Дугами графа A_r, $r \geqslant 3$, являются $(x_1, \dots, x_r) \to (\varepsilon, x_1, \dots, x_{r-2}, x_{r-1} + \varepsilon(x_1+1)x_r)$. Последнее указывает на возможность получения простых ∂-графов порядка r в классе ориентированных графов на множестве вершин $GF(2)^r$ с дугами $(x_1, \dots, x_r) \to (\varepsilon, x_1, \dots, x_{r-2}, g(\varepsilon, x_1, \dots, x_r))$, где $g\colon GF(2)^{r+1} \to GF(2)$ – булева функция.

Теорема 5. *Пусть булева функция $f\colon GF(2)^{r-1} \to GF(2)$ существенно зависит от первой пременной и удовлетворяет тождеству $f(y_1, \dots, y_{r-1})f(y_2, \dots, y_r) \equiv 0$ для всех $y_1, \dots, y_r \in GF(2)$. Тогда ориентированный граф Γ_f на множестве вершин $GF(2)^r$ с дугами $(x_1, \dots, x_r) \to (\varepsilon, x_1, \dots, x_{r-2}, x_{r-1} + f(\varepsilon, x_1, \dots, x_{r-2})x_r$, $\varepsilon, x_1, \dots, x_r \in GF(2)$, будет простым ∂-графом порядка r.*

При $r = 4$ условию теоремы 5 удовлетворяют только 4 функции f: $f_0 = (\varepsilon+1)x_1$, $f_1 = \varepsilon(x_1+1)$, $f_2 = \varepsilon x_1 + \varepsilon x_2 + x_1 x_2 + \varepsilon$, $f_3 = \varepsilon x_1 + \varepsilon x_2 + x_1 x_2 + x_2$. Эти функции удовлетворяют условиям теоремы 5 при всех $r \geqslant 4$. Графы Γ_{f_1}, Γ_{f_2}, Γ_{f_3} обозначим соответственно как A_r, B_r, C_r. Граф Γ_{f_0} изоморфен графу A_r. Изоморфизм $A_r \to \Gamma_{f_0}$ задаётся отображением $(x_1, \dots, x_r) \mapsto (x_1+1, \dots, x_{r-1}+1, x_1 x_2 + x_1 + x_r + 1)$. У графов A_r, $r \geqslant 3$, нетождественных автоморфизмов нет, в чём убеждаемся анализом подграфов в небольших окрестностях петель. Автоморфизмы графов B_r и C_r задаются, соответственно, отображениями $(x_1, \dots, x_r) \mapsto (x_1+1, \dots, x_{r-1}+1, x_r + x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 + x_1 + 1)$, $(x_1, \dots, x_r) \mapsto (x_1+1, \dots, x_{r-1}+1, x_r + x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 + x_3 + 1)$.

Теорема 6. *При всех $r \geqslant 4$ простые ∂-графы порядка r A_r, B_r, C_r, $\overline{A}_r$, $\overline{B}_r$, $\overline{C}_r$ не изоморфны друг другу.*

В справедливости теоремы 6 почти во всех случаях можно убедиться путём анализа подграфов в небольших окрестностях петель. Основную сложность в этой теореме представляет доказательство неизоморфности сильно похожих графов C_r и $\overline{C}_r$, особенно при чётном r. Привлекаются минимальные по длине направленные пути, соединяющие петлю с вершинами цикла длины 2, и особенности графов в небольшой окрестности этого цикла.

Следствие 1. *При $r \geqslant 3$ число неизоморфных ∂-графов порядка r на 2^r вершинах не меньше чем* $6r - 15$.

Если $r = r_1 r_2$, то по ∂-графу порядка r на m^r вершинах строится ∂-граф порядка r_2 на тех же $m^r = (m^{r_1})^{r_2}$ вершинах. Благодаря этому подстановки $\pi_0^{r_1}$ представленных в следствии 1 ∂-графов могут использоваться в качестве коммутаций SP-сетей, обеспечивающих наиболее быстрый лавинный эффект [3].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Холл М. Комбинаторика. —М.: Мир, 1970. 421 с.

2. Малышев Ф. М., Тараканов В. Е. Обобщённые графы де Брейна. // Математические заметки. 1997. Том 62 № 4. С. 540-548.

3. Ерохин А. В., Малышев Ф. М., Тришин А. Е. Многомерный линейный метод и показатели рассеивания линейной среды шифрпреобразований. // Математические вопросы криптографии. 2017. Том 8 № 4. С. 29-62.

———————————————————————————

УДК 512.552.7, 519.725

Групповые коды малой размерности[1]

В. Т. Марков Россия, Москва, Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
markov@mech.math.msu.su

Group codes of low dimension

V. T. Markov Russia, Moscow, M. V. Lomonosov Moscow State University
markov@mech.math.msu.su

Представленные в данном сообщении результаты получены коллективом авторов: К. Гарсиа Пильядо, С. Гонсалес, К. Мартинес (Овьедо), О. В. Маркова, В. Т. Марков (Москва).

Все рассматриваемые в данном сообщении поля и группы — конечные.

В [1] дано следующее определение группового кода, не зависящее от нумерации элементов группы.

Определение 1 ([1]). *Пусть G - группа порядка n. Код $\mathcal{C}$ длины n над полем F называется G-кодом, если существуют идеал I группового кольца FG и биекция $\sigma : \{1, \ldots, n\} \to G$, такие, что*

$$\mathcal{C} = \{(a_1, \ldots, a_n) \in F^n : a_1\sigma(1) + \ldots + a_n\sigma(n) \in I\}. \tag{1}$$

Мы также будем говорить, что код $\mathcal{C}$ и идеал I, связанные соотношением (1), *перестановочно эквивалентны.*

Это определение позволяет рассматривать один и тот же код как групповой код для различных групп одновременно. В частности, было предложено

Определение 2 ([1]). *Код $\mathcal{C}$ длины n над полем F называется абелевым групповым кодом, если он является A-кодом над F для некоторой абелевой группы A порядка n.*

Для некоторых некоммутативных групп G все G-коды оказываются абелевыми. В частности, справедлива

Теорема 1 ([1]). *Если G — конечная группа, и G является произведением двух абелевых подгрупп в смысле [2], т.е.*

$$G = AB = \{ab : a \in A, b \in B\}$$

для некоторых абелевых подгрупп A, B группы G, то любой G-код является абелевым.

[1]Работа поддержана грантом РФФИ № 17-01-00895.

Первые примеры неабелевых S_4-кодов были построены в [3] с существенным использованием компьютера.

Позже были получены новые примеры неабелевых групповых кодов, и в [4] было высказано предположение, что над любым конечным полем характеристики $p > 2$ существует неабелев $\mathrm{SL}_2(\mathrm{GF}(3))$-код размерности 4. Эта гипотеза была доказана в [5].

С другой стороны, интересно определить, какова минимальная размерность неабелева группового кода. Первый шаг в этом направлении сделан в [1], где было показано, что одномерные групповые коды являются абелевыми.

В настоящем сообщении представлен следующий результат в этом направлении.

Теорема 2. *Если G — конечная группа и F — конечное поле, то любой G-код размерности $d < 4$ над F является абелевым, т.е. 4 — наименьшая возможная размерность неабелева группового кода.*

Доказательство теоремы 2 основано на следующих замечаниях.

Пусть здесь и далее F — поле, G — группа. Для любого идеала I группового кольца FG введём обозначения $\varphi_I : G \to GL(I)$ и $\psi_I : G \to GL(I)$ для представлений группы G левыми и правыми умножениями на I:

$$\forall g \in G, v \in I, \quad \varphi_I(g)(v) = gv,\ \psi_I(g)(v) = vg^{-1}.$$

Если N — подгруппа группы G и $N \subseteq \ker \varphi_I$ (соответственно, $N \subseteq \ker \psi_I$), то будем говорить, что N *действует на I тривиально* слева (соответственно, справа).

Лемма 1. *Пусть G, H — две группы одинакового порядка. Допустим, что существуют нормальные подгруппы $N \lhd G$ и $K \lhd H$ такие, что $G/N \cong H/K$. Если $I \lhd FG$ и N действует на I тривиально слева или справа, то идеал I перестановочно эквивалентен некоторому H-коду.*

Из теоремы 1 и леммы 1 легко вытекает

Следствие 1. *Если N — нормальная подгруппа группы G, $I \lhd FG$, N действует на I тривиально слева или справа и группа G/N является произведением двух абелевых подгрупп, то идеал I перестановочно эквивалентен некоторому абелеву групповому коду.*

Основная часть доказательства состоит в проверке следующего утверждения:

Предложение 1. *Если $\dim(I) \leq 3$, то по крайней мере одна из групп $\varphi_I(G)$, $\psi_I(G)$ является произведением двух абелевых подгрупп.*

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Bernal J. J., del Río Á., Simón J.J. An intrinsical description of group codes // Designs, Codes and Cryptography. 2009. Vol. 51 № 3. P. 289–300.

2. Itô N. Über das Produkt von zwei abelschen Gruppen, // Mathematische Zeitschrift. 1955. Vol. 62. P. 400–401.

3. Гарсиа Пильядо К., Гонсалес С., Марков В. Т., Мартинес К., Нечаев А. А. Когда все групповые коды некоммутативной группы абелевы (вычислительный подход)? // Фундаментальная и прикладная математика. 2011–2012. Том 17 № 2. С. 75–85.

4. Марков В. Т. Абелевы и неабелевы групповые коды над некоммутативными группами // Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения, Материалы XII Международной конференции, посвященной 80-летию профессора Виктора Николаевича Латышева (Тула, 21-25 апреля 2014 г.) — Тула: Издательство ТГПУ им. Л.Н.Толстого, 2014. С. 200–203.

5. Гарсиа Пильядо К., Гонсалес С., Марков В. Т., Мартинес К. Неабелевы групповые коды над произвольным конечным полем // Фундаментальная и прикладная математика. 2015. Том 20 № 1. С. 17–22.

———————————————————————————————

УДК 514.172.45

О числе граней многогранников Гельфанда–Цетлина

Е. В. Мелихова Россия, г. Москва, Национальный Исследовательский Университет «Высшая школа экономики»
emelihova@hse.ru

On the number of faces of Gelfand–Zetlin polytopes

E. V. Melikhova Russia, Moscow, National Research University «High School of Economics»
emelihova@hse.ru

Пусть $\lambda_1 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_s$ — неубывающая конечная последовательность действительных чисел. Рассмотрим треугольную таблицу

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\lambda_1 & & \lambda_2 & & \lambda_3 & & \lambda_4 & & \ldots & & \lambda_s \\
& u_{1,1} & & u_{1,2} & & u_{1,3} & & \ldots & & u_{1,s-1} & \\
& & u_{2,1} & & u_{2,2} & & \ldots & & u_{2,s-2} & & \\
& & & \ddots & \ddots & \vdots & \ddots & \ddots & & & \\
& & & & u_{s-2,1} & & u_{s-2,2} & & & & \\
& & & & & u_{s-1,1} & & & & &
\end{array} . \qquad (1)$$

Будем считать, что каждые три символа $a,\ b,\ c$, которые в таблице стоят в вершинах треугольника

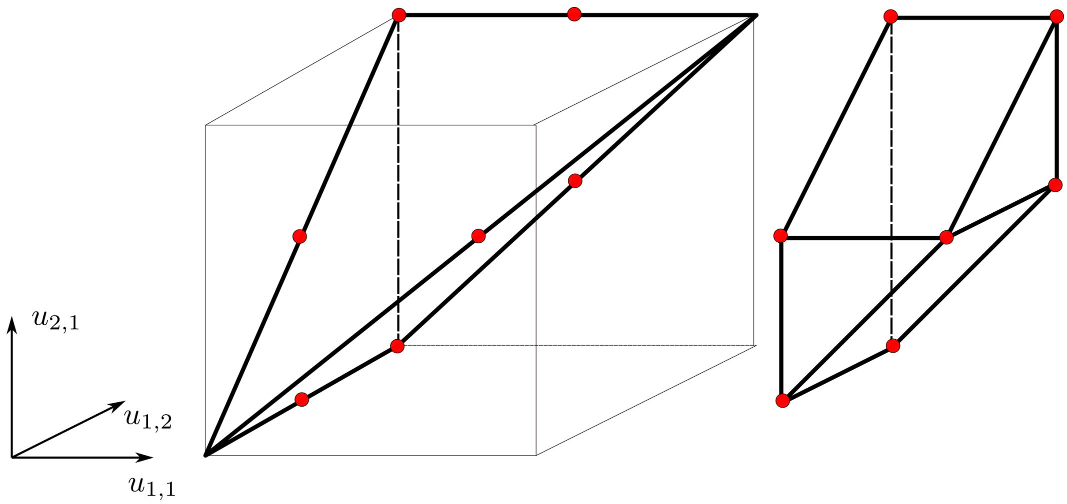
$$\begin{array}{ccc} a & & c \\ & b & \end{array},$$

связаны двойным неравенством: $a \leqslant b \leqslant c$. Тогда наша таблица даёт конкретный набор линейных неравенств, зависящих от λ_i, который определяет некоторый выпуклый многогранник в $\mathbb{R}^{\frac{s(s-1)}{2}}$. Заметим, что координаты $u_{i,j}$ в нашем случае занумерованы упорядоченной парой целых чисел $(i,\ j)$, где i пробегает значения от 1 до $s-1$, а j пробегает значения от 1 до $s-i$.

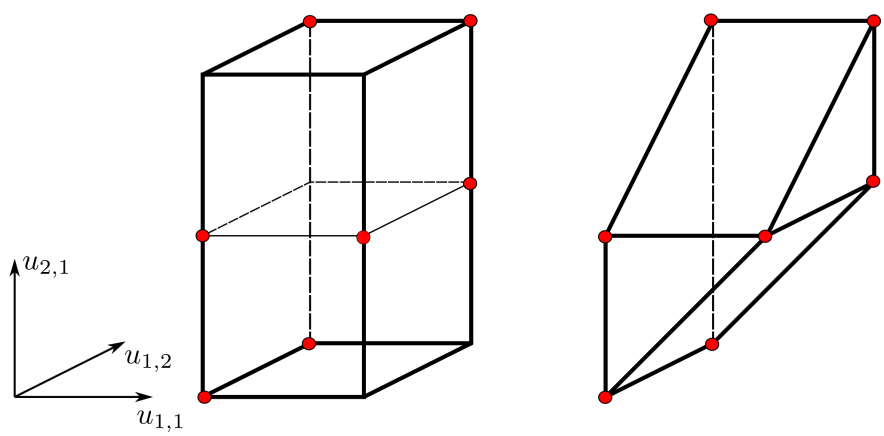
Этот выпуклый многогранник и называется *многогранником Гельфанда–Цетлина, соответствующим последовательности* $\lambda_1 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_s$. Обозначим его через $GZ(\lambda_1 \ldots \lambda_s)$.

Пример 2. *Построим многогранник $GZ(1\,2\,3)$. Выпишем соответствующую ему треугольную таблицу и систему линейных неравенств. Неравенства сгруппируем двумя способами, чтобы увидеть два различных способа построения многогранника, проиллюстрированных на рис. 11.*

$$\begin{array}{ccccc} 1 & & 2 & & 3 \\ & u_{1,1} & & u_{1,2} & \\ & & u_{2,1} & & \end{array} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \leqslant u_{1,1} \leqslant u_{2,1} \leqslant u_{1,2} \leqslant 3, \\ u_{1,1} \leqslant 2, \\ u_{1,2} \geqslant 2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \leqslant u_{1,1} \leqslant 2, \\ 2 \leqslant u_{1,2} \leqslant 3, \\ u_{1,1} \leqslant u_{2,1} \leqslant u_{1,2}. \end{cases}$$



а)



б)

Рис. 11: а) Многогранник $GZ(1\,2\,3)$, высеченный из симплекса; б) многогранник $GZ(1\,2\,3)$, высеченный из параллелепипеда.

Мы рассматриваем многогранники Гельфанда–Цетлина с точностью до комбинаторной эквивалентности. Напомним, что *решёткой граней* $L(P)$ многогранника P называют множество его граней, упорядоченное по включению, и что два многогранника P и P' называют *комбинаторно эквивалентными*, если их решётки граней изоморфны, то есть существует биекция $L(P)$ на $L(P')$, сохраняющая отношение включения.

Одной из важнейших характеристик класса комбинаторно эквивалентных многогранников является конечная последовательность $(f_0, f_1, \ldots, f_n)$, где n – размерность многогранника, f_i – число граней размерности i. Эта последовательность получила название *f-вектора*. Соответствующая производящая функция $f(t) = f_0 + f_1 \cdot t + \cdots + f_n \cdot t^n$ получила название *f-многочлена*. В некоторых случаях нам будет удобнее рассуждать на языке *h-многочлена*. Последний восстанавливается по f-многочлену однозначно, а именно: $h(s) := f(s-1) = \sum_{i=0}^{n} h_i s^i$, $h_i = \sum_{k=i}^{n} f_k (-1)^{k-i} \binom{k}{i}$. Конечную последовательность $(h_0, h_1, \ldots, h_n)$ называют *h-вектором* многогранника.

Перейдём к описанию полученных результатов.

Мы выводим рекуррентное соотношение на f-многочлен многогранника Гельфанда–Цетлина, пользуясь геометрическими свойствами линейной проекции на некоторый куб, впервые построенной в работе [1]. Ключевой момент состоит в том, что эта проекция настолько хороша, что каждая грань многогранника Гельфанда–Цетлина отображается на некоторую грань куба, и для каждой грани куба полный прообраз любой её внутренней точки комбинаторно эквивалентен некоторому многограннику Гельфанда–Цетлина. Полученное рекуррентное соотношение выражает f-многочлен исходного многогранника Гельфанда–Цетлина через f-многочлены многогранников, комбинаторно эквивалентных полным прообразам барицентров граней куба при рассматриваемой проекции.

Мы применяем найденное рекуррентное соотношение для исследования многогранников Гельфанда–Цетлина, соответствующих неубывающим последовательностям (12^k3), (123^k) и (223^k).

Основным результатом для многогранников $GZ(12^k3)$ является следующая

Теорема 1. *Компоненты h-вектора многогранника $GZ(1\,2^k\,3)$, имеющего размерность $2k+1$, имеют вид*

$$h_{2k+1} = 1,$$

$$h_i = \begin{cases} i+1, \text{ если } 0 \leqslant i \leqslant k+1; \\ 2k+3-i, \text{ если } k+1 < i \leqslant 2k. \end{cases} \quad (2)$$

Основным результатом для многогранников $GZ(123^k)$ и $GZ(223^k)$ является Теорема 2, которая даёт достаточно компактные формулы для h-многочленов многогранников $GZ(123^k)$ и $GZ(223^k)$; а также Следствие 1, которое по этим формулам находит производящие функции последовательностей $\{h_{GZ(123^k)}\}$ и $\{h_{GZ(223^k)}\}$.

Теорема 2. *Пусть последовательность $\{\Phi_k\}$ задаётся рекуррентным соотношением*

$$\Phi_{k+1} = (s^2+s)\cdot\Phi_k - s^2\cdot\Phi_{k-1} \quad (3)$$

с начальными условиями $\Phi_0 = 0$, $\Phi_1 = 1$ и $\Phi_{-1} = -\frac{1}{s^2}$. Тогда

А) формула для h-многочлена многогранника $GZ(1\,2\,3^k)$ имеет вид

$$h_{GZ(1\,2\,3^k)}(s) = \sum_{j=0}^{k} \frac{s^{j+2}-1}{s-1}\Phi_{k-j+1}; \quad (4)$$

Б) формула для h-многочлена многогранника $GZ(2^2\,3^k)$ имеет вид

$$h_{GZ(2^2\,3^k)}(s) = \sum_{j=0}^{k} s^{j+2}\Phi_{k-j} + \frac{s^{k+1}-1}{s-1}. \quad (5)$$

Следствие 1. *А) Замкнутая формула для производящей функций последовательности $\left(h_{GZ(1\,2\,3^k)}(s)\right)_{k=0}^{\infty}$ имеет вид*

$$H_{GZ(1\,2\,3^k)}(s,z) = \sum_{k=0}^{\infty} h_{GZ(1\,2\,3^k)}(s)z^k = \frac{-sz+s+1}{(1-z)(1-sz)(s^2z^2-(s^2+s)z+1)}; \quad (6)$$

Б) Замкнутая формула для производящей функции последовательности $\left(h_{GZ(2^2\,3^k)}(s)\right)_{k=0}^{\infty}$ имеет вид

$$H_{GZ(2^2\,3^k)}(s,z) = \sum_{k=0}^{\infty} h_{GZ(2^2\,3^k)}(s)z^k = \frac{-sz+1}{(1-z)(1-sz)(s^2z^2-(s^2+s)z+1)}. \quad (7)$$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Pavel Gusev, Valentina Kiritchenko, and Vladlen Timorin, Counting vertices in Gelfand–Zetlin polytopes // J. Combin. Theory Ser. A 120(2013), № 4, 960-969.

2. Мелихова Е.В., О числе граней многогранников Гельфанда–Цетлина [arXiv.org], arXiv: 1705.07074.

УДК 519.6+511+512

Алгоритм вычислений на ЭВМ решения системы линейных уравнений методом быстрых вращений

Е. А. Морозова Россия, г. Москва, Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
Н. Н. Ченцова Россия, г. Москва, Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
П. Н. Сорокин Россия, г. Москва, Федеральной государственное учреждение Федеральный научный центр Научно-исследовательский институт системных исследований РАН
nataly.chentsova@gmail.com, s_p_n_1974@bk.ru

Solving the system of linear equations by the computer algorithm of the method of fast rotation

E. A. Morozova Russia, Moscow, Lomonosov Moscow State University
N. N. Chentsova Russia, Moscow, Lomonosov Moscow State University
P. N. Sorokin Russia, Moscow, The Federal National Promotion The Federal Scientific Centre Science Research Institute of the System Analyze at Russian Academy of Science
nataly.chentsova@gmail.com, s_p_n_1974@bk.ru

Посвящается светлой памяти Н.С.Бахвалова, Н.М.Коробова, Н.Н.Ченцова

Дж.Уилкинсон в [1] поставил задачу об уменьшении погрешности вычисленного решения системы линейных уравнений методом плоских вращений [2] по сравнению с методом Гаусса с выбором максимального по модулю элемента по всей подматрице. В настоящей работе изучается метод быстрых вращений, предложенный авторами в [3], с целью минимизации такой погрешности. В [4] приведен похожий поиск для метода отражений.

Определение 1. *Пусть $n \in \mathbb{N}$ и пусть $A_k^{(n)} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ — квадратная матрица порядка n с матричными элементами $(A_k^{(n)})_{i,j} \in \mathbb{R}$ с индексами $i,j = \overline{1,n}$; $x^{(n)}$, $b_k^{(n)}$, $p_k^{(n)} \in \mathbb{R}^n$ — вектора-столбцы с координатами $(x^{(n)})_i$, $(b_k^{(n)})_i$, $(p_k^{(n)})_i \in \mathbb{R}$ с индексами $i = \overline{1,n}$. Алгоритм вычислений на ЭВМ решения системы линейных уравнений при $k = 0$:*

$$\sum_{1\le j\le n} (A_k^{(n)})_{i,j} \cdot (x^{(n)})_j = (b_k^{(n)})_i, \quad i = \overline{1,n} \tag{1}$$

методом быстрых вращений состоит из $2n-1$ шагов.
Опишем k-ый шаг при $k \in \overline{1,n-1}$. Сначала полагаем

$$A_k^{(n)} = A_{k-1}^{(n)}, \quad b_k^{(n)} = b_{k-1}^{(n)}, \quad p_k^{(n)} = p_{k-1}^{(n)}, \quad (p_0^{(n)})_i = i, \quad i = \overline{1,n}.$$

Все дальнейшие изменения матрицы $A_k^{(n)}$ локализованы внутри ее подматрицы, заданной индексами $i,j \in \overline{k,n}$. Пусть $js \in \overline{k,n}$ — номер столбца подматрицы $A_k^{(n)}$ с максимальной длиной и с максимальным по модулю элементом $(A_k^{(n)})_{ia,js}$, $ia \in \overline{k,n}$, при этой длине:

$$s_{js}^2 = \sum_{k \le t \le n} (A_k^{(n)})_{t,js}^2 = \max_{k \le j \le n} \sum_{k \le t \le n} (A_k^{(n)})_{t,j}^2.$$

$$|(A_k^{(n)})_{ia,js}| = \max_{k \le i \le n} |(A_k^{(n)})_{i,js}| = \max_{k \le i,j \le n} \{|(A_k^{(n)})_{i,j}| : \sum_{1 \le t \le n} (A_k^{(n)})_{t,j}^2 = s_{js}^2\}.$$

Если $s_{js} = 0$, то алгоритм заканчивает работу, напечатав "$\det(A_0^{(n)}) = 0$", иначе, если $js \neq k$, то переставляем столбцы матрицы $A_k^{(n)}$ с номерами js и k и координатами js и k вектора перестановок $p_k^{(n)}$. Если $ia \neq k$, то переставляем строки матрицы $A_k^{(n)}$ с номерами ia и k. Для всех $i,j = \overline{k,n}$ определим вектора:

$$(a_{k,j}^{(n)})_i = \begin{cases} 0, & i \in \overline{1,k-1}, \\ (A_k^{(n)})_{ij}, & (i,j) \in \overline{k,n}^2, \end{cases} \qquad (\hat{\mathbf{b}}_k^{(n)})_i = \begin{cases} 0, & i \in \overline{1,k-1}, \\ (b_k^{(n)})_i, & i \in \overline{k,n}, \end{cases}$$

$$\hat{\mathbf{a}}_{k,k}^{(n)} = ||a_{k,k}^{(n)}||_2^{-1} \cdot a_{k,k}^{(n)}, \quad (\hat{\mathbf{e}}_k^{(n)})_i = \begin{cases} sign((a_{k,k}^{(n)})_k), & i = k, \\ 0, & i \neq k. \end{cases}$$

Если вектор $a_{k,k}^{(n)}$ коллинеарен вектору $\hat{\mathbf{e}}_{k,k}^{(n)}$, то переходим к $k+1$ шагу. Иначе меняем значения $A_k^{(n)}$ и $b_k^{(n)}$ при $i,j = \overline{k,n}$:

$$(A_k^{(n)})_{ij} = (T_k^{(n)} a_{k,j}^{(n)})_i, \quad (b_k^{(n)})_i = (T_k^{(n)} \hat{\mathbf{b}}_k^{(n)})_i, \quad i,j = \overline{k,n},$$

используя расчетные формулы для вращения $T_k^{(n)}$:

$$T_k^{(n)} x^{(n)} = x^{(n)} + c_1 \cdot \hat{\mathbf{a}}_{k,k}^{(n)} + c_2 \cdot \hat{\mathbf{e}}_k^{(n)}, \quad T_k^{(n)} \hat{\mathbf{a}}_{k,k}^{(n)} = \hat{\mathbf{e}}_k^{(n)}. \tag{2}$$

$$c_1 = -((x^{(n)}, \hat{\mathbf{a}}_{k,k}^{(n)}) + (x^{(n)}, \hat{\mathbf{e}}_k^{(n)}))/(1 + |(\hat{\mathbf{a}}_{k,k}^{(n)})_k|), \quad c_2 = c_1 + 2(x^{(n)}, \hat{\mathbf{a}}_{k,k}^{(n)}). \tag{3}$$

$$(x^{(n)}, y^{(n)}) = \sum_{1 \le i \le n} (x^{(n)})_i \cdot (y^{(n)})_i, \quad ||x^{(n)}||_2 = (x^{(n)}, x^{(n)})^{1/2}.$$

Опишем k-ый шаг при $k \in \overline{n, 2n-1}$. Тогда $\hat{\mathbf{k}} = 2n - k \in n, ..., 1$:

$$(x^{(n)})_{\hat{\mathbf{k}}} = (b_{n-1}^{(n)})_{\hat{\mathbf{k}}} / (A_{n-1}^{(n)})_{\hat{\mathbf{k}},\hat{\mathbf{k}}} - \sum_{\hat{\mathbf{k}}+1 \le i \le n} ((A_{n-1}^{(n)})_{i,\hat{\mathbf{k}}} / (A_{n-1}^{(n)})_{\hat{\mathbf{k}},\hat{\mathbf{k}}}) \cdot (x^{(n)})_i.$$

Теорема 1. *Пусть $k \in \overline{1, n-1}$, матрица $A_k^{(n)}$ и вектор-столбец $b_k^{(n)}$ построены на k-ом шагу алгоритма метода быстрых вращений. Тогда решение системы линейных уравнений (1) совпадает с точностью до перестановки координат с решением системы линейных уравнений (1) при $k = 0$, если $\det(A_0^{(n)}) \neq 0$.*

Теорема 2. *В условиях определения 1 решение системы линейных уравнений (1) при $k = 0$ может быть получено с помощью $2n-1$ шагов алгоритма метода быстрых вращений, если $\det(A_0^{(n)}) \neq 0$.*

Теорема 3. *Пусть* $n > 2$ *и* $\exists r, m \in \overline{2,n}, r < m : (a^{(n)}_{1,1})_r \neq 0, (a^{(n)}_{1,1})_m \neq 0$. *Пусть* $Q^{(n)}_1$ — *суперпозиция* $n-1$ *плоских вращений, определенных в [2], переводящих вектор-столбец* $a^{(n)}_{1,1}$ *в вектор-столбец* $||a^{(n)}_{1,1}||_2 \cdot \hat{\mathbf{e}}^{(n)}_1$, *и* $T^{(n)}_1$ *определено формулами (2), (3) при* $k = 1$. *Тогда*

$$(Q^{(n)}_1 \hat{\mathbf{e}}^{(n)}_1)_r = -\frac{(A^{(n)})_{r1}}{\sqrt{\sum\limits_{1\le k\le r} (A^{(n)}_k)^2}} \neq (T^{(n)}_1 \hat{\mathbf{e}}^{(n)}_1)_r = -\frac{(A^{(n)})_{r1}}{\sqrt{\sum\limits_{1\le k\le n} (A^{(n)})^2_{k,1}}}.$$

Теорема 4. *Пусть* $k \in \overline{n+1, 2n-1}$ *и* $\hat{\mathbf{k}} = 2n - k \in n-1, ..., 1$. *Тогда в условиях определения 1 справедливо:*

$$\max_{\hat{\mathbf{k}}+1\le i\le n} |(A^{(n)}_{n-1})_{i,\hat{\mathbf{k}}} / (A^{(n)}_{n-1})_{\hat{\mathbf{k}},\hat{\mathbf{k}}}| \le 1, \quad |(A^{(n)}_{n-1})_{\hat{\mathbf{k}},\hat{\mathbf{k}}}| \ge |(A^{(n)}_{n-1})_{\hat{\mathbf{k}}+1,\hat{\mathbf{k}}+1}|.$$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Уилкинсон Дж. Алгебраическая проблема собственных значений. — М.: Наука, 1970. 564 с., Wilkinson J.H. The algebraic eigenvalue problem. Clarendon press, Oxford, 1965.

2. Givens W. Computation of plane initary rotations transforming a general matrix to triangular form. J. Soc. Industrial Appl. Math, 1958, 6, 26-50.

3. Сорокин П. Н., Ченцова Н. Н. Расчетные формулы для модифицированного метода вращений // 25-ая международная конференция "Математика. Компьютер. Образование": тезисы докладов. Международная конференция (Пущино, 29 января - 3 февраля 2018 г.) — Москва-Ижевск, 2018, С. 151.

4. Деммел Дж. Вычислительная линейная алгебра. — М.: Мир, 2001, 430 с..

УДК 511.528

Замечание о двоичных решениях некоторых систем алгебраических уравнений

А. В. Селиверстов Россия, г. Москва, Институт проблем передачи информации им. А. А. Харкевича Российской академии наук
slvstv@iitp.ru

Note on binary solutions to some systems of algebraic equations

A. V. Seliverstov Russia, Moscow, Institute for Information Transmission Problems of the Russian Academy of Sciences (Kharkevich Institute)
slvstv@iitp.ru

Рассмотрим $(0,1)$-решения системы алгебраических уравнений с целыми коэффициентами. Такие решения называются также двоичными или булевыми. Цель работы — сведение исходной системы уравнений к системе с меньшим числом уравнений так, чтобы максимальная степень уравнений не возрастала, а коэффициенты новых уравнений были целыми числами, абсолютные величины которых не слишком велики по сравнению с коэффициентами в исходных уравнениях.

Ограничение на степень уравнения существенно, поскольку любая система уравнений вида $\ell_k(\mathbf{x}) = 0$ эквивалентна над полем вещественных чисел одному уравнению $\sum_k \ell_k^2(\mathbf{x}) = 0$.

Ограничение на абсолютную величину коэффициентов тоже существенно, поскольку при достаточно быстро возрастающей последовательности чисел γ_k эта система имеет те же $(0,1)$-решения, что и одно уравнение $\sum_k \gamma_k \ell_k(\mathbf{x}) = 0$.

Теорема 1. *Дана система из m алгебраических уравнений $\ell_k(\mathbf{x}) = 0$, где числа $m > r > 0$. Пусть подсистема, состоящая из первых r уравнений $\ell_1(\mathbf{x}) = 0, \ldots, \ell_r(\mathbf{x}) = 0$ имеет не более μ избыточных $(0,1)$-решений, которые не служат решениями всей системы. Существуют такие целые числа $\gamma_{r+1}, \ldots, \gamma_m$ из отрезка от нуля до μ, что каждое $(0,1)$-решение новой системы алгебраических уравнений $\ell_1(\mathbf{x}) = 0, \ldots, \ell_r(\mathbf{x}) = 0$ и $\gamma_{r+1}\ell_{r+1}(\mathbf{x}) + \cdots + \gamma_m \ell_m(\mathbf{x}) = 0$ служит решением исходной системы.*

Доказательство.Если рассматриваемая подсистема не имеет $(0,1)$-решений или каждое $(0,1)$-решение подсистемы служит решением полной системы, то можно положить все искомые коэффициенты равными нулю: $\gamma_{r+1} = \cdots = \gamma_m = 0$.

Иначе определим подмножество множества всех $(0,1)$-точек

$$\mathcal{S} = \{\mathbf{x} \in \{0,1\}^n : \ell_1(\mathbf{x}) = 0 \wedge \cdots \wedge \ell_r(\mathbf{x}) = 0 \wedge (\exists k \leqslant m)\ell_k(\mathbf{x}) \neq 0\}.$$

Его мощность не превышает числа μ. Определим многочлен

$$f(y_{r+1}, \ldots, y_m) = \prod_{\mathbf{x} \in \mathcal{S}} \left(\sum_{k=r+1}^{m} \ell_k(\mathbf{x}) y_k \right)$$

Если множество $\mathcal{S}$ пустое, то полагаем $f = 1$, но этот случай уже рассмотрен в начале доказательства. Если некоторая последовательность чисел $\gamma_{r+1}, \ldots, \gamma_m$ достаточно быстро возрастает, то значение $f(\gamma_{r+1}, \ldots, \gamma_m)$ отлично от нуля. Следовательно, многочлен f не равен нулю тождественно. С другой стороны, выполнено неравенство $\deg f \leqslant \mu$. По лемме Шварца–Зиппеля [1], существуют искомые целые числа $\gamma_{r+1}, \ldots, \gamma_m$ из отрезка от нуля до μ.

□

Наиболее интересен случай, когда все уравнения линейные, абсолютные величины коэффициентов малы и первое уравнение имеет много $(0,1)$-решений, но почти каждое из них служит решением всей системы. Тогда исходная система сводится к одному линейному уравнению с малыми коэффициентами. Число всех его $(0,1)$-решений и некоторое $(0,1)$-решение можно вычислить за псевдополиномиальное время [2, 3]. Более точно, теорема позволяет свести эту систему линейных уравнений к системе двух уравнений. Переход от двух уравнений к одному, равному их линейной комбинации, приводит к относительно небольшому увеличению коэффициентов.

Требование, чтобы число μ было маленьким, существенно для практического применения рассмотренной сводимости, поскольку в общем случае задача распознавания существования некоторого $(0,1)$-решения у системы линейных уравнений с коэффициентами из множества $\{-1,0,1\}$ является NP-полной. С другой стороны, число μ является лишь верхней границей; не требуется знание точного значения разности чисел $(0,1)$-решений подсистемы и всей системы уравнений.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Schwartz J. T. Fast probabilistic algorithms for verification of polynomial identities // J. ACM 1980. Vol. 27, № 4. P. 701–717. doi:10.1145/322217.322225

2. Смолев В. В. Об одном подходе к решению булевого линейного уравнения с целыми положительными коэффициентами // Дискрет. матем. 1993. Т. 5, № 3. С. 81–89. Перевод: Smolev V. V. On an approach to the solution of a Boolean linear equation with positive integer coefficients // Discrete Math. Appl. 1993. Vol. 3, № 5. P. 523–530. doi:10.1515/dma.1993.3.5.523

3. Koiliaris K., Xu C. A faster pseudopolynomial time algorithm for subset sum // SODA '17 Proceedings of the Twenty-Eighth Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms, pp. 1062–1072. Society for Industrial and Applied Mathematics. Philadelphia, PA, USA, 2017.

———————————————————————————————————

УДК 511.32

Пути в дистанционных графах в конечномерных пространствах над конечным полем

Ю. Н. Штейников Россия, г. Москва, ФГУ ФНЦ НИИСИ РАН, МИАН им В. А. Стеклова
yuriishte@mail.ru

Paths in the distance graphs in vector spaces over finite fields

Yu. N. Shteinikov Rissia, Moscow, SRISA, Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences
yuriishte@mail.ru

Пусть $E \subset \mathbb{F}_q^d$ некоторое подмножество векторного пространства размерности $d-$ над конечным полем из q элементов. Мы определяем дистанционный граф на множестве вершин E так: две вершины x, y из E соединены ребром если $\| x - y \| = (x_1 - y_1)^2 + \ldots + (x_d - y_d)^2 = 1$. В своем докладе я расскажу о больших путях в этом графе и представлю оценку на длину такого пути. Я также представлю некоторые результаты о таких дистанционных графах по работам [1], [2].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. M. Bennett, J. Chapman, D. Covert, D. Hart, Al. Iosevich and J. Pakianathan // Long paths in the distance graph over large subsets of vector spaces over finite fields., J. Korean Math. Soc., 53 (1) (2016), 115–126.

2. A. Iosevich and M. Rudnev // Erdos distance problem in vector spaces over finite fields, Transactions of the AMS, 2007.

———————————————————————————————————

5. Аналитическая теория чисел

УДК 517.52+512.742.72

Последовательности Сомос-6 ранга 2[1]

М. О. Авдеева Россия, г. Хабаровск, Хабаровское отделение Института прикладной математики Дальневосточного отделения РАН
avdeeva@iam.khv.ru

The Somos-6 sequences of rank 2

M. O. Avdeeva Russia, Khabarovsk, Khabarovsk Division of the Institute for Applied Mathematics, Far Eastern Branch, RAS
avdeeva@iam.khv.ru

Из результатов работы [1] следует, что ранг (см. [2]) последовательности Сомос-6 не превосходит 4.

Опираясь на конструкцию гиперквазимногочленов из работы [3] мы предлагаем метод построения последовательностей Сомос-6 ранга 3. Основываясь на нем мы строим новые серии целочисленных последовательностей Сомос-6.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Fedorov Y. N., Hone A. N. W. Sigma function solution of the general Somos-6 recurrence via hyperelleptic Prym varieties // Journal of Integrable Systems. 2016. Issue 1 (1). P. 1-34.

2. Авдеева М. О., Быковский В. А. Гиперэллиптические системы последовательностей и функций // Дальневосточный математический журнал. 2016. Том 16 № 2. С. 115-122.

3. Илларионов А. А. Функциональное уравнение и сигма-функция Вейерштрасса // Функциональный анализ и его приложения. 2016. Том 50. Вып. 4. С. 43-54.

—————————————————————————————

[1]Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 14-11-00335)

УДК 511.32

Преобразование Лапласа L-функций Дирихле в критической полосе

А. Бальчюнас Литва, г. Вильнюс, Вильнюсский технический университет имени Гедиминаса
aidas.balciunas@vgtu.lt

The Laplace transform of Dirichlet L-functions in the critical strip

Aidas Balčiūnas Lithuania, Vilnius, Vilnius Gediminas Technical University
aidas.balciunas@vgtu.lt

Let $s = \sigma + it$ be a complex variable. The Laplace transform $\mathfrak{L}(s, f)$ of the function $f(x)$ is defined by

$$\mathfrak{L}(s, f) = \int_0^\infty f(x)e^{-sx}dx$$

provided the integral converges for $\sigma > \sigma_0$ with some σ_0. It is well known that the Laplace transforms can be applied for the investigation of the moments of zeta-functions. This is easily seen from the following simple observation [4]. Suppose that $f(x) \geqslant 0$ for $x \geqslant 0$, and, for a given $k > 0$,

$$\int\limits_0^\infty f(x)e^{-\delta x}dx \sim \frac{1}{\delta}\log^k \frac{1}{\delta}$$

as $\delta \longrightarrow 0$. Then

$$\int\limits_0^T f(x)dx \sim T\log^k T$$

as $T \longrightarrow \infty$.

The first formula for the Laplace transform of the function $\left|\zeta\left(\frac{1}{2}+ix\right)\right|^2$ was presented in [4]. Here it was proved that

$$\int\limits_0^\infty \left|\zeta\left(\frac{1}{2}+ix\right)\right|^2 e^{-2sx}dx = 2\pi e^{is}\sum_{m=1}^\infty d(m)e^{2\pi ime^{2is}} + \sum_{m=0}^\infty a_m s^m$$

for $|s|$ small enough and $\sigma > 0$, where $d(m)$, is the divisor function.

Denote

$$\mathfrak{L}(s, |\zeta|^2) = \int_0^\infty \left|\zeta\left(\frac{1}{2}+ix\right)\right|^2 e^{-sx}dx.$$

In [3], formula for $\mathfrak{L}(s, |\zeta|^2)$ was obtained, namely,

$$\mathfrak{L}(s, |\zeta|^2) = ie^{is/2}\left(\gamma - \log 2\pi - \left(\frac{\pi}{2} - s\right)i\right) + 2\pi e^{-is/2}\sum_{m=1}^\infty d(m)e^{-2\pi ime^{-is}} + \lambda(s),$$

where the function $\lambda(s)$ is analytic in the strip $|\sigma| < \pi$. Moreover, in any fixed strip $|\sigma| \leqslant \theta$, $0 < \theta < \pi$, the estimate

$$\lambda(s) = O((1+|s|)^{-1})$$

is valid. In [2], the above formula was extended to the critical strip, i.e., the formula for $\int_0^\infty |\zeta(\varrho + ix)|^2 e^{-sx}dx$ with a fixed $\frac{1}{2} < \varrho < 1$ was obtained.

Now, let χ be a Dirichlet character modulo q, and let $L(s,\chi)$ denote the corresponding Dirichlet L-function defined, for $\sigma > 1$, by the series

$$L(s,\chi) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\chi(m)}{m^s}.$$

In [1], the formulae for the Laplace transform

$$\mathfrak{L}\left(s, |L(\chi)|^2\right) = \int_0^{\infty} \left| L\left(\frac{1}{2} + ix, \chi\right) \right|^2 e^{-sx} dx$$

were obtained. This note is a continuation of [1], and is devoted to the Lapkace transform

$$\mathfrak{L}_{\varrho}\left(s, |L(\chi)|^2\right) = \int_0^{\infty} \left| L\left(\varrho + ix, \chi\right) \right|^2 e^{-sx} dx,$$

where ϱ, $\frac{1}{2} < \varrho < 1$, is a fixed number.

For the statement of the results, we need some notation. Denote by $G(\chi)$ the Gauss sum, i.e.,

$$G(\chi) = \sum_{l=1}^{q} \chi(l) e^{2\pi i l/q}.$$

Let

$$a = \begin{cases} 0 & \text{if} \quad \chi(-1) = 1, \\ 1 & \text{if} \quad \chi(-1) = -1, \end{cases}$$

$$E(\chi) = \begin{cases} \epsilon(\chi) & \text{if} \quad a = 0, \\ \epsilon_1(\chi) & \text{if} \quad a = 1, \end{cases}$$

where

$$\epsilon(\chi) = \frac{G(\chi)}{\sqrt{q}}, \qquad \epsilon_1(\chi) = -\frac{G(\chi)}{\sqrt{q}}.$$

As usual, denote by $\Gamma(s)$ the Euler gamma-function, and by $\mu(m)$ the Möbius function. Moreover,

$$\sigma_{\alpha}(m) = \sum_{d|m} d^{\alpha}, \alpha \in \mathbb{C},$$

is the generalized divisor function.

Теорема 1. *Let $\{s \in \mathbb{C} : 0 < \sigma < \pi\}$, ϱ, $\frac{1}{2} < \varrho < 1$, be a fixed number, and χ be a primitive character modulo $q > 1$. Then*

$$\mathfrak{L}_{\varrho}\left(s, |L(\chi)|^2\right) = \frac{2\pi i^a e^{-is(1-\varrho)}}{E(\chi)\sqrt{q}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\chi(m)\sigma_{2\varrho-1}(m)}{m^{2\varrho-1}} \exp\left\{ -\frac{2\pi i m}{q} e^{-is} \right\} + \lambda_{\varrho}(s,\chi),$$

where the function λ_{ϱ} is analytic in the strip $\{s \in \mathbb{C} : |\sigma| < \pi\}$, and, for $|\sigma| \leqslant \theta, 0 < \theta < \pi$, the estimate

$$\lambda_{\varrho}(s,\chi) = O((1+|s|)^{-1})$$

is valid.

Теорема 2. *Let* $\{s \in \mathbb{C} : 0 < \sigma < \pi\}$, ϱ, $\frac{1}{2} < \varrho < 1$, *be a fixed number, and* χ_0 *be the principal character modulo* $q > 1$. *Then*

$$\mathfrak{L}_\varrho\left(s, |L(\chi_0)|^2\right) = (2\pi i)^{2\varrho-1} i\Gamma(2-2\varrho)\zeta(2-2\varrho)e^{is(1-\varrho)} \sum_{m|q}\sum_{n|q} \frac{\mu(m)\mu(n)}{nm^{2\varrho-1}}$$

$$+ ie^{is\varrho}\zeta(2\varrho)\sum_{m|q}\sum_{n|q}\frac{\mu(m)\mu(n)}{n^{2\varrho}} + 2\pi e^{-is(1-\varrho)}\sum_{m|q}\sum_{n|q}\frac{\mu(m)\mu(n)}{mn^{2\varrho-1}}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sigma_{2\varrho-1}(k)}{k^{2\varrho-1}}$$

$$\exp\{-2\pi i e^{-is}\frac{nk}{m}\} + \lambda_\varrho(s, \chi_0).$$

where the function $\lambda_\varrho(s, \chi_0)$ *has the same properties as* $\lambda_\varrho(s, \chi)$ *in Theorem 1.*

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Balčiūnas A., Laurinčikas A. The Laplace transform of Dirichlet L-functions // Nonlinear Anal. Model. Control. 2012. Vol. 17. P.127-138.

2. Kačinskaitė R., Laurinčikas A., The Laplace transform of the Riemann zeta-function in the critical strip // Integral Transf. Spec. Funct. 2009. Vol.20 P. 643-648.

3. M. Lukkarinen, The Mellin transform of the square of Riemann's zeta-function and Atkinson's formula, Ann. Acad. Scie. Fenn., Math. Diss. **140**, Suomalainen Tiedeakatemia, Helsinki, 2005.

4. E.C. Titchmarsh, The Theory of Riemann Zeta- Function,2nd ed., revised by D. R. Heath-Brown, Clarendor Press, Oxford, 1986.

УДК 512.624.3

Об обобщении теорем Шевалле-Варнинга и Экса-Каца

Ю. Н. Баулина Россия, г. Москва,
А. Бишной Германия, г. Берлин, Свободный университет Берлина
П. Л. Кларк США, г. Атенс, Университет Джорджии
jbaulina@mail.ru, anurag.2357@gmail.com, plclark@gmail.com

On a generalization of the theorems of Chevalley-Warning and Ax-Katz

Ioulia N. Baoulina Russia, Moscow,
Anurag Bishnoi Germany, Berlin, Freie Universität Berlin,
Pete L. Clark USA, Athens, University of Georgia
jbaulina@mail.ru, anurag.2357@gmail.com, plclark@gmail.com

Let $\mathbb{F}_q$ be a finite field of characteristic p with $q = p^s$ elements. The celebrated Chevalley-Warning theorem [4, 12] asserts that if $P_1, \ldots, P_r \in \mathbb{F}_q[t_1, \ldots, t_n]$ are nonzero polynomials with $\sum_{j=1}^{r} \deg(P_j) < n$, then

$$p \mid \#\{(y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{F}_q^n \mid P_1(y_1, \ldots, y_n) = \cdots = P_r(y_1, \ldots, y_n) = 0\}.$$

As an immediate consequence of the Chevalley-Warning theorem we have the following result: if $f_1, \dots, f_n \in \mathbb{F}_q[t]$ are permutation polynomials and $P_1, \dots, P_r \in \mathbb{F}_q[t_1, \dots, t_n]$ are nonzero polynomials with $\sum_{j=1}^r \deg(P_j) < n$, then

$$p \mid \#\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{F}_q^n \mid P_1(f_1(x_1), \dots, f_n(x_n)) = \dots = P_r(f_1(x_1), \dots, f_n(x_n)) = 0\}.$$

In this talk, we present our recent results on p-adic divisibility of

$$\#\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{F}_q^n \mid P_1(f_1(x_1), \dots, f_n(x_n)) = \dots = P_r(f_1(x_1), \dots, f_n(x_n)) = 0\},$$

where $f_1, \dots, f_n \in \mathbb{F}_q[t]$ are *any* polynomials.

For a polynomial $f \in \mathbb{F}_q[t]$, let $u(f)$ be the least positive integer δ such that $\sum_{x \in \mathbb{F}_q} f(x)^\delta \neq 0$ if such a δ exists; otherwise let $u(f) = \infty$.

Let $\mathcal{I} \subseteq \{1, \dots, n\}$ be a nonempty subset. For a monomial $at_1^{m_1} \cdots t_n^{m_n}$ with $a \in \mathbb{F}_q \setminus \{0\}$, we define the *$\mathcal{I}$-degree* $\deg_{\mathcal{I}}(at_1^{m_1} \cdots t_n^{m_n}) := \sum_{i \in \mathcal{I}} m_i$. For a nonzero polynomial $P \in \mathbb{F}_q[t_1, \dots, t_n]$, we define the $\mathcal{I}$-degree $\deg_{\mathcal{I}}(P)$ to be the maximum of the $\mathcal{I}$-degrees of its monomial terms.

Theorem 1. *Let $P_1, \dots, P_r \in \mathbb{F}_q[t_1, \dots, t_n]$ be nonzero polynomials, and let $f_1, \dots, f_n \in \mathbb{F}_q[t]$ be any polynomials. Let $\mathcal{I} \subseteq \{1, \dots, n\}$ be nonempty. Suppose that $(q-1)\sum_{j=1}^r \deg_{\mathcal{I}}(P_j) < \sum_{i \in \mathcal{I}} u(f_i)$. Then*

$$p \mid \#\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{F}_q^n \mid P_1(f_1(x_1), \dots, f_n(x_n)) = \dots = P_r(f_1(x_1), \dots, f_n(x_n)) = 0\}.$$

Taking $\mathcal{I} = \{1, \dots, n\}$ and $f_1(t) = \dots = f_n(t) = t$ in Theorem 1, we recover the Chevalley-Warning theorem. Taking $\mathcal{I} = \{1, \dots, n\}$, $f_i(t) = t^{m_i}$ with $m_i \in \mathbb{Z}^+$ for all i, $r = 1$ and $\deg(P_1) = 1$, we recover a result of Morlaye [10] and Joly [5].

For a nonconstant polynomial $f \in \mathbb{F}_q[t]$, write $f(t) = \sum_{\ell=1}^R b_\ell t^{m_\ell}$ with $b_\ell \in \mathbb{F}_q \setminus \{0\}$ and m_ℓ nonnegative integers (with all m_ℓ's pairwise distinct). Define

$$\omega(f) := \min\left\{\sum_{\ell=1}^R \gamma_\ell \;\middle|\; 0 \leqslant \gamma_1, \dots, \gamma_R \leqslant q-1 \text{ and } \sum_{\ell=1}^R m_\ell \gamma_\ell \in (q-1)\mathbb{Z}^+\right\}.$$

Theorem 2. *Let $P_1, \dots, P_r \in \mathbb{F}_q[t_1, \dots, t_n]$ be nonzero polynomials, and let $\mathcal{I} \subseteq \{1, \dots, n\}$ be a nonempty subset such that $\max_{1 \leqslant j \leqslant r} \deg_{\mathcal{I}}(P_j) > 0$. Let $f_1, \dots, f_n \in \mathbb{F}_q[t]$ and assume that f_i is nonconstant for all $i \in \mathcal{I}$. Suppose that $(q-1)\sum_{j=1}^r \deg_{\mathcal{I}}(P_j) < \sum_{i \in \mathcal{I}} \omega(f_i)$. Then*

$$q^{\left\lceil \left(\sum_{i \in \mathcal{I}} (\omega(f_i)/(q-1)) - \sum_{j=1}^r \deg_{\mathcal{I}}(P_j)\right) / \max_{1 \leqslant j \leqslant r} \deg_{\mathcal{I}}(P_j) \right\rceil}$$

divides $\#\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{F}_q^n \mid P_1(f_1(x_1), \dots, f_n(x_n)) = \dots = P_r(f_1(x_1), \dots, f_n(x_n)) = 0\}$.

Taking $\mathcal{I} = \{1, \dots, n\}$, $r = 1$ and $f_1(t) = \dots = f_n(t) = t$ in Theorem 2 recovers a result of Ax [1]. Taking $\mathcal{I} = \{1, \dots, n\}$ and $f_1(t) = \dots = f_n(t) = t$ recovers a result of Katz [6]. Taking $\mathcal{I} = \{1, \dots, n\}$, $f_i(t) = t^{m_i}$ with $m_i \in \mathbb{Z}^+$ for all i, $r = 1$ and $\deg(P_1) = 1$ recovers a result of Wan [11, Theorem 1]. Taking $f_1(t) = \dots = f_n(t) = t$ recovers a result of Cao [2, Corollary 12].

For a positive integer m, let $\sigma_p(m)$ denote the sum of digits in the base p representation of m. Let $\mathcal{I} \subseteq \{1, \dots, n\}$ be a nonempty subset. For a monomial $at_1^{m_1} \cdots t_n^{m_n}$ with $a \in \mathbb{F}_q \setminus \{0\}$, define $w_{p,\mathcal{I}}(at_1^{m_1} \cdots t_n^{m_n}) := \sum_{i \in \mathcal{I}} \sigma_p(m_i)$. For a polynomial $P = Q_1 + \dots + Q_\ell$, where $Q_1, \dots, Q_\ell \in \mathbb{F}_q[t_1, \dots, t_n]$ are monomials, we define the *p-weight degree with respect to $\mathcal{I}$* as $w_{p,\mathcal{I}}(P) := \max_{1 \leqslant k \leqslant \ell} w_{p,\mathcal{I}}(Q_k)$. In the case of univariate polynomials we shall suppress the subscript $\mathcal{I}$.

Theorem 3. *Let* $P_1, \ldots, P_r \in \mathbb{F}_q[t_1, \ldots, t_n]$ *be nonzero polynomials, and let* $\mathcal{I} \subseteq \{1, \ldots, n\}$ *be a nonempty subset such that* $\max_{1 \leqslant j \leqslant r} w_{p,\mathcal{I}}(P_j) > 0$. *Let* $f_1, \ldots, f_n \in \mathbb{F}_q[t]$ *and assume that* f_i *is nonconstant for all* $i \in \mathcal{I}$. *Suppose that* $\sum_{j=1}^{r} w_{p,\mathcal{I}}(P_j) < \sum_{i \in \mathcal{I}} (1/w_p(f_i))$. *Then*

$$p^{\left\lceil s\left(\sum_{i\in\mathcal{I}}(1/w_p(f_i)) - \sum_{j=1}^{r} w_{p,\mathcal{I}}(P_j)\right)/\max_{1\leqslant j\leqslant r} w_{p,\mathcal{I}}(P_j)\right\rceil}$$

divides $\#\{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{F}_q^n \mid P_1(f_1(x_1), \ldots, f_n(x_n)) = \cdots = P_r(f_1(x_1), \ldots, f_n(x_n)) = 0\}$.

Taking $\mathcal{I} = \{1, \ldots, n\}$ and $f_1(t) = \cdots = f_n(t) = t$ in Theorem 3, we recover a result of Moreno and Moreno [8, Theorem 1], [9, Theorem 1]. Taking $\mathcal{I} = \{1, \ldots, n\}$, $f_i(t) = t^{m_i}$ with $m_i \in \mathbb{Z}^+$ for all i, $r = 1$ and $\deg(P_1) = 1$, we recover a result of Moreno and Castro [7, Theorem 10]. Taking $f_1(t) = \cdots = f_n(t) = t$, we recover a result of Castro and Castro-Velez [3, Theorem 7].

REFERENCES

1. Ax J., Zeroes of polynomials over finite fields // Amer. J. Math. 1964. Vol. 86. P. 255-261.
2. Cao W., A partial improvement of the Ax-Katz theorem // J. Number Theory. 2012. Vol. 132, no. 4. P. 485-494.
3. Castro F., Castro-Velez F. N., Improvement to Moreno-Moreno's theorems // Finite Fields Appl. 2012. Vol. 18, no. 6. P. 1207-1216.
4. Chevalley C., Démonstration d'une hypothèse de M. Artin // Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg. 1935. Vol. 11. P. 73-75.
5. Joly J.-R., Nombre de solutions de certaines équations diagonales sur un corps fini // C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B. 1971. Vol. 272. P. A1549-A1552.
6. Katz N. M., On a theorem of Ax // Amer. J. Math. 1971. Vol. 93. P. 485-499.
7. Moreno O., Castro F. N., Optimal divisibility for certain diagonal equations over finite fields // J. Ramanujan Math. Soc. 2008. Vol. 23, no. 1. P. 43-61.
8. Moreno O., Moreno C. J., An elementary proof of a partial improvement to the the Ax-Katz theorem // International Symposium on Applied Algebra, Algebraic Algorithms, and Error-Correcting Codes (San Juan, PR, 1993) — Lecture Notes in Comput. Sci. Vol. 673. Springer, Berlin, Heidelberg, 1993. P. 257-268.
9. Moreno O., Moreno C. J., Improvements of the Chevalley-Warning and the Ax-Katz theorems // Amer. J. Math. 1995. Vol. 117, no. 1. P. 241-244.
10. Morlaye B., Équations diagonales non homogènes sur un corps fini // C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B. 1971. Vol. 272. P. A1545-A1548.
11. Wan D. Q., Zeros of diagonal equations over finite fields // Proc. Amer. Math. Soc. 1988. Vol. 103, no. 4. P. 1049-1052.
12. Warning E., Bemerkung zur vorstehenden Arbeit von Herrn Chevalley // Abh. Math. Sem. Hamburg. 1935. Vol. 11. P. 76-83.

УДК 511.35, 517.15

Об оценке среднего значения остатка в асимптотической формуле для суммы значений арифметической функции на последовательности Битти

А. В. Бегунц РФ, г. Москва, Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
Д. В. Горяшин РФ, г. Москва, Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
ab@rector.msu.ru, goryashin@mech.math.msu.su

Estimation of the mean value of the remainder term in the asymptotic formula for the sum of values of an arithmetical function on a Beatty sequence

A. V. Begunts RF, Moscow, Lomonosov Moscow State University
D. V. Goryashin RF, Moscow, Lomonosov Moscow State University
ab@rector.msu.ru, goryashin@mech.math.msu.su

Последовательностями Битти в англоязычной литературе называют последовательности вида $[\alpha n]$ и, более общо, $[\alpha n+\beta]$, где α — некоторое положительное иррациональное число и β — некоторое вещественное число (если $\beta=0$, то последовательность называется однородной, в противном случае — неоднородной). В отечественной литературе такие последовательности обычно называются антье-последовательностями специального вида или обобщёнными арифметическими прогрессиями. Изучение свойств этих последовательностей, начатое более века назад, активно продолжается и в наши дни. Одно из ключевых направлений исследования связано с суммами значений арифметических функций на последовательностях Битти. Многими авторами получены результаты в виде верхних оценок остаточного члена формулы

$$\sum_{n\leqslant N} f([\alpha n]) = \frac{1}{\alpha}\sum_{m\leqslant \alpha N} f(m) + \Delta(\alpha, N),$$

которые или зависят от арифметических свойств α, или справедливы для почти всех α (см. [1]).

В 2009 г. А. Аберкромби, У. Бэнкс и И. Шпарлинский [2] для почти всех $\alpha>1$ доказали оценку для $\Delta(\alpha,N)$, которая зависит лишь от скорости роста функции f:

$$|\Delta(\alpha,N)| \ll N^{\frac{2}{3}+\varepsilon} M(f,N), \qquad \text{где} \qquad M(f,N) = 1+\max_{n\leqslant N}|f(n)|.$$

Мы рассматриваем задачу о среднем значении остатка $\Delta(\alpha,N)$. Основной результат исследования среднего значения по $\alpha>1$ имеет следующий вид.

Теорема 1. *Пусть $f(n)$ — произвольная арифметическая функция и*

$$\Delta(\alpha,N) = \sum_{n\leqslant N} f([\alpha n]) - \frac{1}{\alpha}\sum_{m\leqslant \alpha N} f(m).$$

Тогда для всех $A>1$ справедлива оценка

$$\frac{1}{A}\left|\int_1^A \Delta(\alpha,N)\,d\alpha\right| \leqslant \frac{A}{4}\sum_{m\leqslant AN}\frac{|f(n)|}{n}.$$

Результат исследования среднего значения по β $(0 \leqslant \beta < \alpha)$ остаточного члена формулы

$$\sum_{n\leqslant N} f([\alpha n+\beta]) = \frac{1}{\alpha}\sum_{m\leqslant \alpha N+\beta} f(m) + \Delta(\alpha,\beta,N)$$

имеет следующий вид.

Теорема 2. *Пусть $f(n)$ — произвольная арифметическая функция и*

$$\Delta(\alpha,\beta,N) = \sum_{n\leqslant N} f([\alpha n+\beta]) - \frac{1}{\alpha}\sum_{m\leqslant \alpha N+\beta} f(m).$$

Тогда для всех $\alpha > 1$ справедлива оценка

$$\frac{1}{\alpha}\left|\int\limits_0^\alpha \Delta(\alpha,\beta,N)\,d\beta\right| \leqslant 2\alpha \max_{\alpha N< m\leqslant \alpha(N+1)} |f(m)|.$$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бегунц А. В., Горяшин Д. В. Актуальные задачи, связанные с последовательностями Битти. Чебышевский сборник. 2017. Том 18 № 4(64). С. 97–105.

   DOI: 10.22405/2226-8383-2017-18-4-97-105

2. Abercrombie A., Banks W. and Shparlinski I., ‘Arithmetic functions on Beatty sequences’, *Acta Arith.* **136** (2009), 81–89.

—————————————————————————

УДК 517.52+512.742.72

О целочисленных последовательностях Сомос-4 [1]

В. А. Быковский Россия, г. Хабаровск, Хабаровское отделение Института прикладной математики Дальневосточного отделения РАН

М. Д. Монина Россия, г. Хабаровск, Хабаровское отделение Института прикладной математики Дальневосточного отделения РАН

vab@iam.khv.ru, monina_dvggu@mail.ru

Integer Somos-4 sequences

V. A. Bykovskii Russia, Khabarovsk, Khabarovsk Division of the Institute for Applied Mathematics, Far Eastern Branch, RAS

M. D. Monina Russia, Khabarovsk, Khabarovsk Division of the Institute for Applied Mathematics, Far Eastern Branch, RAS

vab@iam.khv.ru, monina_dvggu@mail.ru

Пусть $A(n)$ $(n \in \mathbb{Z})$ — последовательность чисел, удовлетворяющих квадратичному рекуррентному соотношению

$$A(n+2)A(n-2) = \alpha A(n+1)A(n-1) + \beta A^2(n) \tag{1}$$

с некоторыми константами α и β.

В работе построено новое трехпараметрическое семейство целочисленных последовательностей Сомос-4.

[1]Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 14-11-00335)

Теорема 1. *Пусть x, y и z — независимые переменные. Положим*

$$\alpha = yz - x(1+y), \qquad \beta = x(1+y) - y^2 z + xy(1+y),$$

$$A(-1) = y, A(0) = A(1) = 1, A(2) = 1 + y.$$

Тогда для любого целого n $A(n)$ — полином от x, y и z с целыми коэффициентами.

Ранее были построены другие семейства целочисленных последовательностей в работах [1] и [2].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Somos Polynomials, http://somos.crg4.com/somospol.html

2. Hone A. N. W., Swart C. S. Integrality and the Laurent phenomenon for Somos 4 and Somos 5 sequences // Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society. 2008. Vol. 145. Issue 1. P. 65-85.

УДК 511.32

Вопросы суммирования арифметических функций

Л. В. Варухина Россия, г. Москва, Московский педагогический государственный университет
Е. И. Деза Россия, г. Москва, Московский педагогический государственный университет
lidadgemma@mail.ru, Elena.Deza@gmail.com

Some problems of the summation of arithmetic functions

L. V. Varukhina Russia, Moscow, Moscow State Pedagogical University
E. I. Deza Russia, Moscow, Moscow State Pedagogical University
lidadgemma@mail.ru, Elena.Deza@gmail.com

Многие вопросы теории чисел связаны с исследованием *рядов Дирихле* $f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$ и *сумматорных функций* $\Phi(x) = \sum_{n \leq x} a_n$ их коэффициентов.

Наиболее известным примером ряда Дирихле является *дзета-функция Римана* $\zeta(s)$, определенная для любого комплексного числа $s = \sigma + it$ с действительной частью $\Re s = \sigma > 1$ как $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$. [1]

Квадрат дзета-функции

$$\zeta^2(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tau(n)}{n^s}, \ \Re s > 1,$$

связян с *функцией делителей* $\tau(n) = \sum_{d|n} 1$, дающей число натуральных делителей натурального числа n. Именно, сумматорной функцией ряда Дирихле $\zeta^2(s)$ является функция $D(x) = \sum_{n \leq x} \tau(n)$, вопросы асимптотической оценки которой известны как *проблема делителей Дирихле.*

В общем случае,

$$\zeta^k(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tau_k(n)}{n^s}, \ \Re s > 1,$$

где функция $\tau_k(n) = \sum_{n=n_1\cdot\ldots\cdot n_k} 1$ дает число представлений натурального числа n в виде произведения k натуральных сомножителей. Сумматорной функцией ряда Дирихле $\zeta^k(s)$ является функция $D_k(x) = \sum_{n\leq x}\tau_k(n)$. Ее изучение - это *многомерная проблема делителей Дирихле.* [2]

Обобщением дзета-функции Римана и еще одним известным рядом Дирихле является L-функция Дирихле, определяемая равенством

$$L(s,\chi) = \sum_{n=1}^{\infty}\chi(n)n^{-s}, \Re s > 1,$$

где χ - *характер Дирихле.* [1]

Произведение нескольких L-функций дает ряд

$$L_1(s,\chi_1)\cdot\ldots\cdot L_k(s,\chi_k) = \sum_{n=1}^{\infty}c_n n^{-s}, \Re s > 1,$$

сумматорная функция коэффициентов которого имеет вид

$$C_k(x) = \sum_{n\leq x}c_n = \sum_{n_1\cdot\ldots\cdot n_k\leq x}\chi_1(n_1)\cdot\ldots\cdot\chi_k(n_k).$$

Задача об оценке $C_k(x)$ является обобщением проблемы делителей Дирихле и связана с проблемой делителей в числовых полях. [3], [4]

Логарифмическая производная дзета-функции $\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}$ представима в виде

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Lambda(n)}{n^s}, \Re s > 1.$$

Здесь $\Lambda(n)$ - *функция Мангольдта*, которая определяется как $\Lambda(n) = \log p$, если $n = p^k$ для простого p и натурального k, и как $\Lambda(n) = 0$, иначе.

Таким образом, *функция Чебышева*

$$\psi(x) = \sum_{n\leq x}\Lambda(n)$$

является сумматорной функцией коэффициентов ряда Дирихле $-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Lambda(n)}{n^s}$, соответствующего логарифмической производной $\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}$ дзета-функции Римана. Она хорошо известна в аналитической теории чисел и связана со многими классическими задачами, прежде всего, с *асимптотическим законом распределения простых чисел.* [1]

В частности, хорошо известно представление [1] функции $\psi(x)$ по нулям дзета-функции:

$$\psi(x) = x - \sum_{|\Im\rho|\leq T}\frac{x^\rho}{\rho} + O\left(\frac{x\ln^2 x}{T}\right),$$

где $x = n + 0,5$, $n\in\mathbb{N}$, $2\leq T\leq x$, и $\rho = \beta + i\gamma$ - нетривиальные нули дзета-функции Римана, то есть, нули $\zeta(s)$, лежащие в *критической полосе* $0 < \Re s < 1$.

Мы получаем аналогичные представления, связанные с нетривиальными нулями дзета-функции Римана, для двух арифметических функций,

$$\psi_1(x) = \sum_{n\leq x}(x-n)\Lambda(n) \ \text{ и } \ \psi_2(x) = \sum_{n\leq x}\Lambda(n)\ln\frac{x}{n},$$

родственных функции Чебышева. Основные результаты работы содержатся в следующих двух теоремах.

ТЕОРЕМА 1. *Для* $x = n + 0,5$, $n \in \mathbb{N}$ *и* $2 \le x \le T$ *имеет место формула*

$$\psi_1(x) = \sum_{n \le x} (x-n)\Lambda(n) = \frac{x^2}{2} - \sum_{|\Im\rho| \le T} \frac{x^{\rho+1}}{\rho(\rho+1)} + O\left(\frac{x^2 \ln x}{T}\right),$$

где $\rho = \beta + i\gamma$ *- нули дзета-функции Римана* $\zeta(s)$, *лежащие в критической полосе* $0 < \Re s < 1$.

ТЕОРЕМА 2. *Для* $x = n + 0,5$, $n \in \mathbb{N}$ *и* $2 \le x \le T$ *имеет место формула*

$$\psi_1(x) = \sum_{n \le x} \Lambda(n) \ln \frac{x}{n} = x - \sum_{|\Im\rho| \le T} \frac{x^{\rho}}{\rho^2} + O\left(\frac{x \ln x}{T}\right),$$

где $\rho = \beta + i\gamma$ *- нули дзета-функции Римана* $\zeta(s)$, *лежащие в критической полосе* $0 < \Re s < 1$.

Аналогичные результаты можно получить и для других функций, родственных функции Чебышева, если использовать логарифмические производные L-функций Дирихле.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Карацуба А.А. Введение в аналитическую теорию чисел. Москва: Наука, 1983.

2. Карацуба А.А. Равномерная оценка остаточного члена в проблеме делителей Дирихле // Известия АН СССР. Сер. матем. 1972. Т. 36, N. 3. С. 475 - 483.

3. Деза Е.И., Варухина Л.В. Об оценке дзетовой суммы и проблеме делителей Дирихле // Вестник Сант-Петербургского университета. 2013. Серия 2, вып. 4. С. 15 - 24.

4. Deza E., Varukhina L. On mean values of some arithmetic functions in number fields // Discrete Mathematics. 2008. Vol. 308, Issue 21. P. 4892 - 4899.

УДК 517.556

О параметре стохастичности квадратичных вычетов[1]

М. Габдуллин Россия, г. Москва, Московский Государственный Университет им. Ломоносова, Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского, Екатеринбург
gabdullin.mikhail@yandex.ru

On stochasticity parameter of quadratic residues

M. Gabdullin Russia, Moscow, Lomonosov Moscow State University, N. N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Yekaterinburg
gabdullin.mikhail@yandex.ru

Пусть A — произвольное подмножество кольца вычетов $\mathbb{Z}_m$. Запишем его в виде

$$A = \{a_i\}_{i=1}^{t},$$

где $0 \le a_1 < a_2 < \ldots a_t < m$, и положим $a_{t+1} := a_1 + n$ (таким образом мы «склеили» $\mathbb{Z}_m$ в окружность). Для исследования случайности распределения точек множества A В.И.Арнольд [1], §9, вводит *параметр стохастичности*

$$S(A) := \sum_{i=1}^{t} (a_{i+1} - a_i)^2.$$

Слишком большие или слишком малые значения $S(A)$ говорят о неслучайном поведении: взаимном «отталкивании» или «притяжении» точек множества A ($S(A)$ минимально, когда точки идут через равные интервалы, и максимально, когда все собираются в одном месте).

Мы изучаем величину $S(R)$ для множества R квадратичных вычетов по модулю m. Через $S(k)$, $k \in \mathbb{N}$, будем обозначать среднее значение величины S для k-элементного подмножества $\mathbb{Z}_m$. Следующая теорема — частный случай результата из работы М.З.Гараева, С.В.Конягина и Ю.В.Малыхина [2].

Теорема А. *Пусть $m = p$ — простое. Тогда*

$$S(R) = S(|R|)(1 + o(1)), \quad p \to \infty$$

Мы представляем следующие два результата.

Теорема 1. *Пусть $a \in \mathbb{N}$ — фиксированное натуральное число и $m = ap_1 \ldots p_t$, где $p_1 < \ldots < p_t$ — простые числа и p_1 достаточно велико в зависимости от a и t. Тогда*

$$S(R) = S(|R|)(1 + o(1)), \quad t \to \infty.$$

Теорема 2. *Справедливы соотношения*

$$\varliminf_{m\to\infty} \frac{S(R)}{S(|R|)} < 1 < \varlimsup_{m\to\infty} \frac{S(R)}{S(|R|)}.$$

[1]Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект 14-11-00702).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. В. И. Арнольд, Группы Эйлера и арифметика геометрических прогрессий, М.:МЦНМО, 2003.

2. М. З. Гараев, С. В. Конягин, Ю. В. Малыхин, “Асимптотика суммы расстояний между степенными вычетами по простому модулю”, Труды математического института им. В. А. Стеклова, 276 (1), 2012, с. 77-89.

——

УДК 511.3

Множества Коробова, жесткость и (оптимальное) интервальное оценивание вещественных функций

Н. М. Глазунов Украина, Киев, Национальный авиационный университет
glanm@yahoo.com

Korobov sets, rigidity and (optimal) interval estimation of real functions

N. M. Glazunov Ukraine, Kiev, National aviation University
glanm@yahoo.com

Введение

В работах Н.М. Коробова [1, 2] были введены множества точек единичного гиперкуба, названные автором теоретико-числовыми сетками, и представлены методы приближения кратных интегралов суммами по точкам этих сеток. Тематика соответствующих теоретико-числовых методов получила развитие в работах Н.М. Коробова и его коллег [3, 4, 5, 6, 7, 8], являясь одной из основ применения теории чисел в анализе. В сообщении мы, основываясь на результатах Н.М. Коробова [1, 2, 3, 4], а также используя результаты Дж. Крауса и Г. Харди о функциях ограниченной вариации [9, 10] и теорему Коксмы-Главки [11, 12] об аппроксимации интеграла функции ограниченной вариации взвешенной суммой значений этой функции на элементах числовой последовательности с данным отклонением, показываем, что таким способом можно получить интервальные [13] (то есть двусторонние) оценки функции и интеграла такой функции, которые зависят только от отклонения последовательности и вариации функции на интервале оценивания [14]. Интервальное оценивание вещественных функций нашло применения в алгебраических и теоретико-числовых исследованиях, в их приложениях [13, 14, 15] . Также мы планируем рассмотреть оптимальные интервальные оценки.

Применение и сеток, и (n-мерных, $n \geqslant 1$) интервалов можно трактовать как введение соответствующей жесткости, поэтому в сообщении мы планируем коснуться тематики численных аспектов жесткости в контексте [16] и ссылок в ней.

Пусть K_r есть интервал $[0,1]^r$ (единичный r-мерный куб). Следуя [3], упорядочим выбор под интервалов в K_r таким способом: пусть $\gamma_1, \dots, \gamma_r$ - произвольные числа из полуинтервала $[0,1)$; пусть $S_n(k) = (x_1(k), \dots, x_r(k))$, $1 \leqslant k \leqslant n$, есть множество точек, лежащих в K_r, а $\#S_n(\gamma_1, \dots, \gamma_r)$ есть число попаданий точек последовательности $S_n(k)$ в полуинтервал $0 \leqslant u_1 < \gamma_1, \dots, 0 \leqslant u_r < \gamma_r$. Пусть $R_n(\gamma_1, \dots, \gamma_r) = \frac{1}{n}(\#S_n(\gamma_1, \dots, \gamma_r)) - \gamma_1 \cdots \gamma_r$.

Определение 1. *В этих обозначениях отклонение $D(n)$ последовательности $S_n(k)$ задается равенством $D(n) = \sup |R_n(\gamma_1, \dots, \gamma_r)|$ где $\sup$ берется по $\gamma_1, \dots, \gamma_r$.*

Н.М. Коробовым [1, 4] введены p - множества

$$\left(\left\{\frac{k}{p}\right\},\left\{\frac{k^2}{p}\right\},\cdots,\left\{\frac{k^r}{p}\right\}\right),\ 1\leqslant k\leqslant p,\qquad (*)$$

и

$$\left(\left\{\frac{k}{p^2}\right\},\left\{\frac{k^2}{p^2}\right\},\cdots,\left\{\frac{k^r}{p^2}\right\}\right)\ 1\leqslant k\leqslant p^2.\qquad (**)$$

На основе работ [1, 4, 6] выводим.

Предложение 1. *Для отклонения множества (*) имеет место интервальная оценка* $0\leqslant D(n)\leqslant c(r)p^{-1/2}(\ln p)^r$.

Предложение 2. *Для отклонения множества (**) имеет место интервальная оценка* $0\leqslant D(n)\leqslant c(r)p^{-1}(\ln p)^r$.

Для вещественной функции f пусть $If=[i(f),s(f)]$ есть её интервальное оценивание [13].

Определение 2. *(Оптимальной) интервальной оценкой непрерывной функции f от n переменных на n-мерном интервале I называют интервал $[\underline{f},\overline{f}]$, где $\underline{f}$, $\overline{f}$ есть, соответственно, максимум и минимум функции f на интервале I.*

Пусть FB_r есть класс функций ограниченной вариации в смысле Крауса и Харди [9, 10] для $r\geqslant 2$. Для функции f , определенной на K_r, пусть $f(S)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f(S_n(k)))$. Пусть $V(f)$ - полная вариация функции f на K_r.

Теорема 1. *Пусть $S_n(k)$ $(1\leqslant k\leqslant n)$ есть последовательность с отклонением $D(n), VD=V(f)D(n)$. Если f принадлежит классу FB_r , $x=(x_1,\ldots,x_r)$, $dx=dx_1\ldots dx_r$ то имеет место интервальная оценка:*

$$\int\limits_{K_r} f(x)dx\in[f(S)-VD,f(S)+VD].$$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Коробов Н. М. Приближенное вычисление кратных интегралов с помощью методов теории чисел // ДАН СССР. 1957. Т. 115, № 6. С. 1062—1065.

2. Коробов Н. М. О приближенном вычислении кратных интегралов // ДАН СССР. 1959. Т. 124. № 6. С.1207—1210.

3. Коробов Н. М. Тригонометрические суммы и их приложения. М.: Наука., 1989. 237 с.

4. Коробов Н. М. Применение теоретико-числовых сеток в интегральных уравнениях и интерполяционных формулах // Тр. МИАН СССР. 1961. Т. 60. С. 195—210.

5. Чубариков В. Н. Простые числа, дзета-функция Римана и тригонометрические суммы // Математический институт им. В.А.Стеклова РАН. 2011. 64 с.

6. Hua Loo Keng, Wang Yuan. Application of number theory to numerical analysis. Berlin: Springer-Verlag, 1980. 241 p.

7. Коробов Н. М., Добровольский Н. М. Критерии оптимальности и алгоритмы поиска оптимальных коэффициентов // Чебышевский сборник. 2007. Т.8, вып. 4. С.105–128.

8. Добровольский Н. М., Коробов Н. М. Об оценке погрешности квадратурных формул с оптимальными параллелепипедальными сетками // Чебышевский сборник. 2002, Т.3, вып. 1. С. 41–48.

9. Krause J. M. Fouriersche Reihen mit zwei veranderlichen Grossen // Ber. Verh. Sachs. Acad. Wiss. Leipzig. Math. Naturw. Kl. 1903. Vol. 55. P.164–197.

10. Hardy G. H. On double Fourier series and especially those which represent the double zeta function with real and incommensurable parameters // Quart. Journ. Math. 1906. Vol. 37. P.53–79.

11. Koksma I. F. Een algemeene stelling uit de theorie der gelijkmatige Verdeeling modulo 1 // Math. B (Zutphen). 1942–1943. Vol. 11. P. 7–11.

12. Hlawka E. Funktionen von beschrankten Variation in der Theorie Gleichverteilung // Ann. Math. Pure Appl. 1961. Vol. 54. P. 325–333.

13. Алефельд Г., Херцбергер Ю. Введение в интервальные вычисления. М.: Мир, 1987. 356 с.

14. Глазунов Н. М. Разработка методов обоснования гипотез формальных теорий. Saarbrucken: LAP. 2014. 280 с.

15. Glazunov N. M. On A.V. Malyshev's approach to Minkowski's conjecture concerning the critical determinant of the region $|x|^p + |y|^p < 1$ for $p > 1$ // Чебышевский сборник. 2016. Т.17, вып. 4. С.185–193.

16. Glazunov N. M. Extremal forms and rigidity in arithmetic geometry and in dynamics // Чебышевский сборник. 2015. Т.16, вып. 3. С.124–146.

УДК 517.176

О новых фибиномиальных тождествах

Т. П. Гой Украина, г. Ивано–Франковск, Прикарпатский национальный университет имени Василия Стефаныка
tarasgoy@gmail.com

On new fibinomial identities

T. P. Goy Ukraine, Ivano–Frankivsk, Vasyl Stefanyk Precarpathian National University
tarasgoy@gmail.com

Фибиномиальное тождество — это тождество, сочетающее числа Фибоначчи с биномиальными (мультиномиальными) коэффициентами. Примеры таких тождеств можно найти в [1], [3], [8].

Для получения новых семейств фибиномиальных тождеств мы будем использовать определители матрицы Теплица–Хессенберга

$$A_n(a_0; a_1, \dots, a_n) = \begin{pmatrix} a_1 & a_0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_2 & a_1 & a_0 & \cdots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \ddots & \dots & \dots \\ a_{n-1} & a_{n-2} & a_{n-3} & \cdots & a_1 & a_0 \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & a_1 \end{pmatrix},$$

где $a_0 \neq 0$ и $a_k \neq 0$ хотя бы для одного индекса k.

Определитель матрицы A_n можно выразить через ее элементы по формуле

$$\det(A_n) = \sum_{\widetilde{s}=n} (-a_0)^{n-|s|} p_n(s) a_1^{s_1} a_2^{s_2} \cdots a_n^{s_n}, \tag{1}$$

где $p_n(s) = \frac{(s_1+s_2+\cdots+s_n)!}{s_1!s_2!\cdots s_n!} = \binom{s_1}{s_1}\binom{s_1+s_2}{s_2}\cdots\binom{s_1+s_2+\cdots+s_n}{s_n}$ — мультиномиальный коэффициент, $\widetilde{s} = s_1 + 2s_2 + \cdots + ns_n$, $|s| = s_1 + s_2 + \cdots + s_n$, причем $s_i \geq 0$,

Рассмотрим некоторые последовательности определителей Теплица–Хессенберга специального вида (с числами ± 2 над основной диагональю), элементами которых являются числа Фибоначчи, определенные рекуррентно:

$$F_0 = 0,\ F_1 = 1,\quad F_n = F_{n-1} + F_{n-2}.$$

Утверждение 1. *Для всех $n \geq 1$ имеют место тождества:*

$$\det(2; F_0, F_1, \ldots, F_{n-1}) = \frac{(-1-\sqrt{3})^{n-1} - (-1+\sqrt{3})^{n-1}}{\sqrt{3}},$$

$$\det(-2; F_0, F_1, \ldots, F_{n-1}) = \frac{(1+\sqrt{7})^{n-1} - (1-\sqrt{7})^{n-1}}{\sqrt{7}},$$

$$\det(2; F_1, F_2, \ldots, F_n) = \frac{1}{\sqrt{17}}\left(\left(\frac{-1+\sqrt{17}}{2}\right)^n - \left(\frac{-1-\sqrt{17}}{2}\right)^n\right),$$

$$\det(-2; F_1, F_2, \ldots, F_n) = \frac{4^n - (-1)^n}{5},$$

$$\det(2; F_2, F_3, \ldots, F_{n+1}) = \frac{(-2)^{n+1} - 1}{3},$$

$$\det(2; F_3, F_4, \ldots, F_{n+2}) = (-1)^n \cdot 2^{\frac{2n+1-(-1)^n}{4}},$$

$$\det(2; F_4, F_5, \ldots, F_{n+3}) = 4\delta_{n1} - 1,$$

$$\det(2; F_5, F_6, \ldots, F_{n+4}) = 2^{n+1} + 1,$$

$$\det(-2; F_1, F_3, \ldots, F_{2n-1}) = \frac{4 \cdot 6^{n-1} + 1}{5},$$

$$\det(2; F_3, F_5, \ldots, F_{2n+1}) = \frac{(-2-\sqrt{2})^n + (-2+\sqrt{2})^n}{-2},$$

$$\det(2; F_5, F_7, \ldots, F_{2n+3}) = 4\delta_{n1} - (-1)^n,$$

$$\det(2; F_0, F_2, \ldots, F_{2n-2}) = \frac{(-3-\sqrt{3})^{n-1} - (-3+\sqrt{3})^{n-1}}{\sqrt{3}},$$

$$\det(-2; F_0, F_2, \ldots, F_{2n-2}) = \frac{(3+\sqrt{7})^{n-1} - (3-\sqrt{7})^{n-1}}{\sqrt{7}},$$

$$\det(2; F_2, F_4, \ldots, F_{2n}) = \frac{(-1)^n - (-4)^n}{3},$$

$$\det(2; F_4, F_6, \ldots, F_{2n+2}) = (-1)^n(1 - 2^{n+1}),$$

где δ_{n1} — символ Кронекера.

Используя формулу (1) для определителей Теплица–Хессенберга из Утверждения 1, после несложных преобразований получаем следующие тождества с мультиномиальными коэффициентами для чисел Фибоначчи с последовательными, парными и непарными индексами.

Утверждение 2. *Для всех $n \geq 1$ имеют место тождества:*

$$\sum_{\widetilde{s}=n} (-1)^{|s|} p_n(s) \left(\frac{F_0}{2}\right)^{s_1} \left(\frac{F_1}{2}\right)^{s_2} \cdots \left(\frac{F_{n-1}}{2}\right)^{s_n} = \frac{\sqrt{3}}{6}\left(\left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)^{n-1} - \left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)^{n-1}\right),$$

$$\sum_{\widetilde{s}=n} p_n(s) \left(\frac{F_0}{2}\right)^{s_1} \left(\frac{F_1}{2}\right)^{s_2} \cdots \left(\frac{F_{n-1}}{2}\right)^{s_n} = \frac{1}{2\sqrt{7}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{7}}{2}\right)^{n-1} - \left(\frac{1-\sqrt{7}}{2}\right)^{n-1}\right),$$

$$\sum_{\widetilde{s}=n} (-1)^{|s|} p_n(s) \left(\frac{F_1}{2}\right)^{s_1} \left(\frac{F_2}{2}\right)^{s_2} \cdots \left(\frac{F_n}{2}\right)^{s_n} = \frac{1}{\sqrt{17}}\left(\left(\frac{1-\sqrt{17}}{4}\right)^{n} - \left(\frac{1+\sqrt{17}}{4}\right)^{n}\right),$$

$$\sum_{\widetilde{s}=n} p_n(s) \left(\frac{F_1}{2}\right)^{s_1} \left(\frac{F_2}{2}\right)^{s_2} \cdots \left(\frac{F_n}{2}\right)^{s_n} = \frac{4^n - (-1)^n}{5 \cdot 2^n},$$

$$\sum_{\widetilde{s}=n} (-1)^{|s|} p_n(s) \left(\frac{F_2}{2}\right)^{s_1} \left(\frac{F_3}{2}\right)^{s_2} \cdots \left(\frac{F_{n+1}}{2}\right)^{s_n} = \frac{-2^{n+1} - (-1)^n}{3 \cdot 2^n},$$

$$\sum_{\widetilde{s}=n} (-1)^{|s|} p_n(s) \left(\frac{F_3}{2}\right)^{s_1} \left(\frac{F_4}{2}\right)^{s_2} \cdots \left(\frac{F_{n+2}}{2}\right)^{s_n} = -2^{\frac{1-2n-(-1)^n}{4}},$$

$$\sum_{\widetilde{s}=n} (-1)^{|s|} p_n(s) \left(\frac{F_4}{2}\right)^{s_1} \left(\frac{F_5}{2}\right)^{s_2} \cdots \left(\frac{F_{n+3}}{2}\right)^{s_n} = \frac{4\delta_{n1} - 1}{(-2)^n},$$

$$\sum_{\widetilde{s}=n} (-1)^{|s|} p_n(s) \left(\frac{F_5}{2}\right)^{s_1} \left(\frac{F_6}{2}\right)^{s_2} \cdots \left(\frac{F_{n+4}}{2}\right)^{s_n} = (-1)^n \cdot \left(2 + 2^{-n}\right),$$

$$\sum_{\widetilde{s}=n} p_n(s)\left(\frac{F_1}{2}\right)^{s_1}\left(\frac{F_3}{2}\right)^{s_2}\cdots\left(\frac{F_{2n-1}}{2}\right)^{s_n} = \frac{2\cdot 6^n+3}{15\cdot 2^n},$$

$$\sum_{\widetilde{s}=n}(-1)^{|s|} p_n(s)\left(\frac{F_3}{2}\right)^{s_1}\left(\frac{F_5}{2}\right)^{s_2}\cdots\left(\frac{F_{2n+1}}{2}\right)^{s_n} = -\frac{1}{2}\left(\left(\frac{2+\sqrt{2}}{2}\right)^n+\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right)^n\right),$$

$$\sum_{\widetilde{s}=n}(-1)^{|s|} p_n(s)\left(\frac{F_5}{2}\right)^{s_1}\left(\frac{F_7}{2}\right)^{s_2}\cdots\left(\frac{F_{2n+3}}{2}\right)^{s_n} = \frac{(-1)^n 4\delta_{n1}-1}{2^n},$$

$$\sum_{\widetilde{s}=n}(-1)^{|s|} p_n(s)\left(\frac{F_0}{2}\right)^{s_1}\left(\frac{F_2}{2}\right)^{s_2}\cdots\left(\frac{F_{2n-2}}{2}\right)^{s_n} = \frac{1}{2\sqrt{3}}\left(\left(\frac{3-\sqrt{3}}{2}\right)^{n-1}-\left(\frac{3+\sqrt{3}}{2}\right)^{n-1}\right),$$

$$\sum_{\widetilde{s}=n} p_n(s)\left(\frac{F_0}{2}\right)^{s_1}\left(\frac{F_2}{2}\right)^{s_2}\cdots\left(\frac{F_{2n-2}}{2}\right)^{s_n} = \frac{1}{2\sqrt{7}}\left(\left(\frac{3+\sqrt{7}}{2}\right)^{n-1}-\left(\frac{3-\sqrt{7}}{2}\right)^{n-1}\right),$$

$$\sum_{\widetilde{s}=n}(-1)^{|s|} p_n(s)\left(\frac{F_2}{2}\right)^{s_1}\left(\frac{F_4}{2}\right)^{s_2}\cdots\left(\frac{F_{2n}}{2}\right)^{s_n} = \frac{1-4^n}{3\cdot 2^n},$$

$$\sum_{\widetilde{s}=n}(-1)^{|s|} p_n(s)\left(\frac{F_4}{2}\right)^{s_1}\left(\frac{F_6}{2}\right)^{s_2}\cdots\left(\frac{F_{2n+2}}{2}\right)^{s_n} = 2^{-n}-2,$$

где суммирование производится по всем целым числам $s_j \geq 0$, для которых $\widetilde{s}=n$.

Формулы, аналогичные формулам из Утверждения 2, для чисел Люка, Пелля, Якобсталя, Якобсталя–Люка, Падована и трибоначчи получены нами в [2, 4, 5, 6, 7].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гой Т. П. Определители матриц Теплица–Хессенберга и числа Люка // Математика и естественные науки. Теория и практика: Межвуз. сб. науч. трудов. 2016. Вып. 11. С. 32-36.

2. Гой Т. П. Про нові формули для чисел Фібоначчі // VIII Всеукраинская научно-техническая конференция "Информатика и системные науки": материалы конференции. Всеукраинская конференция (Полтава, 16–18 марта 2017 г.) — Полтава, 2017. С. 51-54.

3. Benjamin A. T., Quinn J. J., Rouse J. A. Fibinomial identities // Applications of Fibonacci numbers. 2004. Vol 10. P. 19-24.

4. Goy T. On Jacobsthal and Jacobsthal–Lucas identities with multinomial coefficients // Международная конференция "Актуальные проблемы чистой и прикладной математики": тезисы докладов. Международная конференция (Алматы, Казастан, 22-25 августа 2017 г.) — Алматы, 2017. С. 61-64.

5. Goy T. On Pell identities with multinomial coefficients // International Conference "Numbers, Forms and Geometry": Proceedings. International Conference (Sochi, 21-26 August, 2017) — Khabarovsk, 2017. P. 23-24.

6. Goy T. Some identities for Padovan numbers via the determinants of Toeplitz–Hessenberg matrices // 30th International Conference of the Jangjeon Mathematical Society "Pure and Applied Mathematics": Book of abstracts. International Conference (Bab-Ezzouar, Algeria, 12-15 July, 2017) — Bab-Ezzouar, 2017. P. 242-244.

7. Goy T. Some tribonacci identities using Toeplitz–Hessenberg determinants // 18th International Scientific M. Kravchuk Conference: Proceedings. International Conference (Kyiv-Lutsk, October 7-10, 2017) — Kyiv, 2017. Vol. 1. P. 159-161.

8. Koshy T. Fibonacci and Lucas Numbers and Applications. — New York: John Wiley & Sons, 2002.

———————————————————————————————

УДК 517

Новые применения теорем о показателе сходимости особых интегралов

И. Ш. Джаббаров Азербайджан, г. Гянджа, Гянджинский Государственный Университет

Л. Г. Казимова Азербайджан, г. Гянджа, Гянджинский Государственный Университет

ilgar_j@rambler.ru

New application of the theorems on convergence exponent of special integrals

Jabbarov I. Sh. Azerbaijan, Ganja, Ganja State University

Kazimova L. G. Azerbaijan, Ganja, Ganja State University

ilgar_j@rambler.ru

Let we are given with some set of real functions i. e. $f_1(x), ..., f_n(x)$ be defined on all real axes or at some its subset. It is best known (see [4, 6]) that for every real number α it is possible to pick up a non-reducible rational number a/q such that

$$\left|\alpha - \frac{a}{q}\right| \leqslant \frac{1}{q^2}. \tag{1}$$

Denoting by $\|\alpha\|$ a distance from α to the nearest integral number, we can write (1) as follows

$$\|q\alpha\| \leqslant q^{-1}.$$

In the work (see [5]) Khintschine A. showed that the system of inequalities

$$\max\left(\|tq\|, \left\|t^2 q\right\|, ..., \|t^n q\|\right) < \delta q^{-1/n}$$

has infinite set of solutions in positive integral numbers $q > 0$ for almost all real t in the Lebesgue sense. It means that for almost all real t there are infinitely many natural numbers $q_1, q_2, ..., q_m, ...$ such that for every natural m the following inequalities are satisfied:

$$\left|t^k - \frac{a_k}{q_m}\right| \leqslant \delta q_m^{-1/n},\ k = 1, ..., n.$$

To define basic notions of the theory, we consider the system of inequalities

$$\max\left(\|\alpha_1 q\|, \|\alpha_2 q\|, ..., \|\alpha_n q\|\right) < q^{-u}, u > 0, \tag{2}$$

Let $u(\alpha_1, ..., \alpha_n)$ be defined as a *sup* of such $u > 0$ for which (1) is satisfied for infinite set of natural numbers q. It is not difficult to show that $u(\alpha_1, ..., \alpha_n) \geqslant 1/n$ (see [6]). From this definition it follows that the inequality (1) is satisfied for infinitely many natural numbers q when $u < 1/n$. When $u(\alpha_1, ..., \alpha_n) = 1/n$ for almost all points of the variety $(\alpha_1, ..., \alpha_n) \in R^n$ of less dimension, then we call it as an *extremal manifold*.

We shall use some auxiliary lemmas. Following is a generalization of the Borel-Kantelly's lemma. The last plays an important role in the questions concerning extremality of manifolds (see[6]).

Lemma 1. Let $A_q\,(q = 1, 2, ...)$ be a sequence of measurable sets in R^n, and

$$\sum_{\mathrm{q}=1}^{\infty} (\mathrm{mes} A_q)^{\ \alpha} < \infty,$$

for some positive real α. Then the measure of such real numbers which fall into infinite number of sets A_q equals to zero.

Below we will use the symbol $<<$ introduced by Vinogradov I. M.. We write $A << B$ if one can find a constant c such that $A \leqslant cB$.

Following lemma belongs to Kovalevskaja (see [6]).

Our next auxiliary tool is an integral analog of Kovalevskaja's lemma.

Lemma 2. Let *m, n, q* be natural numbers, $f_j(\bar{x}), j = 1, ..., N$ be a real measurable functions defined in the cube $\Omega = [0, 1]^r, 1 \leqslant r \leqslant N$. Denote by $\mu(q)$ the measure of a set of that $\bar{x} \in \Omega = [0, 1]^r$ for which

$$\|f_j(\bar{x})\| < q^{-r_j}\,(1 \leqslant j \leqslant N).$$

Then,

$$\mu(q) << q^{-r} \times$$
$$\int_{-(2\pi N)^{-1} q^{r_1}}^{(2\pi N)^{-1} q^{r_1}} \cdots \int_{-(2\pi N)^{-1} q^{r_N}}^{(2\pi N)^{-1} q^{r_N}} \left| \int_E e^{2\pi i(\alpha_1 f_1(\bar{x}) + \cdots + \alpha_N f_N(\bar{x}))} d\bar{x} \right| d\alpha_1 \cdots d\alpha_N;$$

here $r = r_1 + \cdots + r_N$, and the constant in the symbol $<<$ depends on N only.

Consider now two applications of got results. Let we are given with some continuously differentiable r-dimensional manifold $\Gamma = (f_1(\bar{x}), ..., f_n(\bar{x}))$, $\bar{x} \in \Omega = [0, 1]^r, r < n$. Taking natural number such that $rh > n$ consider the map

$$\varphi_j : \Omega^h \to R^n$$

defined by the equalities

$$\varphi_j(\bar{x}) = \varphi_j(\bar{x}_1, ..., \bar{x}_h) = f_j(\bar{x}_1) + \cdots + f_j(\bar{x}_h);\ \bar{x}_s = (x_{s1}, ..., x_{sr}).$$

Let the Jacoby matrix of the map $(\bar{x}_1, ..., \bar{x}_h) \mapsto (\varphi_1(\bar{x}), ..., \varphi_h(\bar{x}_h))$ i. e. the matrix composed of the gradients of the functions $\varphi_1(\bar{x}), ..., \varphi_h(\bar{x}_h)$ be the matrix of maximal rank.

Teorem 1. If the Jacoby matrix of the map $(\bar{x}_1, ..., \bar{x}_h) \mapsto (\varphi_1(\bar{x}), ..., \varphi_h(\bar{x}))$ has a maximal rank for some natural h then the differentiable manifold Γ is extremal.

Consider now the other question on the extremality. We will show that the algebraic variety $\Gamma = (\gamma_1(\bar{x}), ..., \gamma_N(\bar{x}))$ where $\gamma_j(\bar{x}) = x_1^{k_{1j}} x_2^{k_{2j}} \cdots x_r^{k_{rj}}$ are monomials being not a constant, and $0 < k_{1j}, k_{2j}, ..., k_{rj} \leqslant n$, $k_{ij} \geqslant 0$, is extremal. These monomials is a monomials of a polynomial of a view

$$\sum_{n_1=0}^{n} \cdots \sum_{n_k=0}^{n} \alpha_{n_1,\ldots,n_k} x_1^{n_1} x_2^{n_2} \cdots x_r^{n_r}.$$

Theorem 2. The algebraic variety $\Gamma = (\gamma_1(\bar{x}), ..., \gamma_N(\bar{x}))$, for which the conditions above are satisfied is extremal.

The advantage of this theorem consisted in that fact that the map introduced above can have degenerating Jacoby matrix. This fact shows that the class of extremal manifolds is wide. We can await that the manifold $\Gamma = (f_1(\bar{x}), ..., f_N(\bar{x}))$ with any differentiable functions $f_1(\bar{x}), ..., f_N(\bar{x})$ is extremal.

References

1. Arkhipov G. I., Karatsuba A. A., Chubarikov V. N. Thoery of multiple Triqonometric Sums. M., Nauka, 1987, 368 c.

2. Cassels J. W. S. An introduction to Diophantine Approximation.—Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1957.

3. Khintschine A. Uber eine Klasse linearer Diophantischer Approximationen.//Circolo mat. Palermo 50, 1926, 175-195.

4. Sprindzuk V. G. Metric theory of Diophantine Approximations. M. Nauka, 1977.

———————————————————————————

УДК 511.43

Подстановка Рози и геометрия распределения дробных долей линейной функции

А А. Жукова Россия, г. Владимир, Российская академия народного хозяйства и государственной службы при Президенте Российской Федерации, Владимирский филиал

А. В. Шутов Россия, г. Владимир, Владимирский государственный университет имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых

georg967@mail.ru, a1981@mail.ru

Rauzy substitution and geometry of the distributuion of fractional parts of linear function

A. A. Zhukova Russia, Vladimir, The Russian Presidental Academy of National Economy and Public Administration, Vladimir branch

A. V. Shutov Russia, Vladimir, Vladimir State University named after Alexander and Nikolay Stoletovs

georg967@mail.ru, a1981@mail.ru

Пусть α – иррационально. Ключевым фактом, описывающим геометрию распределения дробных долей $\{n\alpha\}$ является знаменитая теорема о трех длинах (см. например обзор [1]). Эта теорема утверждает, что разбиение T_n отрезка $[0; 1)$ точками вида $\{k\alpha\}$ для $1 \leq k \leq n$ содержит отрезки либо двух, либо трех различных длин.

В случае, когда разбиение T_n состоит из отрезков ровно двух различных длин, соответствующие разбиения изучались В.Г.Журавлевым, Н.Н.Мануйловым и А.В.Шутовым под названием обобщенных разбиений Фибоначчи. Обзор свойств этих разбиений для $\alpha = \tau = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ можно найти в [2]. В частности, в [2] было показано, что интервалы разбиений Фибоначчи допускают естественную нумерацию, согласованную со сдвигом $x \to x + \tau \pmod 1$ и позволяющую по номеру интервала разбиения Фибоначчи восстановить номера соседних интервалов.

В настоящее время известно много попыток обобщения теоремы о трех длинах на случай других последовательностей, однако вопрос о правильном ее обобщении на случай распределения дробных долей $(\{n\alpha_1\}, \{n\alpha_2\})$ на $[0;1)^2$ в случсае произвольных α_1, α_2 остается открытым.

Тем не менее, в некоторых случаях, возможно не только обобщение теоремы трех длинах, но и двумерное обобщение понятия разбиений Фибоначчи.

Например, в случае $(\alpha_1, \alpha_2) = (\zeta, \zeta^2)$, где ζ – единственный вещественный корень уравнения $\zeta^3 = \zeta^2 + \zeta + 1$, такие разбиения могут быть построены при помощи геометрической подстановки Рози [3], [4].

Подстановка Рози определена на множестве Λ, состоящем из так называемых базисных квадратов
$$(x, i^*) = \{x + \lambda e_j + \mu e_k : 0 \le \lambda, \mu < 1\},$$
где $i = 1, 2, 3$, $x \in \mathbb{Z}^3$ и $e_1 = (1, 0, 0)^t$, $e_2 = (0, 1, 0)^t$, $e_3 = (0, 0, 1)^t$. Рассмотрим матрицу

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix},$$

называемую матрицей подстановки Рози, и обозначим через f_i i-ый вектор-столбец матрицы M. Тогда подстановка Рози Θ определяется следующим образом:

$$\Theta: \begin{array}{l} (0, 1^*) \to (0, 3^*) \sqcup (f_2, 1^*) \sqcup (f_3, 2^*) \\ (0, 2^*) \to (0, 1^*) \\ (0, 3^*) \to (0, 2^*) \end{array},$$

$$\Theta(x, i^*) = Mx + \Theta(0, i^*),$$
$$\Theta(\coprod_{\lambda \in \Lambda} \lambda) = \coprod_{\lambda \in \Lambda} \Theta(\lambda).$$

Пусть теперь
$$T_n = \coprod_{k=1}^{3} \Theta^n(0, k^*).$$
T_n представляет собой разбиение некоторой области на ромбы трех типов. Как показано в [3], на T_n можно определить некоторое перекладывание областей S, изоморфное сдвигу $(x, y) \to (x, y) + (\zeta, \zeta^2) \pmod{\mathbb{Z}^2}$.

В [4] показано, что T_n представимо в виде

$$T_n = \coprod_{i=0}^{\sharp t_{n+2}-1} R_i^n \sqcup \coprod_{i=0}^{\sharp t_{n+1}+t_n-1} G_i^n \sqcup \coprod_{i=0}^{\sharp t_{n+1}-1} B_i^n,$$

где последовательность t_n определяется соотншением $t_{n+3} = t_{n+2} + t_{n+1} + t_n$ и начальными условиями $t_0 = t_1 = 1$, $t_2 = 2$, а $R_i^n = S^i(0, 1^*)$, $G_i^n = S^i(0, 2^*)$ и $B_i^n = S^i(0, 3^*)$.

Теорема 1. *Множество соседних ромбов для заданного ромба из разбиения T_n есть:*

1. *Для параллелограммов R_i^n:*

   (a) $R^n_{i+t_{n+1}}$, $R^n_{i+t_n+t_{n+1}}$, G^n_i, B^n_i *при* $0 \leqslant i < t_{n-1}$.

   (b) $R^n_{i+t_{n+1}}$, $G^n_{i-t_{n-1}}$, G^n_i, B^n_i *при* $t_{n-1} \leqslant i < t_{n-1} + t_n$.

(c) G_i^n, $G_{i-t_{n-1}}^n$, B_i^n, $B_{i-t_{n-1}-t_n}^n$ *при* $t_{n-1}+t_n \leqslant i < t_{n+1}$.

(d) $R_{i-t_{n+1}}^n$, G_i^n, $G_{i-t_{n-1}}^n$, $B_{i-t_{n-1}-t_n}^n$ *при* $t_{n+1} \leqslant i < t_n + t_{n+1}$.

(e) $R_{i-t_{n+1}}^n$, $R_{i-t_n-t_{n+1}}^n$, $G_{i-t_{n-1}}^n$, $B_{i-t_{n-1}-t_n}^n$ *при* $t_n + t_{n+1} \leqslant i < t_{n+2}$.

2. *Для параллелограммов* G_i^n*:*

(a) R_i^n, $R_{i+t_{n-1}}^n$, $G_{i+t_{n+1}}^n$, B_i^n *при* $0 \leqslant i < t_n$.

(b) R_i^n, $R_{i+t_{n-1}}^n$, B_i^n, $B_{i-t_n}^n$ *при* $t_n \leqslant i < t_{n+1}$.

(c) R_i^n, $R_{i+t_{n-1}}^n$, $G_{i-t_{n+1}}^n$, $B_{i-t_n}^n$ *при* $t_{n+1} \leqslant i < t_{n+1}$.

3. *Для параллелограммов* B_i^n*:* R_i^n, $R_{i+t_{n-1}+t_n}^n$, G_i^n, $G_{i+t_n}^n$ *при* $0 \leqslant i < t_{n+1}$.

Отметим, что границы интервалов для i, определяющих соседство ромбов согласно теореме 1, совпадают с номерами ромбов, соседних с множеством $T_0 = R_0^n \sqcup G_0^n \sqcup B_0^n$. Этот факт допускает существенное обобщение.

Для произвольной пары ромбов X, Y из T_n определим расстояние $d(X,Y)$ как длину кратчайшей цепочки из ромбов, соединяющей X и Y. N-корона $C_N(X)$ есть множество ромбов, находящихся нот X на расстоянии $\leq N$. Аналогично можно определить короны и для множеств ромбов.

Теорема 2. *Пусть*

$$[0; t_{n+2}) = I_0 \sqcup I_1 \sqcup \ldots \sqcup I_m$$

– разбиение полуинтервала $[0; t_{n+2})$ *на замкнутые слева и открытые справа полуинтервалы, границами которых являются номера всех комбов вида* R_k^n*, входящих в* N*-корону* $C_N(R_0^n \sqcup G_0^n \sqcup B_0^n)$*. Тогда* N*-короны* $C_N(R_i^n)$ *и* $C_N(R_j^n)$ *трансляционно эквивалентны тогда и только тогда, когда* i *и* j *принадлежат одному и тому же интервалу* I_l *с некоторым* l*.*

Аналогичные теореме 2 результаты справедливы также для G- и B-ромбов.

Справедлива также следующая теорема.

Теорема 3. *Пусть* $c_n(N)$ *– число классов трансяционной эквивалентнсоти* N*-корон ромбов разбиения* T_n*. Пусть* $N \to \infty$ *так, что* $N = o(\sqrt{n})$*. Тогда справедлива асимптотическая формула*

$$c_n(N) = cN^2 + O(N)$$

с некоторой эффективно вычислимой постоянной c*.*

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Alessandri P., Berthe V. Three distance theorem and combinatorics on words // Enseig. Math. 1998. V. 44. P. 103-132.

2. Журавлев В. Г. Одномерные разбиения Фибоначчи // Изв. РАН. Сер. матем. 2007. Т. 71. Вып. 2. С. 89-122.

3. Pytheas Fogg n. Substitutions in Dynamics, Arithmetics and Combinatorics. —Berlin:Springer-Verlag, 2001. 404 pp.

4. Кузнецова Д. В., Шутов А. В. Перекладывающиеся разбиения тора, подстановка Рози и множества ограниченного остатка // Математические заметки. 2015. Т. 98 Вып. 6. С. 878-897.

———————————————————————————————————

УДК 511.32

Об оценке одной тригонометрической суммы по полупростым числам из виноградовских промежутков

Н. А. Зинченко Российская Федерация, Белгород, Белгородский государственный национальный исследовательский университет
zinchenko@bsu.edu.ru

Estimation of one trigonometric sum with semiprimes from Vinogradov intervals

N. A. Zinchenko Russian Federation, Belgorod, Belgorod State National Research University
zinchenko@bsu.edu.ru

Для решения некоторых бинарных аддитивных задач с полупростыми числами p_1p_2 из промежутков вида $[(2m)^c,(2m{+}1)^c)$, $m\in\mathbb{N}$ и $c\in(1,2]$ (их, обычно, называют виноградовскими [1], [2]) требуется оценка суммы

$$\sum_{\substack{k\leqslant K\\ k\equiv k_0 \pmod x}} \exp(2\pi i\varkappa k^{1/c}),$$

где $P=n^{\frac{1}{(\ln\ln n)^2}}$, $\frac{1}{P_1^{1-\frac{1}{c}}}\leqslant\varkappa\leqslant P^{\frac{1}{c}}\ln^3 n$ и $P_1\in(\exp(\sqrt{\ln n}\,),\ P]$.

Сумма оценивается методом И.М. Виноградова с использованием как теоремы о среднем значении, так и оценок ван дер Корпута по s-й производной [3]. Заметим, что при некоторых значениях параметров сумма является очень короткой. В этих случаях оценить ее методом Корпута нельзя, но метод Виноградова дает нетривиальную оценку. Например, в [4], с использованием оценки подобной суммы, получено неравенство:

$$\sum_{\substack{p_1p_2-xy=1,\ p_1p_2\leqslant n,\ x\leqslant\sqrt{n}P^{-10}\\ \exp(\sqrt{\ln n})<p_1<P,\ p_2>\exp(\sqrt{\ln n})}} e^{\pi i m(p_1p_2)^{1/c}} \ll ne^{-\frac{1}{4}\sqrt{\ln n}},$$

позволяющее получить асимптотическую формулу для числа решений одного диофантова уравнения (аналог проблемы делителей Титчмарша).

Эта же оценка может быть использована и для решения других бинарных аддитивных задач с полупростыми числами специального вида.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Виноградов И. М. Некоторое общее свойство распределения простых чисел // Математический сборник. 1940. № 7. С. 365–372.

2. Гриценко С. А. Об одной задаче И.М. Виноградова // Мат. заметки. 1986. Том 39, вып. 5. С. 625–640.

3. Карацуба А. А. Основы аналитической теории чисел. - М.: Едиториал УРСС, 2004. 184 с.

4. Зинченко Н. А. Бинарная аддитивная задача с полупростыми числами специального вида // Чебышевский сборник. 2005. Том 6. № 2 (14). С. 145–162.

УДК 517.965+517.583

Гиперэллиптические системы последовательностей[1]

А. А. Илларионов Россия, г. Хабаровск, Хабаровское отделение Института прикладной математики ДВО РАН
illar_a@list.ru

Hyperelliptic systems of sequences

A. A. Illarionov Russia, Khabarovsk, Khabarovsk division of Institute of Applied Mathematics, FEB RAS
illar_a@list.ru

Последовательность $h:\mathbb{Z}\to\mathbb{Q}$, удовлетворяющая соотношению

$$h(m+n)h(m-n)=h(m+1)h(m-1)h^2(n)-h(n+1)h(n-1)h^2(m)$$

называется *эллиптической*. Эллиптические последовательности являются последовательностями Сомос-4. Напомним, что если $k\in\{2,3,\ldots\}$ и $(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_{[k/2]})\in\mathbb{C}^{[k/2]}\setminus\{0\}$, то последовательность $A:\mathbb{Z}\to\mathbb{C}$, удовлетворяющая квадратичному рекуррентному соотношению

$$A(n+k)A(n)=\sum_{j=1}^{[k/2]}\alpha_jA(n+k-j)A(n+j)\qquad(n\in\mathbb{Z}),$$

называется *последовательностью Сомос-k*. Такие последовательности обладают рядом замечательных свойств и изучались многими авторами (см., например, [1–3] и ссылки там). Их явный вид нетрудно найти при $k=2,3$. Последовательности Сомоса, удовлетворяющие некоторым дополнительным условиям, также описаны при $k=4,5,6$ (см. [3]) в терминах сигма-функций Вейерштрасса и Клейна.

Быковский (2015) предложил следующую конструкцию.

Определение 1. Пусть не равные тождественно нулю последовательности $A,B:\mathbb{Z}\to\mathbb{C}$ удовлетворяют разложениям

$$A(m+n)B(m-n)=\sum_{j=1}^{N_0}a_j(m)b_j(n),\quad A(m+n+1)B(m-n)=\sum_{j=1}^{N_1}\tilde a_j(m)\tilde b_j(n)\quad(m,n\in\mathbb{Z})$$

с некоторыми $a_j,b_j,\tilde a_j,\tilde b_j:\mathbb{Z}\to\mathbb{C}$ и минимально возможными $N_0,N_1\in\mathbb{Z}_+=\mathbb{N}\cup\{0\}$. Тогда пару (A,B) будем называть *гиперэллиптической системой последовательностей ранга* $R(A,B)=N_0+N_1$.

В докладе будут затронуты следующие вопросы

1. Связь между гиперэллиптическими последовательностями и последовательностями Сомоса. Детерминантные соотношения для гиперэллиптических последовательностей и их следствия.

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект N 18-01-00638)

2. Связь между гиперэллиптическими системами и коэффициентами Фурье 1-периодических решений функционального уравнения

$$f(x+y)g(x-y) = \sum_{j=1}^{N} \phi_j(x)\psi_j(y), \tag{1}$$

где $f, g, \phi_j, \psi_j : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ (неизвестные функции), возникающего при исследовании теорем сложения (для эллиптических функций) и их обобщений

3. Описание гиперэллиптических систем последовательностей ранга $\leqslant 4$.

Один из результатов заключается в следующем.

Теорема 1. *Любая гиперэллиптическая система последовательностей ранга 4 вида (A, A) с точностью до некоторых элементарных преобразований имеет один из следующих четырех типов:*

1) A имеет ровно три ненулевых члена с номерами $n_1 < n_2 < n_3$, причем $n_2 - n_1 \neq n_3 - n_2$;

2) A имеет ровно четыре ненулевых члена с номерами $n_1 < n_2 < n_3 < n_4$, причем $n_2 - n_1 = n_4 - n_3$;

3) существуют взаимно простые целые $d \geqslant 2$ и n_1 такие, что

$$A(n) = \begin{cases} 1, & n \equiv 0 \pmod{d}, \\ e(\beta n + \gamma), & n \equiv n_1 \pmod{d}, \\ 0, & \textit{во всех остальных случаях,} \end{cases}$$

где $\beta, \gamma \in \mathbb{C}$, причем $\beta \notin \frac{1}{4}\mathbb{Z}$ при $d = 2$;

4) $A(n) = \sigma_L(z_0 + nz_1)$, где σ_L — сигма-функция Вейерштрасса, ассоциированная с (возможно вырожденной) решеткой L, а $z_0, z_1 \in \mathbb{C}$, причем $z_1 \notin \frac{1}{2}L$.

Функциональное уравнение (1) ранее было решено только при $N = 1$ (тривиальный случай), $N = 2$ (см. [4]) и $N = 3$ (см. [5]). Теорема 1 позволяет решить уравнение (1) в классе 1-периодических функций при $N = 4$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. C.S. Swart, Elliptic curves and related sequences. PhD Thesis. L.: Royal Holloway, Univ. London, 2003

2. A.N. Hone, C. Swart, Integrality and the Laurent phenomenon for Somos 4 and Somos 5 sequences // Math. Proc. Camb. Philos. Soc. V. 145, N 1, 2008, 65–85

3. Y. Fedorov, A.N. Hone, Sigma-function solution to the general Somos-6 recurrence via hyperelliptic Prym varieties // Journal of Integrable Systems. V.1, N 1, 2016.

4. R. Rochberg, L. Rubel, A Functional Equation // Indiana Univ. Math. J. V. 41, N 2, 1992, 363–376

5. А.А. Илларионов, Функциональное уравнение и сигма-функция Вейерштрасса // Функц. анализ и его приложения. V. 50, N 4, 2016, 43–54

УДК 517.965+517.583

Гиперквазимногочлены для тэта-функции[1]

А. А. Илларионов Россия, г. Хабаровск, Хабаровское отделение Института прикладной математики ДВО РАН
М. А. Романов Россия, г. Хабаровск, Хабаровское отделение Института прикладной математики ДВО РАН
illar_a@list.ru, mark-479@mail.ru

Hyperquasipolynomials for theta function

A. A. Illarionov Russia, Khabarovsk, IAM FEB RAS, Khabarovsk
M. A. Romanov Russia, Khabarovsk, IAM FEB RAS, Khabarovsk
illar_a@list.ru, mark-479@mail.ru

Рассмотрим функциональное уравнение

$$f(x+y)g(x-y)=\sum_{j=1}^{r}\alpha_j(x)\beta_j(y) \tag{1}$$

относительно неизвестных $f, g, \alpha_j, \beta_j : \mathbb{C}\to\mathbb{C}$. Оно тесно связано с теоремами сложения. Например, для тэта-функции Якоби

$$\theta(z)=\theta(z;\tau)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\exp(\pi i n^2\tau+2\pi i n z) \qquad (\tau\in\mathbb{C},\ \operatorname{Im}\tau>0)$$

справедлива формула

$$\theta(x+y)\theta(x-y)\theta^2(0)=\theta^2(x)\theta^2(y)+\theta_{11}^2(x)\theta_{11}^2(y),$$

где θ_{11} — тэта-функция с характеристиками $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$. Уравнение (1) является частным случаем (при $s=2$) функциональных соотношений вида

$$f_1(x_1+z)\ldots f_{s-1}(x_{s-1}+z)f_s(x_1+\ldots+x_{s-1}-z)=\sum_{j=1}^{m}\varphi_j(x_1,\ldots,x_{s-1})\psi_j(z), \tag{2}$$

возникающих при исследовании s-линейных функционально-дифференциальных уравнений и векторных теорем сложения [1, 2, 3]. В свою очередь, исследование (2) можно свести к изучению (1) (см. [4, 6]).

Уравнение (1) рассматривалось многими авторами (см., например, [9, 8, 4, 5, 6] и ссылки там). Оно решено в [9] при $r=2$ и в [6] при $r=3$. Вопрос об описании множества решений при $r\geqslant 4$ является открытым. Уравнение (2) решено только при $s=3$, $m\leqslant 4$ (см. [4, 6]).

Напомним, что функция

$$f(z)=\sum_{l=1}^{n}P_l(z)e^{\lambda_l z},$$

где $\lambda_l\in\mathbb{C}$, а P_l — многочлен, называется квазимногочленом. Если Q — квазимногочлен и $Q\not\equiv 0$, то нетрудно проверить, что любая целая функция f, удовлетворяющая разложению вида (1), также есть *квазимногочлен* (см. [4]).

Для любой $h:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ определим множество $V(h)$ как линейную оболочку (над полем $\mathbb{C}$) множества функций вида $z\to Q(z)h^{(k)}(z+z_0)$, где $k\in\mathbb{N}\cup\{0\}$, $z_0\in\mathbb{C}$, а Q — квазимногочлен. В докладе речь пойдет о следующем результате.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 17-01-00225)

Теорема 1. *Если $g \in V(\theta)\backslash\{0\}$, то любая целая функция, удовлетворяющая разложению (1) вместе с некоторыми $\alpha_j, \beta_j : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ и $r \in \mathbb{N}$, также принадлежит $V(\theta)$.*

Из теоремы вытекает

Следствие 1. *Пусть $f_1, \ldots, f_s$ — целые не равные тождественно нулю функции, причем хотя бы одна из них принадлежит $V(\theta)$. Тогда функции $f_1, \ldots, f_s$ удовлетворяют разложению (2), если и только если $\{f_1, \ldots, f_s\} \subset V(\theta)$.*

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. В.М. Бухштабер, Д.В. Лейкин. Трилинейные функциональные уравнения // УМН. 2005. Том 60 № 2. С. 151–152.

2. В.М. Бухштабер, Д.В. Лейкин. Законы сложения на якобианах плоских алгебраических кривых // Тр. МИАН. 2005. Том 251. С. 54–126.

3. В.М. Бухштабер, И.М. Кричевер. Интегрируемые уравнения, теоремы сложения и проблема Римана–Шоттки // УМН. 2006. Том 61 № 1. С. 25–84.

4. В.А. Быковский. Гиперквазимногочлены и их приложения // Функц. анализ и его приложения. 2016. Том 50 № 3. С. 34–46.

5. А.А. Илларионов. Функциональное уравнение и сигма-функция Вейерштрасса // Функц. анализ и его приложения. 2016. Том 50 № 4. С. 43–54.

6. А.А. Илларионов. Решение функциональных уравнений, связанных с эллиптическими функциями // Аналитическая теория чисел. Сборник статей. К 80-летию со дня рождения Анатолия Алексеевича Карацубы. Тр. МИАН. 2017. Том 299. С. 96–108.

7. M. Bonk. The Characterization of Theta Functions by Functional Equations // Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg. 1995. Vol. 65. PP. 29–55.

8. M. Bonk. The addition formula for theta function // Aequationes Math. 1997. Vol. 53 No. 1-2. PP. 54–72.

9. R. Rochberg, L. Rubel. A Functional Equation // Indiana Univ. Math. J. 1992. Vol. 41 No. 2. PP. 363–376.

УДК 511.556

Интервалы между числами, представимыми в виде суммы двух квадратов

А. Б. Калмынин Россия, г. Москва, Национальный Исследовательский Университет «Высшая Школа Экономики»
alkalb1995cd@mail.ru

Intervals between numbers which can be expressed as sum of two squares

A. B. Kalmynin(Russia, Moscow, National Research University Higher School of Economics
alkalb1995cd@mail.ru

Пусть $s_1 = 1 < s_2 = 2 < s_3 = 4 < \ldots < s_n < \ldots$— последовательность всех натуральных чисел, представимых в виде суммы двух квадратов целых чисел. Естественно задаться вопросом о том, как последовательность $\{s_n\}$ распределена в коротких отрезках положительного луча вещественной прямой. А именно, для каких бесконечно возрастающих функций $h : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ отрезок $[x; x+h(x)]$ содержит число, представимое суммой двух квадратов, для всех достаточно больших x. Или, что эквивалентно, для каких $h(x)$ при достаточно больших x выполнено неравенство

$$R(x) \leq \frac{h(x)}{2} \tag{1}$$

где $R(x) = \min\limits_{n>0} |x - s_n|$ означает расстояние от числа x до ближайшей суммы двух квадратов. Оказывается [1] (см. также [4], 2e), существует такая положительная константа C, что $R(x) \leq Cx^{1/4}$ для всех $x > 0$. К сожалению, эта оценка до сих пор не улучшена и неизвестно даже, верно ли, что $R(x) = o(x^{1/4})$. Однако, помимо равномерных оценок для $R(x)$ можно также рассматривать и степенные моменты этой функции, то есть находить верхние оценки для величин

$$\int_0^x R(t)^\gamma dt \tag{2}$$

для растущих x и фиксированных положительных γ. Можно показать, что эта задача эквивалентна вопросу о верхних оценках для величин

$$\sum_{s_{n+1} \leq x} (s_{n+1} - s_n)^{\gamma+1}, \tag{3}$$

то есть степенных моментов промежутков между соседними элементами последовательности $\{s_n\}$.

В работе [3] был доказан следующий результат:

Теорема 1. *Для всех $0 \leq \gamma < 1$ выполнена оценка*

$$\sum_{s_{n+1} \leq x} (s_{n+1} - s_n)^{\gamma} \ll x(\ln x)^{\frac{3}{2}(\gamma-1)} \tag{4}$$

Доказательство теоремы 1 опирается на конструкцию форм типа Якоби, принадлежащую Н. Кузнецову [5] и А. Коэну [2]. Частным случаем их конструкции является следующая формула:

Теорема 2. *Пусть N и M — положительные вещественные числа. Справедливо равенство*

$$\sum_{n\geq 0} r_2(n) J_0(2\pi\sqrt{nN}) e^{-\frac{\pi n}{M}} = M e^{-\pi NM} \sum_{n\geq 0} r_2(n) I_0(2\pi M\sqrt{Nn}) e^{-\pi nM}, \qquad (5)$$

где $r_2(n)$ есть количество решений уравнения $a^2+b^2=n$ в целых числах, а $J_0(x)$ и $I_0(x)$ — обыкновенная и модифицированная функция Бесселя первого рода соответственно.

В докладе обсуждаются способы доказательства и обобщения теоремы 2, а также приложения этого утверждения к вопросам распределения промежутков между суммами двух квадратов.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Bambah, R. P.; Chowla, S. On numbers which can be expressed as a sum of two squares. // Proc. Nat. Inst. Sci. India 13, (1947). 101-103.
2. Cohen, H., Sums Involving the Values at Negative Integers of L-Functions of Quadratic Characters // Mathematische Annalen 217 (1975): 271-285.
3. Kalmynin A., Intervals between numbers that are sums of two squares, [arXiv.org], https://arxiv.org/pdf/1706.07380.
4. Карацуба А. А., Эйлер и теория чисел // Леонард Эйлер и современная математика, Сборник докладов, Совр. пробл. матем., 11, МИАН, М., 2008, 19–37;
5. Kuznetsov, N. V., New class of identities for Fourier coefficients of modular forms // Acta Arithmetica,27, 505-519 (1975)

———————————————————————————

УДК 511.32

Универсальность периодической дзета-функции Гурвица с рациональным параметром

А. Лауринчикас, Литва, г. Вильнюс, Вильнюский университет
Д. Мохов Литва, г. Вильнюс, Вильнюский университет
antanas.laurincikas@mif.vu.lt, dmitrij.mochov@mif.vu.lt

Universality of the periodic Hurwitz zeta-function with rational parameter

A. Laurinčikas Lithuania, Vilnius, Vilnius University
D. Mochov Lithuania, Vilnius, Vilnius University
antanas.laurincikas@mif.vu.lt, dmitrij.mochov@mif.vu.lt

The classical Hurwitz zeta-function $\zeta(s,\alpha)$, $\sigma = s + i\tau$, with parameter α, $0 < \alpha \leqslant 1$, is defined, for $\sigma > 1$, by the Dirichlet series

$$\zeta(s,\alpha) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(m+\alpha)^s}$$

and is analytically continued to the whole complex plane, except for a simple pole at the point $s = 1$ with residue 1. A natural generalization of function $\zeta(s,\alpha)$, the periodic Hurwitz zeta-function has been introduced in [1]. Let $\mathfrak{a} = \{a_m : m \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}\}$ be a periodic sequence of complex numbers with minimal period $q \in \mathbb{N}$. Then the periodic Hurwitz zeta-function $\zeta(s,\alpha;\mathfrak{a})$ is defined, for $\sigma > 1$, by the Dirichlet series

$$\zeta(s,\alpha;\mathfrak{a}) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{a_m}{(m+\alpha)^s}.$$

In view of periodicity of the sequence $\mathfrak{a}$,

$$\zeta(s,\alpha;\mathfrak{a}) = \frac{1}{q^s} \sum_{l=0}^{q-1} a_l \zeta\left(s, \frac{\alpha+l}{q}\right).$$

Therefore, the function $\zeta(s,\alpha;\mathfrak{a})$ also has meromorphic continuation to the whole complex plane with unique simple pole at the point $s = 1$ with residue

$$R \overset{def}{=} \frac{1}{q} \sum_{l=0}^{q-1} a_l.$$

If $R = 0$, then the function is entire.

The function $\zeta(s,\alpha;\mathfrak{a})$, as the majority if other zeta-functions, for some parameters α and sequences $\mathfrak{a}$, is universal in the Voronin sense, i.e., its shifts $\zeta(s+i\tau,\alpha;\mathfrak{a})$ approximate analytic functions. The case of transcendental α has been studied in [1], [2]. We remind a more general result of [4]. Let $D = \left\{s \in \mathbb{C} : \frac{1}{2} < \sigma < 1\right\}$. Denote by $\mathcal{K}$ the class of compact subsets of the strip D with connected complements, and by $H(K)$, $K \in \mathcal{K}$, the class of continuous functions on K that are analytic in the interior of K. Moreover, let $L(\alpha) = \{\log(m+\alpha) : m \in \mathbb{N}_0\}$. Then the following statement is true [4].

Theorem 1. *Suppose that the set $L(\alpha)$ is linearly independent over the field of rational numbers $\mathbb{Q}$. Let $K \in \mathcal{K}$ and $f(s) \in H(K)$. Then, for every $\varepsilon > 0$,*

$$\liminf_{T\to\infty} \frac{1}{T} \operatorname{meas}\left\{\tau \in [0,T] : \sup_{s\in K} |\zeta(s+i\tau,\alpha;\mathfrak{a}) - f(s)| < \varepsilon\right\} > 0.$$

Clearly, the set $L(\alpha)$ is linearly independent over $\mathbb{Q}$ if α is transcendental.

The case of rational α is more complicated, and uses a certain relation between α and $\mathfrak{a}$. Suppose that $\alpha = \frac{a}{b} \neq \frac{1}{2}$ with $a, b \in \mathbb{N}$ and $(a,b) = 1$. Then we have the following statement.

Theorem 2. *Suppose that $(lb+a, bq) = 1$ for $l = 0, 1, \dots, q-1$. Let $K \in \mathcal{K}$ and $f(s) \in H(K)$. Then the conclusion of Theorem 1 is true.*

For the proof of Theorem 2, the expression of the function $\zeta\left(s, \frac{a}{b}; \mathfrak{a}\right)$ by Dirichlet L-functions is applied. More precisely, the equality

$$\zeta\left(s, \frac{a}{b}; \mathfrak{a}\right) = \frac{b^s}{\varphi(bq)} \sum_{l=0}^{q-1} a_l \sum_{\chi (\mathrm{mod}\, bq)} \overline{\chi}(bl+a) L(s,\chi),$$

where $\varphi(m)$ denotes the Euler totient function.

A first discrete universality theorem for the function $\zeta(s,\alpha;\mathfrak{a})$ with transcendental α has been obtained in [3]. We state a more general result obtained in [5]. For $h > 0$, define the set

$$L(\alpha,h,\pi) = \left\{(\log(m+\alpha) : m \in \mathbb{N}_0), \frac{2\pi}{h}\right\},$$

and denote by $\# A$ the cardinality of a set A. Then the following theorem is true [5].

Theorem 3. *Suppose that the set $L(\alpha, h, \pi)$ is linearly independent over $\mathbb{Q}$. Let $K \in \mathcal{K}$ and $f(s) \in H(K)$. Then, for every $\varepsilon > 0$,*

$$\liminf_{N\to\infty} \frac{1}{N+1} \# \left\{ 0 \leqslant k \leqslant N : \sup_{s\in K} |\zeta(s+ikh, \alpha; \mathfrak{a}) - f(s)| < \varepsilon \right\} > 0.$$

For example, the set $L(\alpha, h, \pi)$ is linearly independent over $\mathbb{Q}$ if $\alpha = \frac{1}{\pi}$ and h is rational.

Theorem 2 has a discrete version. Let, as above, $\alpha = \frac{a}{b} \neq \frac{1}{2}$.

Theorem 4. *Suppose that $(lb + a, bq) = 1$ for $l = 0, 1, \ldots, q-1$. Let $K \in \mathcal{K}$ and $f(s) \in H(K)$. Then, for every $\varepsilon > 0$ and $h > 0$,*

$$\liminf_{N\to\infty} \frac{1}{N+1} \# \left\{ 0 \leqslant k \leqslant N : \sup_{s\in K} \left| \zeta\left(s+ikh, \frac{a}{b}; \mathfrak{a}\right) - f(s) \right| < \varepsilon \right\} > 0.$$

In all above theorems, "$\liminf$" can be replaced by "$\lim$". For example, we have the following statement.

Theorem 5. *Under hypotheses of Theorem 4, for every $h > 0$, the limit*

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N+1} \# \left\{ 0 \leqslant k \leqslant N : \sup_{s\in K} \left| \zeta\left(s+ikh, \frac{a}{b}; \mathfrak{a}\right) - f(s) \right| < \varepsilon \right\} > 0$$

exists for all but at most countably many $\varepsilon > 0$.

The universality of the function $\zeta(s, \alpha; \mathfrak{a})$ with algebraic irrational parameter α remains an open problem.

Some composite functions $F\left(\zeta\left(s, \frac{a}{b}; \mathfrak{a}\right)\right)$ also have the universality property. We will give one example. For $V > 0$, let $D_V = \left\{ s \in \mathbb{C} : \frac{1}{2} < \sigma < 1, |t| < V \right\}$, and $H(D_V)$ be the space of analytic functions on D_V endowed with the topology of uniform convergence on compacta.

Theorem 6. *Suppose that a, b, q and K, $f(s)$ are as in Theorem 4, $V > 0$ is such that $K \subset D_V$, and $F : H(D_V) \to H(D_V)$ is a continuous operator such that, for every open set $G \subset H(D_V)$, the set $F^{-1}G$ is non empty. Then, for every $\varepsilon > 0$ and $h > 0$,*

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N+1} \# \left\{ 0 \leqslant k \leqslant N : \sup_{s\in K} \left| F\left(\zeta\left(s+ikh, \frac{a}{b}; \mathfrak{a}\right)\right) - f(s) \right| < \varepsilon \right\} > 0.$$

REFERENCES

1. Javtokas A., Laurinčikas A. On the periodic Hurwitz zeta-function // Hardy-Ramanujan J. 2006. Vol. 29. P. 18–36.

2. Javtokas A., Laurinčikas A. Universality of the periodic Hurwitz zeta-function // Integral Transf. Spec. Funct. 2006. Vol. 17. P. 711–722.

3. Laurinčikas A., Macaitienė R. The discrete universality of the periodic Hurwitz zeta-functions // Integral Transf. Spec. Funct. 2009. Vol. 20. P. 673–686.

4. Laurinčikas A., Macaitienė R., Mochov D., Šiaučiūnas D. On universality of certain zeta-functions // Izv. Saratov. Univ., Ser. Matem., Mekhan., Inform. 2013. Vol. 13. P. 67–72.

5. Mincevič A., Mochov D. On the discrete universality of the periodic Hurwitz zeta-function // Šiauliai Math. Semin. 2015. Vol. 10(18). P. 81–89.

УДК 511.32

Дискретная универсальность дзета-функций параболических форм[1]

А. Лауринчикас Литва, г. Вильнюс, Вильнюский университет
Д. Шяучюнас Литва, г. Шяуляй, Шяуляйский университет
antanas.laurincikas@mif.vu.lt, darius.siauciunas@su.lt

Discrete universality of zeta-functions of certain cusp forms

A. Laurinčikas Lithuania, Vilnius, Vilnius University
D. Šiaučiūnas Lithuania, Šiauliai, Šiauliai University
antanas.laurincikas@mif.vu.lt, darius.siauciunas@su.lt

Let

$$SL(2,\mathbb{Z}) \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a,b,c,d \in \mathbb{Z},\ ad-bc=1 \right\}$$

be the full modular group. The function $F(z)$ is called a holomorphic cusp form of weight κ for $SL(2,\mathbb{Z})$ if $F(z)$ is holomorphic for $\operatorname{Im} z > 0$, for all $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2,\mathbb{Z})$ satisfies the functional equation

$$F\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = (cz+d)^\kappa F(z),$$

and at infinity has the Fourier series expansion

$$F(z) = \sum_{m=1}^{\infty} c(m) \mathrm{e}^{2\pi i m z}.$$

We additionally assume that the cusp form $F(z)$ is a normalized Hecke-eigen cusp form, i.e., is an eigen form of all Hecke operators

$$T_m F(z) = m^{\kappa-1} \sum_{\substack{a,d>0 \\ ad=m}} \frac{1}{d^\kappa} \sum_{b (\operatorname{mod} d)} F\left(\frac{az+b}{d}\right), \quad m \in \mathbb{N}.$$

In this case, $c(m) \neq 0$, therefore, after normalization, we may assume that $c(1) = 1$.

The zeta-function $\zeta(s,F)$ of the form $F(z)$ is defined, for $\sigma > \frac{\kappa+1}{2}$, by the Dirichlet series

$$\zeta(s,F) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{c(m)}{m^s},$$

and can be continued analytically to an entire function. Moreover, the function $\zeta(s,F)$, for $\sigma > \frac{\kappa+1}{2}$, has the Euler product expansion over primes

$$\zeta(s,F) = \prod_p \left(1 - \frac{\alpha(p)}{p^s}\right)^{-1} \left(1 - \frac{\beta(p)}{p^s}\right)^{-1},$$

[1]The research of the first author is funded by the European Social Fund according to the activity "Improvement of researchers" qualification by implementing world-class R&D projects' of Measure No. 09.3.3-LMT-K-712-01-0037.

where $\alpha(p)$ and $\beta(p)$ are conjugate complex numbers satisfying $\alpha(p)+\beta(p)=c(p)$.

The universality in the Voronin sense of the function $\zeta(s,F)$ was obtained in [3]. Let $D=D_F=\left\{s\in\mathbb{C}:\ \frac{\kappa}{2}<\ \sigma<\frac{\kappa+1}{2}\right\}$. Denote by $\mathcal{K}=\mathcal{K}_F$ the class of compact subsets of the strip D with connected complements, and by $H_0(K)=H_{0F}(K)$, $K\in\mathcal{K}$, the class of continuous non-vanishing functions on K that are analytic in the interior of K. Let $\operatorname{meas}A$ stand for the Lebesgue measure of a measurable set $A\subset\mathbb{R}$. Then the following statement is true [3].

Theorem 1. *Suppose that $K\in\mathcal{K}$ and $f(s)\in H_0(K)$. Then, for every $\varepsilon>0$,*

$$\liminf_{T\to\infty}\frac{1}{T}\operatorname{meas}\left\{\tau\in[0,T]:\sup_{s\in K}|\zeta(s+i\tau,F)-f(s)|<\varepsilon\right\}>0.$$

Some generalizations of Theorem 1 were given in [4] and [2].

Theorem 1 has a discrete version when τ in $\zeta(s+i\tau,F)$ takes values from a certain discrete set. One of the simplest discrete sets is the arithmetic progression $\{kh:k\in\mathbb{N}_0=\mathbb{N}\cup\{0\}\}$, where $h>0$ is a fixed number. Denote by $\#A$ the cardinality of a set A. Then a discrete analogue of Theorem 1 is of the following form [5], [6].

Theorem 2. *Suppose that $K\in\mathcal{K}$ and $f(s)\in H_0(K)$, and that $h>0$ is a fixed number. Then, for every $\varepsilon>0$,*

$$\liminf_{N\to\infty}\frac{1}{N+1}\#\left\{0\leqslant k\leqslant N:\sup_{s\in K}|\zeta(s+ikh,F)-f(s)|<\varepsilon\right\}>0.$$

We note that the proof of Theorem 2 is more complicated than that of Theorem 1. Two cases of the number h are considered: when the number $\exp\left\{\frac{2\pi m}{h}\right\}$ is irrational for all $m\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$, and when the number $\exp\left\{\frac{2\pi m}{h}\right\}$ is rational for some $m\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$.

There exists a problem to extend Theorem 2 for discrete sets more complicated than $\{kh\}$. The first attempt in this direction was made in [1], where the set $\{k^\alpha h:k\in\mathbb{N}_0\}$ with a fixed α, $0<\alpha<1$, was considered. Our aim is to obtain the approximation of analytic functions by shifts $\zeta(s+i\varphi(k),F)$ for some class of functions $\varphi(t)$. Let $k_0\in\mathbb{N}$. We say that a function $\varphi\in U(k_0)$ if the following hypotheses are satisfied:

1. $\varphi(t)$ is a real-valued positive increasing function on $\left[k_0-\frac{1}{2},\infty\right)$.
2. $\varphi(t)$ has a continuous derivative $\varphi'(t)$ on $\left[k_0-\frac{1}{2},\infty\right)$ satisfying the estimate
$$\varphi(2t)\max_{t\leqslant u\leqslant 2t}\frac{1}{\varphi'(u)}\ll t.$$
3. The sequence $\{a\varphi(k):k\geqslant k_0\}\subset\mathbb{R}$ with every $a\neq 0$ is uniformly distributed modulo 1.

Our main result is the following theorem.

Theorem 3. *Suppose that $\varphi\in U(k_0)$. Let $K\in\mathcal{K}$ and $f(s)\in H_0(K)$. Then, for every $\varepsilon>0$,*

$$\liminf_{N\to\infty}\frac{1}{N-k_0+1}\#\left\{k_0\leqslant k\leqslant N:\sup_{s\in K}|\zeta(s+i\varphi(k),F)-f(s)|<\varepsilon\right\}>0.$$

Theorem 3 has the following modification.

Theorem 4. *Suppose that $\varphi\in U(k_0)$. Let $K\in\mathcal{K}$ and $f(s)\in H_0(K)$. Then the limit*

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N-k_0+1}\#\left\{k_0\leqslant k\leqslant N:\sup_{s\in K}|\zeta(s+i\varphi(k),F)-f(s)|<\varepsilon\right\}>0$$

exists for all but at most countably many $\varepsilon>0$.

Proof of Theorems 3 and 4 is based on a limit theorem for weakly convergent probability measures on the space of analytic functions. The details can be found in [7].

REFERENCES

1. Laurinčikas A. Uniform distribution modulo 1 and the universality of zeta-functions of certain cusp forms // Publ. Inst. Math. Beograd. 2016. Vol. 100. P. 131–140.
2. Laurinčikas A, Macaitienė R. On the universality of zeta-functions of certain cusp forms // Analytic and Probabilistic Methods in Number Theory. A. Laurinčikas, E. Manstavičius, G. Stepanauskas (Eds.). Vilnius: TEV, 2012. P. 273–283.
3. Laurinčikas A., Matsumoto K. The universality of zeta-functions attached to certain cusp forms // Acta. Arith. 2001. Vol. 98. P. 345–359.
4. Laurinčikas A., Matsumoto K., Steuding J. The universality of L-functions associated with new forms // Izv. Math. 2003. Vol. 67. P. 77–90.
5. Laurinčikas A., Matsumoto K., Steuding J. Discrete universality of L-functions for new forms // Math. Notes. 2005. Vol. 78. P. 551–558.
6. Laurinčikas A., Matsumoto K., Steuding J. Discrete universality of L-functions of new forms // Lith. Math. J. 2016. Vol. 56. P. 207–218.
7. Laurinčikas A., Šiaučiūnas D., Vaiginytė A. Extension of the discrete universality theorem for zeta-functions of certain cusp forms // Nonlinear Analysis: Modelling and Control (submitted).

———————————————————————————————

УДК 517.52+512.742.72

О ранге Сомос-6 [1]

Н. В. Маркова Россия, г. Хабаровск, Хабаровское отделение Федерального государственного бюджетного учреждения науки Института прикладной математики Дальневосточного отделения Российской академии наук
nata_mark@mail.ru

About rank of Somos-6

N. V. Markova Russia, Khabarovsk, Khabarovsk Division of the Institute for Applied Mathematics, Far Eastern Branch, Russian Academy of Sciences
nata_mark@mail.ru

Для натурального $k \geqslant 2$ последовательность Сомос-k: $A\ :\ \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ удовлетворяет квадратичному рекуррентному соотношению

$$A(n+k)A(n) = \sum_{j=1}^{[k/2]} \alpha_j A(n+k-j)A(n+j)$$

с константами α_j. В ситуации общего положения, за исключением некоторых вырожденных случаев, эта последовательность однозначно определяется коэффициентами $\alpha_1, \ldots, \alpha_{[k/2]}$ и начальными значениями $A(1), \ldots, A(k)$.

Из работы [1] следует, что Сомос-4 имеет ранг 2. Из соотношений Римана (см. [1], [2]) следует, что ранг Сомос-6 меньше или равен 4. В докладе будет представлен пример с рангом 4.

[1]Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 14-11-00335)

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Hone A. N. W. Elliptic curves and quadratic recurrence sequences // Bulletin of the London Mathematical Society. 2005. Vol. 37. P. 161-171.

2. Fedorov Y. N., Hone A. N. W. Sigma function solution of the general Somos-6 recurrence via hyperelleptic Prym varieties // Journal of Integrable Systems. 2016. Vol. 1. P. 1-34.

УДК 511.556

О представлении целых чисел неопределёнными квадратичными формами

Б. З. Мороз Россия, г. Москва, Кафедра дискретной математики, Московский физико-технический институт
moroz.bb@mipt.ru

On representation of integers by indefinite quadratic forms

B. Z. Moroz Russia, Moscow, Department of discrete mathematics, Moscow Institute of physics and technology
moroz.bb@mipt.ru

Это сообщение носит методический характер. Я расскажу о распределении целых точек на квадриках от 4-х и более переменных в свете одной не часто цитируемой работы Зигеля.

УДК 517.3

О нелинейных диофантовых неравенствах с простыми числами

А. П. Науменко Россия, г. Москва, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
naumenko.anton90@gmail.com

Nonlinear diophantine inequalities with primes

A. P. Naumenko Russia, Moscow, Moscow State University
naumenko.anton90@gmail.com

Со времен Римана известны формулы, связывающие суммы по простым числам с суммами по нетривиальным нулям дзета-функции Римана. Такие формулы называются явными. Одной из самых известных явных формул (см., например, [1]) является равенство:

$$\psi(x) = \sum_{n\le x}\Lambda(n) = x - \sum_{|Im\rho|\le T}\frac{x^\rho}{\rho} + O\left(\frac{x\ln^2 x}{T}\right),$$

где $2 \le T \le x$, $\rho = \beta + i\gamma$ – нули $\zeta(s)$ в критической полосе.

Оценки вида

$$N(\sigma, T) \ll T^{2\lambda(1-\sigma)}\ln^c T, c \ge 1,$$

где λ и c – константы, называются плотностными теоремами. Наилучшим современным значением λ на всем промежутке $1/2 \le \sigma < 1$ является $\lambda = \frac{6}{5}$ (см. [2]).

Кроме того, мы будем использовать следующие плотностные теоремы (см. [3]):

$$N(\sigma,T) \ll T^{\frac{4(1-\sigma)}{2\sigma+1}+\varepsilon}, \quad 17/18 \le \sigma \le 1, \tag{1}$$

$$N(\sigma,T) \ll T^{\frac{3(1-\sigma)}{2\sigma}+\varepsilon}, \quad 0.799 \le \sigma \le 1, \tag{2}$$

где ε – сколь угодно малое положительное число, $T > T_0(\varepsilon)$.

Также нам потребуется теорема [4], которая на данный момент является наилучшим результатом о "близости" простого числа к произвольному натуральному:

Теорема 1. *Пусть $\eta = \frac{21}{40}$. Если $H > N^{\eta+\varepsilon}$, то неравенство*

$$|p - N| \le H, \tag{3}$$

разрешимо в простых числах для любого $N > N_0(\varepsilon)$. Для числа решений неравенства (4) справедлива оценка $J(N,H) \gg \frac{H}{\ln N}$.

В сороковых годах двадцатого века Ю.В. Линник разработал новую технику решения арифметических задач с простыми числами, основанную на явных формулах и плотностных теоремах. Данная техника получила название плотностной. Плотностная техника особенно эффективна при решении задач о попадании простых чисел в короткие промежутки.

В 2012 году в работе [5] Н.Т. Ча и С.А. Гриценко при помощи плотностной техники получили следующие результаты.

Теорема 2. *Если $H > \sqrt{N}\exp(\ln^{-0.1} N)$, то неравенство*

$$|p_1^2 + p_2^2 - N| \le H,$$

разрешимо в простых числах p_1 и p_2.

Теорема 3. *Пусть λ – константа из плотностной теоремы.*
Если $H > N^{(1-(2\lambda)^{-1})^2}\exp(\ln^{0.8} N)$, то неравенство

$$|p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 - N| \le H,$$

разрешимо в простых числах p_1, p_2 и p_3.

Теорема 4. *Пусть λ – константа из плотностной теоремы.*
Если $H > N^{(1-\lambda^{-1})(1-(2\lambda)^{-1})}\exp(\ln^{0.8} N)$, то неравенство

$$|p_1 + p_2 - N| \le H,$$

разрешимо в простых числах p_1 и p_2.

Сформулируем основные результаты данной работы.

Теорема 5. *Если $H > N^{\frac{31}{64}+\varepsilon}$, то неравенство*

$$|p_1^2 + p_2^2 - N| \le H,$$

разрешимо в простых числах p_1 и p_2 при любом $N > N_0(\varepsilon)$.

Теорема 6. *Пусть λ – константа из плотностной теоремы.*
Если $H > N^{\frac{31}{64}\cdot(1-(2\lambda)^{-1})+\varepsilon}$, то неравенство

$$|p_1^2 + p_2^2 + p_3^3 - N| \le H,$$

разрешимо в простых числах p_1, p_2 и p_3 при любом $N > N_0(\varepsilon)$.

Теорема 7. *Пусть* λ – *константа из плотностной теоремы.*

Если $H > N^{\frac{31}{64}\cdot\left(1-(2\lambda)^{-1}\right)^2+\varepsilon}$, *то неравенство*

$$|p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + p_4^2 - N| \leq H,$$

разрешимо в простых числах p_1, p_2, p_3 *и* p_4 *при любом* $N > N_0(\varepsilon)$.

Теорема 8. *Пусть* λ – *константа из плотностной теоремы,* η – *константа из теоремы 1.*

Если $H > N^{\eta(1-\lambda^{-1})}$, *то неравенство*

$$|p_1 + p_2 - N| \leq H,$$

разрешимо в простых числах p_1 *и* p_2.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Карацуба А.А. Основы аналитической теории чисел// М.: Наука, 1983.

2. Huxley M.N. On the difference between consequtive primes // Invent. Math. - 1972. - 15. - P.164-170.

3. A. Ivic, The Riemann zeta-function // John Wiley and Sons, New York 1985, XVI + 517 pp.

4. The difference between consecutive primes, II, R.C. Baker, G.Harman, J.Pintz, Proceeding of the London Mathematical Society, vol. 83:3, 2001.

5. С.А. Гриценко, Нгуен Тхи Ча, О диофантовых неравенствах с простыми числами// Научные ведомости БелГУ. Серия: Математика, Физика, 2012. 23(142). Вып. 29

УДК 511.32

Универсальность периодических дзета-функций с весом

М. Стонцелис Литва, г. Вильнюс, Вильнюский университет
mindaugas.stoncelis@mif.vu.lt

Weighted universality for periodic zeta-functions

M. Stoncelis Lithuania, Vilnius, Vilnius University
mindaugas.stoncelis@mif.vu.lt

Let $\mathfrak{a} = \{a_m : m \in \mathbb{N}\}$ be a periodic sequence of complex numbers with minimal period $q \in \mathbb{N}$. The periodic zeta-function $\zeta(s; \mathfrak{a})$, $s = \sigma + it$, is defined, for $\sigma > 1$, by the Dirichlet series

$$\zeta(s; \mathfrak{a}) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_m}{m^s},$$

and, using the equality

$$\zeta(s; \mathfrak{a}) = \frac{1}{q^s} \sum_{m=1}^{q} a_m \zeta\left(s, \frac{m}{q}\right),$$

where $\zeta(s,\alpha)$, $0<\alpha\leqslant 1$, is the classical Hurwitz zeta-function, can be continued meromorphically to the whole complex plane with the unique simple pole at the point $s=1$ with residue

$$r=\frac{1}{q}\sum_{m=1}^{q}a_m.$$

If $r=0$, then the function $\zeta(s;\mathfrak{a})$ is entire. The function $\zeta(s;\mathfrak{a})$ is a generalization of the Riemann zeta-function $\zeta(s)$, since $\zeta(s;\mathfrak{a})=\zeta(s)$ for $a_m\equiv 1$.

The function $\zeta(s;\mathfrak{a})$, as the majority of zeta-functions, is universal in the Voronin sense for some sequences $\mathfrak{a}$. The universality of the function $\zeta(s;\mathfrak{a})$ has been studied by many authors among them Bagchi [1], Sander and Steuding [8], Steuding [7], Laurinčikas and Šiaučiūnas [4], Kaczorowski [2], the author and Šiaučiūnas [10], the author, Macaitienė and Šiaučiūnas [5].

Let $D=\left\{s\in\mathbb{C}:\ \frac{1}{2}<\sigma<1\right\}$. Denote by $\mathcal{K}$ the class of compact subsets of the strip D with connected complements, and by $H(K)$ with $K\in\mathcal{K}$, the class of continuous functions on K that are analytic in the interior of K. We recall an universality theorem for $\zeta(s;\mathfrak{a})$ from [9].

Theorem 1. *Suppose that q is an even prime, a_m is not a multiple of a Dirichlet character modulo q, and $a_q=0$. Let $K\in\mathcal{K}$ and $f(s)\in H(K)$. Then, for every $\varepsilon>0$,*

$$\liminf_{T\to\infty}\frac{1}{T}\mathrm{meas}\left\{\tau\in[0,T]:\sup_{s\in K}|\zeta(s+i\tau;\mathfrak{a})-f(s)|<\varepsilon\right\}>0.$$

In [4], universality of the function $\zeta(s;\mathfrak{a})$ with multiplicative sequence $\mathfrak{a}$ was considered. Let $H_0(K)$ be a subclass of non-vanishing functions of the class $H(K)$, $K\in\mathcal{K}$.

Theorem 2. *Suppose that the sequence $\mathfrak{a}$ is multiplicative and the inequality*

$$\sum_{\alpha=1}^{\infty}\frac{|a_{p^\alpha}|}{p^{\alpha/2}}\leqslant c<1 \tag{1}$$

holds for all primes p. Let $K\in\mathcal{K}$ and $f(s)\in H_0(K)$. Then the conclusion of Theorem 1 is true.

Our aim are weighted universality theorems for the function $\zeta(s;\mathfrak{a})$. Let $w(t)$ be a positive function of bounded variation on $[T_0,\infty]$, $T_0>0$, such that the variation $V_a^b w$ on $[a,b]$ satisfies the inequality $V_a^b w\leqslant cw(a)$ with certain constant $c>0$ for any subinterval $[a,b]\subset[T_0,\infty)$. Moreover, let

$$U=U(T,w)=\int_{T_0}^{T}w(t)\,\mathrm{d}\,t$$

be such that $\lim_{T\to\infty}U(T,w)=+\infty$. Denote by I_A the indicator function of a set A. Then, in [5], the following weighted universality theorem has been obtained.

Theorem 3. *Suppose that the sequence $\mathfrak{a}$ is multiplicative, equality* (1) *holds for all primes p and the function $w(t)$ satisfies all the above conditions. Let $K\in\mathcal{K}$ and $f(s)\in H_0(K)$. Then, for every $\varepsilon>0$,*

$$\liminf_{T\to\infty}\frac{1}{U}\int_{T_0}^{T}w(\tau)I_{\left\{\tau:\sup\limits_{s\in K}|\zeta(s+i\tau;\mathfrak{a})-f(s)|<\varepsilon\right\}}(\tau)\,\mathrm{d}\,\tau>0.$$

The above universality theorems are of continuous type, τ in shifts $\zeta(s+i\tau;\mathfrak{a})$ can take arbitrary real value. Also, discrete universality of the function $\zeta(s;\mathfrak{a})$ can be considered when τ in $\zeta(s+i\tau;\mathfrak{a})$ runs a certain discrete set, for example, the set $\{kh:k\in\mathbb{N}_0\}$, $h>0$. The following theorem is a partial case of Theorem 1.2 of [3]. Let $\mathbb{P}$ denote the set of all prime numbers, and $\#A$ be a cardinality of the set A.

Theorem 4. *Suppose that the set* $\left\{(\log p : p \in \mathbb{P}), \frac{2\pi}{h}\right\}$ *is linearly independent over the field of rational numbers* $\mathbb{Q}$, *and that the sequence* $\mathfrak{a}$ *is multiplicative. Let* $K \in \mathcal{K}$ *and* $f(s) \in H_0(K)$. *Then, for every* $\varepsilon > 0$,

$$\liminf_{N\to\infty} \frac{1}{N+1} \# \left\{ 0 \leqslant k \leqslant N : \sup_{s\in K} |\zeta(s+ikh;\mathfrak{a}) - f(s)| < \varepsilon \right\} > 0.$$

Now we will present weighted discrete universality theorems for the function $\zeta(s;\mathfrak{a})$. Let $v(t)$ be a non-increasing positive function having a continuous derivative such that, for $h > 0$, $v(t) \ll_h v(ht)$ and $(v'(t))^2 \ll v(t)$. Define

$$V = V(N,v) = \sum_{k=1}^{N} v(k)$$

and suppose that $\lim_{N\to\infty} V(N,v) = +\infty$. Then the following statement is true [6].

Theorem 5. *Suppose that the set* $\left\{(\log p : p \in \mathbb{P}), \frac{2\pi}{h}\right\}$ *is linearly independent over the field of rational numbers* $\mathbb{Q}$, *the sequence* $\mathfrak{a}$ *is multiplicative, and the function* $v(t)$ *satisfies all the above conditions. Let* $K \in \mathcal{K}$ *and* $f(s) \in H_0(K)$. *Then, for every* $\varepsilon > 0$,

$$\liminf_{N\to\infty} \frac{1}{V} \sum_{k=1}^{N} v(k) I_{\left\{k : \sup\limits_{s\in K} |\zeta(s+ikh;\mathfrak{a}) - f(s)| < \varepsilon\right\}}(k) > 0.$$

For example, the function $v(t) = \frac{1}{t}$ satisfies the conditions of Theorem 5. Moreover, the set $\left\{(\log p : p \in \mathbb{P}), \frac{2\pi}{h}\right\}$ with rational $h > 0$ is linearly independent over the field of rational numbers.

Now, we consider a more complicated set than $\{kh\}$ [7].

Theorem 6. *Suppose that the function* $v(t)$ *has a continuous derivative* $v'(t)$ *for* $t \geqslant 1$ *such that*

$$\int_1^N t|v'(t)|\,\mathrm{d}t \ll V,$$

the sequence $\mathfrak{a}$ *is multiplicative and* $0 < \alpha < 1$ *is fixed. Let* $K \in \mathcal{K}$ *and* $f(s) \in H_0(K)$. *Then, for every* $\varepsilon > 0$ *and* $h > 0$,

$$\liminf_{N\to\infty} \frac{1}{V} \sum_{k=1}^{N} v(k) I_{\left\{1\leqslant l\leqslant N : \sup\limits_{s\in K} |\zeta(s+il^{\alpha}h;\mathfrak{a}) - f(s)| < \varepsilon\right\}}(k) > 0.$$

REFERENCES

1. Bagchi B. Joint universality theorem for Dirichlet L-functions. // Math. Z. 1982. Vol. 181. P. 319–334.

2. Kaczorowski J. Some remarks on the universality of periodic L-functions // New Directions in Value-Distribution of Zeta and L-Functions. R. Steuding and J. Steuding (Eds). Aachen: Shaker Verlag, 2009. P. 113–120.

3. Laurinčikas A. The joint discrete universality of periodic zeta-functions // From Arithmetic to Zeta-Functions, Number Theory in Memory of Wolfgang Schwarz. J. Sander et al. (eds.). Springer International Publishing Switzerland, 2016. P. 231–246.

4. Laurinčikas A., Šiaučiūnas D. Remarks on the universality of the periodic zeta-function // Math. Notes. 2006. Vol. 80. P. 532–538.

5. Macaitienė R., Stoncelis M., Šiaučiūnas D. A weighted universality theorem for periodic zeta-functions // Math. Model. Anal. 2017. Vol. 22. P. 95–105.

6. Macaitienė R., Stoncelis M., Šiaučiūnas D. A weighted discrete universality theorem for periodic zeta-functions // Anal. Probab. Methods Number Theory. Proc. of 6th Palanga Conference. A. Dubickas et al. (Eds). Vilnius: Vilnius University, 2017. P. 97–107.

7. Macaitienė R., Stoncelis M., Šiaučiūnas D. A Weighted Discrete Universality Theorem for Periodic Zeta-Functions. II // Math. Model. Anal. 2017. Vol. 22. P. 750–762.

8. Sander J., Steuding J. Joint universality for sums and products of Dirichlet L-functions // Analysis, München. 2006. Vol. 26. P. 295–312.

9. Steuding J. Value-Distribution of L-Functions. Lect. Notes Math. Vol. 1877. Berlin: Springer-Verlag, 2007.

10. Stoncelis M., Šiaučiūnas D. On the periodic zeta-function // Chebyshevskii Sb. 2014. Vol. 15, No. 4. P. 139–147.

———————————————————————

УДК 511.1

О неупорядоченных мультипликативных разбиениях[1]

Г. В. Федоров Россия, г. Москва, Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, Научно-исследовательский институт системных исследований РАН
glebonyat@mail.ru

On unordered multiplicative partitions

G. V. Fedorov Russia, Moscow, Moscow State University, Scientific Research Institute of System Analysis (SRISA/NIISI RAS)
glebonyat@mail.ru

Обозначим $T_k(n)$ — количество многочленов $A_k(x)$ степени k с целыми коэффициентами таких, что старшим коэффициент равен 1, свободный член равен n, все корни $A_k(x)$ положительные и рациональные. Положим

$$\Theta_k(X) = \sum_{n \leq X} T_k(n).$$

Оказывается величина $\Theta_k(X)$ есть количество неупорядоченных мультипликативных разбиений натуральных чисел, не превосходящих X, на k натуральных множителей. Более точно, для заданных $k \in \mathbb{N}$ и $X \geqslant 1$ обозначим $\Theta_k(X)$ количество различных наборов из k натуральных чисел $(m_1, m_2, \ldots, m_k)$ таких, что $1 \leqslant m_1 \leqslant \ldots \leqslant m_k$ и $m_1 \cdot m_2 \cdot \ldots \cdot m_k \leq X$. Нас интересует асимптотическое поведение $\Theta_k(X)$ при $X \to \infty$, и особенно интересен случай, когда параметр k также является растущей величиной $k \to \infty$ вместе с $X \to \infty$.

Элементарными методами мы находим точные формулы для величины $\Theta_k(X)$, доказываем равномерные оценки $\Theta_k(X)$, справедливые для всех значений параметра k, а также находим асимптотическую формулу для $\Theta_k(X)$ при $X \to +\infty$ и $k \to \infty$ так, что $k \leqslant \ln^{1/3} X$. Кроме того, мы замечаем, что задача об асимптотической оценке величины $\Theta_k(X)$ тесно связана с многомерной проблемой делителей Дирихле включая случай растущей размерности k (см. [1], [2], [3]).

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант №16-01-00071.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Федоров Г. В. *"Асимптотика одной арифметической суммы"*, Вестник Московского университета. Сер. 1. Математика. Механика., **2** (2010), 50–53.

2. Федоров Г. В. *"Об одной теореме А.И. Павлова"*, Доклады Академии Наук, **446**:3 (2012), 269–270.

3. Федоров Г. В. *"Верхнее предельное значение функции делителей с растущей размерностью"*, Доклады Академии Наук, **452**:2 (2013), 141–143.

———————————————————————————————

УДК 511.325

Об оценке специальной тригонометрической суммы

Ш. А. Хайруллоев Таджикистан, г. Душанбе, Институт математики имени А. Джураева Академии наук Республики Таджикистан
shamsullo@rambler.ru

On the estimation of the special trigonometric sum

Sh. A. Khayrulloev Tajikistan, Dushanbe, A. Juraev Institute of Mathematics, Academy of Sciences the Republic of Tajikistan
shamsullo@rambler.ru

При изучение нулей дзета-функция Римана, функция Харди, функция Дэвенпорта-Хейлброна в коротких промежутках критической прямой основным моментом является оценки тригонометрических сумм вида

$$C(t,M)=\sum_{M<m\leqslant M_1} e\left(\frac{t\ln(P_1-m)}{2\pi}\right),$$

где

$$t\geqslant t_0>0,\quad \sqrt{P_1}\leqslant M\leqslant\frac{P_1}{10},\quad M_1\leqslant 2M,\quad P_1=\left[\sqrt{\frac{t}{2\pi}}\right].$$

Эту сумму и близкие к ней суммы ранее изучали А. Сельберг [1], Я. Мозер [2] и А.А. Карацуба [3]. (см. также [4]–[6]). Наилучший результат принадлежит А.А. Карацубе, который доказал: *пусть* $t\geqslant t_0>0$, $\sqrt{P_1}\leqslant M\leqslant\frac{P_1}{10}$, $M_1\leqslant 2M$, $P_1=\left[\sqrt{\frac{t}{2\pi}}\right]$ *тогда, для суммы* $C(t,M)$ *спарведлива следующая оценка* $C(t,M)\ll P^{-2/7}M^{8/7}+P^{-13/28}M^{19/14}$.

Основным результатом этой работы является новая оценка суммы $C(t,M)$.

Определение 1. *Если* $B\geq 1$, $0<h\leq B$, $F(u)\in C^{\infty}(B,2B)$, $A\geq 1$,

$$AB^{1-r}\ll|F^{(r)}(u)|\ll AB^{1-r},\ r=1,2,3,\ldots,$$

где постоянные под знаком $\ll$ *зависят только от* r, *и имеет место оценка*

$$\sum_{B\leq n\leq B+h} e(F(n))\ll A^kB^l,\quad 0\leq k\leq 0,5\quad 0,5\leq l\leq 1,$$

то пара $(k;l)$ *называется экспоненциальной парой.*

Тривиальная оценка показывает, что (0; 1) является экспоненциальной парой. E. Phillips [7] показал, что если $(k; l)$ экспоненциальная пара, то A – процесс

$$A(k;l) = \left(\frac{k}{2k+2}, \frac{1}{2} + \frac{l}{2k+2}\right)$$

и B – процесс

$$B(k;l) = (l - 0,5, \quad k + 0,5)$$

также являются экспоненциальными парами.

Теорема 1. *Пусть (k, l)– произвольная экспоненциальная пара и*

$$t \geq t_0 > 0, \quad \sqrt{P_1} \leq M \leq \frac{P_1}{10}, \quad M_1 \leq 2M, \quad P_1 = \left[\sqrt{\frac{t}{2\pi}}\right].$$

Тогда справедлива следующая оценка

$$|C(u, M)| \ll P_1^{\frac{1}{2}-l} M^{-\frac{1}{2}+k+2l}.$$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Selberg A. On the zeros of Riemann's zeta-function // Shr. Norske Vid. Akad.Oslo. 1942. v. 10, pp. 1-59.

2. Мозер Я. Об одной сумме в теории дзета-функции Римана // Acta arith., 1976, № 31, pp. 31-43.

3. Карацуба А. А. О расстоянии между соседними нулями дзета-функции Римана, лежащими на критической прямой // Труды МИАН, 1981. Том. 157, С. 49-63.

4. Рахмонов З. Х., Хайруллоев Ш. А. Расстояние между соседними нулями дзета-функции Римана, лежащими на критической прямой // ДАН РТ, 2006, Том. 49, № 5, С. 393-400.

5. Рахмонов З. Х., Хайруллоев Ш. А. Соседние нули дзета-функции Римана, лежащие на критической прямой // ДАН РТ, 2009, Том. 52, № 5, С. 331-337.

6. Хайруллоев Ш. А. Расстояние между соседними нулями функции $Z^{(j)}(t)$, $j \geqslant 1$ // ДАН РТ, 2006, Том. 49, № 9, С. 803-809.

7. Graham S.W., Kolesnik G. Vander Corput's Method of Exponential sums. — Cambridge university press: 1991, Cambridge, New Vork, Port Chester, Melbourne, Sydney.

———

УДК 511

О распределении чисел с условиями на количество их простых делителей[1]

М. Е. Чанга РФ, г. Москва, Московский государственный университет геодезии и картографии, Математический институт имени В. А. Стеклова РАН, Московский педагогический государственный университет
maris_changa@mail.ru

On the distribution of integers with restrictions on the quantity of their prime divisors

M. E. Changa Russian Federation, Moscow, Moscow State University of Geodesy and Cartography, Steklov Mathematical Institute of RAS, Moscow State Pedagogical University
maris_changa@mail.ru

Пусть $\nu(n)$ обозначает количество различных простых делителей числа n. Зафиксируем нечетное простое число p. Через $n_p(x)$ обозначим количество натуральных чисел n, не превосходящих x и таких, что $\nu(n)$ есть квадратичный вычет по модулю p.

Теорема 1. *Существуют такие вещественные постоянные $A_p \neq 0$ и φ_p, что имеет место асимптотическая формула*

$$n_p(x) = \frac{p-1}{2p}\, x + \frac{A_p\, x}{\ln^{2\sin^2\frac{\pi}{p}} x} \cos\left(\sin\frac{2\pi}{p}\cdot \ln\ln x + \varphi_p\right) + O\left(x \ln^{-\delta_p} x\right), \tag{1}$$

где $\delta_p = 2\sin^2\frac{\pi}{p} + 1$ при $p = 3, 5$, и $\delta_p = 2\sin^2\frac{2\pi}{p}$ при $p \geqslant 7$.

Теорема 2. *Существуют такие вещественные постоянные $B_p \neq 0$ и ψ_p, что имеет место асимптотическая формула*

$$\sum_{n\leqslant x}\left(\frac{\nu(n)}{p}\right) = \frac{B_p\, x}{\ln^{2\sin^2\frac{\pi}{p}} x} \cos\left(\sin\frac{2\pi}{p}\cdot \ln\ln x + \psi_p\right) + O\left(x \ln^{-\delta_p} x\right), \tag{2}$$

где $\delta_p = 2\sin^2\frac{\pi}{p} + 1$ при $p = 3, 5$, и $\delta_p = 2\sin^2\frac{2\pi}{p}$ при $p \geqslant 7$.

Аналогичные теоремы могут быть сформулированы и доказаны с заменой $\nu(n)$ на $\Omega(n)$ (количество простых делителей n с учетом кратности) или на любую аддитивную функцию, равную единице на простых числах. Также можно дополнительно потребовать, чтобы простые делители числа n принадлежали некоторому множеству E, которое может быть либо объединением нескольких арифметических прогрессий с заданной разностью, либо допускать асимптотическое равенство вида

$$\sum_{\substack{p\leqslant x\\ p\in E}} 1 = c\pi(x) + O\left(x^{1-\varepsilon}\right) \tag{3}$$

с некоторым положительным ε. Наконец, условие равенства $\nu(n)$ квадратичному вычету можно заменить условием принадлежности некоторому множеству с периодической характеристической функцией.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект № 14-11-00433)

Интерес к подобным задачам возник когда А. А. Карацубой [1] было обнаружено, что при требовании принадлежности простых делителей n специальным множествам, чисел с нечетным $\nu(n)$ оказывается несколько больше, нежели чисел с четным $\nu(n)$. В дальнейшем было выяснено [2], что количества чисел с $\nu(n) \equiv l(\mathrm{mod} k)$, где $k > 2$, наоборот, медленно осциллируют вокруг среднего значения. Таким образом, не существует "выделенного" значения l, для которого количество чисел с $\nu(n)$, принадлежащим соответствующему классу вычетов, было бы значимо большим, чем для прочих.

Доказательство теорем (с учетом выражения символа Лежандра через сумму Гаусса) сводится к нахождению асимптотических формул для сумм вида

$$\sum_{n\leqslant x} e^{2\pi i \frac{l\nu(n)}{p}}. \tag{4}$$

Исследование таких сумм проводится методом комплексного интегрирования (см. [2]), при этом в силу специфики задачи оказывается, что нетривиальный вклад в главный член вносят только суммы с $l = \pm 1$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Карацуба А. А. Об одном свойстве множества простых чисел // Успехи матем. наук. 2011. Том 66 № 2. С. 3-14.

2. Чанга М. Е. О числах, количество простых делителей которых принадлежит заданному классу вычетов // Изв. РАН. Сер. матем. (в печати).

———

6. Диофантовы приближения и теория трансцендентных чисел

УДК 511.2

Позиционные системы счисления с произвольным целочисленным основанием в диофантовых равенствах

В. В. Агафонцев Россия, Псков, Псковский государственный университет
fon-valery-ag@yandex.ru

Positional number systems with arbitrary integer base in Diophantine equations

V. V. Agafontsev, Russia, Pskov, Pskov State University
fon-valery-ag@yandex.ru

Рассмотрим диофантовы равенства вида

$$A^x + B^y = C^z, \tag{1}$$

в которых $A, B, C, x, y, z \in \mathbb{N}; (A, B, C) = 1; z \geq 2$.

Запишем правую и левую часть равенства (1) в позиционной системе счисления по *целочисленному* основанию C. Получим:

$$(A^x)_C + (B^y)_C = (10...0)_C \tag{2}$$

В правой части равенства (2) z нулей. Из (2) следует лемма с такой формулировкой: *необходимое и достаточное условие выполнения равенства* $A^x + B^y = C^z$, *в котором* $A, B, C, x, y, z \in \mathbb{N}; (A, B, C) = 1; z \geq 2$ *представимо триадой равенств:*

$$A^x = a_{z-1} \cdot C^{z-1} + a_{z-2} \cdot C^{z-2} + \ldots + a_1 \cdot C + a_0$$

$$B^y = b_{z-1} \cdot C^{z-1} + b_{z-2} \cdot C^{z-2} + \ldots + b_1 \cdot C + b_0$$

$$C = a_0 + b_0 = a_i + b_i + 1,$$

где $i \in [1; z-1]$; $a_i, b_i \in \mathbb{N}_0 \leq C - 1; a_0, b_0 \in \mathbb{N}$.

Символом $\mathbb{N}$ обозначены *натуральные*, то есть положительные целые числа *без нуля.* Символом $\mathbb{N}_0$ обозначены натуральные числа *с нулём.*

Эта лемма названа леммой "ABC"; она имеет два важных следствия. Доказательство леммы с первым её следствием представлено в [1]. Второе следствие из леммы "ABC" формулируется так:

Равенство

$$(a_{z-1} + b_{z-1}) \cdot C^{z-1} + (a_{z-2} + b_{z-2}) \cdot C^{z-2} + ... + (a_1 + b_1) \cdot C + a_0 + b_0 = C^z$$

порождённое диофантовым равенством $A^x + B^y = C^z$ *при условиях*:

$$A, B, C, x, y, z \in \mathbb{N}; (A, B, C) = 1; z \geq 2$$

определяется только значением z и не зависит от значений x и y при любых $x \geq 1$ и $y \geq 1$.

Можно убедиться в справедливости следствия 2 на примере равенства

$$(a_2 + b_2) \cdot C^2 + (a_1 + b_1) \cdot C + a_0 + b_0 = C^3,$$

порождённого диофантовыми равенствами, в которых $z = 3$:

$A^7 + B = C^3, 3^7 + 557 = 14^3$; $A^2 + B^2 = C^3, 44^2 + 117^2 = 25^3$;

$A^2 + B^4 = C^3, 46^2 + 3^4 = 13^3$; $A^5 + B^2 = C^3, 3^5 + 10^2 = 7^3$.

Отметим важное обстоятельство: в этих диофантовых равенствах при $x > 1$ и $y > 1$ хотя бы одно из чисел x или y равняется 2.

На основе следствия 2 леммы "ABC" докажем такую теорему:

Теорема 1. *Равенство*

$$(a_2 + b_2) \cdot C^2 + (a_1 + b_1) \cdot C + a_0 + b_0 = C^3 \tag{3}$$

порождённое диофантовым равенством $A^x + B^y = C^3$ при условиях:

$$A, B, C, x, y \in \mathbb{N}; (A, B, C) = 1; x > 2, y > 2$$

невыполнимо *для любых наборов чисел $a_2, b_2, a_1, b_1 \in \mathbb{N}_0 \leq C - 1; a_0, b_0 \in \mathbb{N}$.*

Доказательство.Будем утверждать *обратное*, предполагая, что равенство (3), порождённое диофантовым равенством $A^x + B^y = C^3$, при заданных условиях выполнимо хотя бы для одного набора чисел $a_i, b_i (i = 0, 1, 2)$. В соответствии со следствием 2 леммы "ABC" равенство (3) порождается диофантовым равенством, в котором $z = 3$, а x и y - суть *любые* натуральные числа $x \geq 1$ и $y \geq 1$. В силу этого, выполняя условие $x > 2$ и $y > 2$ данной теоремы, положим $x = 3$ и $y = 3$. Получим диофантово равенство

$$A^3 + B^3 = C^3. \tag{4}$$

В соответствии с леммой "ABC" необходимое и достаточное условие выполнения этого равенства требует выполнения такой триады равенств:

$$A^3 = a_2 \cdot C^2 + a_1 \cdot C + a_0; \qquad B^3 = b_2 \cdot C^2 + b_1 \cdot C + b_0 \tag{5}$$

$$C = a_2 + b_2 + 1 = a_1 + b_1 + 1 = a_0 + b_0, \tag{6}$$

где $a_2, b_2, a_1, b_1 \in \mathbb{N}_0 \leq C - 1; a_0, b_0 \in \mathbb{N}$.

Если бы выполнялись равенства (5) и (6), то было бы выполнимо и равенство (4) и наоборот: если бы существовали натуральные числа $(A, B, C) = 1$, удовлетворяющие равенству (4), то выполнялись бы равенства (5) и (6). Исходя из этих равенств, число C должно представляться числами $a_2, b_2, a_1, b_1 \in \mathbb{N}_0 \leq C-1; a_0, b_0 \in \mathbb{N}$. Число A^3 должно представляться числами a_2, a_1, a_0, C^2 и C. Число B^3 должно представляться числами b_2, b_1, b_0, C^2 и C. Следовательно, если бы существовали натуральные числа A, B, C, удовлетворяющие равенству (4), то в силу необходимого и достаточного условия его выполнения эти числа должны представляться набором чисел $a_2, b_2, a_1, b_1 \in \mathbb{N}_0 \leq C - 1; a_0, b_0 \in \mathbb{N}$. Но, как доказал Л. Эйлер, не существует натуральных чисел A, B, C, с которыми равенство (4) было бы выполнимо. В наличие такого доказательства сошлёмся на (см.[2, §3], [3, гл.2, пп.2.1, 2.2], [4]). Так как не существует натуральных чисел A, B, C, удовлетворяющих равенству (4), то не существует и таких наборов чисел $a_i, b_i, (i = 0, 1, 2)$, которыми числа A, B, C в соответствии с необходимым и достаточным условием выполнения равенства (4) должны представляться. Следовательно, для *любых* наборов чисел $a_i, b_i, (i = 0, 1, 2)$ *не выполнятся все три равенства* (5) и (6). Невыполнимость равенства (6) означает *выполнимость таких трёх неравенств*:

$$C \neq a_2 + b_2 + 1; \qquad C \neq a_1 + b_1 + 1; \qquad C \neq a_0 + b_0 \tag{7}$$

Исходя из тождества: $(C - 1) \cdot C^2 + (C - 1) \cdot C + C = C^3$ и включая в него подстановки из неравенств (7), получим:

$$(a_2 + b_2) \cdot C^2 + (a_1 + b_1) \cdot C + a_0 + b_0 \neq C^3 \tag{8}$$

Следовательно, исходное утверждение, основанное на предположении о выполнимости равенства (3) хотя бы для одного набора чисел $a_i, b_i, (i = 0, 1, 2)$, через последовательность импликаций привело к противоположному утверждению. В силу закона логики: *одно и то же утверждение не может быть истинным и ложным*- приходим к выводу о том, что исходное утверждение, основанное на предположении, является *ложным.* Следовательно, равенство (3), порождённое равенством $A^x + B^y = C^3$ при условиях: $A, B, C, x, y \in \mathbb{N}; (A, B, C) = 1;$ $x > 2, y > 2$ ***невыполнимо*** *для любых наборов чисел* $a_2, b_2, a_1, b_1 \in \mathbb{N}_0 \leq C - 1$; $a_0, b_0 \in \mathbb{N}$, что и требовалось доказать.

□

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Агафонцев В. В. Лемма "ABC"в исследовании диофантовых равенств //Н.И. Лобачевский и математическое образование в России: материалы междунар. форума (IFME-2017), г. Казань, 18-22 октября 2017г. / отв.ред. Л.Р.Шакирова. Казань: изд-во Казан.ун-та, 2017. Т. 2, С.12-18.

2. Постников М. М. Теорема Ферма. Введение в теорию алгебраических чисел, М., Наука, 1978, 130 с.

3. Эдвардс Г. Последняя теорема Ферма. Генетическое введение в алгебраическую теорию чисел, М., Мир, 1980, 485 с.

4. Мачис Ю. Ю. О предпологаемом доказательстве Эйлера // Матем. заметки, 2007, Т. 3, №82, С. 395-400.

———————————————————————————

УДК 511.9

Об оценке константы наилучших диофантовых приближений для $n > 4$[1]

Ю. А. Басалов Россия, г. Тула, Тульский государственный педагогический университет имени Л. Н. Толстого
basalov_yurij@mail.ru

On estimation of the constant of the best Diophantine approximations for $n > 4$

Yu. A. Basalov Russia, Tula, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University
basalov_yurij@mail.ru

Сформулируем предварительно задачу наилучших совместных диофантовых приближений в многомерном случае. Пусть

$$\vec{\alpha} = (\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_n)$$

— произвольный вектор действительных чисел. Нас будут интересовать приближения $\vec{\alpha}$ рациональными дробями

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ: грант №16-41-710194_р_центр_а

$$\frac{\vec{p}}{q} = \left(\frac{p_1}{q},\ \frac{p_2}{q},\ \ldots,\ \frac{p_n}{q}\right).$$

Мерой качества совместных приближений Дирихле первого рода вектора $\vec{\alpha}$ рациональным вектором $\vec{p}/q$ называется величина

$$D(\vec{\alpha}, \vec{p}/q) = \max_{i=\overline{1,n}} q\left|q\alpha_i - p_i\right|^n.$$

Константой наилучших диофантовых приближений $C(\vec{x})$ для вектора $\vec{x}$ называется точная нижняя грань величины C, для которой существует бесконечное число рациональных векторов $\vec{p}/q$, удовлетворяющих неравенству

$$D(\vec{x}, \vec{p}/q) < C.$$

Константой наилучших диофантовых приближений C_n называется точная верхняя грань числа $C(\vec{x})$ по всем векторам $\vec{x}$ размерности n:

$$C_n = \sup_{\vec{x}\in\mathbb{R}^s} C(\vec{x}).$$

Пусть $\mathbb{F}$ это $(n+1)$-мерное звездное тело

$$\mathbb{F} : F(x_0, \ldots, x_n) < 1,$$

где

$$F^{n+1}(x_0, \ldots, x_n) = |x_0| \max_{1\le i\le n} |x_i|^n$$

а $\Delta\mathbb{F}$ его критический определитель (в дальнейшем, будем обозначать его D_n). Г. Дэвенпорт [4] доказал, что $C_n = \frac{1}{\Delta\mathbb{F}}$. Развивая его идеи, Дж. В.С. Касселс [3] смог оценить D_n используя дискриминант d произвольного алгебраического поля F степени n, и тем самым оценить снизу C_n.

Теорема 1. *Пусть*

$$f_{n,s} = \frac{1}{2^s}\prod_{i=1}^{s}|x_i^2 + x_{s+i}^2| \prod_{i=2s+1}^{n}|x_i|.$$

и $2^n V_{n,s}$ объем наибольшего пареллелипипеда с центром в начале координат, содержащегося внутри фигуры

$$\mathbb{F}_{n,s} : f_{n,s} \le 1. \tag{1}$$

Пусть $\Delta_{n,s}$ наименьшее абсолютное значение дискриминанта действительного поля степени $n+1$, которое имеет s пар комплексно-сопряженных алгебраических чисел (то есть $2s \le n+1$). Тогда

$$D_n \le \sqrt{\Delta_{n,s}}/V_{n,s},$$

или же

$$C_n \ge V_{n,s}/\sqrt{\Delta_{n,s}}.$$

Доказательство.См. [3]

Несложно показать, что $V_{2,0} = 2$ и $V_{2,1} = 1$. А так как наименьший дискриминант чисто действительного кубического поля равен 49 (для случая $x^3 + 2x^2 - x - 1 = 0$), мы получаем оценку $C_2 \ge \frac{2}{7}(> \frac{1}{\sqrt{23}})$. Этот результат принадлежит Дж. В.С. Касселсу [2].

Оценка в случае $n = 3$ принадлежит Т. Кьюзику [3]. Он показал, что $V_{3,1} = 2$; $V_{3,0} = \frac{3^{3/2}}{2}$, откуда получаются оценки $C_3 \ge \frac{2}{\sqrt{275}} > \frac{3^{3/2}}{2\sqrt{725}}$.

С. Красс [6] показал, что $V_{4,2} \geq \frac{16}{9}$; $V_{4,1} \geq 2$; $V_{4,0} \geq 4$, откуда $C_4 \geq \frac{16}{9\sqrt{1609}} > \frac{4}{\sqrt{14641}} > \frac{2}{\sqrt{4511}}$. Ему же принадлежат и более общие оценки [6]

$$V_{n,[n/2]} \leq V_{n,[n/2]-1} \leq \ldots \leq V_{n,0} \qquad V_{n,s}V_{n',s'} \leq V_{n+n',s+s'}$$

откуда (так как $V_{4,2} \geq \frac{16}{9}$) получается оценку для $C_n (n \geq 4)$

$$C_n \geq \frac{V_{n,[n/2]}}{\sqrt{\Delta_{n+1}}} \geq \frac{(16/9)^{[n/4]}}{\sqrt{\Delta_{n+1}}} > \frac{1}{\sqrt{\Delta_{n+1}}}. \tag{2}$$

Было проведено исследование, посвященое нахождению наибольших значений $V_{n,s}$. В его основу легла идея о связи произвольного n-мерного параллелепипеда $\mathbb{A}$ и n-мерной матрицы A [1].

На первом этапе исследования решено провести вычислительные эксперименты по численному нахождению наибольших значений $V_{n,s}$. Затем была поставлена задача получить *наибольшую матрицу* (соответсвующую параллелепипеду $\mathbb{A}$ с наибольшим объемом, находящемуся внутри фигуры (1)) A с наиболее простой структурой.

Следующим этапом исследования стало получение на основе численных результатов аналитических оценок для $V_{3,1}$, $V_{4,2}$, $V_{5,2}$ и $V_{6,3}$ (см. [1]). Для $V_{3,1}$ оценка совпала с результатом Т. Кьюзика [3], а для $V_{4,2}$ – С. Красса [6].

Основным результатом стало улучшение оценок $V_{n,s}$ для $n = 5$ и $n = 6$ (более подробную оценку и доказательство см. в [1])

$$V_{5,2} \geq \sqrt{\frac{27\left(9+5\sqrt{5}\right)}{88}} \approx 2.48831..., \qquad V_{6,3} \geq \frac{9+5\sqrt{5}}{11} \approx 1.83458....$$

Это приводит нас к (что улучшает (2))

Теорема 2. *Имеет место оценка*

$$V_{n,[n/2]} \geq T_n \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{2[(n-3)/4]}, \qquad n > 2,$$

где

$$T_n = \max \begin{cases} 2, & \text{если } n \equiv 3 (\mod 4), \\ \frac{16}{9} \approx 1.77777..., & \text{если } n \equiv 0 (\mod 4), \\ \sqrt{\frac{27\left(9+5\sqrt{5}\right)}{88}} \approx 2.48831..., & \text{если } n \equiv 1 (\mod 4), \\ \frac{9+5\sqrt{5}}{11} \approx 1.83458..., & \text{если } n \equiv 2 (\mod 4), \end{cases}$$

Доказательство.См. [1]

И следующим оценкам $C_{n,s}$ [1]

$$\begin{aligned} C_3 &\geq \frac{2}{5\sqrt{11}} && \approx 0.120605... \\ C_4 &\geq \frac{16}{9\sqrt{1609}} && \approx 0.044320... \\ C_5 &\geq \frac{3}{46}\sqrt{\frac{3\left(9+5\sqrt{5}\right)}{1166}} && \approx 0.014860... \\ C_6 &\geq \frac{9+5\sqrt{5}}{11\sqrt{184\,607}} && \approx 0.004269... \end{aligned}$$

Эти значения улучшает оценки данные в [5].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Basalov Yu. On estimating the constant of simultaneous Diophantine approximation // https://arxiv.org/abs/1804.05385

2. Cassels J. W. S., Simultaneous Diophantine approximation, J. London Math. Soc. 30 (1955), 119-121

3. Cusick J. W. Estimates for Diophantine approximation constants // Journal of Number Theory (1980) p. 543-556

4. Davenport. H. On a theorem of Furtwängler // J. London Math. Soc. 30 (1955). P. 186-195

5. Finch S.R. Mathematical Constants - Cambridge University Press, 2003. — 624 p. — (Encyclopedia of Mathematics and its Applications, Book 94).

6. Krass S. Estimates for n-dimensional Diophantine approximation constants for $n \geq 4$ // J. Number Theory (1985) p. 172-176

———————————————————————————————————————

УДК 511.42

Комплексные алгебраические числа в областях $\mathbb{C}^2$ малой меры Лебега

М. Л. Безруков Беларусь, г. Минск, Институт подготовки научных кадров Национальной Академии наук Беларуси

М. А. Жур Беларусь, г. Минск, Институт математики Национальной Академии наук Беларуси,

И. А. Корлюкова Беларусь, г. Гродно, Гродненский государственный университет имени Янки Купалы

maksim.bezrukov@icloud.com, maksimzhur@gmail.com, korlyukova_ia@grsu.by

Complex algebraic numbers in sets in $\mathbb{C}^2$ of a small Lebesgue measure

M. L. Bezrukov Belarus, Minsk, Researchers Training Institute of National Academy of Sciences of Belarus

M. A. Zhur Belarus, Minsk, Institute of Mathematics of National Academy of Sciences of Belarus

I. A. Korlyukova Belarus, Grodno, Yanka Kupala State University of Grodno

maksim.bezrukov@icloud.com, maksimzhur@gmail.com, korlyukova_ia@grsu.by

В данной работе найдена оценка сверху для распределения комплексных алгебраических числел фиксированной степени и ограниченной высоты в некоторой полосе малой ширины возле гладкой кривой в пространстве $\mathbb{C}$. Основой доказательства является метрическая теорема о том, что целочисленные многочлены и их производные могут принимать малые значения только на множествах $K \subset \Omega$, мера которых не превосходит при любых $\delta_0 \mu\Omega$. Затем производится оценка количества алгебраических точек внутри области с помощью разбиения параллелепипедами малой меры [1, 2].

Пусть $Q > 1$ – натуральное число и

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0, a_i \in, \deg P = n, H(P) = \max_{0 \leqslant i \leqslant n} |a_i| < Q. \qquad (1)$$

Определим множество, содержащее все многочлены вида 1:

$$P_n(Q) = \{P(z) \in [z] : \mathrm{degP} = n \geqslant 2, H(P) \leqslant Q\}. \qquad (2)$$

Пусть $f : K \to \mathbb{C}$ непрерывная дифференцируемая функция, заданная на области определения $K \subset \{z \in: z = x + yi,\ x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}],\ y \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]\}$.

Определим множества точек с координатами, являющимися комплексными сопряженными алгебраическими числами ограниченной степени и высоты [2]:

$$\mathbb{A}^2(Q) = \{(\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{C}^2 : \deg \alpha_1 = \deg \alpha_2 \leqslant n,\ H(\alpha_1) = H(\alpha_2) = H(P) \leqslant Q\}. \qquad (3)$$

$$M_f^n(Q, \gamma, K) = \{\bar{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{A}^2(Q) :\ \alpha_1 \in K, |f(\alpha_1) - \alpha_2| < c_1 Q^{-\gamma}\}, \qquad (4)$$

где $0 < \gamma < \frac{1}{2}$.

Рассмотрим разбиение множества $M_f^n(Q, \gamma, K) \subset \bigcup\limits_{j=1}^{t} \Pi_j$:

$$\Pi_j = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 :\ z_1 \in K_j, |f(z_1) - z_2| < c_3 Q^{-\gamma}\},\ j \in \{1, t\}, \qquad (5)$$

$$\Pi_j \cap \{|z_1 - z_2| \leqslant \delta,\ |z_1 - \bar{z}_2| \leqslant \delta,\ |\bar{z}_1 - \bar{z}_2| \leqslant \delta\} = \emptyset,\ \delta > 0. \qquad (6)$$

Теорема 1. *Пусть множество $K_n(\Pi_j, Q)$ - это множество точек $(\alpha_i, \alpha_j) \in \mathbb{C}^2$, которые являются корнями $P \in P_n(Q)$ и $(\alpha_i, \alpha_j) \in \Pi_j$. Тогда при $0 < \mu_i < \frac{1}{2}$, $\mu_i = \gamma$ $i = 1, 2$ выполняется неравенство:*

$$\# K_n(\Pi_j, Q) \gg Q^{n+1-\mu_1-\mu_2} \mu \Pi_j. \qquad (7)$$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Касселс Дж. В. С. Введение в теорию диофантовых приближений - Москва: ИЛ, 1961г. 213 с.

2. Берник В. И., Гетце Ф. Распределение действительных алгебраических чисел произвольной степени в коротких интервалах// Изв. РАН. Сер. матем., том 79, выпуск 1, 2015 г. С. 21-42.

УДК 511.42

Малые значения целочисленных полиномов без общих корней и результанты[1]

Н. В. Бударина Ирландия, г. Дандолк, Технологический институт Дандолка
Д. В. Васильев Беларусь, г. Минск, Институт математики Национальной академии наук Беларуси
М. А. Калугина Беларусь, г. Минск, Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники
А. С. Кудин Беларусь, г. Минск, Институт математики Национальной академии наук Беларуси
buda77@mail.ru, vasilyev@im.bas-net.by, marina_kalugina@list.ru, knxd@yandex.ru

On small values of integral polynomials without common roots and resultants

N. V. Budarina Ireland, Dundalk, Dundalk Institute of Technology
D. V. Vasilyev Belarus, Minsk, Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus
M. A. Kalugina Belarus, Minsk, Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics
A. S. Kudin Belarus, Minsk, Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus
buda77@mail.ru, vasilyev@im.bas-net.by, marina_kalugina@list.ru, knxd@yandex.ru

В монографии А. О. Гельфонда [1] приведена одна лемма, которая утверждает, что два целочисленных полинома без общих корней не могут одновременно принимать слишком малые ненулевые значения в одной точке. Гельфонд использовал ее в своем методе доказательства трансцендентности некоторых чисел. В дальнейшем данная лемма и утверждения, ее усиливающие, нашли широкое применение в метрической теории чисел.

Будем рассматривать целочисленные многочлены $P(t) = a_nt^n + \ldots + a_1t + a_0 \in \mathbb{Z}[t]$. Обозначим как $H(P) = \max\limits_{0\le j\le n} |a_j|$ высоту многочлена и как $\deg P = n$ его степень. Множества целочисленных многочленов ограниченной степени и высоты обозначим как

$$\mathcal{P}_n := \{P(t) \in \mathbb{Z}[t] : \deg P \le n\},$$
$$\mathcal{P}_n(Q) := \{P(t) \in \mathbb{Z}[t] : \deg P \le n, H(P) \le Q\}.$$

Будем использовать символ Виноградова

$$f \ll_{v_1,v_2,\ldots} g,$$

если существует величина $c(v_1, v_2, \ldots) > 0$, не зависящая от f и g такая, что $f < c(v_1, v_2, \ldots)g$. Если $f \ll_{v_1,v_2,\ldots} g$ и $g \ll_{v_1,v_2,\ldots} f$, будем писать $f \asymp_{v_1,v_2,\ldots} g$.

Вышеупомянутую лемму Гельфонда можно сформулировать следующим образом.

Лемма 1 ([1]). *Пусть $\delta > 0$ – некоторое действительное число, n_1, n_2 – натуральные числа, $Q > Q_0(n, \delta)$ – достаточно большое действительное число. Далее пусть*

$$P_1(x) \in \mathcal{P}_{n_1}(Q^{\mu_1}), \quad P_2(x) \in \mathcal{P}_{n_2}(Q^{\mu_2}),$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке гранта БРФФИ Ф17-101

$\mu_1, \mu_2 > 0$ – *полиномы без общих корней. Тогда, если для некоторого трансцендентного* α *выполняются неравенства* $|P_1(\alpha)| < Q^{-\tau_1}$, $|P_2(\alpha)| < Q^{-\tau_2}$, *то*

$$\min(\tau_1, \tau_2) < n_1\mu_2 + n_2\mu_1 + \delta.$$

В дальнейшем лемма Гельфонда была усилена В. И. Берником [2], что позволило ему доказать гипотезу А. Бейкера и В. Шмидта [3] о точном значении размерности Хаусдорфа множества всех $x \in \mathbb{R}$, для которых существует бесконечное число полиномов $P \in \mathcal{P}_n$, удовлетворяющих неравенству $|P(x)| < H(P)^{-w}$, $w > n$.

Теорема 1 ([2]). *Пусть* $\delta > 0$ – *некоторое действительное число,* n – *натуральное,* $Q > Q_0(n, \delta)$ – *достаточно большое действительное число. Далее пусть* $P_1(x)$, $P_2(x) \in \mathcal{P}_n(Q^\mu)$, $\mu > 0$ – *полиномы без общих корней. Тогда, если для всех* x *из некоторого интервала* $I \subset (-n, n)$, $|I| = Q^{-\eta}$, $\eta > 0$, *выполняются неравенства*

$$\max(|P_1(x)|, |P_2(x)|) < Q^{-\tau}, \quad \tau > 0,$$

то

$$\tau + \mu + 2\max(\tau + \mu - \eta, 0) < 2\mu n + \delta.$$

Также в работе К. И. Тищенко [4] доказывается аналог леммы Гельфонда с использованием производных первого порядка, что позволило автору добиться улучшения результатов Е. Вирзинга [5].

Некоторые ограничения для применения теоремы 1 возникают из-за необходимости рассматривать одинаковые оценки степени и высоты полиномов. Мы развиваем методы Тищенко [4] и усиливаем теорему 1, используя производные более высоких порядков и рассматривая полиномы с разными оценками степени и высоты.

Теорема 2. *Пусть* $\delta > 0$ – *некоторое действительное число,* $1 \leqslant n_1 \leqslant n_2 \leqslant n$ – *натуральные числа,* $Q > Q_0(n, \delta)$ – *достаточно большое действительное число,* $P_1(x) \in \mathcal{P}_{n_1}$, $P_2(x) \in \mathcal{P}_{n_2}$ – *полиномы без общих корней,* $H(P_1(x)) \ll_n Q^{\mu_1}$, $H(P_2(x)) \ll_n Q^{\mu_2}$, $\mu_1, \mu_2 > 0$. *Тогда, если для всех* x *из некоторого интервала* $I \subset (-c_1(n), c_1(n))$, $|I| \approx_n Q^{-\eta}$, $\eta > 0$, *выполняются неравенства* $|P_1(x)| \ll_n Q^{-\tau_1}$, $|P_2(x)| \ll_n Q^{-\tau_2}$, $\tau_1, \tau_2 \in \mathbb{R}$, *то*

$$\widehat{\tau} + 2\sum_{j=1}^{n_1-1} \max(\widehat{\tau} - j\eta, 0) + (1 + n_2 - n_1)\max(\widehat{\tau} - n_1\eta, 0) <$$
$$< n_1\mu_2 + n_2\mu_1 + \delta,$$

где

$$\widehat{\tau} = \min(\tau_1 + \mu_1, \tau_2 + \mu_2).$$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гельфонд А. О. Трансцендентные и алгебраические числа. — Москва: ГИТТЛ, 1952. 224 с.

2. Bernik V. I. Application of the Hausdorff dimension in the theory of Diophantine approximations // Acta Arith. 1983. Том 42 №3. С. 219–253.

3. Baker A. Diophantine approximation and Hausdorff dimension // Proc. London Math. Soc. (3). 1970. Том 21. С. 1–11.

4. Tishchenko K. I. On approximation to real numbers by algebraic numbers // Acta Arithmetica. 2000. Том 94 № 1. С. 1–24.

5. Wirsing E. Approximation mit algebraischen Zahlen beschränkten Grades // J. Reine Angew. Math. 1961. Том 206. С. 67–77.

———————————————————————————————————————

УДК 511.361

О значениях гипергеометрической функции с параметром из квадратичного поля

П. Л. Иванков г. Москва, Московский Государственный Технический Университет им. Н. Э. Баумана
—

On the values of hypergeometric function with parameter from quadratic field

P. L. Ivankov Moscow, Bauman Moscow Technical State University
—

Рассмотрим функцию

$$K_\lambda(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{z^\nu}{\nu!} \prod_{x=1}^{\nu} \frac{1}{\lambda + x},\ \lambda \neq -1, -2, \ldots .$$

Арифметическая природа чисел

$$K_\lambda(\xi), \text{ и } K'_\lambda(\xi), \tag{1}$$

$\xi \neq 0$, изучалась во многих работах; наиболее общие результаты получены при рациональном λ, см. [1, гл. 6]. В частности, если $\lambda \in \mathbb{Q}$, то при некоторых естественных ограничениях на λ и ξ доказана алгебраическая независимость чисел (1). При иррациональном λ известные методы, как правило, позволяют доказать лишь линейную независимость этих чисел над соответствующим полем, причем в этом случае участвующие в рассуждениях линейные приближающие формы обычно строят эффективно. В частности, из результатов работы [2] следует линейная независимость чисел (1) над мнимым квадратичным полем, если λ и ξ берутся из этого же поля. Эффективные конструкции линейных приближающих форм можно использовать также для изучения ситуации, в которой λ и ξ лежат не в мнимом квадратичном, а в каком-либо другом поле алгебраических чисел. В докладе будет доказана теорема о линейной независимости чисел $K_{\sqrt{2}}(1/\sqrt{2})$ и $K'_{\sqrt{2}}(1/\sqrt{2})$ над полем $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Шидловский А.Б. Трансцендентные числа М.: Наука, 1987.

2. Галочкин А.И. Оценки снизу линейных форм от значений некоторых гипергеометрических функций // Математические заметки. 1970. Т. 8, № 1. С. 19-28.

———————————————————————————————————————

УДК 511.361

О линейной независимости значений некоторых гипергеометрических функций над мнимым квадратичным полем

П. Л. Иванков г. Москва, Московский Государственный Технический Университет им. Н. Э. Баумана

—

On linear independence of the values of some hypergeometric functions over the imaginary quadratic field

P. L. Ivankov Moscow, Bauman Moscow Technical State University

—

В докладе рассматривается один из вариантов эффективного построения совместных приближений для гипергеометрической функции общего вида и ее производных. Общий наименьший знаменатель коэффициентов многочленов, входящих в эти приближения, оценивается с помощью уточненного варианта соответствующей леммы. Все это позволяет получить новый результат об арифметической природе значений указанных функций в малой по абсолютной величине ненулевой точке мнимого квадратичного поля.

Пусть

$$\psi_j(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} z^{\nu} \nu^{j-1} \prod_{x=1}^{\nu} \frac{a(x)}{b(x)},\ j = 1, \ldots, m, \tag{1}$$

где $a(x) = (x + \alpha_1) \ldots (x + \alpha_r)$, $b(x) = (x + \beta_1) \ldots (x + \beta_m)$, $1 \leqslant r < m$, числа α_i, β_j отличны от $-1, -2, \ldots$; $\beta_1 = 0$. Известно, что для линейной независимости функций (1) над полем рациональных дробей $\mathbb{C}(z)$ достаточно потребовать, чтобы выполнялись условия

$$\alpha_i - \beta_j \notin \mathbb{Z},\ i = 1, \ldots, r,\ j = 1, \ldots, m. \tag{2}$$

Через $\mathbb{I}$ обозначим некоторое мнимое квадратичное поле.

Теорема 1. *Пусть m и r таковы, что $m_1 = m - 2r + 1 > 0$, и пусть $\alpha_i \in \mathbb{Q}$, $i = 1, \ldots, r-1$, $\beta_1 = 0$, $\beta_2, \ldots, \beta_{m-m_1} \in \mathbb{Q}$, а числа α_r и $\beta_{m-m_1+1}, \ldots, \beta_m$ принадлежат множеству $\mathbb{I} \backslash \mathbb{Q}$. Пусть, далее, ω и q — ненулевые числа из кольца $\mathbb{Z}_{\mathbb{I}}$. Предположим также, что выполнено указанное выше условие (2) линейной независимости рассматриваемых функций над полем рациональных дробей. Тогда, если $|q| > q_0$, то числа*

$$\psi_1\left(\frac{\omega}{q}\right), \ldots, \psi_m\left(\frac{\omega}{q}\right) \tag{3}$$

линейно независимы над $\mathbb{I}$; при этом q_0 зависит от $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$, $\beta_1, \ldots, \beta_m$, ω и от поля $\mathbb{I}$.

Если при сохранении прочих условий этой теоремы увеличить количество рациональных корней многочлена $b(x)$, т.е. считать, например, что $m_1 = m - 2r$, то мы получим утверждение, являющееся следствием теоремы 2 из [1]. Метод доказательства теоремы 1 позволяет получить также и оценку снизу модуля соответствующей линейной формы; эта оценка здесь не приводится, т.к. она весьма далека от ожидаемого в рассматриваемой ситуации окончательного результата.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Иванков П.Л. О линейной независимости значений некоторых функций // Фундаментальная и прикладная математика. Т. 1, № 1. 1995. С. 191-206.

———————————————————————————————————

УДК 511.35, 511.48, 511.75

Аналогии внутри множества вещественных алгебраических чисел[1]

Д. В. Коледа Беларусь, г. Минск, Институт математики Национальной академии наук Беларуси
koledad@rambler.ru

Analogies inside the set of real algebraic numbers

D. V. Koleda Belarus, Minsk, The Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus
koledad@rambler.ru

Пусть $p(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$ — многочлен степени n, и пусть $H(p)$ обозначает его (*обычную*) *высоту*, определяемую согласно $H(p) = \max_{0 \leqslant i \leqslant n} |a_i|$.

Под *минимальным многочленом* алгебраического числа $\alpha \in \mathbb{C}$ будем понимать ненулевой многочлен $p_\alpha \in \mathbb{Z}[x]$ наименьшей степени $\deg(p)$ со взаимно простыми коэффициентами и положительным старшим коэффициентом, такой что $p_\alpha(\alpha) = 0$. *Степень* $\deg(\alpha)$ и *высота* $H(\alpha)$ алгебраического числа α по определению суть степень и высота минимального многочлена p_α.

Алгебраическое число называется *алгебраическим целым*, если его минимальный многочлен унитарен, т.е. имеет единичный старший коэффициент.

Мощность конечного множества S будем обозначать как $\#S$, а меру $I \subset \mathbb{R}$ — как $|I|$.

Распределение алгебраических чисел играет важную роль в различных областях, в частности, в задачах, касающихся размерности Хаусдорфа некоторых числовых множеств, где возникает потребность в “равномерно разреженных” множествах алгебраических чисел, известных как регулярные системы. Понятие регулярной системы, как удобный инструмент для вычисления Хаусдорфовой размерности, было введено А. Бэйкером и В. М. Шмидтом, которые доказали, что вещественные алгебраические числа образуют регулярную систему. Позднее параметры таких регулярных систем были улучшены в работах В. И. Берника и В. В. Бересневича. В 2002 году Я. Бюжо [3] доказал, что алгебраические целые числа также образуют регулярную систему (с параметрами разреженности, аналогичными таковым из [1]).

Один из подходов к изучению алгебраических чисел связан с последовательностями Фарея и их обобщениями. В 1971 Х. Браун и К. Малер [2] предложили обобщение последовательности Фарея на алгебраические числа высших степеней и сформулировали несколько задач касательно этих обобщённых последовательностей. Согласно [2], *последовательность Фарея степени n и порядка Q* — это последовательность всех вещественных корней целых многочленов степени (не более) n и высоты не более Q.

Такое упорядочение вещественных алгебраических чисел в обобщённую последовательность Фарея [2] подсказывает способ упорядочения и подсчёта вещественных алгебраических

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке БРФФИ (грант Ф17М-083)

целых чисел. Обозначим через $\overline{\mathbb{Q}}_n$ и $\mathcal{O}_n$ соответственно множества алгебраических чисел и алгебраических целых степени n (над $\mathbb{Q}$). Для множества $S \subseteq \mathbb{R}$ определим

$$\Phi_n(Q,S) = \#\left\{\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}_n \cap S : H(\alpha) \leqslant Q\right\},$$
$$\Omega_n(Q,S) = \#\left\{\alpha \in \mathcal{O}_n \cap S : H(\alpha) \leqslant Q\right\}.$$

Отметим, что алгебраические целые степени 1 суть рациональные целые, которые нигде не плотны на вещественной оси.

Элементы последовательности Фарея 1-й степени, лежащие в $[0,1]$, образуют хорошо известную классическую последовательность Фарея и распределяются равномерно в $[0,1]$ при $Q \to \infty$. Для $n \geqslant 2$ оказалось [4], что при возрастании Q распределение Фареевой последовательности степени n никогда не бывает равномерным, однако оно может быть описано в терминах плотности распределения. А именно, справедлива следующая теорема.

Теорема 1 ([4]). *Пусть $n \geqslant 1$ фиксированное целое. Количество алгебраических чисел степени n и высоты не более Q, лежащих в промежутке $I \subseteq \mathbb{R}$, равно*

$$\Phi_n(Q,I) = \frac{Q^{n+1}}{2\zeta(n+1)} \int_I \phi_n(t)\,dt + O\left(Q^n (\ln Q)^{\ell(n)}\right), \qquad Q \to \infty,$$

где $\zeta(\cdot)$ — дзэта-функция Римана; неявная O-постоянная зависит только от степени n; $\ell(n) = 1$ при $n \leqslant 2$ и $\ell(n) = 0$ при $n \geqslant 3$.

Функция ϕ_n задана формулой:

$$\phi_n(t) = \int\limits_{G_n(t)} \left|\sum_{k=1}^{n} k p_k t^{k-1}\right| dp_1 \ldots dp_n, \tag{1}$$

где

$$G_n(t) = \left\{(p_1,\ldots,p_n) \in \mathbb{R}^n : \max_{1\leqslant k\leqslant n} |p_k| \leqslant 1,\ \left|\sum_{k=1}^{n} p_k t^k\right| \leqslant 1\right\},$$

и удовлетворяет следующим функциональным уравнениям:

$$\phi_n(-t) = \phi_n(t), \qquad \phi_n(t^{-1}) = t^2 \phi_n(t).$$

Функция $\phi_n(t)$ с точностью до постоянного множителя совпадает с плотностью числа корней случайного многочлена с независимыми равномерно распределёнными в $[-1,1]$ коэффициентами (ср. [6]).

Выражение (1) определяет положительную непрерывную кусочную функцию. При

$$|t| \leqslant 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0.29$$

функцию (1) можно представить [4] явным аналитическим выражением для любых n:

$$\phi_n(t) = 2^{n-1}\left(1 + \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n-1}(k+1)^2 t^{2k}\right).$$

Для алгебраических целых чисел верна теорема, во многом аналогичная теореме 1.

Теорема 2 ([5]). *Зафиксируем целое $n \geqslant 2$. Тогда для любого промежутка $I \subseteq \mathbb{R}$ верно равенство*

$$\Omega_n(Q,I) = Q^n \int_I \omega_n(Q^{-1},t)\,dt + O\Big(Q^{n-1}(\ln Q)^{\ell(n)}\Big), \qquad Q \to \infty, \tag{2}$$

где неявная O-постоянная зависит только от n, а функция $\omega_n(\epsilon,t)$ имеет вид

$$\omega_n(\epsilon,t) = \begin{cases} \phi_{n-1}(t) + 2^{n-2}\epsilon^2 t^2, & |t| \leqslant \epsilon^{-1/2}, \\ 2^{n-1}\epsilon, & \epsilon^{-1/2} < |t| < \epsilon^{-1}+1, \\ 0, & |t| \geqslant \epsilon^{-1}+1. \end{cases} \tag{3}$$

где $\phi_n(t)$ та же, что и в (1).

Для промежутков I общего вида остаточный член в (2) не может быть сделан меньше чем $O(Q^{n-1})$. Однако несложно показать, что $\Omega_n(Q,S) = 0$ для любого $S \subseteq \mathbb{R} \setminus (-Q-1, Q+1)$. Для $n = 2$ можно доказать [7], что в (2), вместо $O(Q \ln Q)$, на самом деле

$$-2Q \int\limits_{I\cap[-Q,Q]} \frac{dt}{\max(1,|t|)} + O\left(Q\right).$$

Равенство (3) показывает, что некоторое достаточно большое подмножество вещественных алгебраических целых, содержащееся в $(-Q-1, -Q^{1/2}) \cup (Q^{1/2}, Q+1)$, статистически ведёт себя как рациональные целые, которые для любого $I \subseteq [-Q,Q]$ удовлетворяют

$$\Omega_1(Q,I) = |I| + O(1).$$

При этом, на равномерном участке асимптотика (2) становится нетривиальной, если промежуток I достаточно велик, т. е. когда $\lim_{Q\to\infty} |I| = \infty$. Кроме того, эти два ровных “плато” не остаются на месте при возрастании Q: они расходятся в стороны и удлиняются, так что в окрестности фиксированной точки равномерность распределения может сохраняться только для конечного диапазона Q.

В целом теорема 2 показывает, что при больших высотах вещественные алгебраические целые степени n статистически ведут себя подобно вещественным алгебраическим числам степени $n-1$ (в этом отношении, интересно сравнить основные результаты работ [1] и [3]). Ввиду вышесказанного, теорема 2 могла бы утверждать, что предельная плотность распределения вещественных алгебраических целых степени n равна плотности распределения алгебраических чисел степени $n-1$. Однако, имеет место следующая теорема.

Теорема 3 ([5]). *Пусть $n \geqslant 2$. Тогда при $Q \to \infty$*

$$\frac{\Omega_n(Q,\mathbb{R})}{(2Q)^n} = 2^{-n} \int_{\mathbb{R}} \phi_{n-1}(t)\,dt + 1 - \frac{4}{3}\,Q^{-1/2} + O\left(Q^{-1}(\ln Q)^{\ell(n)}\right), \tag{4}$$

где неявная O-постоянная зависит только от n.

При $n = 2$ в (4) может быть получено более точное асимтотическое разложение [7].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Beresnevich V. On approximation of real numbers by real algebraic numbers // Acta Arith. 1999. Vol. 90 № 2. P. 97–112.

2. Brown H., Mahler K. A generalization of Farey sequences: Some exploration via the computer // J. Number Theory. 1971. Vol. 3 № 3. P. 364–370.

3. Bugeaud Y. Approximation by algebraic integers and Hausdorff dimension // J. Lond. Math. Soc. 2002. Vol. 65 № 3. P. 547–559.

4. Koleda D. V. On the density function of the distribution of real algebraic numbers // J. Théor. Nombres Bordeaux. 2017. Vol. 29 № 1. P. 179–200.

5. Koleda D. V., Distribution of real algebraic integers [arXiv.org], Режим доступа: https://arxiv.org/abs/1706.10296.

6. Запорожец Д. Н. Случайные полиномы и геометрическая вероятность // ДАН. 2005. Т. 400, № 3. С. 299–303.

7. Коледа Д. В. О целых алгебраических числах и унитарных многочленах второй степени // Чебышевский сборник. 2016. Том 17 № 1. С. 117–129.

———————————————————————

УДК 511.32

Тригонометрические суммы и метрическая теория диофантовых приближений на многообразиях

Э. И. Ковалевская Беларусь, г. Минск, Белорусский государственный аграрный технический университет
ekovalevsk@mail.ru

Trigonometric sums and the metric theory of Diophantine approximations on manifolds

E. I. Kovalevskaya Belarus, Minsk, Belarusian state agrarian technical University
ekovalevsk@mail.ru

Напомним, что метрическая теория диофантовых приближений на многообразиях начала формироваться во 2-й половине прошлого столетия после опубликования работ Й. П. Кубилюса [6], [7], В. М. Шмидта [19], [20] и В. Г. Спринджука (1964 г., см. в [8]). Эта теория была связана с решением задач, мотивированных классификациями К. Малера (1932 г.) и Дж. Коксмы (1939 г.) действительных и комплексных чисел. Точнее, с определением меры Лебега множеств "*плохо*"и "*хорошо*" *аппроксимируемых чисел* рациональными дробями. С тех пор многие авторы внесли вклад в исследования по диофантовым приближениям на многообразиях, удовлетворяющих различным арифметическим и геометрическим условиям. В частности, для более полного исследования меры указанных точек была использована размерность Хаусдорфа [2].

К настоящему времени сформировалось несколько подходов в этих исследованиях: **(1)** *метод тригонометрических сумм* [1], [2, гл. 3, § 2], [3–4], [6–7], [9–10]; **(2)** *метод существенных и несущественных областей*, основанный на специальных свойствах многочленов, [2], [5], [8], [10], [12–15]; **(3)** *методы математического анализа* на дифференцируемых многообразиях [13], [19], [20]; **(4)** *методы эргодической теории* [13], [17], [18].

Для полноты изложения отметим также монографию [16] и приложения метрической теории диофантовых приближений к задачам математической физики (изучение явления резонанса) [17] и задачам теории коммуникаций (регулировка помех при передаче сигналов) [11].

Суть рассматриваемой теории состоит в следующем. Пусть $\gamma_1, \ldots, \gamma_n \in \mathbb{R}$. Обозначим через $w(\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$ точную верхнюю грань таких $w > 0$, для которых неравенство

$$||\gamma_1 a_1 + \cdots + \gamma_n a_n|| < a^{-w}, \quad a = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |a_i| \neq 0, \tag{1}$$

где $||x||$ означает расстояние от $x \in \mathbb{R}$ до ближайшего целого, имеет бесконечно много решений в наборах целых чисел $(a_1, \ldots, a_n)$.

Из "принципа ящиков" Дирихле следует, что $w(\gamma_1, \ldots, \gamma_n) \geqslant n$. В 1926 г. А. Я. Хинчин показал, что $w(\gamma_1, \ldots, \gamma_n) = n$. Такие числа $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ стали называть *"плохо" аппроксимируемыми* числами. Тогда же Хинчин доказал, что почти все (в смысле меры Лебега) точки $\mathbb{R}^n$ являются системами *"плохо" аппроксимируемых* чисел. Из работ [8], [20] следует, что в $\mathbb{R}^n$ есть многообразия размерности 1 с тем же свойством аппроксимации рациональными числами, что и все пространство. Отсюда возникла следующая проблема:

каким условиям должно удовлетворять многообразие Γ, $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$, *размерности меньше* n, $\dim \Gamma < n$, *чтобы почти все его точки* (*в смысле меры на* Γ) *были "плохо" аппроксимируемыми числами*?

Следуя Спринджуку, такие многообразия Γ стали называть *экстремальными*. Так как $\dim \Gamma < n$, то между точками на Γ существуют функциональные связи. Таким образом, появилась метрическая теория диофантовых приближений *зависимых величин*, которая исследует многообразия на экстремальность. Позже стали изучать более общий случай Ψ-аппроксимации, когда в правой части (1) стоит функция $\Psi(a)$, где $\Psi : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$ и $\Psi(a) \to 0$, когда $a \to \infty$, (см., например, [13–14]).

Приведем один из фундаментальных результатов рассматриваемой теории [10], полученный с помощью метода тригонометрических сумм.

Теорема. *Пусть* $m, n \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant n < m$, Ω — *область в* $\mathbb{R}^m$, $f_j = f_j(t_1, \ldots, t_m)$ $(1 \leqslant j \leqslant n)$ — *действительные функции, определенные в* Ω *и удовлетворяющие условиям: а) частные производные* $\partial^2 f_j/\partial t_i \partial t_k$ *непрерывны в* Ω $(1 \leqslant j \leqslant n, 1 \leqslant i, k \leqslant m)$; *б) определитель (якобиан)*

$$\det(\partial^2 f_j/\partial t_i \partial t_k)_{j,k=1,2,\ldots,n} \neq 0 \quad \textit{почти везде в} \quad \Omega,$$

в) любая целочисленная комбинация

$$h(t_k) = c_1(\partial^2 f_1/\partial t_1 \partial t_k) + \cdots + c_n(\partial^2 f_n/\partial t_1 \partial t_k)$$

рассматриваемая как функция одной переменной t_k $(1 \leqslant k \leqslant n)$ *при фиксированных остальных переменных, такова, что любой интервал, где она определена, можно разбить на ограниченное, не зависящее от* $c_1, \ldots, c_n$ *число подынтервалов, на которых* $h(t_k)$ *монотонна. Тогда многообразие* $\Gamma = (t_1, \ldots, t_m, f_1, \ldots, f_n)$ *экстремально.*

В этой теореме экстремальность Γ обусловлена общими аналитическими предпосылками. Условие в) имеющее такую многословную формулировку, просто по содержанию и выполняется для "стандартных" функций. Например, для аналитических функций оно всегда выполняется, поэтому в таком случае его можно исключить из формулировки.

Отметим, что *центральную* проблему, поставленную Спринджуком в [10], решили Д. Клейнбок и Г. Маргулис [18] методами эргодической теории. Именно, было доказано, что *если* $f_1(x), \ldots, f_n(x)$ — *вещественные аналитические функции, определенные на интервале* I, *причем* $1, f_1(x), \ldots, f_n(x)$ *линейно независимы над* $\mathbb{R}$, *то многообразие* $\Gamma = (f_1(x), \ldots, f_n(x))$, $x \in I$, *экстремально.*

Работа выполнена в рамках ГП Белорусского Республиканского ФФИ "Конвергенция".

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Берник В. И. Экстремальное свойство некоторых поверхностей в n-мерном евклидовом пространстве / В. И. Берник, Э. И. Ковалевская. // Матем. Заметки. – 1974. – Т. 15, – №2. – С. 247—254.

2. Берник В. И. Диофантовы приближения и размерность Хаусдорфа / В. И. Берник, Ю. В. Мельничук. – Мн. – 1988. Наука и техника.

3. Ковалевская Э. И. "Гиперболические" диофантовы приближения на аналитических многообразиях / Э. И. Ковалевская // Докл. АН БССР. – 1975. – Т. 19, – №3. – С. 200—203.

4. Ковалевская Э. И. Диофантовы приближения с квадратичными многочленами / Э. И. Ковалевская // Весці АН БССР. Сер. фіз.-мат. н. – 1975. – №4. – С. 5—14.

5. Ковалевская Э. И. Развитие метода существенных и несущественных областей для подсчета векторов с действительными алгебраическими координатами вблизи гладких поверхностей / Э. И. Ковалевская, О. В. Рыкова // Чебышевский сборник – 2013. – Т. 14, № 4. – 119–126.

6. Кубилюс Й. П. О применении метода академика Виноградова к решению одной задачи метрической теории чисел / Й.П. Кубилюс // Докл. АН СССР. – 1949. – Т. 67. – С. 783—786.

7. Кубилюс Й. П. Об одной метрической задаче теории диофантовых приближений / Й.П. Кубилюс // Тр. АН Лит. ССР. Сер. Б. – 1959. – Т. 2(18). – С. 3—7.

8. Спринджук В. Г. Проблема Малера в метрической теории чисел / В. Г. Спринджук // Мн. – 1967. Наука и техника.

9. Спринджук В. Г. Метод тригонометрических сумм в метрической теории диофантовых приближений зависимых величин / В.Г. Спринджук // Труды Матем. ин-та АН СССР. – 1972. – Т. 128, №2. – С. 212—254.

10. Спринджук В. Г. Метрическая теория диофантовых приближений / В. Г. Спринджук // М. – 1977. Наука. (перевод на англ.: Metric theory of Diophantine approximations. New York. 1979.

11. Adiceam F. Diophantine approximation and applications in interference alignment / F. Adiceam, V. Beresnevich, V. Levesley, S. Velani, E. Zorin // Advances in Math. – 2016. – Vol. 302. – P. 231—279.

12. Beresnevich V. Integral polynomials with small discriminants and resultants / V. Beresnevich, V. Bernik, F. Götze // Advances in Math. – 2016. – Vol. 298. – P. 393—412.

13. Beresnevich V. Metric Diophantine approximation: aspects on recent work. In Dynamics and Analytic Number Theory / V. Beresnevich, F. Ramirez, S. Velani // LMS Lecture Notes Ser. – 2016. – Vol. 437. (eds. D. Badziahin, A. Gorodnik, N. Reyerimhoff). Cambridge Univ. Press (Cambridge. 2016). – P. 1—95.

14. Beresnevich V. Diophantine approximation on manifolds and lower bounds Hausdorff dimension / V. Beresnevich, L. Lee, R. C. Vaughan, S. Velani // Math. – 2017. – Vol. 63. – P. 762—779.

15. Bernik V. I. Metric Diophantine Approximation of Manifolds / V. I. Bernik, M. M. Dodson. Cambridge Tracts in Math. Vol. 137. Cambridge University Press. Cambridge. 1999.

16. Bugeaud Y. Approximation by algebraic numbers / Y. Bugeaud // Cambridge Tracts in Math. Vol. 169. Cambridge Univ. Press, 2004.

17. Dodson M. M. Number Theory and dynamical systems / M. M. Dodson, J. A. G. Vickers // London Math. Soc. Lecture Note Ser. – Vol. 134. Cambridge Univ. Press. 1989.

18. Kleinbock D. Y. Flows on homogeneous spaces and Diophantine approximation on manifolds / D.Y. Kleinbock, G.A. Margulis // Ann. Math. – 1998. – Vol. 148. – P. 339—360.

19. Schmidt W. M. Über Gitterpunkte auf gewissen Flächen / W.M. Schmidt // Monatch. Math. – 1964. – Vol. 68, No. 1 – P. 59—74.

20. Schmidt W. M. Metrische Sätze Über simultane Approximationabhängiger Grössen / W.M. Schmidt // Monatch. Math. – 1964. – Vol. 68, No. 2. – P. 1543—166.

УДК 511

Представление p-адических, g-адических и полиадических чисел в виде суммы лиувиллевых чисел

Е. С. Крупицын Россия, г. Москва, Московский педагогический государственный университет
krupitsin@gmail.com

Representation of p-adic, g-adic and polyadic numbers as the sum of Liouville numbers

E. S. Krupitsyn Russia, Moscow, Moscow State Pedagogical University
krupitsin@gmail.com

Доказано, что любое p-адическое, любое g-адическое и любое целое полиадическое число представимо суммой двух, соответственно, p-адических, g-адических, полиадических лиувиллевых чисел.

УДК 511.42

О мере множества действительных чисел, на котором целочисленные полиномы принимают малые значения

О. Н. Кемеш Беларусь, Минск, Белорусский государственный аграрный технический университет
И. М. Морозова Беларусь, Минск, Белорусский государственный аграрный технический университет
О. В. Рыкова Беларусь, Минск, Белорусский государственный аграрный технический университет
kon.vm@bsatu.by, mim.vm@bsatu.by, rov.vm@bsatu.by

On the measure of the set of real numbers where small values of integer polynomials are realized

O. N. Kemesh Belarus, Minsk, Belarusian State Agrarian Technical University
I. M. Morozova Belarus, Minsk, Belarusian State Agrarian Technical University
O. V. Rykova Belarus, Minsk, Belarusian State Agrarian Technical University
kon.vm@bsatu.by, mim.vm@bsatu.by, rov.vm@bsatu.by

Пусть
$$P(t) = P_n(t) = a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + ... + a_1 t + a_0 \tag{1}$$
полином с целыми коэффициентами степени $\deg P(t) = n$ и высоты $H = H(P) = \max\limits_{0 \leqslant i \leqslant n} |a_i|$. При классификации действительных и комплексных чисел важное значение имеет величина $\gamma_n(x) = \inf \gamma$, для которых неравенство
$$|P(x)| < H^{-\gamma} \tag{2}$$
имеет бесконечное число решений в полиномах (1). Нетрудно доказать, что
$$\gamma_n(x) \leqslant n \tag{3}$$
для всех $x \in R$. К. Малер предположил, что в (3) можно поставить знак равенства для почти всех (в смысле меры Лебега) действительных чисел x. Его гипотезу доказал В.Г. Спринджук. В работах [1, 2] этот результат был усилен и обобщен до полного аналога теоремы Хинчина о приближении действительных чисел рациональными.
Во всех перечисленных задачах важное значение имеют оценки сверху меры $M_n(\omega,\ Q)$ множества $x \in R$, для которых неравенство
$$|P\,(x)| < Q^{-w}, \quad w > 0$$
выполняется в полиномах $P(x)$, $\deg P \leqslant n$, $H(P) \leqslant Q$. Известно неравенство
$$\mu\, M_n(w,\ Q) < c_1 Q^{-\frac{w-n}{n}}.$$
Это неравенство можно усилить.

Теорема 1. *Для множества $M_2\,(\omega,\ Q)$ справедливо неравенство*
$$\mu\,(M_2\,(\omega,\ Q)) < c_2 \cdot Q^{-\frac{\omega-1}{2}}.$$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Берник В. И. О точном порядке приближения нуля значениями целочисленных многочленов // Acta Arithmetica. 1989. Том 53. С. 17–28.

2. Бересневич В. В. Точный порядок приближения действительных чисел алгебраическими// Доклады Российской Академии Наук. 1999. Том 366 № 5. С. 583–586.

УДК 511.42

О совместных приближениях нуля значениями целочисленных полиномов в пространстве $\mathbb{R}^k$

М. В. Ламчановская Беларусь, Минск, Институт информационных технологий БГУИР
Н. И. Калоша Беларусь, Минск, Институт математики НАН Беларуси
Н. В. Шамукова Беларусь, Минск, Университет гражданской защиты МЧС Республики Беларусь
lammv@mail.ru, kalosha@im.bas-net.by, shamukova_n@mail.ru

On simultaneous approximation of zero by values of integer polynomials in the space $\mathbb{R}^k$

M. V. Lamchanovskaya Belarus, Minsk, Information Technology Institute of BSUIR
N. I. Kalosha Belarus, Minsk, Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus
N. V. Shamukova Belarus, Minsk, University of Civil Protection of the Republic of Belarus
lammv@mail.ru, kalosha@im.bas-net.by, shamukova_n@mail.ru

Пусть задано натуральное число $Q > 1$ и некоторые промежутки $I_j \subset \mathrm{R}$ длины $|I_j| = Q^{-v}$, $0 < v < \frac{1}{k}$, $1 \leqslant k \leqslant n$. Рассмотрим многочлен с целыми коэффициентами $P(x) = a_n x^n + ... + a_1 x + a_0 \in \mathbb{Z}[x]$. Под высотой многочлена $P(x)$ будем подразумевать величину $H(P) = \max |a_i|$. Степень многочлена $P(x)$ будем обозначать как $\deg P = n$. Определим множество многочленов с целыми коэффициентами ограниченной степени и высоты:

$$\mathcal{P}_n(Q) = \{P(x) \in \mathbb{Z}[x] : \deg P \leqslant n, H(P) \leqslant Q\}.$$

Пусть далее $\bar{x} = (x_1, x_2, ..., x_k) \in \Pi = I_1 \times I_2 \times ... \times I_k$ - вещественный вектор. Через μB будем обозначать меру Лебега измеримого множества $B \subset \mathrm{R}^k$, $k \in \mathrm{N}$, для элементов которого неравенство $\prod_{i=1}^{k} |P(x_i)| < Q^{-\omega}$, $\omega > n - k + 1$ верно хотя бы для одного полинома $P(x) \in \mathcal{P}_n(Q)$ на множестве $B \subset \Pi$.

Теорема 1. $\mu B < \frac{1}{4}\mu\Pi$.

Доказательство теоремы основано на методе В. Г. Спринджука, разработанного при решении проблемы Малера [1], [2]. Следующие леммы обосновывают переход от множества всех целочисленных многочленов $P(x) = a_n x^n + ... + a_1 x + a_0$ к множеству неприводимых в поле рациональных чисел многочленов, имеющих определенную структуру коэффициентов и корней, при доказательстве теоремы.

Лемма 1. *Пусть все координаты вектора $\bar{x} = (x_1, x_2, ..., x_k)$ трансцендентны и B_1, B_2 — множества $\bar{x} \in \Pi$, для которых соответственно неравенства*

$$\prod_{i=1}^{k} |P(x_i)| < Q^{-\lambda_1}, \qquad \prod_{i=1}^{k} |F(x_i)| < Q^{-\lambda_1}$$

имеют решение в целочисленных полиномах $P(x)$ степени не выше n и целочисленных неприводимых полиномах $F(x)$ степени не выше n соответственно. Тогда если $\mu B_2 < c_1(n)\mu\Pi$, $0 < c_1 < 1$, то $\mu B_1 < c_2(n)\mu\Pi$, где $c_1 < c_2 < 1$.

Лемма 2. *При некотором $\lambda_2 > 0$ неравенство*

$$\prod_{i=1}^{k} |F_1(x_i)| < Q^{-\lambda_2}$$

имеет решение для множества B_1, $\mu B_1 < c_3(n)\,\mu\Pi$, в целочисленных неприводимых многочленах $F_1(x)$ степени не выше n. Тогда неравенство

$$\prod_{i=1}^{k} |F_2(x_i)| < Q^{-\lambda_2}$$

имеет решение для некоторого множества B_2, $\mu B_2 < c_4(n)\,\mu\Pi$, в целочисленных неприводимых многочленах $F_2(x)$ степени не выше n, подчиненных условию

$$\max_{0\leqslant i\leqslant n-1} |a_i(F_2)| \leqslant a_n(F_2) = H(F_2),$$

где $a_i(F_2)$ — коэффициенты многочлена $F_2(x)$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Спринджук В. Г. Проблема Малера в метрической теории чисел. — Минск: Наука и техника, 1967. – 184 с.

2. Baker A. On a theorem of Sprindžuk // Proc. Royal Soc. 1966. Vol. 292. P. 92–104.

———————————————————————————

УДК 511.32

О количестве алгебраических точек ограниченной степени и высоты на плоскости

А. В. Луневич Беларусь, г. Минск, Институт математики Национальной Академии Наук Беларуси

Н. В. Сакович Беларусь, г. Могилев, Могилевский государственный университет имени А. А. Кулешова

LunevichAV@gmail.com, SakovichNV@tut.by

On the number of algebraic points of bounded degree and height in the plane

A. V. Lunevich Belarus, Minsk, Institute of Mathematics of National Academy of Sciences of Belarus

N. V. Sakovich Belarus, Mogilev, Mogilev State A. Kuleshov University

LunevichAV@gmail.com, SakovichNV@tut.by

Впервые понятие регулярной системы было введено Р. Бейкром и В. Шмидтом [1]. С помощью свойств регулярных систем можно доказывать аналоги теоремы Хинчина в случае расходимости и находить оценку снизу для размерности Хаусдорфа различных множеств [2, 3, 4, 5, 6, 7]. В данной работе дано определение регалярной системы точек на плоскости и доказана регулярность алгебраических точек на плоскости, что обобщает результаты Р. Бейкера, В. Шмидта, В. И. Берника, В. В. Бересневича.

Определение 1. *Счетное множество* Γ, *состоящее из точек* $\overline{\gamma} = (\gamma_1, \gamma_2\ )$ *на плоскости вместе с положительной функцией* N, *определенной на* Γ, *называется* (v_1, v_2)*-регулярной системой* (N, Γ), *если для любого прямоугольника* $\Pi = I_1 \times I_2$ *найдется такое число* $\mathrm{T}_0(\Pi) > 0$, *что при* $\mathrm{T} > \mathrm{T}_0$ *выполнены следующие условия.*

1. Прямоугольники

$$
\begin{aligned}
|x - \gamma_1| &< \mathrm{T}^{-v_1}, \quad v_1 > 0,\\
|y - \gamma_2| &< \mathrm{T}^{-v_2}, \quad v_2 > 0,
\end{aligned}
$$

не пересекаются.

2. $\#\left\{\overline{\gamma} \in \Gamma \bigcap \Pi\ : N\left(\overline{\gamma}\right) \leqslant \mathrm{T}^{v_1+v_2}\right\} \geqslant c_1 \mathrm{T}^{v_1+v_2}\mu\Pi.$

Определение 2. *Алгебраической точкой* $\overline{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2)$ *на плоскости будем называть точку, координаты которой являются корнями одного неприводимого многочлена с целыми взаинмо простыми коэффициентами, если у этого многочлена старший коэффициента равен 1, то такую алгебраическую точку будем называть целой.*

Определение 3. *Пусть* $P\left(x\right)$ — *неприводимый многочлен с целыми взаимно простыми коэффициентами и* $\overline{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2)$ — *алгебраическая точка, координаты которой являются корнями многочлена* $P\left(x\right)$. *Опрделелим степень и высоту алгебраической для точки* $\overline{\alpha}$: $\deg \overline{\alpha} = \deg P$, $H\left(\overline{\alpha}\right) = H\left(P\right)$, *где* $H\left(P\right)$ — *называется высотой многочлена* P, *которая равна наибольшему модулю коэффициентов многочлена* P.

Доказаны две теоремы.

Теорема 1. *Множество алгебраических точек* $\overline{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2)$ *вместе с функцией* $N\left(\overline{\alpha}\right) = \left(H\left(\overline{\alpha}\right)\right)^{n+1}$ *образует* (v_1, v_2)*-регулярную систему, где*

$$
v_1 + v_2 = n + 1, \quad v_1 > 0,\ v_2 > 0.
$$

Теорема 2. *Множество целых алгебраических точек точек* $\overline{\beta} = (\beta_1, \beta_2)$ *вместе с функцией* $N\left(\overline{\beta}\right) = \left(H\left(\overline{\beta}\right)\right)^{n}$ *образует* (v_1, v_2)*-регулярную систему, где*

$$
v_1 + v_2 = n, \quad v_1 > 0,\ v_2 > 0.
$$

Основой доказательства теорем 1.1 и 1.2 является следующая теорема.

Теорема 3. *Пусть* $\mathcal{L}_n = \mathcal{L}_n(Q,\ \delta_0,\ I_1,\ I_2)$ *обозначает множество пар* $(x,\ y) \in I_1 \times I_2$, *для которых система неравенств*

$$
\begin{cases}
|P\left(x\right)| \ll Q^{-v},\\
|P\left(y\right)| \ll Q^{-v},\\
\min\left\{|P'(x)|\,, |P'(y)|\right\}\ < \delta_0 Q
\end{cases}
$$

имеет решение в полиномах $P\left(x\right) \in \mathcal{P}_n(Q)$, *где* $2v = n - 1$. *Тогда при достаточно малой величине* $\delta_0 = \delta_0(n)$ *имеем*

$$
\mu\mathcal{L}_n < \frac{1}{4}\left|I_1\right|\left|I_2\right|.
$$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Baker, A. Diophantine approximation and Hausdorff dimension / A. Baker, W. M. Shmidt // Proc. London Math. Soc. — 1970. — No. 21. — P. 1—11.

2. Кудин, А. С. Аналог теоремы Хинчина в случае расходимости в трехмерном евклидовом пространстве / А. С. Кудин, А. В. Луневич // Известия НАН Беларуси. Сер. физ.-мат. наук. — 2015. — № 3. С. 66—81.

3. Кудин, А. С. Аналог теоремы Хинчина в случае расходимости в полях действительных комплексных и p-адических чисел / А. С. Кудин, А. В. Луневич // Труды Института математики. — 2015. — Том 23, № 1. — С. 76–83.

4. Луневич, А. В. Размерность Хаусдорфа множества действительных, комплексных и p-адических чисел с заданным порядком приближения алгебраическими числами / А. В. Луневич // Доклады НАН Беларуси. — Том 60, № 4. — С. 38—43.

5. Bernik, V. A divergent Khitchine's theorem in the real, complex and p-adic fields / V. Bernik, N. Budarina, D. Dickinson // Lithunian Mathematical Journal. — 2008. — Vol. 48, No. 2. — P. 158–173.

6. Бересневич, В. В. Регулярные системы и линейные диофантовы приближения на многообразиях / В. В. Бересневич, В. И. Берник, М. М. Додсон // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. — 2002. — Т. 46, № 6. — С. 37—39.

7. Бересневич, В. В. Аналог теоремы Хинчина для кривых в трехмерном комплексном пространстве / В. В. Бересневич, Д. В. Васильев // Известия НАН Беларуси. Сер. физ.-мат. наук. — 2001. — № 1. — С. 5—7.

УДК 511.176

Числа Бернулли

В. И. Усков Воронеж, Воронежский государственный университет
vum1@yandex.ru

Bernoulli numbers

V. I. Uskov Voronezh, Voronezh state University
vum1@yandex.ru

Аннотация: Числа Бернулли возникли при вычислении суммы натуральных чисел, возведенных в степень. Известна рекуррентная формула для вычисления чисел Бернулли. Числа Бернулли используются при разложении элементарных функций в степенной ряд. Также с помощью них вычисляются интегралы. В настоящей работе найдена аналитическая формула для вычисления чисел Бернулли.

Ключевые слова: числа Бернулли, сумма натуральной степени.

Числами Бернулли называются числа, вычисляемые по следующим рекуррентным соотношениям [1]:

$$\begin{aligned} &B_0 = 1, \\ &B_k = \frac{1}{k+1} \sum_{j=2}^{k+1} (-1)^j C_{k+1}^j B_{k+1-j}, \end{aligned} \tag{1}$$

где C_n^m — биномиальные коэффициенты. В частности,

$$B_1 = \frac{1}{2}, \quad B_2 = \frac{1}{6}, \quad B_3 = 0, \quad B_4 = -\frac{1}{30}, \quad \ldots$$

Замечание. *Числа Бернулли с нечетным номером, кроме 1, равны 0.*

Числа Бернулли часто входят в коэффициенты разложения элементарных функций в степенной ряд [2]. Например:

$$\frac{x}{e^x - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} x^n, \quad |x| < 2\pi,$$

$$x\operatorname{ctg} x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n B_{2n} \frac{2^{2n}}{(2n)!} x^{2n}, \quad |x| < \pi,$$

$$\operatorname{tg} x = \sum_{n=0}^{\infty} |B_{2n}| \frac{2^{2n}(2^{2n}-1)}{(2n)!} x^{2n-1}, \quad |x| < \frac{\pi}{2}.$$

Также с помощью них считаются несобственные интегралы:

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{2n-1}\,dx}{e^{2\pi x} - 1} = \frac{1}{4}|B_{2n}|, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Числа Бернулли впервые возникли при вычислении суммы натуральных чисел, возведенных в степень:

$$S_m = 1^m + 2^m + \ldots + (n-1)^m + n^m \tag{2}$$

в труде Johann Faulhaber Академия Алгебры (1631) [3]. В [4], [5] получены рекуррентные формулы, позволяющие вычислить S_m, зная предыдущие S_k. Из этих формул получена *формула Бернулли* для вычисления S_m; в силу приведенного выше замечания ее можно преобразовать:

$$S_m = \frac{n^{m+1}}{m+1} + \frac{n^m}{2} + \sum_{j=1}^{\left[\frac{m}{2}\right]} \frac{B_{2j}}{2j} \cdot C_m^{2j-1} \cdot n^{m+1-2j}, \tag{3}$$

где $[x]$ - целая часть числа x. При $m = 1$ слагаемые суммы полагаются равными 0.

Автором в [6] решена задача о нахождении S_m другим способом. Для этого им вводится для степенной функции $f(n) = n^p$, $p \in \mathbb{N}$, оператор типа дифференцирования, наделенный следующими свойствами:

1^0. $Df = pn^{p-1}$;

2^0. Символ $D(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ линеен по своим аргументам;

3^0. $D(\mathrm{const}) \equiv 0$;

4^0. $D^m = \underbrace{D \ldots D}_{m}$.

Определяется обратный оператор D^{-1} с помощью следующих свойств:

1^0. $D^{-1}f = p^{-1}n^{p+1}$;

2^0. Символ $D^{-1}(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ линеен по своим аргументам;

3^0. $D^{-1}(0) \equiv 0$;

4^0. $D^{-m} = \underbrace{D^{-1} \ldots D^{-1}}_{m}$.

Автор также пришел к формуле (3) (там B_{2j} обозначены q_j); но при этом при решении задачи им получено тождество:

$$\sum_{k=1}^{M} C_{2M+2}^{2k} \cdot B_{2k} = M, \quad M = 1, 2, \ldots, \tag{4}$$

которое можно рассматривать как систему из M линейных уравнений относительно M неизвестных B_2, B_4, ..., B_{2M}. Введем матрицу M-го порядка

$$C_M = \begin{pmatrix} C_4^2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ C_6^2 & C_6^4 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ C_8^2 & C_8^4 & C_8^6 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ C_{2M+2}^2 & C_{2M+2}^4 & C_{2M+2}^6 & \cdots & C_{2M+2}^{2M-2} & C_{2M+2}^{2M} \end{pmatrix}$$

и матрицу C'_M, полученную заменой последнего столбца матрицы C_M столбцом $(1, 2, \ldots, M)^T$. Система (4) однозначно разрешима в силу $\det C_M = C_4^2 C_6^4 \ldots C_{2M+2}^{2M} \neq 0$, и по формуле Крамера числа Бернулли определяются выражением:

$$B_{2k} = \frac{\det C'_k}{\det C_k}. \tag{5}$$

Пример. Вычислить B_8. По формуле (5) имеем:

$$C_4 = \begin{pmatrix} C_4^2 & 0 & 0 & 1 \\ C_6^2 & C_6^4 & 0 & 2 \\ C_8^2 & C_8^4 & C_8^6 & 3 \\ C_{10}^2 & C_{10}^4 & C_{10}^6 & 4 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} C_4^2 & 0 & 0 & 0 \\ C_6^2 & C_6^4 & 0 & 0 \\ C_8^2 & C_8^4 & C_8^6 & 0 \\ C_{10}^2 & C_{10}^4 & C_{10}^6 & C_{10}^8 \end{pmatrix};$$

$$B_8 = \frac{\det C_4}{\det C} = -\frac{1}{30}.$$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Абрамович В.С. Числа Бернулли // Квант. — 1974. — № 6. — С. 10–14.
2. URL: https://ru.wikipedia.org/Числа_Бернулли (дата обращения: 18.12.2017)
3. Knuth D. Johann Falhaber and sums of powers. Mathematics of Computation. Vol. 61, № 203. July 1993. P. 277-294. URL: http: // www.ams.org/journals/mcom/1993-61-203/S0025-5718-1993-1197512-7/S0025-5718-1993-1197512-7.pdf (дата обращения: 11.12.2017).
4. Завало С.Т. Элементарная алгебра. — М. : Просвещение, 1964. — 299 с.
5. Абрамович В.С. Суммы одинаковых степеней натуральных чисел // Квант. — 1973. — № 5. – С. 22–25.
6. Усков В.И. Сумма натуральных чисел в степени // Перспективы развития науки в современном мире: сборник статей по материалам IV международной научно-практической конференции. — Уфа: Изд-во Дендра, 2017. — Ч. 1. — С. 25–31.

УДК 511.32

Оценки линейных форм от гипергеометрических рядов с иррациональными параметрами в $\mathbb{K}$-почти полиадическом случае

В. Г. Чирский Россия, г. Москва, Московский государственный университет, Московский педагогический государственный университет
Е. Ю. Юденкова Россия, г. Москва, Московский государственный университет, Московский педагогический государственный университет
vgchirskii@yandex.ru, yudenkovaey@gmail.com

Estimates of linear forms of hypergeometric series with irrational parameters in the $\mathbb{K}$-almost polyadic case

V. G. Chirskii Russia, Moscow, Moscow State University, Moscow Pedagogical State University
E. Y. Yudenkova Russia, Moscow, Moscow State University, Moscow Pedagogical State University
vgchirskii@yandex.ru, yudenkovaey@gmail.com

Оценки линейных форм от гипергеометрических рядов с иррациональными параметрами в $\mathbb{K}$-почти полиадическом случае. Получены оценки снизу значений в алгебраических точках поля $\mathbb{K}$ линейных форм от обобщённых гипергеометрических рядов:

$$\sum_{n=0}^{\inf} \frac{(\mu_1)_n \dots (\mu_r)_n}{(\lambda_1)_n \dots (\lambda_s)_n n!} z^n, r \geq s, \tag{1}$$

параметры которых содержат иррациональные алгебраические числа.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Чирский В. Г. Об арифметических свойствах обобщенных гипергеометрических рядов с иррациональными параметрами // Известия РАН, серия Матем. 2014. Том 78 № 6. С. 193-210.

———————————————————————————

7. Дискретная геометрия и геометрия чисел

УДК 511.9

Свободные параллелоэдры

В. П. Гришухин Россия, Москва, Центральный экономико-математический институт РАН
vgrishukhin@mail.ru

Free parallelotopes

V. P. Grishukhin, Russia, Moscow, Central economics and mathematics institute RAS
vgrishukhin@mail.ru

Параллелоэдр есть многогранник, параллельными сдвигами которого можно замостить пространство без зазоров и пересечений по внутренним точкам. Частным случаем параллелоэдра является ячейка Дирихле-Вороного некоторой решетки относительно метрики, порождаемой положительной квадратичной формой. Более 100 лет назад Г.Ф.Вороной выдвинул гипотезу, что всякий параллелоэдр есть ячейка Дирихле-Вороного для некоторой положительной квадратичной формы.

Проекция параллелоэдра вдоль любой его грани коразмерности 2 есть либо параллелограмм, либо центрально симметричный шестиугольник. Поэтому фасеты, являющиеся прообразами сторон многогранника-проекции, образуют 4- и 6-пояски, соответственно.

Параллелоэдр P называется *свободным* вдоль вектора e, если сумма Минковского параллелоэдра P с отрезком прямой, натянутой на вектор e, есть снова параллелоэдр. Свободные параллелоэдры обладают многими замечательными свойствами. В частности, проекция вдоль вектора e свободного вдоль e параллелоэдра на трансверсальную e гиперплоскость есть параллелоэдр. Все параллелоэдры размерности не больше 4 и все известные параллелоэдры размерности 5 свободны вдоль некоторых векторов.

Экватор свободного параллелоэдра P есть множество прообразов фасет проекции P. Экватор состоит из фасет и контактных граней коразмерности 2, которые параллельны вектору e. Грань называется *контактной*, если она есть пересечение двух параллелоэдров разбиения. Фасеты, не принадлежащие экватору, т.е. не параллельные e, образуют *верхнюю и нижнюю шапочки*. Свободный параллелоэдр называется *специальным*, если его экватор имеет фасету, принадлежащую 4-пояску, пересекающемуся с шапочками.

Доказывается, что для не специального свободного параллелоэдра и его проекции справедлива гипотеза Вороного.

———————————————————————————————

УДК 514.175, 515.162

О многогранниках в H^3 с прямыми двугранными углами

И. С. Гуцул Молдавия, Кишинев, Институт математики и информатики Академии Наук Молдовы
igutsul@mail.ru

On polyhedra in H^3 with right dihedral angles

I. S. Gutsul Moldova, Kishinev, Institute of Mathematics and Computer Science of the ASM
igutsul@mail.ru

В работе [1] решена задача о конечных многогранниках в пространстве H^3 со всеми прямыми двугранными углами. Цель настоящего сообщения, рассмотреть вопрос о бесконечных многогранниках, но с конечным объемом, в H^3, все двугранные углы которых равны $\pi/2$. Понятно, что такие многогранники разбивают H^3 нормально и правильно.

Все рассуждения мы ведем с точки зрения синтетической геометрии. Ясно что в каждой собственной вершине многогранника со всеми прямыми углами сходятся ровно три ребра, а в каждой бесконечно удаленной вершине такого многогранника сходятся ровно четыре ребра. Другого сорта вершин у таких многогранников быть не может. Что касается думерных граней таких многогранников, то если грань содержит только конечные вершины, то она может быть k-угольником, но $k \geqslant 5$. Грани со всеми бесконечно удаленными вершинами могут быть k-угольниками, где $k \geqslant 3$.

Для дальнейших рассуждений нам понадобится одно понятие. Будем называть сферическим мешком замкнутую поверхность диффиаморфную двумерной сфере. Любую хорду лежащую внутри этой поверхности и соединяющую любые две точки поверхности будем называть диаметром сферического мешка. Ясно, что они будут различной длины. Когда мы говорим, что раздуваем сферический мешок, то это означает, что некоторые диаметры увеличиваются по длине, но некоторые могут уменьшаться по длине. Но однозначно, что при этом растет- это объем части пространства заключенного внутри сферического мешка. Все наши рассуждения, по существу, сводятся к методу, который мы назвали методом стягивания конечного ребра многогранника в точку абсолюта (т.е. бесконечно удаленную вершину). Этот метод состоит из трех шагов. На первом шаге мы получаем многогранник K со всеми вершинами на абсолюте (т.е. каждая собственная вершина становится бесконеяно удаленной). На втором шаге мы уводим вершины за абсолют, т.е. мы получаем многогранник в котором ребра, идущие в какую-либо вершину образуют гиперболическую связку прямых и мы отсекаем эту свзку плоскостью ортогональной прямым связки. В результате мы получаем новый многогранник P. В этом многограннике число граней увеличивается, т.е. появляются новые грани соответствующие вершинам многогранника K и ортогональные граням многогранника P, которые этот многогранник наследует от многогранника K. На третьем шаге мы получим многогранник M, когда все ребра многогранника P, которые он унаследовал от многогранника K стянутся в точки абсолюта, т.е. будут бесконечно удаленными вершинами многогранника M, а сам этот многогранник имеет все двугранные углы равные $\pi/2$.

Теорема 1. *Пусть нам дан конечный многогранник K в гиперболическом H^3. Тогда в этом пространстве существует соответствующий ему бесконечный многогранник P конечного объема со всеми бесконечно удаленными вершинами и всеми прямыми двугранными углами следующего строения: 1) число бесконечно удаленных вершин многогранника P равно числу ребер многогранника K; 2) грани многогранника P состоят из двух типов: многоугольники соответствующие граням многогранника K и многоугольники соответствующие могогранным вершинам многогранника K.*

Доказательство теоремы 1 сведется к трем выше указанным шагам. На первом шаге мы впишем в многогранник K сферический мешок и начнем его раздувать. Исходный многогранник будет увеличиваться в объеме, его двугранные углы уменьшаться, а ребра увеличиваться. Мы будем продолжать этот процесс пока все вершины многогранника K не станут бесконечно удаленными, а отрезки ребер превратятся в прямые. Раздувая дальше сферический мешок, мы добъемся случая, когда ребра многогранника K, идущие в каждую из его вершин, будут образовывать гиперболическую связку прямых. Но тогда для каждой такой гиперболической связки существует плоскость ортогональная всем прямым данной связки. Отсечем такими плоскостями части уходящие за абсолют и получим новый многогранник S. Грани многогранника S представляют собой грани соответствующие многогранным вершинам могогранника K и граням этого же могогранника усеченным в вершинах. Таким образом число граней многогранника S будет состоять из числа граней многогранника K плюс число вершин этого же многогранника. Двугранные углы при "новых"гранях многогранника S будут прямыми, а сам многогранник S будет конечным. Продолжая раздувать сферический мешок мы будем получать многогранники аналогичные S, но вершины "новых"и "старых"граней будут стремиться к абсолюту, длины сторон "новых"граней будут увеличиваться, а двугранные углы при этих гранях будут оставаться прямыми. Что касается "старых" ребер многогранника S, то длина их и двугранные углы при них будут уменьшаться. И наконец, продолжая раздувать сферический мешок мы добъемся случая, когда все "старые"ребра многогранника S стянутся в точки абсолюта и мы получим многогранник P со всеми прямыми углами и всеми вершинами на абсолюте.

Теорема 2. *Пусть нам многогранник K конечного объема с собственными и бесконечно удаленными вершинами в гиперболическом пространстве H^3. Тогда в этом пространстве существует соответствующий многограннику K многогранник P конечного объема со всеми вершинами на абсолюте и всеми прямыми двугранными углами следующего строения: 1) число бесконечно удаленных вершин многогранника P равно числу ребер многогранника K; грани многогранника P состоят из двух типов: многоугольники соответствующие граням многогранника K и многоугольники соответствующие многогранным вершинам многогранника K (как собственным так и бесконечно удаленным).*

Теорема 3. *Пусть нам дан многогранник K конечного объема со всеми бесконечно удаленными вершинами в гиперболическом пространстве H^3. Тогда в этом пространстве существует соответствующий многограннику K многогранник P конечного объема со всеми вершинами на абсолюте и всеми прямыми двугранными углами следующего строения: 1) число бесконечно удаленных вершин многогранника P равно числу ребер многогранника K; грани многогранника P состоят из двух типов: многоугольники соответствующие граням многогранника K и многоугольники соответствующие могогранным вершинам многогранника K.*

Доказательство теорем 2 и 3 проводится аналогично тому, как мы доказывали теорему 1.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. А.В.Погорелов. О правильном разбиении пространства Лобачевского. Матем. заметки 1(1), (1967), стр. 3-8.

УДК 519.1

Избранные проблемы обобщенных конечных метрик

Е. И. Деза Россия, г. Москва, Московский педагогический государственный университет
elena.deza@gmail.com

Selected problems of generalized finite metrics

E. I. Deza Russia, Moscow, Moscow State Pedagogical University
elena.deza@gmail.com

Понятие расстояния (удаленности, различия, меры непохожести) является одним из основных во всей человеческой деятельности.

Математические понятия *метрики* на множестве X (т.е. функции d из $X \times X$ в множество действительных чисел, удовлетворяющей условиям $d(x, y) \geq 0$ с равенством только при $x = y$, $d(x, y) = d(y, x)$ и $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$), и *метрического пространства* (X, d) были введены более века назад Фреше (1906) и Хаусдорфом (1914) в качестве специального случая бесконечного топологического пространства.

Начиная с Менгера (который в 1928 г. ввел понятие метрического пространства в геометрию) и Блюменталя (1953), интерес к метрическим пространствам (причем не только бесконечным, но и конечным) резко повысился. Сегодня метрики, расстояния и их обобщения являются важнейшим инструментом исследований в самых разных областях математики и ее приложений, включая геометрию, теорию вероятностей, статистику, теорию кодирования, теорию графов, кластерный анализ, анализ данных, распознавание образов, теорию сетей, математическую инженерию, компьютерную графику, машинное зрение, астрономию, космологию, молекулярную биологию и многие другие отрасли науки. [1], [2]

Отбросив условие $d(x, y) > 0$ для различных x, y, мы получим понятие *семиметрики*, ослабленной версии метрики, часто более удобной для практических приложений. Понятие семиметрики было впервые рассмотрено Фреше (1906), в то время как первый детальный топологический анализ свойств обектов такого рода был сделан Вильсоном (1931). [1], [2]

Исключив условие симметрии $d(x, y) = d(y, x)$, мы получим понятие *квазиметрики* и *квазисемиметрики* - ориентированных аналогов (симметричных) понятий метрики и семиметрики. Эти объекты были введены в рассмотрение Хасдорфом (1914) и подробно проанализированы Вильсоном (1931). Они широко используются в семантике вычислений, компьютерной геометрии и других прикладных вопросах. [1], [3], [4], [5]

Понятие *m-метрики* (функции d из X^{m+1} во множество действительных чисел, удовлетворяющей условиям $d(x_1, x_2, ..., x_{m+1}) \geqslant 0$ с равенством для $x_1 = x_2$, существования x_{m+1}, такого что $d(x_1, ..., x_{m+1}) > 0$, если $x_1, ..., x_m$ различны, $d(x_1, ..., x_{m+1}) = d(x_{\pi(1)}, ..., x_{\pi(m+1)})$ для любой перестановки π множества $\{1, ..., m+1\}$ (*тотальная симметрия*), $d(x_1, ..., x_{m+1}) \leq \sum_{i=1}^{m+1} d(x_1, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_{m+2})$ (*неравенство симплекса*)) и *m-хемиметрики* (функции d из X^{m+1} во множество действительных чисел, удовлетворяющей условиям $d(x_1, ..., x_{m+1}) \geq 0$, $d(x_1, x_1, x_2, ..., d_m) = 0$, неравенству симплекса и обладающей тотальной симметрией) являются многомерными (именно, ($(m+1)$-мерными) аналогами (двумерных) понятий метрики и семиметрики. Эти понятия появились более 70 лет назад; сегодня список посвященных им публикаций насчитывает более 300 источников. Интерес к m-метрикам уходит корнями в геометрию; наибольшее внимание привлекают их топологические свойства. [1], [3], [6]

В нашей работе мы рассматриваем, после короткого обзора, посвященного обобщениям метрик и содержащего историю вопроса и множество примеров (в том числе ориентрованных и многомерных конструкций, аналогичных классическим разрезам), конусы квазисемиетрик и m-хемиметрик на множестве $X = \{1, \ldots, n\}$ для малых значений n. Мы находим грани и образующие указанных конусов, строим и анализируем таблицы их принадлежности и сммежности. Мы изучаем графы, связанные с указанными конусами.[1]

Кроме того, мо проводим аналогичную работу для двух специальных классов обобщенных метрик: *частичных метрик* (функций p из $X \times X$ во множество действительных чисел, удовлетворяющих условиям $p(x, y) \geq 0$, $p(x, y) = p(y, x)$ (*симметрия*), $p(x, y) \geqslant p(x, x)$, и $p(x, z) \leq p(x, y) + p(y, z) - p(y, y)$ (*неравенство треугольника*)) и *взвешиваемых квазиметрик* (то есть квазиметрик q, для которых существует весовая функция $w = (w_i) : V_n \longrightarrow \mathbb{R}_{\geqslant 0}$, такая что $q(i, j) + w_i = q(j, i) + w_j$ для всех $i \neq j$). Частичные семиметрики, как и тесно связанные с ими возвешиваемые квазисемиметрики, имеют многочисленные приложения в компьютерных науках, в частности, в теории информации, анализе данных, вопросах подсчета сложности вычислений и др. [7], [8], [9], [10]

Теоретической основой исследования является ”Энциклопедический словарь расстояний“ [1], то время как практические методы исследования и базовые результаты, сваязанные с обобщениями конечных метрик, можно найти в книге ”Обобщения конечных разрезов и метрик“ [3], которая, в свою очередь, опирается на монографию ”Разрезы и метрики“ [2], посвященную классическому двумерному симметричному случаю.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. M.M. Deza and E. Deza, *Encyclopedia of Distances*, Springer-Verlag, 2016.

2. M.Deza and M.Laurent, *Geometry of cuts and metrics*, Springer-Verlag, Berlin, 1997.

3. E.I. Deza, M.M. Deza and M. Dutour Sikirić, *Generalizations of finite metrics and cuts*, Worls Scientific, 2016.

4. M.Deza and E.Deza, *Quasi-metrics, directed multi-cuts and related polyhedra*, European Journal of Combinatorics, Special Issue “Discrete Metric Spaces”, **21-6** (2000) 777–796.

5. M.Deza, M.Dutour and E.Deza, *Small cones of oriented semimetrics*, American Journal of Mathematics and Management Science (2002), **22-3,4** (2003) 199–225.

6. M.Deza and M.Dutour, *Cones of metrics, hemi-metrics and super-metrics*, Annales of European Academy of Sciences (2003) 141–162.

7. P. Tetali, *Random walks and the effective resistance of networks*, Journal of Theoretical Probability, **4** (1991) 101–109.

8. S.G. Matthews, *Partial metric topology*, Research Report 212. Dept. of Computer Science, University of Warwick, 1992.

9. P.Yu. Chebotarev and E.V. Shamis, *The matrix-forest theorem and measuring relations in small social groups*, Automat. Remote Control, **58** (1997) 1505–1514.

10. M.M. Deza, E. Deza and J. Vidali, *Cones of Weighted and Partial Metrics*, in *Algebra 2010: Advances in Algebraic Structures*, World Scientific, 2011.

———————————————————————————

УДК 514, 514.8

О явлениях, по-видимому, невозможных

М. Д. Ковалёв Россия, г. Москва, МГУ имени М. В. Ломоносова
kovalev.math@mtu-net.ru

On phenomena apparently to be impossible

M. D. Kovalev Russia, Moscow, Lomonosov MSU
kovalev.math@mtu-net.ru

Речь пойдёт о двух вопросах, связанных с кинематикой на евклидовой плоскости, вставших передо мною в разные годы. Они объединены ещё и тем, что ответы на них кажутся отрицательными, но доказательства мне известны лишь в частных случаях.

1. Вопрос о паре возрастающих функций

А.Н. Колмогоров ставил перед школьниками следующую задачу из практики проверки сечения валов[1]. В лоток, представляющий собой двугранный угол (У), для проверки круглости кладут вал, подводят сверху щуп (точка Т), и проворачивают вал руками на целый оборот. Если щуп не сдвинулся, то считают вал круглым. Обосновать этот способ проверки.

Однако, оказалось, что он не всегда верен. В некоторых случаях существует отличная от круга фигура — каток — которую можно так непрерывно провернуть на целый оборот, чтобы она всё время прилегала к сторонам угла У, и точка Т лежала на её границе. Были найдены[2] невыпуклые катки. Но до сих пор неизвестно, — существуют ли выпуклые отличные от круга катки в этой задаче. Пытаясь доказать их отсутствие, я пришёл к вопросам такого рода. Пусть $f(x)$ и $g(x)$ две непрерывные возрастающие функции, определённые на $[0,+\infty)$(Рис. 12). Допустим $f(0) = g(0) = 0$, и $f(x) > g(x)$ при $x > 0$. Проведём вертикальную прямую $x = x_0$, и через точки $(x_0, f(x_0))$ и $(x_0, g(x_0))$ две горизонтальные прямые. Эти прямые вместе с графиками функций вырезают из плоскости два криволинейных треугольника площадей $S_l(x_0)$ и $S_r(x_0)$.

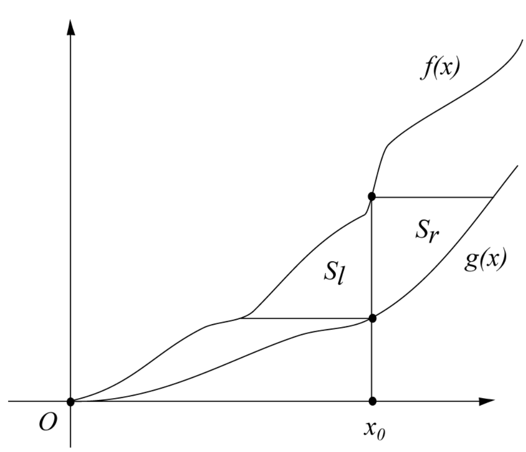


Рис. 12

[1]Это частный случай задачи, поставленной в 1946 году Л.А.Люстерником[1]

Задача 1. *Существует ли такая пара функций, для которой бы неравенство*

$$S_l(x_0) \geq S_r(x_0) \quad (S_l(x_0) > S_r(x_0))$$

выполнялось при произвольном $x_0 > 0$*?*

Теорема 1. *В случае линейной функции* $g(x) = kx,\ k > 0$ *не существует непрерывной функции* $f(x) > g(x)$*, для которой бы при любом* $x_0 > 0$ *выполнялось неравенство:* $S_l(x_0) \geq S_r(x_0)$.

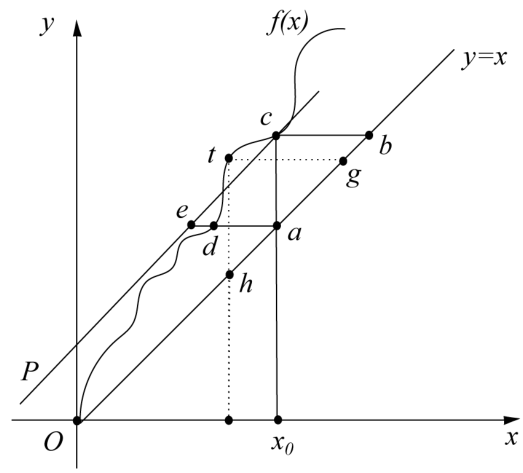


Рис. 13

Доказательство.Вследствие неизменности отношения площадей фигур при аффинных преобразованиях достаточно доказать теорему для коэффициента $k = 1$. Выберем отрезок $[0, x_0], x_0 > 0$ так, чтобы при $x < x_0$, было $S_r(x) < S_r(x_0)$. Это, очевидно, возможно. Поскольку площадь криволинейного треугольника acd по условию не меньше площади треугольника abc равной $S_r(x_0)$, а треугольник ace (на рисунке 13 прямая P имеет уравнение $y = x + f(x_0) - x_0$) получается отражением треугольника abc от середины его вертикальной стороны, то найдётся точка $x_t < x_0$, для которой $f(x_t) \geq f(x_0) - x_0$. То есть, треугольник hgt не меньше подобного ему треугольника abc. Тем самым $S_r(x_t) \geq S_r(x_0)$, что противоречит выбору точки x_0.

□

Задача имеет отрицательный ответ и для любой пары аналитических в нуле функций. Однако, в общем случае доказательства невозможности такой пары функций мне неизвестно.

2. Вопрос о напряжённых шарнирных механизмах

Второй вопрос о плоских шарнирных конструкциях. Считаем их, составленными из прямолинейных стержней-рычагов, несущих на своих концах шарниры. Некоторые шарниры могут быть закреплены в плоскости, называем их закреплёнными, и обозначаем крестиками. Остальные шарниры называем свободными и обозначаем кружочками. Конструкция, допускающая непрерывное движение, называется механизмом. *Шарнирником* p я называю каждое положение механизма. Для механизма с m свободными шарнирами оно определяется заданием положений этих шарниров в плоскости: $p = (p_1, p_2, \ldots, p_m),\ p_i \in R^2$.

Если вращение в шарнирах происходит без трения, то векторы сил в шарнирнике проходят через оси шарниров. Силу, действующую на шарнир p_i со стороны смежного ему шарнира

p_j, можно записать [3] как $\omega_{ij}(p_j - p_i)$. Скаляр ω_{ij} называется *внутренним напряжением рычага* p_ip_j. Если задан шарнирник, то *его внутренние напряжения* ω=$\{\omega_{ij}\}$ определяются как нетривиальные решения однородной системы линейных уравнений:

$$\sum_j \omega_{ij}(p_j - p_i) = 0, \qquad 1 \leqslant i \leqslant m,$$

где суммирование проводится по всем шарнирам смежным свободному i-му. Эта система выражает условие равновесия сил. Если у неё имеется решение со всеми $\omega_{ij} \neq 0$, то напряжение ω называем *полным.* Можно привести [4] ряд примеров шарнирных механизмов, допускающих в каждом своём положении одно и то же полное внутреннее напряжение ω. Однако, механизмы всех этих примеров состоят из неизгибаемых частей, и не все углы между рычагами, выходящими из одного свободного шарнира, переменны при его движении.

Задача 2. *Существует ли шарнирный механизм, допускающий одинаковое и полное внутреннее напряжение ω, все углы между смежными рычагами которого переменны?*

При довольно сильном ограничении была доказана теорема[5] о невозможности такого механизма. Граф наипростейшего механизма, для которого ответ на этот вопрос открыт, изображён на рисунке 14. Это полный двудольный граф без одного ребра и с двумя закреплёнными вершинами. Как правило, конструкция с такой структурой не допускает непрерывного движения в плоскости, но при специальном выборе длин рычагов оно возможно.

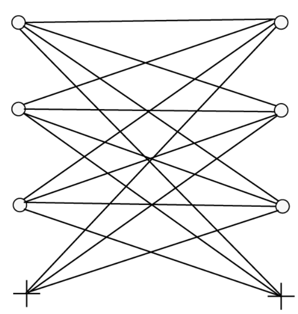


Рис. 14

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Люстерник Л. А. Геометрическая задача. // УМН. 1946. Том 1 Вып. 3 – 4. С. 194.

2. Савин А. П. Просто, как Колумбово яйцо. // Квант. 1993. № 1–2. С. 27–31.

3. Ковалев М. Д. О восстановимости шарнирников по внутренним напряжениям.// Известия РАН Серия математическая. 1997. Том 61, №4, С. 37–66.

4. Ковалев М. Д. Шарнирные механизмы с полным внутренним напряжением. // Международная научная конференция по механике «Восьмые Поляховские чтения»: Сборник тезисов. 30 января – 2 февраля 2018 г. , Санкт Петербург, Россия С. 34–35.

5. Ковалев М. Д. Об одинаково напряжённых шарнирных конструкциях.// 6-я Международная научно-практическая конференции Современное машиностроение: наука и образование MMESE-2017: Материалы. 22 — 23 июня 2017 г., Санкт Петербург. С. 109–118.

УДК 519.145

О некоторых 3-примитивных проективных плоскостях[1]

О. В. Кравцова Россия, г. Красноярск, Сибирский федеральный университет
И. В. Шевелева Россия, г. Красноярск, Сибирский федеральный университет
ol71@bk.ru, sheveliv@gmail.com

On some 3-primitive projective planes

O. V. Kravtsova Russia, Krasnoyarsk, Siberian Federal University
I. V. Sheveleva Russia, Krasnoyarsk, Siberian Federal University
ol71@bk.ru, sheveliv@gmail.com

Проективная плоскость называется полуполевой, если ее координатизирующее множество является полуполем (semifield). В частности, конечная проективная плоскость координатизируется полем тогда и только тогда, когда она дезаргова.

Пусть π – полуполевая плоскость порядка p^{2n}, p – простое. Коллинеация α плоскости π называется p-примитивной, если она фиксирует поточечно подплоскость π_α порядка p^n (бэровскую подплоскость) и порядок α делит p^n-1, но не делит p^i-1 для $i<n$. Полуполевая плоскость π называется p-примитивной, если она допускает p-примитивную коллинеацию.

М. Кордеро построила [1] матричное представление регулярного множества p-примитивной полуполевой плоскости порядка p^{2n} с ядром порядка p^n и привела примеры четырех попарно неизоморфных 3-примитивных полуполевых плоскостей порядка 81 с ядром $GF(9)$.

В работе [3] описан общий случай p-примитивной полуполевой плоскости с ядром произвольного порядка p^m: построено матричное представление регулярного множества, доказана разрешимость группы коллинеаций, описано ее строение. На основе результатов [3] и [2] мы доказали, что существует ровно 8, с точностью до изоморфизма, 3-примитивных полуполевых плоскостей порядка 81 (включая примеры М. Кордеро). Вычислены порядки левого, среднего и правого ядер построенных плоскостей, порядок группы автотопизмов, количество 3-примитивных коллинеаций (см. таблицу). Для координатизирующих полуполей найдены подполя и спектры мультипликативных луп. Разработан алгоритм проверки изоморфизма двух полуполевых плоскостей и пакет компьютерных программ, реализующий этот алгоритм.

Теорема 1. *Существует ровно восемь, с точностью до изоморфизма, 3-примитивных недезарговых полуполевых плоскостей порядка 81. Каждая из них допускает семь бэровских инволюций, имеет 2-ранг группы автотопизмов, равный четырем, и разрешимую полную группу коллинеаций.*

Плоскость №	Порядки левого, среднего и правого ядер	Число 3-примитивных коллинеаций порядка 4	Порядок группы автотопизмов
1	3, 3, 9	4	256
2	3, 3, 9	4	512
3	3, 9, 3	4	256
4	3, 9, 3	4	512
5	9, 3, 3	4	256
6	9, 3, 3	4	512
7	9, 9, 9	8	1024
8	9, 9, 9	8	2048

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект № 16-01-00707.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Cordero M. Matrix spread sets of p-primitive semifield planes // Internat. J. Math. & Math. Sci. 1997. Vol. 20, № 2, P. 293—298.

2. Подуфалов Н. Д., Бусаркина И. В., Дураков Б. К. О группе автотопизмов полуполевой p-примитивной плоскости, в сб. Материалы межрегиональной научной конференции "Исследования по анализу и алгебре" (ТГУ, Томск, 1998), с. 190—195.

3. Кравцова О. В. Полуполевые плоскости нечетного порядка, допускающие подгруппу автотопизмов, изоморфную A_4 // Известия вузов. Математика. 2016, №9, с. 10-–25.

———————————————————————

УДК 519

Координационные окружения и координационные числа графов Пенроуза и Амманна-Бинкера[1]

А. В. Малеев Россия, г. Владимир, Владимирский государственный университет имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых
А. В. Шутов Россия, г. Владимир, Владимирский государственный университет имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых
andr_mal@mail.ru, a1981@mail.ru

Coordination shells and coordination numbers for Penrose and Ammann-Beenker graphs

A. V. Maleev Russia, Vladimir, Vladimir State University named after Alexander and Nikolay Stoletovs
A. V. Shutov Russia, Vladimir, Vladimir State University named after Alexander and Nikolay Stoletovs
andr_mal@mail.ru, a1981@mail.ru

Граф Пенроуза и граф Амманна-Бинкера, обладающие поворотной симметрией пятого и восьмого порядка соответственно, являются? вероятно, двумя самыми важными структурами, использующимися при математическом моделировании квазикристаллов.

Существует множество подходов к определению этих графов. Мы будем использовать подход из [1], основанный на метода среза и проекции.

В рамках этого подхода множество вершин имеет вид

$$V = \{\pi_1(h,j,k,l) : (h,j,k,l) \in \mathbb{Z}^4, \pi_2(h,j,k,l) \in W\}.$$

В случае графа Пенроуза

$$\pi_1(h,j,k,l) = h + j\zeta_5 + k\zeta_5^2 + l\zeta_5^3,$$

$$\pi_2(h,j,k,l) = (h + j\zeta_5^2 + k\zeta_5^4 + l\zeta_5; (h+j+k+l) \bmod 5),$$

$$W = \bigcup_{r=0}^{4} (\Omega_r; r),$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, гранты 17-02-00835 и 17-42-330787

где $\zeta_5 = e^{\frac{2\pi i}{5}}$, $\Omega_0 = \{0\}$, $\Omega_1 = P$, $\Omega_2 = -\tau P$, $\Omega_3 = \tau P$, $\Omega_4 = -P$, $\tau = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ и P – правильный пятиугольник с вершинами $\{1, \zeta_5, \zeta_5^2, \zeta_5^3, \zeta_5^4\}$.

В случае графа Амманна-Бинкера

$$\pi_1(h, j, k, l) = h + j\zeta_8 + k\zeta_8^2 + l\zeta_8^3,$$

$$\pi_2(h, j, k, l) = h + j\zeta_8^3 + k\zeta_8^6 + l\zeta_8,$$

$\zeta_8 = e^{\frac{\pi i}{4}}$, а W представляет собой правильный восьмиугольник со стороной 1 и с центром в начале координат, ориентированный так, что одно из его ребер параллельно действительной оси.

Для задания ребер в обоих случаях используется следующее правило: две вершины графа соединены ребром тогда и только тогда, когда расстояние между ними равно единице.

На графах Пенроуза и Амманна-Бинкера определена естестенная метрика $d(x, y)$ как длина кратчайшего пути между вершинами x и y. Определим коодинационные сферы $eq_{Penr}(n)$ и $eq_{AB}(n)$ как множества вершин

$$\{x : d(0, x) = n\}$$

в графе Пенроуза и Амманна-Бинкера соответсвенно.

Теорема 1. *Существует постоянная C_{Penr}, не зависящая от n и такая, что n-ая координационная сфера $eq_{Penr}(n)$ находится в C_{Penr}-окрестности правильного десятиугольника с вершинами $R_{Penr}e^{\frac{2\pi ik}{10}}$ $(k = 0, 1, \ldots, 9,\ R_{Penr} = (\tau^{-1}\sin\frac{2\pi}{5} + \tau^{-2}\sin\frac{\pi}{5})i$, растянутого в n раз.*

Теорема 2. *Существует постоянная C_{AB}, не зависящая от n и такая, что n-ая координационная сфера $eq_{AB}(n)$ находится в C_{AB}-окрестности правильного восьмиугольника с вершинами $R_{AB}e^{\frac{\pi ik}{4}}$ $(k = 0, 1, \ldots, 7,\ R_{AB} = 2(\sqrt{2} - 1)$, растянутого в n раз.*

Определим теперь координационные числа $e_{Penr}(n)$ и $e_{AB}(n)$ как числа вершин в координационных сферах $eq_{Penr}(n)$ и $eq_{AB}(n)$ соответственно.

Теорема 3. *Справедлива асимптотическая формула*

$$e_{Penr}(n) = \begin{cases} c^{(0)}_{Penr}(\{\frac{n-2}{2}\tau^{-2}\})n + O(\log n), & n \equiv 0 \pmod 2 \\ c^{(1)}_{Penr}(\{\frac{n-1}{2}\tau^{-2}\})n + O(\log n), & n \equiv 1 \pmod 2 \end{cases},$$

где

$$c^{(0)}_{Penr}(x) = \begin{cases} 5\tau^{-2} + 12.5\tau^{-3}, & x \in [0; \tau^{-3}) \\ 5 - 2.5\tau^{-3}x, & x \in [\tau^{-3}; \tau^{-1}) \\ 5 - 5\tau^{-4} + 2.5\tau^{-3}x, & x \in [\tau^{-1}; 1) \end{cases},$$

$$c^{(1)}_{Penr}(x) = \begin{cases} 10\tau^{-2} + 12.5\tau^{-1}, & x \in [0; \tau^{-1}) \\ 10\tau^{-2}, & x \in [\tau^{-1}; 1) \end{cases}.$$

Теорема 4. *Справедлива асимптотическая формула*

$$e_{Penr}(n) = 8c_{AB}(\{\frac{\sqrt{2}-1}{2}\})n + O(\log n),$$

где

$$c_{AB}(x) = \begin{cases} 4\sqrt{2} - 5, & x \in [0; \frac{\sqrt{2}}{4}) \\ \frac{7\sqrt{2}-8}{2} - (2\sqrt{2} - 2)x, & x \in [\frac{\sqrt{2}}{4}; 1 - \frac{\sqrt{2}}{4}) \\ \frac{4-3\sqrt{2}}{2} + (2\sqrt{2} - 2)x, & x \in [1 - \frac{\sqrt{2}}{4}; 2 - \frac{3\sqrt{2}}{4}) \\ 4\sqrt{2} - 5, & x \in [2 - \frac{3\sqrt{2}}{4}; 1) \end{cases}.$$

Знак $\{x\}$ в теоремах 3 и 4 означает дробную долю числа x.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Baake M., Grimm U. Aperiodic orderr: Volume 1: A Mathematical Invitation. Cambridge University Press, 2013. 536 pp.

———————————————————————————

УДК 519.112.7

О почти α-угольных множествах[1]

А. А. Полянский Российская Федерация, г. Москва, Московский физико-технический институт (государственный университет)
alexander.polyanskii@yandex.ru

On almost α-angular sets

A. A. Polyanskii Russian Federation, Moscow, Moscow Institute of Physics and Technology (State University)
alexander.polyanskii@yandex.ru

Множество $\mathcal{S}$, состоящее из n (единичных) векторов в $\mathbb{R}^d$, называется *почти ортогональным*, если среди любых трёх векторов из $\mathcal{S}$ найдутся два ортогональных. Эрдёш [1] задал следующий вопрос: чему равно наибольшее число $f_{\pi/2}(d)$ элементов в почти ортогональном множестве в $\mathbb{R}^d$? Нетрудно убедиться, что $f_{\pi/2}(d) \geq 2d$; например, в качестве почти ортогонального множества можно рассмотреть два ортонормированных базиса в $\mathbb{R}^d$. Используя элегантный линейно-алгебраический подход, Розенфелд [1] доказал, что $f_{\pi/2}(d) = 2d$.

Множество $\mathcal{S}$, состоящее из n (единичных) векторов в $\mathbb{R}^d$, называется *почти α-угольным*, если среди любых трех векторов из $\mathcal{S}$, найдутся два, образующих угол α. Например, почти ортогональное множетсво является почти $\pi/2$-угольным. Исследовалась следующая вариация вопроса Эрдёша: чему равно наибольшее число $f_\alpha(d)$ элементов в почти α-угольном множестве в $\mathbb{R}^d$, где α — фиксированный угол?

Доклад будет посвящён краткому обзору известных результатов, посвященных оценкам сверху для $f_\alpha(d)$. Также мы расскажем о других вариацих задачи Эрдёша.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Rosenfeld M. Almost orthogonal lines in $\mathbb{E}^d$ // The Victor Klee Festschrift, DIMACS Ser. in Disc. Math. and Th. Comp.Sci. 1991. Vol.4, 1991. PP. 489-492

———————————————————————————

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант № 18-31-00149 (мол_а).

УДК 514.133

Свойство ортосхемы расширенного гиперболического пространства

Л. Н. Ромакина Россия, Саратов, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского
romakinaln@mail.ru

The Property of an Orthoscheme of an Expanded Hyperbolic Space

L. N. Romakina Russia, Saratov, Saratov State University
romakinaln@mail.ru

Расширенное гиперболическое пространство H^3 [1] рассматриваем в проективной модели Кэли – Клейна как проективное пространство P^3 с фиксированной в нем овальной поверхностью γ. На внутренней области относительно гиперквадрики γ, называемой *абсолютом* пространства H^3, может быть реализовано пространство Лобачевского Λ^3, а на внешней — гиперболическое пространство $\widehat{H}^3$ положительной кривизны.

При вычислении объемов многогранников в классических пространствах постоянной кривизны особую роль, как возможные ячейки разбиения многогранников, играют ортосхемы или, в другой терминологии, биортогональные тетраэдры [2 – 4]. Напомним, что тетраэдр называют *ортосхемой*, если его вершины можно обозначить символами P_1, P_2, P_3, P_4, соблюдая условия ортогональности $P_1P_2 \perp P_2P_3P_4$ и $P_1P_2P_3 \perp P_3P_4$. При таком обозначении взаимно ортогональные грани $P_1P_2P_3$ и $P_2P_3P_4$ ортосхемы назовем *базисными*.

Докажем свойство ортосхемы пространства H^3, которое потребуется в исследовании многогранников и развитии теории объемов этого пространства (см., например, [5 – 11]).

Теорема 1. *Ортосхема пространства H^3 содержит по крайней мере две гиперболические грани с общим гиперболическим ребром.*

Доказательство. Пусть Φ — ортосхема пространства H^3. Обозначим ее вершины символами P_1, P_2, P_3, P_4 так, чтобы выполнялись условия из определения ортосхемы. В зависимости от типа базисной грани $P_1P_2P_3$ для ортосхемы Φ возможны три и только три случая. Рассмотрим их.

1. Предположим, что грань $P_1P_2P_3$ эллиптическая. В этом случае ортогональная к ней прямая P_3P_4 проходит через внутреннюю относительно абсолюта точку, абсолютный полюс плоскости $P_1P_2P_3$. Следовательно, прямая P_3P_4 гиперболическая. Значит, и содержащие прямую P_3P_4 плоскости граней $P_1P_3P_4$ и $P_2P_3P_4$ гиперболические.

2. Предположим, что грань $P_1P_2P_3$ коевклидова. В этом случае ортогональная к ней прямая P_3P_4 проходит через точку касания плоскости $P_1P_2P_3$ с абсолютом. Поскольку эта прямая содержит ребро ортосхемы Φ, она не лежит в плоскости $P_1P_2P_3$, следовательно имеет еще одну вещественную точку абсолюта и является гиперболической. Значит, грани $P_1P_3P_4$ и $P_2P_3P_4$ являются гиперболическими с общим гиперболическим ребром.

3. Предположим, что грань $P_1P_2P_3$ гиперболическая. Для второй базисной грани $P_2P_3P_4$ ортосхемы Φ априори возможны три и только три случая. Докажем утверждение теоремы в каждом из них.

(a) Если грань $P_2P_3P_4$ эллиптическая, то на основании условия $P_1P_2 \perp P_2P_3P_4$ прямая P_1P_2 проходит через внутреннюю относительно абсолюта точку, абсолютный полюс плоскости $P_2P_3P_4$. Поэтому прямая P_1P_2 и плоскость $P_1P_2P_4$ гиперболические. Это доказывает теорему в рассматриваемом случае.

(b) Если грань $P_2P_3P_4$ коевклидова, то прямая P_1P_2, согласно условию $P_1P_2 \perp P_2P_3P_4$, проходит через точку касания плоскости $P_2P_3P_4$ с абсолютом. Поскольку прямая P_1P_2 не лежит целиком в плоскости $P_2P_3P_4$, т. е. не является параболической, она гиперболическая. Значит, плоскость $P_1P_2P_4$ гиперболическая, а ортосхема Φ удовлетворяет утверждению теоремы.

(c) Допустим, что грань $P_2P_3P_4$ гиперболическая. Как ортогональные гиперболические плоскости пространства H^3 (см. [11]) плоскости $P_1P_2P_3$ и $P_2P_3P_4$ пересекаются по гиперболической прямой, что в данном случае доказывает теорему.

Все возможные случаи рассмотрены. Теорема доказана. □

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Розенфельд Б. А. Неевклидовы пространства. М.: Наука, 1969. 548 с.

2. Абросимов Н. В. Об объемах многогранников в пространствах постоянной кривизны // Вестник Кем. ун-та. 2011. № 3 (1). С. 7–13.

3. Винберг Э. Б. Объемы неевклидовых многогранников // УМН. 1993. Т. 48. Вып. 2 (290). С. 17–46.

4. Kellerhals R. On the volume of hyperbolic polyhedra // Math. Ann. 1989. V. 285. Is. 4. P. 541–569.

5. Ромакина Л. Н. Объем монополярного тетраэдра в гиперболическом пространстве положительной кривизны // Евразийское Научное Объединение. 2017. Т. 1. № 5 (27). С. 27–30.

6. Ромакина Л. Н. Объем конечного ортогонального h-конуса в гиперболическом пространстве положительной кривизны // Труды международного геометрического центра. 2017. Т. 10. № 2. С. 56–69.

7. Ромакина Л. Н. Элементы объема в гиперболическом пространстве положительной кривизны // В сб.: Algebraic and geometric methods of analysis. Book of Abstracts. 2017. С. 135–136.

8. Romakina L. N. The inverse Gudermannian in the hyperbolic geometry // Integral Transforms and Special Functions. 2018. P. 1–18.

9. Ромакина Л. Т. Классификация тетраэдров с негиперболическими гранями в гиперболическом пространстве положительной кривизны // Чебышевский сб. 2015. Т. 16. № 2 (54). С. 208–221.

10. Ромакина Л. Т. Л. Классификация тетраэдров трехмерного гиперболического пространства положительной кривизны // Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы и приложения. Материалы XIII Междунар. конф., посвященной восьмидесятипятилетию со дня рождения проф. Сергея Сергеевича Рышкова (Тула, 25–30 мая 2015 г.). Тульский гос. пед. ун-т им. Л.Н. Толстого. Тула. 2015. С. 319–322.

11. Romakina L. N. Dihedrons of a hyperbolic three-space of positive curvature // International Electronic Journal of Geometry. 2016. № 9 (2). P. 50–58.

УДК 519

Моноэдрические решётчатые разбиения пространства на поликубы[1]

К. Г. Серавкин Россия, г. Владимир, ладимирский государственный университет имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых
А. В. Малеев Россия, г. Владимир, ладимирский государственный университет имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых
А. В. Шутов Россия, г. Владимир, ладимирский государственный университет имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых
seravkin@rambler.ru, andr_mal@mail.ru, a1981@mail.ru

Monohedral lattice tilings of space by polycubes

K. G. Seravkin Russia, Vladimir, Vladimir State University named after Alexander and Nikolay Stoletovs
A. V. Maleev Russia, Vladimir, Vladimir State University named after Alexander and Nikolay Stoletovs
A. V. Shutov Russia, Vladimir, Vladimir State University named after Alexander and Nikolay Stoletovs
seravkin@rambler.ru, andr_mal@mail.ru, a1981@mail.ru

Поликуб – это геометрическая фигура со связной внутренней областью, состоящая из конечного числа элементарных ячеек простой кубической решётки $L = \mathbb{Z}^3$.

Упаковка поликубов в пространстве – это такое расположение поликубов, при котором любые два поликуба не имеют общих внутренних точек. Упаковка поликубов называется *нормальной*, если любые две ячейки различных поликубов либо не имеют общих точек, либо имеют общую вершину, либо общее ребро, либо общую целую грань. Тогда центры всех ячеек поликубов упаковки могут быть расположены в узлах решётки L. Упаковка поликубов называется *периодической*, если она обладает трансляционной симметрией, которая определяется некоторой трехмерной решёткой трансляций Λ, являющейся подрешёткой решётки L.

В работе [1] показано, что в каждом классе матриц, задающих одну и ту же подрешётку Λ в трехмерной решётке L, существует единственная матрица A вида:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix} \tag{1}$$

где $a_{11}, a_{22}, a_{33} > 0; 0 \leqslant a_{12}, a_{13} < a_{11}; 0 \leqslant a_{23} < a_{22}$.

Матрица, задающая подрешётку Λ решётки упаковочного пространства L вида 1, называется *матрицей упаковочного пространства.* Узлы решётки, на которой задано УП, называются *точками упаковочного пространства.*

Множество узлов подрешётки Λ, входящих в фундаментальный параллелепипед матрицы A ($\sum \theta_i a_{ii}, i = 1..3, 0 \leqslant \theta_i < 1$) называется *упаковочным параллелепипедом.* Число узлов, входящих в упаковочный параллелепипед, равно $N = |detA|$ и называется *порядком упаковочного пространства.*

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, гранты 17-02-00835 и 17-42-330787

Периодическая нормальная упаковка с одним поликубом в фундаментальном параллелепипеде подрешётки Λ называется *моноэдрической решётчатой упаковкой* поликуба.

Решётка L, на которой задана периодическая функция весов $g(x_1, x_2, x_3)$, с различными весами на множестве узлов подрешётки Λ, входящих в фундаментальный параллелепипед матрицы, например, от 0 до $N-1$ по формуле

$$g(x_1, x_2, x_3) = \sum_{i=1}^{3}(\prod_{i=1}^{3} a_{jj}^{k(i,j)}), k(i,j) = \begin{cases} 0, i \leqslant j \\ 1, i > j \end{cases}$$

называется *упаковочным пространством* (*УП*) [2].

Отношение $k = p/N$ называется *коэффициентом упаковки поликубов*, где p – объем поликубов упаковки, попадающих в фундаментальную область решётки трансляций Λ, N – объем фундаментальной области, выраженный в объемах ячеек поликубов. При $k = 1$ упаковка поликубов является *разбиением*.

Точечным преобразованием симметрии УП называется преобразование P, задающее взаимно-однозначное отображение упаковочного пространства на себя. Для того, чтобы УП, заданное матрицей A, обладало точечным преобразованием симметрии, заданным матрицей P, необходимо и достаточно чтобы выполнялось равенство:

$$(PA)^{-1}A = U,$$

где U – целочисленная унимодулярная матрица. Преобразование инверсии, соответствующее смене знаков всех базисных векторов решётки, является точечным преобразованием симметрии любого УП.

Критерий существования моноэдрического решётчатого разбиения можно сформулировать в следующем виде:

Теорема 1. *Для того, чтобы существовало решётчатое разбиение пространства заданным поликубом $\{\beta_i | i = 1, 2, \ldots, r\}$, необходимо и достаточно, чтобы существовало хотя бы одно УП порядка r, точки которого с координатами $\{\beta_i | i = 1, 2, \ldots, r\}$ имеют попарно различные веса, где r – количество ячеек поликуба.*

Чтобы задать грани разбиения в фундаментальной области достаточно для каждого куба фундаментальной области указать наличие грани в направлении противоположном направлению координатных осей цифрой α_i, равной соответственно 0 или 1. Последовательность α_i определяет цифру кода разбиения $c(g) = \sum \alpha_i 2^{i-1}$, где g – вес точки УП. В фундаментальной области содержатся N точек УП, поэтому грани разбиения в фундаментальной области определяют последовательность цифр $\overline{c(0)c(1)\ldots c(N-1)}$ в восьмеричной системе исчисления, называемую *кодом разбиения*.

Код разбиения зависит от ориентации базиса и положения начала координат. Для каждого точечного преобразования симметрии УП получается по N вариантов кода сдвигами начала координат. Максимальный код с точностью до движений называется *приведенным*.

Алгоритм перебора вариантов моноэдрических решётчатых разбиений с одним заданным поликубом в фундаментальной области решётки трансляций включает в себя следующие этапы:

1. Перебираем все упаковочные пространства УП порядка N в порядке возрастания числовой последовательности, составленной из элементов матрицы УП:

$$S = \overline{a_{33}a_{22}a_{11}a_{23}a_{12}a_{13}}$$

   (a) Перебираем диагональные элементы матриц УП a_{ii}, представляющие собой разложение числа N на 3 целочисленных множителя.

   (b) Перебираем элементы матриц УП правее диагональных, которые могут принимать любые целочисленные значения от 0 до $a_{ii} - 1$.

2. Проверяем для каждого УП критерий решётчатого разбиения заданного поликуба: проверяем единственность веса точки УП $g(x_1, x_2, x_3)$ в каждой точке поликуба β_i. Если все веса попарно различны, то поликуб допускает решётчатое разбиение пространства в рассматриваемом УП.

3. Рассчитываем приведенный код разбиения для каждого найденного решения и сравниваем на совпадение с кодами решений, полученных ранее для этого УП.

На рисунке 15 приведено количество моноэдральных решётчатых разбиений тетракубами. Тетракубы представлены в виде графа связности.

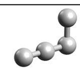
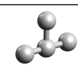
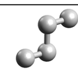
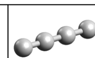
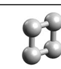
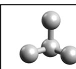
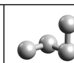
Тетракуб							
Количество решётчатых разбиений	3	3	10	6	6	2	4

Рис. 15: Количество моноэдральных решётчатых разбиений пространства тетракубами

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Касселс Дж. В. С. Введение в геометрию чисел. — М.: Мир, 1965. 422 с.

2. Малеев А. В. n-Мерные упаковочные пространства // Кристаллография. 1995. Том 40. С. 394-396.

УДК 511.32

О многогранниках с дельтоидными вершинами [1]

В. И. Субботин Россия, г. Новочеркасск, Южно-Российский государственный политехнический университет (НПИ) имени М. И. Платова
geometry@mail.ru

On polyhedra with deltoidal vertices

V. I. Subbotin Russia, Novocherkassk, Platov South-Russian State Polytechnic University (NPI)
geometry@mail.ru

Замкнутый выпуклый многогранник в E^3 называется симметричным, если он имеет хотя бы одну нетривиальную ось симметрии. В работе вводится понятие симметричного *многогранника с дельтоидными вершинами.*

Плоский выпуклый четырёхугольник называется *дельтоидом*, если его диагонали взаимно перпендикулярны и только одна из них делится другой диагональю пополам.

[1]Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, Правительства Красноярского края, Красноярского краевого фонда поддержки научной и научно-технической деятельности» в рамках научного проекта №16-41-240670.

Вершина V многогранника называется *дельтоидной*, если звезда граней $Star(V)$ этой вершины состоит из равных между собой дельтоидов. Если число дельтоидов звезды $Star(V)$ равно n, то такую вершину будем называть *n-дельтоидной*. Дельтоидная вершина называется *изолированной*, если ее звезда не имеет общих элементов со звездой любой другой дельтоидной вершины многогранника.

n-дельтоидная вершина многогранника называется *симметричной*, если она расположена на оси вращения порядка n многогранника. Грань F многогранника будем называть *локально симметричной*, если существует ось вращения звезды $Star(F)$, перпендикулярная F и пересекающая относительную внутренность F.

В данной работе найден полный список замкнутых выпуклых многогранников в E^3, у которых существуют дельтоидные симметричные вершины, а каждая грань, не входящая ни в одну звезду дельтоидных вершин, локально симметрична (класс DS). Доказана следующая теорема:

Теорема 1. *Класс DS-многогранников с изолированнными дельтоидными вершинами исчерпывается бесконечной серией удлинённых "бипирамид"с двумя дельтоидными вершинами и ещё только двадцатью двумя комбинаторно различными типами многогранников.*

Замечание 1. *Доказательство теоремы основано на работе автора [1]. Требование симметричности вершин можно ослабить: достаточно, чтобы каждая n-дельтоидная вершина располагалась на оси вращения L порядка n не всего многогранника, а только на оси вращения порядка n звезды $Star(Star(F))$. Таким образом, ось L является осью вращения порядка n фигуры, состоящей из звезды вершины V и всех граней, имеющих с этой звездой хотя бы одну общую вершину, [1]. Такую n-дельтоидную вершину удобно называть локально симметричной.*

Замечание 2. *Рассмотрен также класс многогранников с локально симметричными дельтоидными и неизолированными вершинами и локально симметричными гранями, не входящими ни в одну звезду дельтоидных вершин. Доказано, что помимо бесконечной серии "бипирамид"с двумя дельтоидными вершинами, существует только двенадцать комбинаторно различных типов таких многогранников.*

Теорема 2. *Класс многогранников, все вершины которых локально симметричные дельтоидные и все грани дельтоидные, состоит только из двух многогранников — дельтоидального икоситетраэдра и дельтоидального гексеконтаэдра.*

Класс DS-многогранников является обобщением класса многогранников с ромбическими вершинами, введённого в [2].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Субботин В. И. Об одном классе сильно симметричных многогранников // Чебышевский сборник. 2016. Том 17 № 4. С. 132–140.

2. Субботин В. И. Материалы конференции // Международная конференция по алгебре, анализу и геометрии, посвящённая юбилеям выдающихся профессоров Казанского университета, математиков Петра Алексеевича (1895–1944) и Александра Петровича (1926–1998) Широковых. Международная конференция (Казань, 26 июня–2 июля 2016 г.) — Казань, 2016. С. 320-321.

УДК 515.1

О размещении диких k-дисков в R^n

О. Д. Фролкина Россия, г. Москва, Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
olga-frolkina@yandex.ru

On pairwise disjoint wild k-disks in R^n

O. D. Frolkina Russia, Moscow, M. V. Lomonosov Moscow State University
olga-frolkina@yandex.ru

Теория диких вложений восходит к работам Антуана, Урысона, Александера. В 1959 г. Бинг доказал, что невозможно расположить в R^3 несчетное семейство попарно непересекающихся диких замкнутых поверхностей. В 1960 г. Столлингс построил континуальное семейство попарно дизъюнктных диких 2-дисков в R^3. В 1968 г. Шер улучшил конструкцию Столлингса, получив, дополнительно, что все 2-лиски семейства вложены в R^3 неэквивалентными способами.

В докладе будет представлен результат автора. Именно, для любых $n \geq 3$ и $1 \leq k \leq n-1$ построено такое континуальное семейство попарно непересекающихся диких k-дисков в R^n, что никакие два диска не сравнимы посредством объемлемых гомеоморфизмов.

УДК 511.43

Разбиения тора на множества ограниченного остатка

А. В. Шутов Россия, г. Владимир, Владимирский государственный университет имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых
a1981@mail.ru

Toric tilings into bounded remainder sets

A. V. Shutov Russia, Vladimir, Vladimir State University named after Alexander and Nikolay Stoletovs
a1981@mail.ru

Пусть $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$ таково, что $1, \alpha_1, \dots, \alpha_d$ линейно независимы над кольцом целых чисел $\mathbb{Z}$. Определим отображение сдвига

$$S_\alpha : x \to x + \alpha \pmod{\mathbb{Z}^d}.$$

Отображение S_α переводит d-мерный тор $\mathbb{T}^d = \mathbb{R}^d/\mathbb{Z}^d$ в себя. Пусть теперь $X \in \mathbb{T}^d$ – множество с интегрируемой по Риману характеристической функцией. Множество X называется множеством ограниченного остатка относительно сдвига S_α, если существует постоянная C такая, что для всех a и для всех n выполняется неравенство

$$\left| \sharp\{k : 0 \leq k \leq n-1, S_\alpha^k(0) \in X\} - n|X| \right| \leq C.$$

Впервые данные множества были введены Гекке [1].

В последние годы возник также интерес к построению разбиений многомерных торов на множества ограниченного остатка. Интерес к подобным разбиениям обосновывается их связью с задачами комбинаторики слов, теоретико-числовыми свойствами квазирешеток и физикой квазикристаллов.

Для построения разбиений тора на множества ограниченного остатка рассмотрим некоторую развертку T d-мерного тора $\mathbb{T}^d$ (то есть фундаментальную область соответствующей решетки). Отображение сдвига S_α при этом соответсвует некоторому отображению $S^* : T \to T$, сопряженному с S_α очевидным отображением проекции из T в $\mathbb{T}^d$. При этом для построения разбиений тора $\mathbb{T}^d$ достаточно строить разбиения развертки T на множества ограниченного остатка относительно отображения S^*.

Пусть имеется разбиение развертки

$$T = \coprod_{j=1}^{d+1} \coprod_{i=0}^{\sharp E_j - 1} E_j(i).$$

Данное разбиение будем называть обобщенным перекладывающимся разбиением тора относительно сдвига S, если выполняются три условия.

1) $S^*(E_j(i)) = E_j(i+1)$ для всех допустимых значений i, j.

2) Справедливо равенство

$$\coprod_{j=1}^{d+1} E_j(0) = \coprod_{j=1}^{d+1} S^*(E_j(\sharp E_j - 1))$$

и существуют векторы

$$w_j = (w_j^1, \ldots, w_j^d)$$

такие, что

$$S^*(E_j(\sharp E_j - 1)) - w_j = E_j(0).$$

3) Множество $E = \coprod_{j=1}^{d+1} E_j(0)$ является разверткой некоторого тора.

Отметим, что из условия 1) вытекает, что в случае d-мерного тора обобщенное перекладывающееся разбиение состоит из множеств $d+1$ типа.

Теорема 1. *Обобщенное перекладывающееся разбиение тора является его разбиением на множества ограниченного остатка относительно сдвига S_α. Соответствующая константа C эффективно вычислима.*

В одномерном случае обобщенные перекладывающиеся разбиения допускают полное описание. Пусть T_n – разбиение отрезка $[0;1)$ точками вида $\{k\alpha\}$ для $1 \le k \le n$. Согласно классической теореме о трех длинах, разбиение T_n содержит отрезки либо двух, либо трех различных длин. Пусть $\{Til_n\}$ – последовательность, состоящая из всех разбиений вида T_n, состоящих из отрезков ровно двух различных длин.

Теорема 2. *Пусть Til – обобщенное перекладывающееся разбиение $\mathbb{T}^1 = [0;1)$ относительно сдвига $S_\alpha : x \to x + \alpha \pmod 1$. Тогда существуют n и c такие, что $Til \equiv Til_n + c \pmod 1$.*

В настоящее время мы очень далеки от полного описания обобщенных перекладывающихся разбиений тора в более высоких размерностях. В докладе будут представлены две конструкции таких разбиений, основанные на теории геометрических подстановок Арно-Ито, а также на геометрии фракталов Рози. Данные конструкции обобщают построения из работ [2] и [3].

Все рассматриваемые констркции обобщенных перекладывающихся разбиений естественным образом приводят не к одному разбиению, а к последовательностям разбиений $\{Til_n\}$. При этом возникает вопрос об изменении оценки остатка C при $n \to \infty$.

Теорема 3. *Пусть дана последовательность* $\{Til_n\}$ *обобщенных перекладывающихся разбиений* d*-мерного тора* $\mathbb{T}^d$ *:*

$$Til_n : \mathbb{T}^d = \coprod_{j=1}^{d+1} \coprod_{i=0}^{\sharp E_{nj}-1} \mathbb{E}_{nj}(i).$$

Пусть выполнены два условия:

1) Существуют постоянные $\lambda > 1$, c_j, $i = 1, \ldots, d+1$ *такие, что при* $n \to \infty$ *имеют место асимптотические равенства*

$$\sharp E_{nj} \sim c_j \lambda^n.$$

2) Множества $E_{nj}(0)$ *и векторы* w_{nj} *не зависят от* n.

Тогда все множества $E_{nj}(i)$ *являются множествами ограниченного остатка с константой* C, *не зависящей от* n, i, j.

Рассматриваемые в докладе конструкции обобщенных перекладывающихся разбиений торов размерности два и выше удовлетворяют условиям данной теоремы. В одномерном случае этим условиям удовлетворяют подпоследовательности $\{Til_{n_k}\}$ в которых число слагаемых в разложениях чисел n_k в суммы знаменателей подходящих дробей к α ограниченно абсолютной константой.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Hecke E. Eber Analytische Funktionen und die Verteilung van Zahlen mod Eins // Math. Sem. Hamburg Univ. 1921. $\mathcal{N}$ 5. P. 54-76.

2. Журавлев В. Г. Разбиения Рози и множества ограниченного остатка // Записки научных семинаров ПОМИ. 2005. Т. 322. С. 83-106.

3. Кузнецова Д. В., Шутов А. В. Перекладывающиеся разбиения тора, подстановка Рози и множества ограниченного остатка // Математические заметки. 2015. Т. 98 Вып. 6. С. 878-897.

———————————————————————————

8. Теоретико-числовой метод в приближенном анализе и теория приближений

УДК 517.5

Об условии типа удвоения в нуле для дискретных неотрицательных положительно определенных функций[1]

Д. Горбачев Россия, г. Тула, Тульский государственный университет
С. Тихонов Испания, г. Барселона, Центр математических исследований
dvgmail@mail.ru

Doubling condition at the origin for discrete non-negative positive definite functions

D. Gorbachev Russia, Tula, Tula State University
S. Tikhonov Spain, Barcelona, Centre de Recerca Matemàtica
dvgmail@mail.ru

Пусть $n, q \in \mathbb{N}$, $q \geqslant 2$, $U, V \subset (-q/2, q/2]^n$ — 0-симетричные выпуклые тела, $U \subset V$, $f\colon \mathbb{Z}_q^n \to \mathbb{R}_+$ — произвольная дискретная неотрицательная положительно определенная функция. Мы изучаем нераенство вида

$$\sum_{x\in V\cap\mathbb{Z}_q^n} f(x) \leqslant C \sum_{x\in U\cap\mathbb{Z}_q^n} f(x) \tag{1}$$

с абсолютной константой, не зависящей от f и q.

В одномерном случае $n=1$, $U=[-r,r]$, $V=[-2r,2r]$ эта задача была поставлена Конягиным и Штейниковым [1] в связи с приложениями в теории чисел. В работе [2] было доказано, что $C \leqslant \pi^2$.

Дискретная задача тесно связана с непрерывным вариантом [2]:

$$\int_V f(x)\,dx \leqslant C \int_U f(x)\,dx \tag{2}$$

для неотрицательных положительно определенных функций f. В одномерном случае и также в связи с теорией она была поставлена Монтгомери и изучалась Логаном [3] (см. также [4, 5]). Для периодических функций эта задача тесно связана с неравенством Винера [6].

Отметим, что для $V=2U$ неравенство (2) эквивалентно хорошо известному условию удвоения в нуле. Это условие играет важную роль в гармоническом анализе (см., например, [7]), например в весовых неравенствах Фурье.

Мы доказываем следующий результат [8].

Теорема 1. *Пусть $X \subset \mathbb{R}^n$ — конечное множество точек, такое что*

$$V + \tfrac{1}{2}U \subseteq \tfrac{1}{2}U + X,$$

т.е. левое множество покрывается трансляциями половины множества U.

Тогда для константы в неравенстве (1) *или* (2) *справедлива оценка*

$$C(U,V) \leqslant |X|,$$

где $|X|$ — число точек в X.

[1] Исследование первого автора выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 18-11-00199).

Эта теорема имеет многочисленные следствия. Например, справедлива оценка

$$C(U, rU) \leqslant 2^n (r+1)^n \theta(U), \quad r \geqslant 1,$$

где $\theta(U)$ — плотность покрытия $\mathbb{R}^n$ трансляциями множества U.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Shteinikov Yu. N. On the set of joint representatives of two congruence Classes // Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics. 2015. Vol. 290, no. 1. P. 189–196.
2. Горбачев Д. В. Некоторые неравенства для дискретных положительно определенных функций // Известия ТулГУ. Естественные науки. 2015. Вып. 2. С. 5–12.
3. Logan B. F. An interference problem for exponentials // Michigan Math. J. 1988. Vol. 35. P. 369–393.
4. Efimov A., Gaál M., Révész Sz. Gy. On integral estimates of nonnegative positive definite functions // Bull. Aust. Math. Soc. 2017. Vol. 96, no. 1. P. 117–125.
5. Gaál M., Révész Sz. Gy. Integral comparisons of nonnegative positive definite functions on locally compact abelian groups // arXiv:1803.06409 [math.FA].
6. Gorbachev D. V., Tikhonov S. Yu. Wiener's problem for positive definite functions // Math. Z. 2017. https://doi.org/10.1007/s00209-017-1978-9.
7. Stein E. M. Harmonic Analysis: real-variable methods, orthogonality, and oscillatory integrals. Princeton Univ. Press: Princeton, 1993.
8. Gorbachev D., Tikhonov S. Doubling condition at the origin for non-negative positive definite functions // Proc. Amer. Math. Soc. (в печати); arXiv:1612.08637 [math.CA]

УДК 517.5

Точные константы Никольского для неотрицательных целых функций экспоненциального сферического типа[1]

Ф. Дай Канада, г. Эдмонтон, Университет Альберта
Д. Горбачев Россия, г. Тула, Тульский государственный университет
С. Тихонов Испания, г. Барселона, Центр математических исследований
dvgmail@mail.ru

Sharp Nikolskii constants for nonnegative entire functions of exponential spherical type

F. Dai Canada, Edmonton, University of Alberta
D. Gorbachev Russia, Tula, Tula State University
S. Tikhonov Spain, Barcelona, Centre de Recerca Matemàtica
dvgmail@mail.ru

Пусть $d \in \mathbb{N}$ и $\mathcal{E}^d$ — множество целых функций $f(x_1, \ldots, x_d)$ экспоненциального сферического типа не больше 1.

Мы доказываем следующие теоремы, которые дают точные значения констант Никольского и Бернштейна–Никольского соответственно для неотрицательных функций из класса $\mathcal{E}^d$ на $\mathbb{R}^d$.

Теорема 1 ([1]). *Для каждого $d \in \mathbb{N}$*

$$\sup_{f\in\mathcal{E}^d,\, f\geqslant 0} \frac{\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)}}{\|f\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}} = \frac{1}{2^{d-1}|\mathbb{S}^d|\Gamma(d+1)},$$

где $\mathbb{S}^d$ — единичная евклидова сфера пространства $\mathbb{R}^{d+1}$.

Теорема 2. *Для каждого $d \in \mathbb{N}$*

$$\sup_{f\in\mathcal{E}^d,\, f\geqslant 0} \frac{\|\Delta f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)}}{\|f\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}} = \frac{1}{2^{d}|\mathbb{S}^d|\Gamma(d+1)(d+2)},$$

где Δ — оператор Лапласа.

Доказательство этих равенств базируется на применении экстремальных квадратурных формул для целых функций экспоненциального типа [2].

Отметим, что задача из теоремы 1 по сути является двойственной к экстремальной задаче Турана для положительно определенных функций с носителем в шаре [3]. Также она может быть выведена из результатов нашей работы [1], где доказана теорема типа Левина–Любинского о предельной связи между точной константой Никольского для сферических полиномов Π_n^d и точной константой Никольского для целых функций экспоненциального сферического типа $\mathcal{E}^d$:

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{P\in\Pi_n^d} \frac{\|P\|_{L^\infty(\mathbb{S}^d)}}{n^{\frac{d}{p}}\|P\|_{L^p(\mathbb{S}^d)}} = \sup_{f\in\mathcal{E}^d} \frac{\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)}}{\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}}, \quad p > 0.$$

В работе [1] мы также приводим точное значение константы Никольского для неотрицательных сферических полиномов. Она имеет интересное приложение в метрической геометрии, связанное с известной оценкой мощности совершенных сферических дизайнов [4].

[1]Исследование второго автора выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 18-11-00199).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Dai F., Gorbachev D. Tikhonov S. Nikolskii constants for polynomials on the unit sphere // Journal d'Analyse Mathematique. 2018 (принято к печати); arXiv:1708.09837 [math.CA].

2. Горбачев Д. В., Иванов В. И. Квадратурные формулы Гаусса и Маркова по нулям собственных функций задачи Штурма–Лиувилля, точные для целых функций экспоненциального типа // Матем. сб. 2015. Том 206, № 8. С. 63–98.

3. Горбачев Д. В. Экстремальная задача для периодических функций с носителем в шаре // Матем. заметки. 2001. Том 69, № 3. С. 346–352.

4. Levenshtein V. On designs in compact metric spaces and a universal bound on their size // Discrete Math. 1998. Vol. 192. P. 251–271.

———————————————————————————

УДК 539.611

Вычисление потенциала в многоцентровой атомной системе с изменяемой плотностью

О. Г. Горкуша Россия, г. Хабаровск, Хабаровское отделение федерального государственного бюджетного учреждения науки Института прикладной математики
В. Г. Заводинский Россия, г. Хабаровск, Институт материаловедения Хабаровского научного центра Дальневосточного отделения Российской академии наук
684bmts@rambler.ru, vzavod@mal.ru,

Calculation of Potential for Multi-Atomic Systems with Varied Electron Density

O. A. Gorkusha Russia, Khabarovsk, Institute of Applied Mathematics, Khabarovsk Division
V. G. Zavodinsky Russia, Khabarovsk, Institute for Material Science
684bmts@rambler.ru, vzavod@mal.ru,

Мы предлагаем новый численный метод нахождения потенциала многоатомной системы, расположенной в области $\Omega \in \mathbb{R}^3$. Отличительная особенность метода состоит в разделении электронной плотности ρ и потенциала φ на две части

$$\rho = \rho_1 + \rho_2,\ \varphi = \varphi_1 + \varphi_2,$$

где ρ_1 — сумма сферических атомных плотностей. Потенциал φ_1 порождается плотностью ρ_1 и его нахождение не составляет большого труда.

Плотность ρ_2 — результат взаимодействия атомов в многоатомной системе, потенциал φ_2, порожденный этой плотностью — решение уравнения Пуассона для ρ_2. Поскольку плотность сосредоточена вблизи центров атомов, то расчетную область удобно разбить на многогранники Вороного V_j

$$\Omega = \bigcup V_j,$$

связанные с центрами атомов. Тогда потенциал φ_2 есть сумма потенциалов φ_j, каждый из которых является решением краевой задачи в $\overline{V}_j$:

$$\Delta\varphi_j(r) = -4\pi\rho_2(r) \cdot \chi_j(r),\ r \in V_j$$

с граничными условиями

$$\varphi_j(r) = \int_{V_j} \frac{\rho_2(r') \cdot \chi_j(r')}{|r - r'|} dr', \ r \in \partial V_j,$$

где $\chi_j(r)$ — характеристическая функция области V_j.

Для анализа граничных условий используется разложение обратной величины расстояния между двумя точками в ряд по полиномам Лежандра — мультипольное разложение потенциала и асимптотические оценки итераций при замене характеристической функции гладкими приближениями. Для численного решения уравнения Пуассона мы использовали двухсеточный метод и Фурье-преобразование на этапе начальной итерации.

Получена теоретическая оценка точности метода $O(h^{\alpha-1})$, где h — шаг сетки, α — фиксированное число, большее 1.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Brandt A. Multi-level adaptive solutions to boundary-value problems.// Math. Comput. 1977. № 31. С. 333-397.

2. Chelikowsky J. R., Troullier N., Saad Y. Finite-difference pseudopotential method: Electronic structure calculations without a basis.// Phys. Rev. Lett. 1994., Том 72 № 8. С. 1240-1243.

3. Chelikowsky J. R., Wu K., Troullier N., Saad Y. Higher-order Finite-difference-pseudopotential method: An application to diatomic molecules.// Phys. Rev. B. 1994., Том 50 № 16. С. 11355-11364.

4. Kikuji Hiroshe, Tomoya Ono, Yoshitaka Fujimoto, Shigeru Tsukamoto. First-Principles Calculations in Real-Space Formalism. — London: Imperial College Press, 2005. 265 с.

5. Klein R. Concrete and abstract Voronoi diagrams. Berlin Heidelberg: Lecture Notes in Computer Science, 1989. 176 с.

6. Де Брейн. Асимптотические методы в анализе. — Москва: Иностранная литература, 1961. 245 с.

———————————————————————————————————————

УДК 511.3

Псевдослучайный поиск и сложные эконометрические модели

Л. П. Добровольская Россия, г. Тула, Институт экономики и управления
dobrovolskaya.lar@yandex.ru

Pseudo-random search and complex econometric models

L. P. Dobrovolskay Russia, Tula, Institute of economics and management
dobrovolskaya.lar@yandex.ru

Одно из возможных практических применений оптимальных коэффициентов в эконометрике связано с возможностью использования сложных эконометрических моделей. Такие модели возникают в самом простой ситуации, когда берется линейная комбинация нескольких моделей. Практическое применение таких линейных комбинаций встречает существенные трудности, так как классическое применение метода наименьших квадратов для вычисления параметров модели сразу приводит к сложной задаче либо решения трансцендентной системы уравнений, либо поиска минимума функции многих переменных. Поясним сказанное на примере производственной функции Кобба — Дугласа

$$Q = AK^{\alpha}L^{\beta} \text{ или } Q = AK^{\alpha}L^{\beta}e^{\gamma t},$$

где Q — объем производства; L — труд; K — капитал; A — технологический коэффициент; α — коэффициент эластичности по труду; β — коэффициент эластичности по капиталу; t — параметр времени; γ — параметр, характеризующий темп развития; $e^{\gamma t}$ — множитель технического прогресса.

Даже в простейшем случае этой производственной функции без множителя технического прогресса при объединении двух производств получим обобщение производственной функции Кобба — Дугласа

$$Q = A_1K_1^{\alpha_1}L_1^{\beta_1} + A_2K_2^{\alpha_2}L_2^{\beta_2},$$

которое нелинеаризируется логарифмированием. Получаем многопараметрическую задачу для метода наименьших квадратов.

Действительно, если есть совокупность наблюдаемых данных: Q_ν, $K_{1,\nu}$, $L_{1,\nu}$, $K_{2,\nu}$, $L_{2,\nu}$ ($\nu = 1, \ldots, N$), то по методу наименьших квадратов необходимо минимизировать функцию

$$F(A_1, \alpha_1, \beta_1, A_2, \alpha_2, \beta_2) = \sum_{\nu=1}^{N} \left(A_1K_{1,\nu}^{\alpha_1}L_{1,\nu}^{\beta_1} + A_2K_{2,\nu}^{\alpha_2}L_{2,\nu}^{\beta_2} - Q_\nu \right)^2. \tag{1}$$

Необходимые условия стационарной точки приводят к нелинейной системе из 6 уравнений:

$$\left\{ \begin{aligned}
&\frac{\partial F}{\partial A_1} = 2\sum_{\nu=1}^{N} K_{1,\nu}^{\alpha_1}L_{1,\nu}^{\beta_1} \left(A_1K_{1,\nu}^{\alpha_1}L_{1,\nu}^{\beta_1} + A_2K_{2,\nu}^{\alpha_2}L_{2,\nu}^{\beta_2} - Q_\nu \right) = 0\\
&\frac{\partial F}{\partial A_2} = 2\sum_{\nu=1}^{N} K_{2,\nu}^{\alpha_2}L_{2,\nu}^{\beta_2} \left(A_1K_{1,\nu}^{\alpha_1}L_{1,\nu}^{\beta_1} + A_2K_{2,\nu}^{\alpha_2}L_{2,\nu}^{\beta_2} - Q_\nu \right) = 0\\
&\frac{\partial F}{\partial \alpha_1} = 2\sum_{\nu=1}^{N} A_1K_{1,\nu}^{\alpha_1}L_{1,\nu}^{\beta_1} \ln K_{1,\nu} \left(A_1K_{1,\nu}^{\alpha_1}L_{1,\nu}^{\beta_1} + A_2K_{2,\nu}^{\alpha_2}L_{2,\nu}^{\beta_2} - Q_\nu \right) = 0\\
&\frac{\partial F}{\partial \alpha_2} = 2\sum_{\nu=1}^{N} A_2K_{2,\nu}^{\alpha_2}L_{2,\nu}^{\beta_2} \ln K_{2,\nu} \left(A_1K_{1,\nu}^{\alpha_1}L_{1,\nu}^{\beta_1} + A_2K_{2,\nu}^{\alpha_2}L_{2,\nu}^{\beta_2} - Q_\nu \right) = 0\\
&\frac{\partial F}{\partial \beta_2} = 2\sum_{\nu=1}^{N} A_1K_{1,\nu}^{\alpha_1}L_{1,\nu}^{\beta_1} \ln L_{1,\nu} \left(A_1K_{1,\nu}^{\alpha_1}L_{1,\nu}^{\beta_1} + A_2K_{2,\nu}^{\alpha_2}L_{2,\nu}^{\beta_2} - Q_\nu \right) = 0\\
&\frac{\partial F}{\partial \beta_2} = 2\sum_{\nu=1}^{N} A_2K_{2,\nu}^{\alpha_2}L_{2,\nu}^{\beta_2} \ln L_{2,\nu} \left(A_1K_{1,\nu}^{\alpha_1}L_{1,\nu}^{\beta_1} + A_2K_{2,\nu}^{\alpha_2}L_{2,\nu}^{\beta_2} - Q_\nu \right) = 0
\end{aligned} \right. . \tag{2}$$

Решение такой нелинейной системы вызывает определенные сложности. Мы рассмотрим простой общий универсальный подход, основанный на псевдо-случайном поиске с применением параллелепипедальных сеток.

В обоих случаях (решение трансцендентной системы уравнений или поиск минимума функции многих переменных) простой эффективный алгоритм поиска приближенного решения может опираться на псевдослучайный поиск.

Применительно к методу наименьших квадратов для обобщенной производственной функции Кобба — Дугласа получим следующую задачу.

Дана функция $F(A_1, \alpha_1, \beta_1, A_2, \alpha_2, \beta_2)$, заданная равенством (1) в прямоугольной области

$$(A_1, \alpha_1, \beta_1, A_2, \alpha_2, \beta_2) \in \prod_{j=1}^{6}[M_j; N_j],$$

требуется найти точку $(A_1^{(0)}, \alpha_1^{(0)}, \beta_1^{(0)}, A_2^{(0)}, \alpha_2^{(0)}, \beta_2^{(0)}) \in \prod_{j=1}^{6}[M_j; N_j]$ такую, что

$$F(A_1^{(0)}, \alpha_1^{(0)}, \beta_1^{(0)}, A_2^{(0)}, \alpha_2^{(0)}, \beta_2^{(0)}) = \min_{(A_1,\alpha_1,\beta_1,A_2,\alpha_2,\beta_2)\in\prod_{j=1}^{6}[M_j;N_j]} F(A_1, \alpha_1, \beta_1, A_2, \alpha_2, \beta_2).$$

Предположим, что априори есть оценка области изменения параметров прямоугольного вида: $\prod_{j=1}^{s}[M_j; N_j]$, тогда, используя параллелепипедальную сетку $M(\vec{a}; N) = \{X_k | k = 0, \ldots, N-1\}$, где

$$X_k = \left(\frac{k}{N}; \left\{\frac{a_1 k}{N}\right\}; \ldots; \left\{\frac{a_{s-1} k}{N}\right\}\right) \quad (k = 0, \ldots, N-1),$$

получим сетку в прямоугольной области

$$X_k^* = \\ = \left(M_1 + (N_1 - M_1)\frac{k}{N}; M_2 + (N_2 - M_2)\left\{\frac{a_1 k}{N}\right\}; \ldots; M_s + (N_s - M_s)\left\{\frac{a_{s-1} k}{N}\right\}\right) \\ (k = 0, \ldots, N-1),$$

по которой можно вести псевдослучайный поиск приближенного решения. Таким образом, в качестве приближенного решения выбираем точку $X_{k_0}^*$, для которой выполнено соотношение

$$F(X_{k_0}^*) = \min_{0\leqslant k\leqslant N-1} F(X_k^*).$$

В работе [2] дан модифицированный алгоритм с использованием количественной меры качества оптимальных коэффициентов и его обоснование. Его преимущество связано с тем, что используются более простые для вычисления функции. При этом для специальной последовательности модулей, описанной выше, сохраняется трудоемкость вычисления набора оптимальных коэффициентов за $O(N)$ операций, но временные характеристики оказываются лучше.

В заключении отметим, что как указывал Н. М. Коробов трудоемкость вычисления оптимальных коэффициентов за $O(N)$ элементарных операций сравнима с трудоемкостью вычисления по квадратурной формуле или трудоемкостью проведения псевдослучайного поиска, а поэтому может считаться приемлемой.

В частности, это позволяет создавать системы интегрирования или псевдослучайного поиска, в которых, исходя из определенных дополнительных критериев, автоматически выбирается количество точек сетки, которая генерируется в процессе вычислений, а не берется из заранее составленных таблиц.

Далее заметим, что трудоемкость за $O(\ln^s N)$ при больших s на практике может оказаться лучше чем $O(N)$ только при очень больших значения $N > N_0(s)$, которые не доступны для реальной реализации.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Добровольский Н. Н., Добровольская Л. П., , Серегина Н. К., Бочарова О. Е. Алгоритмы вычисления оптимальных коэффициентов: Моногр. Под. ред. Н. М. Добровольского. — Тула: Изд-во Тул. гос. пед. ун-та им. Л. Н. Толстого, 2016. – 223 с.

2. Серегина Н. К. Алгоритмы численного интегрирования с правилом остановки // Известия ТулГУ. Естественные науки. 2013. Вып. 3. С. 193–201.

____

УДК 511.3

Ряды Дирихле и гиперболическая дзета-функция решёток[1]

Н. Н. Добровольский Россия, г. Тула, Тульский государственный университет
nikolai.dobrovolsky@gmail.com

Dirichlet series and hyperbolic Zeta function of lattices

N. N. Dobrovolskiy Russia, Tula, Tula State University
nikolai.dobrovolsky@gmail.com

В работе рассматривается новый класс рядов Дирихле — дзета-функции моноидов натуральных чисел. Изучаются обратные ряды Дирихле для дзета-функции моноидов натуральных чисел. Показано, что вопрос о существовании эйлерова произведения для дзета-функции моноида связан с однозначностью разложения на простые множители в этом моноиде.

Вводится понятие взаимно простых множеств натуральных чисел и показано, что для таких множеств имеет место мультипликативность минимальных моноидов и соответствующих дзета-функций моноидов.

Показано, что если все простые элементы моноида являются простыми числами, то характеристическая функция моноида будет мультипликативной функцией и в этом случае дзета-функция моноида будет обобщённой L-функцией.

Рассматриваются различные примеры моноидов и соответствующих дзета-функций моноидов. Изучена связь вопросов обращения дзета-функции моноида и обобщённой функции Мёбиуса на моноиде как частично упорядоченном множестве с помощью отношения делимости натуральных чисел. Получены ряд свойств дзета-функций моноидов натуральных чисел с однозначным разложением на простые множители.

В работе рассмотрен вопрос о логарифмировании эйлерова произведения, как функции комплексного аргумента. Показано, что непрерывная функция, задающая значение логарифма эйлерового произведения вблизи полюса пробегает все ветви бесконечно-значной функции логарифма. Получены следствия о значения комплекснозначной функции специального вида вблизи особой точки. Из этих свойств вытекают утверждения о значениях дзета-функции Римана вблизи границы области абсолютной сходимости.

С помощью постулата Бертрана введены бесконечные экспоненциальные последовательности простых чисел. Показано, что соответствующие дзета-функции моноидов натуральных чисел абсолютно сходятся во всей полуплоскости с положительной действительной частью. Так как такие дзета-функции моноидов натуральных чисел во всей области абсолютной сходимости раскладываются в эйлерово произведение, то они во всей полуплоскости с положительной действительной частью не имеют нулей.

Данная тема исследований возникла в связи с изучением гиперболической дзета-функции решёток (см. [1, 2, 3]).

[1]Исследование выполнено по гранту РФФИ №16-41-710194_р_центр_а

В следующих работах мы планируем рассмотреть естественно возникающие в данной области проблемы, а именно:

- аналитическое продолжение для дзета-функции произвольного моноида натуральных чисел;
- получение функционального уравнения;
- обратные ряды для дзета-функции моноида натуральных чисел без однозначного разложения на простые множители.

Важным классом моноидов натуральных чисел без однозначного разложения на простые множители на наш взгляд являются моноиды соответствующие подгруппам мультипликативной группы классов вычетов по произвольному модулю.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Добровольский М. Н. Функциональное уравнение для гиперболической дзета-функции целочисленных решёток // Доклады академии наук 2007. Т. 412, № 3. С. 302–304.
2. Н. М. Добровольский, Н. Н. Добровольский, В. Н. Соболева, Д. К. Соболев, Л. П. Добровольская, О. Е. Бочарова О гиперболической дзета-функции Гурвица // Чебышевский сб. 2016. Т. 17, вып. 3. С. 72–105.
3. L. P. Dobrovolskaya, M. N. Dobrovolsky, N. M. Dobrovol'skii, N. N. Dobrovolsky. On Hyperbolic Zeta Function of Lattices. In: Continuous and Distributed Systems. Solid Mechanics and Its Applications. Vol. 211. 2014. P. 23–62. DOI:10.1007/978-3-319-03146-0_2.

——————————————————————————

УДК 511.3

Классификация чисто-вещественных алгебраических иррациональностей и теоретико-числовой метод в приближенном анализе[1]

Н. Н. Добровольский Россия, г. Тула, Тульский государственный университет,
Н. М. Добровольский Россия, г. Тула, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого
nikolai.dobrovolsky@gmail.com dobrovol@tspu.tula.ru

Classification of pure-real algebraic irrationalities and the number-theoretic method in the approximate analysis

N. N. Dobrovolskiy Russia, Tula, Tula State University,
N. M. Dobrovolskiy Russia, Tula, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University
nikolai.dobrovolsky@gmail.com dobrovol@tspu.tula.ru

В работе предложена новая классификация чисто-вещественных алгебраических иррациональностей на основе их разложения в цепные дроби.

Показано, что для чисто-вещественных алгебраических иррациональностей α степени $n \geqslant 2$, начиная с некоторого номера $m_0 = m_0(\alpha)$, последовательность остаточных дробей α_m является последовательностью приведённых алгебраических иррациональностей.

[1]Исследование выполнено по гранту РФФИ №16-41-710194_р_центр_а

Найдены рекуррентные формулы для нахождения минимальных многочленов остаточных дробей с помощью дробно-линейных преобразований. Композиция этих дробно-линейных преобразований является дробно-линейным преобразование, переводящем систему сопряжённых к алгебраической иррациональности α в систему сопряжённых к остаточной дроби, обладающую ярко выраженным эффектом концентрации около рациональной дроби $-\frac{Q_{m-2}}{Q_{m-1}}$.

Установлено, что последовательность минимальных многочленов для остаточных дробей образует последовательность многочленов с равными дискриминантами.

В работе доказываются предельные соотношения с коэффициентами минимального многочлена, связанные с эффектом концентрации сопряжённых чисел остаточной дроби.

В заключении поставлена проблема о структуре рационального сопряжённого спектра вещественного алгебраического иррационального числа α и о его предельных точках.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Н. М. Добровольский, Н. Н. Добровольский, Д. К. Соболев, В. Н. Соболева Классификация чисто-вещественных алгебраических иррациональностей // Чебышевский сб. 2017. Т. 18, вып. 2. С. 98–128.

———————————————————————————

УДК 517.5

Точное неравенство Джексона в L_2 с неклассическим модулем непрерывности

Иванов В. И.[1] Тула, Тульский государственный университет,
Хуэ Ха Тхи Мин Вьетнам, Ханой, Национальный экономический университет
ivaleryi@mail.ru, huehm@neu.edu.vn

Exact Jackson inequality in L_2 with non-classical continuity module

Ivanov V. I. Tula, Tula state University,
Hue Ha Thi Minh Vietnam, Hanoi, National Economics University
ivaleryi@mail.ru, huehm@neu.edu.vn

Доклад посвящен обсуждению точного неравенства Джексона в пространстве L_2 на торе и прямой с неклассическим модулем непрерывности.

Пусть $\mathbb{T} = [-\pi, \pi)$ — одномерный тор, $n \in \mathbb{N}, \delta > 0$, $E_n^T(f)_2$ — величина наилучшего приближения функции $f \in L_2(\mathbb{T})$ тригонометрическими полиномами порядка не выше $n-1$, $M = \{\mu_s\}_{s\in\mathbb{Z}} \subset \mathbb{R}$ — последовательность с абсолютно сходящимся рядом и нулевой суммой, $\nu_0 = \sum_{s\in\mathbb{Z}} \mu_s^2$, $\omega_M^T(\delta, f)_2$ — обобщенный модуль непрерывности функции $f \in L_2(\mathbb{T})$, определяемый разностным оператором $\Delta_t^M f(x) = \sum\limits_{s\in\mathbb{Z}} \mu_s f(x+st)$ и окрестностью нуля $|t| \le \delta$,

$$D_M^T(n,\delta)_2 = \sup\left\{\frac{E_n^T(f)_2}{\omega_M^T(\delta,f)_2} : f \in L_2(\mathbb{T})\right\}$$

— обобщенная константа Джексона для тора.

Константа Джексона является точной константой в неравенстве Джексона между величиной наилучшего приближения функции и ее обобщенным модулем непрерывности.

В дальнейшем в последовательностях M будем указывать только ненулевые члены.

[1]Исследование В.И. Иванова выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 18-11-00199).

А. И. Козко и А. В. Рождественский [1] доказали, что для любых $n \in \mathbb{N}, \delta > 0$, $D_M^T(n,\delta)_2 \geq \frac{1}{\sqrt{\nu_0}}$. С.Н. Васильев [2] доказал, что для некоторого $\delta(M) > 0,\ D_M^T(n, \frac{\delta(M)}{n})_2 \leq \frac{1}{\sqrt{\nu_0}}$. Величина

$$\tau^T(M) = \inf\Big\{\delta > 0 :\ D_M^T\Big(n, \frac{\delta}{n}\Big)_2 = \frac{1}{\sqrt{\nu_0}}\Big\}$$

называется оптимальным аргументом. Неравенство Джексона с точной минимальной константой и оптимальным аргументом имеет вид

$$E_n^T(f)_2 \leq \frac{1}{\sqrt{\nu_0}}\omega_M^T\Big(\frac{\tau(M)}{n}, f\Big)_2.$$

Классический модуль непрерывности порядка $r \in \mathbb{N}$ определяется последовательностью

$$M_r = \{\mu_s = (-1)^s \binom{r}{s},\ \ s = 0, 1, \dots, r\}.$$

В этом случае $\nu_0 = \binom{2r}{r}$. Н.И. Черных [3] доказал, что $\tau^T(M_r) \leq 2\pi$. С.Н. Васильев [4] уточнил, что $\tau^T(M_r) \leq 1,4\pi$. Оптимальный аргумент $\tau^T(M_1) = \pi$ вычислен только при $r = 1$ Н.И. Черных [5, 6]. Известно, что $\tau^T(M_r) > \pi$ при $r \geq 2$.

Н.А. Барабошкина [7] с помощью последовательности

$$N_r = \{\mu_s = (-1)^s, s = 0, 1, \dots, 2r-1\}, \quad \nu_0 = 2r,$$

определила неклассический модуль непрерывности $\omega_{2r-1}^{T,*}(\delta, f)_2$ и получила оценку Н.И. Черных $\tau^T(N_r) \leq 2\pi$. Аналог оценки С.Н. Васильева доказали А.Г. Бабенко и Ю.А. Юнашева [8].

Пусть $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$, $R, \delta > 0$, $E_R(f)_2$ — величина наилучшего приближения функции $f \in L_2(\mathbb{R})$ целыми функциями экспоненциального типа не выше R, $\omega_M(\delta, f)_2$ — ее обобщенный модуль непрерывности, определяемый последовательностью M,

$$D_M(R,\delta)_2 = \sup\left\{\frac{E_R(f)_2}{\omega_M(\delta, f)_2}\ :\ f \in L_2(\mathbb{R})\right\}$$

— обобщенная константа Джексона для прямой.

Оценки константы Джексона $D_M(R,\delta)_2$ дают оценки константы Джексона $D_M^T(n,\delta)_2$, так как $D_M^T(n,\delta)_2 \leq D_M(n,\delta)_2$ [9].

Как и в периодическом случае для любых $R, \delta > 0,\ D_M(R,\delta)_2 \geq \frac{1}{\sqrt{\nu_0}}$, а для некоторого $\delta(M) > 0,\ D_M(R, \frac{\delta(M)}{R})_2 \leq \frac{1}{\sqrt{\nu_0}}$, поэтому оптимальный аргумент определяется равенством

$$\tau(M) = \inf\Big\{\delta > 0 :\ D_M\Big(R, \frac{\delta}{R}\Big)_2 = \frac{1}{\sqrt{\nu_0}}\Big\}.$$

Оценка $\tau(M) \leq 2\pi$ для последовательностей M_r, N_r получена Д.В. Горбачевым [10]. В [11] анонсирована оценка $\tau(M_r) \leq 1,303\pi$, которая улучшает оценку С.Н. Васильева для $\tau^T(M_r)$. Наша цель — получить аналогичную оценку и для последовательности N_r. Для этого будем использовать обобщенную экстремальную задачу Логана.

Пусть $f(t)$ — четная действительная функция,

$$\lambda(f) = \sup\{t > 0 :\ f(t) > 0\}, \quad F_{N_r}(t, f) = \sum_{s=1}^{2r-1}(-1)^{s-1}\frac{2r-s}{2r-1}f(st),$$

K — класс четных целых функций $f \in L_1(\mathbb{R})$ экспоненциального типа не выше π, для которых $f(0) > 0$ и преобразование Фурье $\widehat{f}(x) \geq 0$.

Обобщенная задача Логана. Вычислить величину

$$L(N_r) = \inf\{\lambda(F_{N_r}(f)) : \ f \in K\}.$$

Справедлива оценка $\tau(N_r) \leq \pi L(N_r)$. Для оценки величины $L(N_r)$ рассмотрим семейство функций

$$f_\mu(t) = \frac{1+\cos \pi t}{1-t^2} + \mu \frac{1-\cos \pi t}{4-t^2} \in K, \quad \mu \in [0,1],$$

величину $\mu_r = \min\{\mu : \ \lambda(F_{N_r}(f_\mu)) \leq 2\}$ и функцию

$$g(t) = \frac{11 + 12\cos \pi t + \cos 2\pi t}{1-t^2} + \frac{4(1-\cos \pi t)}{4-t^2} - \frac{3(1+\cos 2\pi t)}{1/4-t^2} + \frac{1}{6t^2}.$$

Функции из семейства $\{f_\mu\}$ использовали Н.И Черных при $\mu = 1$ [3], Д.В. Горбачев и С.А. Странковский при $\mu = 1/16$ [12].

Теорема 1. *Для $r \in \mathbb{N}$*

$$\mu_r = \frac{\sum_{k=1}^{r-1} \frac{(r-k)}{k^2}}{\sum_{k=1}^{r} \frac{(r-k+1/2)}{(k-1/2)^2}}, \quad \sup_r \mu_r = \frac{1}{3}.$$

Теорема 2. *Для $r \in \mathbb{N}$*

$$L(N_r) \leq \lambda(F_{N_r}(f_{\mu_r})) \leq \lambda(F_{N_r}(f_{1/3})) \leq \lambda(g).$$

Компьютерные вычисления единственного и простого нуля функции $g(t)$ на отрезке $[1,2]$ дают оценки

$$L(N_r) \leq \lambda(g) \leq 1,303, \quad \tau^T(N_r) \leq \tau(N_r) \leq 1,303\pi.$$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Козко А. И., Рождественский А. В. О неравенстве Джексона в L_2 с обобщенным модулем непрерывности // Матем. сборник. 2004. Т. 195. № 8. С. 3–46.

2. Васильев С. Н. Неравенство Джексона в $L_2(\mathbb{T}^n)$ с обобщенным модулем непрерывности // Труды ИММ УрО РАН. 2009. Т. 15. № 1. С. 102–110.

3. Черных Н. И. О наилучшем приближении периодических функций тригонометрическими полиномами в L_2 // Матем. заметки. 1967. Т. 2. № 5. С. 513–522.

4. Васильев С. Н. Неравенство Джексона–Стечкина в $L_2[-\pi,\pi]$ // Труды ИММ УрО РАН. 2001. Т. 7. № 1. С. 75–84.

5. Черных Н. И. О неравенстве Джексона в L_2 // Труды МИАН СССР. 1967. Т. 88. С. 71–74.

6. Arestov V. V., Chernykh N. I. On the L_2-approximation of periodic functions by trigonometric polinomials // Approximation and functions spaces: Proc. Inter. Conf. (Gdansk, 1979). Amsterdam: North-Holland, 1981. P. 25–43.

7. Барабошкина Н. А. Неравенство Джексона–Стечкина с неклассическим модулем непрерывности // Труды ИММ УрО РАН. 2001. Т. 7. № 1. С. 62–66.

8. Babenko A. G., Yunasheva Y. A. Sharp jackson inequality in L2in terms of a nonclassical modulus of continuity // CEUR Workshop Proceedings. 2017. Vol.1894. P. 144-150.

9. Иванов В. И., Иванов А. В. Связь между обобщенными константами Джексона в L_2 на торе и евклидовом пространстве // Материалы VIII Международного симпозиума "Ряды Фурье и их приложения". Ростов-на-Дону: Изд-во СКНЦ ВШЮФУ, 2014. С. 16–17.

10. Горбачев Д. В. Оценка оптимального аргумента в точном многомерном L_2-неравенстве Джексона–Стечкина // Труды ИММ УрО РАН. 2014. Т. 20. № 1. С. 83–91.

11. Хуе Ха Тхи Минь. Об оптимальных аргументах в точном неравенстве Джексона–Стечкина в $L_2(\mathbb{R})$ // Материалы Международной научной конференции "Современные проблемы математики, механики, информатики". Тула: Изд-во ТулГУ, 2013. С. 129–132.

12. Горбачев Д. В., Странковский С. А. Одна экстремальная задача для четных положительно определенных целых функций экспоненциального типа // Матем. заметки. 2006. Т. 80. № 5. С. 712–717.

УДК 511.3

Квадратичные поля и квадратурные формулы

Е. И. Климова Россия, г. Москва, Московский педагогический государственный университет,
Н. Н. Добровольский Россия, г. Тула, Тульский государственный университет
alisatim01@mail.ru nikolai.dobrovolsky@gmail.com

Quadratic fields and quadrature formulas

E. I. Klimova Russia, Moscow, Moscow State Pedagogical University,
N. N. Dobrovolskiy Russia, Tula, Tula state University
alisatim01@mail.ru nikolai.dobrovolsky@gmail.com

Рассмотрим квадратичное поле $F = \mathbb{Q}(\sqrt{p})$, где p — простое число и $p \equiv 3 \pmod 4$. Тогда кольцо целых алгебраических чисел $\mathbb{Z}_F$ имеет вид: $\mathbb{Z}_F = \{n + m\sqrt{p} | n, m \in \mathbb{Z}\}$.

Через $\Lambda(F)$ обозначим алгебраическую решётку поля F: $\Lambda(F) = \{(\Theta^{(1)}, \Theta^{(2)}) | \Theta = \Theta^{(1)} \in \mathbb{Z}_F\}$ и $\Theta^{(1)}$, $\Theta^{(2)}$ — целые алгебраически сопряжённые числа.

Таким образом, $\Theta^{(1)} = n + m\sqrt{p}, \quad \Theta^{(2)} = n - m\sqrt{p} \quad n, m \in \mathbb{Z}$ и $\Theta^{(1)}$, $\Theta^{(2)}$ — корни уравнения $x^2 - 2nx + n^2 - pm^2 = 0$. Базис решётки $\Lambda(F)$ имеет вид: $\vec{\lambda}_1 = (1, 1)$, $\vec{\lambda}_2 = (\sqrt{p}, -\sqrt{p})$, а детерминант решётки $\det \Lambda(F) = 2\sqrt{p}$. Базис взаимной решётки $\Lambda^*(F)$ имеет вид: $\vec{\lambda}_1^* = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $\vec{\lambda}_2^* = \left(\frac{\sqrt{p}}{2p}, -\frac{\sqrt{p}}{2p}\right)$ и детерминант взаимной решётки $\det \Lambda^*(F) = \frac{\sqrt{p}}{2p}$.

Рассмотрим разложение $\sqrt{p}$ в цепную периодическую дробь:

$$\sqrt{p} = q_0 + [(q_1, \ldots, q_n, 2q_0)] = q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{2q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{\ddots}}}}}.$$

с периодом $(q_1, \ldots, q_n, 2q_0)$. Через $\frac{P_m}{Q_m}$ будем обозначать m-ую подходящую дробь к $\sqrt{p}$. Таким образом,

$$\sqrt{p} = \frac{P_m}{Q_m} + \frac{(-1)^m \theta_m}{Q_m^2}, \quad 0 < \theta_m < 1 \quad (m = 0, 1, \ldots). \tag{1}$$

Через $\Lambda_m(F)$ будем обозначать алгебраическую решётку заданную равенствами:

$$\Lambda_m(F) = \left\{(Q_m(n + k\sqrt{p}), Q_m(n - k\sqrt{p}))|n, k \in \mathbb{Z}\right\},$$

а через $\Lambda_m(p)$ — целочисленную решётку заданную равенствами:

$$\Lambda_m(p) = \left\{(Q_m n + kP_m, Q_m n - kP_m)|n, k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

Базис решётки $\Lambda_m(F)$ имеет вид $\vec{\lambda}_{m,1} = (Q_m, Q_m)$, $\vec{\lambda}_{m,2} = (Q_m\sqrt{p}, -Q_m\sqrt{p})$, а детерминант решётки $\det\Lambda_m(F) = 2Q_m^2\sqrt{p}$. Базис взаимной решётки $\Lambda_m^*(F)$ имеет вид:

$$\vec{\lambda}^*_{m,1} = \left(\frac{1}{2Q_m}, \frac{1}{2Q_m}\right), \quad \vec{\lambda}^*_{m,2} = \left(\frac{\sqrt{p}}{2pQ_m}, -\frac{\sqrt{p}}{2pQ_m}\right)$$

и детерминант взаимной решётки $\det\Lambda_m^*(F) = \frac{\sqrt{p}}{2pQ_m^2}$.

Для целочисленной решётки $\Lambda_m(p)$ базис имеет вид $\vec{\lambda}_{m,1,Z} = (Q_m, Q_m)$, $\vec{\lambda}_{m,2,Z} = (P_m, -P_m)$, а детерминант решётки $\det\Lambda_m(p) = 2Q_mP_m$. Базис взаимной решётки $\Lambda_m^*(p)$ имеет вид:

$$\vec{\lambda}^*_{m,1,Z} = \left(\frac{1}{2Q_m}, \frac{1}{2Q_m}\right), \quad \vec{\lambda}^*_{m,2,Z} = \left(\frac{1}{2P_m}, -\frac{1}{2P_m}\right)$$

и детерминант взаимной решётки $\det\Lambda_m^*(p) = \frac{1}{2P_mQ_m}$.

Лемма 1. *Для $m \geqslant 0$ справедливы соотношения*

$$\det\Lambda_m(F) = \det\Lambda_m(p) + (-1)^m 2\theta_m,$$
$$\vec{\lambda}_{m,1} = \vec{\lambda}^*_{m,1,Z}, \quad \vec{\lambda}_{m,2} = \vec{\lambda}_{m,2,Z} + \left(\frac{P_m(-1)^m\theta_m}{Q_m}, \frac{P_m(-1)^{m+1}\theta_m}{Q_m}\right).$$

Лемма 2. *Для $m \geqslant 0$ справедливы соотношения*

$$\det\Lambda_m^*(F) = \det\Lambda_m^*(p) + 2\left(\det\Lambda_m^*(p)\right)^2 \frac{(-1)^{m+1}\theta_m}{1 + \frac{(-1)^m\theta_m}{P_mQ_m}},$$
$$\vec{\lambda}^*_{m,1} = \vec{\lambda}^*_{m,1,Z}, \quad \left\|\vec{\lambda}^*_{m,2} - \vec{\lambda}^*_{m,2,Z}\right\|_1 = \frac{\theta_m}{\det\Lambda_m(p)\left(P_m + \frac{(-1)^m\theta_m}{Q_m}\right)}.$$

Рассмотрим следующие две сетки:

$$M_1(\Lambda_m(F)) = \Lambda_m^*(F) \cap [-1; 1)^s, \quad M(\Lambda_m(p)) = \Lambda_m^*(p) \cap [0; 1)^s.$$

Нетрудно видеть, что

$$M_1(\Lambda_m(F)) = \left\{\left(\frac{n}{2Q_m} + \frac{\sqrt{p}k}{2pQ_m}, \frac{n}{2Q_m} - \frac{\sqrt{p}k}{2pQ_m}\right)\middle| k \in A(n), |n| \leqslant 2Q_m - 1\right\},$$

$$A(n) = \left\{k \,\middle|\, \begin{array}{ll} -2P_m < k < 2P_m, & \text{при } n = 0, \\ -2P_m + \frac{P_mn}{Q_m} < k < 2P_m - \frac{P_mn}{Q_m}, & \text{при } n = 1, \ldots 2Q_m - 1, \\ -2P_m - \frac{P_mn}{Q_m} < k < 2P_m - \frac{P_mn}{Q_m}, & \text{при } n = -1, \ldots -2Q_m + 1; \end{array}\right\},$$

$$M(\Lambda_m(p)) = \left\{\left(\frac{n}{2Q_m} + \frac{k}{2P_m}, \frac{n}{2Q_m} - \frac{k}{2P_m}\right)\middle| k \in B(n), 0 \leqslant n \leqslant 2Q_m - 1\right\},$$

$$B(n) = \left\{k \,\middle|\, \begin{array}{ll} k = 0, & \text{при } n = 0, \\ -\frac{P_mn}{Q_m} \leqslant k \leqslant \frac{P_mn}{Q_m}, & \text{при } n = 1, \ldots Q_m - 1, \\ -2P_m + \frac{P_mn}{Q_m} < k < 2P_m - \frac{P_mn}{Q_m}, & \text{при } n = Q_m, \ldots 2Q_m - 1; \end{array}\right\}$$

Определение 1. *Квадратурной формулой с обобщенной параллелепипедальной сеткой II типа и весовой функцией $\rho(\vec{x})$ называется формула вида*

$$\int_0^1 \cdots \int_0^1 f(\vec{x})d\vec{x} = (\det\Lambda)^{-1} \sum_{\vec{x}\in M'(\Lambda)} \rho_{\vec{x}} f(\vec{x}) - R_{N'(\Lambda)}[f],$$

$$\textit{где} \quad \rho_{\vec{x}} = \sum_{\vec{y}\in M_1(\Lambda),\{\vec{y}\}=\vec{x}} \rho(\vec{y}), \quad N'(\Lambda) = |M'(\Lambda)|,$$

$R_{N'(\Lambda)}[f]$ — *погрешность квадратурной формулы.*

Для погрешности квадратурной формулы с обобщенной параллелепипедальной сеткой II рода на классе E_s^α справедлива оценка

$$R_{N'(\Lambda)}[E_s^\alpha(C)] = \sup_{f\in E_s^\alpha(C)} |R_{N'(\Lambda)}[f]| \leqslant CB\cdot c_1(\alpha)^s \zeta_H(\Lambda|\alpha),$$

$$\text{где} \quad c_1(\alpha) = 2^{\alpha+1}\left(3 + \frac{2}{\alpha-1}\right), \quad \zeta_H(\Lambda|\alpha) = {\sum_{\vec{x}\in\Lambda}}' (\overline{x}_1\ldots\overline{x}_s)^{-\alpha}.$$

В работе [1] доказана следующая асимптотическая формула.

Обозначим через $\zeta_{D_0}(\alpha|F)$ дзета-функцию Дедекинда главных идеалов квадратичного поля F: $\zeta_{D_0}(\alpha|F) = \sum_{(\omega)} |N(\omega)|^{-\alpha}$, тогда $\zeta'_{D_0}(\alpha|F) = -\sum_{(\omega)} \ln(N(\omega))|N(\omega)|^{-\alpha}$.

Теорема 1. *Справедливо асимптотическое равенство*

$$\zeta_H(\Lambda(t)|\alpha) = \frac{2(\det\Lambda)^\alpha \zeta_{D_0}(\alpha|F)}{R}\cdot\frac{\ln\det\Lambda(t)}{(\det\Lambda(t))^\alpha} -$$
$$-\frac{2(\det\Lambda)^\alpha\left(\ln(\det\Lambda)\,\zeta_{D_0}(\alpha|F) + \zeta'_{D_0}(\alpha|F)\right)}{R(\det\Lambda(t))^\alpha} + \frac{2(\det\Lambda)^\alpha\zeta_{D_0}(\alpha|F)}{(\det\Lambda(t))^\alpha}\left(\theta_1(\alpha) + \frac{\theta_2(\alpha)}{\operatorname{sh}\left(\frac{\alpha R}{2}\right)}\right),$$

где $|\theta_1(\alpha)| \leqslant 1$ *и* $\frac{1}{\varepsilon_0^{(1)\frac{\alpha}{2}}} \leqslant \theta_2(\alpha) \leqslant \varepsilon_0^{(1)\frac{\alpha}{2}}$, ε_0 — *фундаментальная единица квадратичного поля* F *и* R — *регулятор этого поля.*

Хорошо известно, что граничной функцией класса $E_s^2\left(\cdot, \frac{\pi^2}{6}\right)$ для параллелепипедальных сеток является функция $h(x,y) = 9(1-2\{x\})^2(1-2\{y\})^2$, поэтому для оценки качества сетки $M(\Lambda_m(p))$ можно использовать функцию

$$H(M(\Lambda_m(p))) = \frac{9}{2P_mQ_m}\sum_{n=0}^{2Q_m-1}\sum_{k\in B(n)}\left(1-2\left(\frac{n}{2Q_m}+\frac{k}{2P_m}\right)\right)^2\left(1-2\left(\frac{n}{2Q_m}-\frac{k}{2P_m}\right)\right)^2.$$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Н. М. Добровольский, Н. Н. Добровольский, В. Н. Соболева, Д. К. Соболев, Е. И. Юшина(Климова) Гиперболическая дзета-функция решётки квадратичного поля // Чебышевский сб., 2015. Т. 16, вып. 4. С. 100–149.

———————————————————————————————————

УДК 517.94

О нижней границе спектра оператора Штурма-Лиувилля в $L^2(\mathbb{R}_+)$ с граничным условием $y'(0) = 0$[1]

А. И. Козко Россия, г. Москва, МГУ имени М. В. Ломоносова
prozerpi@yahoo.co.uk

On the lower bound of the spectrum of the Sturm-Liouville operator in $L^2(\mathbb{R}_+)$ with boundary condition $y'(0) = 0$.

A. I. Kozko Russia, Moscow, Moscow State University
prozerpi@yahoo.co.uk

Исследуется спектр оператора $\mathbf{L}_q$ в пространстве $L^2(\mathbb{R}_+)$, задаваемого дифференциальным выражением $-y''+q(x)y$ и граничным условием $y'(0) = 0$. В случае быстрого роста потенциала $q(x)$ свойства собственных чисел были исследованы в работах [1], [2]. В случае дискретности собственных чисел оператора $\mathbf{L}_q$ были вычислены соответствующие регуляризованные следы см. [3]–[5].

В работе изучаются операторы $\mathbf{L}_q$ для потенциалов из класса $\mathbf{Q}$, которые по определению состоят из функций $q \in L_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+)$ и $\lim_{x\to+\infty} q(x) = 0$. Под $q \in L_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+)$ мы понимаем $q \in L[0; b]$ для любого $b > 0$.

Обозначим, как обычно, $q_-(x) = \max\{0, -q(x)\}$.

При любом $\mu > 0$ определим множество $\mathbf{Q}_\mu \subset \mathbf{Q}$, состоящее из всех потенциалов q, для которых функция

$$F_{q,\mu}(x) = \int_x^{+\infty} e^{-\mu t}(\mu^2 - q_-(t))\,dt$$

выполнено неравенство

$$\inf_{x\in\mathbb{R}_+} F_{q,\mu}(x) \geqslant 0.$$

Исследуется точная нижняя оценка спектра оператора $\mathbf{L}_q$ для потенциалов из $\mathbf{Q}_\mu$, т.е. величина $\inf\{\sigma_q \,:\, q \in \mathbf{Q}_\mu\}$. Приведём несколько результатов данной работы:

Теорема 1. *Пусть $C \in \mathbb{R}$, $q(x) \geqslant C$ для любого $x \in \mathbb{R}_+$. тогда при любом $\mu > 0$ справедливо равенство*

$$\inf\{\sigma_q \,:\, q \in \mathbf{Q}_\mu\} = -\min\{\mu^2, C_-\}.$$

Теорема 2. *Пусть $C \in \mathbb{R}$. Тогда при любом $\mu > 0$ справедливо равенство*

$$\inf\{\sigma_q \,:\, q \in \mathbf{Q},\, q_- \in L(\mathbb{R}_+),\, \|q_-\|_{L(\mathbb{R}_+)} \leqslant \mu,\, q(x) \geqslant C, \forall x \in \mathbb{R}_+\} =$$

$$= -\min\{\mu^2, C_-\}.$$

Обозначим класс ограниченных на $\mathbb{R}_+$ потенциалов q таких, что $q \in L(\mathbb{R}_+)$ через $\tilde{Q}$. Равенство $\inf\{\sigma_q \,:\, q \in \tilde{Q},\, \|q\|_{L(\mathbb{R}_+)} \leqslant \mu\} = -\mu^2$ получено в [6].

Оценка, полученная в теореме 1 неулучшаема в следующем смысле: для любого $x_0 > 0$ существует положительные константы $\delta_{1,2} \in (0; x_0)$ и потенциал $\hat{q} \in \mathbf{Q}$ такой, что для функции

$$F_{\hat{q},\mu}(x) = \int_x^{+\infty} e^{-\mu t}(\mu^2 - \hat{q}_-(t))\,dt$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 16-01-00295)

выполнено, что $F_{\hat{q},\mu}(x) \geqslant 0$ для всех $x \in [0; x_0 - \delta_1) \cup (x_0 + \delta_2; +\infty)$, но при этом $F_{\hat{q},\mu}(x) < 0$ для $x \in (x_0 - \delta_1; x_0 + \delta_2)$, т.е. неравенство $F_{\hat{q},\mu}(x) \geqslant 0$ не выполняется всего лишь в некоторой окрестности точки x_0. Но, при этом оператор $\mathbf{L}_{\hat{q}}$ имеет собственное значение меньшее $-\min\{\mu^2, C_-\}$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Козко А. И., Асимптотика спектра дифференциального оператора $-y''+q(x)y$ с граничным условием в нуле и быстро растущим потенциалом // Дифференциальные уравнения. 2005. Том 41 № 5. С. 611-622.

2. Козко А. И., Свойства собственных чисел задачи Штурма-Лиувилля в $L^2(\mathbb{R}_+)$ и граничным условием $y(0)\cos\alpha + y'(0)\sin\alpha = 0$ // В сборнике: Сборник материалов XVIII Международной Саратовской зимней школы «Современные проблемы теории функций и их приложения» (27 января–03 февраля 2016 г.), Издательство СГУ Саратов, тезисы. — Саратов, 2016. С. 150-152.

3. Козко А. И., Печенцов А. С. Регуляризованные следы сингулярных дифференциальных операторов с каноническими краевыми условиями // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем. Мех. 2011. № 4, С. 11-17.

4. Козко А. И., Печенцов А. С. Спектральная функция сингулярного дифференциального оператора порядка $2m$ // Известия Российской академии наук. Серия математическая. 2010. Том 74 № 6. С. 107-126.

5. Козко А. И., Печенцов А. С. Регуляризованные следы сингулярных дифференциальных операторов высших порядков // Математические заметки. 2008. Том 83 № 1. С. 39-49.

6. Козко А. И., Попов А. Ю. Оценка снизу собственных чисел оператора Штурма-Лиуввилля в $L^2(\mathbb{R}_+)$ с граничным условием $y'(0) = 1$ // В сборнике: Современные проблемы теории функций и их приложения. Материалы 17-й международной Саратовской зимней школы, посвященной 150-летию со дня рождения В. А. Стеклова. — Москва, 2014. С. 122-124.

УДК 517.28, 530.181

Применение метода оператора эволюции к анализу многомерных временных рядов

А. Е. Краснов Россия, г. Москва, Государственный научно-исследовательский институт информационных технологий и телекоммуникаций,
Е. Н. Надеждин Россия, г. Тула, Тульский государственный педагогический университет имени Л. Н. Толстого,
Д. Н. Никольский Россия, г. Москва, Государственный научно-исследовательский институт информационных технологий и телекоммуникаций,
В. С. Галяев Россия, г. Москва, Государственный научно-исследовательский институт информационных технологий и телекоммуникаций
krasnovmgutu@yandex.ru, en-hope@yandex.ru, nikolskydn@mail.ru, galyaev.vladimir@gmail.com

Application of the evolution operator method to the analysis of multidimensional time series

A. E. Krasnov Russia, Moscow, State Institute of Information Technologies and Telecommunications,
E. N. Nadezhdin Russia, Tula, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University,
D. N. Nikol'skii Russia, Moscow, State Institute of Information Technologies and Telecommunications,
V. S. Galyaev Russia, Moscow, State Institute of Information Technologies and Telecommunications
krasnovmgutu@yandex.ru, en-hope@yandex.ru, nikolskydn@mail.ru, galyaev.vladimir@gmail.com

Физические процессы рассеяния электромагнитных волн и процессы возникновения аномалий при передаче информации в каналах связи рассмотрены с единых позиций их преобразований соответствующими операторами эволюции, действующими как проекционные операторы.

Сформулирована и решена задача преобразования комплексной пространственной огибающей $E_{in}(\boldsymbol{r}_\perp)$ электрической напряженности когерентной электромагнитной волны с длиной λ, падающей на плоскость $P_{in}(z=0, \boldsymbol{r}_\perp \in P_{in})$, в пространственную огибающую выходящей когерентной электромагнитной волны $E_{out}(\boldsymbol{r}_\perp)$, наблюдаемой в плоскости $P_{out}(z=D_Z, \boldsymbol{r}_\perp \in P_{out})$. Между плоскостями P_{in} и P_{out} в области $\boldsymbol{V}$ заключена стационарная пространственно неоднородная среда с комплексной рефракцией $\Delta n(\boldsymbol{r})$ и средним по объему $\boldsymbol{V}$ среды коэффициентом преломления $\langle n \rangle$. Рефракция стационарной неоднородной среды описывается в виде разложения по объемным решеткам с векторами $\boldsymbol{l}-\boldsymbol{m}$ как $\Delta\hat{n}(\boldsymbol{r}) = \sum_l \sum_m N(\boldsymbol{l},\boldsymbol{m}) \exp\left[-i(\boldsymbol{l}-\boldsymbol{m})\boldsymbol{r}\right]$, где $N(\boldsymbol{l},\boldsymbol{m})$ — угловой или пространственно-частотный спектр неоднородностей среды.

При условиях, что поперечный $D_\perp$ и продольный D_Z размеры неоднородной области $\boldsymbol{V}$ удовлетворяют соотношениям $D_\perp \gg \lambda, D_Z$ и $D_Z \gg \lambda$, а $\langle|\Delta\hat{n}|^2\rangle^{1/2}/\langle n \rangle \ll 1$, спектральный образ соответствующего волнового уравнения для области $\boldsymbol{V}$ и граничных условий $E(\boldsymbol{r}_\perp, z=0) = E_{in}(\boldsymbol{r}_\perp)$, $\partial E(\boldsymbol{r}_\perp)/\partial z = \partial E_{in}(\boldsymbol{r}_\perp)/\partial z = 0$, приведен к системе параметрических уравнений, описывающих распространение его собственных функций $\boldsymbol{f}_\gamma$ и $\boldsymbol{g}_\gamma$:

$$
\begin{aligned}
-i\frac{\partial \boldsymbol{f}_\gamma(\boldsymbol{l},\boldsymbol{m},s)}{\partial s} &= \hat{\boldsymbol{F}}_\gamma(\boldsymbol{l},\boldsymbol{m},s)\boldsymbol{f}_\gamma(\boldsymbol{l},\boldsymbol{m},s),\\
\boldsymbol{f}_\gamma(\boldsymbol{l},\boldsymbol{m},0) &= \hat{\boldsymbol{F}}_\gamma(\boldsymbol{l},\boldsymbol{m},0)C_{in}(\boldsymbol{m}),
\end{aligned} \tag{1}
$$

$$
\begin{gathered}
-i\frac{\partial \boldsymbol{g}_\gamma(\boldsymbol{l},\boldsymbol{m},s)}{\partial s} = \hat{\boldsymbol{G}}_\gamma(\boldsymbol{l},\boldsymbol{m},s)\boldsymbol{g}_\gamma(\boldsymbol{l},\boldsymbol{m},s),\\
\boldsymbol{g}_\gamma(\boldsymbol{l},\boldsymbol{m},0) = C_{in}(\boldsymbol{m}),\\
s = 2\pi\langle n\rangle\frac{z}{\lambda}
\end{gathered} \tag{2}
$$

где система (1) описывает диффузное рассеяние, а (2) — резонансное (брегговское) рассеяние волн. Формально уравнения (1) и (2) подобны уравнениям Шредингера, при этом матричные элементы операторов $\hat{\boldsymbol{F}}_\gamma$ и $\hat{\boldsymbol{G}}_\gamma$ с точностью до малого параметра γ расстройки от брегговского резонанса пропорциональны амплитудам $N(\boldsymbol{l},\boldsymbol{m})$ углового спектра неоднородностей среды. Уравнения решались с использованием реконструкции операторов эволюции, соответствующих операторам $\hat{\boldsymbol{F}}_\gamma$ и $\hat{\boldsymbol{G}}_\gamma$, на основе хронологического оператора Дайсона [1] и диаграммной техники Фейнмана [2]. Интегрирование по малому параметру γ приводит к решению исходного волнового уравнения относительно угловых или пространственно-частотных компонентов $C_{in}(\boldsymbol{m})$, $C_{out}(\boldsymbol{l}, D_Z)$ падающего на плоскость P_{in} и выходящего из плоскости P_{out} когерентного рассеянного поля в виде:

$$
\begin{gathered}
C_{out}(\boldsymbol{l}, D_Z) = a(\boldsymbol{l}, D_Z)\sum_{\boldsymbol{m}} N(\boldsymbol{l},\boldsymbol{m})C_{in}(\boldsymbol{m}) + i(\langle|\Delta\hat{n}^2|\rangle^{1/2}/\langle n\rangle)\sum_{\boldsymbol{k}} a(\boldsymbol{k}, D_Z)\sin(D_z k_z)\times\\
\times\exp\left(iD_z k_z\right)\exp\left[i\varphi(\boldsymbol{l},\boldsymbol{k},D_Z)\right]\sum_{\boldsymbol{m}} N(\boldsymbol{k},\boldsymbol{m})C_{in}(\boldsymbol{m}+\boldsymbol{l}-\boldsymbol{k}),
\end{gathered} \tag{3}
$$

где коэффициент $a(\boldsymbol{l}, D_Z) = a^*(\boldsymbol{l})(2\pi)(D_Z/\lambda)(\langle|\Delta\hat{n}|^2\rangle^{1/2})$ определяется из экспериментальных измерений, а фаза $\varphi(\boldsymbol{l},\boldsymbol{k},D_Z)$ является случайной величиной. Первое слагаемое в (3) описывает резонансный процесс рассеяния на решетках $\boldsymbol{l}-\boldsymbol{m}$ компонент $\boldsymbol{m}$ входной волны в компоненты $\boldsymbol{l}$ выходной волны. Второе слагаемое описывает процесс «диффузного» блуждания фотона: фотоны с волновыми векторами $\boldsymbol{m}$ рассеиваются сначала во всевозможные направления $\boldsymbol{k}$ и лишь после этого — в направлении $\boldsymbol{l}$ наблюдения.

С точностью до диффузных помех резонансная составляющая (3) имеет вид [3]:

$$
C_{out}(\boldsymbol{l}, D_Z) = a(\boldsymbol{l}, D_Z)\sum_{\boldsymbol{m}} N(\boldsymbol{l},\boldsymbol{m})C_{in}(\boldsymbol{m}), \tag{4}
$$

соответствующий действию проекционного оператора гильбертового пространства.

По аналогии с представленными выше результатами рассмотрено рассеяние нестационарных волн нестационарной неоднородной средой $\boldsymbol{V}(t)$. Предполагается, что действие среды описывается оператором эволюции $\hat{\boldsymbol{S}}(t,\tau)$, функционирующим во временной области по правилу $E_{out}(\boldsymbol{r}) = \hat{\boldsymbol{S}}(t,\tau)E_{in}(\boldsymbol{r}, t-\tau)$. Очевидно, что оператор осуществляет проекционное преобразование типа (4) с задержкой τ, но уже не пространственных, а временных частот ω входящей волны во временные частоты ω' выходящей волны. В физических системах такое преобразование обуславливается временными «неоднородностями» (флуктуациями) рассеивающих сред (рассеяние Мандельштама–Бриллюэна, комбинационное рассеяние). Преобразование временных частот волн нервной активности происходит и в нейроподобных системах [4].

В работе предлагается рассматривать порождение аномалий в процессе передачи информации в каналах связи как действие оператора $\boldsymbol{S}(t,\tau)$ эволюции на многомерные временные ряды в конечномерном пространстве действительных функций. Предполагается, что многомерный временной ряд, описываемый конечномерным вектором $\boldsymbol{F}(t) = [f_1(t), f_2(t), \ldots, f_N(t)]^T$, генерируется дифференциальным уравнением [5]:

$$\frac{d\boldsymbol{F}(t)}{dt} = \frac{1}{\Delta t}\boldsymbol{H}(t)\boldsymbol{F}(t), \tag{5}$$

динамический оператор $\boldsymbol{H}(t)$ которого не определен, а известны (наблюдаемы) лишь усредненные значения безразмерных функций $f_n(t)$ в различные моменты времени t. В (5) интервал времени Δt сравним с максимальной временной «неоднородностью» $\boldsymbol{F}(t)$ и введен из соображений согласования размерности. Будем также считать, что для $\boldsymbol{H}(t)$ существует оператор $\boldsymbol{S}(t,\tau)$ эволюции, действующий по правилу $\boldsymbol{F}(t) = \boldsymbol{S}(t,\tau)\boldsymbol{F}(t-\tau)$, представляемый в виде проекционного оператора:

$$\boldsymbol{S}(t,\tau) = \frac{\boldsymbol{F}(t)\boldsymbol{F}^T(t-\tau)}{\boldsymbol{F}^T(t-\tau)\boldsymbol{F}(t-\tau)}, \quad \tau < t. \tag{6}$$

Введён усредненный по «скользящему» интервалу времени Δt оператор эволюции:

$$\langle \boldsymbol{S}(t,\tau)\rangle_{\Delta t} = \langle \frac{\boldsymbol{F}(t)\boldsymbol{F}^T(t-\tau)}{\boldsymbol{F}^T(t-\tau)\boldsymbol{F}(t-\tau)}\rangle_{\Delta t}, \quad \tau < t. \tag{7}$$

а также его среднее по всем возможным связям $f_m(t)f_n(t-\tau)$ значение:

$$\overline{\langle \boldsymbol{S}(t,\tau)\rangle_{\Delta t}} = \frac{1}{M}\{\sum_{m=1}^{M}\langle \frac{f_m(t)f_m(t-\tau)}{\sum_{m=1}^{M} f_m(t-\tau)f_m(t-\tau)}\rangle_{\Delta t} + \frac{1}{M}\sum_{m\neq n}^{M}\sum_{n}^{M}\langle \frac{f_m(t)f_n(t-\tau)}{\sum_{m=1}^{M} f_m(t-\tau)f_n(t-\tau)}\rangle_{\Delta t}\}, \\ \tau < t. \tag{8}$$

В работе рассмотрены особенности применения оператора эволюции в задачах последовательного статистического анализа многомерных рядов телеметрических данных в сетевых каналах связи [6, 7].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Dyson F. J. The S matrix in quantum electrodynamics // Physical Review. 1949. T. 75. № . 11. P. 1736.

2. Татарский В. И. Распространение волн в турбулентной атмосфере. — М.: Наука, ГРФ-МЛ, 1967. 548 с.

3. Краснов А. Е. Пространственно-неинвариантные фильтры оптических сигналов на основе объемных голограмм // Квантовая электроника. 1980. Т. 7. № 4. С. 818–828.

4. Клаудер Дж., Сударшан Э. Основы квантовой оптики. – М.: Мир, 1970. 428 с.

5. Gordleeva S. Y., Stasenko S. V., Semyanov A. V., Dityatev A. E., Kazantsev V. B. Bi-directional astrocytic regulation of neuronal activity within a network // Frontiers in computational neuroscience. 2012. Vol. 6. Article. 92.

6. Galyaev V. S., Krasnov A. E., Nikol'skii D. N., Repin D. S. The space of structural features for increasing the efficiency of the algorithms for detecting network attacks, based on the detection of anomalies in the traffic of extremely large volumes // International Journal of Applied Engineering Research. 1917. Vol. 12. № 21. P. 10781–10790.

7. Krasnov A.E., Nadezhdin E.N., Galayev V.S., Zykova E.A., Repin D.S. DDoS attack detection based on network traffic phase coordinates analysis // International Journal of Applied Engineering Research. 2018. Vol. 13. № 8. P. 5647–5654.

———————————————————————————

УДК 517.94

Об асимптотике спектра оператора Штурма-Лиувилля в $L^2(\mathbb{R}_+)$ с граничным условием $y(0)\cos\alpha + y'(0)\sin\alpha = 0$

И. Г. Насртдинов Россия, г. Москва, МГУ имени М. В. Ломоносова
ildar.nasrtdinov.2010@yandex.ru

On the asymptotics of the spectrum of the operator Sturm-Liouville problem in $L^2(\mathbb{R}_+)$ with the boundary condition $y(0)\cos\alpha + y'(0)\sin\alpha = 0$.

I. G. Nasrtdinov Russia, Moscow, Moscow State University
ildar.nasrtdinov.2010@yandex.ru

Рассмотрим самосопряженный оператор L_q в пространстве гладких функций с компактным носителем, который задаётся дифференциальным выражением $-y''+q(x)y$ и граничными условием $y(0)\cos\alpha + y'(0)\sin\alpha = 0$. Далее рассматриваем замыкание этого оператора. В данной работе будем рассматривать только потенциалы быстро растущие на $+\infty$, т.е. для которых выполняется условие $\lim_{x\to+\infty} q(x) = +\infty$. При данном предположении, как известно (см. [1]) спектр оператора L_q дискретен. Занумеруем собственные числа λ_n оператора L_q в порядке неубывания с учётом кратности, т.е. $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n \leqslant \ldots$.

Определение 1. *Будем писать, что* $q \in Q_{\beta,\gamma}$ *(для* $\beta > 0$ *и* $\gamma > 0$*), если потенциал* $q(x)$ *обладает следующими свойствами:* $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln q(x)}{\ln^\beta x} = \gamma$*;* $q \in C[0,+\infty) \cap C^2(0,+\infty)$*;* $q''(x) \geqslant 0, x \geqslant x_0$ *и* $\lim_{x\to+\infty} \frac{xq'(x)}{q(x)} = +\infty$*. В работе будем рассматривать только положительные* β *и* γ*.*

Потенциалы $q \in Q_{\beta,\gamma}$ при $\beta > 1$, $\gamma > 0$ растут на $+\infty$ быстрее любой степени. При $\beta = 1$ рост потенциалов будет полиномиальный, это доказано Титчмаршем [1]. В работах [2], [3] были выписаны несколько асимтптотических членов λ_n при $n \to +\infty$.

В работе [4] при дополнительных условиях на гладкость было показано, что если функция $\psi(x) = \frac{\ln q(x)}{\ln^2 x}$ неубывающая и $\lim_{x\to+\infty} \psi(x) = +\infty$, то справедливо следующее равенство

$$\lambda_n \sim \frac{(\pi n)^2}{p^2((\pi n)^2)}.$$

Тем самым была найдена асимптотика спектра оператора L_q при $q \in Q_{\beta,\gamma}$, $\beta > 2$, $\gamma > 0$. В той же работе было показано, что для $\beta = 2$, $\gamma > 0$ справедливо:

$$\lambda_n \sim \frac{(\pi n)^2}{p^2((\pi n)^2)} \exp(2\gamma^2)).$$

В дипломной работе [5] А.Ю.Киселева получила следующие результаты:

$$\lambda_n \sim \frac{(\pi n)^2}{p^2((\pi n)^2)} \exp\left\{\frac{4\gamma^\beta}{\beta} \ln^{2-\beta}(p((\pi n)^2)) - \frac{1}{\beta}\left(\frac{3}{\beta} - 1\right)\gamma^3 \cdot 4 \cdot \ln^{3-2\beta}(p((\pi n)^2))\right\},$$

при $\beta \in [4/3; 3/2)$, $\gamma > 0$,

$$\lambda_n \sim \frac{(\pi n)^2}{p^2((\pi n)^2)} \exp \left\{ \frac{4\gamma^\beta}{\beta} \ln^{2-\beta}(p((\pi n)^2)) \right\},$$

при $\beta \in [3/2; 2)$, $\gamma > 0$. Причем γ в обоих случаях находим из условия

$$\ln q(x) = \left(\frac{\ln x}{\gamma} \right)^\beta + o\left(\ln^{1-\frac{1}{\beta}} x \right).$$

Теорема 1. *Пусть $q \in Q_{\beta,\gamma}$, $\beta \in (5/4, 4/3]$, $\gamma > 0$. Тогда для спектра оператора L_q справедливо следующее равенство:*

$$\lambda_n \sim (\pi n)^2 \exp \Bigg\{ - \Bigg(2\gamma \ln^{\frac{1}{\beta}}((\pi n)^2 - \frac{4}{\beta}\gamma^{2\beta} \ln^{\frac{2}{\beta}-1}((\pi n)^2) +$$

$$+ \frac{4(3-\beta)}{\beta^2}\gamma^{3\beta} \ln^{\frac{3}{\beta}-2}((\pi n)^2) - \; - \frac{16(8-6\beta+\beta^2)}{3\beta^3}\gamma^{4\beta} \ln^{\frac{4}{\beta}-3}((\pi n)^2) + (1) \Bigg) \Bigg\},$$

при $n \to +\infty$.

Отметим применение данных формул в вычислении регуляризованных следов см. [6]-[9].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Титчмарш Э. Ч. Разложение по собственным функциям, связанные с дифференциальными уравнениями второго порядка. — Москва: Изд-во иностранной литературы, т. 1, 1960. 278 с.

2. Муртазин Х. Х., Амангильдин Т. Г. Асимптотика спектра оператора Штурма–Лиувилля. // Матем. сб., 1979. Том 110(152) № 1(9). С. 135-149.

3. Ишкин Х. К. Асимптотика спектра и регуляризованный след сингулярных дифференциальных операторов высшего порядка. // Дифференц. уравнения, 1995. Том 31 № 10. С. 1658–1668.

4. Козко А. И., Асимптотика спектра дифференциального оператора $-y''+q(x)y$ с граничным условием в нуле и быстро растущим потенциалом // Дифференциальные уравнения. 2005. Т. 41, № 5, С. 611-622.

5. Кислева А. Ю. Асимптотика спектра задачи Штурма-Лиувилля с быстро растущим потенциалом. Дипломная работа. 2006, с. 5-9.

6. Козко А. И., Печенцов А. С. Регуляризованные следы сингулярных дифференциальных операторов с каноническими краевыми условиями // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем. Мех. 2011. № 4. С. 11-17.

7. Козко А. И., Печенцов А. С. Спектральная функция сингулярного дифференциального оператора порядка $2m$ // Известия Российской академии наук. Серия математическая. 2010. Том 74 № 6(65). С. 107-126.

8. Козко А. И., Печенцов А. С. Регуляризованные следы сингулярных дифференциальных операторов высших порядков // Математические заметки. 2008. Том 83 № 1. С. 39-49.

9. Садовничий В. А., Печенцов А. С., Козко А. И., Регуляризованные следы сингулярных дифференциальных операторов. // Доклады РАН. 2009. Том 427. С. 461-465.

———————————————————————————

УДК 51(091)+(092)

Тригонометрические суммы сеток алгебраических решеток: новые результаты[1]

Е. М. Рарова Россия, г. Тула, Тульский государственный педагогический университет имени Л. Н. Толстого
rarova82@mail.ru

Trigonometric sums of nets of algebraic lattices: new results

E. M. Rarova Russia, Tula, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University
rarova82@mail.ru

Рассматриваются:

единичные $s-$мерные кубы

$$\overline{G}_s = \{\vec{x}\,|\,0 \leqslant x_\nu \leqslant 1,\, \nu = 1, 2, \ldots, s\},$$
$$G_s = \{\vec{x}\,|\,0 \leqslant x_\nu < 1,\, \nu = 1, 2, \ldots, s\};$$

непрерывные периодические функции с периодом равным единице по каждой из переменных x_ν $(\nu = 1, 2, \ldots, s)$, принадлежащие классу $E_s^\alpha(C)$, который состоит из периодических функций

$$f(\vec{x}) = \sum_{m_1,\ldots,m_s=-\infty}^{\infty} C(\vec{m})e^{2\pi i(\vec{m},\vec{x})},$$

для которых

$$|C(\vec{m})| \leqslant \frac{C}{(\overline{m_1}\ldots\overline{m_s})^\alpha}, \quad (\alpha > 1)$$

и $\overline{m} = \max(1, |m|)$ для любого вещественного m.

Для произвольного вектора $\vec{x}$ его дробной частью называется вектор $\{\vec{x}\}=(\{x_1\},\ldots,\{x_s\})$. Отсюда следует, что всегда $\{\vec{x}\} \in G_s$.

Далее везде под произвольной решеткой $\Lambda \subset \mathbb{R}^s$ мы будем понимать только полные решетки, то есть

$$\Lambda = \{m_1\vec{\lambda}_1 + \ldots + m_s\vec{\lambda}_s = \vec{m}\cdot A\,|\vec{m} = (\,m_1, \ldots, m_s) \in \mathbb{Z}^s\},$$

где $\vec{\lambda}_1 = (\lambda_{1\,1}, \ldots, \lambda_{1\,s})$,…,$\vec{\lambda}_s = (\lambda_{s\,1}, \ldots, \lambda_{s\,s})$ — система линейно-независимых векторов в $\mathbb{R}^s$, а матрица решётки A задана соотношениями

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_{1\,1} & \ldots & \lambda_{1\,s} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_{s\,1} & \ldots & \lambda_{s\,s} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{\lambda}_1 \\ \vdots \\ \vec{\lambda}_s \end{pmatrix}.$$

Взаимная решетка $\Lambda^* = \{\vec{x}\,|\,\forall\vec{y} \in \Lambda\ (\vec{x}, \vec{y}) \in \mathbb{Z}\}$. Непосредственно из определения следует равенство $(q\Lambda)^* = \dfrac{1}{q}\Lambda^*$.

[1]Исследование выполнено по гранту РФФИ №16-41-710194_р_центр_а

Определение 1. *Для произвольной решетки Λ обобщенной параллелепипедальной сеткой $M(\Lambda)$ называется множество $M(\Lambda) = \Lambda^* \cap G_s$.*

Сетка $M_1(\Lambda) = \Lambda^* \cap [-1;1)^s$.

Обобщенной параллелепипедальной сеткой II рода $M'(\Lambda)$ называется множество

$$M'(\Lambda) = \{\vec{x} \,|\, \vec{x} = \{\vec{y}\}, \vec{y} \in M_1(\Lambda)\}.$$

Определение 2. *Весовой функцией порядка r с константой B называется гладкая функция $\rho(\vec{x})$, удовлетворяющая условиям*

$$\sum_{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_s=-1}^{0} \rho(\vec{x} + (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_s)) = 1 \text{ при } \vec{x} \in G_s, \tag{1}$$

$$\rho(\vec{x}) = 0 \quad \text{при} \quad \vec{x} \notin (-1;1)^s, \tag{2}$$

$$\left| \int_{-1}^{1} \ldots \int_{-1}^{1} \rho(\vec{x}) e^{2\pi i(\vec{\sigma},\vec{x})} d\vec{x} \right| \leqslant B(\overline{\sigma}_1 \ldots \overline{\sigma}_s)^{-r} \quad \text{для любого} \quad \vec{\sigma} \in \mathbb{R}^s. \tag{3}$$

Если выполнены условия (1) и (2), то говорим просто о весовой функции $\rho(\vec{x})$.

Определение 3. *Квадратурной формулой с обобщенной параллелепипедальной сеткой II типа и весовой функцией $\rho(\vec{x})$ называется формула вида*

$$\int_0^1 \cdots \int_0^1 f(\vec{x}) d\vec{x} = (\det \Lambda)^{-1} \sum_{\vec{x} \in M'(\Lambda)} \rho_{\vec{x}} f(\vec{x}) - R_{N'(\Lambda)}[f],$$

$$\text{где} \quad \rho_{\vec{x}} = \sum_{\vec{y} \in M_1(\Lambda), \{\vec{y}\} = \vec{x}} \rho(\vec{y}), \quad N'(\Lambda) = |M'(\Lambda)|,$$

$R_{N'(\Lambda)}[f]$ — погрешность квадратурной формулы.

Пусть $\vec{a} = (a_0, a_1, \ldots, a_{s-1})$ — целочисленный вектор такой, что многочлен

$$P_{\vec{a}}(x) = \sum_{\nu=0}^{s-1} a_\nu x^\nu + x^s \tag{4}$$

неприводим над полем рациональных чисел $\mathbb{Q}$ и все корни Θ_ν $(\nu = 1, \ldots, s)$ многочлена (4) действительные.

Обозначим через $T(\vec{a})$ матрицу степеней алгебраически сопряженных целых алгебраических чисел $\Theta_1, \ldots, \Theta_s$ — корней многочлена $P_{\vec{a}}(x)$:

$$T(\vec{a}) = \begin{pmatrix} 1 & \ldots & 1 \\ \Theta_1 & \ldots & \Theta_s \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \Theta_1^{s-1} & \ldots & \Theta_s^{s-1} \end{pmatrix}, \tag{5}$$

а через $\vec{\Theta} = (\Theta_1, \ldots, \Theta_s)$ — вектор полного набора алгебраически сопряженных чисел — корней многочлена $P_{\vec{a}}(x)$.

Для любого $t > 0$ решётка $\Lambda(t \cdot T(\vec{a}))$ называется алгебраической. Она имеет вид

$$\Lambda(t \cdot T(\vec{a})) = \left\{ \vec{x} = \left(t \sum_{\nu=1}^{s} \Theta_1^{\nu-1} m_\nu, \ldots, t \sum_{\nu=1}^{s} \Theta_s^{\nu-1} m_\nu \right) = t \cdot \vec{m} \cdot T(\vec{a}) \,\middle|\, \vec{m} \in \mathbb{Z}^s \right\}.$$

Таким образом, алгебраическая решётка $\Lambda(t\cdot T(\vec{a}))$ имеет базис $\vec{\lambda}_\nu = t\cdot(\Theta_1^{\nu-1},\ldots,\Theta_s^{\nu-1})$ $(\nu = 1,\ldots,s)$.

Совокупность $M\subset G_s$ точек $M_k = (\xi_1(k),\ldots,\xi_s(k))$ $\quad (k = 1\ldots N)$ называется *сеткой* M из N узлов, а сами точки — *узлами квадратурной формулы*. Величины $\rho_k = \rho(M_k)$ называются весами квадратурной формулы. В этой работе будем везде предполагать, что все веса вещественнозначные и являются значениями специальной весовой функции.

Для произвольных целых $m_1,\ldots,m_s$ суммы $S_{M,\vec{\rho}}(m_1,\ldots,m_s)$, определённые равенством

$$S_{M,\vec{\rho}}(m_1,\ldots,m_s) = \sum_{k=1}^{N}\rho_k e^{2\pi i[m_1\xi_1(k)+\ldots+m_s\xi_s(k)]}, \tag{6}$$

называются *тригонометрическими суммами сетки с весами*.

Пусть матрица $T = T(\vec{a})$ и $t>0$. Рассмотрим алгебраическую сетку $M(t) = M'(t\cdot\Lambda(T))$ из $N'(t\cdot\Lambda(T))$ узлов $\vec{x}_k$ $(k = 1,\ldots,N'(t\cdot\Lambda(T)))$ с весами

$$\rho_k = \rho_{\vec{x}_k} = (\det(t\cdot\Lambda(T)))^{-1}\sum_{\{\vec{y}\}=\vec{x}_k,\,\vec{y}\in M_1(t\cdot\Lambda(T))}\rho(\vec{y})$$

и её тригонометрическую сумму с весами

$$S_{M(t),\vec{\rho}}(\vec{m}) = (\det(t\cdot\Lambda(T)))^{-1}\sum_{\vec{x}\in M(t)}\left(\sum_{\{\vec{y}\}=\vec{x},\,\vec{y}\in M_1(t\cdot\Lambda(T))}\rho(\vec{y})\right)e^{2\pi i(\vec{m},\vec{x})}.$$

Теорема 1. *Для алгебраической решётки $\Lambda(t\cdot T(\vec{a}))$ и произвольной весовой функции $\rho(\vec{x})$ справедливо равенство*[2]

$$S_{M(t),\vec{\rho}}(\vec{m}) = \delta(\vec{m}) + {\sum_{\vec{x}\in\Lambda(t\cdot T(\vec{a}))}}' \int_{-1}^{1}\ldots\int_{-1}^{1}\rho(\vec{y})e^{2\pi i(\vec{y},\vec{m}-\vec{x})}d\vec{y}, \tag{7}$$

где

$$\delta(\vec{m}) = \begin{cases} 1, & \text{при } \vec{m} = \vec{0};\\ 0, & \text{при } \vec{m}\neq\vec{0},\ \vec{m}\in\mathbb{Z}^s.\end{cases}$$

Теорема 2. *При $t\to\infty$ справедлива асимптотическая формула*

$$S_{M(t),\vec{\rho}_1}(\vec{0}) = 1 + O\left(\frac{\ln^{s-1}\det\Lambda(t)}{(\det\Lambda(t))^2}\right). \tag{8}$$

Теорема 3. *При $t\to\infty$ для произвольного вектора $\vec{m}\neq\vec{0}$ справедлива асимптотическая формула*

$$S_{M(t),\vec{\rho}_1}(\vec{m}) = O\left(\frac{(\overline{m_1}\ldots\overline{m_s})^2\ln^{s-1}\det\Lambda(t)}{(\det\Lambda(t))^2}\right). \tag{9}$$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Рарова Е. М. Разложение тригонометрической суммы сетки с весами в ряд по точкам решетки // Изв. ТулГУ. Естественные науки. 2014. Вып. 1. Ч. 1. С. 37–49.

[2]Здесь и далее символ $\sum'$ означает, что из области суммирования исключена нулевая точка.

2. Рарова Е. М. Тригонометрические суммы сетки с весами для целочисленной решётки // Известия Тульского государственного университета. Естественные науки. 2014. № 3. С. 34-39.

3. Рарова Е. М. Тригонометрические суммы алгебраических сеток // В сборнике: Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы и приложения Материалы XIII Международной конференции, посвященной восьмидесятипятилетию со дня рождения профессора Сергея Сергеевича Рышкова. Тульский государственный педагогичекий университет им. Л.Н. Толстого. 2015. С. 356-359.

УДК 511.9

О рациональных приближениях алгебраических сеток[1]

А. В. Родионов Россия, г. Тула, Тульский государственный педагогический университет имени Л. Н. Толстого
rodionovalexandr@mail.ru

On rational approximations of algebraic nets

A. V. Rodionov Russia, Tula, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University
rodionovalexandr@mail.ru

Для произвольного вектора $\vec{x}$ его дробной частью называется вектор $\{\vec{x}\}=(\{x_1\},\ldots,\{x_s\})$.

Далее везде под произвольной решеткой $\Lambda\subset\mathbb{R}^s$ мы будем понимать только полные решетки, то есть

$$\Lambda=\{m_1\vec{\lambda}_1+\ldots+m_s\vec{\lambda}_s=\vec{m}\cdot A\,|\vec{m}=(\,m_1,\ldots,m_s)\in\mathbb{Z}^s\},$$

где $\vec{\lambda}_1=(\lambda_{1\,1},\ldots,\lambda_{1\,s})$,…,$\vec{\lambda}_s=(\lambda_{s\,1},\ldots,\lambda_{s\,s})$ — система линейно-независимых векторов в $\mathbb{R}^s$, а матрица решётки A задана соотношениями

$$A=\begin{pmatrix}\lambda_{1\,1} & \ldots & \lambda_{1\,s}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \lambda_{s\,1} & \ldots & \lambda_{s\,s}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\vec{\lambda}_1\\ \vdots\\ \vec{\lambda}_s\end{pmatrix}.$$

Взаимная решетка $\Lambda^*=\{\vec{x}\,|\,\forall\vec{y}\in\Lambda\ (\vec{x},\vec{y})\in\mathbb{Z}\}$. Непосредственно из определения следует равенство $(q\Lambda)^*=\dfrac{1}{q}\Lambda^*$.

Определение 1. *Для произвольной решетки Λ обобщенной параллелепипедальной сеткой $M(\Lambda)$ называется множество $M(\Lambda)=\Lambda^*\cap G_s$.*

Сетка $M_1(\Lambda)=\Lambda^*\cap[-1;1)^s$.

Обобщенной параллелепипедальной сеткой II рода $M'(\Lambda)$ называется множество

$$M'(\Lambda)=\{\vec{x}\,|\,\vec{x}=\{\vec{y}\},\vec{y}\in M_1(\Lambda)\}.$$

Пусть $\vec{a}=(a_0,a_1,\ldots,a_{s-1})$ — целочисленный вектор такой, что многочлен

$$P_{\vec{a}}(x)=\sum_{\nu=0}^{s-1}a_\nu x^\nu+x^s \tag{1}$$

[1]Исследование выполнено по гранту РФФИ №16-41-710194_р_центр_а

неприводим над полем рациональных чисел $\mathbb{Q}$ и все корни $\Theta_\nu\,(\nu = 1,\dots,s)$ многочлена (1) действительные.

Обозначим через $T(\vec{a})$ матрицу степеней алгебраически сопряженных целых алгебраических чисел $\Theta_1,\dots,\Theta_s$ — корней многочлена $P_{\vec{a}}(x)$:

$$T(\vec{a}) = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \Theta_1 & \dots & \Theta_s \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \Theta_1^{s-1} & \dots & \Theta_s^{s-1} \end{pmatrix}, \tag{2}$$

а через $\vec{\Theta} = (\Theta_1,\dots,\Theta_s)$ — вектор полного набора алгебраически сопряженных чисел — корней многочлена $P_{\vec{a}}(x)$.

Для любого $t > 0$ решётка $\Lambda(t \cdot T(\vec{a}))$ называется алгебраической. Она имеет вид

$$\Lambda(t\cdot T(\vec{a}))=\left\{\vec{x}=\left(t\sum_{\nu=1}^{s}\Theta_1^{\nu-1}m_\nu,\dots,t\sum_{\nu=1}^{s}\Theta_s^{\nu-1}m_\nu\right)=t\cdot\vec{m}\cdot T(\vec{a})\,\middle|\,\vec{m}\in\mathbb{Z}^s\right\}.$$

Таким образом, алгебраическая решётка $\Lambda(t \cdot T(\vec{a}))$ имеет базис $\vec{\lambda}_\nu = t\cdot(\Theta_1^{\nu-1},\dots,\Theta_s^{\nu-1})$ $(\nu = 1,\dots,s)$.

Естественной научной проблемой является вопрос о приближении алгебраической сетки рациональной сеткой. Из теории обобщенных параллелепипедальных сеток и квадратурных формул с этими сетками возникает следующая постановка.

Дана алгебраическая решётка $\Lambda(t\cdot T(\vec{a}))$ и натуральном t требуется найти целочисленную решётку $\Lambda_{\mathbb{Z}}(t\cdot T(\vec{a}))$ такую, чтобы величина гиперболического параметра решётки $\Lambda_{\mathbb{Z}}(t\cdot T(\vec{a}))$ была наибольшей, когда

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\Lambda_{\mathbb{Z}}(t\cdot T(\vec{a})) = \Lambda(T(\vec{a})).$$

В докладе проводится анализ возможного понятия наилучшего приближения алгебраической решётки рациональной и результаты численных экспериментов.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Л. П. Добровольская, М. Н. Добровольский, Н. М. Добровольский, Н. Н. Добровольский Многомерные теоретико-числовые сетки и решётки и алгоритмы поиска оптимальных коэффициентов / Тула: Изд-во Тул. гос. пед. ун-та им. Л. Н. Толстого, 2012. — 283 с. http://elibrary.ru/item.asp? id=20905960

2. Л. П. Добровольская, М. Н. Добровольский, Н. М. Добровольский, Н. Н. Добровольский Гиперболические дзета-функции сеток и решёток и вычисление оптимальных коэффициентов // Чебышевский сборник 2012. Т. 13, вып. 4(44). С. 4–107.

3. Коробов Н. М. Теоретико-числовые методы в приближенном анализе. (второе издание) М.: МЦНМО, 2004. 288 с.

4. Родионов А. В., Чуприн С. Ю. О гиперболических параметрах решётки линейного сравнения // Известия ТулГУ. Естественные науки. Вып. 1. Ч. 1. — Тула: Изд-во ТулГУ, 2014. С. 50–62.

5. Фролов К. К. Оценки сверху погрешности квадратурных формул на классах функций // ДАН СССР. 1976. Т. 231. № 4. С. 818–821.

УДК 511.3

О числе точек решетки решений линейного сравнения в областях

Н. К. Серегина Россия, г. Тула, Администрация города Тулы
Н. Н. Добровольский Россия, г. Тула, Тульский государственный университет
sereginank@cityadm.tula.ru nikolai.dobrovolsky@gmail.com

On the number of lattice points of solutions of linear comparison in domains

N. K. Seregina, The city administration of Tula
N. N. Dobrovolskiy Russia, Tula, Tula state University
sereginank@cityadm.tula.ru nikolai.dobrovolsky@gmail.com

Рассмотрим решетку $\Lambda(\vec{a},N)$ решений линейного сравнения

$$a_1m_1+\ldots+a_sm_s\equiv 0 \pmod N,\quad (a_j,N)=1\quad (j=1,\ldots,s). \tag{1}$$

Гиперболический параметр $q(\Lambda(\vec{a},N))$ решётки решений сравнения (1) определяется как минимальное значение произведения $\overline{m}_1\ldots\overline{m}_s$, где $m_1,\ldots,m_s$ — произвольное нетривиальное решение сравнения (1) и для любого вещественного m полагается $\overline{m}=\max\{1,|m|\}$.

Рассмотрим прямоугольный параллелепипед

$$\Pi(\vec{\lambda};\vec{n})=\prod_{\nu=1}^{s}[\lambda_\nu+1;\lambda_\nu+n_\nu],$$

где $\vec{\lambda}\in\mathbb{Z}^s$, $\vec{n}\in\mathbb{N}^s$. Очевидно, что $\Pi(\vec{\lambda};\vec{n})=\vec{\lambda}+\Pi(\vec{0};\vec{n})$.

Мы будем использовать символ Коробова $\delta_N(a)$, который задается равенством

$$\delta_N(a)=\begin{cases}1, & \text{если } a\equiv 0 \pmod N,\\ 0, & \text{если } a\not\equiv 0 \pmod N.\end{cases}$$

При доказательстве теоремы Бахвалова по методу Коробова центральную роль играет следующая лемма Коробова [1].

Лемма 1. *При любых целых λ, λ_ν, и $n_\nu\geqslant 1$ $(\nu=1,2,\ldots,s)$ справедлива оценка*

$$\sum_{k_1=\lambda_1+1}^{\lambda_1+n_1}\ldots\sum_{k_s=\lambda_s+1}^{\lambda_s+n_s}\delta_p(a_1k_1+\ldots+a_sk_s+\lambda)\leqslant\begin{cases}1 & \text{при}\quad n_1\ldots n_s\leqslant q,\\ \dfrac{4n_1\ldots n_s}{q} & \text{при}\quad n_1\ldots n_s>q,\end{cases}$$

где $q=q(\Lambda(\vec{a},N))$ — гиперболический параметр решетки.

В работе [2] предложен подход для уточнения этой оценки.

Лемма 2. *Для любых целых b и λ справедливо равенство*

$$\sum_{m_j=b+1}^{b+N}\delta_N(a_jm_j+\lambda)=1.$$

Следующая лемма показывает, что в одномерном случае лемму Коробова можно существенно усилить.

Лемма 3. *Для любых целых b и λ и натурального n справедливо равенство*

$$\sum_{m_j=b+1}^{b+n}\delta_N(a_jm_j+\lambda)=\frac{n}{N}+\left\{\frac{b+\lambda c_j}{N}\right\}-\left\{\frac{b+n+\lambda c_j}{N}\right\}=$$
$$=\begin{cases}\frac{n}{N}-\left\{\frac{n}{N}\right\}=\left[\frac{n}{N}\right], & \text{если } \left\{\frac{b+\lambda c_j}{N}\right\}+\left\{\frac{n}{N}\right\}<1,\\ \frac{n}{N}-\left\{\frac{n}{N}\right\}+1=\left[\frac{n}{N}\right]+1, & \text{если } \left\{\frac{b+\lambda c_j}{N}\right\}+\left\{\frac{n}{N}\right\}\geqslant 1\end{cases},$$

где c_j — целое число такое, что $a_jc_j\equiv 1 \pmod N$.

Обозначим через $T(\vec{a},\vec{\lambda},\vec{n},\lambda;N)$ число решений системы

$$\begin{cases}a_1m_1+\ldots+a_sm_s+\lambda\equiv 0 \pmod N,\\ \vec{m}\in\Pi(\vec{\lambda};\vec{n}).\end{cases}\tag{2}$$

Ясно, что

$$T(\vec{a},\vec{\lambda},\vec{n},\lambda;N)=T(\vec{a},\vec{0},\vec{n},\lambda+(\vec{a},\vec{\lambda});N).\tag{3}$$

С помощью символа Коробова величину $T(\vec{a},\vec{0},\vec{n},\lambda+(\vec{a},\vec{\lambda});N)$ можно записать в виде суммы

$$T(\vec{a},\vec{0},\vec{n},\lambda+(\vec{a},\vec{\lambda});N)=\sum_{k_1=1}^{n_1}\ldots\sum_{k_s=1}^{n_s}\delta_N(a_1k_1+\ldots+a_sk_s+\mu)=T(\vec{a},\vec{0},\vec{n},\mu;N),$$

где $\mu=a_1\lambda_1+\ldots+a_s\lambda_s+\lambda$.

Теорема 1. *Пусть $q=q(\Lambda(\vec{a},N))$ — гиперболический параметр решетки и $n=$ $=\max(n_1,\ldots,n_s)$. Тогда справедлива оценка*

$$T(\vec{a},\vec{\lambda},\vec{n},\lambda;N)\leqslant\begin{cases}1 & \text{при}\quad n_1\ldots n_s\leqslant q,\\ \dfrac{3n_1\ldots n_s}{q} & \text{при}\quad n_1\ldots n_s>q, n\leqslant\dfrac{q}{3},\\ \dfrac{n_1\ldots n_s}{n} & \text{при}\quad n_1\ldots n_s>q, \dfrac{q}{3}<n<N,\\ n_1\ldots n_s\left(\frac{1}{N}+\frac{1}{n}\right) & \text{при}\quad n\geqslant N.\end{cases}\tag{4}$$

Из этой теоремы следует усиленный вариант теоремы Бахвалова — Коробова для произвольного модуля N.

Теорема 2. *Пусть $q=q(\Lambda(\vec{a},N))$ — гиперболический параметр решетки. Тогда при $q\geqslant 4$ гиперболическая дзета-функция решетки $\zeta_H(\Lambda(\vec{a},N)|\alpha)$ удовлетворяет неравенству*

$$\zeta_H(\Lambda(\vec{a},N)|\alpha)<$$
$$<\frac{s2^{\alpha+1}}{3(N-1)^\alpha}\left(3+\frac{2}{\alpha-1}\right)^s+s\left(3+\frac{2}{\alpha-1}\right)^{s-1}\frac{6^\alpha}{(q-3)^\alpha}+$$
$$+\frac{6}{q^\alpha}\left(2+\frac{1}{\alpha-1}\right)\sum_{r=2}^{s}\left(3+\frac{2}{\alpha-1}\right)^{s-r}\alpha^{r-1}\left(2+2\ln\frac{q-3}{6}+\frac{\pi^2}{6}\right)^{r-1}.\tag{5}$$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Коробов Н. М. Теоретико-числовые методы в приближенном анализе. (второе издание) М.: МЦНМО, 2004.

2. Добровольский Н. Н., Добровольская Л. П., , Серегина Н. К., Бочарова О. Е. Алгоритмы вычисления оптимальных коэффициентов: Моногр. Под. ред. Н. М. Добровольского. — Тула: Изд-во Тул. гос. пед. ун-та им. Л. Н. Толстого, 2016. – 223 с.

———————————————————————————————————

УДК 511.42

Алгебраические решётки в метрическом пространстве решёток

Е. Н. Смирнова Россия, г. Оренбург, Оренбургский государственный университет
О. А. Пихтилькова Россия, г. Оренбург, Оренбургский государственный университет
helenash@mail.ru opikhtilkova@mail.ru

Algebraic lattice in a metric space lattices

E. N. Smirnova Russia, Orenburg, Orenburg State University
O. A. Pikhtil'kova Russia, Orenburg, Orenburg State University
helenash@mail.ru opikhtilkova@mail.ru

В докладе дано новое общее определение алгебраической решётки. Доказывается, что любое рациональное преобразование алгебраической решётки снова будет алгебраической решёткой. Показано, что взаимная решётка к алгебраической решётки также будет алгебраической решёткой, соответствующей тому же чисто-вещественному алгебраическому полю F_s над полем рациональных чисел $\mathbb{Q}$.

Следуя за Б. Ф. Скубенко, изучаются фундаментальные системы из чисто-вещественного алгебраического поля F_s над полем рациональных чисел $\mathbb{Q}$. Показана связь между фундаментальными системами алгебраических чисел и алгебраическими решётками.

В работе доказаны оценки для норм матрицы перехода от произвольной невырожденной матрицы к рациональной приближающей матрицы. С помощью леммы об оценки нормы матрицы перехода и обратной матрицы перехода, связывающих произвольную невырожденную матрицу и невырожденную рациональную приближающую матрицу, в работе показано, что множество алгебраических решёток всюду плотно в метрическом пространстве решёток.

Доказанная теорема является частным случаем более общей теоремы о том, что для любой решётки $\Lambda \in PR_s$ множество всех решёток рационально связанных с решёткой Λ всюду плотно в PR_s.

Аналогом данной теоремы является утверждение что для произвольной точки общего положения из $\mathbb{R}^s$ соответствующее s-мерное рациональное арифметическое пространство будет всюду плотно в s-мерном вещественном арифметическом пространстве $\mathbb{R}^s$.

Как известно (см. [2], стр.165) множество всех s-мерных решёток образуют полное метрическое пространство относительно метрики $\rho(\Lambda, \Gamma)$, которая задана равенствами

$$\rho(\Lambda,\Gamma) = \max(\ln(1+\mu), \ln(1+\nu)), \quad \mu = \inf_{\Lambda = A\cdot\Gamma} \|A - E_s\|, \quad \nu = \inf_{B\cdot\Lambda=\Gamma} \|B - E_s\|,$$

$$E_s = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = (\delta_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant s}, \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{при } i=j, \\ 0, & \text{при } i\neq j, \end{cases} \quad \|A\| = s\cdot \max_{1\leqslant i,j\leqslant s} |a_{ij}|.$$

Наряду с операциями сложения и вычитания векторов из $\mathbb{R}^s$ рассмотрим операции покоординатного умножения двух векторов и деления вектора на вектор общего положения:

$$\vec{x}\cdot\vec{y}=(x_1y_1,\ldots,x_sy_s),\quad \frac{\vec{x}}{\vec{y}}=\left(\frac{x_1}{y_1},\ldots,\frac{x_s}{y_s}\right)\quad (y_1\neq 0,\ldots,y_s\neq 0).$$

Добавление операции покоординатного умножения превращает $\mathbb{R}^s$ в коммутативное кольцо с единицей $\vec{e}=(1,\ldots,1)$ и, кроме того, в алгебру над $\mathbb{R}$ ранга s.

Так как для стандартного базиса $\vec{e}_1,\ldots,\vec{e}_s$ справедливы равенства $\vec{x}\cdot\vec{e}_j=x_j\cdot\vec{e}_j$ ($j==1,\ldots,s$), то умножение на $\vec{x}$ задаёт линейное преобразование пространства $\mathbb{R}^s$. Матрицей этого линейного преобразования в стандартном базисе является диагональная матрица $D(\vec{x})$, которая невырожденная только для точек $\vec{x}$ общего положения. Обозначим через $D_s^{(0)}(\mathbb{R})$ множество всех диагональных матриц, содержащее как подмножество $D_s(\mathbb{R})$ — множество всех невырожденных диагональных матриц, так и подмножество вырожденных диагональных матриц, т. е. диагональных матриц, у которых на диагонали есть хотя бы один ноль. Соответствие $\vec{x}\to D(\vec{x})$ задаёт *регулярное $\mathbb{R}$-представление* пространства $\mathbb{R}^s$ в стандартном базисе. Таким образом всё $\mathbb{R}^s$ отображается взаимно однозначно на $D_s^{(0)}(\mathbb{R})$, а множество точек общего положения — на $D_s(\mathbb{R})$. При переходе к другим базисам регулярное представление меняется.

Согласно Б. Н. Делоне и Д. К. Фаддееву [1] *решёткой, повторяющейся умножением,* называется всякая решётка замкнутая относительно операции покоординатного умножения точек. Таким образом, если решётка Λ, повторяется умножением, то для любого $\vec{x}\in\Lambda$ справедливо соотношение

$$\vec{x}\cdot\Lambda=\{(x_1y_1,\ldots,x_sy_s)\,|\,\vec{y}\in\Lambda\}\subset\Lambda\cdot\Lambda\subset\Lambda.$$

Ясно, что если $\vec{x}$ — точка общего положения, то $\vec{x}\cdot\Lambda$ — подрешётка, повторяющаяся умножением, решётки Λ, так как свойства дискретности и замкнутости относительно сложения, вычитания и умножения для $\vec{x}\cdot\Lambda$ сохраняются, кроме того линейно независимая система векторов переходит в линейно независимую.

Таким образом, с алгебраической точки зрения всякая решётка Λ, повторяющаяся умножением является, с одной стороны, коммутативным кольцом, а с другой стороны $\mathbb{Z}$-модулем.

Определение 1. *Точка $\vec{x}\neq\vec{0}$ называется делителем нуля, если у неё есть координаты равные* 0.

Определение 2. *Решётка не содержащая делителей нуля называется неприводимой.*

Определение 3. *Назовём вектор $\vec{\lambda}=(\lambda^{(1)},\ldots,\lambda^{(s)})\in\mathbb{R}^s$ целым алгебраическим, если многочлен*

$$f_{\vec{\lambda}}(x)=(x-\lambda^{(1)})\ldots(x-\lambda^{(s)})\in\mathbb{Z}[x].$$

Вектор $\vec{\lambda}=(\lambda^{(1)},\ldots,\lambda^{(s)})$ назовём алгебраическим, если найдется натуральное число n такое, что вектор $\vec{\lambda}_1=n\vec{\lambda}$ будет целым алгебраическим вектором.

Определение 4. *Решётка $\Lambda\in PR_s$ называется алгебраической, если любой вектор $\lambda\in\Lambda$ будет алгебраическим вектором и Λ содержит неприводимую подрешётку Λ_1, повторяющуюся умножением.*

Важным свойством алгебраических решёток является тот факт, что норменный минимум $N(\Lambda)$, который определяется равенством

$$N(\Lambda)=\inf_{\vec{x}\in\Lambda,\,\vec{x}\neq\vec{0}}|x_1\ldots x_s|,$$

строго больше 0: $N(\Lambda) > 0$.

Пусть F_s — чисто-вещественное алгебраическое поле степени s над полем рациональных чисел $\mathbb{Q}$ и $F_s^{(1)} = F_s$, $F_s^{(2)}$, …, $F_s^{(s)}$ — его алгебраически сопряжённые поля. Обозначим через $\mathbb{A}(F_s)$ множество всех алгебраических решёток Λ таких, что координаты любого вектора $\vec{x} \in \Lambda$ являются алгебраически сопряженными числами из поля F_s, то есть $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_s)$ и $x_j = \theta^{(j)}$ $(j = 1, \ldots, s)$, где $\theta^{(1)} = \theta$, $\theta^{(2)}$, …, $\theta^{(s)}$ — полный набор алгебраически сопряженных чисел $\theta^{(j)} \in F_s^{(j)}$ для алгебраического числа $\theta \in F_s$.

Целью данной работы является доказательство следующей основной теоремы о плотности множества алгебраических решёток $\mathbb{A}(F_s)$ в метрическом пространстве PR_s.

Теорема 1. *Для любого чисто-вещественного алгебраического поля F_s степени s над полем рациональных чисел $\mathbb{Q}$ множество алгебраических решёток $\mathbb{A}(F_s)$ всюду плотно в метрическом пространстве PR_s.*

Множество алгебраических, линейно независимых чисел λ_1, …, λ_s из F_s согласно Б. Ф. Скубенко называется фундаментальной системой (см. [3]), а если среди чисел фундаментальной системы есть единица, то такая система называется приведенной фундаментальной системой.

Лемма 1. *Пусть λ_1, …, λ_s из F_s — произвольная фундаментальная система из F_s, а $\lambda \in F_s$ — произвольное алгебраическое число, тогда имеется однозначное представление*

$$\lambda = m_1\lambda_1 + \ldots + m_s\lambda_s, \quad m_j \in \mathbb{Q} \quad (1 \leqslant j \leqslant s).$$

Лемма 2. *Пусть λ_1, …, λ_s из F_s — произвольная фундаментальная система из F_s и вектора $\vec{\lambda}_j$ заданы равенствами*

$$\vec{\lambda}_j = (\lambda_j^{(1)}, \ldots, \lambda_j^{(s)}), \quad \lambda_j^{(\mu)} \in F_s^{(\mu)} \quad (1 \leqslant j, \mu \leqslant s),$$

тогда решётка $\Lambda = \Lambda(\vec{\lambda}_1, \ldots, \vec{\lambda}_s) \in \mathbb{A}(F_s)$ — алгебраическая решётка.

Обозначим через $\mathfrak{M}_s(\mathbb{Q})$ множество всех рациональных квадратных матриц порядка s, а через $\mathfrak{M}_s^*(\mathbb{Q})$ — подмножество невырожденных матриц.

Лемма 3. *Для любой рациональной, невырожденной матрицы $M \in \mathfrak{M}_s^*(\mathbb{Q})$ и алгебраической решётки $\Lambda \in \mathbb{A}(F_s)$ решётка $\Lambda_1 = M\Lambda$ — алгебраическая: $\Lambda_1 \in \mathbb{A}(F_s)$.*

Рассмотрим произвольную решётку $\Lambda \in PR_s$. Согласно Б. Н. Делоне и Д. К. Фаддееву [1] *решётка Λ и решётка Λ_1 рационально связаны, если $\Lambda_1 = M \cdot \Lambda$, $\Lambda = M^{-1} \cdot \Lambda_1$ и $M \in \mathfrak{M}_s^*(\mathbb{Q})$.* Множество всех решёток Λ_1 рационально связанных с решёткой Λ обозначим через $\mathfrak{Q}(\Lambda)$.

Дословно повторяя доказательство основной теоремы можно доказать следующее утверждение.

Теорема 2. *Для любой решётки $\Lambda \in PR_s$ множество всех решёток рационально связанных с решёткой Λ всюду плотно в PR_s.*

Другими словами: $\mathfrak{Q}(\Lambda)$ всюду плотно в PR_s.

Пусть $(\alpha_1, \ldots, \alpha_s) \in \mathbb{R}^s$ — произвольная точка общего положения, то есть $\alpha_j \neq 0$ $(1 \leqslant j \leqslant s)$. Рассмотрим рациональное s-мерное арифметическое пространство $\mathbb{Q}(\alpha_1, \ldots, \alpha_s) \subset \mathbb{R}^s$ над полем рациональных чисел $\mathbb{Q}$, которое определяется равенством

$$\mathbb{Q}(\alpha_1, \ldots, \alpha_s) = \{(m_1\alpha_1, \ldots, m_s\alpha_s) | \vec{m} = (m_1, \ldots, m_s) \in \mathbb{Q}^s\}.$$

Нетрудно видеть, что справедлива следующая теорема

Теорема 3. *Рациональное s-мерное арифметическое пространство $\mathbb{Q}(\alpha_1, \ldots, \alpha_s)$ всюду плотно в s-мерном вещественном арифметическом пространстве $\mathbb{R}^s$.*

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Б. Н. Делоне, Д. К. Фаддеев Теория иррациональностей третьей степени // Тр. Матем. ин-та им. В. А. Стеклова, 1940. Т. 11. С. 3–340.

2. Касселс Д. Введение в геометрию чисел. М.: Мир, 1965. 422 с.

3. Б. Ф. Скубенко К совместным приближениям алгебраических иррациональностей // Целочисленные решетки и конечные линейные группы, Зап. научн. сем. ЛОМИ, 116, Изд-во «Наука», Ленинград. отд., Л., 1982, С. 142–154; J. Soviet Math., 26:3 (1984), 1922–1930.

––

9. История математики

УДК 51(091)

Комбинаторно-геометрические конфигурации и их группы автоморфизмов (XIX в.)

В. Г. Алябьева Россия, г. Пермь, Пермский государственный национальный исследовательский университет
vgalybeva@gmail.com

Combinatorial and geometrical configurations and their automorphism groups (XIX c.)

V.G. Alyabieva Russia, Perm, Perm State University
vgalybeva@gmail.com

Конфигурации являлись предметом исследования в геометрии и комбинаторике. В комбинаторике обсуждались проблемы существования и единственности конфигураций определённого вида, в геометрии — проблемы реализации. Общим истоком теорий как геометрических, так и комбинаторных конфигураций явилась идея Лейбница об *analysis situs*. Лейбниц ввёл термин *analysis situs* — «анализ положения» — для обозначения особого раздела математики, который изучает порядок и расположение элементов друг относительно друга.

Геометрические конфигурации

Теория геометрических конфигураций, по словам Д. Гильберта, составляла «поучительную область проективной геометрии» [1] и рассматривалась в течение XIX в. «как важнейшая область всей геометрии». Исследованиями геометрических конфигураций в XIX в. занимались многие математики, прежде всего немецкие: К.Т.Рейе, З. Кантор, Э. Штейниц, А.М. Шёнфлис, Я. Штейнер, Ф. Клейн и др. На страницах немецких журналов появлялись статьи, посвящённые исследованиям конфигураций, англичанина А. Кэли, итальянца Дж. Веронезе, голландца Я. Фриза. В 1910 году в «Энциклопедии математических знаний» Штейниц (Steinitz E.) поместил большой обзор «Конфигурации в проективной геометрии» [2]. Впервые определение геометрической конфигурации дал К.Т. Рейе (Karl Theodor Reye, 1837–1919) в своих лекциях по проективной геометрии, которую он называл геометрией положения, в своих статьях и книгах. В статье «Проблема конфигураций» [3] он дал определение плоской симметричной конфигурации n_i и пространственной геометрической конфигурации n_i. Точки, прямые, плоскости конфигурации называются её элементами. В качестве элементов конфигурации могут быть выбраны другие геометрические образы, например, прямые и конические сечения. Тогда отношением, связывающим прямые и конические сечения, может быть касание. Проблему конфигураций Рейе видит в нахождении чисел n и i, для которых существуют конфигурации, и в изучении свойств конфигураций. Заслуга Рейе состоит в том, что он впервые предпринял систематическое изучение конфигураций и обратил всеобщее внимание на этот важный раздел проективной геометрии.

Сформулированную Рейе проблему последовательно решал З. Кантор из Праги (Seligman Kantor, 1857– ок. 1940). Непосредственным построением можно убедиться в том, что параметр n для конфигурации n_3 удовлетворяет неравенству $n \geq 7$. Случаи $n = 7, 8, 9, 10$ подвергались наиболее тщательному изучению. Для $n = 7$ конфигурация 7_3 единственная, в вещественной плоскости она не реализуется. Это так называемая конфигурация Фано, или конечная проективная плоскость порядка 2. В 1881–1882 гг. Кантор З. исследовал конфигурации 9_3 и 10_3. Он доказал, что существует три неизоморфные конфигурации 9_3 и десять неизоморфных конфигураций 10_3. Все три конфигурации 9_3 реализуются в вещественной проективной плоскости. Одна из конфигураций 9_3 есть конфигурация Паппа, важнейшая конфигурация в плоской геометрии. Из десяти конфигураций 10_3 в вещественной плоскости реализуются девять. Одна из конфигураций 10_3 известна как конфигурация Дезарга. Теоремы Паппа и Дезарга, утверждающие универсальную выполнимость конфигураций, соответственно, Паппа и Дезарга, являются важнейшими классификационными теоремами проективных плоскостей. Начиная с 30-х годов XX столетия, исследовались алгебраические эквиваленты для различных конфигураций 9_3 и 10_3. Из отечественных учёных, обратившихся к этой тематике, отметим Аргунова Б.И. [4] и Скорнякова Л.А. [5], [6].

Значительный импульс исследованиям геометрических конфигураций сообщили работы А. Клебша. Использовав теорию функций Римана, Клебш построил общую теорию, исследовал геометрические конфигурации на плоскости сначала в статьях, затем систематически изложил в книге «Лекции по геометрии» [7].

Если конфигурацию задавать таблицей инцидентностей, то группа автоморфизмов конфигурации сохраняет таблицу инцидентностей. Таблица инцидентностей конфигурации 7_3 преобразуется в себя группой порядка 168. Эта группа проста. Группу автоморфизмов конфигурации 8_3 нашёл в 1888 году Шёнфлис. Её порядок равен 48. Порядок группы автоморфизмов конфигурации Паппа равен 108. Порядок группы автоморфизмов конфигурации Дезарга равен 120.

Многочисленные исследования в XIX веке были посвящены трём знаменитым геометрическим конфигурациям: конфигурации Гессе (9 точек перегиба и 12 прямых перегиба, расположенных на плоской кривой третьего порядка), конфигурации 27 прямых, расположенных на гладкой кубической поверхности, конфигурации 28 двойных касательных на плоской кривой четвёртого порядка. Разнообразные связи между перечисленными конфигурациями нашли К.Ф. Гейзер, И. Г. Цейтен, Л. Кремона, К. Сегре, Э. Паскаль, М. Захариас.

Зимой 1920–21 гг. Давид Гильберт прочёл в Гёттингене курс «Наглядная геометрия», один из разделов которого был посвящён конфигурациям. Позднее лекции Гильберта, обработанные его учеником С. Кон-Фоссеном, были изданы отдельной книгой [1]. В 1929 году Ф. Леви в книге «Геометрические конфигурации» [8] подвёл итог развитию геометрических конфигураций в XIX в.

Комбинаторные конфигурации

Комбинаторные задачи в течение долгого времени формулировались на правах головоломок в странах Европы и Азии. Разрозненные комбинаторные задачи относились к свойствам фигурных чисел, числовым квадратам, перестановкам. Идея комбинаторного метода в математике восходит к Лейбницу (1646–1716). Лейбниц возвел искусство комбинаторики в ранг универсального метода исследования. В своем стремлении изобрести универсальный язык Всеобщей науки он предлагал выявить простейшие элементы, создать алфавит языка науки, сформулировать правила комбинирования символов такого алфавита, позволяющие получать из известных истин новые истины.

Выдающийся математик XIX в. Дж. Дж. Сильвестр (James Joseph Sylvester, 1814–1897) также признавал высокую значимость комбинаторного искусства. Исследованию комбинаторных проблем Сильвестр посвятил несколько статей, начиная со статьи 1844 года «Элементарные исследования в анализе комбинаторных агрегатов» [9], в которой он обсудил правила образования различных наборов и систем наборов из элементов данного n-множества. Сильвестр подчёркивал, что решаемые им проблемы относятся к новой математической дисциплине, предметом изучения которой является расположение элементов друг относительно друга. Эта новая наука находится в таком же отношении к количественному комбинаторному анализу, в каком геометрия положения — к метрической, или теория чисел — к вычислительной арифметике. «Положение, комбинация, число представляются мне тремя пересекающимися, но различными сферами мысли, к которым имеют отношение все математические идеи» — пишет

Сильвестр. Раздел чистой математики, изучающий порядок, расположение элементов друг относительно друга, Сильвестр назвал *тактикой*. К этому разделу Сильвестр относил комбинаторный анализ, теорию чисел и теорию групп подстановок. Артур Кэли (Arthur Cayley, 1821–1895) разделял взгляды Сильвестра на тактику. В 1864 году Кэли в статье «О понятиях и границах алгебры» [10] предлагал различать в алгебре два вида операций: тактические и логистические. Тактическая операция связана с расположением множества вещей некоторым образом, логистическая (арифметическая) операция представляет собой вычисление для получения в результате числа. Каждая алгебраическая теорема основывается в конечном счёте на тактических основаниях. Термин «тактический», «тактическая операция», позднее — «тактическая конфигурация» — прижился, особенно в англоязычной среде и используется до сих пор. В Европе чаще использовался термин «комбинаторная конфигурация».

Весьма известными тактическими задачами, привлекавшими внимание многих математиков в XIX веке, были задача Киркмана о 15 школьницах (1850) и комбинаторные задачи Штейнера (1853).

В 1896 году американский математик Елиаким Гастингс Мур (Eliakim Hastings Moore, 1862–1932) в статье «Tactical memoranda» ввёл термин тактическая конфигурация.

Между геометрическими и комбинаторными конфигурациями существуют разнообразные связи: представление геометрической конфигурации в виде схемы (т. е. в виде комбинаторной конфигурации) упрощает поиск группы её автоморфизмов, для комбинаторной конфигурации актуальна проблема реализации в виде геометрических образов.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гильберт Д., Кон-Фоссен С. Наглядная геометрия 3-е изд. — М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит.. 1981.344 с.

2. Steinitz E. Konfigurationen der projectiven Geometrie / Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen. — Leipzig. 1898-1936. Bd. 3. S.481-516.

3. Reye K.T. Das Problem der Configurationen // Acta Mathematica. 1882. S. 92-96.

4. Аргунов Б.И. Конфигурационные постулаты и их алгебраические эквиваленты // Математический сборник. 1950. Т. 26 (68), № 3. С. 425 — 456.

5. Скорняков Л.А. Проективные плоскости // Успехи математических наук. 1951. Т. 6. Вып. 6 (46). С. 112-154.

6. Михалев А.В., Артамонов В.А. Слово о Л.А. Скорнякове — человеке, учёном и учителе (воспоминания соратников и учеников) // Чебышевский сборник. 2014. Т. 15. Вып. 2. С. 143 — 147.

7. Clebsch A., Lindemann F. Vorlesungen über Geometrie — New York, London: Johnson. 1968. Bd. I-2.

8. Levi F. Geometrische Konfigurationen mit einer Einführung in die kombinatorische Flächentopologie. — Leipzig: Hirzel. 1929. 310 S.

9. Sylvester J.J. Elementary researches in the analysis of combinatorial aggregation // The London, Edinburgh, and Dublin philosophical magazine and journal of science. 1844. V. 24. P. 285 — 296.

10. Cayley A. On the notion and boundaries of algebra // Quarterly Journal of pure and applied mathematics. 1864.V. 6. P. 382 — 384.

УДК 51.(09)

Из истории метода неподвижной точки

Е. М. Богатов Россия, г. Старый Оскол, Старооскольский технологический институт (филиал) Национального исследовательского технологического университета «МИСИС»
embogatov@inbox.ru

From the history of fixed point method

E. M. Bogatov Russia, Stary Oskol, Stary Oskol Technological Institute of National Research University of Science and Technology «MISIS»
embogatov@inbox.ru

Данная работа является продолжением исследований, проведённых автором в [1], поэтому мы ограничимся здесь, в основном, изложением результатов, относящихся к бесконечномерному случаю и не вошедших в упомянутую работу.

1930-1940-е гг. явились периодом бурного развития теории банаховых пространств. При этом значительная часть общих предложений данной теории явилась обобщениями различных утверждений n-мерной евклидовой геометрии. Одним из таких утверждений была теорема Г. Минковского о том, что *если некоторое линейное многообразие не содержит внутренних точек выпуклого тела, то существует гиперплоскость, содержащая в себе это линейное многообразие, по одну сторону от которой расположено данное выпуклое тело.* В исследованиях С. Мазура 1933 г. указанная теорема была распространена на бесконечномерные пространства. Развивая результаты Мазура о слабой замкнутости выпуклых замкнутых множеств и о компактности выпуклой оболочки компактных множеств в банаховых пространствах, М.Г. Крейн и В.Л. Шмульян доказали следующую фундаментальную[1] теорему (1940), [2, с. 579]:

Если S – слабо компактное в E множество, то его слабое замыкание слабо компактно и слабо замкнуто, а выпуклая оболочка S слабо компактна (теорема Крейна-Шмульяна).

В основу её доказательства была положена теория *регулярно выпуклых множеств*, построенная авторами по примеру теории Банаха регулярно замкнутых линейных подпространств сопряжённого пространства E^*.

Теорема Крейна-Шмульяна позволила получить обобщения следующей теоремы Шаудера[2] о неподвижной точке (1930) [3, с. 176-177, Satz III]:

Пусть E – сепарабельное банахово пространство; $S \subset E$ – выпуклое, слабо компактное и слабо замкнутое множество. Если слабо непрерывный оператор F преобразует множество S в свою часть, то у него существует неподвижная точка x_0 ($Fx_0 = x_0$).

Эти обобщения были сформулированы в виде двух теорем для операторов, действующих в пространстве E и E^* [2, с.581], одну из которых мы приводим ниже.

Теорема 1. *Пусть $S \subset E$ – выпуклое замкнутое множество. Если слабо непрерывный оператор $F(x)$, определённый на S, преобразует его в сепарабельную и слабо компактную часть S, то у него существует неподвижная точка x_0 ($Fx_0 = x_0$).*

В 1910 г. Л. Брауэр ввёл понятие *степени отображения* - $degf$ для конечномерного случая, что дало возможность доказать соотвествующую теорему о неподвижной точке [1, с.122]. Это понятие имело геометрическую природу: $degf$ равна "числу окутываний" поверхности

[1]В настоящее время она входит в большинство курсов по геометрии банаховых пространств.
[2]Эта теорема явилась обобщением теоремы Шаудера о неподвижной точке, доказанной в 1927 г. [4, с. 138].

$S \subset R^n$ её образом $f(S)$. Перенесение понятия $degf$ на бесконечномерный случай потребовало значительных усилий. Почва для этого была подготовлена только через 25 лет, когда теория операторов (в т.ч. нелинейных) вышла на нужный уровень развития. В определённом смыле итог был подведён в монографии С. Банаха "Теории линейных операций" в 1932 г.

В работах Ю. Шаудера 1927-1932 гг., посвящённых методу неподвижной точки (МНТ) и его применению, на первый план вышли вполне непрерывные операторы [4, с. 135-136]. Поскольку такие операторы хорошо приближаются конечномерными, их удалось использовать для обобщения брауэровского понятия степени отображения на бесконечномерные пространства и дальнейшего развития МНТ (Ж. Лере, Ю. Шаудер, 1934) [5].

Более наглядный характер имела интерпретация степени отображения Лере-Шаудера $Deg\ \Phi$, данная немецким математиком Э. Роте в 1938 г. Он переформулировал понятие $Deg\ \Phi$ в терминах так называемого *порядка* Γ векторного поля Φ , заданного на сфере S^∞ банахова пространства E, через вращение [3] γ сужения указанного поля на $S^n = S^\infty \bigcap E^n$ (см. ниже) [6, с. 183]:

$$\Gamma(\Phi, S^\infty, z) \stackrel{def}{=} \gamma(\Phi_n, S^n, z), \tag{1}$$

где $\Phi f = Af + f$, A - вполне непрерывный оператор; $\Phi_n = \Phi|_{S^n}$; E^n - конечномерное подпространство E, содержащее точку z.

Как показал Роте, левая часть (1) равна локальной степени отображения Лере-Шаудера $Deg(\Phi, B^\infty, z)$, где B^∞ - шар пространства E с границей S^∞. Данное построение дало Роте возможность перейти от теорем существования решений уравнения вида $Af = f$, для функций f, заданных на шаре B^∞, к более наглядным теоремам существования нулевого вектора поля, образованного «вполне непрерывным сдвигом» Φ, применяемым к функциям f, заданным на сфере S^∞ [6, с. 193-195].

Геометрический подход Роте был продолжен в начале 1950-х гг. М.А. Красносельским. Он рассматривал векторные поля, заданные на границе связных ограниченных областей $U (U \subset E)$, имеющие вид $\Phi = I - A$, где A - вполне непрерывный оператор, I – тождественный оператор. В отличие от Роте, Красносельский использовал *нелокальную* степень отображения Φ для области U с границей L [7, с. 176]

$$Deg(\Phi, U) \stackrel{def}{=} \gamma(\Phi, L) \tag{2}$$

что позволило ему вывести ряд полезных свойств вполне непрерывных векторных полей и доказать нелокальные теоремы существования для уравнений вида $\varphi = \lambda A \varphi + f$.

Для корректного определения правой части формулы (2) по алгоритму Лере-Шаудера (см.[1, с.124]) Красносельский положил вращение *(n+1)*-мерного векторного поля γ, заданного на n -мерном замкнутом полиэдре P, равным степени отображения $\Psi : P \to S^n$, где $\Psi x = \Phi(x) \backslash (\|\Phi x\|), \quad x \in P$. Обоснование формулы (2) привело Красносельского к разработке оригинальной техники продолжения вполне непрерывного оператора, заданного на L, на всю область U.

Красносельский показал, что *для существования неподвижной точки вполне непрерывного поля* Φ *внутри области U банахова пространства E достаточно, чтобы вращение этого поля на границе U было отлично от нуля* [8, с. 83]. В связи с этим большой интерес представляют признаки отличия от нуля вращения поля Φ. Красносельский вывел эти приизнаки, опираясь на утверждение о том, что вращения гомотопных полей одинаковы.

Другой подход, позволяющий доказывать теоремы о неподвижной точке, основан на теореме Борсука-Улама [9, с. 178] (приводится в упрощённой форме):

[3] Первоначально Брауэр также рассматривал возможность введения понятия $degf$ посредством вращения векторного поля, о чём написано в его учебнике *Potentiaaltheorie en Vectoranalyse*.

Теорема 2. *Пусть $f : S^n \to \mathbf{R}^n$ - нечётное отображение. Тогда $f(x) = 0$ для некоторой точки $x \in S^n$.*

Эта теорема была доказана Борсуком в 1933 г. с помощью теории ретрактов и оказалась следствием теоремы о покрытии сферы, доказанной в 1930 г. Л.А. Люстерником и Л.Г. Шнирельманом [10, с. 30]. Обобщив теорему Борсука-Улама на вполне непрерывные векторные поля в бесконечномерных пространствах, Красносельский получил новый принцип неподвижной точки [7, с. 182]:

Теорема 3. *Пусть A – вполне непрерывный оператор, заданный на замкнутом шаре B банахова пространства E, границу которого обозначим через S. Если для каждой точки φ сферы S векторы $A\varphi - \varphi$ и $A(-\varphi) + \varphi$ направлены неодинаково, тогда вращение поля $\Phi = I - A$ нечётно и в шаре B найдётся точка $\bar{\varphi}$, такая, что $A\bar{\varphi} = \bar{\varphi}$.*

Опираясь на теорему о существовании изолированной неподвижной точки гладкого векторного поля $\Phi = I - A$, доказанной в [5], Красносельский доказал также теорему существования и *единственности* неподвижной точки x_0 вполне непрерывного дифференцируемого векторного поля Φ, возмущённого величиной εF_1 (поля вида $\Phi_\varepsilon = \Phi - \varepsilon F_1$), где F_1 - гладкий в окрестности x_0 вполне непрерывный оператор; $0 < \varepsilon \le \varepsilon_0$.

Две последних теоремы нашли своё применение в доказательстве разрешимости уравнения Гаммерштейна при различных ограничениях на ядро [8, с. 82].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Богатов Е.М. Об истории метода неподвижной точки и вкладе отечественных математиков // В сб. Годичная научная конференция, посвящённая 85-летию ИИЕТ РАН (2017).- М.: Янус-К, 2017. с. 121-125.

2. Krein M. G. and. Šmulian V. L. On regularly convex sets in the space conjugate to a Banach space // Annals of Mathematics. 1940. Vol. 41 . P. 556–583.

3. Schauder J. Der Fixpunktsatz in Funktionalräumen // Studia Mathematica. 2. 1930. S. 171–180.

4. Bogatov E . M. Key moments of the mutual influence of the Polish and Soviet schools of nonlinear functional analysis in the 1920's-1950's // Antiquitates Mathematicae. 2017. vol.11 (1). P. 131-156.

5. Leray J., Schauder J. Topologie et équations fonctionnelles // Annales scientifiques de l' École normale supèrieure. 1934. Vol. 61. P. 45-73.

6. Rothe E. Zur Theorie der topologischen Ordnung und der Vektorfelder in Banachschen Räumen // Compositio Mathematica. 1938. Vol. 5. S. 177-197.

7. Красносельский М. А. К теории вполне непрерывных векторных полей // Украинский математический журнал. 1951. Т. III. № 2. С. 174-183.

8. Красносельский М. А. Некоторые задачи нелинейного анализа // Успехи математических наук. 1954, Том 9:3 (61). С. 57–114.

9. Borsuk K. Drei Sätze Über die n-dimensionale euklidische Sphäre // Fundamenta Mathematicae. 1933. Vol. 20.1. P. 177-190.

10. Люстерник Л. А., Шнирельман Л. Г. Топологические методы в вариационных задачах. М.: Исследовательский институт математики и механики при 1-м МГУ. – 1930. 68 с.

УДК 377.1

Математическое образование на рабфаках Ленинграда в 1920-х годах

П. В. Великоруссов Россия, г. Иркутск, Иркутский национальный исследовательский технический университет
p.velikorussov@gmail.com

Mathematical education at Leningrad's workers' faculties in the 1920s

P. V. Velikorussov Russia, Irkutsk, Irkutsk National Research Technical University
p.velikorussov@gmail.com

После революции в стране наблюдалась острая нехватка инженеров, техников, строителей, организаторов производства. Необходимы были срочные меры для воспитания необходимых кадров. Одним из способов решения этой проблемы было создание в стране так называемых рабочих факультетов. Собственно, при этом преследовались две цели: первая — подготовить за два – три года рабочих и крестьян к поступлению в высшие учебные заведения; вторая — обеспечить «слияние свежей волны» пролетарских студентов с выпускниками средних учебных заведений «былой эпохи».

В Петрограде первые Рабочие факультеты были открыты: при Электротехническом институте — в мае 1919 года, при Технологическом институте — в сентябре 1919 года, при Университете — в ноябре 1919 года, при Политехническом институте летом 1920 года.

В 1920 г. был создан «Главный комитет по профессионально-техническому образованию» при Наркомпросе, в ведении которого находились высшие Учебные заведения. Председателем комитета был назначен народный комиссар по просвещению — А.А.Луначарский. В декларации предлагалось широко открыть двери институтов «для наиболее подготовленных пролетариев», причем подчеркивалось, что «рабочие факультеты могут оказать помощь для самых высших технических учебных заведений».

В Петроградском институте инженеров путей сообщения (впоследствии Ленинградский институт инженеров железнодорожного транспорта) создание рабфака затянулась, хотя вопрос об открытии соответствующего факультета обсуждался еще в начале 1920 года. В мае 1921 года Петропрофобр официально довел до сведения института, что с осени должен быть открыт рабочий факультет на 250 мест [1]. Занятия на факультете начались в декабре 1921 года. В списке было 237 студентов. Относительно классового состава первых студентов рабфака имеются следующие данные: 130 рабочих, 34 «земледельца», 21 служащий. В числе первых студентов было 8 женщин. Первый состав преподавателей был почти целиком из студентов старших курсов. Вступительных экзаменов не было, принимали тех, кто умел считать и писать. Но это положение быстро менялось.

11 декабря 1925 г. Совнаркомом было вынесено постановление о повышении квалификации оканчивающих вузы. В том числе были намечены разработка и проведение системы мер, обеспечивающих более высокую подготовку лиц, оканчивающих рабфаки. Результат был поразительным. Почти неграмотные при поступлении на рабфак люди, в тяжелое послереволюционное время, через три года обучения имели добротную математическую подготовку, которая вполне может соперничать с современной.

В качестве примера приведем две задачи с итогового задания второго курса рабочего факультета Ленинградского Политехнического института за 1926 – 27 академический год [2].

1. Показать, что функция

$$\frac{x^2 + 2x + 7}{2x + 3}$$

при любых вещественных значениях аргумента не может иметь значений, лежащих между -3 и 2.
2. Прямоугольник вращается около оси, которая проходит через его вершину параллельно его диагонали. Определить поверхность тела вращения, если площадь прямоугольника равна S, а диагональ его образует угол α.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Личный архив М. И. Воронина. Материалы по написанию Истории Ленинградского Ордена Ленина института

2. Рабочий факультет Ленинградского Политехнического Института им. М. И. Калинина. II курс. 1926–27 акад.год. // Рукопись. Личный архив Е.А.Благовещенской.

УДК 929

Математик И. С. Янушевский

М. М. Воронина Россия, г. Санкт-Петербург, Петербургский государственный университет путей сообщения Императора Александра I
voronina.pgups@gmail.com

Mathematician I. Yanushevsky

M. M. Voronina Russia, Sankt-Petersburg, Emperor Alexander I St. Petersburg State Transport University
voronina.pgups@gmail.com

Строго говоря, Игнатий Семенович Янушевский (1804–1871) по образованию не был математиком, но всю жизнь занимался преподаванием математики и решением различных проблем в области математических наук. Именно Янушевский записал и, тем самым, сохранил для потомков труд М. В. Остроградского «Курс небесной механики».

И. Янушевский родился в Виленской губернии. В настоящее время большая часть этой территории находится в составе Белоруссии, остальная — в составе Литвы. В 1828 г. он окончил Институт Корпуса инженеров путей сообщения в Петербурге и как один из лучших учащихся был оставлен в нем репетитором для преподавания математических наук. В это время из-за границы вернулся М.В.Остроградский. В течение зимы 1829–30 года Остроградский прочел в Петербурге цикл публичных лекций по механике, в которых он обобщал методы, положенные в основу аналитической механики Лагранжа. Несмотря на большую стоимость курса (абонемент стоил сто рублей, интересно отметить, что в 1830-е годы мука пшеничная стоила до 2 рублей за пуд, воз сена — до 8 рублей, сотня яиц — 3,5 рубля), лекции посещало 30 слушателей. Институт путей сообщения приобрел пять абонементов на лекции Остроградского, один из которых был предоставлен И. С. Янушевскому. По окончании курса Янушевский написал рапорт директору института П. Базену: «Заметив, что большая часть того, что объяснял г. Остроградский не находится ни в одном из доселе изданных по сей части сочинений, я предложил себе собрать его лекции... Остроградский одобрил сие собрание и изъявил свое желание на напечатание оной... Курс Остроградского по новости и общности идей ...будет уважаем не только в России, но и за границей» [1].

Благодаря И. С. Янушевскому книга лекций Остроградского была опубликована в 1831 г. под названием «Курс небесной механики» на французском языке [2].

В разные годы Янушевский одновременно с институтом путей сообщения преподавал математику, астрономию, аналитическую геометрию, статистику, «умозрительную» механику, физику в различных учебных заведениях Петербурга: I Кадетском корпусе, Морском Кадетском корпусе, училище гражданских инженеров.

В июле 1846 г. из института путей сообщения уволился В. Я. Буняковский. На его место был назначен и утвержден профессором высшей математики помощник М. В. Остроградского инженер-подполковник И. С. Янушевский. Он стал преподавать дифференциальное и интегральное исчисление и физику. Через несколько лет он стал ординарным профессором по кафедре математики [3]. И. С.Янушевского высоко ценили в институте путей сообщения как математика и педагога. Он был членом Совета (Конференции) института.

В 1871 г. И.С.Янушевский уволился по болезни. Интересно, что «заместителями его по кафедре высшей математики явились доцент С.Петербургского университета, магистр Николай Сергеевич Будаев и кандидат мат.наук К.А.Поссе» [4].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. ЦГИА СПб. Ф. 381. Оп. 13. Д. 323. 1830. Л.7.

2. Ostrogradski M. Cours de mécanique céleste, rédigé par J. Janouschevski. St.-Pétersbourg, de l'imprimerie de l'académie impériale des sciences. 1831.

3. РГИА. Ф. 200. Оп. 1. Д. 8444. 1868. Л.3.

4. Ларионов А.М. История Института инженеров путей сообщения Императора Александра I за первое столетие его существования. С.Петербург. 1910. Типография Ю.Н.Эрлих. Стр. 159.

УДК 517.5

История открытия и развития особых состояний металлических систем: сверхпластичности, повышенной пластичности, состояний предпревращения[1]

А. Е. Гвоздев Россия, г. Тула, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого
А. Н. Сергеев Россия, г. Тула, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого
А. Н. Чуканов Россия, г. Тула, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого
С. Н. Кутепов Россия, г. Тула, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого
Н.Н. Добровольский Россия, г. Тула, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого
Д. В. Малий Россия, г. Тула, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого)
gwozdew.alexandr2013@yandex.ru, ansergueev@mail.ru, alexchukanov@yandex.ru, kutepov.sergei@mail.ru, nikolai.dobrovolsky@gmail.com, maliydmitriy@yandex.ru

The history of the discovery and development of extraordinary states of metallic systems: superplasticity, high plasticity, conditions of predpravleniya

A. E. Gvozdev Russia, Tula, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University
A. N. Sergeev Russia, Tula, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University
A. N. Chukanov Russia, Tula, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University
S. N. Kutepov Russia, Tula, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University
N. N. Dobrovolsky Russia, Tula, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University
D. V. Maliy Russia, Tula, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University
gwozdew.alexandr2013@yandex.ru, ansergueev@mail.ru, alexchukanov@yandex.ru, kutepov.sergei@mail.ru, nikolai.dobrovolsky@gmail.com, maliydmitriy@yandex.ru

Первые сведения о необычно высотах деформационных свойствах металлических сплавов вблизи температур фазовых превращений в твердом состоянии появились более семидесяти лет назад в работах В. Розенгейна, А. Совьера и Ф.Харгривса. В 1934 году Клод Пирсон, исследуя свойства некоторых сплавов систем Sn–РЬ и Bi–Sn, обнаружил, что удлинение образцов из этих сплавов при растяжении может достигать 2000 %. Однако в течение многих лет эти результаты рассматривались как лабораторный фокус.

Исследования причин резкого роста пластичности сплавов и одновременного снижения их сопротивления деформации в определенных условиях формоизменения начались лишь в 1945 г. после обнаружения и подробного описания советскими учеными А.Л. Бочваром и З.Л Свидерской резкого снижения характеристик горячей твердости сплавов системы Zn–A1 при приближении к эвтектоидной концентрации. Проявление сплавом из двух или более компонентов пластичности, гораздо большей, чем имеет каждый из его компонентов было названо А.А. Бочваром эффектом сверхпластичности. В настоящее время это понятие в науке и технике стало международным.

[1]Работа выполнена по федеральной целевой программе «Исследование и разработки по приоритетным направлениям развития научно-технологического комплекса России на 2014-2020 годы» (уникальный идентификатор проекта RFMEF 157717X0271).

Позже детально исследовали эффект сверхпластичности советские и зарубежные ученые – А.А. Пресняков, М.Х. Шоршоров, А.С. Тихонов, К.П. Гуров, А.П. Гуляев, О.М. Охрименко, О.М. Смирнов, И.И. Новиков, О.А. Кайбышев, Р.З. Валиев, А.С. Базык, В.А. Лихачёв, М.В. Грабский, Ж.П. Пуарье, В.А. Бэкофен, Р.Н. Джонсон, Н. Шелосский, Р.С. Джифкинс, Т.Г. Лангдон, К.Г. Гамильтон, Н.Е. Пейтон, Дж.А. Вильямсон, О.Д. Шерби и др.

С середины 60-х годов, когда было найдено промышленное применение эффекту сверхпластичности, в научных кругах резко возрос интерес к этому явлению. В отечественной и зарубежной печати появился ряд фундаментальных работ. Были разработаны и внедрены соответствующие технологии получения деталей из некоторых металлических материалов.

Однако, по утверждению академика А.А. Бочвара, использование сверхпластичности наиболее интересно при получении деталей из малопластичных и труднодеформируемых металлических материалов. Именно в этом достигается значительный экономический эффект за счет повышения коэффициента использования металла и снижения энергоемкости технологических процессов. К числу такта материалов относятся высокопрочные титановые сплавы, дисперсионно-упрочненные жаропрочные никелевые сплавы и инструментальные быстрорежущие стали, имеющие пониженную пластичность в горячем состоянии, чем объясняется ограниченные возможности технологических заготовок быстрорежущего инструмента на основе горячего, полугорячего и холодного деформирования.

До сих пор основным способом изготовления быстрорежущего инструмента является обработка резанием – процесс трудоемкий и дорогостоящий. При этом средний коэффициент использования быстрорежущей стали не превышает 50 %. В связи с большим дефицитом легирующих добавок, основой которых являются вольфрам, молибден и ванадий, производство и потребление быстрорежущих сталей строго лимитировано.

Получение быстрорежущих сталей с повышенными эксплуатационными характеристиками методами порошковой металлургии частично решает проблему их экономии. Однако стоимость полученных из порошка прутков в два-три раза выше стоимости горячекатаного проката.

Использование эффекта сверхпластичности сталей и сплавов позволяет значительно расширить номенклатуру и технологические возможности получения заготовок быстрорежущего инструмента методами объемного пластического деформирования.

Экономия быстрорежущих сталей обеспечивается получением заготовок инструмента сложной формы, близких по размерам к готовым деталям; при этом повышаются эксплуатационные характеристики и стойкость инструмента, снижаются энергоемкость, трудоемкость и себестоимость производства.

Проф. М.Х. Шоршоровым было установлено, что одним из основных условий проявления эффекта сверхпластичности металлических сплавов и соединений является условие равенства скоростей процессов деформационного упрочнения и процессов возврата.

Проф. Э.С. Макаров, исследуя процессы пластичности дилатирующих сред, отмечает также, что развитие техники выдвигает все более сложные задачи, эффективное решение которых связано, как с совершенствованием расчетных методов, так и с уточнением математических моделей изучаемых процессов. При изучении процессов деформирования материалов в различных физико-механических и механических полях установлено, что сопряженные поля различной природы имеют определяющее значение для решения проблемы получения высококачественных керамических деталей с повышенными эксплуатационными свойствами в состоянии сверхпластичности.

Результаты могут быть использованы в аддитивных технологиях, обработке материалов и в сопряженных тепловых, механических полях и в малоотходных, ресурсосберегающих технологиях обработки порошковых металлических систем в различных условиях и состояниях [1-15].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Gvozdev A.E. Alternative technology of thermomechanical treatment of high-speed tungsten-molybdenum steel R6M5 / A.E. Gvozded // Metal Science and Heat Treatment. 2005. T. 47. № 11-12. P. 556-559.

2. Механические свойства конструкционных и инструментальных сталей в состоянии предпревращения при термомеханическом воздействии / А.Е. Гвоздев, А.Г. Колмаков, О.В. Кузовлева, Н.Н. Сергеев, И.В. Тихонова // Деформация и разрушение материалов. 2013. № 11. С. 39-42.

3. Условия проявления нестабильности цементита при термоциклировании углеродистых сталей / А.Е. Гвоздев, А.Г. Колмаков, А.В. Маляров, Н.Н. Сергеев, И.В. Тихонова, М.Е. Пруцков // Материаловедение. 2014. № 10. С. 31-36.

4. Grain size effect of austenite on the kinetics of pearlite transformation in low-and medium-carbon low-alloy steels / A.E. Gvozdev, I.V. Minaev, N.N. Sergeev, A.G. Kolmakov, D.A. Provotorov, I.V. Tikhonova // Inorganic Materials: Applied Research. 2015. T. 6. № 1. P. 41-44.

5. Features of softening processes of aluminum, copper, and their alloys under hot deformation // A.E. Gvozdev, D.N. Bogolyubova, N.N. Sergeev, A.G. Kolmakov, D.A. Provotorov, I.V. Tikhonova // Inorganic Materials: Applied Research. 2015. T. 6. № 1. P. 32-40.

6. Multiparametric optimization of laser cutting of steel sheets / A.E. Gvozdev, I.V. Golyshev, I.V. Minayev, A.N. Sergeyev, N.N. Sergeyev, I.V. Tikhonova, D.M. Khonelidze, A.G. Kolmakov // Inorganic Materials: Applied Research. 2015. T. 6. № 4. P. 305 – 310.

7. Гвоздев А.Е., Журавлев Г.М., Колмаков А.Г. Формирование механических свойств углеродистых сталей в процессах вытяжки с утонением // Технология металлов. 2015. № 11. С. 17 – 29.

8. Постановка задачи расчета деформационной повреждаемости металлов и сплавов / Г.М. Журавлев, А.Е. Гвоздев, Н.Н. Сергеев, В.И. Золотухин, Д.А. Провоторов // Производство проката. 2015. № 10. С. 18 – 26.

9. Многопараметрическая оптимизация параметров лазерной резки стальных листов / А.Е. Гвоздев, И.В. Голышев, И.В. Минаев, А.Н. Сергеев, Н.Н. Сергеев, И.В. Тихонова, Д.М. Хонелидзе, А.Г. Колмаков // Материаловедение. 2015. № 2. С. 31 – 36.

10. Maximum plastic strengthening in tool steels / G.M. Zhuravlev, A.E. Gvozdev, A.E. Cheglov, N.N. Sergeev, O.M. Gubanov // Steel in Translation. 2017. Vol. 47. № 6. P. 399 – 411.

11. Применение теории пластичности дилатирующих сред к процессам уплотнения порошков металлических систем / Э.С. Макаров, А.Е. Гвоздев, Г.М. Журавлев, А.Н. Сергеев, И.В. Минаев, А.Д. Бреки, А.Д. Малий//Чебышевский сборник. 2017. Т.18. Вып. 4. С. 226-242.

12. Гвоздев А.Е., Журавлев Г.М., Сапожников С.В. К теоретическому анализу процесса компактирования порошковых материалов прессованием//Известия Тульского государственного университета. Науки о земле. 2017. Вып. 4. С. 273-283.

13. Триботехнические свойства композиционного материала «Алюминий-углеродные нановолокна» при трении по сталям 12Х1 и ШХ15. Бреки А.Д., Кольцов Т.С., Скворцов А.Н., Толочко О.В., Александров С.Е., Колмаков А.Г., Лисенков А.А., Гвоздев А.Е., Фадин Ю.А., Провоторов Д.А. Материаловедение. 2017. № 1. С. 37-42.

14. On friction of metallic materials with consideration for superplasticity phenomenon / A.D. Breki, A.E. Gvozdev, A.G. Kolmakov, N.E. Starikov, D.A. Provotorov, N.N. Sergeyev, D.M. Khonelidze // Inorganic Materials: Applied Research. 2017. T. 8. № 1. C. 126-129.

15. Maximum plastic strengthening in tool steels / G.M. Zhuravlev, A.E. Gvozdev, A.E. Cheglov, N.N. Sergeev, O.M. Gubanov // Steel in Translation. 2017. Vol. 47. № 6. P. 399-411.

УДК 51(091)

Н. Н. Лузин и структура числового континуума

С. С. Демидов Россия, г. Москва, Институт истории естествознания и техники им. С. И. Вавилова РАН, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
serd42@mail.ru

N.N. Luzin and the structure of a numerical continuum

S. S. Demidov Russia, Moscow, S. I. Vavilov Institute for the History of Science and Technology of the Russian Academy of Sciences, Moscow State University
serd42@mail.ru

1. Дискуссия об аксиоме выбора. В 1904 году на Международном конгрессе математиков в Гейдельберге Д. Кёниг выступил с докладом, в котором, в частности, утверждал, что континуум нельзя вполне упорядочить. В том же году Э. Цермело предложил доказательство того, что всякое множество (следовательно, и континуум) может быть вполне упорядочено. Кого же из двух почтенных математиков следовало слушать? Пытаясь осмыслить возникшую ситуацию, Ж. Адамар на страницах журнала «Revue générale des sciences pure et appliquées» выступил со статьей, в которой поставил под сомнение правомерность использования Цермело в этом доказательстве аксиомы выбора. Суть сомнения Адамар сводилась к неочевидности того, что операцию выбора элементов из каждого множества бесконечного их семейства возможно подчинить какому-либо закону. Завязалась дискуссия, содержание которой доносят до нас знаменитые «пять писем о теории множеств», помещённые в 33 томе Бюллетеня Французского математического общества, которыми обменялись Адамар, Э. Борель, Р. Бэр и А. Лебег. Борель полагал важным точно отделить математические сущности, которые математик может рассматривать как существующие, от тех, которые лишь кажутся таковыми, но которым ничего «реально» не соответствует. В отношении аксиомы выбора Борель сомневался даже в ее применимости к случаю, когда множества, из которых производится выбор, являются подмножествами континуума.

Об этой дискуссии Н. Н. Лузин узнал еще в 1906 г. в период своей первой поездки во Францию. Занявшись впоследствии теорией функций действительного переменного и приступив к работе над своей магистерской диссертацией, Лузин много размышлял над вопросами, поднятыми в дискуссии и встал на позицию безусловной поддержки взглядов Бореля. Здесь его взгляды полностью разошлись с воззрениями Флоренского.

2. Флоренский и проблема бесконечности. Флоренского в теории множеств привлекал прежде всего богословский аспект теоретико-множественных построений Г. Кантора. Так канторовская идея трансфинитных порядковых чисел для Флоренского это, прежде всего, ключ к решению проблемы небесной иерархии, представление о которой в христианской богословской традиции восходит к сочинению «О небесной иерархии» Дионисия Ареопагита. Именно это решение старой богословской проблемы стало для Флоренского решающим для

приятия им канторовской теории множеств. Выявление конструкций иерархического строения мира, и чувственного и умопостигаемого, а также связей этих миров, механизмов прохождения Божественного света через уровни небесной иерархии к человеку – эти и связанные с ними темы стали предметами постоянных размышлений Флоренского (в частности, в построениях в области теории познания) на протяжении всей его творческой жизни.

Взгляды Лузина на актуальную бесконечность, формировавшиеся по ходу его исследований по теории множеств и функций вошли в полное противоречие с позицией по этому вопросу Кантора (и тем более Флоренского). Вот что писал он Флоренскому в августе 1915 года: «Вы (богословы – добавим мы) ищете бестрепетного сердца непреложной Истины, оснований всему, смело шагаете через все, сметая теории, как карточные домики, а я … я не жду последних «как» и «почему», и, боясь бесконечного, я сторонюсь его, я не верю в него.

Нет актуальной бесконечности! а когда мы усиливаемся говорить о ней, мы фактически всегда говорим о конечном и о том, что за n есть $n + 1$ … вот и всё!». А за несколько дней до своей защиты, которая состоялась в конце апреля 1916 года, он так писал Флоренскому: «Кусать меня собираются основательно, но я не сдамся, и сам буду откусываться. Предвижу, что будет открыт огонь за “принцип произвольного выбора”».

3. Дальнейшее развитие взглядов Лузина на актуальную бесконечность. Актуальная бесконечность для Лузина, если и существует, то вне математики. До каких пределов может заходить математик в своих построениях, ведомых ощущением идеи актуальной бесконечности – предмет постоянных его размышлений. Впоследствии он заметит: «… мы видим, что необходимо ограничить нашу способность идеализации, и, по-видимому, эти границы не могут быть поставлены интуицией».

С первым, насколько нам известно, развёрнутым изложением своей позиции по этому вопросу Лузин выступил в 1927 году на Первом Всероссийском съезде математиков. Наиболее полное (из доступных нам сегодня) выражение его взглядов содержат его «Лекции об аналитических множествах и их приложениях», опубликованных в Париже в 1930 году в серии Бореля монографий по теории функций. В этих лекциях звучит та же мысль, что и в его письме Флоренскому 1915 года: «То, что мы называем *актуальной бесконечностью, есть ничто иное, как конечное, но фиксированное и очень большое*».

Изыскания по теории аналитических множеств Лузина и его школы, с одной стороны, показали естественность для математики выход из области борелевских в область аналитических и далее проективных множеств. Такое расширение выглядело столь же естественным, как и выход за пределы множества рациональных чисел в числовой континуум, де факто совершенный пифагорейцами. С другой стороны, эти же изыскания показали, что вводимые на этом пути в математику сущности (например, те или иные проективные множества) зачастую не выстраиваются эффективно, но выглядят, по существу, созданиями виртуальными. Отсутствие эффективных процедур, позволяющих их индивидуальное определение, с точки зрения борелевского эффективизма (такое название получила выдвинутая Борелем программа, активным сторонником которой выступал Лузин) не давало им в математике прав гражданства. Они оказывались за её пределами.

Оборачивая ход приведённых рассуждений и оставаясь в той же логике, возможным оказывается и сомнение в правомерности наших представлений о числовом континууме. Все ли действительные числа, его составляющие, реальны, то есть эффективно выстраиваемы? Ведь множество эффективно конструируемых действительных чисел счётно! В этой логике, все прочие образования – паразитические, подлежащие из математики удалению, что, как полагал Борель, лишь упростит методы математического анализа. Вот как написал об этом в «Заключении» к своим «Лекциям» сам Лузин: «Но если допускать *все* множества, измеримые B, то необходимо допустить проективные множества … Следовательно, если желать ограничивать математический анализ лишь изучением вполне законченных объектов и вполне определённых взаимоотношений, то нужно, с точки зрения эмпиристов, пожертвовать некоторыми множествами, измеримыми B, и даже некоторыми иррациональными числами. В конечном итоге, и вопреки возражениям, вполне определимых иррациональных чисел имеется лишь счётное множество, хотя их перенумерование и не может быть осуществлено при помощи *математического* закона. Таким образом, арифметический континуум заведомо содержит неопределимые точки. Эти точки, каждая из которых имеет бесконечное определение, являются *паразитическими* во всяком рассуждении, которое можно сделать эффективно, и таком, что оно устанавливает вполне определенную связь между уже определенными объектами». Таким образом в трудах Лузина и его последователей математика вновь возвращается к проблеме конструкции числового континуума, с которой столкнулись еще пифагорейцы. Как пишет Лузин, «пришло время произвести реформу в наших идеях об арифметическом континууме».

Если канторовский несчетный арифметический континуум в глазах Лузина и его последователей оказывается математически неоправданным, то все же он оказался необходимым самому Кантору и следовавшим ему математикам, если и не как корректная математическая конструкция, то как та область изменения, в которой развивалась их мысль – не важно была ли эта мысль богословская, как это было у Флоренского, или математическая, даже если мысль эта пребывала в головах сугубых эффективистов или конструктивистов.

УДК 51(091)

Историко-математическое наследие В. В. Бобынина в современном математическом образовании

Ю. А. Дробышев Россия, г. Калуга, Калужский филиал федерального государственного образовательного бюджетного учреждения высшего образования «Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации»
И. В. Дробышева Россия, г. Калуга, Калужский филиал федерального государственного образовательного бюджетного учреждения высшего образования «Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации»
drobyshev.yury2011@yandex.ru, drobysheva2010@yandex.ru

Historical and mathematical heritage of V. V. Bobynin in modern mathematical education

Y. A. Drobyshev Russia, Kaluga, Kaluga Branch of Financial University under the Government of the Russian Federation
I. V. Drobysheva Russia, Kaluga, Kaluga Branch of Financial University under the Government of the Russian Federation
drobyshev.yury2011@yandex.ru, drobysheva2010@yandex.ru

В содержание современного математического образования применительно к основной школе в соответствии с новыми стандартами образования введен дополнительный методологический раздел «Математика в историческом развитии». Он предназначен для формирования представлений о математике как части человеческой культуры, для общего развития школьников, для создания культурно-исторической среды обучения.

Введение данного раздела является реализацией идей знаменитого отечественного историка математики Виктора Викторовича Бобынина [5] об использовании элементов истории математики в обучении учащихся, которые он активно пропагандировал на рубеже XIX–XX веков. Основной из них является использование генетического метода, развивающего «в преподавании положения и выводы науки именно таким образом, как они развивались в действительности» [1]. Обратимся к основным положениям методических взглядов ученого с целью использования их в современном математическом образовании.

В докладе «Философское, научное и педагогическое значение истории математики», сделанном на VII Всероссийском съезде естествоиспытателей и врачей, В. В. Бобынин обратил внимание ученых и педагогов на то, что преподавание каждой науки должно идти тем же путем, которым шла она сама и что для правильной и строго научной постановки преподавания необходимо знать фазы развития науки, законы и вытекающие из них практические условия этого развития. Таким образом, история математики, по его мнению, выступает в качестве теоретической основы методики обучения математике, которая «должна начертить искусству преподавания математики подробную программу, а также вместе с философией математики указать ему приемы и методы исполнения этой программы» [1]. Анализируя историю развития геометрии (труды Архимеда и Евклида), он пришел к выводу, что изложение математики на первых порах должно идти с опорой на индуктивный метод, потому, что именно так были открыты многие математические утверждения. Генетический метод в изучении геометрии, по мнению В. В. Бобынина, означает особый путь изучения этого материала, при котором открываются новые истины. Именно такой подход нашел отражение в современных учебниках геометрии.

В. В. Бобынин обращает внимание на то психологическое воздействие, которое оказывает изучение математических творений великих математиков без ознакомления с их предысторией. Это производит на ум человека «поражающее, почти подавляющее действие». Кроме того, это лишает учащегося увидеть труд нескольких поколений математиков и приписывать все результаты одному автору, что приводит к тому, что у обучающихся проявляются такие качества, как «нетерпимость и умственный деспотизм». Он считает, что использование историко-математических знаний способствует воспитанию у обучающихся такого качества как «скромность ума» [1].

В заключительной части доклада В. В. Бобынин указывает, что математика является частью общей истории человеческой культуры, и нельзя составить правильное представление об «истории политической», если не учитывать развитие наук, в том числе и математики, поскольку это развитие оказывало влияние на ход общей истории.

В работе [2] В. В. Бобынин отмечает, что осознание целесообразности обучения является неотъемлемой психологической потребностью детей, а история математики позволяет ответить на вопросы, которые их волнуют: «Зачем мы это учим и для чего нам это нужно?». При этом он считает, что убеждение учащихся о пользе изучения математики должно осуществляться с учетом содержания изучаемых математических предметов и возрастных особенностей учащихся. Так, говоря о разных уровнях школьного образования, ученый отмечает, что в начальной школе необходимо разъяснять учащимся значение математики для практики. В среднем звене — сочетание «развивающего и укрепляющего мышления и умственные силы вообще действия изучения математических наук», с приложением математики к другим наукам. В старших классах необходимо разъяснять самостоятельное значение математики, ее способности к развитию «в самой себе и для себя». Другими словами, старшеклассники должны понимать, «что в деле своего дальнейшего развития математика должна исключительно руководствоваться собственными интересами, не заботясь ни о чем другом, которое все явится само собой».

Реализация этих положений ученого предполагает использование исторического подхода при формировании в сознании учащихся таких закономерностей развития математики, как ее связь с практикой, с развитием других наук и решением внутренних проблем математики. Целью при этом является убеждение учащихся в целесообразности изучения математики, что позволит обеспечить интерес к учебе, активность, успеваемость и прочность полученных знаний.

В докладах [2, 3] сделанных на I и II Всероссийском съезде преподавателей математики, В. В. Бобынин выделяет цели, которые могут достигаться с помощью элементов истории математики: устранение отрицательных взглядов на математику; убеждение учащихся в пользе и значении математики; углубление в достаточной степени понимания обучающимися трудных вопросов курса математики и расширение запаса их знаний; укрепление в их памяти преподанного им содержания. Особое внимание ученый обращает на цели, которые, по его словам, направлены на «вербовку лиц, склонных посвятить свою будущую деятельность математике». К ним он относит развитие сознательного и возможно более глубокого интереса учащихся к математике и ее успехам, а также возбуждение стремлений учащихся к самостоятельной творческой работе в области математики.

Польза, которую могут извлечь учащиеся из введения исторических элементов в преподавание математики, связана и с установлением «перед сознанием учащихся отдельных частей элементарной математики с реальными образами, представляемыми личностями ученых и историческими фактами, и с духовными — в виде идей из области логики и философии» [2].

Отмечая недостаточность времени, отводимого на преподавание математики, В. В. Бобынин делает вывод, что едва ли можно серьезно думать о введении истории математики. «Это изучение должно быть предоставлено самодеятельности учащихся, конечно, под условием контроля, а в случае необходимости также и помощи со стороны преподавателя. Для этого необходимо создание историко-математических хрестоматий, содержащих статьи историко-математического содержания и отрывки произведений древней математической литературы, подобранные с учетом степени умственного развития учащихся». Исходя из того, что на изучение раздела «Математика в историческом развитии» специальных часов не выделяется, предложение ученого о роли самостоятельной работы учащихся с целью познания истории математики остается актуальным и сегодня.

Таким образом, В. В. Бобынин приходит к выводу о значимости для теории и практики обучения математике ее истории, знание которой необходимо как учащимся, так и учителям. При этом он выделил несколько направлений использования элементов истории математики в обучении. При написании учебников необходим обоснованный отбор содержания изучаемых вопросов школьного курса математики и логики изложения, основанный на историческом пути развития математики. Использование элементов истории математики должно быть системным и не сводиться к введению отдельных исторических справок. При обучении учащихся математике необходимо знакомить их с генезисом основных идей, формировать общие способы интеллектуальной деятельности, помнить, что история математики является средством учета индивидуальных особенностей учащихся. Рассмотрение историко-математического материала должно быть направлено на развитие познавательного интереса учащихся к математике, понимание ими ее прикладных возможностей, нравственного воспитания. В силу того, что развитие математики происходило параллельно с развитием различных цивилизаций, то ее использование в обучении необходимо ориентировать как на показ развития научной мысли, так и на эволюцию религиозной и этической мысли. Это позволит формировать представления о математике как части общечеловеческой культуры и раскрывать значимость математики в развитии этих цивилизаций. Реализация межпредметных связей между историей, философией и математикой позволяет лучше усвоить не только эти дисциплины, но и способствует лучшему усвоению истоков возникновения математических идей. Очевидно, что реализация этих направлений возможна только тогда, когда будет налажено эффективное сотрудничество методистов и историков науки.

Таким образом, изучение и развитие творческого наследия В. В. Бобынина позволит лучше понять, каким образом можно решать проблемы, стоящие перед современным математическим образованием.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бобынин В. В. Философское, научное и педагогическое значение истории математики // Физико-математические науки в их настоящем и прошедшем. Т. 1. Отд. оттиск. 1886. – 40 с.
2. Бобынин В. В. Цели, формы и средства введения исторических элементов в курс математики средней школы // Труды I-го Всероссийского съезда преподавателей математики. Т1. – СПб, 1913 – С. 129–140.
3. Бобынин В. В. Об указаниях, получаемых преподаванием математики от ее истории // Доклады, читанные на II Всероссийском съезде преподавателей математики. — М., 1915. – С.54–60.
4. Дробышев Ю. А. Историзмы в обучении математике: эволюция взглядов // Математика. 2012. № 10. С. 4–9.
5. Дробышев Ю. А. В. В. Бобынин // Тульский биографический словарь. – Москва: «Минувшее», 2016. – С. 85–89.

УДК 51(091), 330.4

Генезис математических моделей социо-эколого-экономических систем

Р. А. Жуков Россия, г. Тула, Тульский филиал Финансового университета при Правительстве РФ
pluszh@mail.ru

The genesis of mathematical models of socio-ecological-economic systems

R. A. Zhukov Russia, Tula, Financial University under the Government of the Russian Federation (Tula Branch)
pluszh@mail.ru

Историческое развитие математических моделей социо-эколого-экономических систем (СЭЭС) связано с совершенствованием методов и инструментов описания сложных систем в контексте триады «общество-природа-экономика», начиная с отдельного субъекта экономики и заканчивая государством в целом. В большинстве своем они опираются на разработки, связанные с экономической оценкой состояния и функционирования СЭЭС с учетом их территориального размещения.

Изучение устойчивого развития сложных экономических систем базируется на работах основоположников экономической мысли В. Леонтьева [1], Дж. Стиглица [2], Р. Солоу [3], Дж. Шумпетера [4].

На уровне региона используют модели экономического роста, где главным фактором является внешний спрос (модель экспортной базы), и его наращение определяется мультипликатором Кейнса. Широко применяют модель межотраслевого баланса (МОБ) (модель (затраты – выпуск)), предложенную В. В. Леонтьевым (1936 г.). В рамках модели Леонтьева в настоящее время применяются нелинейные подходы.

Развитием модели Леонтьева стала модель расширяющейся экономики (многопродуктовая линейной модели) Дж. фон Неймана, которая описывает возможность выхода объекта на стационарную траекторию или траекторию сбалансированного роста (1945-1946 гг.) [5].

Широко распространено применение оптимизационных межотраслевых моделей региона, предложенных Л. В. Канторовичем в рамках своей теории оптимального распределения ресурсов (1939 г.) [6].

Часто используют модель Кобба–Дугласа для описания результатов производства экономической системы, которые зависят от труда и капитала (1928 г.) [7].

Встречаются работы с укрупненной моделью функционирования экономики региона (6 блоков), с отдельно выделенными моделями размещения (транспортировка грузов, миграция населения, размещение производства), а также межрегиональными моделями национальной экономики.

Нельзя не отметить циклическую модель Н. Д. Кондратьева (1920-е годы), модель предела экономического и демографического роста группы ученых (Д. Х. Медоуз, Й. Рандерс, Д. Л. Медоуз, В. В. Беренс, 1972 год), модель благосостояния населения (Д. В. Пирс и Р. К. Тернер, начало 1990-х годов), модель загрязнения окружающей среды (А. И. Бородин, начало 2000-х годов).

В последние годы ряд авторов применяют региональные эконометрические модели [8] и используют их для оценки состояния и функционирования СЭЭС ([9], [10]).

В зависимости от своих целей исследователи используют те или иные математические модели социо-эколого-экономических систем.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Леонтьев В. В. Баланс народного хозяйства СССР. Методологический разбор работы ЦСУ // Плановое хозяйство: Ежемесячный журнал. М.: Госплан СССР. 1925. № 12. С. 254-258.

2. Akerlof G., Spence M., Stiglitz J. L'asymetrie au coeur de la nouvelle microeconomie // Problemès econ. P. 2001. № 2734. Pp. 19–24.

3. Solow R. M. A Contribution to the Theory of Economic Growth // The Quarterly Journal of Economics. 1956. Vol. 70. No. 1. Pp. 65-94.

4. Schumpeter J. A. A Theorist's Comment on the Current Business Cycle // Journal of the American Statistical Association. 1935. V. 30 (189). Pp. 167-168.

5. Neumann von J. A model of general economic equilibrium // Rev. Econ. Studies, 1945-1946. Vol. 13. No. 33. Pp. 1–9.

6. Канторович Л. В. Математические методы организации и планирования производства. Л.: Изд-во ЛГУ, 1939. 68 с.

7. Cobb C. W., Douglas P. H. A Theory of Production // American Economic Review. 1928. Vol. 18. Pp. 139–165.

8. Латыпова Н. М., Чертыковцев В. К. Эконометрические модели устойчивости социально-экономических систем. Статистические аспекты исследования. Самара: Самарский государственный архитектурно-строительный университет, 2008. 118 с.

9. Zhukov R. A. Economic Assessment of the Development Level of the Central Federal District Regions of the Russian Federation: Econometric Approach // Statistika. 2018. Vol. 98. No. 1. Pp. 53-68.

10. Жуков Р. А. Некоторые аспекты оценки качества жизни и управления в социо-эколого-экономических системах: регионы Центрального федерального округа // Региональная экономика: теория и практика. 2017. Т. 15. № 7 (442). С. 1261-1275.

———————————————————————————————————

УДК 51(091) 51 01.5(09)(082)

Лагранж о решении уравнений простой степени

Н. В. Ингтем Россия, г. Москва, Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
nathalia_koulik@mail.ru

Lagrange about the solution of equations of Prime degree

N. V. Ingtem Russia, Moscow, Lomonosov Moscow State University
nathalia_koulik@mail.ru

Настоящее исследование посвящено анализу решения уравнений произвольной простой степени, представленного Лагранжем в работе „Réflection sur la résolution algébriques des équations“. В ней автор глубоко анализирует решение уравнений низших степеней $\mu \leqslant 4$, устанавливает взаимосвязь между существовавшими методами и заключает, что все предложенные методы имели успех благодаря тому, что они приводили к уравнениям относительно функций корней заданного уравнения, степень которых относительно заданного была меньше. Такие уравнения Лагранж назвал упрощающими.

За основу анализа решения уравнений высших степеней, он использует метод Чирнгауза, применяя при этом два способа: 1) - "*a posteriori* и 2) - "*a priori*".

Первый способ заключается в анализе самого метода. В результате этого анализа Лагранж устанавливает:

1) корнями упрощающих уравнений являются функции корней заданного уравнения;

2) эти функции - неоднозначны; число их значений зависит от числа перестановок в них корней заданного уравнения, которое определяет степень уравнения, корнем которого они являются

3) степень упрощающего уравнения будет равна $(\mu-1)!$.

Он заключает, что по виду упрощающего уравнения нельзя понять, если понижение степени этого уравнения возможно. Второй способ состоит в том, чтобы, учитывая 1), найти те, значения функций, при которых они будут оставаться инвариантными, что позволит понизить степень уравнения относительно них. Представим основные положения способа apriori. Согласно методу Чирнгауза, уравнение степени μ:

$$x^{\mu}+mx^{\mu-1}+nx^{\mu-2}+px^{\mu-3}+\ldots=0. \tag{1}$$

подстановкой:

$$x^{\mu-1}+fx^{\mu-2}+gx^{\mu-3}+\ldots+y=0, \tag{2}$$

содержащей $\mu-1$ неопределённый коэффициент и новую переменную y, приводится к виду:

$$y^{\mu}+Ay^{\mu-1}+By^{\mu-2}+Cy\mu-3+\ldots=0. \tag{3}$$

A, B, C ... - целые рациональные функции коэффициентов уравнения 2. Уравнения 3, в силу того, что показатель в 2 берётся равным $\mu - 1$, примет вид:

$$y^\mu + V = 0 \tag{4}$$

которое разрешимо, что приведёт к решению и уравнения 1 [1](стр.309).

$$x = -\frac{F + Gy + Hy^2 + \ldots + Ky^\lambda}{L + My + Ny^2 + \ldots + Ry^\lambda}, \tag{5}$$

$\lambda = \dfrac{\mu - 1}{2}$,т.к. μ - простое а следовательно нечётное.

Задача состоит лишь в определении коэффициентов f, g, ... Обозначая: x', x'', x''', ... $x^{(\mu)}$ и y', y'', y''', ... - корни уравнения 1 и 3 соответственно ; $\sqrt[\mu]{-V} = \alpha^i u$, где α^i, $i = 0, 1, \ldots, \mu - 1$ - корни уравнения $y^\mu - 1 = 0$. Лагранж доказывает, что, такой способ анализа приведёт к упрощающему уравнению, степень которого не превысит $\mu - 1$, а его коэффициенты будут рациональными функциями корней не содержащими α, и удовлетворяющими уравнению степени $(\mu - 2)!$.

$$f^{\mu-1} + Ff^{\mu-2} + Gf^{\mu-3} + \ldots = 0. \tag{6}$$

Коэффициенты F, G, ... другие чем в уравнении 4. В ходе доказательства, Лагранж исследует систему уравнений, полученную из уравнения подстановки:
$\left(x^{(i)}\right)^{\mu-1} + f\left(x^{(i)}\right)^{\mu-2} + g\left(x^{(i)}\right)^{\mu-3} + \ldots + l + \alpha^j u = 0$, $i = \overline{1, \mu}$, $j = \overline{0, \mu - 1}$. Он показывает, что перестановка x' с $x^{(i)}$, $i = \overline{2, \mu}$, эквивалентна подстановке в u, $\alpha^j u$, $j = \overline{1, \mu - 1}$, а т.к. в процессе решения величина u будет исключена, то эта подстановка, как и перестановка x' не изменит значения функции f. Следовательно, коэффициент f, например, будет определяться из уравнения степени $(\mu - 1)!$, [1] (стр. 312). Таким образом, в терминах вариантов системы уравнений Лагранж, по сути, вводит симметрическую группу подстановок степени μ; привлекает новые действия над величинами, входящими в функцию f: это - перестановка и подстановка одних величин вместо других [1] (стр. 312). Впоследствии, в теории математических структур, эти действия становятся объектами. Кроме этого используется циклическая перестановка величин [1] (стр. 313).

К анализу метода „Эйлера и Безу“ способом „a priori“, Лагранж подходит следующим образом: считает уравнение 3 заданным, а заданное уравнение 1 и результат исключения из 3 при помощи уравнения 5 преобразованными. Уравнение 5 он приводит к виду:

$$x = a + by + cy^2 + dy^3 + \ldots + ky^{\mu-1} \tag{7}$$

где a, b, c, ..., k - неопределённые коэффициенты. Всего их μ. Для уравнения 3 он пользуется представлением 4. Почленное сравнение коэффициентов преобразованного и заданного уравнений приводит к системе из μ уравнений с μ неизвестными:
$x^{(i)} = a + (\alpha^{i-1})bu + (\alpha^{i-1})^2 cu^2 + \ldots + (\alpha^{i-1})^{\mu-1} ku^{\mu-1}$, $i = \overline{2, \mu}$, посредством которой находятся представления коэффициентов a, b, c, ... через x', x'', x''', ...: $a = x' + x'' + x''' + \ldots = -\dfrac{m}{\mu}$ симметрическая функция, а $a^{(i)} = x' + \alpha^i x'' + (\alpha^2)^i x''' + (\alpha^3)^i x^{IV} + \ldots$ [1] (стр. 330) где $b = \dfrac{a^{(\mu-1)}}{\mu}, \ldots, k = \dfrac{a'}{\mu}$, определяются уравнением, степени $(\mu - 1)!$, и для простого μ, они будут корнями одного и того же уравнения. Для общности коэффициенты записываются в виде: $t = x' + \alpha x'' + \alpha^2 x''' + \alpha^3 x^{IV} + \ldots$. При фиксированном x', $(\mu - 1)!$ значений от всевозможных перестановок остальных корней, Лагранж располагает в столбец, затем, каждое значение t последовательно умножает на α^i, $i = \overline{2, \mu}$ и получает следующую таблицу из $\mu!$ значений t:

$$\begin{array}{cccccc} t' & \alpha t' & \alpha^2 t' & \alpha^3 t' & \ldots & \alpha^{\mu-1} t' \\ \ldots & & & & & \\ t^{\mu-1} & \alpha t^{\mu-1} & \alpha^2 t^{\mu-1} & \alpha^3 t^{\mu-1} & \ldots & \alpha^{\mu-1} t^{\mu-1} \end{array}$$

откуда следует вывод:

1. Уравнение относительно t будет содержать степени кратные μ; величина $\theta = (x' + \alpha x'' + \alpha^2 x''' + \alpha^3 x^{IV} + \ldots)^\mu$, $t^\mu = \theta$, будет корнем уравнения степени $(\mu - 1)!$, значения которой получатся от перестановок корней x'', x''', $x^{IV}, \ldots$.

2. Уравнение относительно θ можно представить в виде:

$$\theta^{\mu-1} - T\theta^{\mu-2} + U\theta^{\mu-3} - X\theta^{\mu-4} + \ldots = 0;$$

значения θ^i, $i = \overline{1, \mu - 1}$, получатся от циклической перестановки корней x'', x''', $x^{IV}, \ldots$ а коэффициенты T, U, $X, \ldots$ определятся из уравнения $(\mu-2)!$ степени; уравнение относительно T, например, будет иметь вид; $T^\nu - \omega T^{\nu-1} + \rho T^{\nu-2} - \sigma T^{\nu-3} + \ldots = 0$, где $\nu = (\mu - 2)!$.

3. Если θ', θ'', $\theta''', \ldots, \theta^{(\mu-1)}$ корни уравнения 2, то коэффициенты 7 будут: $b = \dfrac{\sqrt[\mu]{\theta'}}{\mu}$, $c = \dfrac{\sqrt[\mu]{\theta''}}{\mu}$, $d = \dfrac{\sqrt[\mu]{\theta'''}}{\mu}, \ldots$ [1] (стр.334).

4. Коэффициенты T, U $X, \ldots$ определятся по формулам: $T = \mu\xi - (-m)^\mu$; $U = \dfrac{T[\mu\xi - (-m)^\mu]}{2} - \dfrac{\mu\xi_2 - (-m)^{2\mu}}{2}, \ldots$ где ξ, ξ_2 - рациональные функции корней заданного уравнения, не содержащие корней μ-й степени из единицы.

Таким образом, показано, что при выбранной нумерации переставляемых символов, Лагранж по сути построил разрешимую часть подгруппы S_μ, содержащую только одну циклическую группу C_μ. Необходимо подчеркнуть, что строго описаны показатели степеней промежуточных уравнений, а так же приведены функции корней всех величин, содержащихся в этих уравнениях, что показывает, что „множество значений функции корней заданного уравнения“ и „множество перестановок“ этих корней являются эквивалентными.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Lagrange J. L. Réflection sur la résolution algébrique des équations., „Oeuvres de Lagrange“, T.3, Gauthier-Villars, Paris, 1869.

УДК 519.61, 519.63

Обзор вычислительно-математических проектов отдела математического моделирования Центральной геофизической экспедиции с 1980 по 2017 год

Л. А. Книжнерман Россия, г. Москва, АО «Центральная геофизическая экспедиция», холдинг «Росгеология»
lknizhnerman@gmail.com

Review of computational mathematical projects of the Mathematical Modelling Department of the Central Geophysical Expedition

L. A. Knizhnerman Russia, Moscow, JSC Central Geophysical Expedition, holding Rosgeologiya
lknizhnerman@gmail.com

В 1980 г. я окончил аспирантуру на кафедре теории чисел математического факультета МГПИ, где учился под руководством Н. М. Коробова, и поступил на работу в Центральную геофизическую экспедицию — ведущий научно-производственный центр нефтяной отрасли в стране. Отдел математического моделирования, где я имею честь работать, занимается теоретической работой в области вычислительной математики и разработкой вычислительно-математических программ решения прямых и обратных задач геофизики. Из математиков в отделе работали В. Л. Друскин (который был научным руководителем до 1991 г. и научное сотрудничество с которым продолжается), Т. В. Тамарченко, С. Н. Давыдычева и С. К. Асвадуров.

Далее следует список наиболее значимых, с моей точки зрения, вычислительно-математических проектов отдела или проектов, выполненных при участии сотрудников отдела.

Численное решение прямых осесимметричных задач электрического и электромагнитного каротажа. Для проверки правильности интерпретации результатов скважинных измерений необходимо иметь программы решения соответствующих прямых задач, чтобы контролировать невязку. Создание таких программ было нашим первым проектом. Мы использовали пластовую структуру среды: скважина вертикальна, пласты горизонтальны, в каждом пласте электрические параметры зависят только от одной переменной — цилиндрического радиуса. В пласте решение представляется в виде ряда с неопределёнными коэффициентами по собственным функциям одномерной дифференциальной задачи; коэффициенты определяются из условий сопряжения на границах пластов. Основное применяемое техническое средство — матричная прогонка. См. [1].

Появление наших программ позволило совсем отказаться в ЦГЭ от решения прямых каротажных задач с помощью электроинтеграторов.

Численное решение обратных осесимметричных задач электрического и электромагнитного каротажа. Надеяться на успешное решение обратных задач позволила теорема единственности из [2]. Был разработан метод типа простой итерации, суть которого в постепенном подавлении влияния параметров других пластов на показания каротажного зонда в данном пласте. Теорему сходимости итерационного процесса можно найти в [3]. Самая ресурсоёмкая часть алгоритма — решение многопластовой прямой задачи, которое приходится выполнять на каждой итерации. Также на каждой итерации приходится делать попластовой подбор, для чего используются теоретико-числовые сетки [4].

Современный пример использования метода см. в [5].

Теория и приложения метода Ланцоша. Приближённое решение дифференциальных уравнений после дискретизации во многих случаях сводится к вычислению выражений вида

$$u = f(A)\phi, \tag{1}$$

где A — симметричная матрица, ϕ — вектор соответствующего размера и f — функция, аналитичная на спектральном интервале A. Специальная модификация метода Ланцоша в качестве приближений к (1) выдаёт векторы $u_m = p_m(A)\phi$, где m — номер шага процесса Ланцоша, а p_m — оптимальный в каком-то смысле многочлен степени не выше $m-1$, который неявно строится в ходе ортогонализации по Граму – Шмидту степенной последовательности $A^0\phi, A^1\phi \dots$ (вычисляются спектральные аппроксиманты Галёркина на подпространствах Крылова $A^0\phi, A^1\phi \dots, A^{m-1}\phi$. Оценки скорости сходимости $u_m \to u$ в точной арифметике, не зависящие от размерности евклидова пространства, получены в [6] для общей функции f и конкретизированы там же для дискретизированных эллиптических, параболических и гиперболических уравнений. Получение оценок для машинной арифметики намного сложнее. Все наши оценки можно найти в [7].

Технические средства исследований в этой области — линейная алгебра, чебышёвские рекуррентные соотношения, функция Грина из теории потенциала.

Построение концевых конечно-разностных подсеток. При решении вычислительно-геофизических задач методом конечных разностей бывает выгодно использовать специальные экономичные подсетки вне области расположения аномалий, а также источников и приёмников поля. Эти подсетки мы получаем, аппроксимируя соответствующую импедансную функцию (марковскую функцию, через которую выражается условие сопряжения на границе вышеуказанной области) стильтьесовской цепной дробью конечной длины и пересчитывая параметры цепной дроби в конечно-разностные шаги. Последняя работа этого рода — статья [8].

Основное средство исследований — теория рациональной аппроксимации.

Теория и приложения метода рациональных подпространств Крылова. Если в схеме метода Ланцоша заменить обычные (полиномиальные) подпространства Крылова на рациональные подпространства вида

$$\mathrm{span}\{(A - s_1 I)^{-1}\phi, \dots, (A - s_m I)^{-1}\phi\}, \tag{2}$$

то получится метод рациональных подпространств Крылова (также включающий аппроксимацию Галёркина). Чтобы работать с подпространствами типа (2), надо уметь эффективно решать системы линейных алгебраических уравнений — либо итерационными, либо прямыми методами.

В работах [9] и [10] метод рациональных подпространств Крылова применяется для решения нестационарной задачи электроразведки в частотном —

$$f(A) = (A - i\omega I)^{-1}, \qquad A \geqslant 0, \qquad 0 < \omega_{\min} \leqslant \omega \leqslant \omega_{\max} \tag{3}$$

— и временном —

$$f(A) = \exp(-tA), \qquad 0 < \lambda_{\min} I \leqslant A \leqslant \lambda_{\max} I, \qquad t \geqslant 0 \tag{4}$$

— вариантах. В формулах (3) и (4) ω и t — частота и время соответственно.

Главная задача здесь — определить оптимальные наборы сдвигов s_j и скорость сходимости при $m \to \infty$. Эта задача была решена с помощью рассмотрения равновесных пар мер для подходящих плоских конденсаторов и определения их ёмкостей; итоговые формулы включают эллиптические функции.

Основное средство исследования — теория потенциала.

Более подробную информацию можно найти на сайте Центральной геофизической экспедиции: на странице отдела и на моей личной странице.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Druskin V., Knizhnerman L., Tamarchenko T. Fast difference-differential method for geophysical electrodynamics // In: K.K. Roy, S.K. Verma and K. Mallick (ed.), Advances in Deep Electromagnetic Exploration (Narosa Publishing House, New Delhi, India and Springer Verlag, Heidelberg, Germany, 1998). P. 402–411.

2. Друскин В. Л. О единственности решения обратной задачи электроразведки и электрокаротажа для кусочно-постоянных проводимостей // Изв. АН СССР, сер. «Физика Земли». 1082. Т. 1. С. 72–75.

3. Друскин В. Л., Книжнерман Л. А. Об одном итерационном алгоритме решения двумерной обратной задачи бокового каротажного зондирования // Геология и геофизика. 1987. Т. 9. С. 118–123.

4. Коробов Н. М. Теоретико-числовые методы в приближённом анализе. — М.: Физматгиз, 1963. 224 с.

5. Кашик А. С., Книжнерман Л. А., Косенков О. М., Хусид М. Д. Разработка пакета вычислительно-математических программ для обработки результатов измерений прибора многоэлектродного бокового каротажа МнБК // XXI научно-практическая конференция «Новая техника и технологии для геофизических исследований скважин»: тезисы докладов — Уфа, изд-во НПФ «Геофизика», 2015. С. 41–53.

6. Друскин В. Л., Книжнерман Л. А. Два полиномиальных метода вычисления функций от симметричных матриц // Журн. вычисл. математики и матем. физики. 1989. Т. 29, № 12. С. 1763–1775.

7. Книжнерман Л. А. Оценки погрешности методов Ланцоша и Арнольди в точной и машинной арифметике // Дисс. на соиск. уч. степ. д. ф.-м. н. — М.: Ин-т выч. матем. РАН, 2012. 255 с.

8. Druskin V., Güttel S., Knizhnerman L. Near-optimal perfectly matched layers for indefinite Helmholtz problems // SIAM Review. 2016. V. 58, № 1. P. 90–116.

9. Knizhnerman L., Druskin V., Zaslavsky M. On optimal convergence rate of the Rational Krylov Subspace Reduction for electromagnetic problems in unbounded domains // SIAM J. Numer. Anal., 2009. V. 47, № 2. P. 953–971.

10. Druskin V., Knizhnerman L., Zaslavsky M. Solution of large scale evolutionary problems using rational Krylov subspaces with optimized shifts // SIAM J. Sci. Comp. 2009. V. 31, № 5. P. 3760–3780.

УДК 512. 563. 6

Алгебра и математическая логика — история взаимодействия

З. А. Кузичева Россия, г. Москва, Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
zakuzicheva@mail.ru

Algebra and mathematical logic — the history of interaction

Z. A. Kuzicheva Russia, Moscow, Lomonosov Moscow State University
zakuzicheva@mail.ru

Одним из стимулов введения в традиционную логику математических, особенно алгебраических, методов послужила аналогия между решением алгебраических уравнений и процессом вывода следствий из посылок в логике. Не случайно, первой формой математической логики явилась алгебра логики (булева алгебра), а составление и решение алгебраических уравнений — ее методом. Исследование этих систем привело к созданию исчислений высказываний и предикатов, где алгебра в явной форме не присутствовала; дальнейшие исследования выявил глубокую связь, сохраняющуюся между логикой и алгеброй.

В 1847 г. опубликованы два выдающиеся произведения — "Математический анализ логики" Дж. Буля (1815 - 1864) и "Формальная логика" А. Де Моргана (1806 - 1871), в каждом из которых была представлена булева алгебра [1, 2]. Принципиально новым, по сравнению с предшествующими (неудачными) попытками в подходах Буля и Де Моргана было, во первых то, что они толковали понятия как множества (классы) элементов, т.е. по объему, во-вторых, выделяли универсальный класс и, в-третьих объектами оперирования выступали подклассы универсума, а не отдельные понятия (термины). Такой подход позволил однозначно определить операции сложения, умножения и дополнения (класса до универсума). Причем, именно вторая из названных работ содержала систему (с точностью до обозначений), которую теперь называют булевой алгеброй. Де Морган вводит понятие универсума, операции сложения (объединения классов, логически - дизъюнкции), умножения (пересечения классов, логически - конъюнкции) и отрицания понятий (дополнения класса до универсума), истолковывая понятия объемно [2, с. 117 - 120].

Отличие системы Буля от системы Де Моргана в том, что у Буля сложение определено только для непересекающихся классов, что не является принципиальным затруднением. Систему, предложенную Булем, иногда называют логикой классов Буля. Основным методом в системе Буля является составление и решение логических равенств.

Основной целью логики является изучение средств, позволяющих получать из истинных посылок истинные следствия. Чаще всего в обычной речи вывод представляется в виде выражений "если ..., то ...". На первый взгляд, в предложенных системах нет в явном виде таких выражений. Это обстоятельство "отпугивало" представителей традиционной логики своей излишней "алгебраичностью". В стремлении преодолеть это затруднение и создано исчисление, называемое теперь исчислением высказываний (предложений). Ради краткости ограничимся одним примером.

В 1880 г. Мак Колл сформулировал вариант логики высказываний [3]. У него $a = 1 (a = 0)$ означает истинность (ложность) высказывания a. Затем вводится новый объект - *импликация*: $a : b$ означает, что a имплицирует b, и, если a истинно, то b *должно быть* истинна. Мак Колл полагает далее: $(a : 1) = (0 : a) = 1$, т.е. истина следует из чего угодно, и из лжи следует все, что угодно. Таким образом, перед нами не только материальная импликация, но и ее свойства, названные впоследствии *парадоксами материальной ипмпликации.* Не имея возможности останавливаться на истории "борьбы" с такими парадоксами, рассмотрим важный во многих отношениях пример.

В 1956 г. свой вариант импликации предложил ученик Д. Гильберта В. Аккерман в статье, озаглавленной "Обоснование сильной (strenge) импликации" [4]. Известная импликация Льюис была названа stricte (точная), однако закрепился и стал привычным перевод на русский язык - строгая. Аккерман назвал свой вариант импликации strenge (строгая). С. А. Яновская предложила перевод - сильная, чтобы отличать ее от импликации Льюиса.

Для дальнейшего необходимо напомнить, что в 50-е годы прошлого века С. А. Яновская читала лекции по математической логике, имея возможность не повторять один и тот же курс, а читать каждый раз новую тему. Так, весной 1955/56 учебного года для преподавателей кафедры логики философского факультета она прочла курс "Теория структур", чтобы показать, что классическое исчисление высказываний является *алгебраической* системой, именно дистрибутивной импликативной структурой (теперь, "решеткой") с дополнением. Летом 1956 г. была опубликована упомянутая статья Аккермана, а осенью того же года С. А. Яновская начала чтение лекций, в которых проанализировала исчисление сильной импликации Аккермана. Среди прочих свойств исчисления Аккермана, она показала, что это исчисление является дитстрибутивной решеткой с дополнением, но *не* мультипликативной. Однако, напомнила С. А. Яновская, что всякая конечная дистрибутивная решетка является импликативной. Значит, заключает она, исчисление Аккермана не может быть конечным т.е. *не существует* конечной таблицы, в которой эта структура интерпретировалась бы в точном смысле. Таким образом, алгебраическая система здесь использована как инструмент анализа логической системы.

Исчисление высказываний, какую бы импликацию мы не ввели в нем, содержит "память"о своем алгебраическом происхождении, т.е. как конструкция является решеткой. А вот свойства решетки уже зависят от свойств импликации соответствующего логического исчисления.

Взаимодействие алгебры и логики не ограничиваются упомянутыми эпизодами. В первой половине XX века синтез алгебры и логики привел к возникновению алгебраической теории моделей, в создании которой принимал участие и наш соотечественник А. И. Мальцев.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Boole G. The mathematical analysis of Logic, being an essay towards a calculus of deductive reasoning. Cambridge, 1847. 83 pp.

2. De Morgan A. Formal Logic, or the calculus of inference, necessary and probable. London, 1847. 356 pp.

3. McColl H. Symbolical Reasoning. Mind, 1880. Vol. 5, pp. 45–60.

4. Akkermann W. Begrundung einiger strengen implikation // The Journal of Symb. Log. 1956 Vol. 21 №2, pp. 113-127.

УДК 51(091)

О некоторых методах решения диофантовых уравнений у Л. Эйлера

Т. А. Лавриненко Россия, г. Москва, Российский экономический университет имени Г. В. Плеханова
Г. А. Михно Россия, г. Тверь, Российский экономический университет имени Г. В. Плеханова
Lavrinenko.TA@rea.ru, g.mikhno@yandex.ru

On some methods for solving diophantine equations by L. Euler

T. A. Lavrinenko Russia, Moscow, Plekhanov Russian University of Economics
G. A. Mikhno Russia, Tver, Tver State University
Lavrinenko.TA@rea.ru, g.mikhno@yandex.ru

В XVIII столетии самой крупной фигурой в области исследования рациональных решений диофантовых, или неопределенных, уравнений был, безусловно, Л. Эйлер. В то время, когда тематика диофантова анализа не привлекала особого внимания исследователей, Эйлер был чуть ли не единственным математиком, проявлявшим постоянный интерес к вопросам решения неопределенных уравнений в рациональных числах. Он посвятил изучению этой темы около 40 статей и несколько глав своего руководства «Vollständige Anleitung zur Algebra» (для краткости мы его будем называть просто «Алгеброй»). Первая его статья на данную тему была представлена в Петербургскую Академию наук в 1738 году (опубликована в 1747 году) и посвящена доказательству неразрешимости в рациональных числах ряда неопределенных уравнений. Для доказательства здесь, впервые после Ферма, Эйлер применил метод спуска. Эйлер периодически обращался к задачам диофантова анализа и в дальнейшем, особенно много занимаясь ими во второй петербургский период жизни. Именно в этот период вышла в свет его «Алгебра» [1], содержавшая первое систематическое изложение известных к тому времени методов решения диофантовых уравнений, дополненное собственными результатами Эйлера.

Начиная с 1770 года, он регулярно представлял в Петербургскую Академию наук от одной до трех статей в год (с перерывом в 1775-77 годах) на темы диофантова анализа. А в 1780-м, самом продуктивном в этом отношении году, Эйлер подал в Академию 15 работ о решении неопределенных уравнений в рациональных числах. Многочисленные записи по диофантову анализу содержатся и в его рукописях (см. [2, 3]). Изучение этих записей показывает, что исследования Эйлера не всегда и не сразу находили отражение в его статьях. В частности, хотя подавляющее большинство его публикаций о решении диофантовых уравнений в рациональных числах появилось после 1770 года, важные записи на эту тему встречаются уже в его рукописях, датируемых 1735-1740 годами.

Подавляющее большинство работ Эйлера посвящено рассмотрению конкретных неопределенных уравнений и их систем. Яркий продолжатель традиции Диофанта-Ферма в трактовке проблем диофантова анализа (см. [4, 5]), Эйлер основывается на традиционных, алгебраических, средствах исследования. Он широко использует замены переменных, подстановки, наложение дополнительных упрощающих задачу условий. При этом он демонстрирует удивительное искусство, отыскивая в каждом случае свой путь, приводящий к получению рациональных решений. Ему удается таким образом не только решить множество конкретных задач, но и, оставаясь в рамках алгебраического подхода, развить общие методы получения рациональных решений неопределенных уравнений 3-й и 4-й степеней, восходящие к Диофанту и Ферма.

Среди новых результатов и идей Эйлера в первую очередь отметим следующие.

1) Получение методов отыскания нового рационального решения неопределенного уравнения 3-й степени вида

$$f_3(x) = y^2 \tag{1}$$

и вида

$$f_3(x) = y^3, \tag{2}$$

где $f_3(x)$ - многочлен 3-й степени с рациональными коэффициентами, по двум известным рациональным решениям соответствующего уравнения ([1, с. 461-462]; [2, с. 68]; [6, с. 112]; [7]). Эти алгебраические методы Эйлера имеют простой геометрический смысл: все они представляют собой по существу алгебраически сформулированный «метод секущей» для плоской эллиптической кривой вида (1) или (2), состоящий в нахождении новой рациональной точки, принадлежащей (1) или (2), как третьей точки пересечения этой кривой с прямой, проходящей через две известные рациональные точки кривой (1) или (2).

2) Разработка бесконечной процедуры нахождения последовательности рациональных решений уравнения вида (1) и уравнения вида

$$f_4(x) = y^2 \tag{3}$$

где $f_4(x)$ - многочлен 4-й степени с рациональными коэффициентами, по одному или двум известным рациональным решениям уравнения (1) или (3) ([7]). На каждом шаге процедуры Эйлера находится ровно одно новое рациональное решение. С геометрической точки зрения различные варианты этой процедуры представляют собой процессы итерирования методов касательной, секущей и парабол. В методе Эйлера нахождения последовательности рациональных решений уравнения (1) используются уже все операции (методы касательной и секущей, отражение рациональных точек относительно оси симметрии кривой), позволяющие описать структуру множества рациональных точек на эллиптической кривой 3-го порядка. Но у Эйлера эти операции не выделены как отдельные методы, а представляют собой просто шаги некоего итерационного процесса, изложенного на языке элементарной алгебры, при полном отсутствии геометрической интерпретации. Фактически с помощью своей процедуры Эйлер впервые дал конструкцию, позволяющую последовательно находить элементы циклической подгруппы, порожденной известным элементом, группы рациональных точек кривой (1). Но это формулировка результата Эйлера на современном нам языке, которого в диофантовом анализе XVIII века, разумеется, не было.

3) Исследование вопроса о том, когда множество всех рациональных решений уравнения (1) и уравнения (2) можно задать в виде рациональных функций одного параметра, т.е., говоря современным языком, когда кривые, задаваемые уравнениями (1) и (2), униформизируемы в рациональных функциях над полем $\mathbb{Q}$. В своей «Алгебре» [1, с. 442, 456-464] Эйлер приходит к достаточным условиям униформизируемости для уравнения (1) и для уравнения вида

$$f_2(x) = y^3,$$

а в его рукописях содержатся достаточные условия для уравнения (2) [2, с. 62].

4) Установление связи между решением в рациональных числах уравнений видов (1) и (2) с решением в рациональных числах уравнения вида (3) ([1, с. 444], [1, с. 540]). С современной точки зрения Эйлер установил бирациональную эквивалентность над полем $\mathbb{Q}$ кривых, задаваемых уравнениями (1) и (2), с некоторыми кривыми вида (3). Обнаружение связи между решением неопределенных уравнений 3-й и 4-й степеней говорило о том, что неопределенные уравнения более правильно классифицировать не по их степеням, а по другому признаку, учитывающему связь между решением в рациональных числах уравнений разных степеней.

5) Отметим также: изучение Эйлером вопроса о числе рациональных решений неопределенных уравнений 3-й и 4-й степени; рассмотрение неопределенных уравнений 3-ей степени, не имеющих «канонических» видов (1) и (2); рассмотрение неопределенного уравнения 3-ей степени в однородной форме

$$F_3(u, t) = v^3,$$

где $F_3(u, t)$ – однородный многочлен 3-й степени от u, t с рациональными коэффициентами; продолжение исследования двойных равенств, начатое ещё Диофантом.

В творчестве Эйлера по диофантову анализу развитие алгебраического подхода Диофанта-Ферма к изучению неопределенных уравнений достигло своей наивысшей точки: оставаясь целиком в рамках этого подхода, Эйлер пришел к выдающимся результатам в области рациональных решений диофантовых уравнений 3-й и 4-й степеней, но в дальнейшем на этом пути уже не было получено столь значительных результатов, если не считать алгебраической формулировки «метода касательной» для общего уравнения 3-ей степени с двумя неизвестными, данной в 1777 году Лагранжем (см. [8]).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Euler L. Vollständige Anleitung zur Algebra. — Petersbourg, 1770; Stuttgart, 1959.

2. Неопубликованные материалы Л. Эйлера по теории чисел / Матвиевская Г. П., Ожигова Е. П., Невская Н. И., Копелевич Ю. Х. – составление и перевод. — СПб.: Наука, 1997. 255 с.

3. Лавриненко Т. А. Современная арифметика алгебраических кривых и диофантовы уравнения в рукописях Эйлера // Современная наука: теоретический и практический взгляд: сборник статей Международной научно -практической конференции (Уфа, 25 февраля 2015 г.)/отв. ред. А.А. Сукиасян — Уфа, 2015. С. 10 -16.

4. Башмакова И. Г., Славутин Е. И. История диофантова анализа от Диофанта до Ферма. — М.: Изд-во URSS. 2015. 258 с.

5. Hoffmann J. E. Über zahlentheoretische Methoden Fermats und Eulers, ihre Zusammenhänge and ihre Bedeutung // Archive for history of exact sciences. 1961. V. 1 № 2. P. 122-159.

6. Euler L. Opera postuma mathematica et physica. — Petropoli, 1862. V. 1.

7. Euler L. Methodus nova et facilis formulas cubicas et biquadraticas ad quadratum reducendi // Mém. de l'Ac. des sc. de St. -P. 1830. V. 11. P.69-91; Opera omnia, ser. 1, vol. 5. — Genevae, 1944. Pp. 157-181.

8. Лавриненко Т. А. Решение неопределенных уравнений 3-й и 4-й степени в рациональных числах в XIX в. М., 1983. Деп. в ВИНИТИ АН СССР, № 3669-83.

УДК 51(091)

Алгебра в классификации наук ал-Фараби

И. О. Лютер Россия, г. Москва, Институт истории естествознания и техники им. С. И. Вавилова РАН
bastet_13@list.ru

Algebra in al-Farabi's classification of sciences

I. O. Lyuter Russia, Moscow, S. I. Vavilov Institute for the History of Science and Technology, RAS
bastet_13@list.ru

Абу Наср Мухаммад ибн Мухаммад ал-Фараби (872–950), известный в средневековой арабской философской традиции как «Второй учитель» после Аристотеля, изложил свою иерархию наук в трактате «Перечисление наук». К математическим наукам кроме традиционного квадривиума он относит также оптику, науку о весах и так называемую «науку об искусных приемах» (эта совокупность дисциплин включает то, что сейчас назвали бы инженерными и прикладными науками).

В отличие от Аристотеля, ал-Фараби подразделяет арифметику (впрочем, как и геометрию и музыку) на практическую и теоретическую. Практическая арифметика изучает число конкретных пересчитываемых предметов и применяется в торговых и гражданских делах. Теоретическая же арифметика (по сути, теория чисел) изучает «числа в абсолютном смысле, отвлеченные разумом от тел и всего, что поддается в них счету... числа здесь выступают как общие как для воспринимаемых, так и для не воспринимаемых чувствами предметов; эта наука проникает во все науки» [1, с.17–18]. Она включает изучение свойств чисел (быть четным или нечетным, кратным, долей, равным или неравным, соизмеримыми или несоизмеримыми и др.), различных взаимоотношений между ними и операций над ними.

В этой связи примечательна философская интерпретация ал-Фараби причин возникновения арифметики, представленная в его трактате «О происхождении наук»:

«...число, которое представляет собой множество, составленное из единиц, возникло благодаря тому, что субстанция может быть разделена многими способами, и содержит различные части. Так как субстанция по своей природе может быть потенциально разделена до бесконечности, то и число потенциально бесконечно. Наука о числе – это наука об умножении одних частей субстанций на другие, о делении одних на другие, о прибавлении одних к другим, об отнятии одних от других, о нахождении корня всех тех частей, которые имеют корни, о нахождении их пропорций и т. д. Отсюда ясно, каким образом было получено число, откуда оно возникло и стало умножаться, какова была причина, благодаря которой оно получило бытие, перешло от возможности к действительности и от небытия к бытию. Эту науку греческие мудрецы называют арифметикой» [2, с.92–93].

Прежде чем обратиться к алгебре в классификации наук ал-Фараби, приведем немаловажные рассуждения из его же «Книги букв»:

«Вещью можно назвать любую вещь, которая обладает чтойностью [лат. quidditas], независимо от того будет ли она внешней по отношению к душе или просто мыслимой каким-либо образом… сущее [же] всегда сказывается о любой вещи, обладающей чтойностью, внешней к душе, и не может сказываться о чтойности, только умозрительной. На этом основании вещь – более общее [понятие], чем сущее» [3, с.21].

Таким образом, вещь – более универсальное понятие, чем сущее. В таком случае, если бы была «наука о вещи», то она была бы более универсальной, чем наука о сущем, то есть метафизика.

Универсальность метафизики ал-Фараби, следуя Аристотелю, аргументирует в трактате «Цель “Метафизики”»: эта наука «рассматривает то, что присуще всему сущему» и ее первый предмет – «абсолютное бытие, подобное всеобщности, а именно, единое» [4, с.335–337]. При этом ал-Фараби утверждает единственность универсальной науки, поскольку «если бы их было две, то каждая из них должна была бы иметь отдельный предмет исследования и не охватывать предмет какой-либо другой науки, то есть являться частной. В этом случае обе эти науки были бы частными, а это вызвало бы противоречие» (там же).

Несмотря на это, «наукой о вещи» в определенном смысле оказывается алгебра («алгебра и алмукабала») – относительно новая во времена ал-Фараби математическая дисциплина, которую он относит к «науке об искусных приемах» (к числовым приемам) и характеризует как «общую и для чисел, и для геометрии» [1; с.33].

Напомним, что арабские слова «ал-джабр» и «ал-мукабала» изначально означают название двух алгебраических операций – «восстановления» (перенос вычитаемых членов из одной части равенства в другую) и «противопоставления» (сокращение равных членов в обеих частях равенства), с помощью которых алгебраические уравнения приводились к каноническому виду. Такое название этой математической дисциплине было дано выдающимся ученым IX в. Мухаммадом ибн Мусой ал-Хорезми в «Краткой книге об исчислении алгебры и алмукабалы», в которой алгебра впервые предстает как самостоятельная наука об общих методах решения линейных и квадратных уравнений, в рамках которой формируется новая математическая объединяющая концепция «алгебраическое неизвестное», для обозначения которого ал-Хорезми как раз и применяет арабский термин «шай», то есть «вещь» (лат. res).

Особенности предмета алгебры ал-Фараби описывает следующим образом: «Она [алгебра] содержит искусные приемы нахождения и применения чисел, основы которых для рациональных и иррациональных величин даны в десятой книге “Начал” и в том, что не упомянуто Евклидом. Поскольку рациональные и иррациональные величины относятся одни к другим, как числа к числам, то каждое число будет соответствовать рациональной или иррациональной величине. Если находятся числа, которые соответствуют некоторым величинам, находящимся в пропорции, то каким-то способом найдутся и эти величины. Поэтому мы постулируем, что определенные рациональные числа соответствуют рациональным величинам, а определенные иррациональные числа соответствуют иррациональным величинам» [1, с.33–34]. Из этого фрагмента следует, что коэффициентами алгебраических уравнений могут быть не только натуральные числа, но и непрерывные геометрические величины. Более того, появление у ал-Фараби терминов «рациональные числа» и «иррациональные числа», а также его утверждение, что отношения несоизмеримых величин соответствуют отношениям натуральных чисел, свидетельствуют о том, что под числами он понимает не только натуральные числа. В таком случае, сущность алгебры можно рассматривать как своего рода повод для последующего расширения понятия числа.

Итак, алгебра применяется в равной мере в двух науках – арифметике и геометрии. Алгебраическая «вещь» – современное алгебраическое неизвестное – может быть и числом и геометрической величиной. Однако все это противоречит тезису Аристотеля, лежащему в основе его классификации наук, о несоизмеримости видов (или запрете метабазиса), то есть о недопустимости перехода от одной науки к другой в процессе доказательства. Аристотель отрицает возможность взаимодействия не только различных наук, но также и наук в рамках одной научной дисциплины, такой как математика (об этом более подробно, см [5; 6]).

Ал-Фараби был знаком с последними математическими достижениями своего времени и осознавал далеко идущие философские последствия переосмысления математики: появление новых математических дисциплин, таких как наука о числах, алгебра и «наука об искусных приемах» определило необходимость новой неаристотелевской онтологии, позволяющей познавать объект без возможности точного представления о нем.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Аль-Фараби. Перечисление наук (математика) // Математические трактаты. – Алма-Ата: Наука, 1972. С. 17–51.

2. Аль-Фараби. О происхождении наук // Естественно-научные трактаты. – Алма-Ата: Наука, 1987. С. 89–104.

3. Tahiri H. Mathematics and the Mind. An Introduction into Ibn Sina's Theory of Knowledge. – Heidelberg–New York–Dordrecht–London: Springer, 2016.

4. Аль-Фараби. О целях Аристотеля в «Метафизике» // Историко-философские трактаты. – Алма-Ата: Наука, 1985. С. 331–341.

5. Лютер И. О. Классификация наук ал-Фараби и комментарий ал-Хайсама к теории отношений Евклида // Математика, физика, информатика и их приложения в науке и образовании: сборник докладов Международной школы-конференции молодых ученых (Москва, 12–15 декабря 2016 г.) – Москва: МИРЭА, 2016 г. С. 186–187.

6. Лютер И. О. Вводные комментарии Ибн ал-Хайсама к пятой книге «Начал» Евклида // Историко-математические исследования. Москва: Янус-К, 2018. Вып. 16(51). (в печати)

УДК 51(091)

К истории влияния теоремы Милютина на исследования в геометрии пространств Банаха

Е. В. Манохин Россия, г. Тула, Тульский филиал Финансового университета при Правительстве РФ
emanfinun@mail.ru

To history of influence of the theorem of Milyutin on researches in geometry of Banach spaces

E. V. Manohin Russia, Tula, Financial University under the Government of the Russian Federation (Tula Branch)
emanfinun@mail.ru

В 1992 году в Харьковском государственном университете под руководством профессора М. И. Кадеца автор защитил кандидатскую диссертацию. Там же за 6 лет до этого от М. И. Кадеца автор услышал о теореме Милютина, которая (как тогда говорили) настолько поразила математиков Харькова, что они (В. И. Гурарий и др.), опубликовали от имени А. А. Милютина статью, ей посвященную [1]. Дело в том, что А. А. Милютин, не зная об этом, в 1951 году решил знаменитую проблему Банаха: будут ли изоморфны пространства непрерывных функций на отрезке и на квадрате. В 1966 году об этом случайно узнал А. Пелчинский и издал книгу [2], содержащую также и этот результат.

Одно из важных направлений функционального анализа — геометрия банаховых пространств. Линейно–топологические свойства банахова пространства зависят от его топологии, то есть от совокупности всех ограниченных выпуклых тел. При исследовании этих свойств возникает возможность замены исходной нормы эквивалентной, которая обладает теми или иными «хорошими» свойствами.

Поэтому одним из серьезных технических инструментов теории пространств Банаха является «метод эквивалентных норм», который заключается в возможности введения в банаховом пространстве эквивалентной нормы, обладающей тем или иным «хорошим» свойством. Например, М. И. Кадец доказал топологическую эквивалентность всех бесконечномерных сепарабельных банаховых пространств, используя этот метод ([3], [4]). Следовательно, актуальными становятся исследования о возможности или невозможности введения в данном банаховом пространстве эквивалентных норм, обладающих разными «хорошими» свойствами.

Теория эквивалентных норм для банаховых пространств $C(K)$ непрерывных функций на метрических компактах есть следствие теоремы Милютина и теории сепарабельных пространств Банаха (пространство $C(K)$ сепарабельно в том и только том случае, если K — метрический компакт, сопряженное пространство к $C(K)$ сепарабельно в том и только том случае, если K — счетный метрический компакт [5]).

Для случая неметризуемых компактов теория далека от завершения.

Среди всех компактов естественно выделяется класс компактов с первой аксиомой счетности. Он включает класс метрических компактов, но не совпадает с ним. Примеры неметризуемых компактов с первой аксиомой счетности: две стрелки, лексикографический квадрат, компакт Хелли и др. хорошо известны и приводятся в учебниках топологии [6].

Общей теории этих компактов нет и мало что известно о пространствах $C(K)$ для неметризуемых компактов с первой аксиомой счетности. Теорема Милютина повлияла на исследования в этом направлении.

Если ограничится теорией эквивалентных норм, то можно назвать, например, результаты Г. А. Александрова о пространстве $C(T)$, где T — компакт две стрелки [7], автора о пространстве $C(Q)$, где Q — компакт Хелли [8], М. С. Кобылиной о пространстве $C(S)$, где S — лексикографический квадрат [9].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Милютин А. А. Изоморфность пространств непрерывных функций над компактами континуальной мощности // Теория функций, функциональный анализ и их приложения. 1966. Вып 2. С. 150-156.

2. Пелчинский А. Линейные продолжения, линейные усреднения и их применения. — Москва: Изд-во Мир, 1979. 145 с.

3. Кадец М. И. Топологическая эквивалентность всех сепарабельных банаховых пространств // ДАН СССР. 1966, Том 167. С.23-25.

4. Кадец М. И. Доказательство топологической эквивалентности всех сепарабельных бесконечномерных пространств Банаха // Функц. Анализ. 1967, Том 1 № 1. С.61-70.

5. Beazamy B. Introduction to Banach Spaces and their Geometry. — Oxford. 1985. 334p.

6. Александров П. С. Введение в теорию множеств и общую топологию. — Москва: Изд-во Наука, 1977. 370 с.

7. Александров Г. А. Эквивалентные локально равномерно выпуклые нормы в несепарабельных пространствах Банаха. Автореф. дис. канд. ф.-м. наук. Харьковский гос. университет, Харьков, 1980.

8. Манохин Е. В. О геометрических и линейно-топологических свойствах некоторых пространств Банаха. Автореф. дис. канд. ф.-м. наук. Харьковский гос. университет, Харьков, 1992.

9. Кобылина М. С. Локально равномерно выпуклые нормы на пространствах непрерывных функций. Автореф. дис. канд. ф.-м. наук. Томский гос. университет, Томск, 2007.

———————————————————————————————

УДК УДК 511.32

Теоретико-числовые методы численного решения уравнения Вольтерра в работах Ю. Н. Шахова

М. В. Можайкина Россия, г. Москва, Московский педагогический государственный университет
mv.mozhajkina@gmail.com

Theoretical-numerical methods for the numerical solution of the Volterra equation in the works of Yu. N. Shakhov

M. V. Mozhaikina Russia, Moscow, Moscow State Pedagogical University
mv.mozhajkina@gmail.com

Интегральные уравнения Вольтерра имеют большое значение при построении математических моделей в физике, экономике, экологии и т.д. Ю. Н. Шахов в своих работах рассматривал уравнение Вольтерра второго рода:

$$x(t) = f(t) + \int_a^t K(t,s)x(s)\,ds \tag{1}$$

которое является частным случаем уравнения Фредгольма второго рода

$$\varphi(s) = \lambda \int\limits_a^b K(s,t)\varphi(t)\,dt + f(s). \tag{2}$$

Интегральное уравнение Фредгольма второго рода с ядром, задающим сжимающий интегральный оператор, можно, как известно, решать методом итераций. Н.М.Коробов предложил считать возникающие при этом интегралы на кубах G_s (с растущим s) с помощью оптимальных коэффициентов. В случае, когда интегральный оператор не является сжимающим, построен коллокационный метод со слоями ядра в качестве базисных функций и с точками оптимальной параллелепипедальной сетки в качестве узлов коллокации.

При решении методом итераций интегрального уравнения Вольтерра второго рода приходится считать интегралы по многогранникам специального вида. В этом случае Ю.Н.Шахову удалось построить теоретико-числовые кубатурные формулы, не использующие производных заданных функций.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Книжнерман Л.Н. Приложение метода оптимальных коэффициентов к численному решению уравнений в частных производных : диссертация ... кандидата физико-математических наук : 01.01.06, 01.01.07 Москва, 1960.

2. Коробов Н.М. Теоретико-числовые методы в приближенном анализе.М.: Физматгиз, 1963.

3. Шахов Ю.Н. , “О приближенном решении многомерных линейных уравнений Вольтерра II рода методом итераций”, Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 4, дополнение к № 4 (1964), 75–100.

4. Шахов Ю.Н. Численные методы анализа (численное интегрирование).М.: МГПИ, 1979.

УДК 51(091)

Преподавание математики в Московском университете в 1917–1923 гг.

С. С. Петрова Россия, г. Москва, Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
serd42@mail.ru

Teaching mathematics at the Moscow University in 1917–1923

S. S. Petrova Russia, Moscow, Moscow State University
serd42@mail.ru

Период 1917–1923 гг. — годы революционных событий и последовавшей за ними братоубийственной гражданской войны — один из самых сложных в российской истории. Эти события внесли в течение университетской жизни жесткие коррективы. И хотя тяготы военного времени сказывались на ней и ранее, однако новая власть сразу начала вносить в нее революционные изменения.

Первой целью большевиков стало кардинальное изменение социального состава студенчества: на место представителей эксплуататорских классов должны были придти дети рабочих и крестьян. Появились наделенные особыми полномочиями большевистские идеологи, целью которых стало насаждение марксизма и перестройка на его основе всего процесса обучения и научных исследований. Низкий образовательный уровень нового студенчества, определившийся в итоге новой политики набора студентов, закрывавшей двери высшей школы перед представителями эксплуататорских классов и широко открывавшей их для выходцев из рабочей и крестьянской среды, игнорируя при этом степень их подготовленности (документ о среднем образовании не требовался!), привел к необходимости существенного понижения научного уровня преподавания.

Что же касается математических исследований, то здесь вопреки всему наблюдался их небывалый расцвет, подготовленный предшествовавшими успехами только что зародившейся Московской школы теории функций. Москва выдвигалась в число европейских математических столиц. И если этому процессу посвящена значительная литература, то преподавание математики в университете в этот период остается в историко-математической литературе темным пятном, так как изучение этих вопросов поставило перед исследователями трудно разрешимые проблемы.

Если учебный процесс до 1918 года хорошо документирован (к примеру, регулярно выходили «Обозрения преподавания наук в Императорском Московском университете»), то информация о состоянии учебных дел на протяжении последующих нескольких лет практически отсутствует – делопроизводство пришло в полный упадок. Архивы сохранили от этого времени лишь небольшое количество разрозненных документов. К счастью, публикации различных архивных материалов, мемуаров и свидетельств, появившиеся в последние годы, дают возможность хотя бы отчасти заполнить образовавшиеся пробелы.

Ситуация на кафедре чистой математики сложилась к 1916–1917 гг. следующая. Ординарными профессорами числились К. А. Андреев, Д. Ф. Егоров и Л. К. Лахтин. В самом конце 1916 года экстраординарным профессором был утвержден приват-доцент Н. Н. Лузин. На кафедре состояли также приват-доценты В. В. Бобынин, И. К. Богоявленский, С. С. Бюшгенс, А. А. Дмитровский, М. И. Ковалевский. В 1916/1917 к ним добавились приват-доценты В. А. Кудрявцев, И. И. Привалов и В. В. Степанов, а в 1917/1918 Л. А. Вишневский, В. В. Голубев, Э. Г. Когбетлиев, В. Я. Левентон, А. М. Размадзе и Г. Н. Свешников. В 1917 году на кафедру (после вынужденного ухода из университета в 1911 году в связи с делом Л. А. Кассо) вернулись ординарный профессор Б. К. Млодзеевский, экстраординарный профессор А. К. Власов и приват-доценты А. А. Волков и С. П. Фиников.

Задачей приват-доцентов было прежде всего чтение лекций и ведение упражнений на естественном отделении. На математическом отделении они читали спецкурсы, разнообразие которых поражает. Так в 1917–18 годах Бюшгенс читал спецкурс об инвариантах бинарных форм, Вишневский о рядах полиномов комплексного переменного, Голубев о работах С. В. Ковалевской и П. Пенлеве по аналитической теории дифференциальных уравнений и об особых точках аналитической функции, Жегалкин о бесконечности в математике, Ковалевский о философских основаниях геометрии, Кудрявцев о теории групп и теории Галуа, Левентон о задаче Плато, Лузин о теории функций действительного переменного и двухмерном континууме, Размадзе об особых задачах вариационного исчисления, Свешников о полиедрических функциях, Степанов о проблеме Дирихле и ряде Тейлора, Привалов о теории аналитических функций и теории тригонометрических рядов, Фиников по теории дифференциальных уравнений с частными производными второго порядка. На математическом отделении приват-доценты также вели, как мы уже говорили, упражнения. Так Виноградов, Степанов и Когбетлиев вели упражнения по математическому анализу и интегрированию дифференциальных уравнений, Волков — по дифференциальной геометрии и дифференциальным уравнениям, Дмитровский — по аналитической геометрии на плоскости и в пространстве.

Далеко не обо всех перечисленных математиках мы обладаем сегодня сколь-нибудь полной информацией. Лишь в последние годы обнаружились неизвестные ранее сведения о Виноградове и Кудрявцеве.

Имя Александра Александровича Волкова появилось в «Обозрении преподавания» за 1905/1906 годы. Согласно «Обозрениям» с 1905 по 1911 он преподавал на факультете в качестве приват-доцента: читал спецкурсы «Поверхности второго порядка» (1905/1906), «Основы геометрии» (1906/1907), «Поверхности Лиувилля» (1908/1909), «Поверхности постоянной отрицательной кривизны» (1909/1910), «Метод Лапласа в применении к уравнениям дифференциальной геометрии» (1910/1911); следом за курсами Д. Ф. Егорова он вёл практические занятия по дифференциальной геометрии и интегрированию дифференциальных уравнений. В 1911 году он вместе группой преподавателей покинул университет в знак протеста против политики тогдашнего министра просвещения Кассо. В 1917 вернулся в университет. Ситуация прояснилась лишь благодаря архивным разысканиям последних лет. Удалось выяснить, что Волков (1876–1919) был оставлен при университете «для приготовления к профессорскому званию». Написал работу о задаче Плато в теории минимальных поверхностей. В 1904 выдержал магистерские экзамены и был отправлен в заграничную командировку. Находясь в Геттингене, слушал лекции Ф. Клейна и Д. Гильберта, участвовал в работе Третьего международного математического конгресса в Гейдельберге. В 1905 был утвержден в должности приват-доцента Московского университета. В то же время преподавал в различных средних и высших учебных заведениях Москвы, в том числе с 1916 года – в Высшем техническом училище и Институте путей сообщения. Играл важную роль в деятельности возглавлявшегося Млодзеевским Московского математического кружка, в журнале которого «Математическое образование» выступал со статьями, посвященными вопросам преподавания математики в средней школе и основаниям геометрии. После революции оказался в антибольшевистском подполье: осуществлял шифровальную деятельность для переписки со штабом Деникина. Был арестован и расстрелян по делу антисоветской организации «Тактический центр».

Среди имен приват-доцентов по кафедре чистой математики в «Обозрении за 1917/918» учебный год значится приват-доцент М. И. Ковалевский, заявивший спецкурс «Философские основания геометрии». Есть основания полагать, что математическое образование он получил в Геттингене. О его дальнейшей судьбе мы никаких сведений не имеем.

Имеется литература о таких известных математиках как В. В. Бобынин, С. С. Бюшгенс, И. И. Привалов, В. В. Степанов, В. В. Голубев, А. М. Размадзе и С. П. Фиников. Кое-что нам известно о Георгии Николаевиче Свешникове (1889–1970), в 1913–14 гг. командированном университетом в Геттинген, в 1920–1930 гг. заведовавшем кафедрой механики в Саратовском университете, впоследствии работавшем на кафедре теоретической механики МАИ (1930–1963). Им был выполнен замечательный перевод сочинения И. Кеплера «Новая стереометрия винных бочек...» (1935). Практически ничего мы не знаем о И. К. Богоявленском, А. А. Дмитровском, Л. А. Вишневском, Э. Г. Когбетлиеве и В. Я. Левентоне.

УДК 51(091)

Основания геометрии на рубеже 19-20 вв. в работах представителей одесской математической школы

М. А. Подколзина Россия, Москва, Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
maress@mail.ru

Foundations of geometry at the turn of 19-20 centuries in the works of scientists of the Odessa school of mathematics

M. A. Podkolzina Russia, Moscow, Moscow State University
maress@mail.ru

В конце девятнадцатого века внимание многих математиков по всему миру оказывается приковано к вопросам оснований математики в целом и геометрии в честности. Открывает данное направление в 1882 г. работа М. Паша (Паш Мориц, 1843-1930) "Лекции о новой геометрии"[1]. В ней М. Паш впервые приводит теорему, которая не доказывается, исходя из постулатов Евклида. Там же он предлагает собственную аксиоматику, содержащую в том числе и ныне широко известную аксиому Паша. И хотя его аксиоматика все еще не полна, она вводит в геометрию аксиомы порядка.

Затем свои геометрические системы предлагают Т. Леви-Чивита (Леви-Чивита Туллио, 1873-1941), М. Пьери (Пьери Марио, 1860-1913), Ф. Шур (Шур Фридрих, 1856-1932) и многие другие. Заинтересовался вопросами оснований геометрии и Д. Гильберт (Гильберт Давид, 1862-1943). В 1899г. выходит его работа "Основания геометрии"[2], в которой он излагает свой вариант аксиоматики, а также строит на ее основании геометрию. Впрочем, Д. Гильберт, как и его предшественники, не дает доказательства независимости и полноты своей системы, но намечает путь, как это можно сделать.

Работа Д. Гильберта вызывает бурное обсуждение у математиков разных стран. Не остаются в стороне и представители Новороссийского университета. С конца 80-х гг. девятнадцатого века появляются статьи В. Ф. Кагана (Каган Вениамин Федорович, 1869-1953) и С. О. Шатуновского (Шатуновский Самуил Осипович, 1859-1929), посвященные вопросам оснований математики. Так что на "Основания геометрии"Гильберта, в Одессе реагируют незамедлительно. В 1901 г. В. Ф, Каган пишет "Этюды по основаниям геометрии"[3], ставшие первой частью одноименной трилогии (вторая часть: С. О. Шатуновский, "Этюды по основаниям геометрии II. Измерение объемов многогранников"[4], третья - С. С. Рейтер "Этюды по основаниям геометрии III. Преобразования многоугольников и многогранников").

В. Ф. Каган ставит перед собой задачу изложить идеи Д. Гильберта для широкого круга читателей, а также разбирает вопрос, возможно ли из посылок Гильберта развить геометрию Евклида во всем ее объеме (и приходит к ошибочному выводу, что это невозможно).

Помимо прочего В. Ф. Каган подробно разбирает понятие длины прямолинейных отрезков и площадей прямолинейных фигур.

Через ряд теорем он показывает, что каждому прямолинейному отрезку может быть отнесено одно и только одно арифметическое число так, чтобы определенному отрезку отвечало число 1, чтобы двум конгруэнтным отрезкам отвечало всегда одно и то же число, чтобы отрезку, составленному из нескольких отрезков отвечало число, равное сумме таких чисел, которые соответствуют составляющим отрезка. (При этом В. Ф,Каган не приводит аксиоматику Д. Гильберта, считая ее уже известной читателю. Тем самым он не определяет понятия конгруэнтности, и отношения "лежит между хотя и активно пользуется ими).

Аналогичным образом вводится понятие измерения прямолинейных и двугранных углов, дуг.

Однако вопрос измеримости площадей оказывается гораздо сложнее. Как пишет В. Ф. Каган [3], "чтобы развить теорию измерения площадей, нужно доказать следующие два положения:

1) В Евклидовой геометрии можно установить систему измерения площадей

2) Эту операцию можно произвести только одним способом, если произведен выбор той фигуры, к которой отнесено число 1 (которая принята за единицу меры площадей).

Но из этих двух положений элементарная геометрия в обыкновенном изложении доказывает только второе, а первое вовсе игнорирует; между тем ясно, что второе положение только тогда получает смысл, когда установлено первое положение".

Замечая эту проблему, В. Ф. Каган полагает первое положение верным и строго доказывает, что оно влечет за собой второе. Затем, ссылаясь на доклад С. О. Шатуновского, сделанный в 1895 г. в Математическом отделении Естествоиспытателей "О теории площадей прямолинейных фигур он показывает, каким образом можно в явном виде установить систему измерения площадей.

Для этого он вслед за С. О. Шатуновским вводит понятие инварианта треугольника (произведение основания на высоту) и доказывает теорему: "Если мы какую бы то ни было прямолинейную фигуру разобьем на треугольники, то последние будут иметь одну и ту же сумму инвариантов, каким бы способом мы ни производили разложение наших фигур на треугольники"[3].

Непосредственным продолжением этой работы и ее обобщением на трехмерный случай становится статья С. О. Шатуновского "Этюды по основаниям геометрии II. Измерение объемов многогранников"[4], цель которой обосновать понятие объема, не прибегая к теории пределов. Так же, как и В. Ф. Каган в двухмерном случае, С. О. Шатуновский устанавливает критерий для сравнения многогранников, для чего вводит понятие инварианта пирамиды.

В. Ф. Каган продолжает и развивает тему оснований геометрии, и в 1905-1907 гг пишет двухтомную монографию, ставшую его магистерской диссертацией [5], [6]. В ней он предлагает альтернативную аксиоматику, построенную не на понятии конгруэнтности, как у Д. Гильберта, а на понятии расстояния и отношений "больше" , "меньше" , "равно".

И хотя поначалу работы В. Ф. Кагана и С. О. Шатуновского по основаниям геометрии оставались практически незамеченным международной математическим сообществом, в 30-ые годы двадцатого века аксиоматика В. Ф. Кагана получила свое признание в связи с работами по метрическим пространствам.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Pasch Moritz, Vorlesungen uber neuere Geometrie // Leipzig: B. G. Teubner, 1882

2. D. Hilbert, Grundlagen der Geometrie // G?ttingen, 1899, 185 p.

3. Каган В. Ф. , Этюды по основаниям геометрии. Вестник опытной физики и элементарной математики, Одесса, 1901, вып. №308, с. 174-185, №311 с. 254-260, № 312 с. 186-192

4. Шатуновский С. О. , Этюды по основаниям геометрии II. Измерение объемов многогранников, ВОФЭМ, Одесса, 1902, вып. № 316, с. 82-87, №317 с. 104-108, №318 с. 127-32, №319 с. 149-155

5. Каган В. Ф. Основания геометрии. Т. 1. Опыт обоснования евклидовой геометрии. - Одесса: Экономическая типография, 1905. - 794 с.

6. Каган В. Ф. Основания геометрии. Т. 2. Исторический очерк развития учения об основаниях геометрии. - Одесса: Экономическая типография, 1907. - 556 с.

УДК 51(091)+(092)

Н. М. Коробов и Тульская школа теории чисел[1]

И. Ю. Реброва Россия, г. Тула, Тульский государственный педагогический университет имени Л. Н. Толстого
i_rebrova@mail.ru

N. M. Korobov and Tula school of number theory

I. Yu. Rebrova Russia, Tula, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University
i_rebrova@mail.ru

Тульская школа теории чисел была основана в 1950 году доцентом В. Д. Подсыпаниным. При поддержки член-корреспондента АН СССР, профессора Б. Н. Делоне и профессора Д. К. Фаддеева, у которых он учился в 30-х годах в Ленинграде, он открыл аспирантуру по теории чисел в Тульском государственном педагогическом институте. Под руководством В. Д. Подсыпанина Тульская школа теории чисел работала до 1968 года, когда его не стало. После его кончины исследования по теории чисел и комбинаторному анализу в Туле до 1975 года продолжал его ученик М. Н. Добровольский.

Как указано в работе [5], возрождение Тульской школы теории чисел началось с 1980 года, когда Н. М. Добровольский перешёл на работу в ТГПИ им. Л. Н. Толстого на кафедру геометрии и элементарной математики. На этом этапе важную роль сыграли профессора, доктора физико-математических наук М. Д. Гриндлингер и Н. М. Коробов. В 1981 году Н. М. Добровольский поступил в аспирантуру к М. Д. Гриндлингеру, которой возглавлял Тульскую алгебраическую школу, но предоставил своему новому аспиранту полную свободу творчества, благодаря этому продолжились занятия Н. М. Добровольского в семинаре у Н. М. Коробова в МГУ имени М. В. Ломоносова.

Контакты между профессором Н. М. Коробовым и Тульской школой теории чисел начались ещё в 56-м году, когда Н. М. Коробов был учёным секретарем III-го съезда математика СССР в г. Москве, а в 1965 году В. Д. Подсыпанин и М. Н. Добровольский сделали серию докладов в МГУ на семинаре А. О. Гельфонда с результатами своих исследований по полиномам Туэ. Профессор Н. М. Коробов и доцент В. И. Нечаев активно участвовали в обсуждении этих докладов.

Лично Н. М. Добровольский познакомился с профессором Н. М. Коробовым ещё в десятом классе, когда по совету своего первого учителя по теории чисел, профессора А. А. Карацубы стал посещать лекции в Московском университете у профессора Н. М. Коробова. После поступления на механико-математический факультет МГУ Н. М. Добровольский участвовал в работе студенческого семинара под руководством Н. М. Коробова и А. А. Карацубы. В 1968 году Н. М. Коробов стал научным руководителем у студента Н. М. Добровольского. После недолгого перерыва в 1975 году совместное сотрудничество с Н. М. Коробовым возобновилось и продлилось ещё 29 лет до кончины Н. М. Коробова 25 октября 2004 года.

В 1985 году 21 октября Н. М. Добровольский защитил кандидатскую диссертацию на тему "Теоретико-числовые сетки и их приложения" в диссертационном совете МГПИ им. В. И. Ленина. Это произошло через 14 лет после защиты в этом же совете 18 января 1971 г. кандидатской диссертации его отца Добровольского М. Н. (27.10.1922 — 18.01.1975). Научный руководитель Н. М. Добровольского — профессор М. Д. Гриндлингер, оппоненты — профессор Н. М. Коробов и кандидат физико-математических наук К. К. Фролов.

[1]Исследование выполнено по гранту РФФИ №16-41-710194_р_центр_а

В 1986 году началось сотрудничество Н. М. Добровольского с В. С. Ваньковой, которая стала соискателем у профессора В. И. Нечаева — заведующего кафедрой теории чисел в МГПИ им. В. И. Ленина. О степени влияния профессора Н. М. Коробова можно судить по тому факту, что пять лет каждую пятницу В. С. Ванькова и Н. М. Добровольский ездили на семинар по тригонометрическим суммам и их приложению, который вёл в МГУ уже на протяжении 20 лет профессор Н. М. Коробов.

Отметим, что в это время к руководству семинара присоединился и профессор Д. А. Митькин, с которым Н. М. Добровольский учился в параллельных классах ещё в ЮМШ, школе-интернат № 18 при МГУ в 1965–1967 годах, а потом в одной группе на механико-математическом факультете МГУ имени М. В. Ломоносова с 1969 по 1971 годы под руководством профессора Н. М. Коробова.

В 1992 году В. С. Ванькова успешно защитила кандидатскую диссертацию под руководством профессора В. И. Нечаева в диссертационном совете МПГУ. Её диссертация была посвящена изучению квадратичного отклонения различных теоретико-числовых сеток.

Под руководством В. И. Нечаева были ещё защищены две диссертации аспирантками из Тулы: А. Л. Рощеней (1998 г.) и И. Ю. Ребровой (2000 г.). Их диссертации были посвящены изучению гиперболической дзета-функции решёток и обобщённой гиперболической дзета-функции решёток. Эта тематика находилась под пристальным вниманием профессора Н. М. Коробова. В июне 2000 г. состоялась защита докторской диссертации Н. М. Добровольского, на которой Н. М. Коробов выступал как научный консультант.

Во втором издании своей монографии [7] Н. М. Коробов целый раздел посвятил результатам полученным в Тульской школе теории чисел.

В 1991 году профессорами Н. М. Коробовым и В. И. Нечаевым на семинаре в МГУ им. М. В. Ломоносова при обсуждении кандидатской диссертации В. С. Ваньковой была поставлена задача о вычислении квадратичного отклонения плоской сетки Хэммерсли. В работах В. С. Ваньковой, в частности, исследовалось среднее арифметическое квадратичных отклонений модифицированных сеток Хэммерсли — Рота и были получены оценки сверху для этого среднего. Задача Коробова — Нечаева подразумевала и получение асимптотической формулы среднего арифметического квадратичных отклонений полных плоских модифицированных сеток Хэммерсли — Рота.

В диссертации Г. Т. Вронской под руководством Н. М. Добровольского в 2005 г. было дано решение задачи Коробова — Нечаева для:

— количественной характеристики качества и квадратичного отклонения полных плоских сеток Хэммерсли;

— среднего квадратичых отклонений полных модифицированных сеток Хэммерсли — Рота;

— количественной характеристики качества плоских сеток Воронина;

— среднего квадратичых отклонений модифицированных параллелепипедальных сеток.

Начиная с конца семидесятых годов, в Туле традиционно все исследования по теории чисел сконцентрированы в направлении развития основанного в 1957 году профессором Н. М. Коробовым теоретико-числового метода приближенного анализа. В последнее время эти исследования стали всё больше примыкать к тематике, разрабатываемой В. Д. Подсыпаниным и М. Н. Добровольским (старшим) в 50–60 годах XX столетия.

Дело в том, что сама логика исследований диктует для дальнейшего развития теоретико-числового метода в приближенном анализе рассматривать вопросы диофантовых приближений алгебраических чисел, то есть те вопросы, которыми в 50–60-ые годы занимались В. Д. Подсыпанин и М. Н. Добровольский (старший).

Профессор Н. М. Коробов стоял у истоков двух важнейших видов деятельности: организации международных конференций по теории чисел в г. Туле и издании нового математического журнала "Чебышевский сборник".

Именно после беседы с Н. М. Коробовым и А. Б. Шидловским возникла идея организации Первой международной конференции "Современные проблемы теории чисел и её приложения", которая состоялась 25 лет тому назад в сентябре 1993 года. В избранных трудах этой конференции, опубликованных в Математических заметках в 1994 году вышла очень важная работа Н. М. Коробова по комбинированным сеткам [6].

Н. М. Коробов горячо поддержал идею создания журнала "Чебышевский сборник", в котором он опубликовал четыре статьи [3], [4], [8], [9]. Последняя статья вышла в свет уже после кончины Н. М. Коробова.

Другим примером влияния Н. М. Коробова на современные исследования могут служить работа [2], в которой обсуждаются актуальные проблемы гиперболической дзета-функции решёток, впервые появившейся в работах Н. М. Коробова 1959–1960 годов. Сам термин вёл Н. М. Добровольский гораздо позже в 1984 году.

Всё выше сказанное позволяет говорить об определяющей роли Н. М. Коробова в судьбе Тульской школы теории чисел, которую трудно переоценить.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. С. С. Демидов, Е. А. Морозова, В. Н. Чубариков, И. Ю. Реброва, И. Н. Балаба, Н. Н. Добровольский, Н. М. Добровольский, Л. П. Добровольская, А. В. Родионов, О. А. Пихтилькова Теоретико-числовой метод в приближенном анализе // Чебышевский сборник. 2017. Том 18 № 4(64). С. 6-85.

2. Н. М. Добровольский О современных проблемах теории гиперболической дзета-функции решёток // Чебышевский сб. 2015. Т. 16, вып. 1. С. 176–190.

3. Добровольский Н. М., Коробов Н. М. Оптимальные коэффициенты для комбинированных сеток. // Чебышевский сборник, Т. 2, Тула, 2001, С. 41–53.

4. Добровольский Н. М., Коробов Н. М. Об оценке погрешности квадратурных формул с оптимальными параллелепипедальными сетками // Чебышевский сборник. 2002 Т. 3, вып. 1(3). С. 41–48.

5. Добровольский Н. М., Реброва И. Ю., Устян А. Е., Подсыпанин Ф. В., Подсыпанин Е. В. Тульская школа теории чисел (к 105-летнему юбилею Владимира Дмитриевича Подсыпанина (16.01.1910 - 11.10.1968) и 65-летию Тульской школы теории чисел) // В сборнике: Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы и приложения Материалы XIII Международной конференции. Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого. 2015. С. 20-85.

6. Коробов Н. М. Квадратурные формулы с комбинированными сетками // Математические заметки. 1994. Т. 55. Вып. 2. С. 83—90.

7. Коробов Н. М. Теоретико-числовые методы в приближенном анализе. (второе издание) / М.: МЦНМО, 2004.

8. Коробов Н. М. О некоторых свойствах специальных полиномов // Труды IV Международной конференции ” Современные проблемы теории чисел и ее приложения“ Чебышевский сборник. 2001. Т. 1. С. 40–49.

9. Н. М. Коробов, Н. М. Добровольский Критерии оптимальности и алгоритмы поиска оптимальных коэффициентов // Чебышевский сборник. 2007. Т. 8, вып. 4(24). С. 105–128.

Тульский государственный педагогический университет имени Л. Н. Толстого
Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University

———————————————————————————————

УДК 51(091)

Первые учебные курсы теории функций XIX в.

Г. И. Синкевич Россия, г. Санкт–Петербург, СПбГАСУ, кафедра математики
galina.sinkevich@gmail.com

First courses on the theory of functions in XIX c.

G.I.Sinkevich Russia, Saint-Petersburg, SPbGASU
galina.sinkevich@gmail.com

Первый учебный курс математического анализа «Анализ бесконечно малых для исследования кривых» был издан в 1696 г. маркизом Г. Ф. де Лопиталем и содержал изложение лекций И. Бернулли. В нём даны начала дифференциального и интегрального исчисления, введены понятия абсциссы, ординаты, координат, геометрического места точек, геометрический смысл производной, связь возрастания и убывания функции со знаком первой производной, необходимое условие экстремума. Повествовательный характер изложения не отягощался обоснованиями — доказательства тогда использовались только в геометрии. В качестве функций рассматривались целые алгебраические выражения, а аналитические утверждения основывались на геометрическом представлении.

Правила дифференциального исчисления XVII–XVIII вв. были определены лишь для алгебраических функций, формулы производных трансцендентных функций появились позже в работах Эйлера и Коши, хотя ещё Дж. Непер кинематическим способом определил скорость роста логарифма.

В 1708 г. в Париже вышел двухтомник Ш.-Р. Рейно "Доказательный анализ". Большинство утверждений автор не доказывал, а разъяснял с помощью примеров, не только математических, но и из области механики и астрономии. В «Доказательном анализе» содержатся прообразы двух первых из теорем о непрерывных функциях: теоремы о корневом интервале и теоремы о корне производной. Они были сформулированы М. Роллем в 1690 г. для многочлена и постепенно развивались до известных нам теорем о непрерывных функциях — теоремы Ролля и теоремы Больцано-Коши [1]. Тенденция сближения алгебры и анализа, отражённая в трактате Рейно, общее развитие математики XVIII в., дискуссия Ж. Даламбера и Л. Эйлера о струне привели к расширению понятия функции.

В 1755 г. Петербургская академия наук опубликовала сочинение Л. Эйлера «Наставление по дифференциальному исчислению» [2]. Эйлер гордился тем, что при изложении анализа ему не требуется обращаться к прикладной интерпретации. В IX главе он пишет: «Понятие уравнения можно свести к понятию функции» [2, с. 367]. Эйлер рассматривал многочлен как заведомо непрерывную функцию, удовлетворяющую его представлениям о непрерывной функции — как функции, заданной единым аналитическим выражением.

В 1758–1769 гг. А. Кестнер, профессор математики и физики в Гёттингене, опубликовал четырехтомный (каждый том содержал 2-3 части) курс «Основы математики» [3], включая анализ, превосходный методически, с хорошим историческим обзором, многократно переиздававшийся. В курсе отчетливо видно влияние Эйлера. На русском языке курс Кестнера был издан в 1792–1803 гг.

В 1797-1798 г. Ж. Л. Лагранж издал «Теорию аналитических функций», в 1801 г. — «Лекции по исчислению функций». Аналитическими функциями Лагранж называл функции, разложимые в ряд Тейлора. Вопрос о сходимости не рассматривался, бесконечно малые не использовались. В «Теории аналитических функций» содержится его теорема о среднем значении, названная Ампером «теоремой Лагранжа» в 1806 г.

С 1797 г. начал выходить, многократно переиздаваться и переводиться трёхтомник С. Ф. Лакруа «Трактат о дифференциальном и интегральном исчислении» [4], по которому в XIX в. училось несколько поколений в Европе и России.

В 1817 г. вышла работа, ставшая первым предвестником реформы строгости в математическом анализе — «Чисто аналитическое доказательство теоремы, что между любыми двумя значениями, дающими результаты противоположного знака, лежит по меньшей мере один действительный корень уравнения» Б. Больцано [5]. Он критикует доказательства Кестнера, Клеро, Лакруа, Меттерниха, Реслинга, Клюгеля и Лагранжа за привлечение геометрических и физических образов (времени и движения) и за отсутствие аналитичности рассуждения, т. е. понимания непрерывности как математического понятия. В этой работе содержится определение непрерывной функции через приращение, понятие верхней грани и первое строгое математическое доказательство второй теоремы Ролля (сейчас она называется теоремой Больцано-Коши).

В 1820–1825 годах Больцано развивал теорию целых и рациональных чисел (рукопись «Reine Zahlenlehre»), а 1830-х годах и теорию действительного числа [6]. Эта теория близка к современной концепции действительного числа, включая определение числа через сечение (за 40 лет до Дедекинда), но опирается на понятие переменного бесконечно большого и бесконечно малого числа.

В 1830-е гг. Больцано, находясь в вынужденной отставке, написал «Теорию функций» (Functionenlehre) [7]. Эта рукопись оставалась неизвестной в течение столетия. В ней сравнивается различный ход функций и различные виды непрерывности, в том числе равномерной непрерывности, приводится пример непрерывной нигде не дифференцируемой функции. Другие работы Больцано были известны [8], популяризировались такими математиками как Г. Ганкель [9], О. Штольц [10], философом Е. Дюрингом [11], который преподавал в Берлинском университете.

В 1821 г. О. Коши издал первую часть «Курса анализа», написанного на основании лекций, прочитанных в Политехнической школе. Вторая его часть, посвященная дифференциальному и интегральному исчислению, была опубликована в 1823 г. Определение непрерывной функции, введенное в «Алгебраическом анализе», в точности повторяет определение Больцано. Что очень важно для анализа, Коши формулирует теорему о среднем значении как свойство непрерывной функции. Теорема о корневом промежутке, теорема о среднем значении, теорема о корне производной приобрели статус теорем, описывающих свойства непрерывных функций. В 1821 году Огюстен Коши в «Курсе анализа» впервые систематически излагает теорию пределов и доказывает первый классический предел с помощью неявного предположения о сжатой переменной. В 1823 году опубликован «Конспект курса лекций по инфинитезимальному исчислению» [12], прочитанных Коши в Политехнической школе. Курс рассчитан на 40 лекций. На русском языке он вышел под названием «Дифференциальное и интегральное исчисление» в переводе В.Я. Буняковского в 1831 году [13]. Понятие окрестности строго не формулировалось, Коши использовал термин «соседство» (voisinage). Заметим, что первое строгое определение окрестности дал Р. Липшиц в 1864 г. В предположении, что любая непрерывная функция дифференцируема, Коши доказывает теорему о среднем значении. В курсе 1823 г. впервые появилась теорема Коши о среднем значении.

Благодаря этим курсам сложилась структура математического анализа как научной и учебной дисциплины. Представление о непрерывных функциях резко изменилось в середине

XIX в. с появлением новых математических объектов, необходимостью классифицировать точки разрыва и оценивать объем этого понятия и возможность пренебрегать ими при разложении функций в ряды Фурье. Определение непрерывной функции на языке эпсилонтики ввел К. Вейерштрасс в 1861 г., развитие концепции непрерывности было продолжено в работах Э. Гейне, Р. Дедекинда и Г. Кантора в 1870-х гг.

В 1872 г. Э. Гейне, обобщая концепции Вейерштрасса и Кантора, и озабоченный необходимостью изложить эти концепции как введение в учебный курс анализа, написал «Лекции по теории функций» [14], где основные понятия (число, непрерывность) вводились с помощью фундаментальных последовательностей. В этой работе содержатся два его знаменитых результата: теорема о равномерной непрерывности, носящая имя Кантора-Гейне, и теорема о покрытиях, носящая имя леммы Гейне-Бореля (Борель строго доказал её в 1895 году).

В 1875 г. вышел первый полный курс У. Дини «Основы теории функций действительного переменного» [15], который включал предшествующие достижения К. Вейерштрасса, Г. Ганкеля, Г. Шварца, Э. Гейне, П. Дюбуа-Реймона, Р. Дедекинда и Г. Кантора. В его курсе систематически изложена новая концепция непрерывности, теоремы об ограничениях в теории рядов и дифференцировании, его группа теорем о непрерывной функции содержит 11 теорем (у Коши их только четыре). Дини дал определение непрерывности функции в окрестности точки с помощью односторонних пределов. Его курс теории функций действительной переменной приобрёл законченный вид, включающий все основные разделы, и имеющий оригинальное изложение.

Все названные курсы теории функций послужили фундаментом для развития теории функций в XX веке.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Синкевич Г.И. История понятия числа и непрерывности в математическом анализе XVII–XIX вв. Санкт-Петербург: Издательство СПбГАСУ. 2016. – 312 с.

2. Euler L., (1755) Institutiones calculi differentialis. Petropolis: Academia Imperialis Scientiarum Petropolitanae. 1787. Vol. I. -? 224 p.

3. K*ä*stner A. G. Die mathematischen Anfangsgr*ü*nde. 4 Th. 7 Bd. G*ö*ttingen: Witwe Vandenhoeck, 1768–1769.

4. Lacroix S. F. Trait*é* du calcul differentiel et du calcul int*é*gral. Paris:Duprat. 1797-1798. 3 vol.

5. Bolzano B. Rein analytischer Beweis des Lehrsatzes, dass zwischen je zwei Werthen, die ein entgegengesetzes Resultat gew?hren, wenigstens eine reelle Wurzel der Gleichung liege. Prag: Gottlieb Haase, 1817. - 60 s.

6. Рыхлик К. Теория вещественных чисел в рукописном наследии Больцано // Историко-математические исследования. М., 1958. XI. – С. 515–532.

7. Bolzano B. Functionenlehre // Schriften/ Edited by K. Rychlik. ? Prague: Kr*á*lovsk*á* Česk*á* Spolecnost Nauk, 1930. Vol.1- P. 80?184.

8. Синкевич Г.И. Распространение и влияние идей Больцано на развитие анализа XIX века // Бесконечномерный анализ, стохастика, математическое моделирование: новые задачи и методы. Проблемы математического и естественнонаучного образования. Тезисы и тексты докладов Международной конференции 15-18 декабря 2014 года. Москва: РУДН, 2014. - С. 436 – 438.

9. Hankel H. Grenze //Allgemeine Enzyklopädie der Wissenschaften und Künste. ? Leipzig: Brockhaus-Verlag, 1870/71. Vol. 90. – P. 185 – 211.

10. Stolz O. B. Bolzano's Bedeutung in der Geschichte der Infinitesimalrechnung // Mathematische Annalen. Leipzig, 1881. Bd. 18. – S. 255?279.

11. Dühring E. Natürliche Dialektik: Neue logische Grundlegungen der Wissenschaft und Philosophie. Berlin: Witter, 1865. ? 227 s.

12. Cauchy A.-L. Résumé des lecons données sur le calcul infinitésimal (1823) // Oeuvres complètes. Ser. 2. Tome IV. Paris: Gauthier-Villars, 1882–1974. - P. 9–261.

13. Коши О. Краткое изложение уроков о дифференциальном и интегральном исчислении / Перевод В.Я. Буняковского. СПб.: Императорская Академия Наук, 1831. ? 254 с.

14. Heine E. Die Elemente der Functionenlehre // Journal f?r die reine und angewandte Mathematik. Berlin, 1872. 74. – S. 172 – 188.

15. Dini U. Fondamenti per la teoria delle funzioni di variabili reali. Pisa: tip. Nistri, 1878. – VIII+407 p.

———————————————————

УДК 51(091)

Связи между польскими и московскими математиками в первой половине XX века

Г. С. Смирнова Россия, г. Москва, Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
galiafr@mail.ru

Relations between Polish and Moscow mathematicians in the first half of the 20th century

G. S. Smirnova Russia, Moscow, Moscow State University
galiafr@mail.ru

В период между двумя мировыми войнами в научном мире появилась и активно развивалась новая математическая школа — Польская, которая сыграла значительную роль в развитии математики XX в. и являлась одной из ведущих в некоторых новых разделах математики того времени.

В Краковском университете было две кафедры математики, которыми руководили К. Зоравский (с 1895 г. по 1918 г.), позже переехавший в Варшаву, и С. Заремба (с 1900 г.). Основной областью интересов Зоравского (Kazimierz Żorawski, 1866–1953), ученика норвежского геометра Софуса Ли, была дифференциальная геометрия, и его ученики А. Гоборский (Antoni Maria Emilian Hoborski, 1879–1940), С. Голомб (Stanisław Gołąb, 1902–1980) и В. Слебодзинский (Władysław Ślebodziński, 1884–1972) получили много интересных и важных результатов. С. Заремба (Stanisław Zaremba, 1863–1942) учился в Петербурге и Париже. Известен своими работами по гармоническому анализу, рядам Дирихле, функциям Грина, а также теоретической арифметике. Считался ведущим среди математиков Кракова. С исследований С. Зарембы берет начало выдающаяся краковская школа теории дифференциальных уравнений.

Львовский университет был вторым важным центром польской науки, где так же работали две кафедры математики. Одной с 1892 г. руководил Ю. Пузына (Józef Puzyna,1856–1919), а другой с 1910 г. — выпускник Императорского Варшавского университета В. Серпинский (Wacław Sierpiński, 1882–1969). В 1913 г. во Львове появился чрезвычайно одаренный математик З. Янишевский (Zygmunt Janiszewski, 1988–1920), получивший образование в различных университетах Европы и в 1911 г. защитивший под руководством А. Лебега докторскую диссертацию по топологии. К этому времени еще два талантливых ученика Серпинского защитили во Львове докторские диссертации: С. Мазуркевич (Stefan Mazurkiewicz, 1988–1945) — по топологии и С. Рузевич (Stanisław Ruziewicz, 1889–1941) — по теории функций действительного переменного. В 1915 г. в Варшаве вновь был организован университет, и многие польские ученые, работавшие к тому времени в других учебных заведениях страны, стали преподавать здесь. Ядро варшавских математиков образовали В. Серпинский (профессор Варшавского университета с 1919 г.), З. Янишевский (с 1918 г.) и С. Мазуркевич (с 1919 г.).

В революционном 1917 г. Янишевский написал свою знаменитую статью «О запросах науки в Польше», в которой предложил сосредоточить усилия польских математиков на некоторых избранных областях математики: теории множеств, топологии и теории действительных функций. Именно здесь польские математики довоенного времени достигли самых значительных успехов. Сегодня мы говорим о Варшавской школе теории множеств Серпинского и Львовской школе функционального анализа Банаха.

Также Янишевским было предложено создать математический журнал, посвящённый этим новым областям математики, и статьи в нем должны печататься на иностранных языках, используемых в работе международных математических конгрессов. В 1920 г. появился первый номер «Fundamenta Mathematicae» — первого в мире специализированного математического журнала, с которым постоянно сотрудничали как польские, так и многие иностранные математики. Начиная со второго тома и до последнего предвоенного 32 тома, вышедшего в 1939 г., московские математики опубликовали здесь около 45 статей.

Такое тесное сотрудничество объясняется, в первую очередь, обстоятельствами биографии лидера молодых польских математиков В. Серпинского. В начале первой мировой войны он был интернирован в Вятку, но после больших хлопот и усилий профессоров Московского университета Д.Ф. Егорова и Б.К. Млодзеевского получил разрешение на жительство в Москве. Между ним и Н.Н. Лузиным — одним из основателей знаменитой Московской математической школы теории функций зародилась большая дружба, основанная на общности научных интересов и закрепленная совместными исследованиями и результатами, которая служила источником вдохновения для обоих математиков и их учеников до самой смерти Лузина.

После отъезда Серпинского с коллегами математическая жизнь во Львове не остановилась. Г. Штейнгауз (Hugo Dyonizy Steinhaus, 1887–1972), С. Банах (Stefan Banach, 1892–1945) и О. Никодим (Otto Marcin Nikodym, 1887–1974) основали еще одну выдающуюся математическую школу — школу функционального анализа.

С апреля 1919 г. начало свою деятельность «Математическое общество в Кракове», первоначально насчитывавшее 16 членов, среди которых были С. Заремба, К. Зоравский, С. Банах, А. Гоборски, О. Никодим и др. Первым Президентом стал С. Заремба. Поскольку математики из других городов (в первую очередь, Дикштейн, Серпинский, Янишевский, Мазуркевич и др.) выразили желание присоединиться к работе в обществе, то уже в 1920 г. общество было преобразовано в Польское математические общество.

За результатами польских ученых московские математики следили очень внимательно. На Первом Всероссийском съезде математиков в Москве весной 1927 г. Н.Н. Лузин в своем докладе о состоянии дел в теории функций действительного переменного упомянул результаты Банаха, Тарского и Серпинского, а П.С. Александров в докладе о топологии — результаты Шаудера. Осенью 1927 г. московские математики (Н.Н. Лузин, Д.Е. Меньшов, Н.К. Бари) участвовали в работе Первого съезда польских математиков во Львове. После него в 1929 г. начал выходить новый журнал «Studia Mathematica», посвящённый прежде всего функциональному анализу и теории вероятностей. Его авторами были С. Банах, Й. Марцинкевич, М. Кац, Г. Штейнгауз, Ю. Шаудер, В. Орлич, С. Мазур, А. Зигмунд и др. А.Н. Колмогоров опубликовал несколько статей в этом журнале.

В 1930 г. в Харькове состоялся I Всесоюзный съезд математиков, на который приехали три математика из Варшавы: профессор Пшеборский, Антоний-Бонифаций Павлович (1871–1941), который до 1922 г. работал в Харьковском университете, в 1920–22 — ректором, с 1 сентября 1922 г. возглавлял кафедру теоретической механики Варшавского университета, Ежи Нейман (1894–1981), и Александр Райхман (1890–1940), в то время занимавшиеся вопросами теории вероятностей.

В Москве в 1934 г. директором Института математики Московского университета назначается А. Н. Колмогоров, и одним из его первых шагов в области международных математических отношений стал план создания целой серии международных конференций по различным областям математики. Осуществились лишь первые два звена этой широко задуманной цепи конференций: конференция по дифференциальной геометрии и тензорному анализу (1934 г.), председателем организационного комитета которой был В. Ф. Каган, и топологическая конференция (1935 г.), прошедшая под руководством П. С. Александрова. На обеих конференциях выступали польские математики. А. Гоборский и С. Голомб из Кракова и математик и философ Александр Вундгейлер (A. Wundheiler, 1902–1957) из Варшавы принимали участие в конференции 1934 г., а представители Варшавской школы (В. Серпинский, К. Куратовский, К. Борсук, С. Мазуркевич) и молодой талантливый львовский тополог Ю. Шаудер, приняли участие в конференции 1935 г. Также в топологической конференции принимал участие польский математик Витольд Гуревич, который в то время работал профессором в Амстердаме.

Состав польской делегации на топологической конференции впечатляет. С. Мазуркевич одним из первых решил задачу характеризации так называемых общих непрерывных кривых (или общих жордановых континуумов), т. е. непрерывных образов отрезка (1913), определив локально связные континуумы и доказав, что именно они суть ничто иное, как непрерывные образы отрезка. Еще раньше (1912) Янишевский определил неприводимые континуумы, что позволило характеризовать простую дугу (топологический образ отрезка) как топологически единственный локально связный неприводимый континуум. Возникла топология континуумов, блестяще развившаяся в Польше (Янишевский, Мазуркевич, Серпинский, Куратовский, Кнастер). Последнему принадлежит одна из кульминационных точек всей теории — построение наследственно неразложимого континуума.

В 1979 г., открывая Вторую Московскую международную топологическую конференцию, П.С. Александров следующим образом оценивал результаты польских топологов: *«Брауэровские работы 1909–1913 гг. как бы обрамлены двумя выдающимися математическими произведениями, положившими начало общей топологии: это работа Фреше 1907 г., в которой определены метрические пространства, их компактность и полнота, и книга Хаусдорфа 1914 г., в которой заложены основы теории топологических пространств. Кроме того, в 1913 г. была опубликована статья Янишевского о неприводимых континуумах, положившая начало большой главе топологии, так называемой топологии континуумов, расцвет которой мы наблюдаем в Польше и далее в США. Высшими достижениями этой ветви топологии, после построения Брауэром в 1909 г. первых неразложимых континуумов, я считаю построение Кнастером наследственно неразложимого континуума и доказательство Бингом топологической единственности таких континуумов («псевдодуга»).*

В 1921 г. топология континуумов сомкнулась с построенной в этом году Урысоном и Менгером теорией размерности, ставшей на много лет одной из самых замечательных и популярных областей топологии. В 1922–1924 гг. общая топология достигла существенно нового уровня. Вследствие определения Куратовским наиболее общих топологических пространств, построения теории бикомпактных пространств и доказательства первых ос-

новных метризационных теорем, а также примыкающих к ним предложений (например, леммы Урысона). 1922 г. ознаменован также доказательством одной из замечательнейших теорем в алгебраической топологии: знаменитого закона двойственности Александера, открывшего ряд теорем двойственности...

Сразу же по окончании войны начинается период бурного развития как алгебраической и дифференциальной топологий, так и чисто теоретико–множественной топологии... Имел место и новый — третий период синтеза теоретико-множественной и алгебраической топологии. Этот период продолжается и сейчас. Началом этого периода было создание Борсуком теории ретрактов, а его продолжением — создание также Борсуком теории шейпов...

К сожалению, ситуация в Советском Союзе, да и во всем мире ухудшалась. Начиная с 1932 г., выезд за границу стал невозможен и научные контакты были прерваны. Единственным благоприятным для математики событием этого периода стало включение в состав СССР в 1939 г. Львова и его области, в результате чего идеи Банаха и его школы функционального анализа стали беспрепятственно распространяться в математических кругах всего Советского Союза, чему, конечно же, способствовали и поездки Банаха, Мазура и Шаудера в Москву, Киев, Тбилиси, а также выступления московских математиков (П. С. Александров, Л. А. Люстерник) во Львове.

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
Moscow State University

———————————————————————————

УДК 930.2

Кинематика жидкого тела в ранних трудах Н. Е. Жуковского

И. А. Тюлина Россия, Москва, Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
В. Н. Чиненова Россия, Москва, Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
v.chinenova@yandex.ru

Kinematics of a liquid body in early works N. E. Zhukovsky

I. A. Tyulina, Russia, Moscow, Lomonosov Moscow State University
V. N. Chinenova Russia, Moscow, Lomonosov Moscow State University
v.chinenova@yandex.ru

Как известно, первая опубликованная научная работа Жуковского относится к гидродинамике и посвящена кинематике жидкого тела [1], она была опубликована в 1876 г. Эту работу Николай Егорович представил физико-математическому факультету Московского университета для соискания степени магистра прикладной математики.

Прежде всего, он рассматривает исследования, примерно, за 50 лет (1827–1874), проведенные в различных странах такими крупными учеными как Г. Гельмгольц (1858), Г. Кирхгоф (1874), А Коши (1827), В. Томсон (1867) и другими.

Анализ сочинений выбранных авторов позволяет Н.Е. Жуковскому сделать вывод, что теория движения простейших неизменяемых систем развивалась на основе обобщения идей о движении твердого тела, общая же теория движения изменяемой системы базировалась на соображениях теории упругости и гидродинамики; при этом оба направления развивались независимо друг от друга.

Магистерская диссертация Жуковского была посвящена выявлению законов распределения скоростей и ускорений частицы жидкости и представляла по существу введение в общий курс гидромеханики.

Второй вывод Жуковского – в кинематике жидкого тела использовался только аналитический метод исследования, а геометрическая теория движения изменяемой системы находится на первых степенях своего развития. Однако обстоятельное геометрическое исследование может, по мнению Жуковского, «всего более осветить трудные вопросы гидродинамики» [I, с. 10]. Далее он проводит блестящее исследование, предпочитая, где было можно, геометрические соображения аналитическим. В этой работе Н.Е. Жуковский совершенно ясно высказывает свою точку зрения о методе исследования: «Мы старались сделать изложение по возможности простым, предпочитая, где было возможно, геометрические соображения аналитическим и пользуясь криволинейными координатами, имеющие непосредственное кинематическое значение в разбираемом вопросе».

Важно отметить, что во всей работе рассматривается общий случай сжимаемой жидкости и отмечаются особенности жидкости несжимаемой.

Именно историко-научный анализ, к которому прибег Жуковский, позволил ему утверждать, что «Та высокая степень ясности, которая была внесена в область динамики твердого тела геометрическими исследованиями движения неизменяемой системы, заставляет ожидать значительного успеха гидродинамики от сближения ее с кинематикой изменяемой системы» [I, с. 5].

Выдающимся сочинением по гидромеханике была работа Николая Егоровича «О движении твердого тела, имеющего полости, наполненные капельной жидкостью» [2], удостоенная Московским университетом премии профессора Брашмана. Н.Е. Жуковский доказал, что при изучении поступательных движений тел с жидким наполнением мы можем пользоваться теми же самыми уравнениями механики, что и при изучении сплошного твердого тела. Вращательное движение твердого тела вызывает относительное движение жидкости в полостях, и законы вращательного движения твердого тела с жидким наполнением будут совершенно другими.

Николай Егорович выяснил, что относительное движение идеальной жидкости в полостях вполне определяется движением тела. Как только движение жидкости будет определено (считая скорости на границах полостей известными), тогда, рассматривая твердое тело и жидкость в полостях как одну динамическую систему, можно получить основные дифференциальные уравнения движения тела. Оказывается, что движение тела совершается так, как будто бы жидкие массы были заменены эквивалентными твердыми телами. Массы этих эквивалентных тел равны массам жидких наполнений; центры тяжести эквивалентных тел совпадают с центрами тяжести объемов жидкостей, заполняющих полости. Однако моменты инерции эквивалентных тел относительно любой оси, проходящей через их центры тяжести, будут меньше моментов инерции соответственной жидкой массы относительно той же оси. Если же тело с жидким наполнением имеет некоторое начальное движение, то в этом случае его движение происходит так, как будто внутри тела находится вращающийся гироскоп, кинематический момент которого вполне определяется начальным движением жидкости. Эти рассуждения справедливы для идеальной жидкости. Естественно, что реальные жидкости тем ближе к идеальной, чем меньше внутреннее трение при движении частиц жидкости друг относительно друга. Например, вода, спирт, бензин имеют очень малую вязкость, малое внутреннее трение, а смазочные масла, мед имеют большое внутреннее трение (большую вязкость).

Для труднейшей проблемы гидромеханики, когда вязкостью жидкости пренебречь нельзя (даже для случая полостей простейших геометрических очертаний), Жуковский указал метод определения того предельного движения, которое будет иметь тело по истечении достаточно большого времени. Он сформулировал теорему: «Если в теле имеется какая-нибудь полость, наполненная трущейся жидкостью, и такой системе сообщены какие-нибудь начальные скорости, то движение ее будет стремиться к предельному состоянию, при котором одна из главных осей инерции рассматриваемых масс займет направление главного момента начальных количеств движения, и вся система будет вращаться около нее как одно неизменяемое тело с постоянной угловой скоростью, получаемой от разделения главного момента начальных количеств движения на момент инерции системы относительно этой оси» [2, с.181].

«Не этой ли теоремой, – пишет в заключении Жуковский, – следует объяснить то обстоятельство, что, несмотря на всякие случайные начальные скорости, планеты вращаются около своих главных осей инерции?» В факте вращения Земли около своей оси симметрии он видел подтверждение полученных им теоретических результатов. Кстати сказать, что строгая теория движения артиллерийских снарядов с жидким наполнением основывается на методах, развитых Жуковским в этой работе.

Особенно важными и интересными являются работы по устойчивости движения ракет с баками, частично заполненными жидким окислителем и горючим. Это сочинение Жуковского положило начало циклу исследований, имеющих большое научное и практическое значение. Работа была представлена на соискание премии профессора Брашмана. Отзыв на это выдающееся произведение механики был составлен учителем Николая Егоровича, профессором Ф.А. Слудским. Он писал: «Если бы сочинение Николая Егоровича состояло только из шести последних страниц, то и тогда оно было бы вполне достойно премии профессора Брашмана».

Подводя итоги своей научной деятельности за 40 лет, Н.Е. Жуковский отметил: «Мои главные работы по гидромеханике представляют три статьи: «Кинематика жидкого тела», «Движение твердого тела с полостями, наполненными жидкостью» и «Видоизменение метода Кирхгофа». Во всех своих работах я стремился нарисовать картину движения, дать его отчетливый геометрический образ» [3, с.60].

В работе «Видоизменение метода Кирхгофа» [4] Жуковский дает оригинальный и эффективный метод решения важнейшей задачи гидромеханики, относящейся к теории струй. Развитие этой теории тесно связано с определением сил воздействия потока воздуха на движущиеся в нем тела.

До Жуковского в теории струйного обтекания были известны два метода решения конкретных задач: обратный метод Гельмгольца и метод Кирхгофа. Число задач, решенных этими методами, было весьма ограничено.

Жуковский видоизменил метод Кирхгофа, позволяющий решать задачи при одной критической точке, и разработал свой наглядный геометрический метод, позволяющий изучить струйное течение жидкости при любом числе струй и критических точек. Наиболее трудные задачи методом Кирхгофа были решены русскими учеными Д.К. Бобылевым и И.В. Мещерским, которые подробно исследовали задачу о сопротивлении клина, помещенного в поток жидкости и газа. Мещерский особенно детально произвел расчеты, дал таблицы для определения силы давления потока в зависимости от угла клина и от направления потока. Жуковский решил своим методом не только задачи, рассмотренные указанными авторами, но и ряд новых задач.

В конце своего мемуара он применяет свой метод для исследования действия турбин.

В «Лекциях по гидродинамике» Н.Е. Жуковский писал: «...главная часть успешных динамических исследований нашего века выпала на долю гидродинамики. Если в старое время гидродинамика изгонялась из курсов теоретической механики, как недостойная этого названия, то теперь, разумеется, она должна занять видное место, являясь одной из блестящих глав механики» [5].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Жуковский Н.Е. Кинематика жидкого тела. Собр. Соч., т. II, ГИТТЛ, М.–Л., 1949, с. 5–142.

2. Жуковский Н.Е. О движении твердого тела, имеющего полости, наполненные однородной капельной жидкостью. Собр. Соч., т. II, ГИТТЛ, М.–Л., 1949, с. 152-309.

3. Жуковский Н.Е. Механика в Московском университете за последнее пятидесятилетие. Собр. Соч., т. VII, ГИТТЛ, М.–Л., 1950, с. 57–65.

4. Жуковский Н.Е. Видоизменение метода Кирхгофа для определения движения жидкости в двух измерениях при постоянной скорости, данной на неизвестной линии тока. Собр. Соч., т. II, ГИТТЛ, М.–Л., 1949, с. 489–626.

5. Жуковский Н.Е. Лекции по гидродинамике. Собр. Соч., т. II, ГИТТЛ, М.–Л., 1949, с. 316–488.

———————————————————————————————

УДК 51(091)+(092)

История Тульской алгебраической школы

А. Е. Устян Россия, г. Тула, Тульский государственный педагогический университет имени Л. Н. Толстого
ustyan37@mail.ru

The history of the Tula school of algebra

A. E. Ustyan Russia, Tula, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University
ustyan37@mail.ru

В истории математического факультета ТГПУ им. Л. Н. Толстого особое место занимает доктор физико-математических наук, профессор Гриндлингер Мартин Давидович.

Гриндлингер М. Д свою педагогическую деятельность в СССР начал в Ивановском педагогическом институте им. Д. А. Фурманова сначала ассистентом, затем старшим преподавателем, доцентом кафедры высшей алгебры. С 1 сентября 1965 г. по 1 августа 1966 г. находился на должности старшего научного сотрудника для завершения докторской диссертации, которую он защитил в ноябре 1966 г. Решением ВАК от 20 мая 1967 г. ему присуждена ученая степень доктора физико-математических наук.

В течение всего времени работы в Ивановском пединституте читал спецкурсы по теории групп и полугрупп, содержание и названия которых варьировались в зависимости от аудитории (студенты и аспиранты). Их можно назвать как задание групп и полугрупп порождающими и определяющими соотношениями, алгоритмические проблемы в теории групп и полугрупп, группы с малыми сокращениями.

Научная школа Гриндлингера в Иванове после его отъезда сохранилась и развивалась и продолжает развиваться под руководством доктора физико-математических наук Молдаванского Давида Ионовича.

С 23 декабря 1967 года Гриндлингер М. Д. работал в ТГПИ им. Л. Н. Толстого зав. кафедрой высшей алгебры и геометрии. Заведовал кафедрой до 1972 г.

С самого начала своей трудовой деятельности в ТГПИ им. Л.Н.Толстого он показал себя как выдающийся организатор науки. Сначала он создал математический кружок, который со временем перешел в научно-исследовательский семинар по теории групп и полугрупп. Успешно руководил научной работой своих учеников.

Мартин Давидович специалист в области алгоритмических проблем теории групп и полугрупп. Автор научных статей по этой проблематике.

Мартин Давидович являлся главным редактором, основанного им, сборника научных трудов «Вопросы теории групп и полугрупп», затем межвузовского сборника научных трудов «Алгоритмические проблемы теории групп и полугрупп».

Анализ научной работы М. Д. Гриндлингера ещё предстоит выполнить. В работах [1, 2] сделаны только первые шаги в этом направлении.

Тульская алгебраическая школа, которой в этом году исполнилось пятьдесят лет продолжает успешно развиваться под руководством ученика М. Д. Гриндлингера профессора, доктора физико-математических наук Владимира Николаевича Безверхнего. Более подробная информация содержится в работе [3].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. В. Н. Безверхний, И. В. Добрынина, Ю. Э. Трубицын, А. Е. Устян М. Д. Гриндлингер — основатель Тульской алгебраической школы (к 85–летию профессора) // Чебышевский сб. 2017. Т. 18, вып. 1. С. 160–166.

2. В. Н. Безверхний, А. Е. Устян, И. В. Добрынина 70-летие профессора Валерия Георгиевича Дурнева // Чебышевский сб. 2017. Т. 18, вып. 2. С. 279–297.

3. И. В. Добрынина, А. Е. Устян, Ю. Э. Трубицын К 75-летию доктора физико-математических наук, профессора Безверхнего Владимира Николаевича // Чебышевский сб. 2015. Т. 16, вып. 1. С. 291–300.

———————————————————————————————

УДК 517.5

Механическая спектроскопия металлов. История зарождения, развитие, ретроспектива и перспективы[1]

А. Н. Чуканов Россия, г. Тула, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого
А. А. Яковенко Россия, г. Тула, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого
И. М. Леонтьев Россия, г. Тула, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого
И. Ф. Широкий Россия, г. Тула, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого
alexchukanov@yandex.ru

Mechanical spectroscopy of metals. The history of the origin, development, retrospective and prospects

A. N. Chukanov Russia, Tula, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University
A. A. Yakovenko Russia, Tula, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University
I. M. Leontiev Russia, Tula, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University
I. F. Shirok Russia, Tula, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University
alexchukanov@yandex.ru

[1]Работа выполнена в рамках реализации ФЦП «Исследования и разработки по приоритетным направлениям развития научно-технологического комплекса России на 2014-2020 годы» по теме: «Разработка прототипа инженерного программного обеспечения (ИПО) на основе высокопроизводительных вычислений для оценки механических характеристик изделия, изготовленного с использованием аддитивных технологий (методом селективного лазерного спекания) с учетом стратегии изготовления изделия» (уникальный идентификатор проекта RFMEFI57717X0271).

Представлена ретроспектива становления и развития одного из методов изучения несовершенной упругости (неупругости) материалов – механической спектроскопии (внутреннего трения). Дано современной состояние данного направления и перспективы его развития, в том числе в части исследований, проводимых авторами работы.

Введение. Механическая спектроскопия – это совокупность методов исследования состояния материала, заключающихся в анализе спектров рассеяния энергии: частотных, температурных, амплитудных, временных при циклическом нагружении. Одной из сторон механической спектроскопии является внутреннее трение (ВТ) – способность материалов необратимо рассеивать энергию упругих механических колебаний, переводя её посредством различных механизмов в тепло. Подобное неупругое поведение (деформация) материала обусловлено широким спектром процессов, изучая которые можно получить уникальную информацию о структуре и состоянии материала [1].

Цель данной работы – познакомить научную общественность с историей развития метода механической спектроскопии как интегрального метода оценки и новыми возможностями в фиксации и количественной оценке общей и локализованной деградации и деструкции металлов и сплавов различной природы. Основная идея. Механическая спектроскопия анализирует информацию, получаемую от физического объекта (образца материала), подвергающегося воздействию внешних полей. Параметры полей сопоставляют с параметрами отклика объекта. В качестве возмущающих полей используют статическое или периодическое поле приложенных к образцу напряжений. Откликом является релаксация напряжений (деформация) в объекте или характеристики рассеяния подводимой к нему энергии, реже - изменение температуры.

При наличии нескольких релаксационных процессов, каждый из них характеризуется своим временем релаксации. Совокупность времён релаксации отдельных процессов образует спектр ВТ данного материала, описывающий его состояние в определенных условиях [1,2]. В спектре ВТ выделяют неупругие эффекты (НЭ) в виде экстремумов или максимумов (пиков). Анализируя их характеристики, получают информацию о развитии различных физических процессов, вызывающих рассеяние [2]. Температурный спектр ВТ (ТЗВТ) – это комплекс НЭ, каждый из которых отражает изменение динамических характеристик дефектов строения, фазового состава, перерас¬пределение собственных и растворенных атомов, формирование локальных зон концентрации напряжений (ЛЗКН) и несплошностей.

Помимо известных в сталях на основе α-Fe релаксационных процессов – максимумов Снука, Снука-Кэ-Кёстера (азотных, углеродных, водородных) [3] к обсуждению предлагаются неупругие эффекты, отражающие развитие в металлах деструкционных процессов различной природы (водородные максимумы Каннели - Вердини, деструкционный максимум). Заявлены новые возможности механической спектроскопии, отражающие фиксацию как интегральных (в объеме образца), так и локальных (в локальных зонах концентрации напряжений) параметров субструктуры [4,5].

Предлагаются новые направления использования механической спектроскопии: 1) в оценке перехода металла в локальное предельное состояние; 2) в изучении стадийности деградации и разрушения сталей; 3) в исследовании роли водорода в деградации и деструкции сплавов системы Fe-C; 4) в изучении обезуглероживания сталей; 5) для изучения поверхностной активности примесей внедрения; 6) структурного моделирования поврежденности сплавов Fe-C.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Физическая акустика [Под ред. Мэзона У. Часть А. Влияние дефектов на свойства твёрдых тел]. М.: «Мир», 1969. — 578с.

2. Новик А., Берри Б. Релаксационные явления в кристаллах. – М.: Атомиздат, 1975. — 472.

3. Метод внутреннего трения в металловедческих исследованиях [Под ред. Блантера М.С., Пигузова Ю.В.]. М: Металлургия, 1991. – 248с.

4. Чуканов А.Н., Левин Д.М., Яковенко А.А. Использование и перспективы метода внутреннего трения в оценке деградации и деструкции железо - углеродистых сплавов //Известия РАН. Серия Физическая. – 2011. – Т.75 - № 10, – С.1423-1427

5. Яковенко А.А. Механизмы и закономерности формирования деформационной и водородной повреждаемости железоуглеродистых сплавов. Диссерт на соиск. уч. степ. канд. техн. наук.- Курск, Юго-Западный государственный университет, – 2012. – 240 с

––

СОДЕРЖАНИЕ

Научное издание

АЛГЕБРА, ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ И ДИСКРЕТНАЯ ГЕОМЕТРИЯ: СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ И ПРИЛОЖЕНИЯ

Материалы XV Международной конференции, посвященной столетию со дня рождения профессора Николая Михайловича Коробова

Подписано в печать 24.05.2018. Формат 60×90/8.
Бумага офсетная. Печать трафаретная.
Усл. печ. л. 49,0. Тираж 100 экз. Заказ 18/010. «С» 1762.

Тульский государственный педагогический
университет им. Л. Н. Толстого. 300026, Тула, просп. Ленина, 125.

Отпечатано в ТГПУ им. Л. Н. Толстого.
300026, Тула, просп. Ленина, 125.