Библиотека Чебышевского сборника

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Министерство просвещения Российской Федерации
Российская академия наук
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
Математический институт им. В. А. Стеклова РАН
Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В. А. Стеклова РАН
Санкт-Петербургский государственный университет
Институт истории естествознания и техники им. С. И. Вавилова РАН
Московский педагогический государственный университет
Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого
Математический центр мирового уровня МИАН
Тульский государственный университет

Алгебра, теория чисел, дискретная геометрия и многомасштабное моделирование: современные проблемы, приложения и проблемы истории

Материалы XXIII Международной конференции, посвящённой 80-летию профессора Александра Ивановича Галочкина и 75-летию профессора Владимира Григорьевича Чирского

Тула, 29–31 октября 2024 года

ББК 22.1
УДК 51
А45

Алгебра, теория чисел, дискретная геометрия и многомасштабное моделирование: Современные проблемы, приложения и проблемы истории: Материалы XXIII Международной конференции, посвященной 80-летию проф. А. И. Галочкина и 75-летию проф. В. Г. Чирского. —

Тула: Тул. гос. пед. ун-т им. Л. Н. Толстого, 2024. – 248 с.
ISBN 5–87954–388–9

ББК 22.1
УДК 51

ISBN 5–87954–388–9

Пленарные доклады

УДК 519.4

О пересечении циклических подгрупп в группах C(4)&T(4)[1]

В. Н. Безверхний (Россия, г. Москва)
Российская таможенная академия
e-mail: vnbezv@rambler.ru
Н. Б. Безверхняя (Россия, г. Москва)
Московский технический университет связи и информатики
e-mail: vnbezv@rambler.ru

On the intersection of cyclic subgroups in groups C(4)&T(4)

V. N. Bezverkhnii (Russia, Moscow)
Russian Customs Academy
e-mail: vnbezv@rambler.ru
N. B Bezverhnyaya (Russia, Moscow)
Moscow Technical University of Communication and Informatics
e-mail: vnbezv@rambler.ru

М. Д. Гриндлингером [1] был открыт класс конечноопределенных групп с условием малой меры сокращения. Р. Линдоном [2] был обобщен класс групп Гриндлингера. Им был определен класс групп с малым сокращением, в котором он решил проблему равенства слов.

К данному классу групп относятся группы C(4)&T(4), C(6)&T(3), C(3)&T(6), которые будем обозначать как группы с условием C(p)&T(q) [3]. П. Шупп решил в данных классах групп проблему сопряженности слов. [4].

В. Н. Безверхним [5] было определено понятие специального сокращения слов для групп с условием C(p)&T(q), используя которое был получен ряд результатов: доказана разрешимость проблемы вхождения в циклическую подгруппу, решена проблема обобщённой сопряженности слов и доказано, что централизатор конечнопорожденной подгруппы $H < G$, где G есть подгруппа с условием C(p)&T(q), конечно порожден и некоторые другие проблемы. Пусть

$$G = \langle a_1, a_2, ..a_n; r_1, r_2, .., r_m \rangle.$$

копредставление группы G.

Множество определяющих соотношений $\Re = \{r_i | i = \overline{1, m}\}$ образует симметризованное множество, если каждое $r_i \in \Re$ циклически несократимо и из того, что $r_i \in \Re$ следует, что ${r_i}^{-1} \in \Re$, и каждая циклическая перестановка r_i тоже принадлежит $\Re$.

Понятие куска определяющего соотношения, условия C(p)&T(q) определяющих соотношений из $\Re$, понятие R-сократимости и деновской области известны [3].

Из теоремы ван Кампена [3] следует, что $\forall w \in G$ не равного единице в свободной группе F и равного единице в группе G, существует диаграмма M над $\Re$, граничная метка которой есть слово w, то есть $\varphi(\partial M) = w$, где ∂M — граничный цикл диаграммы M, φ — функция, ставящая каждому ребру l карты M слово $\varphi(l)$ из F, и $\varphi(l)$ — кусок соотношения из $\Re$.

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке гранта: № 075–15–2023–523

Обозначим через $\|\varphi(\gamma)\| = s$ число кусков, на которые граничные области разбивают путь γ. Через $d(D)$ обозначим число ребер области $D, D \in M$ и так как группа G удовлетворяет условию C(4), то $d(D) \geq 4$, $\forall D \in M$ [3].

Очевидно, что R-сокращению диаграммы M соответствует сокращение слова $\varphi(\partial M) = w$, то есть замена слова $w = w_1\varphi(\partial D \cap \partial M)w_2$ равным ему в G словом $w_1\varphi(\partial D \backslash (\partial D \cap \partial M)w_2$, длина которого меньше длины слова $w : \|w_1\varphi(\partial D \cap \partial M)w_2\| > \|w_1\varphi(\partial D \backslash (\partial D \cap \partial M)w_2\|$.

Определение 1. *Пусть $w \in G$. Если любая циклическая перестановка слова w не является R-сократимым словом, то будем говорить, что слово w циклически R-несократимо или R**-несократимо.*

Определение 2 (5). *. Поддиаграмма $\Pi = \bigcup_{i=1}^{n} D_i$ диаграммы M над группой с условием C(4)&T(4) называется специальной полосой, если она удовлетворяет следующим условиям:*

1. *Множество $\bigcup_{i=1}^{n} \partial D_j \bigcap \partial M$, $1 \leq j \leq n$, связно и является последовательной частью ∂M;*

2. *$i(D_1) = i(D_n) = 2$;*

3. *$i(D_j) = 3, 2 \leq j \leq n-1$;*

4. *$\partial D_j \bigcap \partial D_{j+1} = e_j$ -ребро, $1 \leq j \leq n$;*

5. *$\partial D_j \bigcap \partial D_i = \emptyset$, при $|i-j| > 1$.*

Лемма 1 (5). *Если связная, односвязная диаграмма M над $\Re$, где $\Re$ — симметризованное множество, удовлетворяющее условию $C(4)\&T(4)$ не содержит деновских областей, то она содержит минимум две непересекающиеся полосы.*

Пусть Π — специальная полоса диаграммы M, тогда число кусков в $\partial\Pi \bigcap \partial M$ равно $\|\varphi(\partial\Pi \bigcap \partial M)\|$.

Определение 3. *Так как $\|\partial\Pi \bigcap \partial M\| > \|\partial\Pi \backslash (\partial\Pi \bigcap \partial M)\|$, то замену слова $\varphi(\partial M) = w_1\varphi(\partial\Pi \cap \partial M)w_2$ словом $w_1\varphi(\partial\Pi \backslash (\partial\Pi \cap \partial M)w_2$ назовем R*-сокращением слова w.*

Рассмотрим следующий тип преобразований слова $w, w \in G$.

Пусть M — кольцевая диаграмма с граничными циклами γ, δ, и пусть $\varphi(\gamma) = w^n$, $\varphi(\delta) = v^m$, где $n, m \in N \backslash \{1\}$, w и v циклически R и R* не сократимы. Пусть, однако, в произведении $..ww..$ есть R*-сокращения. Следовательно, в диаграмме M есть специальная полоса $\Pi = \bigcup_{j=1}^{k} D_j$, позволяющая ввести и использовать R_c-сокращение слова w, определяемое в [6] .

Основной результат состоит в решении проблемы пересечения циклических подгрупп в группах C(4)&T(4).

Определение 4. *В группе G разрешима проблема пересечения циклических подгрупп, если существует алгоритм, позволяющий для любых слов $v, w \in G$ определить числа $m, n \in Z$ такие, что $v^n = w^m$.*

Теорема 1 (6). *Пусть $v, w \in G$, G группа с условием $C(4)\&T(4)$, $\|w\| = \|v\|$, слова w, v -R, R^*, R^{**} и R_c- несократимы, и пусть существуют $m, n \in Z$, $z \in G$, такие, что $z^{-1}v^n z = w^m$, тогда $n = m$ и n ограничено числом k, являющимся функцией длины слова w.*

Теорема 2 (6). *Существует алгоритм, позволяющий для любых двух слов $v, w \in G$, G с условием $C(4)\&T(4)$ определить, существуют ли $m, n \in Z$, $z \in G$, такие, что $z^{-1}v^n z = w^m$.*

Теорема 3. *Пусть $v, w \in G$, G группа с условием $C(4)\&T(4)$, $\|w\| = \|v\| = 1$, v, w куски определяющих соотношений и $\langle w\rangle \bigcap \langle v\rangle = E$ в свободной группе F_n, тогда в группе G также имеет место равенство $\langle w\rangle \bigcap \langle v\rangle = E$, где E- единичная подгруппа, $\langle w\rangle, \langle v\rangle$ циклические подгруппы G.*

Лемма 2. *Пусть $v, w \in G$, G группа с условием $C(4)\&T(4)$. Слова w, v -R, R^*, R^{**} и R_c- несократимыми, $\|w\| = \|v\| \neq 1$, wv^{-1} не принадлежит $\Re$. Пусть существуют $m, n \in Z$ такие, что $w^m = v^n$. Тогда $n = m$.*

Если $wv^{-1} \in \Re$, тогда очевидно, что лемма справедлива. Заметим, что, если в лемме 2 $\|w\| \neq \|v\|$, тогда соотношение $w^m = v^n$ преобразуем в соотношение $(w^{\|v\|})^{m\|w\|} = (v^{\|w\|})^{n\|v\|}$, в котором $w^{\|v\|} = v^{\|w\|}$, следовательно $m\|w\| = n\|v\|$.

Лемма 3. *Пусть $v, w \in G$, G группа с условием $C(4)\&T(4)$. Слова w, v -R, R^*, R^{**} и R_c- несократимыми, $\|w\| = \|v\| \neq 1$, wv^{-1} не принадлежит $\Re$. Пусть существуют $n \in Z$ такие, что $w^n = v^n$. Тогда существует $s \in Z$ такое, что слова w^s и v^s сопряжены в G.*

Лемма 4. *Пусть $v, w \in G$, G группа с условием $C(4)\&T(4)$. Слова w, v -R, R^*, R^{**} и R_c-несократимыми, $\|w\| = \|v\| \neq 1$, wv^{-1} не принадлежит $\Re$. И пусть для любого $s \in Z$ слова w^s и v^s сопряжены в G. Тогда в группе G $w^n \neq v^n$ при любом n.*

Теорема 4. *Существует алгоритм, позволяющий для любых двух слов $v, w \in G$, G группа с условием $C(4)\&T(4)$, где слова w, v -R, R^*, R^{**} и R_c- несократимыми, $\|w\| = \|v\| \neq 1$, wv^{-1} не принадлежит $\Re$, установить, существует ли $n \in Z$ такое, что $w^n \neq v^n$.*

Теорема 5. *(основная). В группе G разрешима проблема пересечения циклических групп.*

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гриндлингер М. Д. К проблеме тождества слов и сопряженности // Изв. АН СССР, сер. матем. 1965. 29. С. 245-268.

2. Lindon R. On Dehns algorithm // Math. Ann. 1966. 166. P. 208-228.

3. Линдон Р., Шупп П. Комбинаторная теория групп — Москва: Изд-во Мир, 1980.

4. Schupp P. On Dehns algorithm and conjugacy problem // Math. Ann. 1968. 178. P. 119-130.

5. Безверхний В. Н. О нормализаторах элементов в C(p)&T(q)-группах. //Алгоритмич. проблемы теории групп и полугрупп. Меж. вузов. сб. науч. тр. 1994. С. 4-58.

6. Безверхний В. Н. Безверхняя Н. Б. Решение проблемы степенной сопряженности слов и проблемы степени в группах с малым сокращением // Алгебра, теория чисел, дискретная геометрия и многомасштабное моделирование: современные проблемы, приложения и проблемы истории. Материалы XXII межд. конф. (Тула 26-29 мая 2023 г.) —Тула, 2023. С. 29-34.

УДК 511.32

Трансцендентность числа π

Ю. В. Нестеренко (Россия, г. Москва)
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
e-mail: yunester@outlook.com

The transcendence of the number π

Yu. C. Nesterenko (Russia, Moscow)
Lomonosov Moscow State University
e-mail: yunester@outlook.com

Корни многочленов с целыми коэффициентами называются алгебраическими числами. Как известно, их множество счётно и имеет меру нуль. Все другие числа называются трансцендентными. В 1873 г. Ш. Эрмит доказал трансцендентность числа е, а ещё через десять лет, в 1882г., Ф. Линдеман, обобщая подход Эрмита, доказал трансцендентность числа π. Этот результат установил невозможность квадратуры круга с помощью циркуля и линейки – решения знаменитой задачи, поставленной ещё в Древней Греции и насчитывавшей к концу XIX века более 2000 лет. Сведение квадратуры круга к вопросу о трансцендентности π было выполнено в 1837г. П. Вантцелем.

В докладе мы расскажем новое доказательство трансцендентности π. Оно основано на исследовании одного специального комплексного интеграла и элементарной теории чисел. В настоящее время это наиболее простое и короткое из всех известных доказательств трансцендентности π.

УДК 511.32

Проблема Варинга с почти пропорциональными слагаемыми

З. Х. Рахмонов (Таджикистан, Душанбе)
Институт математики им. А. Джураева НАНТ
e-mail: zarullo-r@rambler.ru или zarullo.rakhmonov@gmail.com
Ф. З. Рахмонов (Таджикистан, Душанбе)
Институт математики им. А. Джураева НАНТ
e-mail: rakhmonov.firuz@gmail.com

The Waring problem with almost proportional summands

Z. Kh. Rakhmonov (Tajikistan, Dushanbe)
Dzhuraev Institute of Mathematics of the NAST
e-mail: r@rambler.ru или zarullo.rakhmonov@gmail.com
F. Z. Rakhmonov (Tajikistan, Dushanbe)
Dzhuraev Institute of Mathematics of the NAST
e-mail: rakhmonov.firuz@gmail.com

Проблему Варинга с почти пропорциональными слагаемыми впервые исследовал М. Е. Райт [1, 2]. Для количества представлений достаточно большого числа N в виде

$$x_1^n + x_2^n + \ldots + x_r^n = N, \tag{1}$$

где $x_1, x_2, \ldots, x_r$ — натуральные числа и

$$|x_i^n - \mu_i N| \leqslant N^{1-\theta}, \qquad i = 1, 2, \ldots, r, \qquad \mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_r = 1,$$

где $\mu_1, \ldots, \mu_r$ — положительные фиксированные числа, а число $\theta = \theta(n, r)$ определяется из соотношения

$$\theta(n,r) = \frac{1}{n} \min \left(\frac{(r-2^n)(2^{n-1}+1)}{(nr+n-2^n-3)2^{n-1}+r}, \frac{r-(n-2)2^{n-1}-4}{r+2^{n-1}-4}, \frac{r-2^{n-1}}{nr-2^{n-1}+n-1} \right), \tag{2}$$

он нашёл асимптотическую формулу при

$$r \geqslant r(n) = (n-2)2^{n-1} + 5. \tag{3}$$

Отсюда, в частности для $n = 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10$ при $r = (n-2)2^{n-1} + 5$, имеем

n	3	4	5	6	7	8	9	10
$r(n) = (n-2)2^{n-1} + 5$	9	21	53	133	325	773	1797	4101
$\theta(n,r)$	$\frac{1}{51}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{325}$	$\frac{1}{966}$	$\frac{1}{2695}$	$\frac{1}{6279}$	$\frac{1}{18441}$	$\frac{1}{46090}$

Таблица 1

В 2010 г. Дерк Деймон [3] пользуясь теоремой о среднем И. М. Виноградова и процедурой «биномиального спуска», при $r \geqslant r_n$, где

$$\begin{aligned} &r_2 = 9, \quad r_3 = 19, \quad r_4 = 49, \quad r_5 = 113, \quad r_6 = 243, \quad r_7 = 417, \quad r_8 = 675, \quad r_9 = 1083, \\ &r_{10} = 1773, \qquad r_n = 2\left[\frac{5n^2}{3}\ln n + \frac{29n^2}{30}\ln\ln n + \frac{7n^2}{3}\ln\ln\ln n + Cn^2\right] + 1, \qquad n > 10, \end{aligned} \tag{4}$$

C — абсолютная постоянная, доказал асимптотическую формулу для числа решений уравнения (1), при выполнении условий

$$X - Y \leqslant x_j \leqslant X + Y, \quad 1 \leqslant j \leqslant r, \quad X = \left[\left(\frac{N}{r}\right)^{\frac{1}{n}}\right], \quad Y = \sqrt{X} Y_n, \quad Y_n = (\ln X)^{r_{n-1}},$$

где Y_2 – функция от X, стремящаяся к бесконечности вместе с X, (см. также [4, 5]).

Заметим, что теорема М. Райта об асимптотической формуле в проблеме Варинга с почти пропорциональными слагаемыми при $\mu_1 = \ldots = \mu_r = \frac{1}{r}$, то есть при

$$\sqrt[n]{\frac{N}{r} - N^{1-\theta}} \leqslant x_j \leqslant \sqrt[n]{\frac{N}{r} + N^{1-\theta}}.$$

превращается в теорему об асимптотической формуле в проблеме Варинга с почти равными слагаемыми с параметрами $\theta = \theta(n, r)$ и $r = r(n)$, которые определяются в формулах (2) и (3). Эта асимптотическая формула в сильнее теоремы Дерка Деймона в смысле количества слагаемых при $n = 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7$.

Воспользовавшись поведением коротких тригонометрических сумм Г. Вейля вида

$$T(\alpha; x, y) = \sum_{x-y<m\leqslant x} e(\alpha m^n),$$

в больших дугах [6, 7] в сочетании с нетривиальными оценками этих сумм в малых дугах [8], были доказаны асимптотические формулы для количества решений в следующих аддитивных задачах с почти равными слагаемыми:

- в проблеме Варинга с почти равными слагаемыми для $n = 3, 4, 5$ [9, 10, 11, 7], то есть для количества решений диофантова уравнения (5) с условиями

$$\left|x_i - \left(\frac{N}{2^n+1}\right)^{\frac{1}{n}}\right| \leqslant H, \qquad i = 1, \ldots, 2^n+1, \qquad H \geqslant N^{\frac{1}{n}-\theta(n)+\varepsilon},$$

при

$$\theta(3) = \frac{1}{30}, \qquad \theta(4) = \frac{1}{108}, \qquad \theta(5) = \frac{1}{340}.$$

- в обобщении [12, 6, 13] тернарной проблемы Эстермана с почти равными слагаемыми о представлении достаточно большого натурального числа в виде

$$p_1 + p_2 + m^n = N,$$

при $n = 2, 3, 4$, в простых числах p_1, p_2 и натурального m, с условиями

$$\left|p_i - \frac{N}{3}\right| \leqslant H, \quad i = 1, 2, \qquad \left|m^n - \frac{N}{3}\right| \leqslant H, \qquad H \geqslant N^{1-\theta(n)}\mathscr{L}^{c_n},$$

соответственно при

$$\theta(2) = \frac{1}{4}, \quad c_2 = 2; \qquad \theta(3) = \frac{1}{6}, \quad c_3 = 3; \qquad \theta(4) = \frac{1}{12}, \quad c_4 = \frac{40}{3}.$$

В этой работе доказано, что теорема Е. М. Райта об асимптотической формуле в обобщении проблемы Варинга с почти пропорциональными слагаемыми имеет место при условии

$$\theta(n, r) = \frac{2}{(r+1)(n^2-n)}, \qquad r = 2^n+1. \tag{5}$$

Теорема 1. *Пусть N — достаточно большое натуральное число, $n \geqslant 3$ — натуральное число, $r = 2^n + 1$, $\mu_1, \ldots, \mu_r$ — положительные фиксированные числа, удовлетворяющие условию*

$$\mu_1 + \ldots + \mu_r = 1,$$

$J_{n,r}(N, H)$ — число решений диофантова уравнения (1) с условиями

$$|x_i^n - \mu_i N| \leqslant H, \qquad i = 1, \ldots, r \qquad \theta(n, r) = \frac{2}{(r+1)(n^2-n)}. \tag{6}$$

Тогда при $H \geqslant N^{1-\theta(n,r)+\varepsilon}$ справедлива асимптотическая формула:

$$J_{n,r}(N, H) = \frac{2^r\gamma(n, r)}{n^r}\prod_{i=1}^{r}\mu_i^{-1+\frac{1}{n}}\mathfrak{S}(N)\frac{H^{r-1}}{N^{r-\frac{r}{n}}} + O\left(\frac{H^{r-1}}{N^{r-\frac{r}{n}}\mathscr{L}}\right),$$

где $\gamma(n, r)$ — абсолютная постоянная, которая определяется соотношением

$$\gamma(n, r) = \frac{r^{r-1} - \frac{r}{1!}(r-2)^{r-1} + \frac{r(r-1)}{2!}(r-4)^{r-1} - \frac{r(r-1)(r-2)}{3!}(r-6)^{r-1} + \ldots}{2^r(r-1)!},$$

$\mathfrak{S}(N)$ – особый ряд, сумма которого превосходит некоторое положительное постоянное, а постоянное под знаком O зависит от чисел $\mu_1, \ldots, \mu_r$.

Отсюда, в частности, имеем

n	3	4	5	6	7	8	9	10
$r=2^n+1$	9	17	33	64	129	257	513	1025
$\theta(n,r)$	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{108}$	$\frac{1}{340}$	$\frac{1}{990}$	$\frac{1}{2730}$	$\frac{1}{7224}$	$\frac{1}{18504}$	$\frac{1}{46170}$

Таблица 2

Из теоремы 1 следует асимптотическая формула в обобщении проблемы Варинга с почти равными слагаемыми.

Следствие 1. *Пусть N — достаточно большое натуральное число, $n \geqslant 3$ — натуральное число, $r = 2^n+1$, $J_{n,r}(N,H)$ — число решений диофантова уравнения (1) с условиями*

$$\left|x_i^n - \frac{N}{r}\right| \leqslant H, \qquad i=1,\ldots,r \qquad \theta(n,r) = \frac{2}{(r+1)(n^2-n)}.$$

Тогда при $H \geqslant N^{1-\theta(n,r)+\varepsilon}$ справедлива асимптотическая формула:

$$J_{n,r}(N,H) = \frac{2^r r^{r-\frac{r}{n}}\gamma(n,r)}{n^r}\mathfrak{S}(N)\frac{H^{r-1}}{N^{r-\frac{r}{n}}} + O\left(\frac{H^{r-1}}{N^{r-\frac{r}{n}}\mathscr{L}}\right).$$

Заметим, что теорема 1 является усилением теоремы Е. М. Райта, а из формулы (4) и таблицы 2 следует также, что следствие 1 сильнее теоремы Дерка Деймона в смысле количества слагаемых при $n = 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10$.

Доказательство теоремы 1 проводится круговым методом Харди-Литтлвуда-Рамануджана в форме тригонометрических сумм И. М. Виноградова и при $n = 3$ ранее был доказан в работе [14]. Основными утверждениями, позволившими получить новые значения (5) для параметров $\theta(n,r)$ и r, являются:

- асимптотическая формула для коротких тригонометрических сумм Г. Вейля вида $T(\alpha; x, y)$ в малой окрестности центра больших дуг (следствие 2 теоремы 2);
- нетривиальная оценка сумм $T(\alpha; x, y)$ в больших дугах за исключением малой окрестности их центров (следствие 3 теоремы 2);
- теорема 3 о среднем значении коротких тригонометрических сумм Г. Вейля вида $T(\alpha; x, y)$;
- нетривиальная оценка сумм $T(\alpha; x, y)$ в малых дугах [8].

Р. Вон [15] изучая суммы Г.Вейля вида $T(\alpha, x)$ в больших дугах, воспользовавшись оценкой Хуа Ло-кена для полных тригонометрических сумм вида

$$S_b(a,q) = \sum_{k=1}^{q} e\left(\frac{ak^n+bk}{q}\right) \ll q^{\frac{1}{2}+\delta}(b,q), \qquad S(a,q) = S_0(a,q), \tag{7}$$

методом Ван дер Корпута доказал:

$$T(\alpha,x) = \sum_{m\leqslant x} e(\alpha m^n) = \frac{S(a,q)}{q}\int_0^x e\left(\lambda t^n\right)dt + O\left(q^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\left(1+x^n|\lambda|\right)^{\frac{1}{2}}\right).$$

При условии, что α очень хорошо приближается рациональным числом со знаменателем q, то есть при выполнении условия

$$|\lambda| \leq \frac{1}{2nqx^{n-1}},$$

он также доказал:

$$T(\alpha,x) = \frac{x\ S(a,q)}{q}\int_0^1 e\left(\lambda t^n\right)dt + O\left(q^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\right). \tag{8}$$

Теорема 2. *Пусть $\tau \geq 2n(n-1)x^{n-2}y$, тогда при $\{n|\lambda|x^{n-1}\} \leqslant \frac{1}{2q}$ имеет место формула*

$$T(\alpha; x, y) = \frac{S(a,q)}{q} T(\lambda; x, y) + O\left(q^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\right),$$

а при $\{n|\lambda|x^{n-1}\} > \frac{1}{2q}$ имеет место оценка

$$|T(\alpha, x, y)| \ll q^{1-\frac{1}{n}} \ln q + \min(yq^{-\frac{1}{n}}, \lambda^{-\frac{1}{2}} x^{1-\frac{n}{2}} q^{-\frac{1}{n}}).$$

Следствие 2. *Пусть $\tau \geq 2n(n-1)x^{n-2}y$, $|\lambda| \leqslant \frac{1}{2nqx^{n-1}}$, тогда имеет место соотношение*

$$T(\alpha; x, y) = \frac{y}{q} S(a,q) \gamma(\lambda; x, y) + O(q^{\frac{1}{2}+\varepsilon}),$$

$$\gamma(\lambda; x, y) = \int_{-0,5}^{0,5} e\left(\lambda \left(x - \frac{y}{2} + yt\right)^n\right) dt.$$

Следствие 3. *Пусть $\tau \geq 2n(n-1)x^{n-2}y$, $\frac{1}{2nqx^{n-1}} < |\lambda| \leqslant \frac{1}{q\tau}$, тогда имеет место оценка*

$$T(\alpha; x, y) \ll q^{1-\frac{1}{n}} \ln q + \min\left(yq^{-\frac{1}{n}}, x^{\frac{1}{2}} q^{\frac{1}{2}-\frac{1}{n}}\right).$$

Следствие 2 является обобщением формулы (8) для коротких тригонометрических сумм Г. Вейля вида $T(\alpha; x, y)$. Частный случай теоремы 2 при $n = 3$ ранее был доказан в [6] и является уточнением теоремы 1 работы [7]. Доказательство теоремы 2 проводится методом оценки специальных тригонометрических сумм Ван дер Корпута с применением формулы суммирования Пуассона [16] и оценки (7).

Теорема 3. *Пусть x и y — натуральные числа, $\sqrt{x} < y \leqslant x\mathscr{L}^{-1}$, тогда имеет место оценка*

$$\int_0^1 |T(\alpha; x, y)|^{2^k} d\alpha \ll y^{2^k - k + \varepsilon}, \qquad 1 \leqslant k \leqslant n.$$

Эта теорема является обобщением теоремы Хуа Ло-кена ([17], лемма 2.5) о среднем значении тригонометрической суммы $T(\alpha, x)$, то есть оценки

$$\int_0^1 |T(\alpha, x)|^{2^k} \ll x^{2^k - k + \varepsilon}, \qquad 1 \leqslant k \leqslant n.$$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Wright E. M. Proportionality conditions in Waring's problem // Mathematische Zeitschrift. 1934. V. 38. P. 730 – 746.

2. Wright E. M. An extension of Waring's problem // Philos. Trans. R. Soc. Lond. 1933. Ser. A 232. P. 1 – 26.

3. Dirk Daemen. The asymptotic formula for localized solutions in Waring's problem and approximations to Weyl sums // Bull. London Math. Soc., 2010. V. 42. P. 75 – 82.

4. Dirk Daemen. Localized solutions in Waring's problem: the lower bound // Acta Arithmetica. 2010. V. 142. № 2. P. 129 – 143.

5. Dirk Daemen. On sums of 13 ‘almost equal’ cubes // Quart. J. Math. 2010. V. 61, P. 29 – 32.

6. Рахмонов З. Х. Кубическая задача Эстермана с почти равными слагаемыми // Математические заметки. 2014. Т. 95. вып. 3. С. 445 – 456.

7. Рахмонов З. Х., Назрублоев Н. Н., Рахимов А. О. Короткие суммы Г.Вейля и их приложения // Чебышевский сборник. 2015. Т. 16. В. 1(53). С. 232 – 247.

8. Рахмонов З. Х., Азамов А. З., Назрублоев Н. Н. Короткие тригонометрические суммы Г. Вейля в малых дугах // Доклады Академии наук Республики Таджикистан. 2018 г. Т. 61. № 7-8. С. 609–614.

9. Рахмонов З. Х., Мирзоабдугафуров К. И. Проблема Варинга для кубов с почти равными слагаемыми // Доклады Академии наук Республики Таджикистан, 2008. Т. 51. № 2. С. 83 – 86.

10. Рахмонов З. Х., Азамов А. З. Асимптотическая формула в проблеме Варинга для четвертых степеней с почти равными слагаемыми // Доклады Академии наук Республики Таджикистан. 2011. Т. 54. № 3. С. 34 – 42.

11. Рахмонов З. Х., Назрублоев Н. Н. Проблема Варинга для пятых степеней с почти равными слагаемыми // Доклады Академии наук Республики Таджикистан. 2014. Т. 57. № 11 – 12. С. 823 – 830.

12. Рахмонов З. Х. Тернарная задача Эстермана с почти равными слагаемыми // Математические заметки. 2003. Т. 74. вып. 4. С. 564 – 572.

13. Рахмонов Ф. З., Рахимов А. О. Об одной аддитивной задаче с почти равными слагаемыми // Исследования по алгебре, теории чисел, функциональному анализу и смежным вопросам. Издательство: Саратовский национальный исследовательский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского. ISSN: 1810-4134. 2016. № 8. С. 87 – 89.

14. Рахмонов З. Х. Обобщение проблемы Варинга для девяти почти пропорциональных кубов // Чебышевский сборник. 2023. Т. 24. № 3. С. 71-94

15. Vaughan R. C. Some remarks onWeyl sums // Topics in Classical Number Theory, Colloquia. Math. Soc. Janos Bolyai, 34. 1981. P. 1585 – 1602.

16. Карацуба А. ,А., Королёв М. А. Теорема о замене тригонометрической суммы более короткой // Известия РАН. Серия математическая. 2007. Т. 71. № 2. С. 123 – 150.

17. Вон Р. Метод Харди–Литтлвуда — Москва: Мир, 1985.

18. Хуа Ло-Ген Метод тригонометрических сумм и её применения в теории чисел — Москва: Мир, 1964.

УДК 511.36

Метод Зигеля — Шидловского в теории трансцендентных чисел

В. Г. Чирский (Россия, г. Москва)
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
e-mail: vgchirskii@yandex.ru

Siegel–Shidlovskii method in the theory of transcendental numbers

V. G. Chirskii (Russia, Moscow)
Lomonosov Moscow State University
e-mail: vgchirskii@yandex.ru

Основной вариант метода был развит для E–функций, т.е. степенных рядов вида $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n!} z^n$, коэффициенты которых — алгебраические числа, удовлетворяющие ряду условий. После работ К. Зигеля, основной вклад в развитие метода был получен в работах А.Б. Шидловского. Им были получены общие теоремы об алгебраической независимости совокупности значений в алгебраических точках E–функций, удовлетворяющих системе линейных дифференциальных уравнений с коэффициентами из поля рациональных функций и алгебраически независимых над этим полем. Основные примеры E–функций — это обобщённые гипергеометрические ряды. В работах В.Х. Салихова удалось получить близкие к окончательным условия алгебраической независимости совокупностей гипергеометрических рядов. Для исследования значений обобщённых гипергеометрических функций, среди параметров которых содержатся алгебраические иррациональные числа, используются аппроксимации Эрмита–Паде. Обзор развития метода до 1987 года и ссылки на работы содержатся в замечательной книге А.Б. Шидловского [1] Важные результаты, полученные с тех пор, содержатся в недавних работах, например, В.А. Горелова [2], Т. Ривоаля, С. Фишлера [3].

К. Зигель отметил, что его метод можно применять к значениям так называемых G-функций. Ряд

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$

называется G–функцией, если его коэффициенты – алгебраические числа, удовлетворяющие некоторым арифметическим условиям, подобным условиям для E–функций .Арифметические свойства G–функций исследованы в работах многих авторов, отметим работу Г.В. Чудновского [4]. Обзор ряда других работ, посвящённых E– и G–функциям, дан в книге [5].

Ряд, члены которого — алгебраические числа, сходящийся в различных полях $\mathbb{K}_v$, может иметь в них суммой один и тот же элемент поля $\mathbb{K}$. Например, в любом поле $\mathbb{Q}_p$ выполняется равенство $\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot n! = -1$. Эта ситуация является частным случаем введённого в 1981 году Э.Бомбиери [6] понятия глобального (алгебраического) соотношения.

Пусть $P(y_1, \ldots, y_m)$– отличный от нулевого многочлен с коэффициентами из поля $\mathbb{K}$ и пусть степенные ряды $f_1(z), \ldots, f_m(z)$ имеют коэффициенты из поля $\mathbb{K}$ и точка $\alpha \in \mathbb{K}$. Соотношение $P(f_1(\alpha), \ldots, f_m(\alpha)) = 0$ называется *глобальным*, если оно выполняется во всех полях $\mathbb{K}_v$, в которых сходятся все ряды $f_1(\alpha), \ldots, f_m(\alpha)$.

Рассматривая прямое произведение всех таких полей, получаем кольцо с операциями, определёнными покоординатно. Тогда глобальное соотношение означает алгебраическую зависимость над полем $\mathbb{K}$ элементов $f_1(\alpha), \ldots, f_m(\alpha)$ этого прямого произведения.

Естественным шагом стало исследование рядов вида

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot n! \cdot z^n,$$

коэффициенты которых удовлетворяют условиям, подобным условиям на коэффициенты описанных выше E–функций и G–функций. Такие ряды, отличные от многочленов, имеют в поле комплексных чисел нулевой радиус сходимости. Один подход к исследованию их значений основан на рассмотрении результатов суммирования этих рядов, например, ряд Эйлера $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \cdot n! \cdot z^n$ представляет собой асимптотическое разложение интеграла $\int_0^{\infty} \frac{e^{-\frac{w}{z}}}{1+w} dw$. В этом направлении имеется несколько работ, например, статья Т. Фергюсона [7].

С другой стороны, эти ряды имеют почти во всех полях $\mathbb{Q}_p$ радиус сходимости, больший 1. Это позволяет рассматривать значения этих рядов в полях $\mathbb{Q}_p$. В работах автора была получена модификация метода Зигеля–Шидловского для F–рядов. В [8] были получены общие теоремы о бесконечной алгебраической независимости совокупности значений в алгебраических точках F–рядов, удовлетворяющих системе линейных дифференциальных уравнений с коэффициентами из поля рациональных функций и алгебраически независимых над этим полем. Общие теоремы удалось применить к обобщённым гипергеометрическим рядам [9]. Особого внимания заслуживает возможность исследовать значения гипергеометрических рядов, среди параметров которых есть глобально трансцендентные полиадические числа Лиувилля [10].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Шидловский А. Б. «Трансцендентные числа» Москва.: «Наука».1987.448с.
2. Горелов В. А. О структуре множества E-функций, удовлетворяющих линейным дифференциальным уравнениям 2–го порядка//Математические заметки, 2005 том 78, №3, с. 331–348
3. Fischler S., Rivoal T., On Siegel's problem for E–functions , Rend.Sem.Mat.Univ.Padova 148(2022),83–115.
4. Chudnovsky G. V. On applications of Diophantine approximations. //Proc.Natl.Acad.Sci.USF.-1985.-v.81.-p.7261–7265.
5. Fel'dman N. I. and Nesterenko Yu. V.. Encyclopaedia of Mathematical Sciences, vol.44. A.N. Parshin, I.R. Shafarevich (Eds.) Number Theory IV. Transcendental Numbers. Springer Verlag.-1998.
6. Bombieri E. On G–functions// Recent Progress in Analytic Number Theory.v.2. London: Academic Press, 1981.-p.1–68.
7. Ferguson T., Algebraic properties of Э-functions.//J.Number theory 229(2021),168–178.
8. Chirskii V. G..Product formula, global relations and polyadic integers//Russian Journal of Mathematical Physics, 2019, том 26, №3, с.286–305.
9. Chirskii V. G.. Arithmetic properties of Generalized Hypergeometric Series//Russian Journal of Mathematical Physics, 2020, том 27, №2, с.175–184
10. Чирский В. Г..Арифметические свойства значений обобщённых гипергеометрических рядов с полиадическими трансцендентными параметрами. Доклады Российской академии наук. Математика, информатика, процессы управления, 2022, том 506, с.95–107.

УДК 511.3

Арифметические суммы с простыми числами

О. В. Попов (Россия, г. Москва)
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
e-mail: ovlpopov@yandex.ru
В. Н. Чубариков (Россия, г. Москва)
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
e-mail: chubarik2020@mail.ru

Arithmetic sums with prime numbers

O. V. Popov (Russia, Moscow)
Lomonosov Moscow State University
e-mail: ovlpopov@yandex.ru
V. N. Chubarikov (Russia, Moscow)
Lomonosov Moscow State University
e-mail: chubarik2020@mail.ru

Л.Эйлер нашел аналитический эквивалент основной теоремы арифметики — эйлеровское произведение: при $s > 1$ справедливо тождество

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} = \prod_{p} (1 - p^{-s})^{-1},$$

где p пробегает последовательность простых чисел. В частности он доказал, что ряд обратных простых $\sum\limits_{p} \frac{1}{p}$ расходится, тем множество простых бесконечно.

В 1837 г. П.Л.Дирихле доказал, что при $\Re s > 1$ имеем

$$L(s,\chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \chi(n) n^{-s} = \prod_{p} (1 - \chi(p) p^{-s})^{-1},$$

где $\chi(n)$ — характер Дирихле по некоторому модулю $k > 1, k \in \mathbf{N}$. Это привело его к доказательству утверждения о бесконечности числа простых чисел в арифметических прогрессиях.

В 1851 г. П.Л.Чебышев нашел тождество

$$\ln n! = \sum_{k\leq n} \psi\Big(\frac{n}{k}\Big),$$

где

$$\psi(x) = \sum_{n\leq x} \Lambda(n) \; -$$

функция Чебышева и $\Lambda(n)$ — функция Мангольдта.

Отсюда он вывел асимптотически точные оценки для количества $\pi(x)$ простых чисел, не превосходящих любой наперед заданной границы.

В 1860 г. Б.Риман в своей знаменитой работе стал рассматривать $\zeta(s)$ как функцию комплексного переменного, построил аналитическое продолжение ее, нашел ее функциональное уравнение и вывел "явную формулу" для количества $\pi(x)$ через нули $\zeta(s)$. В 1896 г. Адамар и Валле-Пуссен показали, что на этом пути можно получить асимптотическую формулу для числа простых чисел $\pi(x)$, не превосходящих любой наперед заданной величины $x \to \infty$.

В 1937 г. И.М.Виноградов нашел новый метод оценки при $N \to \infty$ тригонометрических сумм вида

$$\sum_{p\leq N} \Phi(p),$$

основанный на методе решета, который позволил составлять такие суммы из относительно небольшого числа сумм вида

$$\sum_{\Omega}\sum \xi(u)\eta(v)\Phi(u,v),$$

где $Phi(u,v) = e^{2\pi i f(u,v)}$ с вещественной функцией $f(u,v)$, а двойное суммирование распространяется на целые точки заданной области Ω, и сумм вида

$$\sum_{m'<m\leq m''} \Phi(dm)$$

Составление этих сумм следует из тождества

$$\Phi(1) + \sum_{H<y\leq N} \Phi(y) = \sum_{dm\leq N}\sum \mu(d)\Phi(dm),$$

где H — любое число с условием $1 < H \leq \sqrt{N}$, y пробегает числа, не делящиеся на простые числа, не превосходящие H, d пробегает произведения простых чисел (включая пустое произведение, равное 1), не превосходящих H, наконец, m пробегает "сплошной" промежуток натуральных чисел.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Вейль Г. ; в сб.: *Избранные труды*, 58–93. — М.: Наука, 1984.

2. Виноградов И.М. : *Избранные труды* . — М.: Изд-во АН СССР, 1952.

3. Постников А. Г. , *Избранные труды.* —М.:Наука, 2014.

4. Архипов Г. И., *Избранные труды.* — М.: Наука, 2013.

5. Архипов Г. И. Карацуба А. А. Чубариков В. Н., *Теория кратных тригонометрических сумм.* — М.: Наука, 1987.

Секция 1. Группы

УДК 512.543

Об отделимости подгрупп некоторых свободных произведений групп с нормальной объединенной подгруппой[1]

Д. Р. Баранов (Россия, г. Иваново)
Ивановский государственный университет
e-mail: d.r.baranov.404@gmail.com
Е. В. Соколов (Россия, г. Иваново)
Ивановский государственный университет
e-mail: ev-sokolov@yandex.ru

On the subgroup separability of certain free products of groups with a normal amalgamated subgroup

D. R. Baranov (Russia, Ivanovo)
Ivanovo State University
e-mail: d.r.baranov.404@gmail.com
E. V. Sokolov (Russia, Ivanovo)
Ivanovo State University
e-mail: ev-sokolov@yandex.ru

Напомним, что нетривиальный (т. е. содержащий хотя бы одну неединичную группу) класс групп $\mathcal{C}$ называется *корневым*, если он замкнут относительно взятия подгрупп, расширений и декартовых произведений вида $\prod_{y \in Y} X_y$, где $X, Y \in \mathcal{C}$ и X_y — изоморфная копия группы X для каждого элемента $y \in Y$. Нетрудно показать, что корневыми являются, например, классы всех конечных групп, конечных p-групп (где p — простое число), периодических π-групп конечного периода (где π — непустое множество простых чисел), всех разрешимых групп и всех групп без кручения. Легко видеть также, что нетривиальное пересечение любого числа корневых классов — снова корневой класс.

Следуя [1], будем говорить, что подгруппа Y группы X *$\mathcal{C}$-отделима* в этой группе, если для любого элемента $x \in X \setminus Y$ найдется гомоморфизм σ группы X на группу из класса $\mathcal{C}$ такой, что $x\sigma \notin Y\sigma$. Отметим, что группа X *аппроксимируется классом* $\mathcal{C}$ (или, более коротко, *является $\mathcal{C}$-аппроксимируемой*) тогда и только тогда, когда ее единичная подгруппа $\mathcal{C}$-отделима. Напомним также, что отделимость и аппроксимируемость классом всех конечных групп принято называть *финитной*.

Чжоу и Ким [2, 3] показали, что при изучении финитной отделимости конечно порожденных абелевых подгрупп обобщенных свободных произведений и HNN-расширений групп могут использоваться те же методы, что и при исследовании финитной аппроксимируемости. В [4, 5] их результаты распространены на случай произвольного корневого аппроксимирующего класса групп и фундаментальной группы произвольного графа групп. Предложенный подход позволяет получить описание $\mathcal{C}$-отделимых конечно порожденных абелевых подгрупп практически для любой свободной конструкции, аппроксимируемость которой корневым классом $\mathcal{C}$ была установлена ранее.

[1] Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 24-21-00307, https://rscf.ru/project/24-21-00307/

Всюду далее запись $G = \langle A * B;\, H\rangle$ будет означать, что G — свободное произведение групп A и B с объединенной подгруппой H. Будем говорить, что обобщенное свободное произведение G *удовлетворяет условию* (α), если $A \neq H \neq B$ и подгруппа H нормальна в группах A и B. При таких предположениях подгруппа H оказывается нормальной в группе G, и это позволяет определить подгруппу $\mathrm{Aut}_G(H)$ группы $\mathrm{Aut}\, H$, составленную из ограничений на подгруппу H всевозможных внутренних автоморфизмов группы G. В [6, 7] был получен критерий аппроксимируемости корневым классом групп $\mathcal{C}$ обобщенного свободного произведения $G = \langle A * B;\, H\rangle$, удовлетворяющего условию (α) и хотя бы одному из следующих дополнительных условий:

(β) группа $\mathrm{Aut}_G(H)$ конечна;

(γ) группа $\mathrm{Aut}_G(H)$ абелева;

(δ) группа $\mathrm{Aut}_G(H)$ порождается ограничениями на H всевозможных внутренних автоморфизмов лишь одной из групп A, B.

Целью настоящей работы является описание $\mathcal{C}$-отделимых конечно порожденных абелевых подгрупп группы G, удовлетворяющей условиям упомянутого критерия и некоторым дополнительным предположениям.

Если $\mathcal{C}$ — класс групп, состоящий из периодических групп, то через $\mathfrak{P}(\mathcal{C})$ будем обозначать множество всех простых делителей порядков элементов групп из класса $\mathcal{C}$. В случае, когда класс $\mathcal{C}$ содержит хотя бы одну непериодическую группу, положим $\mathfrak{P}(\mathcal{C})$ равным множеству всех простых чисел. Будем говорить, что подгруппа Y группы X *$\mathfrak{P}(\mathcal{C})'$-изолирована* в этой группе, если для любого элемента $x \in X$ и для любого простого числа $q \notin \mathfrak{P}(\mathcal{C})$ из включения $x^q \in Y$ следует, что $x \in Y$.

Очевидно, что если множество $\mathfrak{P}(\mathcal{C})$ содержит все простые числа, то любая подгруппа оказывается $\mathfrak{P}(\mathcal{C})'$-изолированной. Нетрудно показать также, что если подгруппа Y $\mathcal{C}$-отделима в группе X, то она $\mathfrak{P}(\mathcal{C})'$-изолирована в этой группе. Как следствие, свойство $\mathcal{C}$-отделимости имеет смысл изучать лишь в отношении $\mathfrak{P}(\mathcal{C})'$-изолированных подгрупп. В связи с этим соображением и с характером интересующих нас подгрупп *$\mathcal{C}$-дефектом* группы X будем называть семейство $\mathfrak{P}(\mathcal{C})'$-изолированных конечно порожденных абелевых подгрупп данной группы, каждая из которых не является $\mathcal{C}$-отделимой в X.

Пусть (X, Y) — пара конечно порожденных абелевых подгрупп группы $G = \langle A * B;\, H\rangle$ и символ Z обозначает один из свободных множителей A, B. Рассмотрим следующий набор условий.

$(\lambda_{\mathcal{C}}^{Z})$ X — $\mathfrak{P}(\mathcal{C})'$-изолированная подгруппа группы Z, не являющаяся $\mathcal{C}$-отделимой в этой группе (и, следовательно, принадлежащая ее $\mathcal{C}$-дефекту); $Y = 1$.

$(\mu_{\mathcal{C}}^{Z})$ X — подгруппа группы H, $\mathfrak{P}(\mathcal{C})'$-изолированная в группе Z, но не являющаяся $\mathcal{C}$-отделимой в этой группе (и, следовательно, принадлежащая ее $\mathcal{C}$-дефекту); Y — бесконечная циклическая подгруппа, $Y \cap Z = 1$ и $[X, Y] = 1$.

Обозначим через $\mathfrak{D}_{\mathcal{C}}(G)$ семейство всех пар конечно порожденных абелевых подгрупп группы G, удовлетворяющих хотя бы одному из условий $(\lambda_{\mathcal{C}}^{A})$, $(\lambda_{\mathcal{C}}^{B})$, $(\mu_{\mathcal{C}}^{A})$, $(\mu_{\mathcal{C}}^{B})$, и положим $\mathfrak{A}_{\mathcal{C}}(G) = \{XY \mid (X, Y) \in \mathfrak{D}_{\mathcal{C}}(G)\}$.

Известно, что произвольная конечно порожденная абелева подгруппа группы G сопряжена либо с подгруппой одного из свободных множителей A, B, либо с прямым произведением подгрупп X и Y, где $X \leqslant H$ и Y — бесконечная циклическая подгруппа. Поэтому для задания семейства $\mathfrak{A}_{\mathcal{C}}(G)$, помимо умения строить конечно порожденные абелевы подгруппы группы G, достаточно знать лишь $\mathcal{C}$-дефекты групп A и B. Приводимые далее теоремы 1 — 3 указывают некоторые случаи, в которых описание $\mathcal{C}$-дефекта обобщенного свободного произведения G можно дать с использованием семейства $\mathfrak{A}_{\mathcal{C}}(G)$. Отметим, что содержащиеся в этих теоремах критерии $\mathcal{C}$-аппроксимируемости группы G являются нетривиальными следствиями упоминавшегося выше критерия из [6, 7] и потому представляют самостоятельный интерес.

Теорема 1. *Пусть группа $G = \langle A * B;\ H\rangle$ удовлетворяет условию (α) и хотя бы одному из дополнительных условий (β) — (δ), $\mathcal{C}$ — корневой класс групп, замкнутый относительно взятия фактор-групп. Пусть также группы A и B $\mathcal{C}$-аппроксимируемы, $A/H \in \mathcal{C}$ и $B/H \in \mathcal{C}$. Тогда справедливы следующие утверждения.*

1. *Если выполняется условие (β), то группа G $\mathcal{C}$-аппроксимируема тогда и только тогда, когда $\mathrm{Aut}_G(H) \in \mathcal{C}$.*

2. *Если выполняется условие (γ) или (δ), то группа G $\mathcal{C}$-аппроксимируема.*

3. *Если группа G $\mathcal{C}$-аппроксимируема, то $\mathfrak{P}(\mathcal{C})'$-изолированная конечно порожденная абелева подгруппа этой группы является $\mathcal{C}$-дефектной тогда и только тогда, когда она сопряжена с некоторой подгруппой из семейства $\mathfrak{A}_{\mathcal{C}}(G)$. В частности, группа G не имеет $\mathcal{C}$-дефекта, если она $\mathcal{C}$-аппроксимируема и $\mathcal{C}$-дефекта нет в группах A и B.*

Непосредственно из теоремы 1 вытекает

Следствие 1. *Пусть группа $G = \langle A * B;\ H\rangle$ удовлетворяет условию (α) и хотя бы одному из дополнительных условий (β) — (δ). Если подгруппа H имеет конечные индексы в группах A и B, то справедливы следующие утверждения.*

1. *Если группы A и B финитно аппроксимируемы, то и группа G является финитно аппроксимируемой.*

2. *Если в группах A и B все конечно порожденные абелевы подгруппы финитно отделимы, то и в группе G все конечно порожденные абелевы подгруппы финитно отделимы.*

Пусть класс $\mathcal{C}$ состоит из периодических групп. Следуя [8], будем говорить, что

1) абелева группа *$\mathcal{C}$-ограничена*, если в любой ее фактор-группе каждая примарная компонента периодической части, соответствующая некоторому числу из множества $\mathfrak{P}(\mathcal{C})$, имеет конечный период и мощность, не превосходящую мощности некоторой группы из класса $\mathcal{C}$;

2) абелева группа *сильно $\mathcal{C}$-ограничена*, если в любой ее фактор-группе каждая примарная компонента периодической части, соответствующая некоторому числу из множества $\mathfrak{P}(\mathcal{C})$, конечна;

3) разрешимая (нильпотентная) группа (*сильно*) *$\mathcal{C}$-ограничена*, если она обладает конечным субнормальным (соответственно центральным) рядом с (сильно) $\mathcal{C}$-ограниченными абелевыми факторами.

Отметим, что при любом выборе класса групп $\mathcal{C}$ каждая конечно порожденная абелева группа оказывается сильно $\mathcal{C}$-ограниченной. Поэтому все конечно порожденные нильпотентные группы являются сильно $\mathcal{C}$-ограниченными нильпотентными, а все полициклические группы — сильно $\mathcal{C}$-ограниченными разрешимыми.

Как обычно, целое число будем называть *$\mathfrak{P}(\mathcal{C})$-числом*, если все его простые делители принадлежат множеству $\mathfrak{P}(\mathcal{C})$. Через $\mathfrak{P}(\mathcal{C})'$ будем обозначать дополнение множества $\mathfrak{P}(\mathcal{C})$ в множестве всех простых чисел.

Теорема 2. *Пусть группа $G = \langle A * B;\ H\rangle$ удовлетворяет условию (α) и хотя бы одному из дополнительных условий (β) — (δ), $\mathcal{C}$ — корневой класс групп, состоящий из периодических групп и замкнутый относительно взятия фактор-групп. Пусть также группы A и B $\mathcal{C}$-аппроксимируемы, подгруппа H является сильно $\mathcal{C}$-ограниченной разрешимой и каждая ее нормальная подгруппа конечного $\mathfrak{P}(\mathcal{C})$-индекса $\mathcal{C}$-отделима в группах A и B. Тогда справедливы утверждения 1 — 3 теоремы 1.*

Если $\mathcal{F}$ — класс всех конечных групп, то понятия $\mathcal{F}$-ограниченной и сильно $\mathcal{F}$-ограниченной разрешимой группы совпадают с понятием разрешимой группы, ограниченной в смысле А. И. Мальцева [1]. Поэтому из теоремы 2 вытекает

Следствие 2. *Пусть группа $G = \langle A * B;\, H \rangle$ удовлетворяет условию (α) и хотя бы одному из дополнительных условий (β) — (δ). Пусть также подгруппа H является ограниченной разрешимой в смысле А. И. Мальцева и каждая ее нормальная подгруппа конечного индекса финитно отделима в группах A и B. Тогда справедливы утверждения 1 и 2 следствия 1.*

Теорема 3. *Пусть группа $G = \langle A * B;\, H \rangle$ удовлетворяет условию (α) и хотя бы одному из дополнительных условий (β) — (δ), $\mathcal{C}$ — корневой класс групп, состоящий из периодических групп и замкнутый относительно взятия фактор-групп. Пусть также $\mathcal{N}$ — класс $\mathcal{C}$-ограниченных нильпотентных групп без $\mathfrak{P}(\mathcal{C})'$-кручения, группы A и B $\mathcal{N}$-аппроксимируемы и обладают гомоморфизмами на $\mathcal{N}$-группы, действующими инъективно на подгруппе H. Тогда справедливы следующие утверждения.*

1. *Если выполняется условие (β), то группа G $\mathcal{C}$-аппроксимируема тогда и только тогда, когда $\mathrm{Aut}_G(H) \in \mathcal{C}$ и подгруппа H $\mathfrak{P}(\mathcal{C})'$-изолирована в группах A и B.*
2. *Если выполняется условие (γ) или (δ), то группа G $\mathcal{C}$-аппроксимируема тогда и только тогда, когда подгруппа H $\mathfrak{P}(\mathcal{C})'$-изолирована в группах A и B.*
3. *Если группа G $\mathcal{C}$-аппроксимируема, то $\mathfrak{P}(\mathcal{C})'$-изолированная конечно порожденная абелева подгруппа этой группы является $\mathcal{C}$-дефектной тогда и только тогда, когда она сопряжена с некоторой подгруппой из семейства $\mathfrak{A}_{\mathcal{C}}(G)$. В частности, группа G не имеет $\mathcal{C}$-дефекта, если она $\mathcal{C}$-аппроксимируема и группы A и B являются $\mathcal{C}$-ограниченными нильпотентными.*

Говорят, что группа имеет *конечный ранг Гирша — Зайцева*, если она обладает конечным субнормальным рядом, каждый фактор которого является либо периодической, либо бесконечной циклической группой.

Следствие 3. *Пусть группа $G = \langle A * B;\, H \rangle$ удовлетворяет условию (α) и хотя бы одному из дополнительных условий (β) — (δ), $\mathcal{C}$ — корневой класс групп, состоящий из периодических групп и замкнутый относительно взятия фактор-групп. Пусть также $\mathcal{N}_0$ — класс $\mathcal{C}$-ограниченных нильпотентных групп без кручения, группы A и B $\mathcal{N}_0$-аппроксимируемы и подгруппа H имеет конечный ранг Гирша–Зайцева. Тогда выполняются утверждения 1 и 2 теоремы 3 и группа G не имеет $\mathcal{C}$-дефекта, если она $\mathcal{C}$-аппроксимируема.*

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Мальцев А. И. О гомоморфизмах на конечные группы // Учен. зап. Иван. гос. пед. ин-та. 1958. Т. 18. С. 49–60.

2. Zhou W., Kim G. Abelian subgroup separability of certain HNN extensions // Int. J. Algebra Comput. 2018. Vol. 28, № 3. P. 543–552.

3. Zhou W., Kim G. Abelian subgroup separability of certain generalized free products of groups // Algebra Colloq. 2020. Vol. 27, № 4. P. 651–660.

4. Соколов Е. В. Об отделимости абелевых подгрупп фундаментальных групп графов групп. I // Сиб. матем. журн. 2023. Т. 64, № 5. С. 1083–1093

5. Соколов Е. В. Об отделимости абелевых подгрупп фундаментальных групп графов групп. II // Сиб. матем. журн. 2024. Т. 65, № 1. С. 207–228.

6. Туманова Е. А. Об аппроксимируемости корневыми классами групп обобщенных свободных произведений с нормальным объединением // Изв. вузов. Математика. 2015. № 10. С. 27–44.

7. Соколов Е. В., Туманова Е. А. Об аппроксимируемости корневыми классами некоторых свободных произведений групп с нормальными объединенными подгруппами // Изв. вузов. Математика. 2020. № 3. С. 48–63.

8. Sokolov E. V. On the separability of subgroups of nilpotent groups by root classes of groups // J. Group Theory. 2023. Vol. 26, № 4. P. 751–777.

УДК 519.4

Проблема пересечения подгрупп в древесном произведении групп Кокстера

В. Н. Безверхний (Россия, г. Москва)
Российская таможенная академия
e-mail: vnbezv@rambler.ru
О. В. Инченко (Россия, г. Тула)
Тульский государственный университет
e-mail: inchenko_ov@mail.ru

The problem of the intersection of subgroups in the tree product of Coxeter groups

V. N. Bezverkhnii (Russia, Moscow)
Russian Customs Academy
e-mail: vnbezv@rambler.ru
O. V. Inchenko (Russia, Tula)
Tula State University
e-mail: inchenko_ov@mail.ru

Будем говорить, что группа G обладает свойством Хаусона, если пересечение любых ее конечно порожденных подгрупп конечно порождено.

Пусть группа G обладает свойством Хаусона.

Проблема пересечения конечно порожденных подгрупп состоит в том, что необходимо установить, существует ли алгоритм, позволяющий для любых двух конечно порожденных подгрупп H_1 и H_2 группы G выяснить пусто или нет пересечение $H_1 \cap H_2$.

Будем говорить, что в группе G разрешима проблема пересечения классов смежности, если существует алгоритм, позволяющий для любых двух конечно порожденных подгрупп H_1 и H_2 группы G и для любых двух слов $w_1, w_2 \in G$ выяснить пусто или нет пересечение $w_1H_1 \cap w_2H_2$.

В 1954 г. А. Хаусон показал, что пересечение двух конечно порожденных подгрупп свободной группы конечно порождено [1]. Вопрос о нахождении образующих пересечения подалгебр данной алгебры был впервые сформулирован А.И. Мальцевым в 1958 г. [2]. В 1974 г. В.Н. Без верхним был получен алгоритм, выписывающий образующие пересечения конечно порожденных подгрупп свободной группы [3].

Баумслагом в [4] была получена:

Теорема 1. *Если в свободном произведении $G = G_1 * G_2$ групп каждый множитель G_i, $i = \overline{1,2}$ обладает свойством Хаусона, то и G обладает свойством Хаусона.*

В работе [5] В.Н. Безверхним и Е.В. Ролловым был получен следующий результат:

Теорема 2. *Пусть $G = G_1 * G_2$ и каждый сомножитель G_i, $i = \overline{1,2}$ обладает свойством Хаусона. Тогда если (1) существует алгоритм, позволяющий для любых двух конечно порожденных подгрупп G_i, $i = \overline{1,2}$ выписывать образующие их пересечения; (2) существует алгоритм позволяющий для любого элемента $w \in G_i$ и любых двух конечно порожденных подгрупп H_1, H_2 из G_i установить пусто или нет множество $wH_1 \cap H_2$, то в группе G разрешимы проблемы (1) и (2).*

В статье [6] В.Н. Безверхним было получено обобщение этого результата для HNN-расширения групп.

Теорема 3. *Пусть группа G обладает свойством Хаусона и в G разрешимы: (1) проблема пересечения смежных классов конечно порожденных подгрупп; (2) проблема пересечения подгрупп. Тогда и в группе $G^* = \langle G, t; relG, t^{-1}U_1t = \varphi(U_1)\rangle$, являющейся HNN-расширением группы G с помощью конечных фиксированных подгрупп $U_1, U_{-1} = \varphi(U_1)$ и фиксированного изоморфизма φ, разрешимы проблемы (1) и (2).*

Теорема 4. *(Миллер-Шупп). Группа $\tilde{G} = \langle G_1 * G_2, U_1 = \varphi(U_1)\rangle$, являющаяся свободным произведением групп G_1 и G_2 с объединением по изоморфным подгруппам U_1 и U_{-1} с помощью фиксированного изоморфизма $\varphi : \varphi(U_1) = U_{-1}$, изоморфно вложима в группу $G^* = \langle G_1 * G_2, t; relG_1, relG_2, t^{-1}U_1t = \varphi(U_1)\rangle$.*

Пусть G – конечно порожденная группа Артина, заданная копредставлением

$$G = \langle a_1, a_2, ..a_n; \langle a_ia_j\rangle^{m_{ij}} = \langle a_ja_i\rangle^{m_{ji}}, i \in I_1, j \in I_2, |I_1| \leq n, |I_2| \leq n\rangle \ .$$

где $\langle a_ia_j\rangle^{m_{ij}}$ слово состоящее из m_{ij} чередующихся букв a_i и a_j, m_{ij} - число соответствующее симметрической матрице Кокстера и $m_{ij} = m_{ji}$ при $i \neq j$.

Рассмотрим группу Артина на двух образующих

$$G_{ij} = \langle a_i, a_j; \langle a_ia_j\rangle^{m_{ij}} = \langle a_ja_i\rangle^{m_{ji}}\rangle.$$

В работе [7] В.Н. Безверхним показано, что группа Артина на двух образующих изоморфна группе $\langle x, y; x^{2k+1} = y^2\rangle$ при $m_{ij} = 2k+1$ и группе $\langle x, y; y^{-1}x^ky = x^k\rangle$ при $m_{ij} = 2k$. А в [6] доказана следующая

Теорема 5. *В группе $G_{m,n} = \langle a, b; a^m = b^n\rangle$, где $m \geq 2$, $n > 2$, пересечение конечно порожденных подгрупп не всегда конечно порожденная подгруппа.*

Таким образом, в общем случае в классе групп Артина проблема пересечения подгрупп не разрешима.

Рассмотрим конечно порожденную группу Кокстера, которая может быть получена факторизацией группы Артина по нормальному делителю N, порожденному квадратами образующих ${a_1}^2, {a_2}^2, ..{a_n}^2$:

$$G = \langle a_1, a_2, ..a_n; {a_s}^2; (a_ia_j)^{m_{ij}}, i \in I_1, j \in I_2, s = \overline{1,n}, |I_1| \leq n, |I_2| \leq n\rangle.$$

Группы Кокстера введены Х.С.М. Кокстером в 1934 году [8]. А класс конечно порожденных групп Кокстера с древесной структурой был определен В.Н. Безверхним в 2003 году [9]. В работе [10] авторами показано, что в классе групп Кокстера с древесной структурой разрешима проблема пересечения классов смежности и установлен алгоритм, выписывающий образующие этого пересечения. Цель работы - доказать, что в данном классе групп разрешимы проблема Хаусона и проблема пересечения конечно порожденных подгрупп.

Представим конечно порожденную группу Кокстера с древесной структурой G в виде древесного произведения двупорожденных групп Кокстера, объединенных по конечным циклическим подгруппам:

$$G = \langle \prod_{s=1}^{n} G_s; relG_1, .., relG_n; a_i = a_i' \rangle.$$

В этом случае группе Кокстера G соответствует дерево – граф T такой, что если вершинам некоторого ребра e графа T соответствуют группы Кокстера на двух образующих $G_{ij} = \langle a_i, a_j; {a_i}^2; {a_j}^2; (a_i a_j)^{m_{ij}} \rangle$ и $G_{ik} = \langle a_i, a_k; {a_i}^2; {a_k}^2; (a_i a_k)^{m_{ik}} \rangle$, тогда ребру e соответствует циклическая подгруппа $\langle a_i; {a_i}^2 \rangle$.

Рассмотрим свободное произведение двупорожденных групп Кокстера

$$G_{ij} = \langle a_i, a_j; {a_i}^2; {a_j}^2; (a_i a_j)^{m_{ij}} \rangle$$

и

$$G_{ik} = \langle a_i, a_k; {a_i}^2; {a_k}^2; (a_i a_k)^{m_{ik}} \rangle,$$

объединенных по циклической подгруппе $\langle a_i; {a_i}^2 \rangle$: $G_2 = G_{ij} *_{\langle a_i; {a_i}^2 \rangle} G_{ik}$. По теореме 4 эта группа изоморфно вложима в группу

$$G^* = \langle G_{ij} * G_{ik}, t; relG_{ij}, relG_{ik}, t^{-1} a_i t = a_i' \rangle.$$

Группы G_{ij} и G_{ik} конечны и, поэтому, обладают свойством Хаусона и удовлетворяют условиям теоремы 2. Далее, по теореме 3, в группе G^* разрешимы проблема Хаусона и проблема пересечения конечно порожденных подгрупп, а, следовательно, по теореме 4 в группе G также разрешимы указанные проблемы.

Обобщим результат, полученный для группы G_2 на всю группу G. Для этого представим конечно порожденную группу Кокстера с древесной структурой G в виде свободного произведения двух сомножителей, объединенных по конечной циклической подгруппе следующим образом: Рассмотрим древесное произведение $n-1$ сомножителей, которому соответствует связный дерево-граф T_{n-1}, $T_{n-1} \in T$. Группу, соответствующую графу T_{n-1} обозначим через G_{n-1} . Пусть n-ый сомножитель - подгруппа G_{xy} соответствует вершине дерева – графа T, которая связана с графом ребром e . При этом ребру e соответствует циклическая подгруппа второго порядка $\langle a_x; {a_x}^2 \rangle$. Так группа G представлена как свободное произведение двух подгрупп - G_{n-1} и G_{xy}, объединенных по циклической подгруппе порядка два $\langle a_x; {a_x}^2 \rangle$, то есть $G = G_{n-1} *_{\langle a_x; {a_x}^2 \rangle} G_{xy}$. Следуя методу математической индукции, полагаем, что в сомножителе G_{n-1} разрешимы проблема Хаусона и проблема пересечения конечно порожденных подгрупп. Тогда, используя рассуждения аналогичные рассуждениям примененным для группы G_2, получаем:

Теорема 6. *Конечно порожденная группа Кокстера с древесной структурой обладает свойством Хаусона.*

Теорема 7. *В конечно порожденной группе Кокстера с древесной структурой G пересечение конечного числа конечно порожденных подгрупп конечно порождено и существует алгоритм, выписывающий образующие этого пересечения.*

Для построения алгоритма, выписывающего образующие пересечения конечно порожденных подгрупп использован метод специального множества и метод типов, введенный В.Н. Безверхним.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Howson A. G. On the intersection of finitely generated free groups //J. London Math. Soc. 1954. Vol. 29. P.428-434.

2. Мальцев А. И. О гомоморфизмах на конечные группы //Уч. зап. Ивановского пед. Института. 1958. Том 18. С. 49-60.

3. Безверхний В. Н. О пересечении конечно порожденных подгрупп свободгой группы // Сборник научных трудов кафедры высшей математики. 1974. Вып. 2. С. 51-56.

4. Baumslag B. J. Intersection of finitely generated subgroups in free products//J. London Math. Soc. 1966. Vol. 41. P. 673-679.

5. Безверхний В. Н., Роллов Е. В. О подгруппах свободного произведения групп// Современная алгебра. Ленинградский гос. пед. ин-т. 1974. Том 1. С. 16—31.

6. Безверхний В.Н. О пересечении подгрупп в HNN-группах //Фундаментальная и прикладная математика 1998, том 4, №1, -с. 199-222.

7. Безверхний В. Н. Решение проблемы обобщенной сопряженности слов в группах Артина большого типа // Фундаментальная и прикладная математика. 1999. Том 5, №1, С. 1-38

8. Coxeter H. S. M. Discrete groups generated by reflections (англ.) // Annals of Mathematics. 1934. — Vol. 35. P. 588—621.

9. Безверхний В. Н. О группах Артина, Кокстера с древесной структурой // Алгебра и теория чисел: Современные проблемы и приложения. Тезисы докладов V Международной конференции. — Тула, 2003. С. 33-34.

10. Инченко О. В. О проблеме пересечения классов смежности конечно порожденных подгрупп в группе Кокстера с древесной структурой // Чебышевский сборник. 2016. Том 7, № 2. С. 146-161.

УДК 511.32

Об антинормальности подгрупп и гиперболичности в некотором классе HNN-свободных групп[1]

Н. Б. Безверхняя (Россия, г. Москва)
Московский технический университет связи и информатики
e-mail: vnbezv@rambler.ru

On the antinormality of subgroups and hyperbolicity in a certain class of HNN-free groups

N. B. Bezverhnaya (Russia, Moscow)
Moscow Technical University of Communication and Informatics
e-mail: vnbezv@rambler.ru

Вопрос об описании гиперболических групп в классе групп с одним определяющим соотношением является весьма важным, так как гиперболические группы обладают рядом ценных алгоритмических и комбинаторных свойств, которые несправедливы в классе конечно представленных групп в общем. Например, в гиперболических группах разрешимы проблемы равенства и сопряженности слов. Геометрическое доказательство этих факторов дал М. Громов, а алгебраическое И.Г. Лысенок. В классе гиперболических групп без кручения З. Селом

[1] Работа выполнена при поддержке гранта: №075–15–2023-523

решена проблема изоморфизма. Р.И. Григорчук и Г. Ф. Курчанов дали описание решений квадратичных уравнений в гиперболических группах. А.Ю. Ольшанский доказал, что все неэлементарные гиперболические группы являются SQ-универсальными.

Пусть $G =< A, R >$ — конечноопределенная группа со множеством образующих A и множеством определяющих соотношений R. Слово $w \in F(A)$, где $F(A)$ — свободная группа, равно единице в G тогда и только тогда, когда

$$w = \sum_{i=1}^{n} S_i^{\varepsilon_i} R_i^{\varepsilon} S_i^{-\varepsilon_i} \tag{1}$$

в свободной группе $F(A)$ для некоторых $s_i \in F(A), \varepsilon_i, \varepsilon \in \{\pm 1\}, R_i \in R$ и $i \in \{1, 2, ..., n\}$.

Через $L(w)$ обозначим наименьшее целое n для которого слово w представимо в виде (1). Конечноопределенную группу G назовем гиперболической [1], если $L(w)$ ограничена сверху линейной функцией $c|w|$, зависящей от длины слова w и константы c.

Рассмотрим группу $G* =< a, b, t; t^{-1}at = v, t^{-1}bt = w >$, являющуюся HNN-расширением свободной группы $F =< a, b > .v = v(a, b), w = w(a, b)$, причем слова v, w удовлетворяет условию:

$v = xv_0x^{-1}, w = yw_0y^{-1}$ и в произведениях $v^\varepsilon w^\delta, w^\delta v^\varepsilon, \varepsilon, \delta \in \{\pm 1\}$ нет сокращений $(*)$

Определение 1. Подгруппа H группы G антинормальна в G, если для любого $z \in G \backslash H, z^{-1}Hz \cap H = E, E$ - единичная подгруппа.

Теорема 1. Пусть $F =< a, b >$ — свободная группа, пусть слова v, w удовлетворяют условию $(*)$, то подгруппа $H =< v, w >$ группы $G =< a, b >$ не является антинормальной тогда и только тогда, когда слова имеют вид 1)-2)

1. $v = xu^kx^{-1}, w = w(a, b)$ - произвольное слово от образующих удовлетворяющее условию $(*)$
2. $v = xw^lx^{-1}, w = w(a, b)$ произвольное слово от образующих a, b удовлетворяющее условию $(*)$.

Теорема 2. Пусть $F =< a, b >$ — свободная группа, пусть слова v, w удовлетворяют условию $(*)$, тогда если слова v, w имеют вид 1)-4)

1. $v = xa^kx^{-1}, w = w(a, b)$ произвольное слово от образующих a, b удовлетворяющее условию $(*)$;
2. v - произвольное слово от образующих a, b удовлетворяющее условию $(*)$;
   $w = yb^ly^{-1}$
3. $v = xa^kx^{-1}, w = yb^ly^{-1}$
4. $v = xb^kx^{-1}, w = ya^ly^{-1}$

то группа $G =< a, b, t; t^{-1}at = v, t^{-1}bt = w >$ не является гиперболической; в остальных случаях группа $G*$ является гиперболической.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. M. Gromov. Hyperbolic groups// Essays in group theory ed. S.M. Gertsen M.S.P.I. Publ. 8. Springer. 1987. P. 75-263.
2. Р. Линдон, П. Шупп. Комбинаторная теория групп. М.: Мир, 1980.

3. I. Kapovich. A non-quasiconvex subgroup of a hyperbolic groups with an exotic limit set// New York J. Math. 1994/95. P 184-195.

4. Н. Б. Безверхняя. Гиперболичность некоторых 2-порожденных групп с одним определяющим соотношением. Дискр. Матем., Москва, 2002 г., т. 14, №3, С. 54-70.

5. Н. Б. Безверхняя. Описание гиперболических и негиперболических групп, являющихся некоторыми HNN-расширениями свободных групп. Чебышевский сборник, Т3, Вып. 1, 2002, С.17-31.

УДК 512.54

О нормализаторах подгрупп в древесных произведениях групп

И. В. Добрынина (Россия, г. Москва)
Московский технический университет связи и информатики
e-mail: dobrynirina@yandex.ru

On the normalizers of subgroups in the tree products of groups

I. V. Dobrynina (Russia, Moscow)
Moscow Technical University of Communications and Informatics
e-mail: dobrynirina@yandex.ru

Определение 1. *Будем говорить, что в группе G выполнено условие (свойство) K, если нормализатор всякой конечно порожденной подгруппы группы G конечно порожден.*

Исследование нормализатора конечно порожденной подгруппы в свободном произведении групп проведено И. С. Безверхней. В работе [1] получено доказательство следующей теоремы:

Теорема 1. *Если в группе $G = A_1 * A_2$ сомножители $A_i, i = \overline{1,2}$, обладают свойством K, то G наследует это свойство.*

Определение 2. *Будем говорить, что в группе G разрешима проблема вхождения, если существует алгоритм, позволяющий для любого элемента $w \in G$ и любой конечно порожденной подгруппы $H < G$ установить, принадлежит w подгруппе H или нет.*

И. С. Безверхней для свободных произведений групп получен следующий результат [1]:

Теорема 2. *Если в группе $G = A_1 * A_2$ в сомножителях $A_i, i = \overline{1,2}$, выполнено условие K, разрешимы проблемы вхождения и построения нормализатора конечно порожденной подгруппы, то существует алгоритм, позволяющий построить нормализатор произвольной конечно порожденной подгруппы группы G.*

Далее рассмотрим исследование нормализатора конечно порожденной подгруппы для свободного произведения групп с объединением.

Теорема 3. *Если в группе $G = A_1 * A_2$, где U - конечная подгруппа, сомножители $A_i, i = \overline{1,2}$, обладают свойством K, то G наследует это свойство.*

В доказательстве применяется обобщение метода Нильсена [2], введенное В. Н. Безверхним [3] и называемое методом специального множества слов.

Теорема 4. *Если в группе $G = A_1 * A_2$, где U – конечная подгруппа, в сомножителях $A_i, i = \overline{1,2}$, выполнено условие K, разрешимы проблемы вхождения и построения нормализатора конечно порожденной подгруппы, то существует алгоритм, позволяющий построить нормализатор произвольной конечно порожденной подгруппы из группы G.*

Используя индукцию, из теоремы 3 для древесных произведений групп получаем следующее утверждение:

Теорема 5. *Пусть G - древесное произведение групп $G_1, G_2, \ldots G_n$, объединенных по конечным подгруппам, причем подгруппы $G_i, i = \overline{1,n}$, обладают свойством K, то G наследует это свойство.*

Теорема 6. *Пусть группа G - древесное произведение групп $G_1, G_2, \ldots G_n$, объединенных по конечным подгруппам, причем в сомножителях $G_i, i = \overline{1,n}$, выполнено условие K, разрешимы проблемы вхождения и построения нормализатора конечно порожденной подгруппы. Тогда существует алгоритм, позволяющий построить нормализатор произвольной конечно порожденной подгруппы из группы G.*

Рассмотрим теперь конечно порожденную группу Кокстера, заданную копредставлением $G = \langle a_1, \ldots, a_n; (a_i a_j)^{m_{ij}} = 1, i, j \in \overline{1,n}, i \neq j \rangle$, где m_{ij} – элементы симметрической матрицы Кокстера: $\forall i, j \in \overline{1,n}$, $m_{ii} = 1$, $m_{ij} \geqslant 2 \cup \{\infty\}, i \neq j$.

Построим для группы G граф Γ такой, что вершинам его ребер соответствуют образующие a_i и $a_j \, (i \neq j)$, а каждому ребру соответствует соотношение $(a_i a_j)^{m_{ij}} = 1$. Если при этом получится дерево-граф Γ, то группа G называется группой Кокстера с древесной структурой.

Данные группы введены В. Н. Беверхним в работе [4].

Группу G можно представить как древесное произведение двупорожденных групп Кокстера объединенных по конечны м циклическим подгруппам. При этом от графа Γ группы G перейдем к графу $\overline{\Gamma}$ следующим образом: вершинам каждого ребр $\overline{e}$ графа $\overline{\Gamma}$ поставим в соответствие группы Кокстера на двух образующих $G_{ij} =< a_i, a_j; a_i^2 = a_j^2 = 1, (a_i a_j)^{m_{ij}} = 1 >$ и $G_{jk} =< a_j, a_k; a_j^2 = a_k^2 = 1, (a_j a_k)^{m_{jk}} = 1 >$, а ребру $\overline{e}$ - циклическую подгруппу $< a_j; a_j^2 = 1 >$.

Из теорем 3, 6 и представления группы Кокстера с древесной структурой как следствие получим результаты работ [5], [6]:

Следствие 1. *В группе Кокстера G с древесной структурой нормализатор произвольной конечно порожденной подгруппы конечно порожден. Существует алгоритм его построения.*

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Безверхняя И. С. О сопряженности конечных множеств подгрупп в свободном произведении групп // Межвуз. сб. Алгоритмические проблемы теории групп и полугрупп. — Тула: ТГПИ, 1981. С. 102–116.

2. Линдон Р. Шупп П. Комбинаторная теория групп. — М.: Мир, 1980. 447 с.

3. Безверхний В. Н. Неразрешимость проблемы вхождения в группах Артина конечного типа // Сибирский математический журнал. 1995. Т. 26. № 5. С. 27–42.

4. Безверхний В. Н. О группах Артина, Кокстера с древесной структурой // V международная конференция <Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения>: тезисы докладов международной конференции. — Тула, 2003. С. 33-34.

5. Добрынина И. В. О нормализаторах в некоторых группах Кокстера // Чебышевский сборник. 2016. Т. 17. № 2. С. 113-127.

6. Добрынина И. В. О нормализаторах подгрупп в группах Кокстера с древесной структурой // Сибирские электронные математические известия. 2017. — Т. 14. С. 1338-1348.

УДК 511.32

О некоторых свойствах c_π-нормальных подгрупп конечных групп

Я. А. Купцова (Беларусь, г. Гомель)
Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины
e-mail: kuptsovayana519@gmail.com

On some properties of c_π-normal subgroups of finite groups

Y. A. Kuptsova (Belarus, Gomel)
Francisk Skorina Gomel State University
e-mail: kuptsovayana519@gmail.com

Все рассматриваемые нами группы конечны.

Напомним, что нормальным индексом $\eta(G : M)$ максимальной подгруппы M группы G называется порядок главного фактора H/M_G группы G [1].

Подгруппу H группы G называют c-нормальной в G, если существует нормальная подгруппа N в группе G такая, что $HN = G$ и $H \cap N \leq H_G$ [2].

В нашем сообщении мы обсуждаем приложения следующего обобщения c-нормальности.

Определение 1. *Мы называем подгруппу H группы G c_π-нормальной в G, если в G имеется нормальная подгруппа K такая, что $G = HK$, $H_G \leq K$ и $(H \bigcap K)/H_G$ — π'-группа.*

Нами изучены свойства c_π-нормальных подгрупп. В частности, доказаны следующие теоремы.

Теорема 1. *Пусть H — π-подгруппа группы G для некоторого $\pi \subseteq \pi(G)$.Подгруппа H c-нормальна в G тогда и только тогда, когда H c_π-нормальна в G.*

Теорема 2. *Пусть M — максимальная подгруппа группы G и $\pi \subseteq \pi(G)$. Подгруппа M является c_π-нормальной в G тогда и только тогда, когда $\eta(G : M)_\pi = [G : M]_\pi$.*

Теорема 3. *Группа G π-разрешима тогда и только тогда, когда все ее максимальные подгруппы c_π-нормальны в G.*

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Deskins W. E. On maximal subgroups. // Proc. Sympos. Pure Math. 1959. Vol. 1. P. 100–104.
2. Wang Y. C-normality of groups and its properties // Journal of algebra. 1996. Vol. 180., № 3. P. 954-965.

УДК 512.542

Алгоритмическая проверка локальной формации конечных разрешимых групп на обладание свойством Шеметкова[1]

В. И. Мурашко (Беларусь, г. Гомель)
Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины
e-mail: mvimath@yandex.ru

An algorithmic test for a local formation of finite soluble groups to have the Shemetkov property

V. I. Murashka (Belarus, Gomel)
Francisk Skorina Gomel State University
e-mail: mvimath@yandex.ru

Все рассматриваемые здесь группы конечны. Напомним, что ненильпотентная группа, все собственные подгруппы которой нильпотентны, называется группой Шмидта в честь О. Ю. Шмидта, описавшего структуру таких групп [1] в 1924 году. В 1951 году Н. Ито [2, предложение 2] доказал, что не p-нильпотентная группа, все собственные подгруппы которой p-нильпотенты — группа Шмидта.

Напомним, что для класса групп $\mathfrak{X}$ группа $G \notin \mathfrak{X}$ называется минимальной не-$\mathfrak{X}$-группой, если все ее собственные подгруппы принадлежат $\mathfrak{X}$. В. Н. Семенчук и А. Ф. Васильев [3] описали все наследственные локальные формации разрешимых групп $\mathfrak{F}$ такие, что каждая разрешимая минимальная не-$\mathfrak{F}$-группа является либо группой Шмидта, либо группой простого порядка. В 1984 году Л. А. Шеметков [4, проблема 9.74] в Коуровской тетради поставил задачу описания всех локальных формаций $\mathfrak{F}$ для которых каждая конечная минимальная не-$\mathfrak{F}$-группа является либо группа Шмидта, либо группа простого порядка. Решения этой проблемы представлены в [5, следствие 1] и [6, теорема 2].

Напомним, что формация $\mathfrak{F}$ называется формацией с условием Шеметкова, если каждая минимальная не-$\mathfrak{F}$-группа является либо группой Шмидта, либо группой простого порядка. Согласно [7, следствие 2.4.23] наследственная локальная формация $\mathfrak{F}$ обладает условием Шеметкова тогда и только тогда, когда:

(a) любая минимальная не-$\mathfrak{F}$-группа разрешима;

(b) $\mathfrak{F}$ локально определяется f, где $f(p_i) = \mathfrak{G}_{\pi_i}$ — класс всех π_i-групп для всех $p_i \in \pi(\mathfrak{F})$, где π_i — подмножество $\pi(\mathfrak{F})$ с $p_i \in \pi_i$.

Естественно задаться вопросом, можно ли вывести условие (a) данного результат из его условия (b). Целью данного доклада является решение частного случая этого вопроса — можно ли из условия (b) вывести, что $\mathfrak{F}$ является формацией разрешимых групп с условием Шеметкова? Получен следующий результат:

Теорема 1. *Пусть $\pi = \{p_1, p_2, \ldots, p_k\}$ — множество простых чисел, не превосходящих n, π_i — подмножество π с $p_i \in \pi_i$. Предположим, что $\mathfrak{F}$ — локальная формация с $\pi(\mathfrak{F}) = \pi$, локально определяемая f, где $f(p_i) = \mathfrak{G}_{\pi_i}$. С помощью $O(n^2)$ операций можно проверить, является ли $\mathfrak{F}$ формацией разрешимых групп со свойством Шеметкова.*

Обсуждаемые в докладе методы позволяют получить

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования Республики Беларусь (грант № 20211750 “Конвергенция–2025”)

Следствие 1. *Пусть* $\pi = \{2, 3, 5, 7\}$ *и* $\mathfrak{F}$ *— локальная формация с* $\pi(\mathfrak{F}) = \pi$*, локально определяемая* f*, где* $f(2) = f(3) = \mathfrak{G}_{\{2,3,5,7\}}$*,* $f(5) = \mathfrak{G}_{\{3,5,7\}}$ *и* $f(7) = \mathfrak{G}_{\{5,7\}}$*. Тогда* $\mathfrak{F}$ *— формация разрешимых групп с условием Шеметкова.*

Доказательство теоремы 1 основано на понятии N-критического графа. Напомним, что (p, q)-группа Шмидта — это группа Шмидта с нормальной силовской p-подгруппой. *N-критическим графом* $\Gamma_{Nc}(G)$ группы G [8, определение 1.3] называется ориентированный граф на множестве вершин $\pi(G)$ и (p, q) является ребром $\Gamma_{Nc}(G)$ тогда и только тогда, когда G имеет (p, q)-подгруппу Шмидта. Из доказательства теоремы 1 вытекают следующие результаты:

Следствие 2. *Пусть* Γ *— ориентированный граф такой, что* $V(\Gamma)$ *— конечное множество простых чисел и* $n = \max V(\Gamma)$*. Можно проверить за полиномиальное от* n *время, разрешима ли каждая группа* G *такая, что* $\Gamma_{Nc}(G) = \Gamma$*.*

Следствие 3. *Если* $\{2, 3, 5, 7\}$*-группа* G *не содержит* (a, b)*-подгруппы Шмидта для* $(a, b) \in \{(5, 2), (7, 2), (7, 3)\}$*, то* G *разрешима.*

С доказательствами результатов и алгоритмической проверкой, описанной в теореме 1, можно ознакомиться в [9].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Шмидт О. Ю. Группы, все подгруппы которых специальные // Матем. сб. 1924. Т. 31. С. 366–372.

2. Ito N. Note on (LM)-groups of finite order // Kodai Math. Seminar Report. 1951. Vol. 3. P. 1–6.

3. Семенчук В. Н., Васильев А. Ф. Характеризация локальных формаций $\mathfrak{F}$ по задан- ным свойствам минимальных не $\mathfrak{F}$-групп // Исследование нормального и подгруппового строения конечных групп: труды Гомельского семинара. — Минск: Наука и техника, 1984. С. 175–181.

4. Khukhro E. I., Mazurov V. D. (eds.) The Kourovka notebook: unsolved problems in group theory, 20th edn. Russian Academy of Sciences, Siberian Branch, 2022.

5. Kamornikov S. F. On two problems by L.A. Shemetkov // Sib. Math. J. 1994. Vol. 35. P. 713–721.

6. Ballester-Bolinshes A., Perez-Ramos M. D. On $\mathfrak{F}$-critical groups // J. Algebra. 1995. №. 174. P. 948–958.

7. Каморников С. Ф., Селькин М. В. Подгрупповые функторы и классы конечных групп. — Минск: Беларуская навука, 2003. 255 с.

8. Vasilyev A. F. and Murashka V. I. Arithmetic Graphs and Classes of Finite Groups // Sib. Math. J., 2019. Vol. 60. P. 41–55.

9. Murashka V. I. A test for a local formation of finite groups to be a formation of soluble groups with the Shemetkov property // arXiv:2405.20257 [math.GR], 2024. — 8 p.

УДК 512.542

Формулы Ω-расслоенной формации конечных групп

А. С. Нестеров (Россия, г. Брянск)
Брянский государственный университет им. академика И. Г. Петровского
e-mail: a.s.nest@yandex.ru
М. М. Сорокина (Россия, г. Брянск)
Брянский государственный университет им. академика И. Г. Петровского
e-mail: mmsorokina@yandex.ru

Formulas of the Ω-foliated formation of finite groups

A. S. Nesterov (Russia, Bryansk)
Ivan Petrovsky Bryansk State University
e-mail: a.s.nest@yandex.ru
M. M. Sorokina (Russia, Bryansk)
Ivan Petrovsky Bryansk State University
e-mail: mmsorokina@yandex.ru

Рассматриваются только конечные группы и классы конечных групп. Формацией называется класс групп, замкнутый относительно гомоморфных образов и подпрямых произведений. Понятие композиционной формации было введено в рассмотрение Л.А. Шеметковым в монографии [1]. Обобщая данное понятие, в работе [2] А.Н. Скиба и Л.А. Шеметков для непустого класса $\mathfrak{L}$ простых групп определили $\mathfrak{L}$-композиционные формации. В 1999 году В.А. Ведерников построил серию Ω-расслоенных формаций [3], включающую в себя Ω-композиционные формации в качестве одного из видов, где Ω — непустой класс простых групп. В теоремах 1 и 2 изучаются Ω-расслоенные формации. Получены формулы, описывающие их строение.

Используемые обозначения и определения стандартны (см., напр., [1]). Через $\mathfrak{G}$ обозначается класс всех конечных групп, $\mathfrak{E}$ — класс всех единичных групп, $\mathfrak{A}$ — класс всех абелевых групп, $\mathfrak{I}$ — класс всех простых групп, Ω — непустой подкласс класса $\mathfrak{I}$; $K(G)$ — класс всех групп, изоморфных композиционным факторам группы G. Пусть $\mathfrak{X}$ — непустое множество групп. Тогда $(\mathfrak{X})$ — класс групп, порожденный множеством $\mathfrak{X}$; $K(\mathfrak{X}) = \cup_{G\in\mathfrak{X}} K(G)$; $\mathfrak{G}_\Omega = (G \in \mathfrak{G} \mid K(G) \subseteq \Omega)$. Пусть $A \in \mathfrak{I}$. Тогда $(A)' = \mathfrak{I}\backslash(A)$, $\mathfrak{G}_A = \mathfrak{G}_{(A)}$, $\mathfrak{G}_{A'} = \mathfrak{G}_{(A)'}$. Главный фактор M/N группы G называется главным A-фактором, если $K(M/N) \subseteq (A)$. Через $\mathfrak{S}_{cA}$ обозначается класс всех групп, у которых каждый главный A-фактор централен. Пусть $\mathfrak{F}_1$, $\mathfrak{F}_2$ — классы групп. Тогда $\mathfrak{F}_1\mathfrak{F}_2 = (G \in \mathfrak{G} \mid$ в G существует нормальная подгруппа $N \in \mathfrak{F}_1$ такая, что $G/N \in \mathfrak{F}_2)$.

Пусть $\varphi : \mathfrak{I} \to \{$непустые формации Фиттинга$\}$, $f : \Omega \cup \{\Omega'\} \to \{$формации$\}$, где $f(\Omega') \neq \varnothing$, и $h : \mathfrak{I} \to \{$формации$\}$ — функции, принимающие одинаковые значения на изоморфных группах из области определения. *Ω-расслоенной формацией* называется формация вида $\mathfrak{F} = (G \in \mathfrak{G} \mid G/O_\Omega(G) \in f(\Omega')$ и $G/G_{\varphi(A)} \in f(A)$ для любого $A \in K(G) \cap \Omega)$, где $O_\Omega(G)$ и $G_{\varphi(A)}$ — наибольшие нормальные подгруппы группы G, принадлежащие $\mathfrak{G}_\Omega$ и $\varphi(A)$ соответственно. Функция f называется *Ω-спутником*, а функция φ — *направлением* Ω-расслоенной формации $\mathfrak{F}$. Формация вида $\mathfrak{H} = (G \in \mathfrak{G} \mid G/G_{\varphi(A)} \in h(A)$ для любого $A \in K(G))$ называется *расслоенной* формацией со *спутником* h и *направлением* φ. Ω-расслоенная (расслоенная) формация с направлением φ называется: *Ω-свободной* (*свободной*), если $\varphi = \varphi_0$, где $\varphi_0(A) = \mathfrak{G}_{A'}$ для любой группы $A \in \mathfrak{I}$; *Ω-канонической* (*канонической*), если $\varphi = \varphi_2{}'$, где $\varphi_2{}'(A) = \mathfrak{G}_{A'}\mathfrak{G}_A$ для любой группы $A \in \mathfrak{I}$; *Ω-биканонической* (*биканонической*), если $\varphi = \varphi_2$, где $\varphi_2(A) = \mathfrak{G}_{A'}\mathfrak{G}_A$ для любой абелевой группы $A \in \mathfrak{I}$ и $\varphi_2(A) = \mathfrak{G}_{A'}$ для любой неабелевой группы $A \in \mathfrak{J}$; Ω-*композиционной* (*композиционной*), если $\varphi = \varphi_3$, где $\varphi_3(A) = \mathfrak{S}_{cA}$ для любой группы $A \in \mathfrak{J}$ [3].

В работе [4] С.Ф. Каморников и Л.А. Шеметков построили формулу композиционной формации, описывающую ее строение. А.Н. Скиба и Л.А. Шеметков в [5] получили формулу $\mathfrak{L}$-композиционной формации. Развивая данные результаты, в теоремах 1 и 2 построены формулы Ω-расслоенной формации.

Теорема 1. *Пусть $\mathfrak{F}$ — Ω-расслоенная формация с Ω-спутником f и направлением φ, где $\varphi_0 \leqslant \varphi$. Тогда $\mathfrak{F} = \mathfrak{K} \cap \mathfrak{M} \cap \mathfrak{L}$, где $\mathfrak{K} = \mathfrak{G}_{K(\mathfrak{F})}$, $\mathfrak{M} = \mathfrak{G}_\Omega f(\Omega')$,*

$$\mathfrak{L} = \begin{cases} \mathfrak{G}, & \text{если } K(\mathfrak{F}) \cap \Omega = \varnothing; \\ \bigcap_{A \in K(\mathfrak{F}) \cap \Omega} \varphi(A) f(A), & \text{если } K(\mathfrak{F}) \cap \Omega \neq \varnothing. \end{cases}$$

В случае, когда $\Omega = \mathfrak{J}$, из теоремы 1 получаем формулу расслоенной формации.

Следствие 1. *Пусть $\mathfrak{F}$ — расслоенная формация со спутником f и направлением φ, где $\varphi_0 \leqslant \varphi$. Тогда $\mathfrak{F} = \mathfrak{K} \cap \mathfrak{L}$, где $\mathfrak{K} = \mathfrak{G}_{K(\mathfrak{F})}$,*

$$\mathfrak{L} = \begin{cases} \mathfrak{G}, & \text{если } K(\mathfrak{F}) = \varnothing; \\ \bigcap_{A \in K(\mathfrak{F})} \varphi(A) f(A), & \text{если } K(\mathfrak{F}) \neq \varnothing. \end{cases}$$

В частности, если $\mathfrak{F} \neq \mathfrak{E}$, то $\mathfrak{F} = \mathfrak{G}_{K(\mathfrak{F})} \cap (\bigcap_{A \in K(\mathfrak{F})} \varphi(A) f(A))$.

Из теоремы 1 в качестве следствий вытекают результаты для Ω-свободных (свободных), Ω-канонических (канонических), Ω-биканонических (биканонических), Ω-композиционных (композиционных) формаций.

Следствие 2. *Пусть $\mathfrak{F}$ — Ω-свободная формация с Ω-спутником f. Тогда*
$\mathfrak{F} = \mathfrak{G}_{K(\mathfrak{F})} \cap \mathfrak{G}_\Omega f(\Omega')$, если $K(\mathfrak{F}) \cap \Omega = \varnothing$, и
$\mathfrak{F} = \mathfrak{G}_{K(\mathfrak{F})} \cap \mathfrak{G}_\Omega f(\Omega') \cap (\bigcap_{A \in K(\mathfrak{F}) \cap \Omega} \mathfrak{G}_{A'} f(A))$, если $K(\mathfrak{F}) \cap \Omega \neq \varnothing$.

Следствие 3. *Пусть $\mathfrak{F}$ — Ω-каноническая формация с Ω-спутником f. Тогда*
$\mathfrak{F} = \mathfrak{G}_{K(\mathfrak{F})} \cap \mathfrak{G}_\Omega f(\Omega')$, если $K(\mathfrak{F}) \cap \Omega = \varnothing$, и
$\mathfrak{F} = \mathfrak{G}_{K(\mathfrak{F})} \cap \mathfrak{G}_\Omega f(\Omega') \cap (\bigcap_{A \in K(\mathfrak{F}) \cap \Omega} \mathfrak{G}_{A'} \mathfrak{G}_A f(A))$, если $K(\mathfrak{F}) \cap \Omega \neq \varnothing$.

Следствие 4. *Пусть $\mathfrak{F}$ — Ω-биканоническая формация с Ω-спутником f. Тогда*
$\mathfrak{F} = \mathfrak{G}_{K(\mathfrak{F})} \cap \mathfrak{G}_\Omega f(\Omega')$, если $K(\mathfrak{F}) \cap \Omega = \varnothing$, и
$\mathfrak{F} = \mathfrak{G}_{K(\mathfrak{F})} \cap \mathfrak{G}_\Omega f(\Omega') \cap (\bigcap_{A \in K(\mathfrak{F}) \cap \Omega \cap \mathfrak{A}} \mathfrak{G}_{A'} \mathfrak{G}_A f(A)) \cap (\bigcap_{A \in (K(\mathfrak{F}) \cap \Omega) \setminus \mathfrak{A}} \mathfrak{G}_{A'} f(A))$, если $K(\mathfrak{F}) \cap \Omega \neq \varnothing$.

Следствие 5. *Пусть $\mathfrak{F}$ — Ω-композиционная формация с Ω-спутником f. Тогда*
$\mathfrak{F} = \mathfrak{G}_{K(\mathfrak{F})} \cap \mathfrak{G}_\Omega f(\Omega')$, если $K(\mathfrak{F}) \cap \Omega = \varnothing$, и
$\mathfrak{F} = \mathfrak{G}_{K(\mathfrak{F})} \cap \mathfrak{G}_\Omega f(\Omega') \cap (\bigcap_{A \in K(\mathfrak{F}) \cap \Omega} \mathfrak{S}_{cA} f(A))$, если $K(\mathfrak{F}) \cap \Omega \neq \varnothing$.

Следствие 6. *Пусть $\mathfrak{F}$ — неединичная свободная формация со спутником f. Тогда*
$\mathfrak{F} = \mathfrak{G}_{K(\mathfrak{F})} \cap (\bigcap_{A \in K(\mathfrak{F})} \mathfrak{G}_{A'} f(A))$.

Следствие 7. *Пусть $\mathfrak{F}$ — неединичная каноническая формация со спутником f. Тогда*
$\mathfrak{F} = \mathfrak{G}_{K(\mathfrak{F})} \cap (\bigcap_{A \in K(\mathfrak{F})} \mathfrak{G}_{A'} \mathfrak{G}_A f(A))$.

Следствие 8. *Пусть $\mathfrak{F}$ — неединичная биканоническая формация со спутником f. Тогда*
$\mathfrak{F} = \mathfrak{G}_{K(\mathfrak{F})} \cap (\bigcap_{A \in K(\mathfrak{F}) \cap \mathfrak{A}} \mathfrak{G}_{A'} \mathfrak{G}_A f(A)) \cap (\bigcap_{A \in K(\mathfrak{F}) \setminus \mathfrak{A}} \mathfrak{G}_{A'} f(A))$.

Следствие 9 ([4], теорема 1.2). *Пусть $\mathfrak{F}$ — неединичная композиционная формация со спутником f. Тогда $\mathfrak{F} = \mathfrak{G}_{K(\mathfrak{F})} \cap (\bigcap_{A \in K(\mathfrak{F})} \mathfrak{S}_{cA} f(A))$.*

Касательно следствия 9 отметим, что используемая нами терминология несколько отличается от терминологии, принятой в [4].

Теорема 2. *Пусть* $\mathfrak{F}$ — *Ω-расслоенная формация с Ω-спутником f и направлением φ, где $\varphi_0 \leqslant \varphi$. Тогда* $\mathfrak{F} = \mathfrak{M} \cap \mathfrak{L} \cap \mathfrak{B}$, *где* $\mathfrak{M} = \mathfrak{G}_{\Omega} f(\Omega')$,

$$\mathfrak{L} = \begin{cases} \mathfrak{G}, & \text{если } K(\mathfrak{F}) \cap \Omega = \varnothing; \\ \bigcap_{A \in K(\mathfrak{F}) \cap \Omega} \varphi(A) f(A), & \text{если } K(\mathfrak{F}) \cap \Omega \neq \varnothing, \end{cases}$$

$$\mathfrak{B} = \begin{cases} \mathfrak{G}, & \text{если } \Omega \backslash K(\mathfrak{F}) = \varnothing; \\ \bigcap_{B \in \Omega \backslash K(\mathfrak{F})} \mathfrak{G}_{B'}, & \text{если } \Omega \backslash K(\mathfrak{F}) \neq \varnothing. \end{cases}$$

Следствие 10. *Пусть* $\mathfrak{F}$ — *расслоенная формация со спутником f и направлением φ, где $\varphi_0 \leqslant \varphi$. Тогда* $\mathfrak{F} = \mathfrak{L} \cap \mathfrak{B}$, *где*

$$\mathfrak{L} = \begin{cases} \mathfrak{G}, & \text{если } K(\mathfrak{F}) = \varnothing; \\ \bigcap_{A \in K(\mathfrak{F})} \varphi(A) f(A), & \text{если } K(\mathfrak{F}) \neq \varnothing, \end{cases}$$

$$\mathfrak{B} = \begin{cases} \mathfrak{G}, & \text{если } \mathfrak{I} \backslash K(\mathfrak{F}) = \varnothing; \\ \bigcap_{B \in \mathfrak{I} \backslash K(\mathfrak{F})} \mathfrak{G}_{B'}, & \text{если } \mathfrak{I} \backslash K(\mathfrak{F}) \neq \varnothing. \end{cases}$$

Следствие 11. *Пусть* $\mathfrak{F}$ — *Ω-композиционная формация с Ω-спутником f.*
Если $K(\mathfrak{F}) \cap \Omega = \varnothing$, *то* $\mathfrak{F} = \mathfrak{G}_{\Omega} f(\Omega') \cap (\bigcap_{B \in \Omega \backslash K(\mathfrak{F})} \mathfrak{G}_{B'})$.
Если $K(\mathfrak{F}) \cap \Omega \neq \varnothing$, *то*
$\mathfrak{F} = \mathfrak{G}_{\Omega} f(\Omega') \cap (\bigcap_{A \in \Omega} \mathfrak{S}_{cA} f(A))$ *при* $K(\mathfrak{F}) = \Omega$ *и*
$\mathfrak{F} = \mathfrak{G}_{\Omega} f(\Omega') \cap (\bigcap_{A \in K(\mathfrak{F}) \cap \Omega} \mathfrak{S}_{cA} f(A)) \cap (\bigcap_{B \in \Omega \backslash K(\mathfrak{F})} \mathfrak{G}_{B'})$ *при* $K(\mathfrak{F}) \neq \Omega$.

Формула Ω-композиционной формации из следствия 11 соответствует формуле $\mathfrak{L}$-композиционной формации (при $\Omega = \mathfrak{L}$), приведенной в [5, с. 784].

Следствие 12. *Пусть* $\mathfrak{F}$ — *неединичная композиционная формация со спутником f. Тогда* $\mathfrak{F} = \bigcap_{A \in \mathfrak{I}} \mathfrak{S}_{cA} f(A)$ *при* $K(\mathfrak{F}) = \mathfrak{I}$, *и* $\mathfrak{F} = (\bigcap_{A \in K(\mathfrak{F})} \mathfrak{S}_{cA} f(A)) \cap (\bigcap_{B \in \mathfrak{I} \backslash K(\mathfrak{F})} \mathfrak{G}_{B'})$ *при* $K(\mathfrak{F}) \subset \mathfrak{I}$.

Аналогичным образом можно сформулировать следствия для Ω-свободных (свободных), Ω-канонических (канонических), Ω-биканонических (биканонических) формаций.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Шеметков Л. А. Формации конечных групп. — М.: Изд-во Наука, 1978. 272 с.

2. Скиба А. Н., Шеметков Л. А. Частично композиционные формации конечных групп // Доклады Нац. Академии наук Беларуси. 1999. Том 43, № 4. С. 5-8.

3. Ведерников В. А. Максимальные спутники Ω-расслоенных формаций и классов Фиттинга // Труды ИММ УрО РАН. 2001. Том 7, № 2. С. 55-71.

4. Каморников С. Ф., Шеметков Л. А. О корадикалах субнормальных подгрупп // Алгебра и логика. 1995. Том 34, № 5. С. 493-513.

5. Скиба А. Н., Шеметков Л. А. Кратно $\mathfrak{L}$-композиционные формации конечных групп // Укр. мат. журн. 2000. Том 52, № 6. С. 783-797.

УДК 511.32

Порождения корневыми элементами в группах Шевалле

В. В. Нестеров (Россия, г. Санкт-Петербург)
Санкт-Петербургский государственный университет
e-mail: vl.nesterov@mail.ru

Generation by root elements in Chevalley groups

V. V. Nesterov (Russia, Saint-Petersburg)
Saint-Petersburg State University
e-mail:vl.nesterov@mail.ru

Настоящая работа представляет собой обзор результатов автора по порождениям корневыми подгруппами в группах Шевалле. Напомним, что группа Шевалле порождается корневыми унипотентными подгруппами, которые являются наиболее важным классом подгрупп в группах Шевалле.

Пусть Φ — приведенная неприводимая система корней, P — решетка, лежащая между решёткой корней $Q(\Phi)$ и решёткой весов $P(\Phi)$, K — поле. Тогда $G = G_P(\Phi, K)$ — группа Шевалле типа Φ, P над полем K.

Для каждого корня $\alpha \in \Phi$ и $t \in K$ обозначим через $x_\alpha(t)$ соответствующий элементарный корневой унипотент. Положим $w_\alpha(t) = x_\alpha(t)x_{-\alpha}(-t^{-1})x_\alpha(t)$ и $h_\alpha(t) = w_\alpha(t)w_\alpha(1)^{-1}$.

Далее, $X_\alpha = \{x_\alpha(t) \mid t \in K\}$ — элементарная корневая унипотентная подгруппа, соответствующая α. $H_\alpha = \{h_\alpha(t) \mid t \in K^*\}$ — элементарная корневая полупростая подгруппа, соответствующая α.

Подгруппы, сопряженные с X_α и H_α называются корневыми унипотентными или полупростыми подгруппами, соответственно. Их элементы называются корневыми унипотентными/полупростыми элементами.

В системах корней типа A_ℓ, D_ℓ, E_ℓ все корни одинаковой длины и называются длинными корнями. В системах корней типа B_ℓ, C_ℓ, F_4 и G_2 существуют корни двух различных длин: длинные и короткие. Таким образом, мы имеем длинные/короткие корневые унипотентные подгруппы (ДКУП/ККУП).

Самыми просто устроенными полупростыми элементами являются микровесовые элементы.

Пусть $\omega \in P(\Phi)$. Тогда мы можем определить весовой элемент $h_\omega(t)$, реализующий некоторый диагональный автоморфизм:

$$h_\omega(s)x_\alpha(t)h_\omega(s)^{-1} = x_\alpha(t^{\langle\alpha,\omega\rangle}s), \text{ где } \langle\alpha,\omega\rangle = \frac{2(\alpha,\omega)}{(\omega,\omega)} \in \mathbb{Z}.$$

Эти элементы, вообще говоря, не принадлежат группе Шевалле G, но принадлежат её диагональному расширению $\bar{G}$, которое называется расширенной группой Шевалле. Подгруппы, порождённые весовыми элеиентами, мы будем называть торами. Веса являющиеся минимальными относительно некоторого порядка называются микровесами.

Порождения ДКУП давно и хорошо изучены, чему посвящено огромное количество работ. Упомянем фамилии крупных математиков, которые ими занмались: М. Ашбахер, Г. Зейтц, В. Кантор, Б. Куперстейн, Ф. Тиммесфельд и фундаментальные обзоры А.С. Кондратьева [1] и Н.А. Вавилова [2].

Для ККУП имеются лишь отдельные результаты. Неприводимые подгруппы классических групп, порожденные ККУП, описаны Б. Старк и Ли Шанжи. Для алгебраически замкнутого поля подгруппы, порожденные ККУП, описаны в работе Д. Стюарт.

Используя разложение Брюа короткого корневого унипотентного элемента, вычисленное Н.А. Вавиловым, в работе [3] были описаны подгруппы, порожденные парой ККУП и классифицированы орбиты пар под действием сопряжением.

Теорема 1. *Пусть X_1, X_2 — две различные ККУП в односвязной группе Шевалле $G(\Phi, K)$ типа B_ℓ, C_ℓ или F_4. Тогда подгруппа $\langle X, Y\rangle$ изоморфна одной из следующих подгрупп.*

$$1)\quad X_1X_2, \qquad 2) X_1X_2Z, Z=[X_1,X_2]) \qquad 3)\quad U(\widetilde{\mathrm{A}}_2, K),$$
$$4)\quad U(\mathrm{C}_2, K), \qquad 5)\quad X_1X_2YZ, \qquad 6) U(\mathrm{C}_2, K)Z,$$
$$7)\quad \mathrm{SL}_2(K), \qquad 8)\quad \mathrm{SL}_2(K)Z,\ K\neq \mathbb{F}_3, \qquad 9)\quad \mathrm{SL}_2(K)Z_1Z_2,$$
$$10)\quad \mathrm{SL}_2(K)U_2(\mathrm{C}_2, K), \qquad 11)\quad \mathrm{SL}_2(K)\times \mathrm{SL}_2(K),$$
$$12)\quad \mathrm{SL}_2(L),\ [L:K]=2.$$

Здесь Z, Z_1, Z_2 — ДКУП, Y — ККУП.

Данный список получается значительно больше, чем аналогичный список для пар ДКУП, который содержит только четыре варианта. Это объясняется тем, что ККУП не лежит в центре унипотентного радикала борелевской подгруппы.

Также в работе [4] были описаны пары ККУП в группе Шевалле типа G_2 и классифицированы их орбиты.

Используя теорему 1, в работе [5] было получено описание подсистемных подгрупп в группе Шевалле типа F_4. Напомним, что подсистемными подгруппами называются подгруппы, которые также являются группами Шевалле. В статье описаны подсистемные подгруппы группы Шевалле типа F_4, порожденные короткими корневыми подгруппами и определено минимальное количество подгрупп, необходимых для их порождения. Как следствие получено описание максимальных подсистемных подгрупп в группах Шевалле, порождённых тремя ККУП.

Теорема 2. *Пусть G — односвязная группа Шевалле типа F_4 над полем K. Предположим, что $\operatorname{char} K\neq 2$ и $K\neq\mathbb{F}_3$. Тогда подсистемные подгруппы $E(\Delta)$ порождаются d ККУП в G (мы пишем $d=0$, если $E(\Delta)$ не может быть порождена ККУП), а именно,*

$$1)\ d=2 \text{ для } \Delta=\widetilde{\mathrm{A}}_1,$$
$$2)\ d=3 \text{ для } \Delta=\mathrm{F}_4,\ \mathrm{B}_4, \mathrm{D}_4, \mathrm{B}_3, \mathrm{B}_2+\mathrm{A}_1,\ \mathrm{C}_3, \mathrm{A}_3, 3\mathrm{A}_1, \mathrm{B}_2, \widetilde{\mathrm{A}}_2, 2\mathrm{A}_1,$$
$$3)\ d=4 \text{ для } \Delta=\mathrm{C}_3+\mathrm{A}_1, \mathrm{B}_2+2\mathrm{A}_1, 4\mathrm{A}_1$$
$$4)\ d=5 \text{ для } \Delta=2\mathrm{A}_1+\widetilde{\mathrm{A}}_1, \mathrm{A}_3+\widetilde{\mathrm{A}}_1,$$
$$5)\ d=0 \text{ для } \Delta=\mathrm{A}_2+\widetilde{\mathrm{A}}_2, \mathrm{A}_2+\widetilde{\mathrm{A}}_1, \mathrm{A}_1+\widetilde{\mathrm{A}}_2, \mathrm{A}_2, \mathrm{A}_1+\widetilde{\mathrm{A}}_1, \mathrm{A}_1.$$

Теорема 3. *Пусть G — односвязная группа Шевалле типа Φ над полем K. Предположим, что $\operatorname{char} K\neq 2$ для $\Phi=\mathrm{B}_\ell$, C_ℓ, F_4 и $\operatorname{char} K\neq 3$ для $\Phi=\mathrm{G}_2$. Тогда максимальная подсистемная подгруппа H, порожденная тремя ККУП совпадает с группой типа B_3, C_3, F_4 и G_2 в группе Шевалле типа B_ℓ, C_ℓ, F_4 и G_2, соответственно.*

Следующие по сложности подгруппы в группах Шевалле — торы, отвечающие микровесам. В обзорной работе [6] нами были сформулированы проблемы, связанные с геометрией микровесовых торов, и намечены пути их решения. Но даже для полной линейной группы $\mathrm{GL}(n, K)$, которая является расширенной группой Шевалле типа A_ℓ, задача описания подгрупп, порожденных парой микровесовых торов представляется достаточно громоздкой.

Одним из первых шагов в намеченном направлении является работа [7]. В ней доказана теорема редукции для пары микровесовых торов, которая утверждает, что любая пара таких подгрупп вкладывается сопряжением в $\mathrm{GL}(6, K)$.

В ней же описаны подгруппы, которые вкладываются в $\mathrm{GL}(6, K)$, но не могут быть вложены в $\mathrm{GL}(5, K)$. Подгруппы, которые вкладываются в $\mathrm{GL}(5, K)$, но не могут быть вложены в $\mathrm{GL}(4, K)$, описаны в работе [8]. Наиболему сложному случаю, когда пара микровесовых торов вкладывается в $\mathrm{GL}(4, K)$ и не может быть вложена в $\mathrm{GL}(5, K)$ посвящена работа [9] и вторая, готовящаяся в печать.

Для сравнения с унипотентными подгруппами заметим, что список подгрупп, порождённых парой микровесовых торов в $\mathrm{GL}(5, K)$ состоит из 14 пунктов, причём в четырёх случаях мы получаем серию подгрупп, параметризуемых элементами поля.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кондратьев А. С. Подгруппы конечных групп Шевалле// Успехи мат. наук, 1986. Том 41, № 1. С. 57–96.

2. Вавилов Н. А. Подгруппы групп Шевалле, содержащие максимальный тор// Труды Ленингр. Мат. Общ., 1990. Том 1. С. 64–109.

3. Нестеров В. В. Порождение пар коротких корневых подгрупп в группах Шевалле// Алгебра и анализ, 2004. Том 16. С. 172–208.

4. Нестеров В. В. Пары коротких корневых подгрупп в группе Шевалле типа G_2// Записки науч. сем. ПОМИ, 2001. Томю 281. С. 253–273.

5. Нестеров В. В. Подсистемные подгруппы группы типа F_4, порожденные короткими корневыми подгруппами// Алгебра и анализ, 2019. Том 31. С. 92-107.

6. Вавилов Н. А., Нестеров В. В. Геометрия микровесовых торов// Владикавказский мат. журнал. 2008. Том 10, № 1. С. 10–23.

7. Nesterov V.V., Vavilov N. A., Pairs of microweight tori in GL_n// Чебышевский сборник, 2020. Том 21, № 3. С. 257–266.

8. Вавилов Н. А., Нестеров В. В. Подгруппы, порождённые парой 2-торов в $\mathrm{GL}(5, K)$// Записки науч. сем. ПОМИ. 2023. Том 522. С. 8–45.

9. Nesterov V.V., Zhang M. Subgroups generated by a pair of 2-tori in $\mathrm{GL}(4, K)$. I// Записки науч. сем. ПОМИ. 2024. Том 531. С. 127–146.

УДК 512.542

О конечных группах с заданными подгруппами нечетных индексов

С. В. Путилов (Россия, г. Брянск)
Брянский государственный университет им. академика И. Г. Петровского
e-mail: algebra.bgu@yandex.ru

On finite groups with given subgroups of odd indices

S. V. Putilov (Russia, Bryansk)
Ivan Petrovsky Bryansk State University
e-mail: algebra.bgu@yandex.ru

G – конечная группа; $F(G)$ – подгруппа Фиттинга в G. Продолжаются исследования G, представленные в статьях [1, 2].

Теорема 1. *Если в G каждая ненормальная ненильпотентная максимальная подгруппа разрешима и имеет нечетный индекс, то группа G разрешима.*

Следствие 1. *Пусть в G каждая i-я, $i = \overline{1, n}$, ненормальная ненильпотентная максимальная подгруппа имеет нечетный индекс соответственно в G, в 1-й, во 2-й, ..., в $(n-1)$-й ненормальной ненильпотентной максимальной подгруппе. Если в G каждая n-я ненормальная ненильпотентная максимальная подгруппа разрешима, то G разрешима.*

Теорема 2. *Если в G каждая ненормальная ненильпотентная максимальная подгруппа сверхразрешима и имеет нечетный индекс, то группа G сверхразрешима или группа $G/F(G)$ сверхразрешима.*

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Путилов С. В. Абнормальные максимальные подгруппы и разрешимость конечных групп // Математические заметки. 1983. Том 34, № 3. С. 347-353.

2. Каморников С. Ф., Тютянов В. Н. Конечные простые группы, все максимальные подгруппы которых имеют нечетный индекс // ПФМТ. 2020. Том 43, № 2. С. 71-74.

УДК 512.542

Строение группы с заданными системами обобщенно полунормальных подгрупп[1]

А. А. Трофимук (Беларусь, г. Брест)
Брестский государственный университет имени А. С. Пушкина
e-mail: alexander.trofimuk@gmail.com
П. А. Павлушко (Беларусь, г. Брест)
Брестский государственный университет имени А. С. Пушкина
e-mail: polinapavlushko@gmail.com

The structure of a group with given systems of generalized seminormal subgroups

A. A. Trofimuk (Belarus, Brest)
Brest State A. S. Pushkin University
e-mail: alexander.trofimuk@gmail.com
P. A. Pavlushko (Belarus, Brest)
Brest State A. S. Pushkin University
e-mail: polinapavlushko@gmail.com

Рассматриваются только конечные группы. Используемая терминология соответствует [1]. Подгруппы A и B группы G называются *перестановочными*, если $AB = BA$. Более слабое условие перестановочности было приведено в работе [2]: подгруппы A и B группы G называются сс-*перестановочными в* G, если A перестановочна с B^g для некоторого элемента $g \in \langle A, B\rangle$.

Напомним, что подгруппа A называется *полунормальной* в группе G, если в G существует подгруппа T такая, что $G = AT$ и A перестановочна с каждой подгруппой из T. В [3] исследованы группы с заданными системами полунормальных подгрупп.

В работах [4, 5] введены следующие обобщения полунормальности:

— подгруппа A группы G называется *условно полунормальной* подгруппой в G, если в G существует подгруппа T такая, что $G = AT$ и A сс-перестановочна с каждой подгруппой из T.

— подгруппа H называется *слабо субнормальной в* G, если $H = \langle A, B\rangle$ для некоторой субнормальной в G подгруппы A и полунормальной подгруппы B из G.

Кроме того, в [4, 5, 6] приведены свойства слабо субнормальных (условно полунормальных) подгрупп, а также представлена информация о строении групп с заданными системами слабо субнормальных (условно полунормальных) подгрупп.

Объединение понятий, рассмотренных выше, привело к следующему определению.

Определение 1. *Подгруппа H называется слабо условно полунормальной в G, если $H = \langle A, B\rangle$ для некоторой субнормальной в G подгруппы A и условно полунормальной подгруппы B из G.*

Основным результатом настоящей работы является следующая

Теорема 1. *1. Если все силовские (максимальные) подгруппы группы G слабо условно полунормальны в G, то G сверхразрешима.*

2. Пусть A и B — сверхразрешимые слабо условно полунормальные подгруппы группы G и $G = AB$. Если $(|A|, |B|) = 1$, то G сверхразрешима.

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке БРФФИ (грант №Ф23РНФ-237).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Монахов В. С. Введение в теорию конечных групп и их классов. — Минск: Вышэйшая школа, 2006.

2. Guo W., Shum K. P., Skiba A. N. Conditionally Permutable Subgroups and Supersolubility of Finite Groups // Southeast Asian Bull. Math. 2005. Vol. 29. P. 493-510.

3. Монахов В. С., Трофимук А. А. О сверхразрешимости группы с полунормальными подгруппами // Сиб. мат. журн. 2020. Том 61, № 1. С. 148-159.

4. Хуан Ц., Ху Б., Скиба А. Н. Конечные группы со слабо субнормальными и частично субнормальными подгруппами // Сиб. матем. журн. 2021. Т. 62, № 1. С. 210–220.

5. Трофимук А. А. О сверхразрешимости группы с заданными системами условно полунормальных подгрупп // Труды Института математики. 2023. Т. 31, №2. С. 81–90.

6. Трофимук А. А. О конечных группах, факторизуемых слабо субнормальными подгруппами // Сибирский математический журнал. 2021. Т. 62, № 6. С. 1401–1408.

УДК 511.32

Некоторые зависимости между решениями линейных диофантовых уравнений при действиях группы подстановок и группы автоморфизмов целых чисел

И. С. Чистов (Россия, г. Москва)
Московский педагогический государственный университет
e-mail: i.chistow2014@yandex.ru
Л. М. Цыбуля (Россия, г. Москва)
Московский педагогический государственный университет
e-mail: liliya-kinder@mail.ru

Some dependencies of the linear Diophantine equations solutions under the action of the symmetric group and the automoprhism group of the integers

I. S. Chistov (Russia, Moscow)
Moscow Pedagogical State University
e-mail: i.chistow2014@yandex.ru
L. M. Tsybulya (Russia, Moscow)
Moscow Pedagogical State University
e-mail: liliya-kinder@mail.ru

Определение 1. *Линейным диофантовым уравнением (ЛДУ) с n неизвестными будем называть уравнение вида*

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b, \tag{1}$$

где $a_1, a_2, \ldots, a_n, b$ — целые числа, причём хотя бы одно $a_i \neq 0$, и при этом требуется, чтобы неизвестные $x_1, x_2, \ldots, x_n$ принимали только целые значения. Числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$ называются коэффициентами ЛДУ.

Множество всевозможных диофантовых уравнений с n неизвестными будем обозначать так:

$$LDE = \{D : a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b \mid a_i,\ b \in \mathbb{Z}, i = 1, 2, \ldots, n\}.$$

Цель работы — ввести действия группы подстановок S_n и группы автоморфизмов целых чисел $Aut(\mathbb{Z})$ на множестве LDE и на множестве решений ЛДУ $\mathbb{Z}^n$, а также выявить взаимосвязи как между различными действиями групп на множестве LDE, так и между действиями групп на двух данных множествах.

Предложение 1. *Следующие отображения являются действиями группы S_n на множестве LDE:*

а) отображение

$$a_\sigma : S_n \times LDE \to LDE,$$

заданное по правилу: каждой паре $(\sigma, a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b)$ ставится в соответствие элемент

$$\sigma \cdot (a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b) = (a_{\sigma(1)}x_1 + a_{\sigma(2)}x_2 + \ldots + a_{\sigma(n)}x_n = b);$$

б) отображение

$$x_\sigma : S_n \times LDE \to LDE,$$

определенное правилом: каждой паре $(\sigma, a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b)$ поставим в соответствие элемент

$$\sigma \cdot (a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b) = (a_1x_{\sigma(1)} + a_2x_{\sigma(2)} + \ldots + a_nx_{\sigma(n)} = b);$$

в) отображение

$$a_\sigma x_\sigma : S_n \times LDE \to LDE$$

по правилу: каждой паре $(\sigma, a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b)$ ставится в соответствие элемент

$$\sigma \cdot (a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b) = (a_{\sigma(1)}x_{\sigma(1)} + a_{\sigma(2)}x_{\sigma(2)} + \ldots + a_{\sigma(n)}x_{\sigma(n)} = b).$$

Определение 2. *Действие a_σ будем называть перестановкой коэффициентов ЛДУ; действие x_σ — перестановкой неизвестных ЛДУ; действие $a_\sigma x_\sigma$ — перестановкой коэффициентов и неизвестных ЛДУ в одноименном порядке.*

Рассмотрим множество D_{a_σ} всех ЛДУ, полученных перестановкой коэффициентов фиксированного ЛДУ (1) в порядке $\sigma^k, k \in \mathbb{N}_0$. Другими словами,

$$D_{a_\sigma} = \{\sigma^k \cdot (a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b) \mid k \in \mathbb{N}_0\}.$$

Заметим, что $D_{a_\sigma} \subset LDE$, поэтому мы вправе говорить о действиях S_n на D_{a_σ} и называть их аналогичным образом, как в определении 2.

Теорема 1. *Если в уравнении множества D_{a_σ} переставить коэффициенты и неизвестные в одноимённом порядке, то полученное уравнение будет совпадать с исходным, то есть*

$$\forall D \in D_{a_\sigma}(a_\sigma x_\sigma(D) = D).$$

Пример 1. *Пусть имеется ЛДУ* $D' : (x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 6)$ *и подстановка* $\sigma = (12345)$. *Получим ЛДУ* $D = a_{(12345)}(D') = (2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 + x_5 = 6) \in D'_{a_{(12345)}}$. *Остаётся заметить, что* $a_{(12345)}x_{(12345)}(D) = (3x_2 + 4x_3 + 5x_4 + x_5 + 2x_1 = 6) = D$.

Теорема 2. *Переставить неизвестные в любом ЛДУ в определённом порядке означает переставить его коэффициенты в обратном порядке, т.е.*

$$\forall D \in LDE\ (x_\sigma(D) = a_{\sigma^{-1}}(D)).$$

Предложение 2. *Отображение*

$$z_\sigma : S_n \times \mathbb{Z}^n \to \mathbb{Z}^n,$$

определённое правилом: каждой паре (σ, z) *ставится в соответствие элемент*

$$\sigma \cdot (z_1, z_2, \ldots, z_n) = (z_{\sigma(1)}, z_{\sigma(2)}, \ldots, z_{\sigma(n)}),$$

является действием группы S_n *на множестве* $\mathbb{Z}^n$.

Теорема 3. *Пусть* $z_1, z_2 \in \mathbb{Z}^n$ – *векторы общего решения совместных ЛДУ* $D_1, D_2 \in LDE$ *соответственно. Тогда если переставить коэффициенты ЛДУ в порядке* σ, *то координаты вектора общего решения переставятся в том же порядке. То есть*

$$D_2 = \sigma \cdot D_1 \Longrightarrow z_2 = \sigma \cdot z_1.$$

Следствие 1. *При перестановке неизвестных совместного ЛДУ координаты его вектора общего решения переставляются в обратном порядке.*

Предложение 3. *Следующее отображение является действием группы* $Aut(\mathbb{Z})$ *на множестве* LDE:

$$a_f : Aut(\mathbb{Z}) \times LDE \to LDE,$$

где каждой паре

$$(f, a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b)$$

поставим в соответствие элемент

$$f \cdot (a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b) =$$

$$= (a_1x_1 + \ldots + f(a_{i_1})x_{i_1} + \ldots + f(a_{i_2})x_{i_2} + \ldots + f(a_{i_k})x_{i_k} + \ldots + a_nx_n = b),$$

где $k \leq n$.

Предложение 4. *Отображение*

$$z_f : Aut(\mathbb{Z}) \times \mathbb{Z}^n \to \mathbb{Z}^n,$$

определённое правилом: каждой паре (f, z) *ставится в соответствие элемент*

$$f \cdot (z_1, z_2, \ldots, z_n) = (z_1, \ldots, f(z_{i_1}), \ldots, f(z_{i_2}), \ldots, f(z_{i_k}), \ldots, z_n),$$

где $k \leq n$, *является действием группы* $Aut(\mathbb{Z})$ *на множестве* $\mathbb{Z}^n$.

Определение 3. *Действие* a_f *для* $f(x) = -x$ *будем называть заменой коэффициентов ЛДУ на им противоположные и обозначать* $a^{(-)}$; *действие* z_f *для* $f(x) = -x$ *будем называть заменой координат вектора на им противоположные и обозначать* $z^{(-)}$.

Иногда оставим за собой право записывать по порядку результат замены знаков при действии, например, $a^{(-++-)}$ (или $z^{(+++-)}$).

Теорема 4. *Пусть $z_1, z_2 \in \mathbb{Z}^n$ – векторы общего решения совместных ЛДУ $D_1, D_2 \in LDE$ соответственно. Тогда если заменить определенные коэффициенты ЛДУ на им противоположные, то соответствующие по порядку координаты вектора общего решения также заменятся на им противоположные. То есть*

$$D_2 = a^{(-)}(D_1) \Longrightarrow z_2 = z^{(-)}(z_1).$$

Пример 2. *Благодаря теоремам 3 и 4 стало возможным быстро решать целый класс ЛДУ, зная решение всего одного его представителя. Так, рассмотрим ЛДУ*

$$D : (2x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 7x_4 = 2),$$

вектором общего решения которого служит

$$z = (4 - 3t_1 + 5t_2 - 7t_3, -2 + 2t_1 - 5t_2 + 7t_3, t_2, t_3).$$

Проследим за тем, как быстро найти решение, например, для ЛДУ

$$D' : (-3x_1 + 5x_2 + 7x_3 - 2x_4 = 2).$$

Для того чтобы применить теоремы 3 и 4, нужно сначала понять, как именно D' получено из D. Собственно, замечаем, что $D' = a^{(-+--)}(D'')$, где $D'' = a_{(1234)}(D)$. Так, применяя теорему 3 к D'', а затем теорему 4 к D', получим, что решением D'' будет

$$z'' = (-2 + 2t_1 - 5t_2 + 7t_3, -t_2, t_3, 4 - 3t_1 + 5t_2 - 7t_3),$$

и, наконец, решением D' будет

$$z' = (2 - 2t_1 + 5t_2 - 7t_3, t_2, -t_3, -4 + 3t_1 - 5t_2 + 7t_3).$$

Замечание 1. *Можно заметить, что композиция действий рассматриваемых групп снова является действием.*

Одним из дальнейших исследований будет изучение структуры множества действий на ЛДУ.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бухштаб А. А. Теория чисел. М: «Просвещение», 1966. 383 с.

2. Кострикин А. И. Введение в алгебру. Часть III. Основные структуры: учебник для вузов. — М.: Физико-математическая литература, 2001. 272 с.

Секция 2. Полугруппы и универсальные алгебры

УДК 511.32

Простые алгоритмически неразрешимые фрагменты позитивных теорий свободных полугрупп

В. Г. Дурнев (Россия, г. Ярославль)
Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова
e-mail: durnev@uniyar.ac.ru
А. И. Зеткина (Россия, г. Ярославль)
Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова
e-mail: a.zetkina1@uniyar.ac.ru

Simple algorithmicaly unsolvable fragments of positive theories of free semigroups

V. G. Durnev (Russia, Yaroslavl)
Yaroslavl State University
e-mail: durnev@uniyar.ac.ru
A. I. Zetkina (Russia, Yaroslavl))
Yaroslavl State University
e-mail: a.zetkina1@uniyar.ac.ru

1. Введение

Через S_2 будем обозначать свободную полугруппу ранга 2 с пустым словом в качестве нейтрального элемента со свободными образующими a и b, а через S_2^+ – свободную полугруппу без пустого слова с теми же самыми свободными образующими.

Определение 1. *Элементарная теория свободной полугруппы S_2 (S_2^+) – это множество всех замкнутых (не содержащих свободных вхождений переменных) формул Φ вида*

$$(Q_1\, x_1)(Q_2\, x_2)\dots(Q_n\, x_n)\,\Psi,\ \textit{где}\ \Psi = \bigvee_{i=1}^{k}((\mathop{\&}_{j\in A_i} w_{ij} = u_{ij})\,\&\,(\mathop{\&}_{t\in B_i} v_{it} \neq z_{it})),$$

$$w_{ij}, u_{ij}, v_{it}, z_{it} - \textit{слова в алфавите}\ \{x_1,\dots,x_n,a,b\},$$

$$A_i\ \textit{и}\ B_i - \textit{конечные (возможно пустые) множества натуральных чисел,}$$

$$\textit{а}\ Q_1,\dots,Q_n - \textit{кванторы}\ \forall\ \textit{или}\ \exists,$$

истинных на свободной полугруппе S_2 (S_2^+).

При этом $(Q_1\, x_1)(Q_2\, x_2)\dots(Q_n\, x_n)$ называется *кванторной приставкой* формулы Φ, $Q_1\, Q_2\, \dots\, Q_n$ – *типом кванторной приставки*, а Ψ – *бескванторной частью* формулы Φ.

Определение 2. *Формула Φ называется позитивной, если ее бескванторная часть Ψ не содержит отрицаний, т.е. имеет вид*

$$\bigvee_{i=1}^{k}(\mathop{\&}_{j\in A_i} w_{ij} = u_{ij}).$$

Определение 3. *Позитивной теорией свободной полугруппы S_2 (S_2^+) называется множество всех замкнутых позитивных формул Φ истинных на свободной полугруппе S_2 (S_2^+).*

Изучение элементарной теории свободной некоммутативной полугруппы началось с работы В. Куайна [1] 1946 года, в которой он доказал *алгоритмическую неразрешимость элементарной теории любой нециклической свободной полугруппы.*

Так как для любых двух элементов U и V свободной полугруппы S_2 справедлива эквивалентность

$$U \neq V \iff (\exists x)(\exists y)(\exists z)(\bigvee_{i=1}^{m}(U = Va_ix \vee V = Ua_ix) \vee (\bigvee_{i,j=1,\, i\neq j}^{m}(U = xa_iy \,\&\, V = xa_jz))),$$

то из результата В. Куайна сразу следует *алгоритмическая неразрешимость позитивной теории любой свободной нециклической полугруппы* с пустым словом или без него. Очевидно, какие изменения надо внести в формулу из правой части эквивалентности в случае свободной полугруппы без пустого слова S_2^+.

2. Известные результаты

Теорема 1 ([2]). *Позитивные $\exists\forall\exists^3$-теории с двумя константами свободных полугрупп S_2 и S_2^+ алгоритмически неразрешимы, т.е. невозможно создать алгоритмы позволяющие по произвольной позитивной формуле вида*

$$(\exists x)(\forall z)(\exists y_1)(\exists y_2)(\exists y_3)\,\Psi, \text{где}\,\Psi = \bigvee_{i=1}^{m} w_i(x,z,y_1,y_2,y_3,a,b) = u_i(x,z,y_1,y_2,y_3,a,b)$$

определить, истинна ли она на свободной полугруппе S_2 (на свободной полугруппе S_2^+).

Теорема 2 ([3]). *Позитивные $\forall\exists^4$-теории с двумя константами свободных полугрупп S_2 и S_2^+ алгоритмически неразрешимы, т.е. невозможно создать алгоритмы позволяющие по произвольной позитивной формуле вида*

$$(\forall z)(\exists y_1)(\exists y_2)(\exists y_3)(\exists y_4)\,\Psi, \text{где}\Psi = \bigvee_{i=1}^{m} w_i(x,z,y_1,y_2,y_3,y_4,a,b) = u_i(x,z,y_1,y_2,y_3,y_4,a,b)$$

определить, истинна ли она на свободной полугруппе S_2 (на свободной полугруппе S_2^+).

Теорема 3 ([4]). *Позитивные $\forall\exists^3$-теории с двумя константами свободных полугрупп S_2 и S_2^+ алгоритмически неразрешима, т.е. невозможно создать алгоритмы позволяющие по произвольной позитивной формуле вида*

$$(\forall z)(\exists y_1)(\exists y_2)(\exists y_3)\,\Psi, \text{где}\,\Psi = \bigvee_{i=1}^{m} w_i(x,z,y_1,y_2,y_3,a,b) = u_i(x,z,y_1,y_2,y_3,a,b)$$

определить, истинна ли она на свободной полугруппе S_2 (на свободной полугруппе S_2^+).

Естественно возникает вопрос о возможности упрощения бескванторной части рассматриваемых формул.

Знак конъюнкции & из бескванторной части формулы удаляется с помощью хорошо известной эквивалентности

$$u_1 = v_1 \,\&\, u_2 = v_2 \,\&\, \dots \,\&\, u_p = v_p \iff$$
$$u_1au_2a\dots au_pau_1bu_2b\dots bu_pb = v_1av_2a\dots av_pav_1bv_2b\dots bv_pb.$$

Метод удаления из бескванторной части формулы знака дизъюнкции $\vee$ предложил Н.К. Косовский в работе [5] – он построил формулу $DK(x,y,z,v)$ вида

$$(\exists x_1)(\exists x_2)(\exists x_3)(\exists x_4)\, w(x,y,z,v,x_1,x_2,x_3,x_4,a,b) \;=\; u(x,y,z,v,x_1,x_2,x_3,x_4,a,b)$$

такую, что для произвольных элементов A, B, C и D свободной полугруппы S_2 справедлива эквивалентность

$$A = B \vee C = D \iff S_2 \models (\exists x_1)(\exists x_2)(\exists x_3)(\exists x_4)\, w(A,B,C,D,x_1,x_2,x_3,x_4,a,b) = u(A,B,C,D,x_1,x_2,x_3,x_4,a,b).$$

Это позволяет исключить знак дизъюнкции $\vee$ из бескванторной части рассматриваемых формул, однако приводит к усложнению кванторной приставки.

В работе [4] был несколько усилен результат Н.К. Косовского – построена формула вида $DD(x,y,z,v)$

$$(\exists x_1)(\exists x_2)\, w(x,y,z,v,x_1,x_2,a,b) \;=\; u(x,y,z,v,x_1,x_2,a,b)$$

такая, что для произвольных элементов A, B, C и D свободной полугруппы S_2 справедлива эквивалентность

$$A = B \vee C = D \iff S_2 \models (\exists x_1)(\exists x_2)\, w(A,B,C,D,x_1,x_2,a,b) \;=\; u(A,B,C,D,x_1,x_2,a,b).$$

Вопрос о возможности удаления констант из бескванторной части формул впервые исследовал Н.А. Перязев в работе [6]. В этой работе он доказал, в частности, следующую теорему.

Теорема 4 ([6]). *Позитивная теория без констант свободной полугруппы S_2 алгоритмически разрешима.*

Однако *при удалении из бескванторной части формул констант усложняется кванторная приставка* и *нельзя удалить конъюнкцию & и дизъюнкцию* $\vee$ без использования двух констант.

3. Новые результаты

Теорема 5. *Позитивная $\forall^3\exists^3$-теория с одной константой свободной полугруппы S_2 алгоритмически неразрешима.*

Рассмотрим интересные аналогии и существенные различия между алгоритмической природой фрагментов позитивных теорий – свободной полугруппы с пустым словом S_2 (свободного моноида M_2) со свободными образующими a и b и свободной полугруппы без пустого слова S_2^+ с теми же свободными образующими a и b.

Теорема 6. *Позитивная $\forall\exists^3$-теория с двумя константами свободной полугруппы S_2^+ алгоритмически неразрешима.*

Теорема 7. *Позитивная $\forall^2\exists^3$-теория с одной константой свободной полугруппы S_2^+ алгоритмически неразрешима.*

Теорема 8. *Позитивная $\forall^3\exists^3$-теория без констант свободной полугруппы S_2^+ алгоритмически неразрешима.*

Теорема 9. *Позитивные $\forall^2\exists^m$-теории без констант свободных полугрупп S_2^+ и S_2 алгоритмически разрешимы при любом m.*

Теорема 10. *Позитивная $\exists^2\forall\exists^4$-теория без констант свободной полугруппы S_2^+ алгоритмически неразрешима.*

Теорема 11. *Позитивные $\forall\exists^m$-теории с одной константой свободных полугрупп S_2^+ и S_2 при любом m алгоритмически разрешимы.*

Теорема 12. *Элементарная $\exists^2\forall\exists^4$-теория без констант свободной полугруппы S_2 алгоритмически неразрешима.*

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Quine W. Concatenation as a basis for arithmetic // J. Symbolic Logic. 1946. V. 11. P. 105-114.
2. Дурнев В. Г. Позитивная теория свободной полугруппы // ДАН СССР. 1973. Том 211, № 4. С. 772-774.
3. Марченков С. С. Неразрешимость позитивной $\forall\exists$-теории свободной полугруппы // Сиб. матем. журн. 1982. Том 23, № 1. С. 196-198.
4. Дурнев В. Г. Неразрешимость позитивной $\forall\exists^3$-теории свободной полугруппы // Сиб. матем. журн. 1995. Том 36, № 5. С. 1067-1080.
5. Косовский Н. К. Некоторые свойства решений уравнений в свободной полугруппе // Записки науч. семинаров Ленингр. отд. Мат. ин-та. им. В.А. Стеклова АН СССР. 1972. Том 32. С. 21-28.
6. Перязев Н. А. Позитивные теории свободных моноидов // Алгебра и логика. 1993. Том 32, № 2. С. 148-159.

УДК 511.32

Обобщённые централизаторы бинарного отношения

М. В. Лежнин (Россия, г. Москва)
Национальный исследовательский университет «Московский институт электронной техники»
e-mail: max.lezhnin@gmail.com
Д. А. Хвощевский (Россия, г. Москва)
Национальный исследовательский университет «Московский институт электронной техники»
e-mail: dima1667@gmail.com

Generalized centralizers of binary relation

M. V. Lezhnin (Russia, Moscow)
National Research University of Electronic Technology
e-mail: max.lezhnin@gmail.com
D. A. Khvoshchevskiy (Russia, Moscow)
National Research University of Electronic Technology
e-mail: dima1667@gmail.com

Многозначное отображение из множества X в себя есть отношение на X. Полугруппу всех бинарных отношений на X с умножением $(x,\ y) \in \alpha\beta \iff \exists z \in X \quad (x,\ z) \in \alpha \wedge (z,\ y) \in \beta$, где α и β — произвольные отношения на X, будем обозначать как $B(X)$.

Пусть на X задано произвольное бинарное отношение σ, а α — многозначное отображение из X в себя. Нас интересует формальное определение того, что значит "многозначное отображение α сохраняет отношение σ". Были рассмотрены следующие 8 условий, каждое из которых в некотором смысле "сохраняет отношение σ":

$$
\begin{array}{llll}
(1)\quad \alpha\sigma\alpha^{-1} \subseteq \sigma; & (2)\quad \sigma \subseteq \alpha\sigma\alpha^{-1}; & (3)\quad \alpha^{-1}\sigma\alpha \subseteq \sigma; & (4)\quad \sigma \subseteq \alpha^{-1}\sigma\alpha; \\
(5)\quad \sigma\alpha \subseteq \alpha\sigma; & (6)\quad \alpha\sigma \subseteq \sigma\alpha; & (7)\quad \sigma\alpha^{-1} \subseteq \alpha^{-1}\sigma; & (8)\quad \alpha^{-1}\sigma \subseteq \sigma\alpha^{-1}.
\end{array}
$$

Для данного $\sigma \in B(X)$ и номера условия i пусть:

$$B^i_\sigma(X) = \{\alpha \in B(X) \mid \alpha \text{ удовлетворяет условию (i)}\}$$

Нетрудно проверить, что $B^i_\sigma(X)$ являются подполугруппами полугруппы $B(X)$. Следовательно, если $\{i_1,\ i_2,\ \ldots,\ i_k\}$ — множество номеров условий, то следующие множества тоже являются полугруппами:

$$B^{i_1,\ i_2,\ \ldots,\ i_k}_\sigma(X) = B^{i_1}_\sigma \cap B^{i_2}_\sigma \cap \ldots \cap B^{i_k}_\sigma$$

Мы будем называть множества $B^{i_1,\ i_2,\ \ldots,\ i_k}_\sigma(X)$ ***обобщёнными централизаторами бинарного отношения*** σ, а соответствующие функции $B^{i_1,\ i_2,\ \ldots,\ i_k}_\bullet(X)$, принимающие в качестве аргумента бинарное отношение σ – ***обобщёнными централизаторами***. Всего есть $2^8 = 256$ обобщённых централизаторов, однако многие из них будут совпадать друг с другом, так как из некоторых условий можно вывести другие. Например, авторами было доказано, что $(2) \wedge (3) \implies (5)$, а значит $B^{2,\ 3}_\bullet$ и $B^{2,\ 3,\ 5}_\bullet$ совпадают. В нашей работе для всех возможных мощностей множества X будет определено, какие обобщённые централизаторы совпадают, а какие не совпадают. Цель данной работы — выяснить, сколько всего существует различных обобщённых централизаторов на множестве X в зависимости от его мощности.

Утверждение 1. *Пусть $|X| \le |Y|$. Если 2 обобщённых централизатора различны для множества X, то они различны для множества Y (в частности, количество различных обобщённых централизаторов для множества X не больше, чем для множества Y).*

С помощью полного компьютерного перебора пар $(\sigma,\ \alpha)$ бинарных отношений на множествах X мощности 0–4 были найдены все различные обобщённые централизаторы. Так как для некоторых мощностей их достаточно много, вместо списка всех различных обобщённых централизаторов мы привели корректные, полные и независимые системы утверждений для каждой мощности, по которым их можно восстановить.

Пример системы утверждений для множества мощности 4:

$$
\begin{array}{ll}
(3) \wedge (4) \wedge (6) \wedge (7) \implies (1), & (2) \wedge (3) \implies (5), \\
(3) \wedge (4) \wedge (5) \wedge (8) \implies (2), & (1) \wedge (4) \implies (6), \\
(1) \wedge (2) \wedge (5) \wedge (8) \implies (3), & (1) \wedge (4) \implies (7), \\
(1) \wedge (2) \wedge (6) \wedge (7) \implies (4), & (2) \wedge (3) \implies (8).
\end{array}
$$

Оказывается, утверждения из приведенной системы можно обобщить и на множества большей мощности: те, в которых выводятся условия (1)–(4) — на произвольное конечное множество, а те, в которых выводятся условия (5)–(8) — на любое множество. Для этого авторы доказали соответствующие 8 теорем, а также привели 18 примеров того, что на бесконечных множествах не существует других утверждений, кроме тех, что выводят (5)–(8). В результате, была получена следующая таблица, в которой приведены количества различных обобщённых централизаторов для всех мощностей:

Мощность	Различных обобщённых централизаторов
$\lvert X\rvert = 0$	1
$\lvert X\rvert = 1$	2
$\lvert X\rvert = 2$	127
$3 \leq \lvert X\rvert < \aleph_0$	151
$\aleph_0 \leq \lvert X\rvert$	169

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кожухов И. Б., Ярошевич В. А. Полугруппы отображений, сохраняющих бинарное отношение // Фундаментальная и прикладная математика. 2008. Том 14, № 7. С. 129-135.

2. Ярошевич В. А. Полугруппы частичных и многозначных изотонных отображений: дис. канд. физ.-мат. наук: 01.01.06. – Москва, 2009.

3. Böttcher M., Knauer U. Endomorphism spectra of graphs // Discrete Mathematics. 1992. Vol. 109. P. 45-57.

4. Клюшин А. А., Кожухов И. Б., Манилов Д. Ю., Решетников А. В. Определяемость отношений полугруппами изотонных преобразований // Дискретный анализ и исследование операций. 2024. Том 31, № 1. С. 19–34.

УДК 512.577+519.68:007.5

О некоторых полугруппах преобразований полного группоида композиции многослойных нейронных сетей прямого распространения сигнала

Т. В. Моисеенкова (Россия, г. Красноярск)
Сибирский федеральный университет
e-mail: tanya-mois11@yandex.ru

On some semigroups of transformations of the complete groupoid of the composition of multilayer neural networks of feed-forward signal propagation

T. V. Moiseenkova (Russia, Krasnoyarsk)
Siberian Federal University
e-mail: tanya-mois11@yandex.ru

В работе рассматриваются только многослойные нейронные сети прямого распространения сигнала. Поэтому далее мы будем их называть просто нейронными сетями или сетями. Информацию о нейронных сетях можно почерпнуть в работе [1]. В работе [2] вводился *аддитивный группоид подсетей* многослойной нейронной сети прямого распространения сигнала, а в работе [3] вводился *мультипликативный группоид подсетей* многослойной нейронной сети прямого распространения сигнала (см. так же работу [4]). Построенные группоиды позволяли моделировать объединение и пересечение подсетей нейронной сети, если такие операции возможны. Имеется связь между алгебраическими свойствами (например, ассоциативностью) этих группоидов и свойствами графа нейронной сети, на базе которой эти группоиды построены.

В работе [5] строится *полный группоид композиции* многослойных нейронных сетей прямого распространения сигнала. Далее, этот группоид будем обозначать через $\mathrm{SAN}(k,P)$. Этот группоид позволяет моделировать композицию многослойных нейронных сетей. Далее подробно. Опишем группоид $\mathrm{SAN}(k,P)$ и некоторые его свойства. Если множество P не содержит кортежей с компонентами равными числам 1 или 2, то будем говорить, что множество P *свободно от специальных кортежей*. В [5] для всякого непустого множества P, свободного от специальных кортежей, и любого натурального k вводится множество нейронных сетей $\mathrm{SAN}(k,P)$ (см. определение 2.2 из [5]). Каждая сеть из этого множества имеет k входов и k выходов. Для любых параметров k и P множество $\mathrm{SAN}(k,P)$ содержит бесконечно много нейронных сетей.

Для каждой сети $\mathcal{N}$ из $\mathrm{SAN}(k,P)$ можно построить отображение $f_{\mathcal{N}}:\mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$, которое реализует действие нейронной сети $\mathcal{N}$ на входных сигналах $\overline{x}=(x_1,...,x_k)$ из $\mathbb{R}^k$. Отображение $f_{\mathcal{N}}$ определяется стандартным способом с помощью модели искусственного нейрона Мак-Каллока — Питтса.

На множестве $\mathrm{SAN}(k,P)$ вводится бинарная алгебраическая операция $(\odot)$ (см. определение 4.1 из [5]). Эта операция любым двум нейронным сетям $\mathcal{N}_1$ и $\mathcal{N}_2$ ставит в соответствие нейронную сеть $\mathcal{N}_1\odot\mathcal{N}_2$ такую, что на любом входном сигнале $\overline{x}\in\mathbb{R}^k$ имеет место равенство

$$f_{\mathcal{N}_1\odot\mathcal{N}_2}(\overline{x}) = f_{\mathcal{N}_2}(f_{\mathcal{N}_1}(\overline{x})).$$

Последнее равенство выполняется в силу утверждения 4.1 из [5]. Следовательно, нейронная сеть $\mathcal{N}_1\odot\mathcal{N}_2$ действует на множестве входных сигналов $\mathbb{R}^k$ как последовательное применение сетей: $\mathcal{N}_1$ и $\mathcal{N}_2$. Последнее раскрывает связь операции $(\odot)$ с композицией (т.е. последовательным применением) нейронных сетей. Группоид $\mathrm{SAN}(k,P) = (\mathrm{SAN}(k,P),\odot)$ является свободным группоидом (см. теорему 5.1 из [5]).

Для формализации нейронных сетей в работе [5] был использован подход схожий с подходом в работах [2], [4], [3] (имеются различия). В соответствии с определением 2.1 из [5] произвольная нейронная сеть является кортежем $\mathcal{N}=(M_1,...,M_n,i,o,f,g,l)$, где M_s — это совокупность нейронов из s-го слоя и i,o,f,g,l — *структурные отображения* сети $\mathcal{N}$. Отображение f определяет веса синаптических связей, отображение g определяет функции активации, отображение l задает пороговые значения, биекции i и o нумерую входной и выходной слои нейронов (последнее необходимо в контексте композиции нейронных сетей).

Цели исследования. Изучение преобразований множества $\mathrm{SAN}(k,P)$, которые вносят изменения в структурные отображения, вызывает естественный интерес. В частности, это может быть полезно для формализации процессов обучения нейронных сетей с помощью объектов, связанных с группоидом $\mathrm{SAN}(k,P)$.

В данной работе будет рассмотрено преобразование $\Gamma[\alpha,H]$ группоида $\mathrm{SAN}(k,P)$. Прежде чем явно указать преобразование $\Gamma[\alpha,H]$ введем необходимые объекты.

Далее, P — это множество, свободное от специальных кортежей. Введем следующие множества:

$$D_0(P) := P, \quad D_n(P) := \{(d,i) \mid d\in D_{n-1}(P),\ i\in\{1,2\}\} \quad (n>0), \quad K(P) := P\cup(\bigcup_{s\in N} D_s(P)).$$

Все нейроны любой нейронной сети из множества $\mathrm{SAN}(k,P)$ содержатся в множестве $K(P)$ (следует из определения 2.2 из [5]). Каждой нейронной сети $\mathcal{N}=(M_1,...,M_n,i,o,f,g,l)$ из $\mathrm{SAN}(k,P)$ сопоставим множество $A_{\mathcal{N}} := M_1\cup...\cup M_n$. Для любого элемента g из $K(P)$ введем обозначение:

$$[g] := \begin{cases} g, & \text{если } g \in P, \\ s, & \text{если } g = (((...((s,i_1),i_2),...),i_{k-1}),i_k),\ s \in P,\ i_s \in \{1,2\}. \end{cases}$$

Пусть H — некоторое непустое подмножество множества P и $\alpha : H \to \mathbb{R}$ — отображение из H в $\mathbb{R}$. Тогда через $\Gamma[\alpha, H]$ обозначим преобразование множества $\mathrm{SAN}(k,P)$, которое определено правилом

$$\Gamma[\alpha,H]:\ \mathcal{N} = (M_1,...,M_p,i,o,f,g,l) \to (M_1,...,M_p,i,o,f,g,\hat{l}),$$

где $\hat{l} : A_{\mathcal{N}} \to \mathbb{R}$ — отображение такое, что выполняются утверждения:
1) если $m \in A_{\mathcal{N}}$ и $[m] \notin H$, то $\hat{l}(m) = l(m)$;
2) если $m \in A_{\mathcal{N}}$ и $[m] \in H$, то $\hat{l}(m) = \alpha([m])$.

Таким образом, можно задать произвольное подмножество H множества P, произвольное отображение $\alpha :\ H \to \mathbb{R}$. Преобразование $\Gamma[\alpha,H]$ заменит пороговые значения всех нейронов из множества $\{m \in K(P) \mid [m] \in H\}$, с помощью отображения α, во всех нейронных сетях из $\mathrm{SAN}(k,P)$. Можно доказать следующую теорему.

Теорема 1. *Пусть P — множество свободное от специальных кортежей, H — некоторое непустое подмножество в P и α — произвольное отображение из H в $\mathbb{R}$. Тогда преобразование $\Gamma[\alpha,H]$ — эндоморфизм группоида $\mathrm{SAN}(k,P)$.*

Поскольку группоид $\mathrm{SAN}(k,P)$ является свободным группоидом, то всякое отображение свободной системы образующих этого группоида продолжается до эндоморфизма этого группоида. Порождающее множество группоида $\mathrm{SAN}(k,P)$, состоящее из простых элементов, описано предложением 5.3 и леммой 5.2 в работе [5]. Поскольку порождающее множество группоида $\mathrm{SAN}(k,P)$ устроено достаточно сложно (как и элементы группоида), то теорему 1 было удобно доказать прямой проверкой того, что $\Gamma[\alpha,H]$ — это эндоморфизм. В этом случае свойство группоида быть свободным не помогло показать, что конкретное преобразование является эндоморфизмом.

Пусть H — фиксированное непустое подмножество в P. Введем следующие множества эндоморфизмов группоида $\mathrm{SAN}(k,P)$:

$$\mathrm{End}\Gamma(k,P,H) := \{\Gamma[\alpha,H] \mid \alpha \in \mathrm{Hom}(H,\mathbb{R})\}.$$

Можно показать, что выполняется следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть H — непустое подмножество множества P. Тогда для любых отображений α,β из $\mathrm{Hom}(H,\mathbb{R})$ выполняется равенство преобразований:*

$$\Gamma[\alpha,H] \cdot \Gamma[\beta,H] = \Gamma[\alpha,H],$$

где $(\cdot)$ — это композиция преобразований.

Таким образом, $\mathrm{End}\Gamma(k,P,H)$ — это сингулярная полугруппа. Автор выражает благодарность Литаврину А.В. за внимание проявленное к данной работе.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Созыкин А. В. Обзор методов обучения глубоких нейронных сетей // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия «Вычислительная математика и информатика». 2017. Том 6, № 3. С. 28–59. DOI: http://dx.doi.org/10.14529/cmse170303

2. Литаврин А. В. Эндоморфизмы конечных коммутативных группоидов, связанных с многослойными нейронными сетями прямого распределения // Труды Института математики и механики УрО. 2021. Том 27, № 1. С. 130–145. DOI: https://doi.org/10.21538/0134-48892021-27-1-130-145

3. Литаврин А. В. О некоторых конечных коммутативных группоидах, связанных с многослойными нейронными сетями прямого распространения // XXI Международная конференция «Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы и приложения», посвященной 85-летию со дня рождения А. А Карацубы.: тезисы докладов международной конференции (Тула, 2022 г.) — С. 106–109.

4. Litavrin A. V. On endomorphisms of the additive monoid of subnets of a two-layer neural network // The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics. 2022. vol. 39. pp. 111–126. DOI: https://doi.org/10.26516/1997-7670.2022.39.111

5. Литаврин А. В., Моисеенкова Т. В. Об одном группоиде, ассоциированном с композицией многослойных нейронных сетей прямого распространения сигнала // Журнал СВМО. 2024. Том 26, № 2. С 111–122. DOI: https://doi.org/10.15507/2079-6900.26.202402.111-122

УДК 512.577+519.68:007.5

Порождающее множество мультипликативного группоида подсетей многослойной нейронной сети прямого распространения сигнала

Е. А. Потоловская (Россия, г. Красноярск)
Сибирский федеральный университет
e-mail: eva.potolovskaya@gmail.com

Generating set of multiplicative groupoid of subnets of multilayer feedforward neural network

E. A. Potolovskaya (Russia, Krasnoyarsk)
Siberian Federal University
e-mail: eva.potolovskaya@gmail.com

Как обычно, *группоидом* будем называть алгебраическую систему $G = (G, *)$, где $*$ — это бинарная алгебраическая операция на множестве G. *Эндоморфизмом* группоида G называем всякий гомоморфизм группоида G в себя. Для множества всех эндоморфизмов группоида G будем использовать обозначение: $\mathrm{End}(G)$.

В работе [1] для каждой многослойной нейронной сети $\mathcal{N}$ вводился *аддитивный группоид подсетей* $\mathrm{AGS}(\mathcal{N})$ сети $\mathcal{N}$ и исследовались эндоморфизмы данного группоида. В частности, было установлено, что всякий конечный моноид изоморфен некоторому подмоноиду в моноиде всех эндоморфизмов группоида $\mathrm{AGS}(\mathcal{N})$. При этом не решена следующая задача.

Задача 1. *Для каждой многослойной нейронной сети $\mathcal{N}$ привести поэлементное описание моноида* $\mathrm{End}(\mathrm{AGS}(\mathcal{N}))$.

В работе [2] приведенная задача была решена, когда $\mathcal{N}$ — двухслойная нейронная сеть прямого распространения сигнала.

В [3] вводился *мультипликативный группоид* $\mathrm{MGS}(\mathcal{N})$ подсетей многослойной сети $\mathcal{N}$. Носитель группоида $\mathrm{MGS}(\mathcal{N})$ совпадает с носителем группоида $\mathrm{AGS}(\mathcal{N})$. Группоиды $\mathrm{AGS}(\mathcal{N})$ и $\mathrm{MGS}(\mathcal{N})$ вводились с целью исследовать связь между алгебраическими свойствами этих группоидов и нейронной сети $\mathcal{N}$. Выяснилось, что свойство группоидов $\mathrm{AGS}(\mathcal{N})$ и $\mathrm{MGS}(\mathcal{N})$ быть ассоциативными накладывает жесткие ограничения на структуру графа нейронной сети $\mathcal{N}$ (см. утверждение 2 из [1] и утверждение 1 из [3]). Элементы группоидов $\mathrm{AGS}(\mathcal{N})$ и $\mathrm{MGS}(\mathcal{N})$ можно интерпретировать как подсети нейронной сети $\mathcal{N}$; подробную редукцию подсетей к элементам данных группоидов можно найти в работах [1] и [3]. С помощью операции в группоиде $\mathrm{AGS}(\mathcal{N})$ можно моделировать объединение двух нейронных сетей в одну, когда это возможно. Операция в группоиде $\mathrm{MGS}(\mathcal{N})$ позволяет моделировать пересечение двух нейронных сетей, когда это возможно.

Для изучения связи между свойствами нейронной сети $\mathcal{N}$ и свойствами группоида $\mathrm{MGS}(\mathcal{N})$ необходимо изучить алгебраические свойства этого группоида. В частности, естественный интерес вызывает вопрос о поэлементном описании моноида всех эндоморфизмов группоида $\mathrm{MGS}(\mathcal{N})$. Для решения этой проблемы можно применить метод *исследования действия эндоморфизма на порождающих элементах.* Данный метод является самым распространенным методом поэлементного описания моноида всех эндоморфизмов и группы всех автоморфизмов некоторой алгебраической системы. Последнее объясняет интерес к нахождению порождающего множества элементов группоида $\mathrm{MGS}(\mathcal{N})$.

Цель работы. Целью данной работы является описание порождающего множества группоида $\mathrm{MGS}(\mathcal{N})$. Пусть $G = (G, *)$ — это некоторый группоид. Будем говорить, что множество S — это *порождающее множество* элементов группоида $G = (G, *)$, если пересечение всех подгруппоидов, содержащих S, совпадает со всем множеством G (стандартное определение порождающего множества некоторой алгебры). Из данного определения вытекает истинность следующего утверждения.

Утверждение 1. *Пусть $G = (G, *)$ — это некоторый группоид и $S \subseteq G$. Множество S порождает группоид G тогда и только тогда, когда всякий элемент $g \in G$ является элементом из S или является некоторым произведением конечного числа элементов из S.*

Далее, нам потребуется определение многослойной нейронной сети и группоида $\mathrm{MGS}(\mathcal{N})$. Как обычно, $\mathbb{R}$ — множество действительных чисел и $F(\mathbb{R}) := Hom(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ — множество всех отображений из $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$.

Определение 1. *Пусть заданы следующие объекты:*
1) кортеж $(M_1, ..., M_n)$ длины $n \geqslant 1$ конечных непустых множеств, где при $i \neq j$ выполняется условие $M_i \cap M_j = \varnothing$;
2) множество $S := (M_1 \times M_2) \cup (M_2 \times M_3) \cup ... \cup (M_{n-1} \times M_n)$;
3) отображение $f : S \to \mathbb{R}$;
4) множество $A := M_1 \cup ... \cup M_n$;
5) отображение $g : A \to F(\mathbb{R})$;
6) отображение $l : A \to \mathbb{R}$.

Тогда кортеж $\mathcal{N} = (M_1, ..., M_n, f, g, l)$ будем называть многослойной нейронной сетью прямого распространения сигнала.

Данное определение нейронной сети построено на основании работы [4]; в нем нет биекций i и o, последнее оправдано контекстом исследования. Оно отличается от соответствующего определения из работы [1] тем, что оно допускает однослойные нейронные сети. Данные изменения не приводят к изменениям свойств группоида $\mathrm{MGS}(\mathcal{N})$; единственное изменение состоит в том, что теперь данные группоиды можно построить для однослойной нейронной сети.

Кортеж из пустых множеств будем обозначать символом $\overline{\varnothing} := (\varnothing, ..., \varnothing)$ (длина такого кортежа всегда будет понятна из контекста). Пусть даны два кортежа $\overline{X} = (X_1, ..., X_n)$ и $\overline{Y} = (Y_1, ..., Y_n)$ из конечных множеств. Будем использовать обозначения:

$$\overline{X} \cup \overline{Y} := (X_1 \cup Y_1, ..., X_n \cup Y_n); \quad \overline{X} \cap \overline{Y} := (X_1 \cap Y_1, ..., X_n \cap Y_n);$$

$$\overline{X} \subseteq \overline{Y} \Leftrightarrow (X_1 \subseteq Y_1) \wedge (X_2 \subseteq Y_2) \wedge ... \wedge (X_n \subseteq Y_n).$$

Определение 2. *Пусть $(X_1, ..., X_n)$ — некоторый кортеж, составленный из конечных множеств, будем говорить, что кортеж непрерывный, если для любых различных $i, j \in \{1, ..., n\}$ выполняется следующая импликация: если $X_i \neq \varnothing$ и $X_j \neq \varnothing$ и $i < j$, то для любого $s \in \{i, i+1, ..., j-1, j\}$ выполняется неравенство $X_s \neq \varnothing$. Кортеж $\overline{\varnothing}$ считаем непрерывным по определению.*

Понятие "непрерывный кортеж" было введено в работе [1]. Для удобства читателя приведем определения группоидов AGS($\mathcal{N}$) и MGS($\mathcal{N}$). Первоисточником являются работы [1] и [3].

Определение 3. *Пусть определена нейросеть $\mathcal{N} = (M_1, ..., M_n, f, g, l)$ с основным кортежем нейронов $\overline{M} = (M_1, ..., M_n)$. Множество всевозможных непрерывных кортежей $\overline{X} \subseteq \overline{M}$ будем обозначать символом AGS($\mathcal{N}$). Далее, $\overline{X}$ и $\overline{Y}$ — два произвольных элемента из AGS($\mathcal{N}$). Определим бинарные алгебраические операции $(+)$ и $(*)$ на множестве AGS($\mathcal{N}$):*

$$\overline{X} + \overline{Y} := \begin{cases} \overline{X} \cup \overline{Y}, & \text{если } \overline{X} \cup \overline{Y} \in \mathrm{AGS}(\mathcal{N}) \\ \overline{\varnothing}, & \text{если } \overline{X} \cup \overline{Y} \notin \mathrm{AGS}(\mathcal{N}) \end{cases}, \quad \overline{X} * \overline{Y} := \begin{cases} \overline{X} \cap \overline{Y}, & \text{если } \overline{X} \cap \overline{Y} \in \mathrm{AGS}(\mathcal{N}) \\ \overline{\varnothing}, & \text{если } \overline{X} \cap \overline{Y} \notin \mathrm{AGS}(\mathcal{N}). \end{cases}$$

Тогда группоид $\mathrm{AGS}(\mathcal{N}) := (\mathrm{AGS}(\mathcal{N}), +)$ будем называть аддитивным группоидом подсетей нейронной сети $\mathcal{N}$. Группоид $\mathrm{MGS}(\mathcal{N}) := (\mathrm{AGS}(\mathcal{N}), *)$ будем называть мультипликативным группоидом подсетей нейронной сети $\mathcal{N}$.

Через $K_i(\overline{X})$ будем обозначать i-ю компоненту кортежа $\overline{X}$, через $|X|$ будем обозначать мощность множества X. Для каждой нейронной сети $\mathcal{N} = (M_1, ..., M_n, f, g, l)$ с основным кортежем нейронов $\overline{M} = (M_1, ..., M_n)$ определим следующий предикат

$$P_{\mathcal{N},i}(\overline{X}): \quad ((|K_i(\overline{X})| = |M_i| - 1) \vee (|K_i(\overline{X})| = |M_i| - 2)) \wedge (K_j(\overline{X}) = M_j) \wedge (j \neq i).$$

Определим подмножества в множестве AGS($\mathcal{N}$):

$$B_i(\mathcal{N}) := \left\{ \overline{X} \in \mathrm{AGS}(\mathcal{N}) \mid P_{\mathcal{N},i}(\overline{X}) \right\}, \quad i = 1, ..., n;$$

$$S(\mathcal{N}) = \left(\bigcup_{i=1}^{n} B_i(\mathcal{N}) \right) \cup \{(M_1, ..., M_n)\}.$$

Таким образом, множества $B_i(\mathcal{N})$ состоят из кортежей вида $(M_1, ..., M_{i-1}, A_i, M_{i+1}, ..., M_n)$, где A_i — подмножество множества M_i и мощность множества A_i равна $|M_i| - 1$ или $|M_i| - 2$. Можно показать, что выполняется следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть $\mathcal{N} = (M_1, ...M_n, f, g, l)$ — это нейронная сеть такая, что*

$$|M_i| \geqslant 4, \quad i = 1, ..., n.$$

Тогда группоид MGS($\mathcal{N}$) порождается множеством $S(\mathcal{N})$.

Этот результат будет полезен для изучения эндоморфизмов и автоморфизмов группоида MGS($\mathcal{N}$). Автор выражает благодарность Литаврину Андрею Викторовичу за внимание проявленное к работе.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Литаврин А. В. Эндоморфизмы конечных коммутативных группоидов, связанных с многослойными нейронными сетями прямого распределения // Труды Института математики и механики УрО. 2021. Том 27, № 1. С. 130–145. DOI: https://doi.org/10.21538/0134-48892021-27-1-130-145

2. Litavrin A. V. On endomorphisms of the additive monoid of subnets of a two-layer neural network // The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics. 2022. vol. 39. pp. 111–126. DOI: https://doi.org/10.26516/1997-7670.2022.39.111

3. Литаврин А. В. О некоторых конечных коммутативных группоидах, связанных с многослойными нейронными сетями прямого распространения // XXI Международная конференция «Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы и приложения», посвященной 85-летию со дня рождения А. А Карацубы.: тезисы докладов международной конференции (Тула, 2022 г.) — С. 106–109.

4. Литаврин А. В., Моисеенкова Т. В. Об одном группоиде, ассоциированном с композицией многослойных нейронных сетей прямого распространения сигнала // Журнал СВМО. 2024. Том 26, № 2. С 111–122. DOI: https://doi.org/10.15507/2079-6900.26.202402.111-122

УДК 511.32

Об унарно определимых полугруппах с операторами

В. Л. Усольцев (Россия, г. Волгоград)
Волгоградский государственный социально-педагогический университет
e-mail: usl2004@mail.ru

On unarily definable semigroups with operators

V. L. Usoltsev (Russia, Volgograd)
Volgograd State Pedagogical University
e-mail: usl2004@mail.ru

Алгеброй с операторами называется универсальная алгебра $\langle A, \Omega\rangle$ сигнатуры $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$, где $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$, Ω_1 произвольна и непуста, а Ω_2 состоит из унарных операций, перестановочных с любой операцией из Ω_1, то есть, действующих как эндоморфизмы относительно операций из Ω_1. Унарные операции из Ω_2 называются операторами, а операции из Ω_1 — основными операциями алгебры $\langle A, \Omega\rangle$.

Классический подход к построению алгебр с операторами заключается в том, что сигнатура алгебры из заданного класса пополняется выделенными эндоморфизмами данной алгебры.

В [1] Л. А. Скорняковым была поставлена следующая проблема: для данного унара $\langle A, f\rangle$ определить на множестве A операции таким образом, чтобы полученная алгебра принадлежала к заданному классу и унарная операция f была ее эндоморфизмом. Тем самым, им был предложен подход к построению различных классов алгебр с операторами, отличный от классического. Будем называть все алгебры с операторами, построенные таким способом, *унарно определимыми*.

В [2] В. К. Карташов решил проблему Скорнякова для класса алгебр с одной тернарной мальцевской операцией. На произвольном унаре $\langle A, f\rangle$ им была определена тернарная операция $p(x, y, z)$, перестановочная с операцией f и удовлетворяющая тождествам Мальцева $p(x, y, y) = p(y, y, x) = x$. Основные результаты, полученные при изучении алгебр $\langle A, p, f\rangle$ с оператором f, приводятся в [3], [4].

Используя подход, предложенный в [2], определим на произвольном унаре бинарную операцию $\diamond$ описанным ниже образом.

Пусть $\langle A, f\rangle$ — произвольный унар и $x, y \in A$. Для любого элемента z унара $\langle A, f\rangle$ через $f^n(z)$ обозначается результат n-кратного применения операции f к элементу z; при этом $f^0(z) = z$. Положим $M_{x,y} = \{n \in \mathbb{N} \cup \{0\} \mid f^n(x) = f^n(y)\}$, а также $k(x, y) = \min\ M_{x,y}$, если $M_{x,y} \neq \emptyset$, и $k(x, y) = \infty$, если $M_{x,y} = \emptyset$. Положим далее

$$x \diamond y \overset{def}{=} \begin{cases} x, & \text{если } k(x,y) < \infty; \\ y, & \text{если } k(x,y) = \infty. \end{cases} \tag{1}$$

Из (1) следует, что операция $\diamond$ перестановочна с унарной операцией f. Таким образом, алгебра $\langle A, \diamond, f\rangle$ является группоидом с оператором.

Заметим, что на произвольном унаре также можно определить и операцию $\diamond_d$, дуальную к данной:

$$x \diamond_d y \overset{def}{=} \begin{cases} y, & \text{если } k(x,y) < \infty; \\ x, & \text{если } k(x,y) = \infty. \end{cases} \tag{2}$$

Унар $\langle A, f\rangle$ называется связным, если для любых $x, y \in A$ выполняется условие $f^n(x) = f^m(y)$ при некоторых $n \geqslant 0$, $m \geqslant 0$. Элемент a унара $\langle A, f\rangle$ называется неподвижным, если $f(a) = a$. Связный унар с неподвижным элементом называется корнем.

Обозначим через **In** класс всех унаров с инъективной операцией, а через **Root** класс всех корней.

Теорема 1. *Алгебра $\langle A, \diamond, f\rangle$ является полугруппой с оператором тогда и только тогда, когда унар $\langle A, f\rangle$ принадлежит либо классу* ***In****, либо классу* ***Root****.*

Из (1) следует, что если унар $\langle A, f\rangle$ принадлежит классу **In**, то операция $\diamond$ удовлетворяет тождеству $x \diamond y = y$; если же $\langle A, f\rangle$ принадлежит классу **Root**, то она удовлетворяет тождеству $x \diamond y = x$. Отсюда вытекает

Предложение 1. *Если унар $\langle A, f\rangle$ принадлежит классу* ***In****, то алгебра $\langle A, \diamond\rangle$ является полугруппой правых нулей; если же $\langle A, f\rangle$ принадлежит классу* ***Root****, то $\langle A, \diamond\rangle$ является полугруппой левых нулей.*

Дифференциальным группоидом (см. [5], [6]) называется алгебра с одной бинарной операцией $\cdot$, удовлетворяющая следующим тождествам:

$$x \cdot x = x, \quad x \cdot (x \cdot y) = x,$$
$$(x \cdot y) \cdot (z \cdot t) = (x \cdot z) \cdot (y \cdot t).$$

Предложение 2. *Если унар $\langle A, f\rangle$ принадлежит классу* ***Root****, то алгебра $\langle A, \diamond, f\rangle$ является дифференциальным группоидом с оператором f.*

Неодноэлементная универсальная алгебра называется конгруэнц-простой, если она имеет только тривиальные конгруэнции.

Теорема 2. *Пусть унар $\langle A, f\rangle$ принадлежит либо классу* ***In****, либо классу* ***Root****. Полугруппа $\langle A, \diamond, f\rangle$ с оператором f является конгруэнц-простой тогда и только тогда, когда $\langle A, f\rangle$ изоморфен одному из следующих унаров:*
1) C_1^1;
2) $C_1^0 + C_1^0$;
3) C_p^0, где p — простое число.

Обозначим через $\triangle_A$ нулевую конгруэнцию алгебры A. Конгруэнция θ универсальной алгебры A называется конгруэнцией Риса [7], если $\theta = B^2 \cup \triangle_A$ для некоторой подалгебры B алгебры A. Подалгебра B алгебры A называется подалгеброй Риса, если $B^2 \cup \triangle_A$ есть конгруэнция алгебры A. Приведенные выше определения даны в формулировках монографии [8]. Неодноэлементная универсальная алгебра называется рисовски простой [9], если любая ее конгруэнция Риса тривиальна.

Теорема 3. *Пусть унар $\langle A, f\rangle$ принадлежит либо классу* ***In****, либо классу* ***Root****. Полугруппа $\langle A, \diamond, f\rangle$ с оператором f является рисовски простой тогда и только тогда, когда $\langle A, f\rangle$ изоморфен одному из следующих унаров:*
1) C_1^1;
2) $C_1^0 + C_1^0$;
3) C_p^0, где $n \in \mathbb{N}$.

Замечание 1. *Для алгебр $\langle A, \diamond_d, f\rangle$ верны утверждения, аналогичные перечисленным выше для алгебр $\langle A, \diamond, f\rangle$ (в Предложениях 1, 2 — с поправкой на дуальность операции $\diamond_d$ по отношению к операции $\diamond$).*

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Skornjakov L. A. Unars // Colloq. Math. Soc. J. Bolyai. 1981. V. 29. P.735–743.
2. Карташов В. К. Об унарах с мальцевской операцией // Универсальная алгебра и ее приложения: тезисы докладов международного семинара, посвященного памяти профессора МГУ Л. А. Скорнякова (Волгоград, 6-11 сентября 1999 г.) — Волгоград: Перемена, 1999. С. 31–32.
3. V. L. Usol'tsev. Unars with ternary Mal'tsev operation // Russian mathematical surveys. 2008. V. 63, iss. 3. P. 968–988.
4. V. L. Usoltsev. Simple and pseudosimple algebras with operators // Journal of Mathematical Sciences. 2010. V. 164, iss. 2. P. 281–293.
5. Burzyńska M., Pasternak-Winiarski Z. Differential Groupoids // Journal of Mathematics and System Science. 2015. V. 5. P. 39–45.
6. Romanowska A. B., Smith J. D. H. Modes. — Singapore: World Scientific, 2002.
7. Tichy R. F. The Rees congruences in universal algebras // Publ. Inst. Math. (Beograd). 1981. V. 29. P. 229–239.
8. Chajda I., Eigenthaler G., Langer H. Congruence classes in universal algebra. Vienna: Heldermann-Verl., 2003. 192 p.
9. Усольцев В. Л. Алгебры Риса и конгруэнц-алгебры Риса в одном классе алгебр с оператором и основной операцией почти единогласия // Чебышевский сборник. 2016. Том 17, № 4(60). С. 157–166.

УДК 512.534.32+510.67

Об аксиоматизируемости некоторых классов полигонов над полугруппами

Д. С. Храмченок (Россия, г. Москва)
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
e-mail: dmitrii.khramchenok@math.msu.ru

About axiomatizability of several classes of acts over semigroups

D. S. Khramchenok (Russia, Moscow)
Lomonosov Moscow State University
e-mail: dmitrii.khramchenok@math.msu.ru

Класс универсальных алгебр называется *аксиоматизируемым*, если существует система аксиом, моделями которой в точности являются элементы данного класса. В случае, если данная система конечна, класс называется *конечно аксиоматизируемым.* Данные свойства позволяют рассматривать класс с точки зрения формальной логики и теории моделей, поэтому доказательство или опровержение наличия этих свойств играет важную роль в изучении конкретного класса.

Универсальная алгебра называется *подпрямо неразложимой*, если не существует ее разложения в нетривиальное подпрямое произведение других алгебр. В силу теоремы Биркгофа [1, глава II, §7, т. 7.3] каждая нетривиальная алгебра является подпрямым произведением подпрямо неразложимых алгебр, поэтому такие алгебры можно рассматривать как элементарные, их изучение позволяет получить больше информации обо всех универсальных алгебрах в целом.

Множество X называется полигоном над полугруппой S, если определено отображение $\cdot : X \times S \to X$ такое, что для всех $x \in X$ и $v, w \in S$ выполняется равенство $(xv)w = x(vw)$. Основные сведения теории полигонов можно найти в [2, 3]. Полигон можно рассматривать как универсальную алгебру с унарными операциями, занумерованными элементами полугруппы (элементу s соответствует умножение на s, т. е. отображение $X \to X, x \mapsto xs$).
Полугруппой левых (правых) нулей называется полугруппа S, удовлетворяющая тождеству $st = s$ $(st = t)$ для всех $s, t \in S$.

Для полугруппы S обозначим $S^1 = S \bigcup \{1\}$ - полугруппа, полученная присоединением единицы к S.

Теорема 1. *Класс подпрямо неразложимых полигонов над конечной полугруппой является конечно аксиоматизируемым.*

Оказывается, что для абелевых групп конечность является не только достаточным, но и необходимым условием аксиоматизируемости.

Теорема 2. *Класс K_G подпрямо неразложимых полигонов над абелевой группой G является аксиоматизируемым тогда и только тогда, когда G конечна.*

Основные результаты про подпрямо неразложимые полигоны над абелевой группой, используемыев доказательстве, можно найти в [4].

Теорема 3. *Если класс K_S подпрямо неразложимых полигонов над полугруппой S является аксиоматизируемым, то все мощности всех полигонов в нем не превосходят некоторого $k \in \mathbb{N}$.*

Из этой теоремы непосредственно следует отсутствие аксиоматизируемости для многих классов полигонов, например:

Теорема 4. *Пусть S — бесконечная полугруппа левых нулей. Тогда класс подпрямо неразложимых полигонов над S не является аксиоматизируемым.*

Теорема 5. *Пусть S — бесконечная полугруппа правых нулей. Тогда класс $\mathcal{K}$ подпрямо неразложимых полигонов над S не является конечно аксиоматизируемым в классе всех полигонов над S.*

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Кон П.* Универсальная алгебра. М., Мир, 1968.

2. *Kilp M., Knauer U., Mikhalev A.V.* Monoids, acts and categories. Berlin – N.-Y., W. de Gruyter, 2000, xvii + 529 pp.

3. *Кожухов И.Б., Михалёв А.В.* Полигоны над полугруппами. Фунд. и прикл. матем., 2020, т. 23, № 3, с. 141-191.

4. *Степанова А. А. ,Птахов Д. О.*, “Аксиоматизируемость класса подпрямо неразложимых полигонов над абелевой группой”, Алгебра и логика, 59:5 (2020), 582–593

УДК 512. 548

Тернарные группоиды, тесно связанные с тернарными квазигруппами

Н. А. Щучкин (Россия, г. Волгоград)
Волгоградский государственный социально-педагогический университет
e-mail:nikolaj_shchuchkin@mail.ru

Ternary groupoids, closely related to ternary quasigroups

N. A. Shchuchkin (Russia, s. Volgograd)
Volgograd State Pedagogical University
e-mail:nikolaj_shchuchkin@mail.ru

1. Введение

Известны многочисленные разновидности группоидов, тесно связанные с квазигруппами (смотри, например, [1]). Одним из ярких обобщений квазигрупп является тернарная квазигруппа. Аналогично как для квазигрупп, мы рассмотрим несколько тернарных группоидов, тесно связанных с тернарными квазигруппами. Такие тернарные группоиды относятся к неассоциативным алгебраическим структурам, на основе которых разрабатываются криптографические алгоритмы [2].

Известно широкое применение квазигрупп в криптографии (см., например, [3]). В работе [4] отмечалось, что квазигруппы могут быть очень полезны для криптографических целей главным образом потому, что легко определить функции кодирования и декодирования, используя операции квазигрупп, и существует огромное количество квазигрупповых операций над заданным конечным множеством. В этой же работе [4] приводится алгоритм преобразования слов в заданном алфавите. Обобщая бинарный случай этого алгоритма на тернарный случай, в работе [5] были рассмотрены применения тернарных квазигрупп для преобразования слов. Аналогичные преобразования с помощью тернарных группоидов, тесно связанных с тернарными квазигруппами, будут приведены ниже.

2. Предварительные сведения

Напомним, что множество Q с одной тернарной операцией f называют тернарной квазигруппой, будем обозначать $\langle Q, f\rangle$, если для любых элементов a, b, c из Q уравнения

$$f(x, b, c) = a, f(a, y, c) = b, f(a, b, z) = c, \tag{1}$$

разрешимы однозначно ([6], стр. 6 при $n = 3$).

В силу однозначной разрешимости уравнений (1), на множестве Q имеются еще три тернарные операции u, v, w, заданные по правилам

$$u(a, b, c) = d \Leftrightarrow f(d, b, c) = a; \tag{2}$$

$$v(a, b, c) = d \Leftrightarrow f(a, d, c) = b; \tag{3}$$

$$w(a, b, c) = d \Leftrightarrow f(a, b, d) = c. \tag{4}$$

Операции u, v, w и f связаны тождествами

$$u(f(x, y, z), y, z) = x = f(u(x, y, z), y, z), \tag{5}$$

$$v(x, f(x, y, z), z) = y = f(x, v(x, y, z), z), \tag{6}$$

$$w(x, y, f(x, y, z)) = z = f(x, y, w(x, y, z)). \tag{7}$$

Рассмотрим различные тернарные группоиды, в которых разрешимы однозначно не все три уравнения из (1), а только два или одно.

Тернарный группоид $\langle Q, f\rangle$, в котором для любых элементов a, b, c из Q разрешимы однозначно первые два (первое и третье, последние два) уравнения из (1), будем называть тернарной (L, M)-квазигруппой ((L, R)-квазигруппой, (M, R)-квазигруппой). На множестве Q имеются еще две тернарные операции u и v (u и w, v и w), заданные по правилам (2) и (3) ((2) и (4), (3) и (4)). Операции u, v и f (u, w и f, v, w и f) связаны тождествами (5) и (6) ((5) и (7), (6) и (7)).

Тернарный группоид $\langle Q, f\rangle$, в котором для любых элементов a, b, c из Q разрешимо однозначно только первое (второе, третье) уравнение из (1), будем называть тернарной L-квазигруппой (M-квазигруппой, R-квазигруппой). На множестве Q имеется еще одна тернарная операция u (v, w), заданная по правилу (2)) ((3), (4)). Операции u и f (v и f, w и f) связаны тождествами (5) ((6), (7)).

3. Конечные тернарные группоиды, тесно связанные с тернарной квазигруппой

Пусть множество Q конечно, $Q = \{1, 2, \ldots, m\}$. Тогда любой тернарной (L, M)-квазигруппе ((L, R)-квазигруппе, (M, R)-квазигруппе) $\langle Q, f\rangle$ соответствует 3-мерная матрица m-го порядка $B = (b_{ijk} | i, j, k = 1, 2, \ldots, m)$ ([7], стр. 5), где $b_{ijk} = f(i, j, k)$, причем, в силу однозначной разрешимости первых двух (первого и третьего, последних двух) уравнений из (1), в строках направления 1 и 2 (1 и 3, 2 и 3) стоят разные элементы из Q. Верно и обратное. Итак, между тернарными (L, M)-квазигруппами ((L, R)-квазигруппами, (M, R)-квазигруппами) и 3-мерными матрицами указанного вида имеется взаимно однозначное соответствие.

Построение 3-мерной матрицы B для тернарной (L, M)-квазигруппы ((L, R)-квазигруппы, (M, R)-квазигруппы) $\langle Q, f\rangle$ является аналогом построения таблицы умножения для обычной квазигруппы $\langle Q, \circ\rangle$, эту таблицу называют латинским квадратом. Наилучшую оценку для числа $L(m)$ латинских квадратов порядка m дает формула $L(m) = \left((1+\alpha_m)\frac{m}{e^2}\right)^{m^2}$, где $\alpha_m \to 0$ при $m \to \infty$ (см., например, [8]). Мы оцениваем число $L(m;3)$ тернарных (L, M)-квазигрупп ((L, R)-квазигрупп, (M, R)-квазигрупп) порядка m: $L(m;3) = L(m)^m$.

Пусть вновь множество Q конечно и $Q = \{1, 2, \dots, m\}$. Тернарной L-квазигруппе (M-квазигруппе, R-квазигруппе) $\langle Q, f\rangle$ также соответствует 3-мерная матрица $B = (b_{ijk}|i, j, k = 1, 2, \dots, m)$ m-го порядка, где $b_{ijk} = f(i, j, k)$, причем, в силу однозначной разрешимости первого (второго, третьего) уравнения из (1), в строках направления 1 (2, 3) стоят разные элементы из Q. Верно и обратное. Итак, между тернарными L-квазигруппами (M-квазигруппами, R-квазигруппами) и 3-мерными матрицами указанного вида имеется взаимно однозначное соответствие. Мы можем вычислить количество $L'(m;3)$ тернарных L-квазигрупп (M-квазигрупп, R-квазигрупп) порядка m: $L'(m;3) = m!^{m^2}$.

4. Преобразования слов

Для преобразования слов в заданном алфавите используют квазигруппы [4]. Мы обобщаем преобразования слов из этой работы на тернарный случай, т.е. в работе [5] было указано преобразование слов с помощью тернарных квазигрупп, а здесь будем преобразовывать слова с помощью тернарных группоидов, тесно связанных с тернарными квазигруппами.

Пусть $\langle Q, f\rangle$ – конечная тернарная (L, M)-квазигруппа, где $Q = \{1, \dots, m\}$. Множество всех слов в алфавите Q обозначим $Q^+ = \{x_1 \dots x_s | x_i \in Q, s \geq 1\}$. Для заданной пары элементов a, b из Q, в терминах работы [4] эти элементы назовем лидерами, на множестве Q^+ определим отображение

$$A_{a,b}(x_1x_2\dots x_s) = y_1y_2\dots y_s = \begin{cases} y_1 = f(x_1, a, b), \\ y_2 = f(x_2, y_1, a), \\ y_{i+1} = f(x_{i+1}, y_i, y_{i-1}), i = 2, 3, \dots, s-1. \end{cases} \tag{8}$$

Теорема 1. *Отображение $A_{a,b}$, построенное по правилу (8), является биективным.*

Для конечной тернарной (L, M)-квазигруппы $\langle Q, f\rangle$ на множестве Q^+ можно определить другое отображение

$$B_{a,b}(x_1x_2\dots x_s) = y_1y_2\dots y_s = \begin{cases} y_1 = f(a, x_1, b), \\ y_2 = f(y_1, x_2, a), \\ y_{i+1} = f(y_i, x_{i+1}, y_{i-1}), i = 2, 3, \dots, s-1. \end{cases} \tag{9}$$

Теорема 2. *Отображение $B_{a,b}$, построенное по правилу (9), является биективным.*

Пусть теперь $\langle Q, f\rangle$ – конечная тернарная (L, R)-квазигруппа, где $Q = \{1, \dots, m\}$. Для заданной пары элементов a, b из Q на множестве Q^+ определим отображение $A_{a,b}$ по правилу (8). Как и выше, отображение $A_{a,b}$, построенное по правилу (8), является биективным.

Для конечной тернарной (L, R)-квазигруппы $\langle Q, f\rangle$ на множестве Q^+ можно определить другое отображение

$$C_{a,b}(x_1x_2\dots x_s) = y_1y_2\dots y_s = \begin{cases} y_1 = f(a, b, x_1), \\ y_2 = f(y_1, a, x_2), \\ y_{i+1} = f(y_i, y_{i-1}, x_{i+1}), i = 2, 3, \dots, s-1. \end{cases} \tag{10}$$

Теорема 3. *Отображение $C_{a,b}$, построенное по правилу (10), является биективным.*

Пусть теперь $\langle Q, f\rangle$ – конечная тернарная (M, R)-квазигруппа, где $Q = \{1, \dots, m\}$. Для заданной пары элементов a, b из Q на множестве Q^+ определим отображения $A_{a,b}$ по правилу (8) и $C_{a,b}$ по правилу (10). Как и выше, отображения $A_{a,b}$ и $C_{a,b}$ являются биективными.

Выбираем теперь конечную тернарную L-квазигруппу (M-квазигруппу, R-квазигруппу) $\langle Q, f\rangle$, где вновь $Q = \{1, \dots, m\}$. Для заданной пары элементов a, b из Q на множестве Q^+ определим отображения $A_{a,b}$ по правилу (8) ($B_{a,b}$ по правилу (9), $C_{a,b}$ по правилу (10)). Как и выше, отображение $A_{a,b}$ ($B_{a,b}$, $C_{a,b}$) является биективным.

Для той же пары элементов a, b из Q на множестве Q^+ строим еще одно отображение

$$D_{a,b}(y_1 y_2 \dots y_s) = x_1 x_2 \dots x_s = \begin{cases} x_1 = u(y_1, a, b), \\ x_2 = u(y_2, y_1, a), \\ x_{i+1} = u(y_{i+1}, y_i, y_{i-1}), i = 2, 3, \dots, s-1. \end{cases} \tag{11}$$

Теорема 4. *Отображение $D_{a,b}$, построенное по правилу (11), является обратным для отображения $A_{a,b}$.*

Аналогично для отображения $B_{a,b}$ строится обратное отображение $E_{a,b}$ по правилу

$$E_{a,b}(y_1 y_2 \dots y_s) = x_1 x_2 \dots x_s = \begin{cases} x_1 = v(a, y_1, b), \\ x_2 = v(y_1, y_2, a), \\ x_{i+1} = v(y_i, y_{i+1}, y_{i-1}), i = 2, 3, \dots, s-1, \end{cases} \tag{12}$$

а для отображения $C_{a,b}$ строится обратное отображение $F_{a,b}$ по правилу

$$F_{a,b}(y_1 y_2 \dots y_s) = x_1 x_2 \dots x_s = \begin{cases} x_1 = w(a, b, y_1), \\ x_2 = w(y_1, a, y_2), \\ x_{i+1} = w(y_i, y_{i-1}, y_{i+1}), i = 2, 3, \dots, s-1. \end{cases} \tag{13}$$

Для преобразования слов с помощью тернарных (L, M)-квазигрупп, (L, R)-квазигрупп, (M, R)-квазигрупп, L-квазигрупп, M-квазигрупп и R-квазигрупп можно использовать композиции отображений вида (8), (9) и (10). Выбираем набор $\langle Q, f_1\rangle$, $\langle Q, f_2\rangle$, ..., $\langle Q, f_t\rangle$ выше указанных тернарных группоидов и упорядоченные пары $(a_1, b_1), (a_2, b_2), \dots, (a_t, b_t)$ элементов из Q ($t > 1$). Строим по правилам (8), (9) и (10) отображения $S^1_{a_1,b_1}, S^2_{a_2,b_2}, \dots, S^t_{a_t,b_t}$, а затем рассматриваем композицию

$$S_{a_1,b_1,a_2,b_2,\dots,a_t,b_t} = S^1_{a_1,b_1} \circ S^2_{a_2,b_2} \circ \dots \circ S^t_{a_t,b_t}. \tag{14}$$

Для этих же тернарных группоидов и пар элементов строим соответственно по правилам (11), (12) и (13) отображения $T^1_{a_1,b_1}, T^2_{a_2,b_2}, \dots, T^t_{a_t,b_t}$, и также рассматриваем композицию $T_{a_t,b_t,\dots,a_2,b_2,a_1,b_1} = T^t_{a_t,b_t} \circ \dots \circ T^2_{a_2,b_2} \circ T^1_{a_1,b_1}$. Очевидно, $T_{a_t,b_t,\dots,a_2,b_2,a_1,b_1}$ — обратное отображение для отображения $S_{a_1,b_1,a_2,b_2,\dots,a_t,b_t}$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Щербаков В. А. О конгруэнциях группоидов, тесно связанных с квазигруппами // Фундамент. и прикл. матем. 2008. № **14**,(5). С. 237–251.

2. Марков В. Т., Михалёв А. В., Нечаев А. А. Неассоциативные алгебраические структуры в криптографии и кодировании // Фундамент. и прикл. матем. 2016. № **21**(4). С. 621–641.

3. Глухов М. М. О применениях квазигрупп в криптографии // ПДМ. 2008. № **2**. С. 28–32 .

4. Markovski S., Gligoroski D.,Bakeva V. Quasigroup String Processing: Part 1 // Proc. of Maked. Academ. of Sci. and Arts for Math. And Tect. Sci. XX. 1999. P. 155–162.

5. Щучкин Н. А. Применение тернарных квазигрупп к преобразованию слов // Дискрет. матем. 2024. № **36:2**. С.32—143.

6. Белоусов В. Д. n-Арные квазигруппы — Кишинев: Изд-во "Штиинца 1972. 226 с.

7. Соколов Н. П. Введение в теорию многомерных матриц — Киев: Изд-во Наукова думка, 1972. 354 с.

8. Ryser H. J. Permanents and systems of distinct representatives // Proceedings of the Conference on Combinatorial mathematics and its applications, University of North Carolina, Chapel Hill. 1967. P. 55–70.

Секция 3. Кольца и модули

УДК 512.558

О полумодулях над идемпотентными моно-полукольцами[1]

Е. М. Вечтомов (Россия, г. Киров)
Вятский государственный университет
e-mail: vecht@mail.ru
А. А. Петров (Россия, г. Киров)
Вятский государственный университет
e-mail: apetrov43@mail.ru

On semimodules over idempotent mono-semirings

E. M. Vechtomov (Russia, Kirov)
Vyatka State University
e-mail: vecht@mail.ru
A. A. Petrov (Russia, Kirov)
Vyatka State University
e-mail: apetrov43@mail.ru

Продолжается изучение полумодулей над идемпотентными полукольцами [1]. Теории мультипликативно идемпотентных полуколец посвящена книга [2]. Полумодули (полигоны) над дистрибутивными решетками исследовались в [3].

1. Исходные понятия

Определим понятия полукольца и полумодуля над полукольцом. *Полукольцо* S — это алгебраическая структура $\langle S, +, \cdot\rangle$ с коммутативно-ассоциативной операцией сложения $+$ и ассоциативной операцией умножения $\cdot$, дистрибутивной относительно сложения с обеих сторон.

Полукольцо S называется:
полукольцом с единицей, в S существует элемент 1, нейтральный по умножению;
полукольцом с нулем, в S существует элемент 0, нейтральный по сложению и поглощающий по умножению;
коммутативным, если S удовлетворяет тождеству $xy = yx$;
мультипликативно (*аддитивно*) *идемпотентным*, если в S тождественно $xx = x$ ($x+x = x$);
идемпотентным, если S одновременно мультипликативно и аддитивно идемпотентно;
моно-полукольцом, если в S тождественно $xy = x + y$.

Полумодулем над полукольцом S (или просто S*-полумодулем*) называется коммутативный моноид $\langle A, +, 0\rangle$ с нейтральным элементом нуль 0 вместе с отображением $S \times A \to A, (s, a) \mapsto sa$, обладающим следующими свойствами (для любых $s, t \in S$ и $a, b \in A$):
(1) $(s + t)a = sa + ta$;
(2) $s(a + b) = sa + sb$;
(3) $(st)a = s(ta)$;
(4) $s \cdot 0 = 0$.

Отображение $f : A \to B$ S-полумодуля A в S-полумодуль B называется S*-гомоморфизмом*, если $f(x + y) = f(x) + f(y)$ и $f(sx) = sf(x)$ для любых $x, y \in A$ и $s \in S$. Если S-гомоморфизм

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда, проект №24-21-00117.

f S-полумодулей является взаимно однозначным отображением (биекцией), то он называется S-*изомофизмом*; при этом обратная биекция f^{-1} также будет S-изомофизмом. Отметим, что изоморфные S-полумодули имеют одни и те же абстрактные свойства.

Если S — полукольцо с единицей 1, то все S-полумодули A предполагаются унитарными, т. е. $1 \cdot a = a$ для любого элемента $a \in A$.

Обозначим через $\mathbb{D} = \{e, 1\}$ двухэлементное идемпотентное моно-полукольцо с единицей 1. Класс M всех идемпотентных моно-полуколец образует многообразие, порожденное подпрямо неразложимым полукольцом $\mathbb{D}$ [2, предложение 2.3.2]. Значит, класс M замкнут относительно взятия любых подпрямых произведений и прямых произведений. Кроме того, прямая сумма произвольного непустого семейства полуколец из M, обладающих единицей, снова будет полукольцом из M.

Присоединим к полукольцу S внешним образом элемент 0, считая его нулем пополненного полукольца $S \cup \{0\}$, имеющего S своим подполукольцом. Тогда любой S-полумодуль A будет и $(S \cup \{0\})$-полумодулем, если положить $0 \cdot a = a$ для всех $a \in A$.

S-полумодуль A называется *точным*, если для любых $s \neq t$ из S существует элемент $a \in A$, для которого $sa \neq ta$. Ясно, что точные S-полумодули над бесконечным полукольцом S — бесконечные.

Пусть дан полумодуль A над коммутативным полукольцом S. Определим на полукольце S бинарное отношение ρ: $s \rho t$ означает, что $sa = ta$ для всех $a \in A$. Отношение ρ является конгруэнцией на полукольце S. При этом A будет точным полумодулем над фактор-полукольцом S/ρ.

2. Общие результаты

Пусть S — мультипликативно идемпотентное полукольцо, A — S-полумодуль и $s \in S$. Множество $sA = \{sa : a \in A\}$ будет множеством всех неподвижных элементов S-полумодуля A при действии аддитивного гомоморфизма $s : A \to A$, $a \mapsto sa$.

Если S — аддитивно идемпотентное полукольцо с единицей 1, то всякий S-полумодуль A является *полурешеткой* с нулем 0, т. е. коммутативный моноид $\langle A, +, 0\rangle$ идемпотентен. Тогда на A вводится отношение порядка $\leqslant$: $a \leqslant b$ означает $a + b = b$; при этом $a + b = \sup\{a, b\}$ для всех $a, b \in A$.

Если S — идемпотентное полукольцо с единицей 1 и A — S-полумодуль, то для любого $s \in S$ множество sA является подполурешеткой полурешетки A и эндоморфизм s: $A \to A$ будет изотонным отображением, то есть сохраняет порядок: $a \leqslant b \Rightarrow sa \leqslant sb$ для всех $a, b \in A$.

Пусть далее ***S* — *произвольное неодноэлементное идемпотентное моно-полукольцо с единицей* 1**.

Полукольцо S коммутативно и $s + 1 = s$ для любого его элемента s.

Пусть A — S-полумодуль. Тогда $a \leqslant sa$ для всех $s \in S$ и $a \in A$. Для любых $s, t \in S$ имеем $s \leqslant t \Rightarrow sA \subseteq tA$ и $sA \cap tA = (st)A$ Точность S-полумодуля A означает, что $sA = tA \Rightarrow s = t$ для $s, t \in S$.

Предложение 1. *Отображение $\alpha : S \to \langle\{sA : s \in S\}, \cap, \cap\rangle$, $\alpha(s) = sA$ для всех $s \in S$, является эпиморфизмом моно-полуколец. Если A — точный S-полумодуль, то α — изоморфизм.*

Предложение 2. *Для любого элемента $s \in S$ отображение $s : A \to A$ полностью определяется множеством sA: для каждого $a \in A$ элемент sa равен наименьшему элементу множества $\{x \in sA : a \leqslant x\}$.*

Замечание 1. Произвольный S-полумодуль A является точным полумодулем над моно-полукольцом $\langle\{sA : s \in S\}, \cap, \cap\rangle$, где $(sA)a = sa$ для любых элементов $s \in S$ и $a \in A$. При этом $(sA)(a + b) = sa + sb$ и $(sA \cap tA)a = (st)a$ для любых $s, t \in S$ и $a, b \in A$. *Отметим, что полукольцо $\langle\{sA : s \in S\}, \cap, \cap\rangle$ изоморфно фактор-полукольцу S/ρ.*

Пусть $\langle A, +, 0\rangle$ — полурешетка и S — некоторое множество подполурешеток с нулем полурешетки A, замкнутое относительно конечных пересечений и содержащее S. Представляет интерес следующий **вопрос:** какими свойствами должна обладать система S, чтобы полурешетка A допускала структуру полумодуля над моно-полукольцом $\langle S, \cap, \cap\rangle$. Отметим, что подобный подход для полумодулей над ограниченными дистрибутивными решетками рассматривала Т. С. Фофанова [3].

Заметим, что любое двухэлементное подмножество $\{s, 1\}$ полукольца S является подполукольцом в S, изоморфным $\mathbb{D}$.

Предложение 3. *Произвольная полурешетка с нулем является S-полумодулем тогда и только тогда, когда она будет $\mathbb{D}$-полумодулем.*

Подполурешетку B полурешетки A с нулем назовем *подходящей*, если A допускает структуру $\mathbb{D}$-полумодуля и $B = e(A)$.

3. Конечные S-полумодули

Рассмотрим произвольный конечный S-полумодуль A. Упорядоченное множество $\langle A, \leqslant\rangle$ является верхней полурешеткой с $\sup\{a, b\} = a + b$, $a, b \in A$, с наименьшим элементом 0 и наибольшим элементом $m = \Sigma a$ по всем $a \in A$. Поэтому $\langle A, \leqslant\rangle$ будет решеткой. Значит, конечные S-полумодули следует искать среди конечных решеток, задающих аддитивную структуру S-полумодулей.

Предложение 4. *Для любой подполурешетки B произвольной конечной решетки A эквивалентны следующие утверждения:*

1) *B — подходящая полурешетка;*
2) *B — подрешетка решетки A, содержащая ее наименьший и наибольший элементы;*
3) *$B = sA$ для S-полумодуля A и некоторого элемента $s \in S$.*

Предложение 5. *Для того чтобы в конечной решетке A с нулем 0 и наибольшим элементом m все подполурешетки с 0 и m были подходящими, необходимо и достаточно, чтобы решетка A обладала следующим свойством:*

$$a + b = s \text{ и } ab = 0 \text{ для любых несравнимых элементов } a, b \in A. \qquad (*)$$

Замечание 2. Рассмотрим n-элементную ($n \geqslant 3$) решетку A со свойством $(*)$ с наименьшим элементом 0 и набольшим элементом m. В решетке A все подмножества, содержащие 0 и m, являются подрешетками, значит, они будут подходящими подполурешетками. В силу свойства $(*)$ упорядоченное множество $A \setminus \{0, m\}$ является дизъюнктным объединением n_1 одноэлементных максимальных цепей, n_2 двухэлементных максимальных цепей, ..., n_{n-2} $(n-2)$-элементных максимальных цепей, таким, что $n_1 + 2n_2 + \ldots + (n-2)n_{n-2} = n-2$. Некоторые из чисел n_i могут равняться 0. Решетка A имеет ровно $n_1! \cdot n_2! \cdot \ldots \cdot n_k!$ автоморфизмов. Решетка A имеет ровно один автоморфизм тогда и только тогда, когда все ненулевые числа среди чисел $n_1, n_2, \ldots, n_{n-2}$ равны 1, другими словами, длины максимальных цепей в $A \setminus \{0, m\}$ попарно различны. В этом случае существует, с точностью до изоморфизма, ровно 2^{n-2} $\mathbb{D}$-полумодулей A. При $n_1 = n-2$ полурешетка A обладает ровно $(n-2)!$ автоморфизмами.

Пусть подмножество B решетки A, содержащее 0 и m, перемещается при действии автоморфизма f решетки A, $f(B) \neq B$. Тогда подходящие полурешетки B и $f(B)$ порождают изоморфные неравные $\mathbb{D}$-полумодули A.

В случае $n_1 = n - 2$ все k-элементные подмножества K множества $A \setminus \{0, m\}$ порождают единственную, с точностью до изоморфизма, подходящую подрешетку $K \cup \{0, m\}$ решетки A. Поэтому, с точностью до изоморфизма, существует ровно $n - 1$ $\mathbb{D}$-полумодуль A.

Найдено число попарно неизоморфных $\mathbb{D}$-полумодулей, имеющих не более 6 элементов. Для этого рассмотрены диаграммы Хассе всех 25 решеток с $n \leqslant 6$ элементами. В каждой из этих решеток A подсчитано число подходящих подрешеток, индуцирующих попарно неизоморфные $\mathbb{D}$-полумодули A.

Таблица 1: число $sm(n)$ n-элементных ($n \leqslant 6$) $\mathbb{D}$-полумодулей

n	1	2	3	4	5	6
$sm(n)$	1	1	2	7	30	158

Предложение 6. *С точностью до изоморфизма существует* 199 $\mathbb{D}$*-полумодулей, имеющих не более* 6 *элементов.*

Замечание 3. Составлена компьютерная программа для нахождения n-элементных $\mathbb{D}$-полумодулей. Полученные результаты могут быть полезны при исследовании полумодулей над другими идемпотентными полукольцами.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Вечтомов Е. М. О полумодулях над мультипликативно идемпотентными полукольцами // Международная научная конференция «Алгебра и математическая логика: теория и приложения». Казань: КФУ, 2024. С. 103–104.

2. Вечтомов Е. М., Петров А. А. Функциональная алгебра и полукольца. Полукольца с идемпотентным умножением. Санкт-Петербург: Лань, 2022. 180 с.

3. Фофанова Т. С. Полигоны над дистрибутивными структурами // Сибирский математический журнал. 1971. Т. 12. № 5. С. 1158–1163.

УДК 511.32

Конечные квазиполя с условием Холла[1]

О. В. Кравцова (Россия, г. Красноярск)
Сибирский федеральный университет
e-mail: ol71@bk.ru
В. С. Логинова (Россия, г. Красноярск)
Сибирский федеральный университет
e-mail: yui5432188@gmail.com

Finite quasifields with Hall condition

O. V. Kravtsova (Russia, Krasnoyarsk)
Siberian Federal University
e-mail: ol71@bk.ru

[1]Работа поддержана Красноярским математическим центром, финансируемым Минобрнауки РФ (Соглашение 075-02-2024-1429).

V. S. Loginova (Russia, Krasnoyarsk)
Siberian Federal University
e-mail: yui5432188@gmail.com

Алгебраическая система $(Q, +, \cdot)$ с бинарными операциями $+$ и $\cdot$ называется *правым квазиполем*, если:

1) $(Q, +)$ — абелева группа;
2) $Q^* = (Q \setminus \{0\}, \cdot)$ — лупа;
3) выполнен правый дистрибутивный закон $(a + b)c = ac + bc$ $(a, b, c \in Q)$;
4) $a \cdot 0 = 0$ для всех $a \in Q$;
5) уравнение $xa = xb + c$ однозначно разрешимо для всех $a, b, c \in Q$, $a \neq b$.

Квазиполе с двусторонней дистрибутивностью называется *полуполем*, квазиполе с ассоциативным умножением — *почти-полем.*

Конечные квазиполя изучаются взаимосвязанно с проективными плоскостями трансляций уже более века. Первые примеры конечных квазиполей, не являющихся ни полуполями, ни почти-полями, построил М. Холл в 1943 г. Квазиполе Q порядка q^2 $(q = p^n$, p — простое число), двумерное над центром $K \simeq GF(q)$, называется *квазиполем Холла*, если все нецентральные элементы являются корнями одного неприводимого квадратичного многочлена $\varphi(x) = x^2 - rx - s \in K[x]$. Группа автоморфизмов квазиполя Холла действует транзитивно на нецентральных элементах. Все квазиполя Холла одного порядка координатизируют одну плоскость трансляций — плоскость Холла. Структурные вопросы о правом спектре, подполях и подквазиполях решены для конечных квазиполей Холла в [1].

Меняя в определении квазиполя Холла степень многочлена либо размерность квазиполя над ядром, получим квазиполя, свойства которых еще предстоит описать.

Пусть $Q = (Q, +, \cdot)$ — (правое) квазиполе порядка q^m $(q = p^n$, p — простое число) с центром $K \simeq GF(q)$. Будем говорить, что Q – *квазиполе с условием Холла*, если существует такой неприводимый многочлен $\varphi(x) = x^2 - rx - s \in K[x]$, что всякий элемент $a \in Q \setminus K$ является корнем многочлена $\varphi(x)$. Таким образом, при $m = 2$ мы получаем определение квазиполя Холла.

Лемма 1. *Если Q — конечное квазиполе с условием Холла, то его размерность m над центром K не может быть равна 3.*

Теорема 1. *Конечное квазиполе Q с условием Холла размерности $m > 2$ над центром не является ни полуполем, ни почти-полем.*

В. М. Левчук и П. К. Штуккерт в [2] показали, что три квазиполя порядка 16 из списка У. Демпволфа являются теоретико-множественными объединениями своих максимальных подполей порядка 4. Эти квазиполя не являются квазиполями Холла, так как имеют размерность 4 над центром $\mathbb{Z}_2$, хотя все их нецентральные элементы суть корни одного многочлена $\varphi(x) = x^2 + x + 1$. Показано [1], что эти 4-мерные квазиполя с условием Холла не содержатся в качестве подквазиполей ни в одном конечном квазиполе Холла.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кравцова О. В., Логинова В. С. Вопросы строения конечных квазиполей Холла // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2024. Том 30, № 1. С. 128-141.

2. Levchuk V. M., Shtukkert P. K. Problems on structure for quasifields of orders 16 and 32 // Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics. 2014. Vol. 7, no. 3. P. 362–372.

УДК 511.32

Эндоморфизмы специального вида конечно порожденных абелевых групп

А. Сарвари (Россия, г. Москва)
Московский педагогический государственный университет
e-mail: sarwary.asad20@gmail.com

Endomorphisms of a special type of finitely generated Abelian groups

A. Sarwary (Russia, c. Moscow)
Moscow State Pedagogical University
e-mail: sarwary.asad20@gmail.com

Доклад посвящен абелевым группам, содержащим хотя бы один эндоморфизм, ядро которого совпадает с его образом. Заметим, что условие $\ker\varphi = \operatorname{Im}\varphi$ влечет за собой равенство $\varphi^2 = 0$, то есть φ является нильпотентным эндоморфизмом индекса нильпотентности 2. Основными результатами работы являются следующие утверждения.

Теорема 1. *Пусть A — абелева группа, тогда эндоморфизм $\varphi\colon A \to A$, такой что $\ker\varphi = \operatorname{Im}\varphi$ существует, тогда и только тогда когда в группе A найдется подгруппа B, такая что $A/B \cong B$.*

Следствие 1. *Если A — конечная группа, в которой существует такой эндоморфизм $\varphi\colon A \to A$, что $\ker\varphi = \operatorname{Im}\varphi$, то $|A| = n^2$ для некоторого натурального числа n.*

Следствие 2. *Если $A \cong B \oplus B$, то существует эндоморфизм φ группы A, такой что $\ker\varphi = \operatorname{Im}\varphi$.*

Пусть A — конечно порожденная абелева группа, тогда она пердставима в виде $A = F \oplus K$, где F — свободная группа конечного ранга, а K — конечная группа.

Теорема 2. *Если $A = F \oplus K$ — конечно порожденная абелева группа, то эндоморфизм $\varphi\colon A \to A$, такой что $\ker\varphi = \operatorname{Im}\varphi$ существует тогда и только тогда, когда $r(F) = m = 2k$ и $|K| = n^2$.*

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Сарвари А. Некоторые линейные операторы векторных пространств индекса нильпотентности 2 // Материалы студенческой научной сессии ИМИ МПГУ. 2020. С. 146-151.

2. Фукс Л. Бесконечные абелевы группы. — Москва: Изд-во Мир, 1947. 335 с.

УДК 511.32

Топологическая простота и топологизация кольца многочленов

В. В. Тензина (Россия, г. Москва)
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
e-mail: viktoria.tenzina@math.msu.ru

Topological simplicity and topologizations of polynomial rings

V. V. Tenzina (Russia, Moscow)
Lomonosov Moscow State University
e-mail: viktoria.tenzina@math.msu.ru

Кольцо без собственных замкнутых идеалов называется *топологически простым кольцом.*

Утверждение о том, что всякое всюду плотное подкольцо топологически простого кольца топологически просто (см. [1], 1.4.16) даёт нам некоторый запас таких колец. Например, в поле действительных чисел с интервальной топологией следующие подкольца всюду плотны, а следовательно, топологически просты:

1) $\mathbb{Q}(\theta)$, где θ — некоторое трансцендентное число ([1], Example 1.4.17);

2) $\mathbb{Z}+\mathbb{Z}\sqrt{2}$

Определение 1 ([2]). *Вполне простой называется топологическая алгебра, любой непрерывный гомоморфизм которой есть или топологический изоморфизм, или отображение в один элемент.*

Автор доказывает, что все вполне простые топологические кольца топологически просты. Там же показано, что кольцо вполне топологически просто тогда и только тогда, когда его пополнение вполне топологически просто. Полное вполне простое коммутативное кольцо является полным полем с неослабляемой топологией или полной вполне простой абелевой группой по сложению и имеет нулевое умножение (и обратно). Заметим, что в текущей статье под топологически простыми кольцами мы подразумеваем кольца с ненулевым умножением.

Возникает естественный вопрос: а существует ли коммутативные топологически простые кольца, не являющиеся всюду плотными подкольцами некоторых полных полей? Существование таких колец следует хотя бы из того, что пополнение поля не обязательно поле.

Пример 3. *Рассмотрим поле рациональных чисел с топологией, определённой базой окрестностей нуля подмножествами вида*

$$U_n=\{\frac{2^n\cdot 3^n\cdot t}{s}:s,t\in\mathbb{Z},2\nmid s,3\nmid s\}$$

В Example 3.5.5. [1] доказывается, что пополнение такого кольца содержит делители нуля, а значит не является полем.

Но если на коммутативное топологически простое кольцо наложить дополнительное условие, а, именно, неослабляемость топологии, то пополнение такого кольца является полем (см. Theorem 3.5.3. из [1]).

В четвертом издании Днестровской тетради (см. [3], 1.10.) В.И. Арнаутовым сформулирован следующий вопрос: существует ли в кольце целых чисел $\mathbb{Z}$ такая неослабляемая топология, в которой $\mathbb{Z}$ не содержит замкнутых идеалов. Как было сказано выше, если бы такая топология существовала, то относительно этой неослабляемой топологии пополнение топологически простого кольца целых чисел бы было полем.

Теорема 1. *Топология на $\mathbb{Z}$ из [4] такова, что относительно неё кольцо $\mathbb{Z}$ топологически просто, и любой элемент из $\mathbb{Z}$ обратим в своём пополнении.*

Интересен ответ на вопрос: если кольцо R топологически просто, то что можно сказать про топологическую простоту кольца многочленов от одной переменной $R[x]$?

Предложение 1. *Если коммутативное кольцо R относительно некоторой топологии топологически просто, то на $R[x]$ можно задать такую топологию, что кольцо многочленов $R[x_1, \dots, x_n]$ от конечного числа коммутирующих переменных станет топологически простым кольцом.*

Таким образом кольца $\mathbb{R}[x]$, $\mathbb{Z}_p[x]$ могут быть топологизированы так, что станут топологически простыми. Но не понятно как устроена эта топология. И хотелось бы, чтобы топология кольца и топология кольца многочленов были согласованы, то есть чтобы топология на $R[x]$ продолжала бы топологию на R.

Далее рассмотрим некоторые согласованные топологии.

По заданному топологическому кольцу (R, τ) на кольце многочленов $R[x]$ известным образом можно также задать топологию $\tau'_{R[x]}$ окрестностями вида

$$U(V, n) = \{a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n \in R[x] : \forall k \in \mathbb{N}, k < n \Rightarrow a_k \in V\}$$

Очевидно, что в такой топологии для любого натурального l идеал $R[x]x^l$ замкнут, а значит кольцо в этой топологии не может быть топологически просто.

Напомним, что подмножество Q кольца R называется *ограниченным слева (справа)*, если для любой окрестности нуля V из кольца найдётся окрестность нуля U такая, что $U \cdot S \subset V$ $(V \cdot S \subset U)$. Если же S ограниченно и справа, и слева, то оно называется *ограниченным.*

Пусть R — топологическое кольцо, а S — ограниченное подмножество центра кольца R. На $R[x]$ определим топологию τ_S следующим образом: базой окрестностей нуля являются множества вида

$$U_S(V) = \{f \in R[x] : f(S) \subset V\},$$

где V — произвольная окрестность нуля из R. Будем называть такую топологию *равномерной.*

Предложение 2. *Равномерная топология τ_S на $R[x]$ является топологией кольца, а само кольцо $(R[x], \tau_S)$ не является топологически простым. При этом $\tau_S|_R$ совпадает с топологией на R*

Например, если в качестве R можно взять нормированное кольцо с нормой ζ, а в качестве $S = \{r \in R : \zeta(r) < 1\}$. Таким образом кольца многочленов $\mathbb{R}[x]$, $\mathbb{C}[x]$ или $\mathbb{R}[x]$ с вышепостроенной топологией не будет топологически простыми.

В следующих двух теоремах доказано не только существование кольцевых топологий, но и в доказательствах явно описаны топологии.

Теорема 2. *Если R счётное всюду плотное подкольцо топологического кольца $\mathbb{R}$ с интервальной топологией, то на $R[x]$ существует кольцевая топология, относительно которой $\mathbb{R}[x]$ топологически просто.*

Теорема 3. *На $\mathbb{Z}[x]$ существует кольцевая топология, относительно которой $\mathbb{Z}[x]$ топологически просто.*

Так как целью данной работы было исследование не только топологической простоты кольца многочленов над топологически простым кольцом, но и конструирование кольцевых топологий на кольце многочленов, рассмотрим ещё некоторые конструкции для нормируемых колец.

Предложение 3. *Пусть R — нормированное кольцо с нормой $||\cdot||$. Для положительного ε определим*

$$U_\epsilon = \{a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n \in R[x] : \sum_{i=0}^{n} ||a_i|| < \varepsilon\}$$

Тогда семейство подмножеств $\{U_\epsilon\}_{\varepsilon>0}$ определяет базу окрестностей нуля для некоторой топологии, относительно которой $R[x]$ становится топологическим кольцом и идеал $R[x]x$ замкнут.

Теорема 4. *Пусть R — нормированное кольцо с нормой $||\cdot||$. Построим положительную возрастающую последовательность $\{\xi_n\}_{k=0}^{\infty}$ следующим образом: $\xi_0 = \frac{1}{2}$, $\xi_1 = 1$, $\xi_k = 2\sum\limits_{i=1}^{k-1}\xi_i\xi_{k-i}$. Определим положительную функцию $N : R[x] \mapsto \mathbb{R}$ следующим образом: $N(a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n) = \max\limits_{0\leqslant i\leqslant n} \frac{||a_i||}{\xi_i}$. Тогда N является кольцевой нормой на $R[x]$, относительно которой R не будет топологически простым.*

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Arnautov V. I, Glavatsky S. T., Mikhalev A. V. Introduction to the theory of topological rings and modules, — M.Dekker. (New York), 1996, p. 502.

2. Мутылин А. Ф. Вполне простые топологические коммутативные кольца // Математические заметки. 1969, Том 5, № 2. С. 161-171.

3. Сост. Филиппов В. Т., Харченко В. К., Шестаков И. П. Днестровская тетрадь. Нерешённые проблемы теории колец и модулей., 4-ое изд., — Новосибирск: Институт математики СО РАН, 1993. 73 с.

4. Тензина В. В. Материалы конференции // XIII Белорусская математическая конференция.: тезисы докладов международной конференции (Минск, 22-25 ноября 2021 г.) — Минск.: издательство Белоруская навука, 2021. Том 1. С. 119.

УДК 512.55+512.545

Регулярные идеалы частично псевдоупорядоченных алгебр над частично упорядоченными полями

Е. Е. Ширшова (Россия, г. Москва)
Московский педагогический государственный университет
e-mail: shirshova.elena@gmail.com

Regular ideals of partially ordered psuodo-ordered algebras over partially ordered fields

E. E. Shirshova (Russian, Moscow)
Moscow Pedagogical State University
e-mail: shirshova.elena@gmail.com

Пусть $R =< R, +, \cdot >$ – произвольное кольцо (не обязательно ассоциативное). Говорят, что R *частично упорядоченное кольцо*, если $< R, +, \leqslant>$ является частично упорядоченной группой, удовлетворяющей условию:

из $a \leqslant b$ и $0 < c$ следуют неравенства $ac \leqslant bc$ и $ca \leqslant cb$ для всех $a, b, c \in R$.

Частично упорядоченная группа называется *направленной*, если любые два элемента имеют в этой группе верхнюю грань.

Если группа $< R, +, \leqslant>$ является направленной (линейно упорядоченной), то R называется *направленно (линейно) упорядоченным кольцом.*

Кольцо R называется *частично псевдоупорядоченным кольцом*, если $< R, +, \leqslant>$ – частично упорядоченная группа, удовлетворяющая условию:

если $0 \leqslant a$ в $< R, +, \leqslant>$, то $ab \leqslant a$ и $ba \leqslant a$ для любого $b \in R$ (см. [1]).

Будем считать, что F – частично упорядоченное тело нулевой характеристики с положительной единицей (иначе порядок окажется тривиальным).

Левое линейное пространство $_FV =< V, +, \{\alpha| \ \alpha \in F\}, \leqslant>$ над частично упорядоченным телом F называется *частично упорядоченным линейным пространством*, если $< V, +, \leqslant>$ – частично упорядоченная группа, удовлетворяющая условию:

из $0 \leqslant v$ следует $0 \leqslant \alpha v$ для всех $v \in V$ и $\alpha > 0$ из тела F (см. [2]).

Алгебра $A =< A, +, \{\alpha| \ \alpha \in F\}, \cdot, \leqslant>$ над частично упорядоченным полем F называется *частично псевдоупорядоченной алгеброй*, если выполняются условия:

1) $< A, +, \{\alpha| \ \alpha \in F\}, \leqslant>$ является частично упорядоченным линейным пространством над полем F;

2) $< A, +, \cdot, \leqslant>$ является частично псевдоупорядоченным кольцом.

Если группа $< A, +, \leqslant>$ является направленной (решеточно упорядоченной, линейно упорядоченной), то алгебру A называют *направленно (решеточно, линейно) псевдоупорядоченной алгеброй* (см. [3],[4]).

Подгруппа M частично упорядоченной группы G называется *выпуклой*, если для любых элементов $a, b \in M$ и $g \in G$ из неравенств $a \leqslant g \leqslant b$ всегда следует $g \in M$.

Идеал I частично псевдоупорядоченной алгебры A над частично упорядоченным полем F называется *выпуклым*, если группа $< I, +, \leqslant>$ является выпуклой подгруппой аддитивной группы $< A, +, \leqslant>$.

Целью данного сообщения является характеризация множества $L(A)$ всех выпуклых направленных идеалов частично псевдоупорядоченных алгебры A над частично упорядоченным полем F.

Определение 1. *Выпуклый направленный идеал I частично псевдоупорядоченной алгебры A называется регулярным идеалом, если существует элемент $x \in A$, такой что I является максимальным идеалом из всех выпуклых направленных идеалов алгебры, не содержащих x. В этом случае I называется значением элемента x.*

Теорема 1. *Пусть A – частично псевдоупорядоченная алгебра над частично упорядоченным полем F. Каждый элемент $0 \neq x \in A$ имеет в A хотя бы одно значение. Если $x \notin J$, где J – выпуклый направленный идеал в A, то существует K – значение элемента x, для которого $J \subseteq K$.*

Элементы a и b из G^+ называются *почти ортогональными* в частично упорядоченной группе $G =< G, +, \leqslant>$, если из неравенств $x \leqslant a, b$ следуют неравенства $nx \leqslant a, b$ для всех $x \in G$ и целых положительных чисел n.

Частично упорядоченную группу $G =< G, +, \leqslant>$ называют *AO-группой*, если любой элемент $g \in G$ представим в виде $g = a - b$, где элементы a и b почти ортогональны в группе G. Класс *AO*-групп является подклассом направленных групп и включает в себя класс решеточно упорядоченных групп.

Определение 2. *Частично псевдоупорядоченное кольцо $R =< R, +, \cdot, \leqslant>$ называется AO-псевдоупорядоченным кольцом, если группа $< R, +, \leqslant>$ является AO-группой.*

Частично псевдоупорядоченную алгебру $A =< A, +, \{\alpha|\ \alpha \in F\}, \cdot, \leqslant>$ над частично упорядоченным полем F будем называть AO-псевдоупорядоченной алгеброй, если кольцо $< A, +, \cdot, \leqslant>$ является AO-псевдоупорядоченным кольцом.

Теорема 2. *Пусть A – AO-псевдоупорядоченная алгебра над частично упорядоченным полем F. Каждый выпуклый направленный идеал I алгебры A является пересечением регулярных идеалов.*

Определение 3. *Скажем, что идеал $I \in L(A)$ неразложим в пересечение, если из равенства*

$$I = \bigcap_{s \in S} J_s$$

($J_s \in L(A)$ для всех $s \in S$) следует существование индекса $n \in S$, для которого $I = J_n$.

Теорема 3. *Пусть $A =< A, +, \{\alpha|\ \alpha \in F\}, \cdot, \leqslant>$ – AO-псевдоупорядоченная алгебра над частично упорядоченным полем F, и $I \in L(A)$. Тогда следующие условия равносильны:*

1) I – регулярный идеал;

2) идеал I неразложим в пересечение.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бибаева В. Н, Ширшова Е. Е. О линейно K-упорядоченных кольцах// Фундаментальная и прикладная математика. 2011/2012. Том 17, № 4. С. 13-23.

2. Михалев А. В, Ширшова Е. Е. Проективная геомктрия над частично упорядоченными телами// Чебышевский сборник. 2021. Том 22, № 1. С. 213-224.

3. Ширшова Е. Е. О частично упорядоченных алгебрах над полями// Фундаментальная и прикладная математика. 2016. Том 21, № 4. С. 249-263.

4. Михалев А. В, Ширшова Е. Е. Первичный радикал направленных псевдоупорядоченныз алгебр над направленными полями// Фундаментальная и прикладная математика. 2020. Том 23, № 3. С. 215-230.

Секция 4. Прикладная и компьютерная алгебры, криптография и дискретная математика

УДК 519

Об информационном профиле трёх случайных величин с двумя исходами

А. Аллеманд

On the information profile of three random variables with two outcomes

A. Allemand

Введение

В статье исследуется задача максимизации условной взаимной информации для трёх случайных величин с двумя исходами. Основные понятия теории информации, такие как энтропия и взаимная информация, вводятся и применяются для анализа условной взаимной информации при наличии третьей случайной переменной.

Основные результаты

- Максимальная условная взаимная информация $I(A : B|X)$ оценивается с использованием трёх случайных величин A, B, C, каждая из которых принимает два значения.

- Известно, что условная взаимная информация не превышает минимум энтропий каждой из двух величин. Исследуются случаи, когда это неравенство является строгим.

- Структурированный анализ всех возможных распределений проводится в контексте трёхмерного параллелепипеда, описывающего совместное распределение трёх величин.

- Выясняется, что экстремальные значения взаимной информации достигаются не во внутренности параллелепипеда, а на его вершинах.

Методология

Использован аналитический метод для нахождения максимального значения условной взаимной информации:

- Рассматриваются внутренние области, грани и рёбра параллелепипеда. Для каждой из этих областей проверяются производные и уравнения на экстремумы.

- После анализа все решения находятся в вершинах параллелепипеда, и выбирается наибольшее значение информации.

Заключение

В результате было найдено максимальное значение условной взаимной информации, которое достигается в двух вершинах параллелепипеда. Предложенный метод подходит для малых дискретных распределений, но остаётся открытым вопрос о его применимости для более сложных распределений.

УДК 519.682.1

Логика Хоара для императивного языка, учитывающего некоторые аппаратные ограничения

Д. Ю. Ковалев (Россия, г. Москва)
Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»
e-mail: dyukovalev@hse.ru

Hoare logic for an imperative language considering some hardware limitations

D. Yu. Kovalev (Russia, Moscow)
HSE University
e-mail: dyukovalev@hse.ru

1. Мотивация

Применение формальных методов позволяет делать суждения о корректности программ. Языки программирования, к программам на которых чаще всего применяют формальные методы, как правило, не учитывают аппаратных особенностей реальных вычислителей, таких как ограниченный объем памяти и ширина регистров. Для исполнения программы требуется ее трансляция в код вычислителя. Индуцированные во время этой трансляции ограничения и, возможно, допущенные ошибки могут сделать проведенное формальное доказательство неприменимым для программы, транслированной в код вычислителя.

Проведение доказательств для программ непосредственно в кодах вычислителя не является оптимальным решением. Существующие в большинстве наборов инструкций команды переходов плохо ложатся на концепцию императивного программирования и затрудняют определение даже таких базовых понятий, как программа. Разумнее построить императивный язык, учитывающий аппаратные ограничения вычислителя. Такой подход позволяет и упростить формальные доказательства за счет применения существующих подходов, и сохранить применимость этих доказательств к транслированному в инструкции вычислителя коду.

Описанный язык основан на языке IMP, определенном в книге [1]. В качестве «элементарных» команд используется подмножество набора инструкций RV32I [2]. Кроме того, описанный язык позволяет переиспользовать код за счет поддержки процедур.

2. Синтаксис

Определим множества k-битных целых чисел для $k \in \{5, 12\}$:

$$\mathcal{N}^{(k)} \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ n^{(k)} : \ n^{(k)} \in \mathbb{Z} \land 0 \le n^{(k)} < 2^k \right\}, \text{ где } \mathbb{Z}\text{— множество всех целых чисел.}$$

Множества регистров общего назначения $\mathcal{X}$ и всех регистров $\mathcal{X}_0$:

$$\mathcal{X} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \{\mathtt{x}_2, \mathtt{x}_3, \ldots, \mathtt{x}_{31}\}, \ \mathcal{X}_0 \stackrel{\mathrm{def}}{=} \{\mathtt{x}_0\} \cup \mathcal{X}$$

Регистр $\mathtt{x}_1$ в определении $\mathcal{X}$ опущен намеренно — как правило, его используют в качестве link register, т.е. для хранения адреса возврата [3]. Для упрощения последующей трансляции из описываемого императивного языка в язык ассемблера использовать этот регистр не будем.

Множество букв: $\mathcal{L} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \{\text{‘a’}, \text{‘b’}, \text{‘c’}, \ldots, \text{‘z’}\}$.

Опишем синтаксис в форме Бэкуса-Наура (БНФ). Множество терминальных символов:

$$\mathcal{T} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathcal{X}_0 \cup \mathcal{N}^{(12)} \cup \mathcal{N}^{(5)} \cup \mathcal{L} = \mathcal{X}_0 \cup \mathcal{N}^{(12)} \cup \mathcal{L}$$

Нетерминальные символы будем обозначать шрифтом без засечек. Для $\mathcal{X}$, $\mathcal{X}_0$, $\mathcal{N}^{(k)}$ ($k \in \{5, 12\}$) определим соответствующие нетерминальные символы:

$$\mathsf{X} ::= \ \mathtt{x}_2 \mid \mathtt{x}_3 \mid \mathtt{x}_4 \mid \ \ldots \ \mid \mathtt{x}_{31}, \ \mathsf{X_0} ::= \ \mathsf{X} \mid \mathtt{x}_0, \ \mathsf{N^{(k)}} ::= \ 0 \mid 1 \mid 2 \mid \ \ldots \ \mid 2^k - 1$$

Нетерминальные символы для букв, непустых строк и имен процедур:

$$\mathsf{L} ::= \ \text{‘a’} \mid \text{‘b’} \mid \text{‘c’} \mid \ \ldots \ \mid \text{‘z’}, \ \mathsf{S} ::= \ \mathsf{L} \mid \mathsf{S}\ \mathsf{L}, \ \mathsf{P} ::= \ \pi_{\mathsf{S}}$$

Нетерминальный символ для команд языка:

$$\begin{aligned} \mathsf{C} ::= \ & \textbf{add}\ \mathsf{X}, \mathsf{X_0}, \mathsf{X_0} \mid \textbf{sub}\ \mathsf{X}, \mathsf{X_0}, \mathsf{X_0} \mid \textbf{addi}\ \mathsf{X}, \mathsf{X_0}, \mathsf{N^{(12)}} \mid \textbf{slli}\ \mathsf{X}, \mathsf{X_0}, \mathsf{N^{(5)}} \mid \\ & \textbf{ld4}\ \mathsf{X}, \left[\mathsf{X_0}, \mathsf{N^{(12)}}\right] \mid \textbf{st4}\ \mathsf{X}, \left[\mathsf{X_0}, \mathsf{N^{(12)}}\right] \mid \mathsf{C}; \mathsf{C} \mid \textbf{if}\ \mathsf{X_0} < \mathsf{X_0}\ \textbf{then}\ \mathsf{C}\ \textbf{else}\ \mathsf{C}\ \textbf{fi} \mid \\ & \textbf{while}\ \mathsf{X_0} < \mathsf{X_0}\ \textbf{do}\ \mathsf{C}\ \textbf{done} \mid \textbf{call}\ \mathsf{P} \mid \textbf{skip} \end{aligned}$$

Обозначим за $\mathcal{C}$ множество команд, порожденных символом C. Если для $c \in \mathcal{C}$ присвоено имя π_s, где строка s порождена S, будем называть c процедурой с именем π_s и писать $\pi_s \equiv c$. Программа — конечное непустое множество процедур Π с главной процедурой $\mathbf{main}(\Pi) \in \Pi$.

3. Семантика и логика Хоара

Определим аксиоматическую семантику, ключевыми элементами которой являются выражения, формулы и тройки Хоара [4]. Аксиоматическая семантика, в отличие от операционной, позволяет делать суждения о программах в виде пред- и постусловий. Грамматику, используемую для определения выражений и формул, опишем через БНФ. Эта грамматика отличается от использованной для определения синтаксиса выше.

Определим множество ячеек памяти и соответствующий нетерминальный символ. Ячейки с адресами менее 2^{30} не включены намеренно, т.к. при трансляции в язык ассемблера они будут использоваться для хранения самой программы.

$$\mathcal{M} = \{\mathtt{m}_{2^{30}}, \mathtt{m}_{2^{30}+4}, \mathtt{m}_{2^{30}+8} \ldots, \mathtt{m}_{2^{32}-4}\}, \ \mathsf{M} ::= \mathtt{m}_{2^{30}} \mid \mathtt{m}_{2^{30}+4} \mid \mathtt{m}_{2^{30}+8} \mid \ldots \mid \mathtt{m}_{2^{32}-4}$$

Определим множества $\mathcal{N}^{(5)}, \mathcal{N}^{(12)}, \mathcal{X}, \mathcal{X}_0$ и нетерминальные символы $\mathsf{N^{(5)}}$, $\mathsf{N^{(12)}}$, X, $\mathsf{X_0}$ так же, как при определении синтаксиса. Множество 32-битных чисел $\mathcal{N}^{(32)}$ определим аналогично $\mathcal{N}^{(5)}$ и $\mathcal{N}^{(12)}$, соответствующий нетерминальный символ $\mathsf{N^{(32)}}$ — аналогично $\mathsf{N^{(5)}}$ и $\mathsf{N^{(12)}}$. Множество терминальных символов:

$$\widehat{\mathcal{T}} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathcal{X}_0 \cup \mathcal{M} \cup \mathcal{N}^{(32)} \cup \mathcal{N}^{(12)} \cup \mathcal{N}^{(5)} = \mathcal{X}_0 \cup \mathcal{M} \cup \mathcal{N}^{(32)}$$

Нетерминальный символ для выражений:

$$\mathsf{E} ::= \mathsf{X_0} \mid \mathsf{N}^{(32)} \mid \mathsf{E} \oplus \mathsf{E} \mid \mathsf{E} \ominus \mathsf{E} \mid \mathsf{E} \ll \mathsf{N}^{(5)} \mid \mathbf{sext}\left(\mathsf{N}^{(12)}\right) \mid \mathsf{M} \mid \mathtt{m}_{\mathsf{N}^{(32)} \oplus \mathbf{sext}\left(\mathsf{N}^{(12)}\right)}$$

Множество выражений, порождаемых E, обозначим $\mathcal{E}$. Определим функцию ξ вычисления выражения: $\mathcal{E} \xrightarrow{\xi} \mathcal{N}^{(32)}$. Регистры общего назначения из $\mathcal{X}$ и ячейки памяти из $\mathcal{M}$ являются аналогами переменных в классическом определении языка IMP и вычисляются в свои значения. Регистр $\mathtt{x}_0$ вычисляется в 0: $\xi(\mathtt{x}_0) \stackrel{\text{def}}{=} 0$. Целые 32-битные числа из $N^{(32)}$ вычисляются в себя же. Определим ξ для остальных выражений:

$$\forall e_1 \in \mathcal{E}\ \forall e_2 \in \mathcal{E} : \xi\left(e_1 \oplus e_2\right) \stackrel{\text{def}}{=} \xi\left(e_1\right) \oplus \xi\left(e_2\right),\ \xi\left(e_1 \ominus e_2\right) \stackrel{\text{def}}{=} \xi\left(e_1\right) \ominus \xi\left(e_2\right)$$

$$\forall e \in \mathcal{E}\ \forall n^{(5)} \in \mathcal{N}^{(5)} : \xi\left(e \ll n^{(5)}\right) \stackrel{\text{def}}{=} \xi\left(e\right) \ll n^{(5)}$$

$$\forall n^{(12)} \in \mathcal{N}^{(12)}, n^{(12)} = \sum_{i=0}^{11} \beta_i \cdot 2^i, \beta_i \in \{0,1\} : \xi\left(\mathbf{sext}\left(n^{(12)}\right)\right) \stackrel{\text{def}}{=} n^{(12)} + \beta_{11} \cdot \sum_{j=12}^{31} 2^j$$

Определим операции сложения, вычитания и побитового сдвига влево по модулю 2^{32}. Доказательство существования и единственности результата операций опустим.

$$\forall n_1 \in \mathcal{N}^{(32)}\ \forall n_2 \in \mathcal{N}^{(32)} : n_1 \oplus n_2 = n_3 \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : n_1 + n_2 = k \cdot 2^{32} + n_3,\ n_3 \in \mathcal{N}^{(32)}$$

$$\forall n_1 \in \mathcal{N}^{(32)}\ \forall n_2 \in \mathcal{N}^{(32)} : n_1 \ominus n_2 = n_3 \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : n_1 - n_2 = k \cdot 2^{32} + n_3,\ n_3 \in \mathcal{N}^{(32)}$$

$$\forall n_1 \in \mathcal{N}^{(32)}\ \forall n_2^{(5)} \in \mathcal{N}^{(5)} : n_1 \ll n_2^{(5)} = n_3 \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : n_1 \cdot 2^{n_2^{(5)}} = k \cdot 2^{32} + n_3,\ n_3 \in \mathcal{N}^{(32)}$$

Нетерминальный символ для формул:

$$\mathsf{F} ::= \top \mid \bot \mid \neg\mathsf{F} \mid \mathsf{F} \wedge \mathsf{F} \mid \mathsf{F} \vee \mathsf{F} \mid \mathsf{F} \supset \mathsf{F} \mid \mathsf{E} < \mathsf{E} \mid \mathsf{E} = \mathsf{E} \mid \mathbf{isaddr}\,(\mathsf{E})$$

Формулы могут быть вычислены с одним из двух результатов: $\top$ (формула верна) или $\bot$ (формула неверна). Правила вычисления для отрицания ($\neg$), конъюнкции ($\wedge$), дизъюнкции ($\vee$), импликации ($\supset$) будем считать известными из булевой алгебры. Вычисление результата сравнения ($<$) и проверки на равенство ($=$) двух выражений сводится к соответствующей операции над результатом вычисления выражений. Множество формул, порожденных символом F, обозначим как $\mathcal{F}$. $\forall e \in \mathcal{E}$ предикатный символ $\mathbf{isaddr}(e)$ вычисляется в $\top$, если $2^{30} \le \xi(e) \le 2^{32} - 4$ и $\exists k \in \mathbb{Z} : \xi(e) = 4k$, и в $\bot$ иначе.

Тройками Хоара будем называть сущности вида $\{f_1\}\ c\ \{f_2\}$, где $c \in \mathcal{C}, f_1 \in \mathcal{F}, f_2 \in \mathcal{F}$. Формула f_1 называется предусловием, f_2 — постусловием. Для такой тройки будем говорить: если верно предусловие f_1, то после исполнения команды c будет верно постусловие f_2 (если исполнение c завершилось[1]). Логика Хоара состоит из правил вывода, записываемых в виде горизонтальной черты, сверху которой — предпосылки, снизу — следствие, и аксиом, являющихся правилами без предпосылок. Тройка называется верной, если она может быть выведена из аксиом и других верных троек через правила вывода.

В определениях аксиом будем считать $\mathtt{x}_i \in \mathcal{X}$, $\mathtt{x}_j \in \mathcal{X}_0$, $\mathtt{x}_k \in \mathcal{X}_0$, $i \neq j$, $i \neq k$. Для аксиом с предусловием вида $\dots \wedge f$ обозначим его за f' во избежание дублирования.

$$\{f\}\ \mathbf{skip}\ \{f\}$$

$$\{\mathtt{x}_j = n_1 \wedge \mathtt{x}_k = n_2 \wedge f\}\ \mathbf{add}\ \mathtt{x}_i, \mathtt{x}_j, \mathtt{x}_k\ \{\mathtt{x}_i = n_1 \oplus n_2 \wedge f'\}$$

$$\{\mathtt{x}_j = n_1 \wedge \mathtt{x}_k = n_2 \wedge f\}\ \mathbf{sub}\ \mathtt{x}_i, \mathtt{x}_j, \mathtt{x}_k\ \{\mathtt{x}_i = n_1 \ominus n_2 \wedge f'\}$$

$$\{\mathtt{x}_j = n_1 \wedge f\}\ \mathbf{addi}\ \mathtt{x}_i, \mathtt{x}_j, n_2^{(12)}\ \{\mathtt{x}_i = n_1 \oplus \mathbf{sext}\left(n_2^{(12)}\right) \wedge f'\}$$

$$\{\mathtt{x}_j = n_1 \wedge f\}\ \mathbf{slli}\ \mathtt{x}_i, \mathtt{x}_j, n_2^{(5)}\ \{\mathtt{x}_i = n_1 \ll n_2^{(5)} \wedge f'\}$$

[1] Понятие завершимости определяется через операционную семантику и здесь опущено.

$$\{\mathtt{x}_j = n_1 \wedge \mathbf{isaddr}\left(n_1 \oplus \mathbf{sext}\left(n_2^{(12)}\right)\right) \wedge \mathtt{m}_{n_1 \oplus \mathbf{sext}\left(n_2^{(12)}\right)} = n_3 \wedge f\}$$
$$\mathbf{ld4}\ \mathtt{x}_i, \left[\mathtt{x}_j, n_2^{(12)}\right]\ \{\mathtt{x}_i = n_3 \wedge f'\}$$
$$\{\mathtt{x}_i = n_1 \wedge \mathtt{x}_j = n_2 \wedge \mathbf{isaddr}\left(n_1 \oplus \mathbf{sext}\left(n_3^{(12)}\right)\right) \wedge f\}$$
$$\mathbf{st4}\ \mathtt{x}_i, \left[\mathtt{x}_j, n_3^{(12)}\right]\ \{\mathtt{m}_{n_1 \oplus \mathbf{sext}\left(n_3^{(12)}\right)} = n_1 \wedge f'\}$$

Правила вывода:

$$\frac{\{f_1\}\ c\ \{f_2\}}{\{f_1\}\ \mathbf{call}\ \pi_s\ \{f_2\}},\ \text{где } \pi_s \equiv c,\ \pi_s \in \Pi \qquad \frac{f_1' \subset f_1,\ \{f_1\}\ c\ \{f_2\},\ f_2 \subset f_2'}{\{f_1'\}\ c\ \{f_2'\}}$$
$$\frac{\{f_1\}\ c_1\ \{f_2\},\ \{f_2\}\ c_2\ \{f_3\}}{\{f_1\}\ c_1; c_2\ \{f_3\}} \qquad \frac{\{\mathtt{x}_i < \mathtt{x}_j \wedge f_1\}\ c_1\ \{f_2\},\ \{\neg(\mathtt{x}_i < \mathtt{x}_j) \wedge f_1\}\ c_2\ \{f_2\}}{\{f_1\}\ \mathbf{if}\ \mathtt{x}_i < \mathtt{x}_j\ \mathbf{then}\ c_1\ \mathbf{else}\ c_2\ \mathbf{fi}\ \{f_2\}}$$
$$\frac{\{\mathtt{x}_i < \mathtt{x}_j \wedge f_1\}\ c\ \{f_2\}}{\{f_1\}\ \mathbf{while}\ \mathtt{x}_i < \mathtt{x}_j\ \mathbf{do}\ c\ \mathbf{done}\ \{\neg\left(\mathtt{x}_i < \mathtt{x}_j\right) f_2\}}$$

Обращаем внимание, что существуют синтаксически корректные команды, семантика которых не определена. Если дерево вывода для некоторой процедуры, входящей в программу, содержит команду, семантика которой не определена, программа называется некорректной. Для корректных программ поведение описывается верной тройкой Хоара $\{f_1\}\ \mathbf{main}\,(\Pi)\ \{f_2\}$.

Отметим, что в заданной логике Хоара можно доказать лишь частичную корректность программ, а именно, нет способа доказать завершимость программы. Для доказательства полной корректности необходимо определить соответствующего правило вывода для циклов.

4. Пример

Приведем пример программы $\Pi = \{\pi_{\text{main}}, \pi_{\text{iter}}\}$, $\mathbf{main}\,(\Pi) = \pi_{\text{main}}$, вычисляющей $n_3 =$ НОД (n_1, n_2), $n_i \in \mathcal{N}^{(32)}, i \in \{1, 2, 3\}, n_1 \geq n_2$; n_1 и n_2 хранятся перед началом работы программы в ячейках памяти с адресами 2^{30} и $2^{30} + 4$ соответственно. После работы, программа сохраняет n_3 в ячейку памяти с адресом $2^{30} + 8$.

$$\pi_{\text{main}} \equiv \mathbf{addi}\ \mathtt{x}_2, \mathtt{x}_0, 2^7;\ \mathbf{slli}\ \mathtt{x}_3, \mathtt{x}_2, 24;\ \mathbf{ld4}\ \mathtt{x}_4, [\mathtt{x}_3, 0];\ \mathbf{ld4}\ \mathtt{x}_5, [\mathtt{x}_3, 4];$$
$$\mathbf{while}\ \mathtt{x}_0 < \mathtt{x}_5\ \mathbf{do\ call}\ \pi_{\text{iter}}\ \mathbf{done};\ \mathbf{st4}\ \mathtt{x}_4, [\mathtt{x}_4, 8]$$
$$\pi_{\text{iter}} \equiv \mathbf{sub}\ \mathtt{x}_6, \mathtt{x}_4, \mathtt{x}_5;\ \mathbf{if}\ \mathtt{x}_6 < \mathtt{x}_5\ \mathbf{then\ addi}\ \mathtt{x}_4, \mathtt{x}_5, 0;\ \mathbf{addi}\ \mathtt{x}_5, \mathtt{x}_6, 0;\ \mathbf{else\ addi}\ \mathtt{x}_4, \mathtt{x}_6, 0\ \mathbf{fi}$$

Выпишем предусловия и постусловия для троек Хоара $\{f_1\}\ \pi_{\text{main}}\ \{f_2\}$ и $\{f_3\}\ \pi_{\text{iter}}\ \{f_4\}$ (вывод троек опущен). Понятие выражений расширим, разрешив классическую целочисленную арифметику, а понятие формул — разрешив кванторы $\forall$ и $\exists$ и связанные с ними переменные, принимающие значения из $\mathcal{N}^{(32)}$. Если результат вычисления целочисленной операции не входит в $\mathcal{N}^{(32)}$, функцию ξ для соответствующего выражения не определяем: например, $\xi\left(e_1 \cdot e_2\right)$ не определено, если $\xi\left(e_1\right) \cdot \xi\left(e_2\right) \notin \mathcal{N}^{(32)}$.

$$f_1 \equiv \mathtt{m}_{2^{30}} = n_1 \wedge \mathtt{m}_{2^{30}+4} = n_2 \wedge \neg(n_1 < n_2) \wedge n_3 = \text{НОД}\left(n_1, n_2\right) \qquad f_2 \equiv f_1 \wedge \mathtt{m}_{2^{30}+8} = n_3$$
$$f_3 \equiv f_1 \wedge \mathtt{x}_3 = 2^{31} \wedge \neg\left(\mathtt{x}_4 < \mathtt{x}_5\right) \wedge \neg(\mathtt{x}_4 = 0) \wedge \exists k : k \cdot n_3 = \mathtt{x}_4 \wedge \exists l : l \cdot n_3 = \mathtt{x}_5 \qquad f_4 \equiv f_3$$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Winskel G. The Formal Semantics of Programming Languages — Massachusetts: The MIT Press, 1993. 361 с.

2. RISC-V Foundation, The RISC-V Instruction Set Manual Volume I Unprivileged Architecture Version 20240411 [Электронный ресурс], Режим доступа: https://github.com/riscv/riscv-isa-manual/releases/download/20240411/unpriv-isa-asciidoc.pdf

3. RISC-V Foundation, RISC-V ABIs Specification Version 1.0: Ratified [Электронный ресурс], Режим доступа: https://github.com/riscv-non-isa/riscv-elf-psabi-doc/releases/download/v1.0/riscv-abi.pdf

4. Hoare C. A. R. An axiomatic basis for computer programming // Communications of the ACM. 1969. Volume 12, Issue 10. с. 576–580.

УДК 511.32

О допустимом отклонении от равновероятного распределения знаков ключевой информации при применении преобразования комбинированной замены

А. Б. Лось (Россия, г. Москва)
Московский институт математики и электроники им. А. Н. Тихонова НИУ ВШЭ
e-mail: alos@hse.ru
А. Ю. Нестеренко (Россия, г. Москва)
Московский институт математики и электроники им. А. Н. Тихонова НИУ ВШЭ
e-mail: anesterenko@hse.ru

On the permissible deviation from the equal probability distribution of key information under the combined substitution

A. B. Los (Russia, Moscow)
Tikhonov Moscow Institute of Electronics and Mathematics of the HSE University
e-mail: alos@hse.ru
A. Yu. Nesterenko (Russia, Moscow)
Tikhonov Moscow Institute of Electronics and Mathematics of the HSE University
e-mail: anesterenko@hse.ru

В работе продолжены исследования, начатые в статье [1]. Рассматривается влияние возможного отклонения знаков ключевой информации от равновероятного распределения на качество преобразования входной информации с точки зрения обеспечения конфиденциальности передаваемого сообщения. Как отмечено в [1], обычно предполагается, что распределение знаков ключевой информации должно быть равновероятным, однако на практике, всегда имеет место определенное отклонение от равновероятного распределения.

В настоящей работе рассматривается преобразование комбинированной замены «гамма-простая замена-гамма», аналогом которого, в англоязычной литературе, считается режим работы блочных шифров XTS [3]. Для определения допустимого отклонения при использовании преобразования комбинированной замены авторами применяется теоретико-информационный подход. В рамках определенной теоретико-вероятностной модели делается вывод о невозможности восстановления исходного сообщения методами, использующими неравновероятность ключевой информации. Таким образом, предлагаемый подход позволяет сделать вывод о криптографической стойкости исследуемого преобразования комбинированной замены.

1. Постановка задачи

Рассмотрим алфавит $A_n = \{0, 1, \ldots, n-1\}$, натуральное число $N \in \mathbb{N}$ и будем считать что задан источник, вырабатывающий открытые сообщения $\overline{a}^N = (a_1, \ldots, a_N)$, $a_i \in A_n$ при $i = 1, \ldots, N$. Будем считать, что знаки шифрованного сообщения $\overline{b}^N = (b_1, \ldots, b_N)$, $b_i \in A_n$, $i = 1, \ldots, N$, вырабатываются из знаков открытого сообщения в соответствии с равенством

$$b_i = S(a_i \oplus \gamma_i^1) \oplus \gamma_i^2, \tag{1}$$

где S – подстановка степени n, $\oplus$ – операция сложения по модулю n, и $\overline{\gamma}^1 = (\gamma_1^1, \ldots \gamma_N^1)$, $\overline{\gamma}^2 = \{\gamma_1^2, \ldots, \gamma_N^2\}$ – знаки ключевой информации, $\gamma_i^1, \gamma_i^2 \in A_n$, $i = 1, \ldots, N$.

В ряде ситуаций возможно равенство $\overline{\gamma}^1 = \overline{\gamma}^2$. В этом случае, очевидно, количество ключевой информации требуется в 2 раза меньше, но и возможностей восстановления сообщения $\overline{a}^N$, в частности, при различных отклонениях от штатного режима работы, также значительно больше.

Для дальнейших расчетов введем следующую теоретико-вероятностную модель.

Обозначим символом Λ^N – множество всех возможных значений ключевой информации $\overline{\gamma}^1, \overline{\gamma}^2 \in \Lambda^N$, символом A^N – множество всех возможных открытых сообщений, символом E^N – множество всех возможных шифрованных сообщений, выработанных при помощи преобразования (1) для всех возможных значениях $\overline{\gamma}^1$, $\overline{\gamma}^2 \in \Lambda^N$.

Зададим на множестве входных сообщений A^N и множестве ключей Λ^N некоторые, не зависящие друг от друга, вероятностные распределения:

$$\begin{gathered} P(A^N) = \{p(\overline{a}^N),\, \overline{a}^N \in A^N\}, \quad \sum_{\overline{a}^N} p(\overline{a}^N) = 1, \\ \Theta(\Lambda^N) = \{\theta(\overline{\gamma}),\, \overline{\gamma} \in \Lambda^N\}, \sum_{\overline{\gamma}} \theta(\overline{\gamma}) = 1. \end{gathered} \tag{2}$$

При этом, очевидно, что $P(A^N)$ и $\Theta(\Lambda^N)$ индуцируют на множестве выходных сообщений некоторое вероятностное распределение:

$$Q(B^N) = \{q(\overline{b}^N),\, \overline{b}^N \in E^N\}, \quad \sum_{\overline{b}^N} q(\overline{b}^N) = 1. \tag{3}$$

Обозначим через $H(X)$ – энтропию некоторого ансамбля X, через $H(X/Y)$ – условную энтропию ансамбля X при заданном ансамбле Y, а через $I(X,Y) = H(X) - H(X/Y)$ – взаимную информацию ансамблей X и Y, см. [4, 5]. Далее в работе нас будет интересовать значение взаимной информации ансамбля входных A^N и ансамбля выходных E^N сообщений

$$I(A^N, E^N) = H(A^N) - H(A^N/E^N).$$

2. Основная теорема

Обозначим $\Gamma = (\Gamma^{(1)}, \Gamma^{(2)})$, где $\Gamma^{(1)}, \Gamma^{(2)}$ – N-мерные независимые случайные величины принимающие значения $\overline{\gamma}^1, \overline{\gamma}^2$ на множестве Λ^N с указанным выше распределением $\Theta(\Lambda^N)$.

Доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть распределение $\Theta(\Lambda^N)$ такого, что*

$$P\{\Gamma_i^{(k)} = \gamma_i^k | \Gamma_j^{(k)} = \gamma_j^k\} = \frac{1}{n}\left(1 + \Delta_{\gamma_i^k}\right), \quad j = 1, \ldots, N, \quad k = 1, 2,$$

где $\Delta_{\gamma_i^k} \leqslant \delta_i$, $0 \leqslant \delta_i < 1$. Тогда

$$H(A^N/E^N) = H(A^N) - \sum_{i=1}^{N} \varepsilon_i, \quad \textit{где} \quad 0 \leqslant \varepsilon_i \leqslant \frac{1}{2\ln 2}\left(\delta_i^4 + \frac{\delta_i^6}{3(1-\delta_i^2)^3}\right).$$

Доказательство теоремы аналогично доказательству теоремы из 2 работы [1].

Результат доказанной теоремы позволяет при известных величинах δ_i оценить условную энтропию $H(A^N/E^N)$ ансамбля входных сообщений A^N при заданном ансамбле криптограмм E^N и её близость к энтропии ансамбля входных сообщений $H(A^N)$. В соответствии с [4], при достаточно больших значениях величины N, можно полагать $H(A^N) = NH_0$, где H_0 – средняя энтропия на знак открытого текста. Обозначим $\delta = \max \delta_i$, тогда из утверждения доказанной теоремы получаем неравенство

$$H(A^N/E^N) \geqslant NH_0 - \varepsilon N = N(H_0 - \varepsilon), \quad \text{где} \quad \varepsilon = \frac{1}{2\ln 2}\left(\delta^4 + \frac{\delta^6}{3(1-\delta^2)^3}\right). \tag{4}$$

Теперь можно записать неравенство, характеризующее близость величин $H(A^N)$ и $H(A^N/E^N)$

$$\frac{H(A^N)}{H(A^N/E^N)} \leqslant \frac{H_0}{H_0 - \varepsilon} = 1 + \frac{\varepsilon}{H_0 - \varepsilon}. \tag{5}$$

и

$$I(A^N, E^N) = H(A^N) - H(A^N/E^N) \leqslant \varepsilon N. \tag{6}$$

Обозначим $\Delta = \frac{\varepsilon}{H_0 - \varepsilon}$. В следующей таблице приведены значения Δ для $H_0 = 1$, $H_0 = 0.5$ и некоторых значений δ.

H_0 / δ	10^{-3}	$3 \cdot 10^{-3}$	$4 \cdot 10^{-3}$	$5 \cdot 10^{-3}$
1	$7.2 \cdot 10^{-13}$	$5.8 \cdot 10^{-11}$	$1.8 \cdot 10^{-10}$	$4.5 \cdot 10^{-10}$
0.5	$1.4 \cdot 10^{-12}$	$1.2 \cdot 10^{-10}$	$3.7 \cdot 10^{-10}$	$9.1 \cdot 10^{-10}$

Следуя [1], заметим, что в соответствии с подходом, предложенным К. Шенноном, величину $H(A^N/E^N)$ можно рассматривать как характеристику числа возможных исходных сообщений длины N, соответствующих известному выходному сообщению. В частности, можно полагать оценку числа таких сообщений равной $2^{H(A^N/E^N)}$.

Тогда, если ввести некоторый параметр β, характеризующий допустимую многозначность восстановления исходного сообщения при известном выходном сообщении, например, учитывающий различное написание окончания слов, то число допустимых вариантов входного сообщения оценивается величиной $2^{\beta N}$. В этом случае условие невозможности восстановления передаваемого сообщения принимает вид:

$$2^{H(A^N/E^N)} \geqslant 2^{\beta N}$$

или, с учетом утверждения доказанной ранее теоремы

$$H_0 - \varepsilon \geqslant \beta.$$

Тогда, применяя оценку на величину ε, можно записать

$$\frac{1}{2\ln 2}\left(\delta^4 + \frac{\delta^6}{3(1-\delta^2)^3}\right) \leqslant H_0 - \beta,$$

или, при $\delta \leqslant 0.46$,

$$\frac{1}{\ln 2}\delta^4 \leqslant H_0 - \beta.$$

Последнее неравенство дает оценку на величину δ неравновероятности знаков преобразованного сообщения, при котором невозможно восстановление исходного сообщения:

$$\delta \leqslant \min\left\{0.46, (\ln 2(H_0 - \beta))^{\frac{1}{4}}\right\}$$

3. Заключение

В работе рассмотрены вопросы применения теоретико-информационного подхода к исследованию допустимого отклонения знаков ключевой информации при применении преобразования комбинированной замены.

В рамках конкретной теоретико-вероятностной модели для преобразования комбинированной замены «гамма -простая замена - гамма» получены оценки взаимной информации ансамблей входных и выходных сообщений. На основании данных оценок получены выражения для определения границ возможного отклонения от равновероятного распределения вероятности знаков ключевой информации, при которых обеспечивается невозможность восстановления входного сообщения при известном выходном сообщении. Для наиболее интересных с практической точки зрения случаев проведены численные расчеты исследуемых параметров.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. А.Б. Лось, А.Ю. Нестеренко, О.А. Рогачева. О влиянии неровновероятности выходной последовательности на качество криптографических преобразований // Алгебра, теория чисел, дискретная математика и многомасштабное моделирование: современные проблемы, приложения и проблемы истории. Тула. 2023. с. 151–157.

2. Криптографические методы защиты информации: Учебник / А. Б. Лось, А. Ю. Нестеренко, М. И. Рожков. 2-е изд. Москва: Изд-во Юрайт. 2016. 473 с.

3. NIST SP 800-38E. Recommendation for Block Cipher Modes of Operation: the XTS-AES Mode for Confidentiality on Storage Devices. https://nvlpubs.nist.gov/nistpubs/Legacy/SP/nistspecialpublication800-38e.pdf

4. К. Шеннон. Работы по теории информации и кибернетике. - М.: ИЛ. 1963. 829 с.

5. В.Д. Колесник. Курс теории информации. - М.:Наука, 1982. 416 с.

УДК 514.763

Предельно разреженные матрицы в алгоритмах шифрования

Ф. М. Малышев (Россия, г. Москва)
Математический институт им. В. А. Стеклова РАН
e-mail: malyshevfm@mi-ras.ru

Extremely sparse matrices in encryption algorithms

F. M. Malyshev (Russia, Moscow)
Steklov Mathematical Institute of RAS
e-mail: malyshevfm@mi-ras.ru

Основная идея построения современных блочных шифраторов восходит к квадрату Полибия (III век до н.э.). Шеннон называл его дробным шифром [1]. Квадрат Полибия оказался идеальной конструкцией для воплощения Шенноном его идей по обеспечению в шифрах рассеивания и перемешивания. Перемешивание нацелено на обеспечение существенной зависимости каждой компоненты шифрблока от всех компонент соответствующего открытого блока, а за счёт рассеивания исключается возможность применения в вероятностных методах криптографического анализа статистик от небольшого числа компонент открытых и соответствующих шифрованных блоков.

Требования Шеннона по перемешиванию и рассеиванию обеспечиваются повторными произведениями двух простых не коммутирующих операций, при этом для одной операции можно ограничиться локальными перемешиваниями, а в качестве второй операции первое время использовалась даже перестановка бит шифруемого блока, отвечающая умножению на подстановочную матрицу $P \in GL(v,2)$, где v – длина одного блока в битах.

С появлением в начале 90-х годов прошлого века разностного и линейного методов криптографического анализа (см. [2]) использование подстановочных матриц P стало нежелательным, предпочтительней использование матриц $L \in GL(v,2)$ общего вида. Наличие у матрицы L или у L^{-1} строк либо столбцов веса 1 (с одной единицей) наследует выявленные криптографические слабости подстановочных матриц P. В то же время представляют интерес разреженные матрицы L, как наиболее просто реализуемые, при этом матрицы L^{-1} (с учётом расшифрования) тоже должны быть разреженными. В этой связи возникают следующие понятия (см. [3]).

Определение 1. *Матрицу $L \in GL(v,2)$ (рассматриваемую с точностью до независимых перестановок строк и столбцов) называем k-матрицей, если у неё и у матрицы L^{-1} в каждой строке и в каждом столбце k единиц и $v-k$ нулей. Соответствующее семейство из v подмножеств мощности k в множестве $X=\{1,\dots,v\}$ с такой матрицей инциденций называем k-конфигурацией.*

Здесь k нечётное, иначе матрица L была бы вырожденной. Подстановочные матрицы являются 1-матрицами. При чётном v инвертирование элементов k-матрицы предоставляет $(v-k)$-матрицу. Операция сложения подмножеств $A, B \subseteq X$ по правилу $A+B = (A\cup B)\setminus(A\cap B)$ позволяет сформулировать определение эквивалентного понятию k-матрицы понятия k-конфигурации.

Определение 2. *Совокупность $\mathcal{X} \subset 2^X$ из v подмножеств мощности k в множестве X, $|X|=v$, называем k-конфигурацией, если:*

i) каждый элемент $x \in X$ принадлежит ровно k подмножествам из $\mathcal{X}$,

ii) каждый элемент $x \in X$ является суммой (как подмножество $\{x\}$) ровно k подмножеств из $\mathcal{X}$, причём каждое подмножество из $\mathcal{X}$ участвует в качестве слагаемого ровно в k таких суммах.

Две k-конфигурации $\mathcal{X}$ на множестве X и $\mathcal{Y}$ на множестве Y одной мощности с X считаем комбинаторно эквивалентными, если для некоторой биекции $\alpha\colon X \to Y$ имеем $\mathcal{Y} = \{\alpha(A) \mid A \in \mathcal{X}\}$. Под k-конфигурацией понимаем весь класс комбинаторно эквивалентных k-конфигураций на множествах заданной мощности. Согласно определению 2 кроме собственно множества X имеем множество $\mathcal{X}$, состоящее из k-подмножеств $X_x \subset X$, $x \in X$. Благодаря равномощности $\mathcal{X}$ и X, используемая параметризация задействованных k-подмножеств из X допустима. Далее, для каждого $x \in X$ возникает k элементов множества $\mathcal{X}$, результатом суммирования которых будет x. Это k-подмножество в $\mathcal{X}$ обозначим $\mathcal{X}_x$. Вся их совокупность образует третье множество $\mathfrak{X} = \{\mathcal{X}_x | \, x \in X\}$, являющееся k-конфигурацией на множестве $\mathcal{X}$. Данная параметризация элементов множества $\mathfrak{X}$ (в отличие от параметризации X_x, $x \in X$, для элементов множества $\mathcal{X}$) однозначно задаётся п. ii) определения 2. Для элементов множества $\mathcal{X}$ можно использовать ещё параметризации $X_{\varphi(x)}$, $x \in X$, задаваемые биекциями $\varphi \colon X \to X$.

Результаты многих авторов о строении неразложимых k-конфигураций (когда соответствующие гиперграфы связны) имеются в [3], где, в частности, доказываются

Теорема 1. *При любых чётном v и нечётном k, $0 < k < v$, существует неразложимая k-конфигурация. Если при нечётных v и k существует k-конфигурация, то $v \geqslant k + (1 + \sqrt{4k-3})/2$. Для $k \leqslant 17$ и всех $v \geqslant k + (1 + \sqrt{4k-3})/2$ существует k-конфигурация за исключением при $k = 3$ значения $v = 7$, когда её не существует.*

Теорема 2. *При каждом $v = 2w$, $w \geqslant 2$, неразложимая 3-конфигурация состоит из подмножеств в группе вычетов $\mathbb{Z}_v$ вида $\{2i, 2i+1, 2i+2\}$, $\{2i, 2i+1, 2i+3\}$, $i = 0, 1, \ldots, w-1$. Для нечётных $v \geqslant 7$ не существует неразложимых 3-матриц. Для $v = 5$ 3-конфигурация отвечает триангуляции листа Мёбиуса.*

Класс 5-конфигураций оказался существенно богаче [4]. С помощью компьютерных вычислений Комягин М.М. показал, что с точностью до комбинаторной эквивалентности среди неразложимых 5-конфигураций для $v = 9, 10, 11, 12$ имеется соответственно ровно 1, 34, 386, 71355 5-конфигураций. Неразложимые 5-конфигурации для $v = 6$ и $v = 8$ состоят из дополнений к подмножествам соответственно 1- и 3-конфигураций. Для $v = 8$ 3-конфигурация может быть как неразложимой, так и разложимой, разбиваемой на две 3-конфигурации с $v = 4$. Для $v = 7$ 5-конфигураций не существует по теореме 1. К настоящему времени усилиями Тришина А.Е. [5] и Фролова А.А. [6] получены все 5-конфигурации в виде 5-подмножеств абелевых групп, получающихся из одного параллельными сдвигами.

В известных примерах 5-конфигураций задействован весь спектр средств, привлекавшихся ранее для построения k-конфигураций [3], включая правильные многогранники, регулярные и симметрические графы, квадратичные вычеты по простому модулю, конечные группы, (v, k, λ)-конфигурации, включая конфигурации, которые отвечают совершенным разностным множествам, конечным проективным плоскостям и матрицам Адамара. В построении k-конфигураций в разное время принимали участие Брославский М.В., Зубков А.М., Комягин М.М., Красулина Е.Г., Малышев Ф.М., Сачков В.Н., Тараканов В.Е., Тришин А.Е., Фролов А.А.

Для $k = 5$ удалось построить три бесконечные серии 5-конфигураций. При определении этих конфигураций под 2-графом Γ будем понимать связный ориентированный граф на конечном или счётном множестве вершин P без петель и параллельных дуг с двумя входящими и двумя выходящими дугами для каждой вершины. В конечном случае полагаем $|P| = p$. Граф в виде ориентированного цикла и граф на множестве вершин $\mathbb{Z}$ с дугами $i \to i+1$, $i \in \mathbb{Z}$, естественно считать 1-графом.

Серия $\mathcal{A}$. Пусть Γ – 2-граф с множеством вершин P, $|P| \geqslant 3$. Концы дуг, выходящих из вершины $v \in P$ 2-графа Γ, обозначаем $v_{\hat{0}}$ и $v_{\hat{1}}$. Полагаем $X = P \times \{0, 1\}$, $X_x = \{(v, \varepsilon), (v_{\hat{0}}, 0), (v_{\hat{0}}, 1), (v_{\hat{1}}, 0), (v_{\hat{1}}, 1)\}$, $x = (v, \varepsilon) \in P \times \{0, 1\}$, $\mathcal{X} = \{X_x | \, x \in X\}$. Пусть $u_0 \to v$, $u_1 \to v$ – дуги, входящие в вершину $v \in P$. Конкретное $x = (v, \varepsilon) \in X$ принадлежит пяти 5-подмножествам X_x, $X_{(u_0,0)}$, $X_{(u_0,1)}$, $X_{(u_1,0)}$, $X_{(u_1,1)}$ и $\{x\} = \sum_{y \in X_x} X_y$. В последних суммах конкретное слагаемое X_y, $y = (v, \varepsilon) \in P \times \{0, 1\}$, участвует пять раз для представлений $\{x\}$, $x \in \{y, (u_0, 0), (u_0, 1), (u_1, 0), (u_1, 1)\}$. Обозначаем эту 5-конфигурацию символом $\mathcal{A}(\Gamma)$.

Серия $\mathcal{B}$. Пусть Γ – 2-граф с множеством вершин P, $|P| \geqslant 3$, у которого дуги помечены либо 0 либо 1 так, что как входящие, так и выходящие дуги каждой вершины $v \in P$ помечены различно. Через $v_{\hat{\varepsilon}}$ обозначаем конец дуги, выходящей из вершины $v \in P$, помеченной как $\varepsilon \in \{0,1\}$. Предполагается, что $v_{\hat{0}\hat{1}} = v_{\hat{1}\hat{0}}$ для всех $v \in P$. Тогда 2-граф Γ называем *помеченным 2-графом.* Полагаем $X = P \times \{0,1\} \times \{0,1\}$, $X_x = \{(v,\varepsilon,\nu),(v_{\hat{0}},0,\nu),(v_{\hat{0}},1,\nu),(v_{\hat{1}},\varepsilon,0),(v_{\hat{1}},\varepsilon,1)\}$, $x = (v,\varepsilon,\nu) \in P \times \{0,1\} \times \{0,1\}$, $\mathcal{X} = \{X_x | x \in X\}$. Пусть $u_0 \xrightarrow{0} v$, $u_1 \xrightarrow{1} v$ – дуги, входящие в вершину $v \in P$ с соответствующими пометками. Конкретное $x = (v,\varepsilon,\nu) \in X$ принадлежит пяти 5-подмножествам X_x, $X_{(u_0,0,\nu)}$, $X_{(u_0,1,\nu)}$, $X_{(u_1,\varepsilon,0)}$, $X_{(u_1,\varepsilon,1)}$ и $\{x\} = \sum_{y \in X_x} X_y$. В последних суммах конкретное слагаемое X_y, $y = (v,\varepsilon,\nu) \in P \times \{0,1\} \times \{0,1\}$, участвует пять раз для представлений $\{x\}$, $x \in \{y,(u_0,0,\nu),(u_0,1,\nu),(u_1,\varepsilon,0),(u_1,\varepsilon,1)\}$. Обозначаем эту 5-конфигурацию символом $\mathcal{B}(\Gamma)$.

К настоящему времени имеется исчерпывающая классификаци сильно связных помеченных 2-графов как на конечных, так и на бесконечных множествах вершин P.

Серия $\mathcal{C}$. Пусть Γ – 1-граф с множеством вершин P, $|P| \geqslant 3$. Конец дуги, выходящей из вершины v 1-графа Γ обозначаем $v_{\hat{0}}$. Полагаем $X = P \times \{0,1,2\}$, $X_x = \{(v,0),(v,1),(v,2),(v_{\hat{0}},\nu),\ \nu \in \{0,1,2\} \diagdown \{\varepsilon\}\}$, $x = (v,\varepsilon) \in P \times \{0,1,2\}$, $\mathcal{X} = \{X_x | x \in X\}$. Пусть $u \to v$ – дуга, входящая в вершину $v \in P$. Конкретное $x = (v,\varepsilon) \in X$ принадлежит пяти 5-подмножествам $X_{(v,\nu)}$, $\nu \in \{0,1,2\}$, $X_{(u,\nu)}$, $\nu \in \{0,1,2\} \diagdown \{\varepsilon\}$, и $\{x\} = \sum_{y \in X:\, x \in X_y} X_y$. В последних суммах конкретное слагаемое X_y, $y = (v,\varepsilon) \in P \times \{0,1,2\}$, участвует пять раз для представлений $\{x\}$, $x \in \{(v,\nu) | \nu \in \{0,1,2\}\} \cup \{(v_{\hat{0}},\nu) | \nu \in \{0,1,2\} \diagdown \{\varepsilon\}\}$. В зависимости от ситуации обозначаем эту 5-конфигурацию либо символом $\mathcal{C}(\Gamma)$, либо символом $\mathcal{C}(p)$ при конечной мощности $p = |P|$ и символом $\mathcal{C}(\mathbb{Z})$ при $P = \mathbb{Z}$.

Понимая под k-конфигурацией весь их класс комбинаторно эквивалентных, под её матрицей инциденций (с учётом ещё произвольного выбора параметризации множества $\mathcal{X}$, задаваемой какой-либо биекцией $\varphi\colon X \to X$) следует понимать семейство матриц $\mathcal{L} = \{ALB | A, B \in \mathcal{S}_X\}$, где $\mathcal{S}_X$ – множество всех подстановочных матриц, а в качестве L может выступать любая матрица из этого семейства. Считаем k-конфигурацию *симметричной*, если существует $\Lambda \in \mathcal{L}$ такая, что $\Lambda^T = \Lambda$. Аналогично, если существует $\Lambda \in \mathcal{L}$ такая, что $\Lambda^{-1} = \Lambda$, то k-конфигурацию считаем *инволютивной.* Обратим внимание, что из симметричности и инволютивности k-конфигурации, вообще говоря, не следует её *ортогональность*, определяемая равенством $\Lambda^* = \Lambda$ для некоторого $\Lambda \in \mathcal{L}$, чего достаточно для выполнения этого равенства для всех $\Lambda \in \mathcal{L}$. Полагая $\mathcal{L}^T = \{\Lambda^T | \Lambda \in \mathcal{L}\}$, $\mathcal{L}^{-1} = \{\Lambda^{-1} | \Lambda \in \mathcal{L}\}$, $\mathcal{L}^* = \{\Lambda^* | \Lambda \in \mathcal{L}\}$, k-конфигурацию естественно считать соответственно *слабо симметричной*, *слабо инволютивной*, *слабо ортогональной*, если соответственно $\mathcal{L}^T = \mathcal{L}$, $\mathcal{L}^{-1} = \mathcal{L}$, $\mathcal{L}^* = \mathcal{L}$. Для проверки этих равенств достаточно убедиться, что пересечение их левых и правых частей непусто.

Теорема 3. *Все 5-конфигурации серий $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ являются инволютивными. Все 5-конфигурации серии $\mathcal{C}(\Gamma)$ являются ортогональными.*

Теорема 4. *Любые две 5-конфигурации, принадлежащие различным сериям $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, не изоморфны друг другу.*

Теорема 5. *Две 5-конфигурации серии $\mathcal{A}$ изоморфны тогда и только тогда, когда изоморфны соответствующие им 2-графы.*

Ориентируясь на максимально разреженные матрицы $L, L^{-1} \in GL(v,2)$, возникает понятие $\{2,3\}$-конфигурации.

Определение 3. *Совокупность $\mathcal{X} \subset 2^X$ из v подмножеств мощности либо 2 либо 3 в множестве X, $|X| = v$, называем $\{2,3\}$-конфигурацией, если:*

i) каждый элемент $x \in X$ принадлежит либо 2 либо 3 подмножествам из $\mathcal{X}$, *ii) каждый элемент $x \in X$ является суммой (как подмножество $\{x\}$) либо 2 либо 3 подмножеств из $\mathcal{X}$, причём каждое подмножество из $\mathcal{X}$ участвует в качестве слагаемого либо в 2 либо в 3 таких суммах.*

Биекцию $\varphi\colon X \to X$ называем *автоморфизмом* конфигурации $\mathcal{X}$, если $\varphi(A) \in \mathcal{X}$ для всех $A \in \mathcal{X}$. В случае, когда группа всех автоморфизмов $\operatorname{Aut}\mathcal{X}$ транзитивна на каждом подмножестве X, состоящем из всех $x \in X$, инцидентных заданному числу подмножеств из $\mathcal{X}$, конфигурацию $\mathcal{X}$ считаем *однородной*.

Теорема 6. *Любая однородная неразложимая $\{2,3\}$-конфигурация либо является одной из 3-конфигураций из теоремы 2, либо имеет матрицу инциденций:* $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ *размера 3×3 или размера $2w \times 2w$, $w \geqslant 2$,*

$$\begin{pmatrix} J & K & O & \cdots & O & O & O \\ O & J & K & \cdots & O & O & O \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ O & O & O & \cdots & O & J & K \\ K & O & O & \cdots & O & O & J \end{pmatrix}, \text{ где } J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},\ K = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

В качестве гипотезы выступает довольно правдоподобное утверждение о справедливости последней теоремы без требования однородности.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Шеннон К. Работы по теории информации и кибернетике. Москва: ИЛ, 1963. 829 с.
2. Малышев Ф. М. Методы линейных и разностных соотношений в криптографии // Дискрет. матем., **34**:1 (2022), 36–63.
3. Малышев Ф. М. k-конфигурации // Труды МИАН, **316**, 2022. — С. 233–253.
4. Комягин М.М. Классификация $(v,5)$-конфигураций для $v \leqslant 11$ // Дискрет. матем., **36**:1 (2024), 46–66.
5. Тришин А.Е. Классификация циркулянтных $(v,5)$-матриц // Обозрение прикладной и промышленной математики, т. 11, вып. 2. – М.:ОПиПМ, 2004, с. 258–259.
6. Фролов, А.А. Классификация неразложимых абелевых $(v,5)$-групп // Дискрет. матем. **20**:1 (2008), 94–108.

УДК 511.32

Об одном алгоритме построения регистров сдвига с нелинейной обратной связью

А. Ю. Нестеренко (Россия, г. Москва)
Московский институт математики и электроники им. А. Н. Тихонова НИУ ВШЭ
e-mail: anesterenko@hse.ru

An algorithm for consructing nonlinear shift registers

A. Yu. Nesterenko (Russia, Moscow)
Tikhonov Moscow Institute of Electronics and Mathematics of the HSE University
e-mail: anesterenko@hse.ru

Теория построения регистров сдвига с линейной обратной связью считается полностью проработанной, см., например, [1]. В тоже время, процесс построения теории регистров сдвига с нелинейной обратной связи далек от своего завершения. Одним из интересных результатов в этой области является нетривиальный класс регистров максимального периода, найденный в работах М. И. Рожкова, см. [2, 4, 5].

Настоящий доклад инициирован попыткой предложить еще один способ генерации нелинейных функций обратной связи, а также проведенными исследованиями регистра длины $n = 64$. Внутреннее состояние регистра в момент времени $k = 0, 1, \dots$ описывается множеством значений

$$(s_k, s_{k+1}, \dots, s_{k+63}), \quad s_i \in \mathbb{F}_2,$$

а функция обратной связи определяется равенством

$$s_{64+k} = 1 \oplus s_k \oplus s_{k+1} \oplus s_{k+3} \oplus s_{k+4} \oplus s_{k+7} \oplus s_{k+8} \oplus s_{k+6}s_{k+8} \oplus s_{k+8}s_{k+9} \oplus s_{k+6}s_{k+8}s_{k+9}.$$

В ходе экспериментальных исследований, проводившихся с использованием персональной ЭВМ, было установлено, что для нулевого и единичного начального заполнения данный регистр обладает циклом длины не менее 2^{46}, что позволяет вырабатывать непериодические последовательности длиной не менее 1ТБ. Вместе с тем, точное строение цикловой структуры регистра установить не удалось.

Для проведения дальнейших исследований и построения класса регистров сдвига максимального периода с нелинейной обратной связью были определены следующие параметры:

- длина регистра $n \in \mathbb{N}$,
- константа $\sigma \in \mathbb{F}_2$,
- примитивный многочлен
$$p(x) = x^n + \sum_{i=0}^{n-1} x^{\alpha_i} \in \mathbb{F}_2[x],$$
- натуральное число $r \geqslant 2$,
- нелинейная функция, задаваемая многочленом $f(x_1, \dots, x_r) \in \mathbb{F}_2[x_1, \dots, x_r]$
$$f(x_1, \dots, x_r) = \sum_{\sigma_1, \dots, \sigma_r} \varepsilon_{\sigma_1, \dots, \sigma_r} \prod_{j=1}^{r} x_j^{\sigma_j} \in \mathbb{F}_2[x_1, \dots, x_r].$$

Тогда, регистр сдвига с нелинейной обратной связью описывается множеством своих состояний в момент времени $k = 0, 1, \dots$

$$(s_k, s_{k_1}, \dots, s_{k+n-1}),$$

и функцией обратной связи

$$s_{n+k} = \sigma \oplus \sum_{\alpha_i \neq 0} s_{k+\alpha_i} \oplus f(s_{k+i_1}, \dots, s_{k+i_r}), \tag{1}$$

для некоторого набора индексов $i_1, \ldots, i_r$. Легко видеть, что приведенный выше многочлен является частным случаем общей конструкции при

$$n = 64,\ \sigma = 1,\ \alpha_0 = \alpha_1 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0,\ r = 4,$$
$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_2 + x_3 + x_1x_3 + x_3x_4 + x_1x_3x_4,$$
$$i_1 = 6,\ i_2 = 7,\ i_3 = 8,\ i_4 = 9.$$

В ходе экспериментальных исследований для всех значений $n = 8, \ldots, 23$ автору удалось предъявить такие параметры, что регистр сдвига с обратной связью (1) имеет два периода – один длины $2^n - 1$ и другой длины 1, при этом, найденные функции f являются сильно равновероятными функциями, согласно [3, стр.116].

В качестве иллюстрации проведенных исследований приведем значения найденных регистров длины $n = 23$.

$i_1, \ldots, i_4$	Нелинейная функция обратной связи
18, 2, 21, 6	$s_0 \oplus s_1 \oplus s_3 \oplus s_4 \oplus s_2 \oplus s_{21} \oplus s_{18}s_{21} \oplus s_{18}s_6 \oplus s_{18}s_2s_{21} \oplus s_{18}s_2s_6$
15, 5, 17, 18	$1 \oplus s_0 \oplus s_1 \oplus s_3 \oplus s_4 \oplus s_5 \oplus s_{17} \oplus s_{15}s_{17} \oplus s_{17}s_{18} \oplus s_{15}s_{17}s_{18}$

Найденные функции обратной связи являются кубическими, отличаются от известных ранее и допускают эффективную реализацию на программируемых логических интегральных схемах.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лидл Р., Г. Нидеррайтер. Конечные поля. В 2-х томах. Том 2. 1988. С. 392.

2. Рожков М.И. О некоторых классах нелинейных регистров сдвига, обладающих одинаковой цикловой структурой // Дискретная математика. 2010, Том. 22 (22). С. 96-–119.

3. Криптографические методы защиты информации : Учебник / А. Б. Лось, А. Ю. Нестеренко, М. И. Рожков. 2-е изд. Москва: Изд-во Юрайт. 2016. 473 с.

4. Rozhkov M.I., Sorokin A.V. Some Conditions For Absence of Affine Functions in Nfsr Output Stream // Designs Codes Cryptogr., Vol. 89(11). 2021. pp. 2433—2443.

5. Д. М. Дыгин, М. И. Рожков. Некоторые классы нелинейных регистров сдвига с квадратичной обратной связью специального вида, обладающих циклом длины $2^n - 1$ ($25 \leqslant n \leqslant 32$) // Методы и технические средства обеспечения безопасности информации. 2023. – Том. 32. – С. 166–168.

УДК 511.3

Цифровая трансформация в Бюро судебно-медицинской экспертной службы как путь повышения качества выполняемой работы

О. Ю. Палавьюк (Россия, г. Тула)
Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого
А. Н. Шмелев (Россия, г. Тула)
Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого

Digital transformation in the Bureau of Forensic Medical Expertise as a way to improve the quality of work performed

O. Yu. Palavyuk (Russia, Tula)
Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University
A. N. Shmelev (Russia, Tula)
Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University

Судебно-медицинская экспертиза — процессуальное действие, состоящее из проведения исследований и дачи заключения экспертом по вопросам, разрешение которых требует специальных знаний в области науки, техники, искусства или ремесла, и которые поставлены перед экспертом судом, судьёй, органом дознания, лицом, производящим дознание, следователем, в целях установления обстоятельств, подлежащих доказыванию по конкретному делу. [3]

Основным приказом, регламентирующим деятельность организаций, отвечающих за проведение, судебно-медицинской экспертизы является Приказ Министерства здравоохранения и социального развития Российской Федерации от 12 мая 2010 года № 346н «Об утверждении Порядка организации и производства судебно-медицинских экспертиз в государственных судебно-экспертных учреждениях Российской Федерации», который претерпел изменения и с 1 сентября 2024 года вступил в силу Приказ Министерства Здравоохранения Российской Федерации №491н «Об утверждении Порядка проведения судебно-медицинской экспертизы».

Согласно Приказа Министерства Здравоохранения Российской Федерации №491н «Об утверждении Порядка проведения судебно-медицинской экспертизы» судебно-медицинская экспертиза включает следующие подвиды:

- судебно-медицинская экспертиза трупов;
- судебно-медицинская экспертиза вещественных доказательств и объектов биологического и иного происхождения (судебно-гистологическая, судебно-биологическая и судебно-цитологическая, генетическая, медико-криминалистическая, спектрографическая, судебно-химическая и химико-токсикологическая, биохимическая);
- судебно-медицинская экспертиза живых лиц;
- судебно-медицинская экспертиза по материалам дела.

Объектами экспертизы являются:

- живые лица;
- трупы людей (далее - трупы) и их части;
- вещественные доказательства и объекты биологического и иного происхождения, включая образцы для сравнительного исследования;
- материалы дела;
- документы, в том числе медицинские, представленные органом или лицом, назначившим экспертизу, и содержащие сведения, необходимые для проведения экспертизы;
- иные объекты исследований и материалы, представленные органом или лицом, назначившим экспертизу, для проведения экспертизы.

Каждый подвид экспертизы тесно связан друг с другом и, как правило, проведение экспертизы подразумевает проведение несколько подвидов экспертиз одновременно. [1]

Имея структуру с отделениями перед руководителем службы стоит ряд организационных задач:

1. Автоматизация процессов и построения единого информационного пространства Бюро судебно-медицинской экспертизы.

2. Обеспечение централизованного контроля за деятельностью всех структурных подразделений, причастных к экспертизе.

3. Сокращение доли экспертиз, выполненных с нарушением срока.

4. Повышение качества и скорости формирования необходимой статистической и управленческой отчетности для нужд Бюро.

5. Снижение человеческого фактора при работе с документами.

6. Сокращение временных затрат на проведение экспертиз.

Исходя из задач, стоящих перед каждым из отделений, экспертами, руководителем, а также Бюро судебно-медицинской экспертизы в целом, следует принять решение об цифровой трансформации для повышения качества выполняемых работ. [4]

Приказ отражает правила организации работы Бюро судебно-медицинской экспертизы, маршрутизацию материалов исследований, объектов экспертизы между отделениями Бюро, утверждают сроки выполнения экспертиз, сроки хранения материалов, а также утверждает формы протоколов исследований и журналы регистрации материалов. При этом есть требование ведение электронного документооборота в медицинской информационной системе судебно-экспертной организации. [2]

Таким образом, наличие специализированной информационной системы сократит время на заполнение документации и позволит больше внимания уделять качеству произведенных экспертиз и выполняемых исследование, стандартизирует протоколы и отчеты, позволит сформировать работу специалистов с учетом их нагрузки, а также увеличит скорость проведения всех этапов экспертиз, сократить время, затраченное на вскрытие, экспертизу, выдачу тел минимум на 30%.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Приказ Министерства здравоохранения Российской Федерации от 25 сентября 2023 года № 491н «Об утверждении Порядка проведения судебно-медицинской экспертизы», настоящий приказ вступил в силу с 1 сентября 2024 года и действует до 1 сентября 2030 года.

2. Федеральный закон от 31 мая 2001 г. N 73-ФЗ "О государственной судебно-экспертной деятельности в Российской Федерации"(с изменениями и дополнениями).

3. Судебно-медицинская экспертиза [Электронный ресурс]

   https://ru.wikipedia.org/wiki/Судебно-медицинская_экспертиза.

4. Медицинские системы [Электронный ресурс] https://archimed.pro/blog/vidy-meditsinskikh-informatsionnykh-sistem-kakimi-byvayut-klassifikatsiya-naznachenie/.

5. Медицинский научно-практический журнал для врачей выпуск сентябрь 2024 г.

Секция 5. Аналитическая теория чисел

УДК 511.331

Об обобщении проблемы Варинга для почти пропорциональных кубов

А. З. Азамов (Таджикистан, г. Душанбе)
Таджикский национальный университет
e-mail: asliddinkhon@mail.ru
Н. Н. Назрублоев (Таджикистан, г. Душанбе)
Институт математики им. А. Джураева НАНТ
e-mail: nasrullo_86@bk.ru

On generalization of the Varing problem for almost proportional cubes

A. Z. Azamov (Tajikistan, Dushanbe)
Tajik National University
e-mail: asliddinkhon@mail.ru
N. N. Nazrubloev(Tajikistan, Dushanbe)
Dzhuraev Institute of Mathematics of the NAST
e-mail: nasrullo_86@bk.ru

Лагранж доказал, что любое натуральное число представимо в виде суммы не более четырёх квадратов натуральных чисел. Обобщая эту теорему, Варинг в 1770 г. сфомулировал проблему, которая утверждает, что последовательность, образованная фиксированной степенью n чисел натурального ряда, образует в нём базис конечного порядка $G(n)$, то есть, каждое достаточно большое натуральное число N может быть представлено в виде

$$x_1^n + x_2^n + \ldots + x_r^n = N, \tag{1}$$

где $x_1, x_2, \ldots, x_r$ — натуральные числа и количество слагаемых r не превосходит фиксированной величины $G(n)$, называемой порядком базиса последовательности $\{x^n\}$, или функцией Харди.

Проблема Варинга в XIX веке была доказана для отдельных значений n, но реального продвижения на пути к решению этой проблемы удалось добиться только в XX-ом веке. В 1909 г. эту задачу решил Д.Гильберт, тем самым он установил существование функции $G(n)$.

В 1920 г. Харди и Литтлвуд доказали проблему Варинга новым методом. Они ввели функцию $G(n)$ и доказали, что

$$n < G(N) \leq n2^{n-1}h;\ \lim_{n\to\infty} h = 1$$

Самым же основным было то, что Харди и Литтлвуд при

$$r > (n-2)2^{n-1} + 5$$

для числа $J_{n,r}(N)$ представлений числа N в виде (1) находили асимптотическую формулу вида

$$J_{n,r}(N) = \Gamma\left(1+\frac{1}{n}\right)^r \left(\Gamma\left(\frac{r}{n}\right)\right)^{-1} N^{\frac{r}{n}-1}\mathfrak{S}_{n,r}(N) + O(N^{\frac{r}{n}-1-c(n,r)}),$$

где $\mathfrak{S}_{n,r}(N)$ — некоторый особый ряд, сумма которого, как они показали, превосходит некоторое положительное число $c_{n,r}(N)$.

В 1924 г. И. М. Виноградов [1], применяя к проблеме Варинга свой метод тригонометрических сумм, нашёл асимптотическую формулу Харди и Литтлвуда при

$$r \geqslant 2[n^2(2\ln n + \ln\ln n + 3)].$$

В 1934 г. И. М. Виноградову [1] удаётся доказать, что

$$G(n) < n(6\ln n + 10),$$

далее ему удалось уточнить эту оценку несколько раз, и наконец, в 1959 г. доказывает следующую оценку

$$G(n) < n(2\ln n + 4\ln\ln n + 2\ln\ln\ln n + 13).$$

А. А. Карацуба [2], применяя к оценке $G(n)$ p–адический метод, нашёл более точную оценку

$$G(n) < n(2\ln n + 2\ln\ln n + 12).$$

Вули [3] показал, что

$$G(n) < n\ln n + n\ln\ln n + O(1).$$

Значение $G(n)$ известно всего лишь для $k = 2$ и $k = 4$, то есть $G(2) = 4$, $G(4) = 16$, что в свою очередь доказали Лагранж и Давенпорт. Ю. В. Линник [4] показал, что имеет место $G(3) \leqslant 7$.

В 1934 г. английский математик Е. М. Райт [5] при $n = 3$ и $r = 9$ для числа решений диофантова уравнения (1) с почти пропорциональными слагаемыми, то есть, когда

$$|x_i^3 - \mu_i N| \leqslant N^{1-\theta}, \quad i = 1, 2, \ldots, r, \quad \mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_9 = 1,$$

где $\mu_1, \ldots, \mu_9$ — положительные фиксированные числа, нашёл асимптотическую формулу при

$$\theta \geqslant \frac{1}{51} + \varepsilon.$$

В 2010 г. Дерк Деймон [6] пользуясь теоремой о среднем И. М. Виноградова и процедурой «биномиального спуска», при $r \geqslant 19$, доказал асимптотическую формулу для числа решений уравнения (1), при выполнении условий

$$X - Y \leqslant x_j \leqslant X + Y, \quad 1 \leqslant j \leqslant r, \quad X = \left[\left(\frac{N}{r}\right)^{\frac{1}{3}}\right], \quad Y = \sqrt{X}Y_3, \quad Y_3 = (\ln X)^9.$$

Заметим, что теорема М. Райта об асимптотической формуле в проблеме Варинга с почти пропорциональными слагаемыми при $\mu_1 = \ldots = \mu_r = \frac{1}{r}$, то есть при

$$\sqrt[3]{\frac{N}{r} - N^{1-\theta}} \leqslant x_j \leqslant \sqrt[3]{\frac{N}{r} + N^{1-\theta}}.$$

превращается в теорему об асимптотической формуле в проблеме Варинга с почти равными слагаемыми. Эта асимптотическая формула в сильнее теоремы Дерка Деймона в смысле количества слагаемых.

Дальнейшее развитие методов вышеприведённых работ [7-13] позволили доказать теорему Е. М. Райта об асимптотической формуле в обобщении проблемы Варинга для девяти почти пропорциональных кубов, при условии

$$\theta \geqslant \frac{1}{30} + \varepsilon.$$

Теорема 1. *Пусть N — достаточно большое натуральное число, $\mu_1, \ldots, \mu_9$ — положительные фиксированные числа, удовлетворяющие условию*

$$\mu_1 + \ldots + \mu_9 = 1,$$

$J_{3,9}(N,H)$ — число представлений N суммою девяти кубов натуральных чисел x_i, с условиями

$$|x_i^3 - \mu_i N| \leqslant H, \qquad i = 1, \ldots, 9. \tag{2}$$

Тогда при $H \geqslant N^{1-\frac{1}{30}+\varepsilon}$ справедлива асимптотическая формула:

$$J_{3,9}(N,H) = \frac{259723}{44089920} \prod_{k=1}^{9} \mu_k^{-\frac{2}{3}} \mathfrak{S}(N) \frac{H^8}{N^6} + O\left(\frac{H^8}{N^6 \ln c^7}\right),$$

где $\mathfrak{S}(N)$ – особый ряд, сумма которого превосходит некоторое положительное постоянное.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Виноградов И.М. Избранные труды. — М: Изд-во АН СССР, 1952.
2. Карацуба А.А. О функции $G(n)$ в проблеме Варинга // Известия Академии наук СССР. Серия математическая, 1985, Т. 49. № 5. С. 935 – 947.
3. Wooley T.D. Large improvements in Waring's problem // Ann of Math. 1992. V. (2)135. № 1. P. 131 – 164.
4. Линник Ю.В. О разложении больших чисел на семь кубов // Доклады Академии наук СССР. 1942. № 35. С. 179 – 180.
5. Wright E.M. Proportionality conditions in Waring's problem // Mathematische Zeitschrift. 1934. V. 38. P. 730 – 746.
6. Dirk Daemen. The asymptotic formula for localized solutions in Waring's problem and approximations to Weyl sums // Bull. London Math. Soc. 2010. V. 42. P. 75-82.
7. Рахмонов З.Х. Тернарная задача Эстермана с почти равными слагаемыми // Математические заметки. 2003. Т. 74. Вып. 4. С. 564 – 572.
8. Рахмонов З.Х. Кубическая задача Эстермана с почти равными слагаемыми // Математические заметки. 2014. Т. 95. Вып. 3. С. 445 – 456.
9. Рахмонов З.Х., Назрублоев Н.Н., Рахимов А.О. Короткие суммы Г.Вейля и их приложения // Чебышевский сборник. 2015. Т. 16. В. 1(53). С. 232 – 247.
10. Рахмонов З. Х., Азамов А.З., Назрублоев Н.Н. Короткие тригонометрические суммы Г. Вейля в малых дугах // Доклады Академии наук Республики Таджикистан, 2018. Т. 61. № 7 – 8. С. 609 – 614.
11. Рахмонов З.Х., Мирзоабдугафуров К.И. Проблема Варинга для кубов с почти равными слагаемыми // Доклады Академии наук Республики Таджикистан. 2008. Т. 51. № 2. С. 83 – 86.
12. Рахмонов З. Х., Азамов А.З. Асимптотическая формула в проблеме Варинга для четвертых степеней с почти равными слагаемыми // Доклады Академии наук Республики Таджикистан, 2011. Т. 54. № 3. С. 34 – 42.

13. Рахмонов З.Х., Назрублоев Н.Н. Проблема Варинга для пятых степеней с почти равными слагаемыми // Доклады Академии наук Республики Таджикистан, 2014. Т. 57. № 11 – 12. С. 823 – 830.

УДК 511.325

Об одновременном представлении чисел в виде суммы простых чисел

И. Аллаков (Узбекистан, г. Термез)
Термезский государственный университет
e-mail: iallakov@mail.ru
Б. Х. Эрдонов (Узбекистан, г. Термез)
Термезский государственный университет
e-mail: bekmurod.erdonov@mail.ru

On the simultaneous representation of numbers as a sum of prime numbers

I. Allakov (Uzbekistan, Termez)
Termez State University
e-mail: iallakov@mail.ru
B. Kh. Erdonov (Uzbekistan, Termez)
Termez State University
e-mail: bekmurod.erdonov@mail.ru

Пусть b_1, b_2, $\ldots$, b_s — натуральные числа, a_{i1}, a_{i2}, $\ldots$, a_{im} — целые числа, $p_1,\ p_2,\ldots,\ p_m$ — простые числа. Рассмотрим системы линейных уравнений [1]

$$b_i = a_{i1}p_1 + a_{i2}p_2 + \cdots + a_{im}p_m, \quad (i = 1, 2, \ldots,\ s;\ m > s)\,. \tag{1}$$

Обозначим через $U_{s,m}(X)$ — множество наборов $(b_1, b_2, \ldots, b_s)$, $1 \leqslant b_1, b_2, \ldots, b_s \leqslant X$, для которых система (1) неразрешима в простых числах, т.е.,

$$U_{s,m}\,(X) = \{\,(\,b_1, b_2, \ldots, b_s),\ \ 1 \leqslant b_1, b_2, \ldots, b_s \leqslant X,\ b_i \neq a_{i1}p_1 + a_{i2}p_2 + \cdots + a_{im}p_m\}$$

и пусть $E_{s,m}(X) = card\ U_{s,m}(X)$ – количество элементов в множестве $U_{s,m}(X)$.

При $m \geqslant 2s+1$ Wu Fang [2], исследуя системы (1), в некоторых дополнительных условиях, получил асимптотическую формулу для числа решений системы (1).

M. C. Liu и K. M. Tsang [3] рассмотрели, частный случай системы (1) при $s = 2,\ m = 3$ и доказали степенную оценку $E_{2,3}\,(X) \leqslant X^{2-\varepsilon}$, где X — достаточно большое действительное число, ε - абсолютная, эффективно вычисляемая, положительная малая постоянная.

И. Аллаков [4] улучшил результат M. C. Liu и K. M. Tsang [3], а затем в [5] обобщил эти результаты для системы (1), при $s = n$, $m = n+1$. Известно, что разрешимость системы (1) связана следующими двумя условиями [1, 4]:

a) для любого простого p существуют такие целые числа $l_1, \ldots, l_m$ с условиями $1 \leqslant l_1, \ldots, l_m \leqslant p-1$, которые удовлетворяют систему линейных сравнений: $a_{i1}l_1 + a_{i2}l_2 + \ldots + a_{im}l_m \equiv b_i\,(mod p)\,,\ \ (i = 1, \ldots, s)$:

b) существуют такие действительные положительные числа $y_1, \ldots, y_m$ для которых выполняются равенства $a_{i1}y_1 + a_{i2}y_2 + \ldots + a_{im}y_m = b_i$, $(i = 1, ..., s)$.

Обозначим $W_{s,m}(X)$–множество векторов $\vec{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_s)$, $1 \leqslant b_1, b_2, \ldots, b_s \leqslant X$ которые удовлетворяют условиям a) и b).

И. Аллаков в [5] показал, что для достаточно больших X справедлива оценка

$$cardW_{n,n+1}(X) > X^n \Big(B^{2(n-1)^2(2n-1)+n} \ln\ln B\Big)^{-1},$$

где $B = \max\{3|a_{ij}|\}$, $\left(i = \overline{1,n};\ j = \overline{1,n+1}\right)$.

Далее И. Аллаков и Б. Х. Абраев [6] изучали систему (1) при $s = 2$ и $m = 4$. Точнее говоря, они изучали условия разрешимости системы линейных уравнений

$$b_i = a_{i1}p_1 + a_{i2}p_2 + a_{i3}p_3 + a_{i4}p_4, \quad (i = 1, 2)$$

и получили оценку $cardW_{2,4}(X) > 1,69954\ X^2 B^{-20}\Big(e^{\gamma_0+10}\ \ln\ln B +\ 2,507\ \cdot e^{10}(\ln\ln B)^{-1}\Big)^{-1}$, где $\gamma_0 = 0,5772...$ – постоянная Эйлера и $B = \max\{3|a_{ij}|\}$, $\left(i = 1, 2;\ j = \overline{1,4}\right)$.

В [7] мы оценили $W_{3,5}(X),\ E_{3,5}(X),\ R(\vec{b})$.

Отметим, что в случае $s < m \leqslant 2s,\ (s > 3)$ до сих пор не только не получена асимптотическая формула для $R(\vec{b})$, но в общем случае даже не установлено существование решений системы (1).

В настоящей работе рассмотрим именно этот общей случай. Положим $s = n,\ m = n + k,\ (1 < k \leqslant n)$, и рассмотрим следующую систему:

$$b_i = a_{i1}p_1 + a_{i2}p_2 + ... + a_{i,n+k}p_{n+k}, \quad \left(i = \overline{1,n}\right). \tag{2}$$

Сначало исследуем условия разрешимости системы уравнений (2). Известно, что разрешимость системы (2) зависит от положительного решения, как указано выше, и условий конгруэнт разрешимости. Легко увидеть, что $cardW_{n,n+1}(X) \leqslant cardW_{n,n+k}(X)$. Отсюда следует, что множество $W_{n,n+k}(X)$ имеет достаточно много элементов.

Основным результатом работы является следующая теорема:

Теорема 1. *Если $\varepsilon > 0$ достаточно малое действительное число, тогда:*

a) существует достаточно большое число A, такое, что при $X \geqslant B^A$ справедлива оценка $E_{n,n+k}(X) \leqslant X^{n-\varepsilon}$;

b) обозначим через $K = 3(n!)^2 B^{2n-1}\left|\vec{b}\right|(\sqrt{n})^{-1}$ и пусть $R\left(\vec{b}\right)$ −количество решений системы (2) в $p_j \leqslant N$ простых числах, удовлетворяющих условиям $\frac{X}{2} < b_1, ..., b_n \leqslant X$. Тогда для $R(\vec{b})$ при заданном $\vec{b} = (b_1, ..., b_n)$, $1 \leqslant b_1, ..., b_n \leqslant X$ справедлива оценка $R\left(\vec{b}\right) \gg K^{k-\varepsilon}(\ln K)^{-n-k}$, для всех $(b_1, ..., b_n)$ за исключением не более чем $X^{n-\varepsilon}$ значений из них, где $N = 3(n!)^2 B^{2n-1} X$.

Доказательство. Пусть $a_{ij}\ \left(i = \overline{1,n};\ j = \overline{1,n+k}\right)$ — целые числа удовлетворяющие условию $a_{i1}y_1 + ... + a_{i,n+k}y_{n+k} > 0$, $\left(i = \overline{1,n}\right)$, $c_1, c_2, ...$ эффективно вычисляемые положительные постоянные и δ достаточно малое эффективно вычисляемое положительное число. $\mathbb{R}-$ множество действительных чисел и $\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times ... \times \mathbb{R}}_{n}$.

Пусть n фиксированное натуральное число и пусть $X \geqslant B^{\exp\left(\delta^{-2}\right)}$. Положим

$$N = 3(n!)^2 B^{2n-1} X, \quad Q := N^{\delta}, \quad L := NQ^{-\frac{1}{90}}, \quad T := Q^{\frac{1}{\sqrt{\delta}}}. \tag{3}$$

Из (3) следует, что $B \leqslant Q^{\delta}$.

Для произвольного $y \in \mathbb{R}$ и положительного целого q определим $e(y) = e^{2\pi iy}$ и $e_q(y) = e\left(\frac{y}{q}\right)$,

$$\begin{cases} S(y) := \sum\limits_{L<n\leqslant N} \Lambda(n)\, e(ny), \quad S_\chi(y) := \sum\limits_{L<n\leqslant N} \Lambda(n)\,\chi(n)\, e(ny), \\ I(y) := \int\limits_L^N e(xy)\,dx, \quad \tilde{I}(y) := \int\limits_L^N x^{\tilde{\beta}-1} e(xy)\,dx, \; I_\chi(y) := \int\limits_L^N e(xy) \sum\limits_{|\gamma|\leqslant T}{}' x^{\rho-1} dx, \end{cases} \tag{4}$$

где $\sum\limits_{|\gamma|\leqslant T}{}'$ $-$означает, что суммирование ведётся по всем нулям $\rho = \beta + i\gamma$ функции $L(s,\chi)$ в области $\frac{1}{2} \leqslant \beta \leqslant 1 - c_1 \ln^{-1} T$ (кроме исключительного нуля $\tilde{\beta}$) и $\Lambda(n)-$ функция Мангольдта.

Положим

$$\tau = N^{-1} T^{1/2n}.$$

Для произвольных целых чисел h_1, h_2, h_3, q с условием

$$1 \leqslant h_1, ..., h_n \leqslant q \leqslant Q \text{ и } (h_1, ..., h_n, q) = 1 \tag{5}$$

Определим $m(h_1, ..., h_n, q)$ равенством

$$m(h_1, ..., h_n, q) = \left\{ (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n : \; \left| x_i - \frac{h_i}{q} \right| \leqslant \frac{\tau}{q}, \;\; i = \overline{1,n} \right\}$$

а M_1 и M_2 определим равенством

$$M_1 = \cup m(h_1, ..., h_n, q), \quad M_2 = [\tau, \; 1+\tau]^n \backslash M_1, \tag{6}$$

В равенстве (6) объединение берётся по всем $h_1, ..., h_n, q$ которые удовлетворяют условию (5).

Нетрудно видеть, что эти $n-$мерные $m(h_1, ..., h_n, q)$ взаимно не пересекаются и лежат в $[\tau, \; 1+\tau]^n$.

Для произвольных $\vec{b} = (b_1, ..., b_n) \in W_{n,n+k}(X)$ и $(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ положим

$$\bar{x}_b = b_1 x_1 + ... + b_n x_n, \; \bar{x}_j = a_{1j} x_1 + ... + a_{nj} x_n, \quad \left(j = \overline{1, n+k}\right)$$

и

$$I\left(\vec{b}\right) = \sum \Lambda(m_1) ... \Lambda(m_{n+k}). \tag{7}$$

В равенстве (7) суммирование ведётся по всем m_j, которые удовлетворяют условиям $L < m_1, ... m_{n+k} \leqslant N$ и $\sum\limits_{j=1}^{n+k} a_{ij} m_j = b_i, \quad \left(i = \overline{1,n}\right)$. В силу равенств (4) и (6) $I\left(\vec{b}\right)$ можно представить в виде

$$I\left(\vec{b}\right) = \int\limits_\tau^{\tau+1} ... \int\limits_\tau^{\tau+1} e(-\bar{x}_b) \prod_{j=1}^{n+k} S(\bar{x}_j)\, dx_1 ... dx_n =$$

$$= \left(\int ... \int\limits_{M_1} + \int ... \int\limits_{M_2} \right) e(-\bar{x}_b) \prod_{j=1}^{n+k} S(\bar{x}_j)\, dx_1 ... dx_n = I_1\left(\vec{b}\right) + I_2\left(\vec{b}\right). \tag{8}$$

Из (8) следует, что $I\left(\vec{b}\right) > I_1\left(\vec{b}\right) - \left| I_2\left(\vec{b}\right) \right|$. Теперь если мы покажем, что $I\left(\vec{b}\right) > 0$, то можно утверждать, что система (2) разрешима в простых числах.

Доказательство теоремы следует из следующих двух лемм.

Лемма 1. *Для всех наборов* $(b_1, ..., b_n)$, $(1 \leqslant b_1, ..., b_n \leqslant X)$ *за исключением не более чем* $X^n Q^{-k/7(n-1)}$ *наборов из них, справедлива оценка* $\left|I_2\left(\vec{b}\right)\right| < N^k Q^{-k/6(n-1)}$.

Лемма 2. *Для всех значений* $(b_1, ..., b_n) \in W_{n,n+k}(X)$, *кроме* $X^n Q^{-\frac{k}{16n(n+2)}}$, *справедлива оценка* $I_1\left(\vec{b}\right) \gg N^k Q^{-\left(\frac{k}{16n(n+1)} + \frac{k}{14(n-1)}\right)}$.

Доказательство леммы 1. Используя схемой доказательство леммы 5.2 работы [3] и результата работы [4] получим

$$\sum_{b_1=-\infty}^{\infty} ... \sum_{b_n=-\infty}^{\infty} \left|I_2\left(\vec{b}\right)\right|^2 \ll N^{n+2k} B^k Q^{-\frac{k}{2(n-1)}} \ln^{n+8k} N. \tag{9}$$

Из оценки (9) следует утверждение леммы 1.

Используя свойства характеров Дирихле и суммы Рамануджана сначала $I_1\left(\vec{b}\right)$ представляется в виде

$$I_1\left(\vec{b}\right) = \sum_{q \leqslant Q} \frac{1}{\varphi^{n+k}(q)} \sum_{\bar{h}}{}' e_q\left(-\bar{h}_b\right) \int\limits_{\left[-\frac{\tau}{q};\frac{\tau}{q}\right]^n} ... \int e\left(-\bar{\eta}_b\right) \prod_{j=1}^{n+k} H_j\left(\bar{h}, q, \bar{\eta}\right) d\eta_1 ... d\eta_n +$$

$$+O\left(N^k Q^{n+k} B T^{\frac{1}{2n} - \frac{1}{2}} \ln^2 N\right),$$

где $\begin{cases} G_j\left(\bar{h}, q, \bar{\eta}\right) := \sum\limits_{\chi(\bmod q)} C_{\tilde{\chi}}\left(\bar{h}_j\right) I_\chi\left(\bar{\eta}_j\right) \quad \text{и} \\ H_j\left(\bar{h}, q, \bar{\eta}\right) := C_q\left(\bar{h}_j\right) I\left(\bar{\eta}_j\right) - \delta_q C_{\tilde{\chi}\chi_0}\left(\bar{h}_j\right) \tilde{I}\left(\bar{\eta}_j\right) - G_j\left(\bar{h}, q, \bar{\eta}\right), \end{cases}$ $(1 \leqslant j \leqslant n+k)$, здесь если $\tilde{r}|q$, то $\delta_q = 1$ и если $\tilde{r} \nmid q$, то $\delta_q = 0$. Далее пределы интегрирования $\left[-\frac{\tau}{q};\ \frac{\tau}{q}\right]^n$ расширим до $\mathbb{R}^n$ и тогда получим

$$I_1\left(\vec{b}\right) = \sum_{q \leqslant Q} \frac{1}{\varphi^{n+k}(q)} \sum_{\bar{h}}{}' e_q\left(-\bar{h}_b\right) \int\limits_{\mathbb{R}^n} ... \int e_q\left(-\bar{\eta}_b\right) \prod_{j=1}^{n+k} H_j\left(\bar{h}, q, \bar{\eta}\right) d\eta_1 ... d\eta_n + O\left(N^k Q^{-1}\right).$$

Теперь оценивая $I_1\left(\vec{b}\right)$ снизу получим утверждение леммы 2. □

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Хуа Ло-Кен. Аддитивная теория простых чисел // Тр. Матем. ин-та им. В.А.Стеклова. 1947. Том 22. С. 3-179.

2. Fang W. On the solutions of the systems of linear equations with prime variables // Acta Math.Sinica. 1957. V 7. p. 102-121.

3. Liu M. C., Tsang K. M. On pairs of linear equations in three prime variables and an application to Goldbach's problem // J. reine angew. Math. 1989. V 399. p. 109-136.

4. Аллаков И. Оценка тригонометрических сумм и их приложения к решению некоторых аддитивных задач теории чисел. — Термез: Сурхон нашр, 2021. 160 с.

5. Аллаков И. Об условиях разрешимости системы линейных диофантовых уравнений в простых числах // Изв. вузов. Матем. 2006. № 9. с. 10-16.

6. Аллаков И., Абраев Б. Х. Об исключительном множестве одной системы линейных уравнений с простыми числами // Чебышевский сборник. 2023. Том 24, № 2. с. 15-37.

7. Аллаков И., Эрдонов Б. Х. Об одновременном представлении чисел суммой пяти простых чисел // Чебышевский сборник. 2024. Том 25, № 3. с. 11-36.

УДК 511.32

Ряды Виноградова по простым числам

А. Гияси (Иран, г. Тегеран)
Университет имени Алламе Табатабаи
e-mail:azarghyasi@yahoo.com

Vinogradov's series over primes

A. Ghyasi (Iran, Tehran)
Allameh Tabataba'i University
e-mail:azarghyasi@yahoo.com

Определение 1. *n — натуральное число, $f(x) = \alpha_n x^n + ... + \alpha_1 x$ — алгебраический многочлен степени n с действительными коэффициентами, p — простое число. Рассмотрим ряд*

$$S = S_f = \sum_{p=-\infty}^{\infty} \frac{e^{2\pi i f(p)}}{p}$$

по всем целым простым числам, симметрические частные суммы $S_f(x)$ которого имеют вид

$$S(x) = S_f(x) = \sum_{|p| \le x} \frac{e^{2\pi i f(p)}}{p} = \sum_{|n| \le x} \frac{g(n) e^{2\pi i f(n)}}{n}, \quad x \ge 2,$$

где

$$g(n) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad n{=}p, \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Лемма 1. *Пусть k — натуральное число, $k \le x^{0,1}$, h — положительная постоянная и*

$$T = T(x; \alpha, k) = \sum_{1 < p \le x} \sin 2\pi k h \sqrt{p}.$$

Тогда имеем

$$T \ll x^{\frac{7}{8}+\varepsilon} k^{\frac{1}{4}},$$

где ε — сколь угодно малая положительная постоянная.

Теорема 1. *Пусть $f(x) = kh\sqrt{x}$. Тогда ряд*

$$S = S_f = 2i \sum_{p \ge 2} \frac{\sin 2\pi f(p)}{p} = 2i \sum_{n > 1} \frac{g(n) \sin 2\pi f(n)}{n}$$

сходится для любого действительного числа h.

Доказательство.Положим

$$T(x)=\sum_{1<p\le x}\sin 2\pi kh\sqrt{p}=\sum_{1<n\le x}g(n)\sin 2\pi kh\sqrt{n}.$$

Далее воспользуемся критерием Коши. Преобразуем

$$|S(x+h)-S(x)|=2\left|\sum_{x<n\le x+h}g(n)\frac{\sin 2\pi kh\sqrt{n}}{n}\right|=2\left|\int\limits_x^{x+h}T(y)\frac{dy}{y^2}+\frac{T(x+h)}{x+h}-\frac{T(x)}{x}\right|.$$

Отсюда, используя лемму 1, при $x\to\infty$ и при любом $h>0$ находим оценку

$$|S(x+h)-S(x)|\ll\int\limits_x^{x+h}y^{\frac{7}{8}+\varepsilon}k^{\frac{1}{4}}\frac{dy}{y^2}\ll k^{\frac{1}{4}}x^{-1/8}\to 0.$$

Тем самым доказана сходимость ряда $\sum\limits_p\frac{\sin(2\pi kh\sqrt{p})}{p}$. □

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Виноградов И. М. Метод тригонометрических сумм в теории чисел — Тр. МИАН АН СССР . 1947. Т. 23. С. l-i09.
2. Виноградов И. М. Некоторые проблемы аналитической теории чисел — Тр. 3-го Мат. съезда. 1958. Т. 3. С. 3-13.
3. Виноградов И. М. О проблемах аналитической теории чисел — Тр. ноябр. Юбилейной сессии АН СССР. Л.: Изд-во АН СССР . 1933. С. 1-11.
4. Виноградов И. М. Избранные труды. — М.: Изд-во АН СССР. 1952. С. 1-436.
5. Чубариков В. Н. Оценки кратных тригонометрических сумм с простыми числами //Изв. АН СССР. Сер. мат. 1985. Т. 49, №5. С. 1031-1067.
6. Чубариков В. Н. Об одновременном представлении натуральных чисел суммами степеней простых чисел //ДАН СССР . 1986. Т. 286, №4. С.828-831.
7. Чубариков В. Н. Чубариков В.Н. Многомерная аддитивная задача с простыми числами //ДАН СССР . 1986. Т. 290. №4. С.805-808.

УДК 511.3

Об аналоге задачи Гельфонда для разложений Островского по знаменателям подходящих дробей

А. А. Жукова (Россия, г. Владимир)
Российская академия народного хозяйства и государственной службы при Президенте Российской Федерации
e-mail: georg967@mail.ru
А. В. Шутов (Россия, г. Владимир)
Владимирский государственный университет им. А. Г. и Н. Г. Столетовых
e-mail: a1981@mail.ru

On an analogue of the Gelfond problem for Ostrovsky expansions in the denominators of suitable fractions

A. A. Zhukova (Russia, Vladimir)
Russian Presidential Academy of National Economy and Public Administration
e-mail: georg967@mail.ru
A. V. Shutov (Russia, Vladimir)
Vladimir State University
e-mail: a1981@mail.ru

Любое натуральное число X может быть представлено в b-ичной системе счисления как

$$X = \sum_i n_i b^i,$$

где $n_i \in \{0, 1, \ldots, b-1\}$. Обозначим $N_{d,a}^{(b)}(X)$ — количество натуральных чисел, меньших X для которых $\sum\limits_i n_i \equiv a \pmod{d}$.

В работе [1] О.А. Гельфонд доказал, что если d и $b-1$ взаимно просты, то найдется положительная, меньшая единицы постоянная μ такая, что

$$N_{d,a}^{(b)}(X) = \frac{X}{d} + O(X^{\mu}).$$

Рассмотрим аналогичную задачу для разложений Островского. Пусть $\alpha = [0; q_1, q_2, \ldots)$ – иррационально, $\{q_i\}$ – неполные частные, $\{Q_i\}$ — знаменатели подходящих дробей. Представление

$$X = \sum_{i=0}^{t(X)} z_i(X) Q_i \tag{1}$$

называется разложением Островского [2], если коэффициенты удовлетворяют условиям: $0 \leqslant z_0(X) < q_1$, $0 \leqslant z_i(X) \leqslant q_{i+1}$, причем $z_i(X) = q_{i+1}$ влечет за собой $z_{i-1}(X) = 0$, а $t(X)$ определеяется условием $t(X) = \max\{t : Q_t \leqslant X\}$. Более того, коэффициенты $z_i(X)$ подбираются так, что для любого $0 \leqslant i \leqslant t(X)$ справедливо неравенство

$$\left| X - \sum_{s=i}^{t(X)} z_i(X) Q_i \right| < Q_s.$$

Последнее условие означает, что разложение (1) получается по так называемому жадному алгоритму.

Обозначим $N_{d,a}^{(\alpha)}(X)$ — количество натуральных чисел, меньших X для которых сумма цифр разложения Островского сравнима с a по модулю d.

В работе [3] была получена логарифмическая оценка остаточного члена в асимпотической формуле для $N_{d,a}^{(\alpha)}(X)$ при $d = 2$, то есть доказано, что для любого иррационального α

$$N_{2,a}^{(\alpha)}(X) = \frac{X}{2} + O(\log X).$$

Там же было показано, что при $d = 3$ в общем случае оценка остаточного члена должна быть, как минимум, степенной. Более того, если λ — наибольший из модулей корней уравнения $x^4 - 2x^3 + 2x^2 - x + 1 = 0$, $\mu = \log_{\tau} \lambda$, $\tau = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, то

$$\limsup_{X \to \infty} \frac{\left| N_{3,0}^{(\tau)}(X) - \frac{X}{3} \right|}{X^{\mu}} > 0.$$

Справедливы следующие утверждения.

Теорема 1. *Для любого $d \geqslant 3$ существует постоянная $\lambda_d < 1$ такая, что для любого иррационального α*

$$N_{d,a}^{(\alpha)}(X) = \frac{X}{d} + O(X^{\lambda_d}),$$

где

$$\lambda_d = \log_{\tau_{d_0}\eta_d} \tau_{d_0}, \qquad \tau_{d_0} = \frac{d_0 + \sqrt{d_0^2+4}}{2}, \qquad d_0 = \left[\frac{d_0}{2}\right],$$

$$\eta_d = \left(1 + \frac{\chi(d)}{2(d+1)^{2d_0+1}}\right)^{\frac{1}{2d_0+2}}, \qquad \chi(d) = \begin{cases} 2 & \text{при} \quad d \equiv 0 \pmod 2, \\ 1 & \text{при} \quad d \equiv 1 \pmod 2. \end{cases}$$

Теорема 2. *Пусть $\varphi(x)$ непрерывная монотонно возрастающая функция, принимающая только положительные значения, и $\varphi(x) \to \infty$ при $x \to \infty$. Тогда для любого d существует несчетное множество α таких, что*

$$N_{d,a}^{(\alpha)}(X) = \frac{X}{d} + o(\varphi(X)).$$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Gelfond, A. O. 1968, "Sur les nombres qui ont des propriétés additives et multiplicatives données", *Acta Arithmetica*, vol. 13, pp. 259-265. doi: 10.4064/aa-13-3-259-265.

2. Ostrowsky, A. 1921, "Bemerkungen zur Theorie der diophantischen Approximationen", *Abh. Math. Semin. Univ. Hambg*, vol. 1, pp. 77-98.

3. Жукова А. А., Шутов А. В. Об аналоге задачи Гельфонда для обобщенных разложений Цеккендорфа // Чебышевский сборник. 2021. Т. 22. Вып. 2. С. 104–120.

УДК 511.325

Варианты метода И. М. Виноградова в числовом поле

Д. Дж. Каримзода (Таджикистан, г. Душанбе)
Таджикский национальный университет
e-mail: khdj.91@mail.ru

Variants of I. M. Vinogradov's method in a numerical field

D. Dj. Karimzoda (Tajikistan, Dushanbe)
Tajik National University
e-mail: khdj.91@mail.ru

В теории алгебраических чисел используют следующие определения. Пусть степень расширения $K/\mathbb{Q}$ есть $[K : \mathbb{Q}] = n = r_1 + 2r_2$ так, что $K^{(1)}, \ldots, K^{(r_1)}$ являются вещественно-сопряженными полями для K и $K^{(r_1+j)}$ есть комплексно-сопряженное поле для $K^{(r_1+r_2+j)}$, где $1 \leq j \leq r_2$. Всякая нетривиальная метрика (топологическое нормирование) поля K имеет либо вид

$$|\xi|_{\mathfrak{p}} = \varrho^{ord_{\mathfrak{p}}\xi} \quad (\xi \in K, \quad 0 < \varrho < 1, \quad \text{неархимедовый случай}),$$

либо вид

$$|\xi|_{\sigma} = |\sigma(\xi)|^{\varrho} \quad (\xi \in K, \quad 0 < \varrho \leq 1, \quad \text{архимедовый случай}),$$

где $\sigma : K \to \mathbb{C}$ – одно из $r_1 + r_2$ алгебраических сопряжений. Внеархимедовом случае существует взаимно-однозначное соответствие между класами эквивалентных неархимедовых нормирований и простыми идеалами кольца $\mathbb{Z}_K$. Для конечного расширения $K/\mathbb{Q}$ формально записывают разложение бесконечного простого дивизора ∞ поля $\mathbb{Q}$ как

$$\infty = \infty_1 \infty_2 \dots \infty_{r_1} \infty_{r_1+1}^2 \dots \infty_{r_1+r_2}^2,$$

где плейсы $\infty_1, \infty_2, \dots, \infty_{r_1}$ соответствуют вещественным вложениям $K^{(1)}, \dots, K^{(r_1)}$ и

$$\infty_{r_1+j} = \infty_{r_1+r_2+j}, \quad (1 \le j \le r_2)$$

соответствуют комплексно-сопряженным парам полей $K^{(r_1+j)}$, $K^{(r_1+r_2+j)}$ при комплексных вложениях. Для пополненного простого спектра $\mathbb{M} = \mathrm{Spec}\ \mathbb{Z}_K \cup \{\infty_1, \dots \infty_{r_1+r_2}\}$ кольца целых алгебраических чисел $\mathbb{Z}_K$, состоящего из всех конечных ненулевых простых идеалов и бесконечных нормирований, строится коммутативная *лучевая полугруппа идеалов* (с единицей 1) следующего вида:

$$\widetilde{\mathbb{M}} = \langle \mathbb{M} :\ \infty_j^2 = \infty_j\ (K^{(j)}\ \text{вещественное}),\ \infty_j = 1\ (K^{(j)}\ \text{комплексное}) \rangle,$$

которая свободно порождается конечными (то есть неархимедовыми) ненулевыми простыми идеалами и имеет указанные соотношения для бесконечных (то есть архимедовых) идеалов. Для чисел α, β кольца $\mathbb{Z}_K$ символ

$$\frac{\alpha}{\beta} \equiv 1\ (mod^{\times}\ \widetilde{\mathfrak{m}})$$

означает выполнение следующих трех условий (1) $(\alpha\beta, \mathfrak{m}) = 1$, (2) $\alpha \equiv \beta\ (mod\ \mathfrak{m})$ и (3) совпадение знаков числителя и знаменателя при сопряжениях: $\frac{\alpha^{(j)}}{\beta^{(j)}} > 0$ для вещественных плейсов $\infty_j | \mathfrak{m}_\infty$. Эти определения используется в следующих теоремах.

Теорема. (*тождество Вона) Пусть $\mathbb{P}$ система всех простых попарно неассоциированных чисел в числовом кольце $\mathbb{Z}_K$, $\mathbb{I} \subset \mathbb{P}$ некоторое непустое множество, $f : \langle \mathbb{I} \rangle \to \mathbb{C}$ произвольная комплекснозначная функция, $W : \langle \mathbb{I} \rangle \to \mathbb{Z}_K$ любое вполне мультипликативное отображение. Если $\mathfrak{m}$ некоторый идеал в $\mathbb{Z}_K$, а целое алгебраическое число λ с $\mathfrak{m}$ взаимно просто, тогда для произвольных фиксированных положительных вещественных чисел $u, x \in \mathbb{R}_{>0}$, $u < x$ имеет место формула:*

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{\beta \in \langle \mathbb{I} \rangle,\ u < |N\beta| \le x \\ W(\beta) \equiv \lambda\ (mod\ \mathfrak{m})}} \Lambda_{\mathbb{I}}(\beta) f(\beta) = & \sum_{\substack{\eta \in \langle \mathbb{I} \rangle \\ |N\eta| \le u}} \mu_{\mathbb{I}}(\eta) \sum_{\substack{\xi \in \langle \mathbb{I} \rangle,\ |N\xi| \le \frac{x}{|N\eta|} \\ W(\xi\eta) \equiv \lambda\ (mod\ \mathfrak{m})}} f(\xi\eta) \log |N\xi| \\
& - \sum_{\substack{\eta \in \langle \mathbb{I} \rangle \\ |N\eta| \le u}} \mu_{\mathbb{I}}(\eta) \sum_{\substack{\beta \in \langle \mathbb{I} \rangle \\ |N\beta| \le u}} \Lambda_{\mathbb{I}}(\beta) \sum_{\substack{\gamma \in \langle \mathbb{I} \rangle,\ |N\gamma| \le \frac{x}{|N\eta\beta|} \\ W(\eta\beta\gamma) \equiv \lambda\ (mod\ \mathfrak{m})}} f(\eta\beta\gamma) \\
& - \sum_{\substack{\alpha \in \langle \mathbb{I} \rangle \\ u < |N\alpha| \le \frac{x}{u}}} \sum_{\substack{\eta |_{\mathbb{I}} \alpha \\ |N\eta| \le u}} \mu_{\mathbb{I}}(\eta) \sum_{\substack{\beta \in \langle \mathbb{I} \rangle,\ u < |N\beta| \le \frac{x}{|N\alpha|} \\ W(\alpha\beta) \equiv \lambda\ (mod\ \mathfrak{m})}} \Lambda_{\mathbb{I}}(\beta) f(\alpha\beta).
\end{aligned}$$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Карацуба А.А. Основы аналитической теории чисел. - М.: Наука, 1983

2. Панов В.М. Оценка суммы степенных вычетов в круговом поле // Докл. АН РТ, 2007, т. 51, 11–12, с. 4–16.

3. Рахмонов З.Х., Хокиев Д.Дж Об оценке суммы характеров с простыми числами — Доклады Академии наук Республики Таджикистан. 2018. Т.-61. №1. с. 5-11

УДК 511.32

О динамической системе, связанной с распределением дробных долей многочлена нескольких переменных

И. П. Михайлов (Россия, г. Лениногорск)
Казанский авиационный институт
e-mail: ipm32@yandex.ru

A dynamical system connected with the distribution a fractional parts of a polinomial from several variables

I. P. Mihaylov (Russia, Leninogorsk)
Kazan Aviation Institute
e-mail: ipm32@yandex.ru

В данном сообщении дано обобщение результатов автора для динамической системы, связанной с распределением дробных частей многочлена от нескольких переменных, которая утверждает, что если свободный коэффициент многочлена является иррациональным числом, то эта динамическая система будет эргодической. Показано, что достаточно наличие хотя бы одного, любого, иррационального коэффициента

Пусть Ω — компактное хаусдорфово топологическое пространство со счетной базой, $C(\Omega)$ — множество всех действительнозначных непрерывных функций $f(x)$, определенных на Ω, и $M(\Omega)$ — множество всех положительных конечных мер на Ω таких, что $\mu(\Omega) = 1$, и пусть $L_\mu(\Omega)$ обозначает пространство функций на Ω, интегрируемых по мере μ. Отображение T из Ω в себя сохраняет меру μ (или мера μ инвариантна относительно T), если для любой функции $f \in C(\Omega)$ имеем

$$\int\limits_{\Omega} f(Tx)\, d\mu(x) = \int\limits_{\Omega} f(x)\, d\mu(x).$$

Множество мер μ, инвариантных относительно T, обозначим I_T. Множество $E \subset \Omega$ — инвариантно относительно T, если $E = T^{-1}E$. Отображение T называется эргодическим относительно меры μ, если для любого $E \in I_T$ имеем, что либо $\mu(E) = 0$, либо $\mu(E) = 1$. Множество таких мер обозначим E_T. С другой стороны, мера μ является эргодической по отношению к преобразованию T, если любая μ-измеримая инвариантная функция для почти всех $x \in \Omega$ по мере μ есть постоянная.

Совокупность (Ω, μ, T) называется динамической системой. Известно, что динамическая система является эргодической, если пространство Ω нельзя разложить в теоретико-множественную сумму двух непересекающихся инвариантных множеств Ω_1 и Ω_2 с условием $\mu(\Omega_1) > 0$ и $\mu(\Omega_2) > 0$. Более того, эргодичность динамической системы эквивалентна эргодичности, связанной с ней меры.

В работе автора [8] была рассмотрена динамическая система с многочленом от нескольких переменных. Пространство Ω динамической системы представляет собой декартово произведение m окружностей единичной длины или m-мерный куб, состоящий из точек $\bar{\alpha} = (\alpha(t_1, \ldots, t_r)), 0 \le t_1 \le n_1, \ldots, 0 \le t_r \le n_r, t_1 + \cdots + t_r \ge 1$.

Теорема 1. *Пусть $r, n_1, \ldots, n_r$ — натуральные числа,*

$$f(x_1, \ldots, x_r) = \sum_{t_1=0}^{n_1} \cdots \sum_{\substack{t_r=0 \\ t_1+\cdots+t_r \ge 1}}^{n_r} \alpha(t_1, \ldots, t_r) x_1^{t_1} \ldots x_r^{t_r} + \alpha(n_1+1, n_2, \ldots, n_r),$$

причем $\alpha(n_1+1, n_2, \dots, n_r)$ *— фиксированное действительное иррациональное число,* $m = (n_1+1)\dots(n_r+1)-1$. *Тогда динамическая система является эргодической.*

Для доказательства упорядочим окружности пространства Ω следующим образом.

Положим $m(\bar{t}) = t_1 + (n_1+1)t_2 + \dots + t_r(n_1+1)\dots(n_{r-1}+1)$, где $0 \le t_1 \le n_1, \dots, 0 \le t_r \le n_r, t_1 + \dots + t_r \ge 1$. Расположим координаты набора $\bar{\alpha} = \bar{\alpha}(\bar{t})$ в порядке возрастания параметра $m(t)$. Имеем

$$\alpha(t_1, \dots, t_r) = \beta(m(\bar{t})), 0 \le t_1 \le n_1, \dots, 0 \le t_r \le n_r, t_1 + \dots + t_r \ge 1,$$

$\alpha(n_1+1, n_2, \dots, n_r) = \beta(m+1)$. Определим взаимнооднозначное отображение T в m-мерном пространстве Ω следующим образом

$$T(\bar{\alpha}(t_1, \dots, t_r)) = T(\bar{\beta}(\bar{m}(\bar{t}))) =$$

$$= \left(\left\{\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}\beta(m+1-k)\right\}, \left\{\sum_{k=0}^{m-1}\binom{m-1}{k}\beta(m+1-k)\right\}, \dots, \right.$$
$$\left. \{\beta(m+1) + 2\beta(m) + \beta(m-1)\}, \{\beta(m+1) + \beta(m)\}\right).$$

Отметим, что на Ω мера Лебега в m-мерном пространстве является инвариантной относительно T.

Для любого натурального k имеем

$$T^k(\bar{\alpha}) = \left(\{\gamma(m)^{(k)}\}, \{\gamma(m-1)^{(k)}\}, \dots, \{\gamma(1)^{(k)}\}\right),$$

где

$$\gamma(s)^{(k)} = \sum_{l=0}^{s-1}\binom{s-1}{l}\alpha_{m+1-l}k^{s-l-1}, 1 \le s \le m.$$

Таким образом, исходная многомерная задача свелась к одномерной. Многочлен степени $m = (n_1+1)\dots(n_r+1)-1$ имеет иррациональный коэффициент при старшей степени. Доказательство эргодичности построенной динамической системы в основных чертах повторяет схему рассуждений А.Г.Постникова [4], использующую критерий Вейля [1] в качестве базовой теоремы. Напомним, что в критерии Вейля важна иррациональность старшего коэффициента.

Докажем следующую теорему, переставляющую собой обобщение критерия Вейля.

Теорема 2. *Пусть дан многочлен*

$$F(x) = F_A(x) = \sum_{0 \le s \le n}\alpha(s)x^s$$

где $\alpha(n), ..., \alpha(n-m+1)$*рациональны, а* $\alpha(m)$ *иррационально. Тогда для него будет выполнен критерий Вейля равномерного распределения значений остатков.*

В соответствии с критерием Вейля, рассмотрим сумму

$$S(P) = \sum_{0 \le x \le P-1} e^{2\pi i k F(x)} \qquad (1).$$

Пусть $Q =$НОК$(k_n, ..., k_{n-m+1})$, где $k_n, ..., k_{n-m+1}$ знаменатели рациональных $\alpha(n), ..., \alpha(n-m+1)$

В сумме (1) сделаем замену $x = Qy + z$, где $0 \le z < Q$.

Получим

$$S(P)=\sum_{-z/Q\le y\le P-1-z/Q} e^{2\pi ikF(Qy+z)}.$$

Раскрыв скобки и перегруппировав в многочлене $F(Qy+z)$ слагаемые, и исключив единичные множители, получим сумму

$$S(P)=\sum_{-z/Q\le y\le P-1-z/Q} e^{2\pi ikf(y)}.$$

где старший коэффициент многочлена $f(y)$ равный $\alpha(m)Q^m$ иррационален и для него выполняется критерий Вейля.

Таким образом, Теорема 1 легко обобщается на случай произвольного иррационального коэффициента.

Теорема 3. *Пусть $r, n_1, \ldots, n_r$ — натуральные числа,*

$$f(x_1,\ldots,x_r)=\sum_{\substack{t_1=0\\ t_1+\cdots+t_r\ge 1}}^{n_1}\cdots\sum_{t_r=0}^{n_r}\alpha(t_1,\ldots,t_r)x_1^{t_1}\ldots x_r^{t_r}+\alpha(n_1+1,n_2,\ldots,n_r),$$

где один из коэффициентов $\alpha(n_1+1,n_2,\ldots,n_r),\alpha(t_1,\ldots,t_r)$ — фиксированное действительное иррациональное число. Тогда динамическая система, связанная с его коэффициентами является эргодической.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Weyl H.* ʹUber die Gleichverteilung der Zahlen mod. Eins// Math. Ann. 1916, 77 S.313-352.

2. *Виноградов И. М.* Метод тригонометрических сумм в теории чисел, 2-е изд., Москва, Наука, 1980, 144 с.

3. *Khintchine A.* Eine arithmetische Eigenschaft der summierbaren Functionen// Матем. сб., 1934, вып. 1(41), 11-13.

4. *Постников А.-Г.* Избранные труды, М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. 512 с.

5. *Архипов Г. И.* Избранные труды. Орел: Изд-во Орловского гос.ун-та, 2013. 464 с.

6. *Arkhipov G. I., Chubarikov V. N., Karatsuba A. A.* Trigonometric Sums in Number Theory and Analysis. De Gruyter expositions in mathematics; 39. Berlin, New York, 2004. 554 c.

7. *Халмош П. Р.* Лекции по эргодической теории. М., 1959.

8. *Михайлов И. П.* Об эргодичности динамической системы, связанной с распределением дробных частей многочлена от нескольких переменных // Вестник Московского университета. 2025. Принято в печать.

УДК 511.32

Асимптотическая формула в обобщении тернарной проблемы Эстермана с почти пропорциональными слагаемыми

Ф. З. Рахмонов (Таджикистан, Душанбе)
Институт математики им. А. Джураева НАНТ
e-mail: rakhmonov.firuz@gmail.com

Asymptotic formula in generalization of ternary Esterman problem with almost proportional summands

F. Z. Rakhmonov (Tajikistan, Dushanbe)
Dzhuraev Institute of Mathematics of the NAST
e-mail: rakhmonov.firuz@gmail.com

Эстерман [1] при $n=2$ доказал асимптотическую формулу для числа решений уравнения

$$p_1+p_2+m^n=N, \tag{1}$$

где p_1, p_2 — простые числа, m — натуральное число. В работах [2, 3, 4] при $n=2,3,4$ эта задача исследована с более жёсткими условиями, а именно, когда слагаемые почти равны, то есть выведена асимптотическая формула для числа решений диофантова уравнения (1) с условиями

$$\left|p_i-\frac{N}{3}\right|\leqslant H, \quad i=1,2, \qquad \left|m^n-\frac{N}{3}\right|\leqslant H, \qquad H\geqslant N^{1-\theta(n)}\mathscr{L}^{c_n},$$

соответственно при

$$\theta(2)=\frac{1}{4}, \quad c_2=2; \qquad \theta(3)=\frac{1}{6}, \quad c_3=3; \qquad \theta(4)=\frac{1}{12}, \quad c_4=\frac{40}{3}. \tag{2}$$

Доклад посвящен выводу асимптотической формуле в обобщении проблемы Эстермана с почти пропорциональными слагаемыми при произвольном фиксированном $n\geqslant 3$.

Теорема 1. *Пусть N — достаточно большое натуральное число, $n\geqslant 3$ — фиксированное натуральное число, $\rho(N,p)$ — число решений сравнения $x^n\equiv N \pmod p$, μ_1, μ_2, μ_3 — положительные фиксированные числа, удовлетворяющие условию $\mu_1+\mu_2+\mu_3=1$, $J_n(N,H)$ — число решений диофантова уравнения (1) с условиями*

$$|p_k-\mu_kN|\leqslant H, \quad k=1,2, \qquad |m^n-\mu_3N|\leqslant H.$$

Тогда, при $H\geqslant N^{1-\frac{1}{n(n-1)}}\mathscr{L}^{\frac{2^{n+1}}{n-1}+n-1}$, справедлива асимптотическая формула:

$$J_{n,r}(N,H)=\frac{3\mathfrak{S}(N)H^2}{n\mu_3^{1-\frac{1}{n}}N^{1-\frac{1}{n}}\mathscr{L}^2}+O\left(\frac{H^2}{N^{1-\frac{1}{n}}\mathscr{L}^3}\right), \qquad \mathfrak{S}=\prod_p\left(1+\frac{\rho(N,p)}{(p-1)^2}\right)$$

где постоянное под знаком O зависит от чисел μ_1, μ_2, μ_3 и n.

Из теоремы 1 при $\mu_1=\mu_2=\mu_3=\frac{1}{3}$ следует асимптотическая формула в обобщении проблемы Эстермана с почти равными слагаемыми.

Следствие 1. *Пусть N — достаточно большое натуральные числа, $n\geqslant 3$ — фиксированное натуральное число, $\rho(N,p)$ — число решений сравнения $x^n\equiv N \pmod p$, $J_n(N,H)$ — число решений диофантова уравнения (1) с условиями*

$$\left|p_k-\frac{N}{3}\right|\leqslant H, \quad k=1,2, \qquad \left|m^n-\frac{N}{3}\right|\leqslant H.$$

Тогда, при $H\geqslant N^{1-\frac{1}{n(n-1)}}\mathscr{L}^{\frac{2^{n+1}}{n-1}+n-1}$, справедлива асимптотическая формула:

$$J_{n,r}(N,H)=\frac{3^{2-\frac{1}{n}}\mathfrak{S}(N)H^2}{nN^{1-\frac{1}{n}}\mathscr{L}^2}+O\left(\frac{H^2}{N^{1-\frac{1}{n}}\mathscr{L}^3}\right), \qquad \mathfrak{S}=\prod_p\left(1+\frac{\rho(N,p)}{(p-1)^2}\right)$$

где постоянное под знаком O зависит только от n.

Заметим, что полученные раннее в работах [3, 4] асимптотические формулы в обобщении проблемы Эстермана с почти равными слагаемыми при $n = 3$ и $n = 4$, приведенные нами в формуле (2), являются частными случаями следствия 1.

Доказательство теоремы 1 проводится круговым методом Харди-Литтлвуда-Рамануджана в форме тригонометрических сумм И. М. Виноградова в сочетании с методом, описанным в работах [5, 6, 7, 8, 9], где исследовано поведение короткой суммы Г. Вейля вида

$$T(\alpha; x, y) = \sum_{x-y<m\leqslant x} e(\alpha m^n),$$

в больших дугах и доказана асимптотическая формула в обобщении проблемы Варинга с почти пропорциональными слагаемыми . Основными утверждениями, позволившими доказать теорему 1, являются:

- асимптотическая формула для коротких тригонометрических сумм Г. Вейля вида $T(\alpha; x, y)$ в малой окрестности центра больших дуг (следствие 2 леммы 1);
- нетривиальная оценка сумм $T(\alpha; x, y)$ в больших дугах за исключением малой окрестности их центров (следствие 3 леммы 1);
- нетривиальная оценка сумм $T(\alpha; x, y)$ в малых дугах (теорема 2).

Лемма 1. [5]. *Пусть $\tau \geq 2n(n-1)x^{n-2}y$, тогда при $\{n|\lambda|x^{n-1}\} \leqslant \frac{1}{2q}$ имеет место формула*

$$T(\alpha; x, y) = \frac{S(a,q)}{q} T(\lambda; x, y) + O\left(q^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\right),$$

а при $\{n|\lambda|x^{n-1}\} > \frac{1}{2q}$ имеет место оценка

$$|T(\alpha, x, y)| \ll q^{1-\frac{1}{n}} \ln q + \min(yq^{-\frac{1}{n}}, \lambda^{-\frac{1}{2}} x^{1-\frac{n}{2}} q^{-\frac{1}{n}}).$$

Следствие 2. *Пусть $\tau \geq 2n(n-1)x^{n-2}y$, $|\lambda| \leqslant \frac{1}{2nqx^{n-1}}$, тогда имеет место соотношение*

$$T(\alpha; x, y) = \frac{y}{q} S(a,q) \gamma(\lambda; x, y) + O(q^{\frac{1}{2}+\varepsilon}).$$

Следствие 3. *Пусть $\tau \geq 2n(n-1)x^{n-2}y$, $\frac{1}{2nqx^{n-1}} < |\lambda| \leqslant \frac{1}{q\tau}$, тогда имеет место оценка*

$$T(\alpha; x, y) \ll q^{1-\frac{1}{n}} \ln q + \min\left(yq^{-\frac{1}{n}}, x^{\frac{1}{2}} q^{\frac{1}{2}-\frac{1}{n}}\right).$$

При решении ряда аддитивных задач с почти пропорциональными слагаемыми, к которым относятся проблема Варинга и обобщение проблемы Эстермана, возникают задачи о поведении коротких тригонометрических сумм Г. Вейля вида $T(\alpha; x, y)$ как в больших так и в малых дугах. Для произвольного $n \geqslant 3$ в больших дугах они изучены в работах [5, 8]. Для тригонометрических сумм $T(\alpha; x, y)$ в малых дугах при $q \gg y^{\varepsilon}$ были получены нетривиальные оценки в работе [10].

Воспользовавшись методами работ [11, 12, 13, 14], нетривиальная оценка получена при

$$(\ln y)^{(n-1)^2} \ll q \ll y^n (\ln y)^{-(n-1)^2}.$$

Теорема 2. *Пусть $x \geqslant x_0 > 0$, $\ln x < y \leqslant x(\ln x)^{-1}$, α – вещественное число,*

$$\left|\alpha - \frac{a}{q}\right| \leqslant \frac{1}{q^2}, \qquad (a,q) = 1,$$

тогда при $n \geqslant 3$ справедлива оценка

$$|T(\alpha; x, y)| \ll y\left(\frac{1}{q} + \frac{1}{y} + \frac{q}{y^n}\right)^{2^{-n}} (\ln qy)^{(n-1)^2 2^{-n}},$$

где постоянная под знаком $\ll$ зависит только от n.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Estermann T. Proof that every large integer is the sum of two primes and square // Proc. London math.Soc. 1937. V. 11. P. 501–516.

2. Рахмонов З. Х. Тернарная задача Эстермана с почти равными слагаемыми // Математические заметки. 2003. Т. 74. вып. 4. С. 564 – 572.

3. Рахмонов З. Х. Кубическая задача Эстермана с почти равными слагаемыми // Математические заметки. 2014. Т. 95. вып. 3. С. 445 – 456.

4. Рахмонов Ф. З., Рахимов А. О. Об одной аддитивной задаче с почти равными слагаемыми // Исследования по алгебре, теории чисел, функциональному анализу и смежным вопросам. Издательство: Саратовский национальный исследовательский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского. ISSN: 1810-4134. 2016. № 8. С. 87 – 89.

5. Рахмонов З. Х., Рахмонов Ф З. Асимптотическая формула в проблеме Варинга с почти пропорциональными слагаемыми // Чебышевский сборник. 2024. Т. 25. № 2(93). С. 130-159.

6. Рахмонов З.Х., Рахмонов Ф.З. Асимптотическая формула в проблеме Варинга с почти пропорциональными слагаемыми // Доклады Национальной академии наук Таджикистана. 2024. Т. 67. № 3-4. С. 125-136.

7. Рахмонов З.Х., Рахмонов Ф.З. Проблема Варинга с почти пропорциональными слагаемыми // Доклады Национальной академии наук Таджикистана. 2023. Т. 66. № 9-10. С. 481-488.

8. Рахмонов З.Х., Рахмонов Ф.З. Поведение коротких тригонометрических сумм Г.Вейля в больших дугах // Доклады Национальной академии наук Таджикистана. 2023. Т. 66. № 11-12. С. 625-633.

9. Рахмонов З. Х. Обобщение проблемы Варинга для девяти почти пропорциональных кубов // Чебышевский сборник. 2023. Т. 24. № 3. С. 71-94

10. Рахмонов З. Х., Азамов А. З., Назрублоев Н. Н. Короткие тригонометрические суммы Г. Вейля в малых дугах // Доклады Академии наук Республики Таджикистан. 2018 г. Т. 61. № 7-8. С. 609–614.

11. Рахмонов Ф.З. Оценка тригонометрических сумм с простыми числами // Чебышевский сборник. 2011. Т. 12. В. 1. С. 158–171.

12. Рахмонов Ф.З. Оценка квадратичных тригонометрических сумм с простыми числами // Вестник Московского университета. Серия 1. Математика и механика. 2011. № 3. С. 56–60.

13. Рахмонов З. Х., Рахмонов Ф. З. Короткие кубические суммы простыми числами // Труды Математического института им. В. А. Стеклова Российской академии наук. 2016. Т. 296. С. 220 – 242.

14. Рахмонов З. Х., Рахмонов Ф З. Тригонометрические суммы с функцией Мёбиуса // Чебышевский сборник. 2019. Т. 20. № 4. С. 281-305.

УДК 511.331

Об обобщении тернарной проблемы Гольдбаха с почти равными слагаемыми

Д. Д. Рахмонов (Таджикистан, г. Душанбе)
Институт математики им. А. Джураева НАНТ
e-mail: rdoston@bk.ru

On generalization of the ternary Goldbach problem with almost equal summands

D. D. Rakhmonov (Tajikistan, Dushanbe)
Dzhuraev Institute of Mathematics of the NAST
e-mail: rdoston@bk.ru

И. М. Виноградов [1] в 1937 году построил метод оценок тригонометрических сумм с простыми числами, основу которого составляют решето Виноградова и метод сглаживания двойных сумм. В частности, он впервые получил оценку линейной тригонометрической суммы с простыми числами, то есть при $k = 1$ нетривиальную оценку сумму вида

$$S_k(\alpha, x) = \sum_{m\leqslant x} \Lambda(m)e(\alpha m^k),$$

в малых дугах $\mathfrak{m}(\mathscr{L}_x^b)$, $\mathscr{L}_x = \ln x$ и ему удалось вывести асимптотическую формулу для числа представлений нечётного N в виде суммы трёх простых чисел, что является решением тернарной проблемы Гольдбаха.

Короткую линейную тригонометрическую сумму с простыми числами вида $S_1(\alpha; x, y)$ впервые начал исследовать И.М. Виноградов [1]. Он, воспользовавшись своим методом оценки тригонометрических сумм с простыми числами, получил нетривиальную оценку в малых дугах $\mathfrak{m}(\exp(c(\ln\ln x)^2))$, $\tau = x^{\frac{1}{3}}$ при условии $y > x^{\frac{2}{3}+\varepsilon}$.

Затем С. Б. Хейзелгроув [2], Ч. Д. Пан и Ч. Б. Пан [3], Ж. Тао [4] для суммы $S_1(\alpha; x, y)$, $y \geqslant x^{\theta_1}$, получив нетривиальную оценку в малых дугах и изучив ее поведение в больших дугах, доказали асимптотическую формулу в тернарной проблеме Гольдбаха с почти равными слагаемыми, то есть нашли асимптотическую для количества решений диофантова уравнения

$$p_1 + p_2 + p_3 = N, \qquad \left|p_i - \frac{N}{3}\right| \leqslant H, \qquad H \geqslant N^{\theta}, \tag{1}$$

Наилучший результат в этой задаче принадлежит Ж. Чаохуа [5]. Он доказал, что диофантово уравнение (1) разрешимо с показателем

$$\theta = \frac{7}{12} + \varepsilon.$$

A.Baker [6] доказал: *если λ_1, λ_2, λ_3 — ненулевые действительные числа, не одного знака, причём хотя бы одно из отношений λ_i/λ_j иррационально, тогда для любого натурального n существует бесконечно много простых чисел p_1, p_2, p_3, удовлетворяющих неравенству*

$$|\lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2 + \lambda_3 p_3| \leqslant (\ln p)^{-n}, \qquad p = \max(p_1, p_2, p_3).$$

В процессе доказательства этого результата он воспользовавшись круговым методом и поведением линейных тригонометрических сумм с простыми числами вида

$$S_1(b_i\alpha, N) = \sum_{n\leqslant N} \Lambda(n) e(b_i \alpha n),$$

как в больших так и в малых дугах, при выполнении определенных условий исследовал разрешимость уравнения

$$b_1 p_1 + b_2 p_2 + b_3 p_3 = N, \tag{2}$$

в простых числах p_1, p_2, p_3, где b_1, b_2, b_3 и N — целые числа.

Основным результатом этой работы является теорема 1 об асимптотической формуле для количества решений диофантова уравнения (2) при условии, что слагаемые $b_i p_i$ почти равны, а коэффициенты b_1, b_2, b_3 не превосходят произвольной фиксированной положительной степени логарифма от числа N.

Теорема 1. *Пусть b_1, b_2 b_3, N — попарно взаимно простые натуральные числа, $N > N_0$, B_1, B_2, B_3 — произвольные фиксированные положительные числа, $b_i \leqslant (\ln N)^{B_i}$, $J(N, H)$ — число решений диофантова уравнения*

$$b_1 p_1 + b_2 p_2 + b_3 p_3 = N, \qquad \left| b_i p_i - \frac{N}{3} \right| \leqslant H,$$

в простых числах p_1, p_2 и p_3. Тогда при $H \geqslant (b_1 b_2 b_3)^{\frac{5}{4}} N^{\frac{5}{8}} (\ln N)^{71}$ справедлива асимптотическая формула:

$$J(N,H) = \frac{3\mathfrak{S}(b_1, b_2, b_3, N)\ H^2}{b_1 b_2 b_3\ (\ln N)^3} + O\left(\frac{H^2 \ln\ln N}{b_1 b_2 b_3 (\ln N)^4}\right),$$

$$\mathfrak{S}(b_1, b_2, b_3, N) = \prod_p \left(1 + \frac{1}{(p-1)^3}\right) \prod_{p|b_1 b_2 b_3 N} \left(1 - \frac{1}{p^2 - 3p + 3}\right).$$

Теорема 1 при условии $H \geqslant (b_1 b_2 b_3)^{\frac{4}{3}} N^{\frac{2}{3}} (\ln N)^{60}$ была доказана в работах [7-9].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Виноградов И.М. Избранные труды. — М: Изд-во АН СССР, 1952.

2. Haselgrove C.B. Some theorems in the analitic theory of number // J. London Math. Soc., 1951, v. 26, pp. 273-277.

3. Pan Cheng-dong, Pan Cheng-biao. On estimations of trigonometric sums over primes in short intervals // Chinese Ann. of Math, 1990, v. 2, pp. 138 – 147.

4. Zhan T. On the Representation of large odd integer as a sum three almost equal primes // Acta Math Sinica. New ser, 1991, v. 7, No 3, pp. 135 – 170.

5. Jia Chao-hua. Three primes theorem in a short interval (VII) // Acta Mathematica Sinica. New ser, 1994, v. 10, № 4. pp. 369 – 387.

6. Baker A. On some diophantine inequalities involving primes // J. Reine Angew. Math, 1967, v. 228, pp. 166 – 181.

7. Рахмонов З. Х., Аллаков И., Абраев Б. Т. Асимптотическая формула в обобщении тернарной проблемы Гольдбаха с почти равными слагаемыми // Доклады Национальной академии наук Таджикистана. 2023. Т. 66. № 5-6. С. 257-262.

8. Рахмонов З. Х., Аллаков И., Абраев Б. Т. Обобщение тернарной проблемы Гольдбаха с почти равными слагаемыми // Bulletin of the Institute of Mathematics, 2023, Vol.6, No 4, pp. 122-148.

9. Рахмонов З. Х., Аллаков И., Абраев Б. Т. 213. Обобщение тернарной проблемы Гольдбаха с почти равными слагаемыми // Чебышевский сборник. 2023. Т. 24. № 4. С. 264-298.

УДК 511.464

Алгебраическая независимость элементов из прямых произведений $\mathbb{C}_p$ над прямым произведением $\mathbb{Q}_p$

А. С. Самсонов (Россия, г. Москва)
Московский педагогический государственный университет
e-mail: dontsmoke@inbox.ru

Algebraic independence of elements from direct products of $\mathbb{C}_p$ over a direct product of $\mathbb{Q}_p$

A. S. Samsonov (Russia, Moscow)
Moscow State Pedagogical University
e-mail: dontsmoke@inbox.ru

Рассматриваются вопросы трансцендентности и алгебраической независимости элементов прямых произведений p-адических полей.

Обозначения для p-адических чисел: p — простое число; $|x|_p = p^{-ord_p x}$ — p-адическая норма; $\mathbb{Z}_p$ — кольцо целых p-адических чисел; $\mathbb{Q}_p$ — пополнение поля рациональных чисел по p-адической норме; Ω_p, оно же $\mathbb{C}_p$ — пополнение алгебраического замыкания $\mathbb{Q}_p$.

Обозначения для g-адических чисел: $g = p_1 \dots p_n$ — произведение различных простых чисел; $|x|_g$ — g-адическая псевдонорма; $\mathbb{Z}_g$ — кольцо целых g-адических чисел; $\mathbb{Q}_g$ — пополнение множества рациональных чисел по g-адической псевдонорме; построены кольцо Ω_g — расширение кольца $\mathbb{Q}_g$, $\Omega_g \cong \Omega_{p_1} \oplus \dots \oplus \Omega_{p_n}$.

Обозначения для полиадических чисел: все простые числа пронумерованы $p_1 = 2,\ p_2 = 3,\ p_3 = 5, \dots$; $\widehat{\mathbb{Z}} = \prod\limits_p \mathbb{Z}_p$ — кольцо целых полиадических чисел; $\widehat{\mathbb{Q}} = \prod\limits_p \mathbb{Q}_p$, $\widehat{\Omega} = \prod\limits_p \Omega_p$.

Другие обозначения: $K[[z]]$ — степенные ряды над кольцом K; нуль и делители нуля исключены звездочкой, например, $\mathbb{Z}_g^* \subset \mathbb{Z}_g$.

Кроме того, используется понятие глобального соотношения, в частности, элементы прямого произведения называются глобально алгебраически независимыми, если алгебраическая независимость имеет место при рассмотрении каждой координаты отдельно.

Некоторые результаты об алгебраической независимости элементов из Ω_p над $\mathbb{Q}_p$ были получены в работах В. Г. Чирского и П. Бундшу [1], [2], [3]. Моя задача заключалась в том, чтобы рассмотреть элементы из прямого произведения p-адических полей и получить развитие в этом направлении. Например, можно сравнить две следующие теоремы.

Теорема 1. *Пусть p — простое число, функции*

$$f_\lambda(z) = \sum_{j=0}^{\infty} c_{j,\lambda} z^j \in \mathbb{Z}_p[[z]],\ \lambda = 1, \ldots, l,$$

являются алгебраически независимыми над $\mathbb{Q}_p$,

$$\alpha_\mu = \sum_{k=1}^{\infty} a_{k,\mu} p^{r_{k,\mu}},\ \alpha_\mu \in \Omega_p,\ ord_p(a_{k,\mu}) = 0,\ \mu = 1, \ldots, m.$$

Пусть
1) для любого $\mu = 1, \ldots, m$ положительные рациональные числа $r_{k,\mu}$ образуют возрастающую и стремящуюся к $+\infty$ при $k \to +\infty$ последовательность;
2) для любого $\mu = 1, \ldots, m$ существует бесконечное множество номеров k таких, что число $r_{k+1,\mu}$ не является линейной комбинацией с целыми коэффициентами чисел $1, r_{1,\mu}, \ldots, r_{k,\mu}$ и чисел $r_{k',\mu'}$ при любых k' и $\mu' \neq \mu$.

Тогда элементы $f_\lambda(\alpha_\mu)$ представляют собой алгебраически независимые над $\mathbb{Q}_p$ элементы Ω_p.

Теорема 2. *Пусть $g = p_1 \ldots p_n$, функции*

$$f_\lambda(z) = \sum_{j=0}^{\infty} c_{j,\lambda} z^j \in \mathbb{Z}_g[[z]],\ \lambda = 1, \ldots, l,$$

являются глобально алгебраически независимыми над $\mathbb{Q}_g$.

$$\alpha_\mu = \sum_{k=1}^{\infty} a_{k,\mu} g^{r_{k,\mu}},\ \alpha_\mu \in \Omega_g,\ a_{k,\mu} \in \mathbb{Z}_g^*,\ \mu = 1, \ldots, m.$$

Пусть
1) для любого $\mu = 1, \ldots, m$ положительные рациональные числа $r_{k,\mu}$ образуют возрастающую и стремящуюся к $+\infty$ при $k \to +\infty$ последовательность;
2) для любого $\mu = 1, \ldots, m$ существует бесконечное множество номеров k таких, что число $r_{k+1,\mu}$ не является линейной комбинацией с целыми коэффициентами чисел $1, r_{1,\mu}, \ldots, r_{k,\mu}$ и чисел $r_{k',\mu'}$ при любых k' и при $\mu' \neq \mu$;
3) не существует номеров k, k', μ таких, что разница $r_{k,\mu} - r_{k',\mu}$ является целым числом.

Тогда элементы $f_\lambda(\alpha_\mu)$ представляют собой глобально алгебраически независимые над $\mathbb{Q}_g$ элементы Ω_g.

В одной теореме доказывается алгебраическая независимость элементов из поля p-адических чисел над полем коэффициентов. В другой теореме доказывается глобальная алгебраическая независимость элементов из кольца с делителями нуля, которое является прямым произведением конечного числа полей p-адических чисел; коэффициенты соответствующие.

Использование понятия глобального соотношения объясняется тем, что в прямых произведениях есть чересчур простые способы получить нуль, например, $(a, 0) \times (0, b) = (0, 0)$. В результате получается, что доказательство можно сводить к p-адическому случаю.

Можно не ограничиваться конечным произведением полей и получить полиадический вариант, который доказывается аналогичным образом.

Теорема 3. *Пусть $g = (p_1, \ldots, p_n, \ldots)$, функции*

$$f_\lambda(z) = \sum_{j=0}^{\infty} c_{j,\lambda} z^j \in \widehat{\mathbb{Z}}[[z]],\ \lambda = 1, \ldots, l,$$

являются глобально алгебраически независимыми над $\widehat{\mathbb{Q}}$.

$$\alpha_\mu = \sum_{k=1}^{\infty} a_{k,\mu} g^{r_{k,\mu}},\ \alpha_\mu \in \widehat{\Omega},\ a_{k,\mu} \in \widehat{\mathbb{Z}}^*,\ \mu = 1, \ldots, m.$$

Пусть
1) для любого $\mu = 1, \ldots, m$ положительные рациональные числа $r_{k,\mu}$ образуют возрастающую и стремящуюся к $+\infty$ при $k \to +\infty$ последовательность;
2) для любого $\mu = 1, \ldots, m$ существует бесконечное множество номеров k таких, что число $r_{k+1,\mu}$ не является линейной комбинацией с целыми коэффициентами чисел $1, r_{1,\mu}, \ldots, r_{k,\mu}$ и чисел $r_{k',\mu'}$ при любых k' и при $\mu' \neq \mu$;
3) не существует номеров k, k', μ таких, что разница $r_{k,\mu} - r_{k',\mu}$ является целым числом.

Тогда элементы $f_\lambda(\alpha_\mu)$ представляют собой глобально алгебраически независимые над $\widehat{\mathbb{Q}}$ элементы $\widehat{\Omega}$.

Самой большой проблемой при получении новых результатов явилось следующее условие из первой теоремы: $ord_p(a_{k,\mu}) = 0$. В p-адическом случае коэффициенты из $\mathbb{Z}_p$ и свободны от степеней p. Подобное требование выглядит естественным, например, в противном случае сумма вырождается — становится равной нулю, для этого достаточно сделать каждый нечетный член суммы противоположным следующему члену. В g-адическом случае, можно потребовать, чтобы коэффициенты были свободны от степеней некоторых простых чисел, но в полиадическом случае условия теоремы станут очень существенными ограничениями.

У второй теоремы есть дополнительное условие, под третьим номером. Можно сказать, что это условие невырожденности суммы, которое не является существенным ограничением для рассматриваемых элементов. Если бы существовали два показателя, которые отличаются целым числом, то два члена суммы можно было бы сложить в один, с целым g-адическим коэффициентом.

При $g = p$ можно отметить, что первая теорема является прямым следствием второй, но не наоборот. Порядок членов суммы меняется, что ведет к нарушению условий под первым и вторым номерами. К счастью, получилось доказать лемму о том, что указанные условия сохраняются при подобных перестановках членов суммы.

Таким образом, результаты из работ [4] и [5] были получены при поиске оптимальной комбинации изменений как в условиях теоремы, так и в способах доказательства.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Bundschuh P., Chirskii V. G. On the algebraic independence of elements from $\mathbb{C}_p$ over $\mathbb{Q}_p$, I // Arch. Math. 2002. V. 79. P. 345-352.

2. Bundschuh P., Chirskii V. G. On the algebraic independence of elements from $\mathbb{C}_p$ over $\mathbb{Q}_p$, II // ActaArithm. 2004. V. 113, № 4. P. 309-326.

3. Bundschuh P., Chirskii V. G. Estimating polynomials over $\mathbb{Z}_p$ at points from $\mathbb{C}_p$ // Moscow Journ. of Comb. and Number Th. 2015. V. 5, iss. 1-2. P. 14-20.

4. Самсонов А. С. Арифметические свойства элементов прямых произведений p-адических полей // Чебышевский сборник, 2020, т. 21, вып. 4, с. 227–242.

5. Самсонов А. С. Арифметические свойства элементов прямых произведений p-адических полей, II // Чебышевский сборник, 2021, т. 22, вып. 2, с. 236–256.

УДК 511.3

Об эргодических свойствах некоторых представлений действительных чисел[1]

П. Н. Сорокин (Россия, г. Москва)
Научно-исследовательский институт системных исследований РАН
e-mail: s_p_n_1974@bk.ru

On ergodic properties of some representations of real numbers

P. N. Sorokin (Russia, Moscow)
Scientific Research Institute of System Development of the RAS
e-mail: s_p_n_1974@bk.ru

1. Рассмотрим динамическую систему, задаваемую отображением $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ и порожденную итерационным процессом, который дает представление действительного числа x в виде:

$$x = \varepsilon_0(x) + f(\varepsilon_1(x) + f(\varepsilon_2(x) + ... + f(\varepsilon_n(x) + ...)...), \tag{1}$$

где цифры $\varepsilon_n = \varepsilon_n(x)$ и остатки $r_n = r_n(x) = f(\varepsilon_{n+1}(x) + f(\varepsilon_{n+2}(x) + ...)...)(n = 0, 1, ...)$ определяются рекуррентными соотношениями:

$$\begin{gathered} \varepsilon_0(x) = [x], \quad r_0(x) = \{x\}, \\ \varepsilon_{n+1}(x) = [\varphi(r_n(x))], \quad r_{n+1}(x) = \{\varphi(r_n(x))\}, \quad n = 0, 1, ..., \end{gathered} \tag{2}$$

где $y = f(x)$ — положительная функция, $[z]$ — целая часть, $\{z\}$ — дробная часть действительного числа z, $x = \varphi(y)$ — обратная функция к $y = f(x)$.

Следуя [1] - [3], возьмем функцию $f(x)$, которая удовлетворяет следующим условиям:

$A1) f(1) = 1$ $(B1) f(0) = 1)$.

Функция $f(t)$ — непрерывная, монотонная и строго $A2)$ убывающая ($B2)$ возрастающая) для $1 \le t \le T$ $(0 \le t \le T)$ и $f(t) = 0$ $(f(t) = 1)$ при $t \ge T$, где $2 < T \le +\infty$ $(1 < T \le +\infty)$. Если $T = +\infty$, то $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = 0$ $(\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = 1)$.

Возможны три подслучая:

---

[1]Работа выполнена в рамках проекта ФГУ ФНЦ НИИСИ РАН «Создание и реализация доверенных систем искусственного интеллекта, основанных на новых математических и алгоритмических методах, моделях быстрых вычислений, реализуемых на отечественных вычислительных системах». Код FNEF-2024-0001.

$A21)T=+\infty$ $(B21)T=+\infty)$,
$A22)2<T<+\infty, T\in\mathbb{Z}$ $(B22)T<+\infty, T\in\mathbb{Z})$,
$A23)2<T<+\infty, T\notin\mathbb{Z}$ $(B23)T<+\infty, T\notin\mathbb{Z})$,
$A3)\frac{|f(t_2)-f(t_1)|}{|t_2-t_1|}\leq 1, \quad 1\leq t_1<t_2$,
$A31)$ $\exists$ константа $0<\lambda<1$: $\frac{|f(t_2)-f(t_1)|}{|t_2-t_1|}\leq\lambda, \quad 1+f(2)<t_1<t_2$,
$B3)\frac{f(t_2)-f(t_1)}{t_2-t_1}\leq 1, \quad 0\leq t_1<t_2$.

Замечание 1. *Если выполнены условия* $A1)$, $A2)$ *(соответственно* $B1)$, $B2)$*), то представление (1) называется представлением с независимыми цифрами, а если выполнены условия* $A23)$ *(соответственно* $B23)$*), то (1) называется представлением с зависимыми цифрами.*

Лемма 1. *Из справедливости условий* $A1)$, $A2)$, $A3)$, $A31)$ *следует справедливость представления (1) для любого* $x\in\mathbb{R}$.

Лемма 2. *Из справедливости условий* $B1)$, $B2)$, $B3)$ *следует справедливость представления (1) для любого* $x\in\mathbb{R}$.

Замечание 2. *Достаточно рассматривать представление (1), когда* $0<x<1$.

2. Рассмотрим сначала случай, когда $\varepsilon_k(x)(k=0,1,...)$ — независимые цифры.
Определим функции $F_n(z_0,z_1,...,z_n)$ следующим образом:

$$F_0(z_0)=z_0, \quad F_1(z_0,z_1)=F_0(z_0+f(z_1)),$$
$$F_n(z_0,z_1,...,z_n)=F_{n-1}(z_0,z_1,...,z_{n-2},z_{n-1}+f(z_n)). \tag{3}$$

Тогда

$$F_1(z_0,z_1)=z_0+f(z_1),$$
$$F_2(z_0,z_1,z_2)=z_0+f(z_1+f(z_2)),$$
$$\dots$$
$$F_n(z_0,z_1,z_2,...,z_n)=z_0+f(z_1+f(z_2+\cdots+f(z_n)\cdots)).$$

Для цифр $\varepsilon_k(x)(k=0,1,...)$ определим функции

$$f_n(\varepsilon_0(x),\varepsilon_1(x),...,\varepsilon_n(x))=F_n(\varepsilon_0(x),\varepsilon_1(x),...,\varepsilon_n(x)),$$

называемые n-ым приближенным значением действительного чисда x. Тогда

$$f_0(\varepsilon_0(x))=\varepsilon_0(x),$$

$$f_1(\varepsilon_0(x),\varepsilon_1(x))=\varepsilon_0(x)+f(\varepsilon_1(x)),$$
$$f_2(\varepsilon_0(x),\varepsilon_1(x),\varepsilon_2(x))=\varepsilon_0(x)+f(\varepsilon_1(x)+f(\varepsilon_2(x))),$$
$$\dots$$
$$f_n(\varepsilon_0(x),\varepsilon_1(x),\varepsilon_2(x),...,\varepsilon_n(x))=\varepsilon_0(x)+f(\varepsilon_1(x)+f(\varepsilon_2(x)+\cdots+f(\varepsilon_n(x))\cdots)).$$

Если $r_n(x)=0$, то в этом случае

$$\lim_{n\to+\infty}f_n(\varepsilon_0(x),\varepsilon_1(x),...,\varepsilon_{n-1}(x),\varepsilon_n(x))=x.$$

Далее будем рассматривать случай, когда $r_n(x)\neq 0$. Тогда для $0<x<1$ имеем

$$x=f_n(0,\varepsilon_1(x),...,\varepsilon_{n-1}(x),\varepsilon_n(x)+r_n(x)).$$

Пусть функция $f(x)$ удовлетворяет условиям $A1), A2), A3)$ или $B1), B2), B3)$. Тогда $f(x)$ почти всюду дифференцируема и абсолютно непрерывна. То же самое справедливо и для функции $f_n(0, \varepsilon_1(x), ..., \varepsilon_n(x) + t)$ как функции от t $(0 < t < 1)$. Положим

$$H_n(x,t) = \frac{d}{dt} f_n(0, \varepsilon_1(x), ..., \varepsilon_n(x) + t).$$

Будем предполагать, что выполнено также следующее условие C):

$$\frac{\sup\limits_{0<x<1} |H_n(x,t)|}{\inf\limits_{0<x<1} |H_n(x,t)|} \leq C,$$

где константа $C \geq 1$ не зависит ни от x, ни от n.

Верна следующая теорема:

Теорема 1. *Пусть функция $f(x)$ удовлетворяет условиям $A1), A21)$ или $A22), A3), C)$ $(B1), B21)$ или $B22), B3), C))$. Тогда для любой функции $g(x)$, которая является интегрируемой по Лебегу на интервале $(0,1)$ почти для всех x имеем:*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} g(r_k(x)) = N(g) = \int\limits_0^1 g(x)h(x)dx,$$

где $N(g)$ — const, а $h(x)$ — некоторая измеримая функция (зависит только от $f(x)$), которая удовлетворяет неравенству $\frac{1}{C} \leq h(x) \leq C$ (C — константа из условия C).

Для любого подмножества $E \subset (0,1)$ мера $\nu(E) = \int\limits_E h(x)dx$ — инвариантна относительно преобразования $T(x) = \{\varphi(x)\}$, где $y = \varphi(x)$ — обратная функция к $x = f(y)$.

Пример 4. *(q-адическое представление действительных чисел).*

Пусть $f(x) = \frac{x}{q}$ $(q = 2, 3, ...)$, $x(y) = qy$ – обратная функция к $y(x) = f(x)$. Тогда

$$x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varepsilon_k(x)}{q^k}, \quad \varepsilon_0(x) \in \mathbb{Z}, \quad \varepsilon_k(x) \in \{0, 1, ..., q-1\},$$

$$\varepsilon_0(x) = [x], \quad r_0(x) = \{x\}, \quad \varepsilon_{n+1}(x) = [qr_n(x)], \quad r_{n+1}(x) = \{qr_n(x)\}, \quad n = 0, 1, ...$$

Условия $B1)$, $B23)$, $B3)$ выполнены.

$$H_n(x,t) = \frac{d}{dt} f_n(0, \varepsilon_1(x), ..., \varepsilon_n(x) + t) = \frac{d}{dt}\left[\frac{\varepsilon_1(x)}{q} + \frac{\varepsilon_2(x)}{q^2} + \cdots + \frac{\varepsilon_n(x) + t}{q^n}\right] = \frac{1}{q^n},$$

$$\frac{\sup\limits_{0<x<1} |H_n(x,t)|}{\inf\limits_{0<x<1} |H_n(x,t)|} = 1.$$

Значит условие $C)$ выполнено с константой $C = 1$. Из условия $1/C \leq h(x) \leq C$ следует, что $h(x) = 1$. Отсюда мера $\nu(E) = \int_E dx = \mu(E)$ и мера Лебега инвариантна относительно преобразования $Tx = \{qx\}$.

Пример 5. *(Представление действительных чисел с помощью цепных дробей).*

Пусть $f(x) = \frac{1}{x}$, $x \geq 1$, $x(y) = \frac{1}{y}$ – обратная функция к $y(x) = f(x)$. Тогда

$$x = \varepsilon_0(x) + \cfrac{1}{\varepsilon_1(x) + \frac{1}{\varepsilon_2(x) + \cdots}},$$

$$\varepsilon_0(x)=[x],\quad r_0(x)=\{x\},\quad \varepsilon_{n+1}(x)=\left[\frac{1}{r_n(x)}\right],\quad r_{n+1}(x)=\left\{\frac{1}{r_n(x)}\right\},\quad n=0,1,....$$

Условия $A1)$, $A21)$, $A3)$ выполнены. Пусть p_k/q_k — k-ая подходящая дробь к x. Тогда

$$H_n(x,t)=\frac{d}{dt}f_n(0,\varepsilon_1(x),...,\varepsilon_n(x)+t)=\frac{d}{dt}\left[\frac{p_{n-2}+p_{n-1}\cdot(\varepsilon_n(x)+t)}{q_{n-2}+q_{n-1}\cdot(\varepsilon_n(x)+t)}\right]=\frac{(-1)^n}{(q_{n-2}+q_{n-1}\cdot(\varepsilon_n(x)+t))^2},$$

$$\frac{\sup\limits_{0<x<1}|H_n(x,t)|}{\inf\limits_{0<x<1}|H_n(x,t)|}=\frac{(q_{n-2}+q_{n-1}\cdot(\varepsilon_n(x)+1))^2}{(q_{n-2}+q_{n-1}\cdot\varepsilon_n(x))^2}=\left(1+\frac{q_{n-1}}{q_n}\right)^2\le(1+1)^2=4.$$

Условие $C)$ выполнено с $C=4$ и мера Лебега $\mu(T^{-n}E)\le 4\mu(E)$, где $T^{-1}E$ — множество действительных чисел $x\in(0,1)$ таких, что $Tx\in E\subset(0,1)$, $T^{-n}E=T^{-1}(T^{-(n-1)}E), n=2,3,...$

3. Рассмотрим теперь функцию $f(x)=\frac{x}{\beta}$, $0\le x\le\beta$, $\beta\notin\mathbb{Z},\beta>1$, которая удовлетворяет случаю с "зависимыми" цифрами $\varepsilon_k(x)(k=0,1,...)$. Условия $B1)$, $B23)$, $B3)$ выполнены. Значит любое действительное число x может быть представлено в виде:

$$x=\varepsilon_0(x)+\frac{\varepsilon_1(x)}{\beta}+\frac{\varepsilon_2(x)}{\beta^2}+\cdots+\frac{\varepsilon_n(x)}{\beta^n}+\cdots, \tag{4}$$

где цифры $\varepsilon_n(x)$ и остатки $r_n(x)$ $(n=0,1,...)$ определяются рекуррентными соотношениями:

$$\begin{gathered}\varepsilon_0(x)=[x],\quad r_0(x)=\{x\},\\ \varepsilon_{n+1}(x)=[\beta r_n(x)],\quad r_{n+1}(x)=\{\beta r_n(x)\},\quad n=0,1,....\end{gathered} \tag{5}$$

Цифры $\varepsilon_n(x)$, $n\ge1$, которые могут принимать значения $0,1,...,[\beta]$, можно описать, не вводя остатки $r_n(x)$:

$$\varepsilon_0(x)=[x],\quad \varepsilon_1(x)=[\beta\{x\}],\quad \varepsilon_2(x)=[\beta\{\beta\{x\}\}],\quad \varepsilon_3(x)=[\beta\{\beta\{\beta\{x\}\}\}],\quad ...$$

В этом случае $Tx=\{\beta x\}$ — преобразование интервала $(0,1)$ на себя. Верна теорема:

Теорема 2. *Пусть функция $f(x)$ удовлетворяет условиям $B1), B23)$ и $B3)$. Тогда для любой функции $g(x)$, которая является интегрируемой по Лебегу на интервале $(0,1)$ почти для всех x имеем:*

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}g(r_k(x))=N(g)=\int\limits_0^1 g(x)h(x)dx,$$

где $N(g)$ — const, не зависящая от x, а $h(x)$ — некоторая измеримая функция, которая удовлетворяет неравенству

$$1-\frac{1}{\beta}\le h(x)\le\frac{1}{1-\frac{1}{\beta}}.$$

Существует мера ν, эквивалентная мере Лебега μ, инвариантная относительно преобразования $T(x)=\{\beta x\}$, и для любого измеримого подмножества $E\subset(0,1)$ имеем

$$\nu(E)=\int\limits_E h(x)dx.$$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Rényi A. Representations for real numbers and their ergodic properties // Acta Math. Acad. Sci. Hungar. 1957. Vol. 8. No 3-4. P. 477-493.

2. Bissinger B. H. A generalization of continued fractions // Bulletin of the Amer. Math. Soc. 1944. Vol. 50. P. 868-876.

3. Everett C. I. Representations for real numbers // Bulletin of the Amer. Math. Soc. 1946. Vol. 52. P. 861-869.

УДК 511.32

Формула Маклорена характеристического многочлена для пары матриц

В. И. Усков (Россия, г. Воронеж)
Воронежский государственный лесотехнический университет им. Г. Ф. Морозова
e-mail: vum1@yandex.ru

Maclaurin's formula for the characteristic polynomial for a pair of matrices

V. I. Uskov (Russia, Voronezh)
Voronezh State University of Forestry and Technologies named after G. F. Morozov
e-mail: vum1@yandex.ru

Пусть $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ — числовые матрицы размерности $n \times n$.

Определение 1. *Характеристическим многочленом для пары матриц* (A, B) *назовем многочлен* $R(\lambda) = \det(A - \lambda B)$.

В настоящей работе будет получена формула Маклорена $R(\lambda)$ разложения по степеням λ. Результат иллюстрируется примером с дифференциальным уравнением второго порядка.

Пусть $f_{jk}(x)$ — скалярные вещественные функции, $j, k = 1, 2, \ldots, n$. Введем функции, построенные с помощью определителя:

$$F(x) = \det\left(f_{jk}(x)\right), \quad F_n(x) = \det\left(f_{jk}^{(i_j)}(x)\right),$$

и пусть $P(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ — полиномиальный коэффициент.

Утверждение 1. *Имеет место следующая формула производной:*

$$F^{(m)}(x) = \sum_{\substack{i_1, i_2, \ldots, i_n \geqslant 0, \\ i_1 + i_2 + \ldots + i_n = m}} P(i_1, i_2, \ldots, i_n) F_n(x).$$

Теперь пусть M_k — сумма определителей матриц, в которых k строк матрицы A заменены строками матрицы B с теми же номерами.

Утверждение 2. *Справедлива следующая формула Маклорена характеристического многочлена:*

$$R(\lambda) = \sum_{k=0}^{n} (-\lambda)^k M_k.$$

Доказательство.

Разложим $R(\lambda)$ по формуле Маклорена

$$R(\lambda) = \sum_{k=0}^{n} \frac{R^{(k)}(0)}{k!}\lambda^k \tag{1}$$

и, пользуясь утверждением 1, вычислим $R^{(k)}(0)$.

Нетрудно видеть, что $R(0) = \det A = M_0$.

Отметим, что $(a_{ij} - \lambda b_{ij})^{(0)} = a_{ij}$, $(a_{ij} - \lambda b_{ij})^{(1)} = -b_{ij}$, $(a_{ij} - \lambda b_{ij})^{(r)} = 0$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$, $r = 2, 3, \ldots$.

Далее, в $R^{(k)}(0)$, $k = 1, 2, \ldots, n-1$, заметим, что в слагаемых-определителях по наборам $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$, в которых минимальная координата равна 2, содержится хотя бы одна нулевая строка, следовательно, такие слагаемые равны нулю. Останутся слагаемые по наборам из нулей и k единиц. В этих слагаемых k строк получены заменой строк матрицы A на строки матрицы B с минусами с теми же номерами. Вынося из каждой такой строки множитель (-1), получим множитель $(-1)^k$. Значит, $R^{(k)}(0) = k!(-1)^k M_k$.

Нетрудно видеть, что $R^{(n)}(0)$ содержит только одно слагаемое по набору из n единиц, поэтому равно $n!(-1)^n \det B = n!(-1)^n M_n$.

При остальных k каждый набор $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ содержит минимальную координату 2, поэтому все слагаемые, а, значит, и $R^{(k)}(0)$ равны 0.

Подставив их в формулу (1), получим искомое утверждение. □

В частности, при $n = 3$ имеем:

$$R(\lambda) = M_0 - \lambda M_1 + \lambda^2 M_2 - \lambda^3 M_3, \tag{2}$$

где $M_0 = \det A$, $M_3 = \det B$,

$$M_1 = \det\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix},$$

$$M_2 = \det\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}.$$

Определение 2. *Ненулевой вектор h, удовлетворяющий уравнению*

$$(A - \lambda B)h = 0,$$

будем называть (A, B)-собственным вектором.

Определение 3. *Корень λ уравнения*

$$R(\lambda) = 0$$

будем называть (A, B)-собственным значением.

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$B\frac{d^2u}{dt^2} = A\frac{du}{dt}. \tag{3}$$

Имеет место следующее утверждение.

Утверждение 3. *Пусть λ — (A,B)-собственное значение, h — (A,B)-собственный вектор, отвечающий этому собственному значению. Тогда функция*

$$u = e^{\lambda t}h \tag{4}$$

является частным решением уравнения (3).

Утверждение получается непосредственной подстановкой (4) в (3).

Пример 6. *Рассмотрим уравнение* (3) *с матрицами*

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -3 \\ a & 5 & 0 \\ 6 & 0 & b \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix},$$

где a, b, c — параметры. При каких значениях этих параметров функции $e^{2t}h_1$, $e^{4t}h_2$, где h_1, h_2 — (A,B)-собственные векторы, являются частными решениями уравнения?

Нетрудно видеть, что $M_0 = 0$. Это означает, что $\lambda_0 = 0$ является (A,B)-собственным значением. Далее, вычисления показывают, что коэффициенты многочлена $R(\lambda)$ в (2) равны $M_1 = 4a - 13$, $M_2 = -ab + b - 12a + 99$, $M_3 = -4ab + 10b + 90$.

Остальными (A,B)-собственными значениями являются $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 4$.

С другой стороны, для уравнения $R(\lambda) = 0$ по теореме Виета (учитывая, что один из корней нулевой), имеем:

$$\lambda_1 + \lambda_2 = \frac{M_2}{M_3} = \frac{-ab + b - 12a + 99}{-4ab + 10b + 90} = 6, \quad \lambda_1\lambda_2 = \frac{M_1}{M_3} = \frac{4a - 13}{-4ab + 10b + 90} = 8.$$

Решением системы являются пары $(a; b)$, равные $\left(\frac{3943 + 3\sqrt{42009}}{952}; \frac{517 - \sqrt{42009}}{32}\right)$, $\left(\frac{3943 - 3\sqrt{42009}}{952}; \frac{517 + \sqrt{42009}}{32}\right)$.

УДК 511.331

Нули дзета-функции Римана, лежащие на коротких промежутках критической прямой

Ш. А. Хайруллоев (Таджикистан, г. Душанбе)
Таджикский национальный университет
e-mail: shamsullo@rambler.ru

Zeros of the Riemann zeta function lying on short intervals of the critical line

Sh. A. Khayrulloev (Tajikistan, Dushanbe)
Tajik National University
e-mail: shamsullo@rambler.ru

Нули дзета-функции Римана, лежащие на коротких промежутках критической прямой, являются и интересным и сложным исследованием в области аналитической теории чисел. Дзета-функция Римана $\zeta(s)$, регулярно аналитически продолженная на всю комплексную плоскость за исключением единственной особой точки $s = 1$, стала основой для множества важных выводов в аналитической теории чисел.

Изучение нулей дзета-функции Римана на коротких промежутках критической прямой открывает новые возможности для более глубокого изучения простых чисел и их свойств. Это направление активно развивающееся и актуальное в математике, которое продолжает привлекать внимание широкого круга учёных математиков, способных расширить наши знания и продолжить путь для будущих открытий.

Бернхард Риман [1], сформулировал гипотезу, предполагающую, что все нетривиальные нули дзета-функции Римана находятся на «критической прямой». Несмотря на множество исследований и экспериментов, эта гипотеза до сих пор остаётся не доказанной.

Первым важным результатом, связанным с расположением нулей дзета-функции на критической прямой, стала теорема, доказанная Г.Харди [2]. Он сумел доказать, что количество таких нулей бесконечно. Это открытие было значительным шагом в понимании свойств дзета-функции Римана и проложило путь для дальнейших исследований в этой области.

Г.Харди и Д.Литтлвуд доказали следующее утверждение: *при любом положительном значении ε существует такое T_0, зависящее от ε, большее нуля, что для всех T, превышающих T_0, $H \geqslant T^{\frac{1}{4}+\varepsilon}$, промежуток $(T, T+H)$ содержит нуль нечётного порядка функции $\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)$.* Из этого следует, что на промежутке $(0, T)$ содержится более $T^{\frac{3}{4}+\varepsilon}$ нулей нечётного порядка функции $\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)$.

Число нулей функции $\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)$, лежащих на промежутке $(0, T)$, обозначаем через $N_0(T)$. Упомянем важные исследования Г.Харди и Д.Литтлвуда, выполненные в 1921 году [3]. В ходе своих исследований, эти учёные доказали следующую теорему: *Для любого $\varepsilon > 0$ существуют $T_0 = T_0(\varepsilon) > 0$, $c = c(\varepsilon) > 0$ такие, что при $T \geqslant T_0$, $H = T^{1/2+\varepsilon}$ справедливо неравенство*

$$N_0(T+H) - N_0(T) \geqslant cH.$$

В 1942 году Атле Сельберг [4] успешно доказал усиленный вариант теоремы Харди, Литтлвуда, которая имеет значительное значение, то есть: *При выполнении условий теоремы Харди и Литтлвуда справедливо неравенство:*

$$N_0(T+H) - N_0(T) \geqslant cH \ln T. \tag{1}$$

В оценке (1), проведённой А.Сельбергом, возникла интересная гипотеза о том, что неравенство (1) может быть выполнено и при меньших значениях H, то есть при $H = T^{\alpha+\varepsilon}$, где α – фиксированное положительное число, меньшее $1/2$ (Гипотеза А.Сельберга) [4].

В 1976 году чешский математик Я.Мозер [5] получил новый результат в названной проблеме: *При $T \geqslant T_0 > 0$, $H \geqslant T^{5/12} \ln^3 T$ справедливо неравенство*

$$N_0(T+H) - N_0(T) \geqslant cH,$$

$c > 0$ – *абсолютная постоянная.*

Это результат был представлен на международной конференции по теории чисел, которая проходила в Москве с 14 по 19 сентября 1981 г.

В 1984 году А.А.Карацуба [6] доказал гипотезу Сельберга при $\alpha = 27/82$, то есть доказал следующую теорему: *Пусть ε – произвольное положительное число, не превосходящее 0,001, $T \geqslant T_0 > 0$, $H \geqslant T^{27/82+\varepsilon}$. Тогда существуют положительная постоянная $c = c(\varepsilon)$ такая, что*

$$N_0(T+H) - N_0(T) \geqslant cH \ln T.$$

А. А. Карацуба высказал захватывающее утверждение о числе $\alpha = 27/82$, которое может быть заменено и меньшим числом [6]. Однако, следует обратить внимание на то, что это связано с весьма сложными оценками специального вида тригонометрическими сумм.

В настоящей работе, применяя метод экспоненциальных пар [7], следуя работам [8]–[9], доказывается гипотеза А.Сельберга, когда $\alpha = 1515/4816$.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть (κ, λ) — произвольная экспоненциальная пара,*

$$\theta(\kappa, \lambda) = \frac{\kappa + \lambda}{2\kappa + 2},$$

ε – произвольное положительное число, не превосходящее 0,001,

$$T \geqslant T_0(\varepsilon) > 0, \quad H = T^{\theta(\kappa,\lambda)+\varepsilon}.$$

Тогда существует положительная постоянная $c = c(\varepsilon)$ такая, что

$$N_0(T+H) - N_0(T) \geqslant cH \ln T.$$

Отметим, что показатель $\theta(\kappa; \lambda)$ в теореме 1 ранее рассматривался в проблеме Гаусса о числе целых точек в круге $x^2 + y^2 \leqslant R$, а также при оценке остаточного члена в проблеме делителей Дирихле о числе целых точек в гиперболе $xy \leqslant N$, $x > 0$, $y > 0$. Наилучшую оценку сверху для $\theta(\kappa; \lambda)$ на данный момент получили J.Bourgain и N.Watt [10]. Они доказали, что

$$\theta_0 = \min_{\kappa,\lambda \in \mathcal{P}} \theta(\kappa, \lambda) = \min_{\kappa,\lambda \in \mathcal{P}} \frac{\kappa + \lambda}{2\kappa + 2} \leqslant \frac{1515}{4816} = \frac{1}{3} - \frac{271}{3 \cdot 4816} \approx 0.314576,$$

где $\mathcal{P}$ — множество всех экспоненциальных пар.

Из этого и из теоремы 1 вытекает следующее

Следствие 1. *Пусть ε – произвольное положительное число, не превосходящее 0,001, $T \geqslant T_0(\varepsilon) > 0$, $H = T^{1515/4816+\varepsilon}$. Тогда существует положительная постоянная $c = c(\varepsilon)$ такая, что*

$$N_0(T+H) - N_0(T) \geqslant cH \ln T.$$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Риман Б. О числе простых чисел, не превышающих данной величины.— Сочинения. М.: ОГИЗ. 1948. 224 с.

2. Hardy G. H. Sur les zeros de la fonction $\zeta(s)$ de Riemann // Compt.Rend. Acad.Sci. 1914. V. 158. P. 1012-1014.

3. Hardy G. H., Littlewood J. E. The zeros of Riemann's zeta–function on the critical line // Math.Zs. 1921. V. 10. P. 283-317.

4. Selberg A. On the zeros of Riemann's zeta–function // Skr. Norske Vid. Akad. Oslo. 1942. V. 10. P. 1-59.

5. Мозер Я. Об одной теореме Харди-Литтлвуда в теории дзета-функции Римана // Acta Arith. 1976. V. 31. P. 45-51; Добавление Acta Arith. 1979. V. 35. P. 403-404.

6. Карацуба А. А. О нулях функции $\zeta(s)$ на коротких промежутках критической прямой // Изв. АН СССР. серия матемематическая. 1984. Том 48, № 3. С. 569-584.

7. Graham S. W., Kolesnik G. Vander Corput's Method of Exponential sums. — Cambridge university press, 1991. 117 p.

8. Хайруллоев Ш. А. О вещественных нулях производной функции Харди // Чебышевский сборник. 2021. Том. 22, № 5(81). С. 235-242.

9. Хайруллоев Ш. А. О нулях арифметических рядов Дирихле, не имеющих Эйлерова произведения // Известия Академии наук Республики Таджикистан. Отделение физико-математических, химических, геологических и технических наук. 2018. № 4(173). С. 7-25.

10. Bourgain J. and Watt N. Decoupling for perturbed cones and mean square of $|\zeta(0,5+it)|$ [Электронный ресурс], Режим доступа: http://arxiv.org/abs/1505.04161v1 [math.NT], 15 May 2015.

УДК 511.3

Об аналоге задачи Гельфонда для представлений Цекендорфа

А. В. Шутов (Россия, г. Владимир)
Владимирский государственный университет им. А. Г. и Н. Г. Столетовых
e-mail: a1981@mail.ru

On some analogue of the Gelfond problem for Zeckendorf representations

A. V. Shutov (Russia, Vladimir)
Vladimir State University
e-mail: a1981@mail.ru

Пусть

$$n=\sum_{k=0}^{b(n)} n_k(n)b^k,$$

где $n_k(n)\in\{0,1\ldots,b-1\}$, $b(n)=\max\{k:b^k\le n\}$ — разложение n в b-ичной системе счисления. Пусть также

$$s_b(n)=\sum_{k=0}^{b(n)} n_k(n)$$

— сумма цифр b-ичного разложения n. Рассмотрим величину $N_{d,a}^{(b)}(X)$ — количество натуральных чисел n, меньших X, для которых $s_b(n) \equiv a \pmod{d}$.

А. О. Гельфонд показал [1], что при условии взаимной простоты d и $b-1$ существует постоянная $\mu < 1$ (зависящая от b) такая, что

$$N_{d,a}^{(b)}(X) = \frac{X}{d} + O(n^{\mu}).$$

Одним из возможных направлений для обобщения данного результата стало рассмотрение его аналогов для других представлений натуральных чисел. Наиболее известное из таких представлений связано с числами Фибоначчи.

Как известно, последовательность Фибоначчи задается линейным рекуррентным соотношением

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$$

и начальными условиями

$$F_1 = F_2 = 1.$$

В этом случае каждое натуральное число имеет единственное представление

$$n = \sum_{k=2}^{f(n)} f_k(n) F_k,$$

где $f_k(n) \in \{0, 1\}$, $f_k(n) f_{k+1}(n) = 0$ и

$$f(n) = \max\{k : F_k \leq n\}.$$

Данное представление может быть получено при помощи жадного алгоритма и называется представлением Цекендорфа

Пусть теперь

$$s_F(n) = \sum_{k=2}^{f(n)} f_k(N)$$

— сумм цифр представления Цекендорфа натурального числа n. Положим

$$N_{d,a}(X) = \sharp\{n \in \mathbb{N} : n < X, s_F(n) \equiv a \pmod{d}\}.$$

Задачу изучения данной величины можно считать аналогом задачи Гельфонда для представлений Цекендорфа.

В случае $d = 2$ и $a \in \{0, 1\}$ хорошо известно (и элементарно доказывается), что

$$N_{2,a}(X) = \frac{X}{2} + O(\log X).$$

При $d \geq 3$ Позднее Тусвальднер и Ламбергер [2] показали, что существует значение $\mu_d < 1$, для которого имеет место асимптотика

$$N_{d,a}(X) = \frac{X}{d} + O(X^{\mu_d}).$$

Значение константы μ_d в работе найдено не было, хотя метод в принципе позволял найти некоторое, неоптимальное, значение данной константы.

В настоящей работе мы получаем аналог результата Тусвальднера — Ламбергера с оптимальным значением μ_d.

Пусть

$$\mu_d = \log_{\tau} \left| \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \cos\frac{2\pi}{d} + i \sin\frac{2\pi}{d}} \right|.$$

Тогда справедливы следующие утверждения.

Теорема 1. *Для любого $d \geq 3$ и любого $a \in \{0, 1, \ldots, d-1\}$ имеет место асимптотическая формула*

$$N_{d,a}(X) = \frac{X}{d} + O(X^{\mu_d}).$$

Теорема 2. *Для любого $d \geq 3$ и любого $a \in \{0, 1, \ldots, d-1\}$*

$$\limsup_{X \to \infty} \frac{|N_{d,a}(X) - \frac{X}{d}|}{X^{\mu_d}} > 0.$$

Использованный метод доказательства принципиально отличается от применявшегося в [2] и основан на изучении линейных рекуррентных соотношений, которым удовлетворяют значения остаточного члена в числах Фибоначчи, а также на построении и изучении комбинаторных треугольников (обобщающих треугольник Паскаля), связанных с коэффициентами характеристических многочленов полученных рекуррентных соотношений.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Gelfond A. O. Sur les nombres qui ont des propriétés additives et multiplicatives données // Acta Aithmetica. 1968. Vol. 13(3). P. 259-265.

2. Lamberger M., Thuswaldner J. W. Distribution properties of digital expansions arising from linear recurrences // Mathematica Slovaca. 2003. Vol. 53(1). P. 1-20.

Секция 6. Диофантовы приближения и теория трансцендентных чисел

УДК 511.36

Об алгебраических свойствах функций, связанных с гипергеометрическими[1]

В. А. Горелов (Россия, г. Москва)
Национальный исследовательский университет «Московский энергетический институт»
e-mail: gorelov.va@mail.ru

On algebraic properties of functions associated with hypergeometric functions

V. A. Gorelov (Russia, Moscow)
Moscow Power Engineering Institute
e-mail: gorelov.va@mail.ru

Метод Зигеля-Шидловского (см. [1]) позволяет устанавливать трансцендентность и алгебраическую независимость значений т.н. E-функций при алгебраических значениях аргумента. Для применения этого метода необходимо, чтобы рассматриваемые E-функции удовлетворяли системе линейных дифференциальных уравнений с коэффициентами из $\mathbb{C}(z)$ и были алгебраически независимыми над $\mathbb{C}(z)$. До недавнего времени метод в основном применялся к гипергеометрическим E-функциям ${}_l\varphi_q(\vec{\nu};\vec{\lambda};\alpha z^{q-l})$, где

$$
{}_l\varphi_q(\vec{\nu};\vec{\lambda};z) = {}_{l+1}F_q\left(\begin{matrix}1,\nu_1,\ldots,\nu_l\\ \lambda_1,\ldots,\lambda_q\end{matrix}\,\middle|\, z\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\nu_1)_n\ldots(\nu_l)_n}{(\lambda_1)_n\ldots(\lambda_q)_n}z^n,
$$

$0\leqslant l<q,\ (\nu)_0=1,\ (\nu)_n=\nu(\nu+1)\ldots(\nu+n-1),\ \vec{\nu}=(\nu_1,\ldots,\nu_l)\in\mathbb{Q}^l,\ \vec{\lambda}\in(\mathbb{Q}\setminus\mathbb{Z}_{\leqslant 0})^q,\ \alpha\in\mathbb{A}$, $\mathbb{A}$ — множество всех алгебраических чисел.

В последнее время автором проводятся исследования (см., например, [2]) E-функций, получающихся из гипергеометрических, степенных и показательных с помощью умножения и интегрирования.

Автором были рассмотрены функции

$$
V_{\lambda,\nu,\alpha}(z) = \nu z^{-\nu}e^{\alpha z}\int^{z} t^{\nu-1}e^{-\alpha t}\varphi_\lambda(t)dt =
$$

$$
= 1 + \left(\alpha + \frac{\nu}{\lambda+1}\right)\frac{z}{\nu+1} + \ldots,
$$

$\alpha\in\mathbb{C},\ \lambda,\nu\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}_{<0}$, удовлетворяющие уравнениям

$$
y'' + \left(-\alpha - 1 + \frac{\lambda+\nu+1}{z}\right)y' + \left(\alpha - \frac{\nu+(\lambda+1)\alpha}{z} + \frac{\lambda\nu}{z^2}\right)y = \frac{\lambda\nu}{z^2},
$$

[1] Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект 24-21-00196).

где $\varphi_\lambda(z)$ — функция, введённая А.Б. Шидловским,

$$\varphi_\lambda(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{(\lambda+1)\dots(\lambda+n)} = \lambda z^{-\lambda} e^z \int^z t^{\lambda-1} e^{-t} dt.$$

Автором найдены все случаи выражения функции $V_{\lambda,\nu,\alpha}(z)$ в виде многочлена от показательных функций и функций вида $\varphi_{\lambda_j}(\alpha_j z)$, а также получены необходимые и достаточные условия алгебраической зависимости и независимости над $\mathbb{C}(z)$ функций $V_{\lambda,\nu,\alpha}(z)$, $V'_{\lambda,\nu,\alpha}(z)$. Доказана следующая

Теорема. *E-функции $V_{\lambda,\nu,\alpha}(z)$ и $V'_{\lambda,\nu,\alpha}(z)$ алгебраически зависимы над $\mathbb{C}(z)$ тогда и только тогда, когда $\nu = 0$, либо $\alpha \in \mathbb{Q}$, $\lambda \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$, $\nu \in \mathbb{Z}_{>\lambda}$, либо $\alpha = 1$, $\nu - \lambda \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, либо $\alpha = 1$, $\lambda = 0$, либо $\alpha = 2$, $\nu = 2\lambda$, либо $\alpha \neq 1$, $\nu - \lambda = k \in \mathbb{Z}_{\geqslant 2}$,*

$$\lambda \sum_{n=0}^{k-1} \frac{(1-k)_n \; \alpha^{n+1}}{(2-\lambda-k)_n \; (\alpha-1)^n} = 0,$$

либо $\alpha = 2$, $2\lambda - \nu = k \in \mathbb{Z}_{\geqslant 3}$,

$$\sum_{n=0}^{k-1} \frac{(2\lambda-k)_n}{2^n (\lambda-k)_{n+1}} = 0,$$

либо $\alpha = 2$, $\nu - 2\lambda = k \in \mathbb{Z}_{\geqslant 3}$,

$$\sum_{n=0}^{k-1} \frac{2^n (1-\lambda-k)_n}{(1-2\lambda-k)_{n+1}} = 0.$$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Шидловский А. Б. Трансцендентные числа. – М: Наука, 1987. 448 с.
2. Горелов В. А. Об алгебраических свойствах интегралов от произведений некоторых гипергеометрических функций // Матем. заметки. 2024. Т. 115, вып. 2. С. 208 - 218.

УДК 511.42

Обобщение леммы Гельфонда о малых значениях целочисленных полиномов на совместные приближения

Н. И. Калоша (Беларусь, г. Минск)
Институт математики НАН Беларуси
e-mail: kalosha@im.bas-net.by
А. С. Кудин (Беларусь, г. Минск)
Институт математики НАН Беларуси
e-mail: knxd@yandex.ru
Ж. И. Пантелеева (Беларусь, г. Минск)
Белорусский государственный аграрный технический университет
e-mail: janna-85@list.ru

Generalization of Gelfond's lemma on small values of integer polynomials to joint approximations

N. I. Kalosha (Belarus, Minsk)
Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus
e-mail: kalosha@im.bas-net.by
A. S. Kudin (Belarus, Minsk)
Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus
e-mail: knxd@yandex.ru
Zh. I. Panteleeva (Belarus, Minsk)
Belarusian State Agrarian Technical University
e-mail: janna-85@list.ru

Дирихле [1] заметил, что действительные числа α можно приближать рациональными $\frac{p}{q}$ с точностью, значительно большей, чем $\frac{1}{q}$. Он доказал, что для любого α и любого натурального числа Q всегда можно найти целые числа p и q, $1 \leqslant q \leqslant Q$, такие что

$$|q\alpha - p| \leqslant Q^{-1}.$$

Выражение $qx - p$ можно рассмотреть как многочлен первой степени с целочисленными коэффициентами, что естественным образом ведет к обобщению результата Дирихле на многочлены произвольной степени

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0. \tag{1}$$

В (1) через n будем обозначать степень многочлена $\deg P = n$, а через $H = H(P) = \max\limits_{0 \leqslant j \leqslant n} |a_j|$ — его высоту.

В двадцатых годах прошлого века советский математик А.Я. Хинчин применил к теореме Дирихле теорию меры. Чтобы сформулировать его основной результат, введем следующие обозначения: $\Psi(x)$ — положительная монотонно убывающая функция положительного аргумента x; $\mu_1 A$ — мера Лебега измеримого множества $A \subset R$; $I \subset \mathbb{R}$ — интервал действительной оси. Через $\mathcal{L}_1(\Psi)$ обозначим множество действительных $x \in I$, для которых неравенство

$$|qx - p| \leqslant \Psi(q)$$

имеет бесконечное множество решений в многочленах первой степени с целочисленными коэффициентами.

Теорема 1 (Хинчина [2]). *Справедливы равенства*

$$\mu_1 \mathcal{L}_1(\Psi) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad \sum_{q=1}^{\infty} \Psi(q) < \infty, \\ \mu_1 I, & \text{если} \quad \sum_{q=1}^{\infty} \Psi(q) = \infty. \end{cases}$$

Теорема Хинчина была обобщена на многочлены произвольной степени В.И. Берником [3] и В.В. Бересневичем.

Теорема 2 (Берника-Бересневича [4]). *Для многочленов произвольной степени $n \geqslant 1$*

$$\mu_1 \mathcal{L}_n(\Psi) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad \sum_{H=1}^{\infty} \Psi(H) < \infty, \\ \mu_1 I, & \text{если} \quad \sum_{H=1}^{\infty} \Psi(H) = \infty. \end{cases} \tag{2}$$

Введем класс многочленов $\mathcal{P}_n(Q, \overline{v}, H)$ — целочисленные многочлены ограниченной высоты $\frac{Q}{2} \leqslant H \leqslant Q$, $\quad Q \in \mathbb{N}$, и одним и тем же вектором $\overline{v}$, где вектор $\overline{v}$ определенным образом характеризует малость расстояний между корнями исследуемых многочленов.

Теорема 3. *Пусть $P_1(t)$, $P_2(t)$ имеют степень n, их высоты не превосходят Q и не имеют общих корней в $\mathbb{C}$. Будем также предполагать, что $P_1(t)$, $P_2(t)$ лежат в одном и том же классе $\mathcal{P}_n(Q, \overline{v}, H)$, и что в объединении интервалов $I = I_1 \bigcup I_2$, $I_1 \bigcap I_2 = \emptyset$, $\mu I_1 = Q^{-\eta_1}$, $\mu I_2 = Q^{-\eta_2}$, $\eta_i \geqslant 0$, выполняются неравенства*

$$\max_{x \in I_1} (|P_1(x)|, |P_2(x)|) < Q^{-\tau_1}, \quad \tau_1 \geqslant 0,$$

$$\max_{x \in I_2} (|P_1(\omega)|, |P_2(\omega)|) < Q^{-\tau_2}, \quad \tau_2 \geqslant 0,$$

Тогда при любом $\delta > 0$ для достаточно большого Q, $Q > Q_0(\delta)$, справедливо неравенство

$$\tau_1 + \tau_2 + 2 + 2\sum_{k_1=1}^{n} \max(\tau_1 + 1 - k_1\eta_1, 0) + 2\sum_{k_2=1}^{n} \max(\tau_2 + 1 - k_2\eta_2, 0) < 2n + \delta.$$

Теорема 3 может быть использована для обобщения результата (2) на случай совместных приближений.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Dirichlet L.G.P. Verallgemeinerung eines Satzes aus der Lehre von den Kettenbrüchen nebst einigen Anwendungen auf die Theorie der Zahlen // Werke I. 1842. P. 633–638.
2. Khintchine A. Einige Sätze über Kettenbrüche, mit Anwendungen auf die Theorie der Diophantischen Approximationen // Mathematische Annalen. 1924. Vol. 92. P. 115–125.
3. Bernik V.I. The exact order of approximating zero by values of integral polynomials // Acta Arith. 1989. Vol. 53, No. 1. P. 17–28.
4. Beresnevich V.V. On approximation of real numbers by real algebraic numbers // Acta Arith. 1999. Vol. 50, No. 2. P. 97–112.

УДК 511.32

Диофантовы приближения приводимыми полиномами с малой производной в корне

В. О. Иванова (Беларусь, г. Минск)
Минский городской педагогический колледж
e-mail: someone_vnv@mail.ru
М. В. Ламчановская (Беларусь, г. Минск)
Военная академия Республики Беларусь
e-mail: lammv@mail.ru
Е. В. Сурай (Беларусь, г. Минск)
Институт математики НАН Беларуси
e-mail: suraylena@mail.ru

Diophantine approximation by reducible polynomials with a small derivative at a root

V. O. Ivanova (Belarus, Minsk)
Minsk City College of Education
e-mail: someone_vnv@mail.ru
M. V. Lamchanouskaya (Belarus, Minsk)
Military Academy of the Republic of Belarus
e-mail: lammv@mail.ru
E. V. Suray (Belarus, Minsk)
Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus
e-mail: suraylena@mail.ru

Важной задачей метрической теории диофантовых приближений, связанной с проблемой Малера [1], является изучение структуры множества решений неравенств

$$|P(x)| < H^{-v}, \quad v > 0 \tag{1}$$

в полиномах $P(x) \in \mathbb{Z}[x]$ степени n, высоты $H(P) \leqslant Q$, где $Q \in \mathbb{N}$, с корнями $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ и производной $|P'(\alpha_i)| < H^{1-w},\ w > 0$ в одном из корней $\alpha_i \quad 1 \leqslant i \leqslant n$.

Обозначим через $\#P_n(Q,w)$ количество полиномов из класса

$$P_n(Q,w) = \{P(x) \in \mathbb{Z}[x],\ degP \leqslant n,\ H(P) \leqslant Q,\ |P'(\alpha_i)| < Q^{1-w}\}.$$

В статье [2] Р. Бейкер вычислил $\#P_n(Q,w)$ при $0 \leqslant w \leqslant 1$ и нашел точную оценку размерности Хаусдорфа множества $\mathcal{L}_1$, подмножества действительных чисел, для которых неравенство (1) имеет бесконечное число решений в полиномах $P(x) \in \mathbb{Z}[x]$. Его результат был улучшен в работе [3], в которой была найдена оценка $\#P_n(Q,w)$ уже при $0 \leqslant w \leqslant 1,5$. Пользуясь результатом статьи [4] и оценкой сверху количества приводимых полиномов в неравенстве (1), получаем оценку:

$$\forall \varepsilon > 0,\ Q > Q_0(\varepsilon) \quad \#P_4(Q,w) < Q^{5-w},\ 0 \leqslant w \leqslant 2$$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Mahler K. Über das Maß der Menge aller S-Zahlen // Mathematische Annalen. 1932. Vol. 106, № 1 P. 131-139.

2. Baker R. C. Sprindžuk's theorem and Hausdorff dimension // Mathematica. 1976. Vol. 23, № 2 P. 184–197.

3. Берник В. И., Васильев Д. В., Кудин А. С. О числе целочисленных многочленов заданной степени и ограниченной высоты с малой производной в корне многочлена // Труды Института математики. 2014. Том 22, № 2. С. 3-8.

4. Берник В. И., Васильев Д. В., Калоша Н. И., Пантелеева Ж. И. Метрическая теория диофантовых приближений и асимптотические оценки для количества многочленов с заданными дискриминантами, делящимися на большую степень простого числа // Доклады НАН Беларуси. 2023. Том 67, № 4. С. 271—278.

УДК 511.36

Алгебраическая независимость степенных рядов некоторого вида и бесконечная алгебраическая независимость их значений

В. Ю. Матвеев (Россия, г. Москва)
Российская академия народного хозяйства и государственной службы при Президенте Российской Федерации
e-mail: salomaa@mail.ru

Algebraic independence of power series of some kind and infinite algebraic independence of their values

V. Y. Matveev (Russia, Moscow)
Russian Presidential Academy of National Economy and Public Administration
e-mail: salomaa@mail.ru

Доклад посвящён результатам об алгебраической независимости рядов вида

$$\sum_{n=0}^{\infty}(\alpha_i)_n(\gamma_j z)^n$$

над полем рациональных функций от z. Используется подход, предложенный в работе В.Х Салихова [2]. Применение теоремы В.Г. Чирского [3] позволяет получить теорему о бесконечной алгебраической независимости значений этих рядов в алгебраической точке. Результат может быть использован при построении независимых псевдослучайных чисел.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Матвеев В. Ю., «Свойства элементов прямых произведений полей», 2019, *Чебышевский сборник*, том 20, выпуск 2 (70), с. 386 – 393.

2. Салихов В. Х., «Об алгебраической независимости значений E-функций, удовлетворяющих линейным дифференциальным уравнениям первого порядка», 1973, *Матем. заметки.*, т.13., №1, с. 29 – 40.

3. Chirskii V. G., «Product formula, global relations and polyadic integers», 2019, *Russian Journal of Mathematical Physics, издательство Maik Nauka/Interperiodica Publishing (Russian Federation)*, том 26, №3, с. 286 – 305.

УДК 511.32

О линейной независимости совокупностей значений рядов с периодическими коэффициентами

В. Г. Чирский (Россия, г. Москва)
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
e-mail: vgchirskii@yandex.ru
В. Ю. Матвеев (Россия, г. Москва)
Российская академия народного хозяйства и государственной службы при Президенте Российской Федерации
e-mail: salomaa@mail.ru
А. Ю. Нестеренко (Россия, г. Москва)
Московский институт математики и электроники им. А. Н. Тихонова
e-mail: anesterenko@hse.ru

Linear independence of set of values generated by the series with periodic coefficients

V. G. Chirskii (Russia, Moscow)
Lomonosov Moscow State University
e-mail: vgchirskii@yandex.ru
V. Yu. Matveev (Russia, Moscow)
Russian Presidential Academy of National Economy and Public Administration
e-mail: salomaa@mail.ru
A. Yu. Nesterenko (Russia, Moscow)
Tikhonov Moscow Institute of Electronics and Mathematics of the HSE
e-mail: anesterenko@hse.ru

Настоящая работа продолжает исследования, начатые в работе [1].

Пусть последовательность целых чисел $\{c_k\}_{k=0}^{\infty}$ является чисто периодической последовательностью с длиной периода T. В [1] было доказано утверждение о том, что если найдется хотя бы один индекс k такой, что $c_k \neq 0$, то число

$$\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k}{k!} \tag{1}$$

является иррациональным. При доказательстве этого утверждения было показано, что равенство (1) равносильно равенству

$$\alpha = \sum_{k=0}^{T-1} \frac{c_k}{k!} f_k(1), \tag{2}$$

для некоторых рациональных, линейно-независимых над $\mathbb{C}(z)$ функций $f_k(z) \in \mathbb{C}(z)$.

Рассмотрим теперь T чисел вида (1)

$$\alpha_j = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k^{(j)}}{k!}, \quad \text{где} \quad c_k^{(j)} = c_{k+T}^{(j)}, \quad j = 0, \ldots, s-1. \tag{3}$$

Если для некоторого натурального s такого, что $2 \leqslant s \leqslant T$, найдется s индексов (без ограничения общности будем считать, что это индексы с номерами от 0 до $s-1$) таких, что вектора $\overline{c}^{(j)} = (c_0^{(j)}, c_1^{(j)}, \ldots, c_{s-1}^{(j)})$, $j = 0, \ldots, s-1$, линейно зависимы над полем рациональных чисел или, что равносильно, найдется отличный от нулевого вектор $\overline{a} = (a_0, \ldots, a_{s-1})$ такой, что

$$\begin{pmatrix} c_0^{(0)} & c_1^{(0)} & \ldots & c_{s-1}^{(0)} \\ c_0^{(1)} & c_1^{(1)} & \ldots & c_{s-1}^{(1)} \\ & & \ldots & \\ c_0^{(s-1)} & c_1^{(s-1)} & \ldots & c_{s-1}^{(s-1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \ldots \\ a_{s-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \ldots \\ 0 \end{pmatrix},$$

то числа $\alpha_0, \ldots, \alpha_{T-1}$ также линейно зависимы над полем рациональных чисел. Действительно, полагая $a_s = \ldots = a_{T-1} = 0$, получаем

$$\begin{aligned} &a_0\alpha_0 + \cdots + a_{T-1}\alpha_{T-1} = a_0\alpha_0 + \cdots + a_{s-1}\alpha_{s-1} = \\ &= a_0 \sum_{k=0}^{T-1} \frac{c_k^{(0)}}{k!} f_k(1) + \cdots + a_{s-1} \sum_{k=0}^{T-1} \frac{c_k^{(s-1)}}{k!} f_k(1) = \sum_{k=0}^{T-1} \left(\frac{a_0 c_k^{(0)} + \cdots + a_{s-1} c_k^{(s-1)}}{k!} \right) f_k(1) = 0. \end{aligned}$$

Если же вектора $\overline{c}^{(j)} = (c_0^{(j)}, c_1^{(j)}, \ldots, c_{T-1}^{(j)})$, $j = 0, \ldots, T-1$, линейно независимы, то, из линейной независимости рациональных функций $f_k(z)$ следует линейная независимость чисел $\alpha_0, \ldots, \alpha_{T-1}$. Обобщением проведенных рассуждений является следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть $m > 1$ натуральное число и $T_0, \ldots, T_{m-1}$ попарно взаимно простые натуральные числа. Пусть $\{c_k^{(j,l)}\}_{k=0}^{\infty}$ чисто периодические последовательности целых чисел с периодами T_l, $j = 0, \ldots, T_l - 1$, $l = 0, \ldots, m-1$ такие, что вектора*

$$\overline{c}^{(j,l)} = (c_0^{(j,l)}, c_1^{(j,l)}, \ldots, c_{T_l-1}^{(j,l)}), \quad j = 0, \ldots, T_l - 1$$

линейно независимы для любого индекса $l = 0, \ldots, m-1$. Тогда для любого натурального s такого, что $2 \leqslant s \leqslant T = T_0 + \cdots + T_{m-1} - m + 1$, совокупность из s чисел

$$\alpha_{(j,l)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k^{(j,l)}}{k!}$$

линейно-независима над полем $\mathbb{Q}$.

Пусть $\alpha_0, \ldots, \alpha_{s-1}$ совокупность линейно-независимых чисел, выбранных в соответствии с утверждением теоремы 1. Тогда для любых, отличных от нуля рациональных значений $a_j \in \mathbb{Q}$, $j = 0, \ldots, j$, величина

$$\alpha = a_0\alpha_0 + \cdots + a_{s-1}\alpha_{s-1}$$

иррациональна и может быть использована для выработки псевдослучайных последовательностей при помощи метода, изложенного в работе [2].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. В.Г. Чирский, А.Ю.Нестеренко. Об одном подходе к преобразованию периодических последовательностей // Дискретная математика. Т. 27. Вып. 4. — 2015. стр. 150-157.

2. А.Ю. Нестеренко. Об одном подходе к разложению иррациональных чисел // Математические вопросы криптографии. Т 9. Вып. 1. — 2018. стр. 89-106.

Секция 7. Дискретная геометрия и геометрия чисел

УДК 519.1

Избранные задачи теории конечных обобщенных метрик

Е. И. Деза (Россия, г. Москва)
Московский педагогический государственный университет
e-mail: elena.deza@gmail.com

Selected problems of the theory of finite generalized metrics

E. I. Deza (Russia, Moscow)
Moscow Pedagogical State University
e-mail: elena.deza@gmail.com

Метрикой на множестве X называется отображение $d: X \times X \to \mathbb{R}$ декартова квадрата множества X во множество действительных чисел, удовлетворяющее условиям неотрицательности ($d(x,y) \geq 0$), положительной определенности ($d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$), симметричности ($d(x,y) = d(y,x)$), и неравенству треугольника ($d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$).

Метрики и метрические пространства играют важную роль при решении множества фундаментальных и прикладных математических задач [1], [2]. *Естественная метрика* $d(x,y) = |x-y|, x,y \in \mathbb{Q}$, лежит в основе построения поля действительных чисел (равно как *p-адическая метрика* $\nu_p(x,y), x,y \in \mathbb{Q}$, используется для построения поля p-адических чисел). *Евклидова метрика* $\rho(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$ на арифметическом векторном пространстве $\mathbb{R}^n$ абсолютно незаменима в классической геометрии. При решении задач численного анализа более востребованы ее аналоги: *чебышевская метрика* $d_\infty(x,y) = \max_{i=1}^n |x_i - y_i|$, и *метрика городского квартала* $d_1(x,y) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|$. Все три указанные метрики являются частными случаями так называемой *l_p-метрики* $l_p(x,y) = (\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^p)^{\frac{1}{p}}$, $p \in \mathbb{R}, p \geq 1$. В одномерном случае все l_p-метрики превращаются в естественную метрику на числовой прямой.

При решении ряда задач оказываются востребованы более общие метрические структуры. Так, если отбросить свойство симметричности, мы получим понятие *ориентированной метрики* (измеряем автомобильный пробег в городе, имеющем улицы с односторонним движением). Отбрасывание условия положительной определенности ведёт к рассмотрению так называемых *полуметрик* (возможно нулевое расстояние между различными объектами). Переход от двух аргументов к трем или нескольким дает возможность построить теорию многомерных метрических структур, так называемых *m-метрик* (замените длину отрезка, соединяющего две данные точки, на площадь треугольника с вершинами в трех заданных точках).

Естественным вопросом дискретной геометрии (теории графов, дискретной математики в целом) является построение множества всех метрик (точнее, полуметрик) для заданного конечного множества $V_n = \{1, 2, ..., n\}$. Поскольку неотрицательная линейная комбинация двух полуметрик является полуметрикой, искомое множество образует полиедральный конус. Изучение образующих и граней данного конуса, структуры соответствующих графов инцидентности и их подграфов является актуальной научной проблемой, имеющей многочисленные применения в теории информации. Аналогичные конические конструкции могут быть построены для случаев ориентированных полуметрик и многомерных полуметрик.

Мы рассматриваем и анализируем структуру следующих конусов:

- конус всех полуметрик на n точках MET_n;

- конус всех ориентированных метрик на n точках $OMET_n$;
- конус всех m-метрик ($m \geq 3$) на n точках $HMET_n$.

Мы находим все образующие и грани указанных конусов, полностью описывая имеющиеся связи между ними, для малых значений n: $3 \leq n \leq 7$ в неориентированном случае (см. [1]), $3 \leq n \leq 5$ в ориентированном случае (см. [2]), $3 \leq n, m \leq 5$ в трехмерном и многомерном случаях (см. [2]). Мы доказываем ряд соотношений, имеющих место для произвольного n. Мы изучаем свойства обобщенных метрических структур, естественным образом появляющихся при построении указанных выше конусов и тесно связанных с ними ([1], [2]): *разрезов* и *мультиразрезов* (и их ориентированных и многомерных аналогов), *гиперметрик*, *взвешенных полуметрик*, *взвешиваемых ориентированных полуметрик* и др.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Deza M.M., Laurent M. Geometry of cuts and metrics. – Springer-Verlag: Berlin, 1997. 625 p.
2. Deza M.M., Deza E. I., Dutour Sikirić M. Generalizations of finite metrics and cuts. – World Scientific: Singapore, 2016. 304 p.

УДК 514.8,531.1,531.8

О ветвлении передачи движения в шарнирных механизмах[1]

М. Д. Ковалёв (Россия, г. Москва)
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
e-mail: mdkovalev@mtu-net.ru

On the branching of motion transmission in hinge mechanisms

M. D. Kovalev (Russia, Moscow)
Lomonosov Moscow State University
e-mail: mdkovalev@mtu-net.ru

1. Однозначность и ветвление передачи движения

Речь пойдёт о явлении, упоминание и исследование которого в литературе автору не встречалось. Мы рассматриваем плоские шарнирно-рычажные механизмы, составленные из прямолинейных абсолютно твёрдых стержней (рычагов), соединённых в своих концах шарнирами [1, 2]. Некоторые шарниры могут быть закреплены в плоскости (стойке), их называем закреплёнными, остальные — свободными. Каждый рычаг несёт по шарниру на своих концах. Если в свободном шарнире соединены лишь два рычага, — то этому шарниру отвечает обычная вращательная пара, допускающая произвольное проворачивание в плоскости рычагов одного относительно другого. Мы называем такой шарнир 1-шарниром. Если в свободном шарнире соединены $k > 2$ рычагов, то это так называемый совмещённый или сложный шарнир с одним

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке программы Московского центра фундаментальной и прикладной ма- тематики по соглашению №075-15-2022-284

общим центром вращения для всех k рычагов. Его называем $k-1$-шарниром. В этом шарнире каждый из k рычагов допускает проворачивание, независимо от остальных рычагов.

Рассмотрим построение из двух, обладающих одной степенью свободы механизмов M_1 и M_2, механизма M путём соединения рычагом заданной длины их подвижных свободных шарниров $p \in M_1$ и $q \in M_2$. Далее будем считать длину этого рычага pq равной единице, а начальными положения шарниров $p(0) = (0, 0)$ и $q(0) = (0, 1)$. Шарниры p и q механизма M при таком его построении оказываются сложными, а множество закреплённых шарниров M есть объединение множеств закреплённых шарниров M_1 и M_2. Вообще говоря, механизм M обладает одной степенью свободы. Нас будет интересовать — как в этом случае передаётся в нём движение между шарнирами p и q? В особенности, случаи неоднозначности — ветвления передачи этого движения.

Поскольку конфигурационное пространство шарнирного механизма с одной степенью свободы есть компонента связности алгебраической кривой, то вследствие теоремы Тарского-Зайденберга [2, 3] множество положений свободного шарнира есть часть плоской алгебраической кривой. Более того, вследствие теоремы Кемпе [3] можно так подбирать механизмы M_1 и M_2, чтобы шарниры p и q двигались по участкам K_1 и K_2 произвольных плоских алгебраических кривых. Мы будем говорить, что движение от шарнира p передаётся к шарниру q однозначно в положении $p(0)$ шарнира p, если существуют такие окрестности U точки $p(0)$, и W точки $q(0)$, что каждому положению $p(t) \in K_1 \cap U$ шарнира p отвечает единственное положение связанного с ним рычагом единичной длины шарнира $q(t) \in K_2 \cap W$. В противном случае, будем говорить о неоднозначности передачи движения от p к q в положении $p(0)$, или ветвлении передачи движения от шарнира p к шарниру q.

Неоднозначность передачи движения, естественно, может возникнуть, если точка $q(0)$, является точкой ветвления кривой K_2. Но мы не будем рассматривать этот случай. А рассмотрим более интересный случай, когда точки $p(0)$, и $q(0)$, являются точками гладкости кривых. То есть, в некоторых их окрестностях кривые K_1 и K_2 имеют непрерывные двусторонние касательные.

Справедливо следующее утверждение, графическое обоснование которого приведено на рисунке 1.

Лемма 1. *Если отрезок $p(0)q(0)$ не нормален к кривой K_2 то движение от шарнира p в положении $p(0)$ к шарниру q передаётся однозначно.*

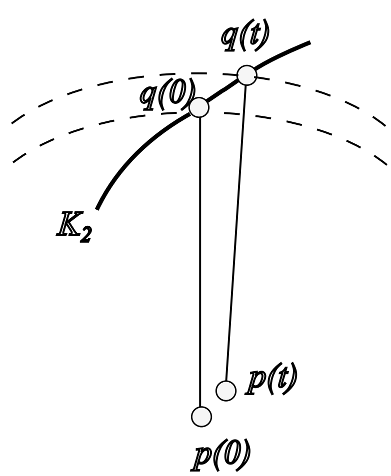

Рис. 1: Графическое доказательство леммы 1.

Если рычаг $p(0)q(0)$ не нормален кривым K_1 и K_2, то движение в этом положении передаётся однозначно и от шарнира p к шарниру q и в обратном направлении: от шарнира q к шарниру p. В случае ненормальности отрезка $p(0)q(0)$ к кривой K_2, и его нормальности кривой K_1 может произойти на первый взгляд необычное явление. Передача движения от p к q происходит однозначно, а в обратном направлении от q к p — неоднозначно. Это происходит, когда в момент $t = 0$ направление движения шарнира q обращается, а направление движения шарнира p либо не меняется, либо может обратиться 2.

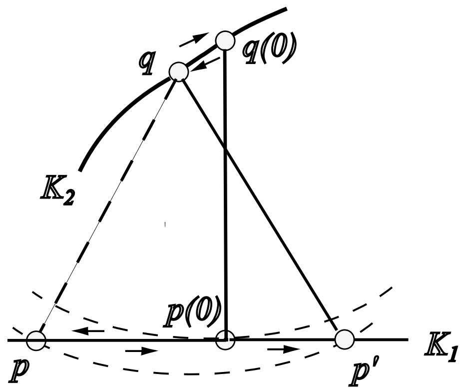

Рис. 2: Положению $q(0)$ шарнира q отвечает одно положение $p(0)$ шарнира p. Тогда как положению q отвечают два положения: p и p'.

В этом случае в нулевой момент мгновенный центр вращения м.ц.в. O рычага pq совпадает с шарниром q, а значит, скорость шарнира q равна нулю. Если и скорость шарнира p тоже обращается в ноль, то возможно обращение направления движения м.ц.в. O.

2. Интересные случаи ветвления передачи движения

В случае нормальности рычага $p(0)q(0)$ кривым K_1 и K_2 возможны интересные и сложные ветвления передачи движения в момент $t = 0$, примеры чего мы и рассмотрим. В этом случае положение м.ц.в. O рычага pq не определено в момент $t = 0$, и если имеется более одного предельного положения точки $O(t)$ при $t \to 0$, то перемещение точки $O(t)$ может быть разрывным при $t = 0$. В последнем случае движение рычага рычага pq ветвится в момент $t = 0$. В наших примерах шарнир q будет двигаться по отрезку прямой, чего можно достичь беря в качестве механизма M_2 инверсор Поселье.

Пример 1. Если закон движения шарнира $p(t) = \left(t, \dfrac{t^2}{8}\right)$, а шарнир q движется по прямой $y = 1$: $q(u) = (u, 1)$, то условие постоянства длины рычага pq даёт уравнение:

$$(3/4) * t^2 - 2 * t * u + u^2 + (1/64) * t^4 = 0.$$

Откуда имеем две ветви зависимости параметра u от времени:

$$u_1 = \frac{t}{8}\left(8 + \sqrt{-t^2 + 16}\right), \qquad u_2 = \frac{t}{8}\left(8 - \sqrt{-t^2 + 16}\right).$$

Их маклореновские разложения таковы:

$$u_1 = \frac{3t}{2} + O(t^3); \qquad u_2 = \frac{t}{2} + O(t^3).$$

Это означает, что при лвижении шарнира p с единичной скоростью направо, шарнир q может двигаться направо со скоростью либо $\dfrac{3}{2}$ единицы, либо $\dfrac{1}{2}$ единицы. При этом, предельные положения м.ц.в. $O(t)$ при $t \to +0$ суть $(0, -3)$ с направлением вращения по часовой стрелке, и $(0, 2)$ с направлением вращения против часовой стрелки.

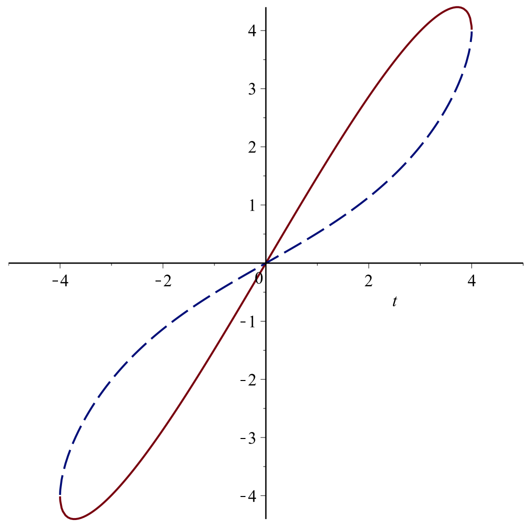

Рис. 3: График зависимости параметра u от времени t в первом примере.

Пример 2. Пусть закон движения шарнира $p(t) = \left(t, \dfrac{t^2}{2} - \dfrac{t^3}{2}\right)$, а шарнир q по-прежнему движется по прямой: $q(u) = (u, 1)$. Тогда зависимость параметра u от времени такова:

$$u_{1,2} = \frac{t}{2}(2 \pm \sqrt{-t^4 + 2t^3 - t^2 - 4t + 4}).$$

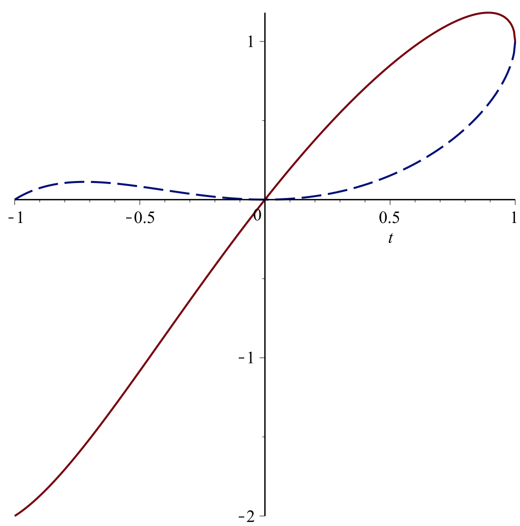

Рис. 4: График зависимости параметра u от времени t во втором примере.

Маклореновские разложения двух ветвей этой функции выглядят так:

$$u_1 = 2t - \frac{t^2}{2} + O(t^3); \qquad u_2 = \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{4} + O(t^4).$$

Таким образом, если двигать шарнир p из точки $(0,0)$ направо с единичной скоростью, то шарнир q может двигаться либо направо со скоростью 2 единицы, либо направо с начальной нулевой скоростью. Если двигать шарнир p из точки $(0,0)$ налево с единичной скоростью, то шарнир q может двигаться либо налево со скоростью 2 единицы, либо направо с начальной нулевой скоростью. Передача движения от шарнира q к p выглядит следующим образом.

Если двигать шарнир q из точки $(0, 1)$ направо с единичной скоростью, то шарнир p может двигаться либо направо со скоростью $1/2$ единицы, либо направо с начальной бесконечной скоростью, либо налево тоже вначале с бесконечной скоростью. Если же двигать шарнир q из точки $(0, 1)$ налево с единичной скоростью, то шарнир p будет двигаться налево со скоростью $1/2$ единицы. Таким образом, ветвление передачи движения от шарнира p к шарниру q качественно отличается от ветвления передачи движения в противоположном направлении.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ковалёв М.Д. Геометрическая теория шарнирных устройств // Известия РАН Серия математическая, 1994, Т.58, № 1, С.45–70.

2. Ковалёв М. Д. Геометрические вопросы кинематики и статики — М.: Ленанд, URSS, 2019. 256 С.

3. Ковалёв М. Д. Ковалёв М. Д. Что такое шарнирный механизм? И что же доказал Кемпе? // Итоги науки и техники, серия Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры, ВИНИТИ РАН Москва, 2020, том 179, с. 16-28.

УДК 514.13

Теорема Кейси и её аналоги и обобщения

А. В. Костин (Россия, г. Елабуга)
Елабужский институт Казанского федерального университета
e-mail: kostin_andrei@mail.ru

Casey's theorem and its analogues and generalizations

A. V. Kostin (Russia, Elabuga)
Elabuga Institute of the Kazan Federal University
e-mail: kostin_andrei@mail.ru

В работе рассматриваются аналоги и обобщения теоремы Кейси в пространствах постоянной кривизны, а также взаимосвязи между этими теоремами.

В теореме Птолемея утверждается, что произведение длин диагоналей вписанного четырёхугольника равно сумме произведений длин противоположных сторон. Теорема Кейси (в другой транслитерации – Кези) является одним из её обобщений, см. [1]. Вершины четырёхугольника, вписанного в окружность S^1, в этой теореме заменяются на окружности, касающиеся окружности S^1, а длины сторон и диагоналей – на длины общих касательных соответствующих пар окружностей. В зависимости от способов касания берутся либо отрезки общих внешних касательных, либо внутренних. Гиперболический аналог теоремы Кейси получен Н.В. Абросимовым и Л.А. Микайыловой [2]. В статье [3] строятся интерпретации евклидовой и гиперболической версий этих теорем на изотропных сферах псевдоевклидова и псевдогиперболического пространств. Различные обобщения гиперболических теорем Птолемея и Кейси получены в работах [4] и [5]. Наряду с конфигурациями окружностей и "касательными расстояниями" между ними естественно рассматривать преобразования Лагерра, сохраняющие такие расстояния. И между теоремами типа Кейси в пространствах постоянной кривизны, и между преобразованиями Лагерра существуют различные взаимосвязи. В частности, теоремы такого типа на псевдоевклидовой плоскости оказываются эквивалентными соответствующим теоремам на евклидовой плоскости. Эта эквивалентность может быть доказана с помощью изотропной проекции. Доказательство может быть основано на следующей лемме.

Лемма 1. *Зафиксируем в трёхмерном псевдоевклидовом пространстве два изотропных конуса. Пусть евклидовы и псевдоевклидовы плоскости пересекают конусы по некоторым окружностям. Тогда длины отрезков общих касательных соответствующих пар окружностей равны.*

Для гиперболической теоремы Кейси также можно дать некоторые новые обобщения и установить связи этих теорем с теоремами в пространстве постоянной кривизны с индефинитной метрикой. В дополнение к геодезическим касательным к циклам на плоскости Лобачевского можно рассматривать орициклические касательные. Соотношения между орициклическими касательными в гиперболических аналогах и обобщениях теоремы Кейси совпадают с евклидовыми соотношениями в теореме Кейси и её обобщениях на большее число окружностей. □

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Maehara H., Martini H. Casey's Theorem. In: Circles, Spheres and Spherical Geometry.. — Birkhauser Advanced Texts Basler Lehrbucher. Birkhauser, Cham. 2024.
2. Abrosimov N. V., Mikaiylova L. A. Casey's theorem in hyperbolic geometry // Сибирские электронные математические известия 2015. Том 12. С. 354-360.
3. Костин А. В., Костина Н. Н. Интерпретации теоремы Кези и её гиперболического аналога // Сибирские электронные математические известия 2016. Том 13. С. 242-251.
4. Костин А. В. Об обобщениях теоремы Птолемея на плоскости Лобачевского // Сибирские электронные математические известия. 2022. Том 19, № 2. С. 404-414.
5. Kostin A. V. On Analogs of Fuhrmann's Theorem on the Lobachevsky Plane // Siberian Mathematical Journal. 2024. Vol 65. PP. 695-702.

УДК 517.5+519.213

О приближении положительно определённых функций[1]

А. Д. Манов (Россия, г. Донецк)
Донецкий государственный университет; Математический институт им. В. А. Стеклова Российской академии наук
e-mail: manov.ad@ro.ru

[1]Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 19-71-30012).

On approximation of positive definite functions

A. D. Manov (Russia, Donetsk)
Donetsk State University; Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences
e-mail: manov.ad@ro.ru

0. Обозначения. Фиксируем некоторые обозначения: $|\cdot|$ – евклидова норма в $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{B}_r := \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < r\}$ – открытый шар радиуса $r > 0$ с центром в нуле, $\overline{\mathbb{B}_r}$ – его замыкание, $\operatorname{int} X$ – внутренность множества X, $\widetilde{f}(x) := \overline{f(-x)}$ и $(f * g)(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x-t)g(t)dt$, $L_\infty^{loc}(\mathbb{R}^n)$ – пространство локально ограниченных п. в. на $\mathbb{R}^n$ функций.

1. Введение. Формулировка основных результатов. Комплекснозначная функция $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ называется положительно определённой на $\mathbb{R}^n$ ($f \in \Phi(\mathbb{R}^n)$), если для любого $m \in \mathbb{N}$, и для любых элементов $\{x_i\}_{i=1}^m \subset \mathbb{R}^n$, а также для любого набора комплексных чисел $\{c_i\}_{i=1}^m \subset \mathbb{C}$ выполняется неравенство

$$\sum_{i,j=1}^{m} c_i \overline{c_j} f(x_i - x_j) \geqslant 0. \tag{1}$$

В данной работе нас будет интересовать следующее выпуклое подмножество положительно определённых функций. Пусть A – центрально симметричное выпуклое тело (выпуклый симметричный относительно нуля компакт с непустой внутренностью). Символом $\mathfrak{F}_A(\mathbb{R}^n)$ обозначим множество функций $\varphi \in \Phi(\mathbb{R}^n) \cap C(\mathbb{R}^n)$ таких, что $\varphi(0) = 1$ и $\operatorname{supp} \varphi \subset A$.

Класс функций $\mathfrak{F}_A(\mathbb{R}^n)$ не пуст. Например, если взять функцию $u \in L_2(\mathbb{R}^n)$ такую, что $u(x) = 0$ при $x \notin \frac{1}{2}A$ и $\|u\|_2 = 1$, то следующая функция принадлежит $\mathfrak{F}_A(\mathbb{R}^n)$:

$$\varphi(x) = (u * \widetilde{u})(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} u(x-t)\widetilde{u}(t)dt, \quad x \in \mathbb{R}^n. \tag{2}$$

Отметим, что при $n = 1$ из теоремы Боаса-Каца, Крейна (см., например, [1, Theorem 3.10.2]) следует, что класс $\mathfrak{F}_A(\mathbb{R}^n)$ исчерпывается функциями такого вида. При $n \geqslant 2$, это вообще говоря, не верно.

В некоторых вопросах, возникающих при изучении свойств функций из класса $\mathfrak{F}_A(\mathbb{R}^n)$ удобно ограничиться гладкими функциями из этого класса. В данной работе нами получена следующая теорема, которая позволяет это сделать.

Теорема 1. *Пусть A – центрально симметричное выпуклое тело и $\varphi \in \mathfrak{F}_A(\mathbb{R}^n)$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдётся функция $\psi \in \mathfrak{F}_A(\mathbb{R}^n) \cap C^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\operatorname{supp} \psi \subset \operatorname{int} A$ такая, что $\|\varphi - \psi\|_\infty < \varepsilon$.*

Теорема 1, в частности, позволяет уточнить недавние результаты автора, полученные в [2]. В работе автора [2] рассматривалась следующая экстремальная задача.

Задача 2. *Пусть $r > 0$ и функция $\rho \in L_\infty^{loc}(\mathbb{R}^n)$ является радиальной и вещественнозначной. Требуется найти следующую величину:*

$$M(n, \rho, r) := \sup \left\{ \left| \int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\rho(x)dx \right| : \varphi \in \mathfrak{F}_r(\mathbb{R}^n) \right\}.$$

Данная задача связана с нахождением точных констант в неравенствах типа Бернштейна-Никольского для целых функций экспоненциального сферического типа. Более подробную информацию о Задаче 1 можно найти в [2] и [3]. Автором было получено следующее решение данной задачи.

Теорема 2. *Пусть $n \neq 2$, $r > 0$ и функция $\rho \in L_\infty^{loc}(\mathbb{R}^n)$ является радиальной и вещественнозначной. Определим оператор $A_\rho : L_2(\mathbb{B}_{r/2}) \to L_2(\mathbb{B}_{r/2})$ следующим образом:*

$$(A_\rho u)(t) := \int\limits_{\mathbb{B}_{r/2}} \rho(t-x)u(x)dx, \quad u(x) \in L_2(\mathbb{B}_{r/2}).$$

Тогда A_ρ – компактный самосопряжённый оператор в $L_2(\mathbb{B}_{r/2})$ и справедливо равенство:

$$M(n,\rho,r) = \|A_\rho\|,$$

где $\|A_\rho\|$ – норма оператора A_ρ в $L_2(\mathbb{B}_{r/2})$.

"Неестественное" условие $n \neq 2$ в формулировке Теоремы 2 вытекает из ограниченности применения Теоремы Рудина-Ефимова (см. [2, Теорема 5]), которая играла важную роль в решении Задачи 1. Если же в Задаче 1 ограничиться гладкими функциями из $\mathfrak{F}_r(\mathbb{R}^n)$, то теоремой Рудина-Ефимова можно воспользоваться и в случае $n = 2$. Из Теоремы 1 следует, что

$$M(n,\rho,r) = \sup\left\{\left|\int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\rho(x)dx\right| : \varphi \in \mathfrak{F}_r(\mathbb{R}^n) \cap C^\infty(\mathbb{R}^n),\ \operatorname{supp}\varphi \subset \mathbb{B}_r\right\}.$$

Таким образом, Теорема 2 справедлива и при $n = 2$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Sasvári Z. Multivariate Characteristic and Correlation Functions – Berlin, Boston: De Gruyter, 2013. – 366 p.

2. Манов А. Д. Об одной экстремальной задаче для положительно определенных функций с носителем в шаре // Матем. сб.. – 2024. – Т. 215, № 7. – С. 61–73.

3. Манов А. Д. Об одной экстремальной задаче для положительно определённых функций // Чебышевский сборник. – 2021. – Т. 22, № 5. – С. 161 – 171.

УДК 511.32

Непрерывные вложения дистанционных графов в поверхности постоянной кривизны

А. М. Неопрятная (Россия, г. Майкоп)
Московский физико-технический институт; Кавказский математический центр Адыгейского государственного университета
e-mail: anna.neo01@mail.ru
В. А. Воронов (Россия, г. Майкоп)
Московский физико-технический институт; Кавказский математический центр Адыгейского государственного университета
e-mail: v-vor@yandex.ru

Continuous embeddings of distance graphs into surfaces of constant curvature

A. M. Neopryatnaya (Russia, Maykop)
Moscow Institute of Physics and Technology; Caucasus Mathematical Center of the Adyghe State University
e-mail: e-mail: anna.neo01@mail.ru
V. A. Voronov (Russia, Maykop)
Moscow Institute of Physics and Technology; Caucasus Mathematical Center of the Adyghe State University
e-mail: v-vor@yandex.ru

Рассматривается задача о классе графов, для которых существует реализация графа в качестве дистанционного в некотором метрическом пространстве, параметризованная одним числом. Параметром может быть, например, радиус сферы S_r^{d-1} или длина ребра при фиксированном радиусе. Под непрерывным (по радиусу) вложением графа в сферу понимается непрерывная векторная функция заданная на интервале, которая сопоставляет значению радиуса координаты всех вершин графа. При каждом значении радиуса r евклидовы длины рёбер должны быть единичными,а вершины должны лежать на сфере S_r^{d-1}.

Далее, если не оговорено иное, под расстоянием между точками подмножества $\mathbb{R}^d$ будем понимать значение индуцированной метрики. В гиперболическом пространстве также будем пользоваться стандартным определением расстояния.

Определение 1. *Пусть $G = (V, E)$ - некоторый граф и $M \subseteq \mathbb{R}^d$. Предположим, что для каждого ребра $(u, v) \in E$ определено расстояние $d_{uv} > 0$. Если существует такая функция $\psi : V \to M$, что*

- $\forall u, v \in V : u \neq v \Rightarrow \psi(u) \neq \psi(v)$
- $\forall (u, v) \in E : \|\psi(u) - \psi(v)\| = d_{uv}$

*тогда мы говорим, что G имеет **дистанционное вложение** в M относительно расстояний d_{uv}.*

Определение 2. *Если $\forall (u, v) \in E : d_{uv} = 1$, тогда мы говорим, что G вкладывается как **граф единичных расстояний** в M.*

Далее, понятие непрерывного вложения можно задать двумя эквивалентными способами:

Определение 3. *Пусть $G = (V, E)$ некоторый граф, и существует непрерывная функция $\varphi : V \times (r_0, r_1) \to \mathbb{R}^d$ такая, что для любого $r \in (r_0, r_1)$ значение $\varphi(V; r)$ дает дистанционное вложение G в сферу $S^{d-1}(r)$, тогда мы говорим, что G имеет S^{d-1}-**непрерывное вложение** относительно радиуса на интервале (r_0, r_1).*

Определение 4. *Пусть $G = (V, E)$ некоторый граф, и существует непрерывная функция $\varphi : V \times (l_0, l_1) \to \mathbb{R}^d$ такая, что для любого $l \in (l_0, l_1)$ функция $\varphi(V; l)$ задает дистанционное вложение G с длиной ребра $d_{uv} = l$ в сферу S^{d-1} единичного радиуса, тогда мы говорим, что G имеет S^{d-1}-**непрерывное вложение** относительно длины ребра на интервале (l_0, l_1).*

Полностью аналогично можно определить вложение в пространство Лобачевского $\mathbb{H}^d$ относительно длины ребра или изменения кривизны.

Также мы можем для каждого графа рассмотреть следующее множество:

Определение 5. *Обозначим $R_d(G) \subset \mathbb{R}_+$ — множество всех радиусов сферы, для которых существует дистанционное вложение G в сферу $S^{d-1}(r)$.*

Для введённого обозначения верны следующие свойства:

- Пусть H подграф G, тогда $R_d(G) \subset R_d(H)$,
- Пусть H компонента связности G, тогда

$$R_d(G) = R_d(H) \bigcap R_d(G \setminus H).$$

Заметим, что граф G имеет S^{d-1}-непрерывное вложение относительно радиуса, если существует интервал (a, b), такой что $(a, b) \subset R_d(G)$.

Несложно видеть, что $R_d(G)$ и $R_{d+1}(G)$ связаны.

Утверждение 1. *Для любого графа G, имеющего вложение как граф единичных расстояний в S^{d-1} при каком-либо радиусе, верно следующее утверждение:*

$$(\inf R_d(G), +\infty) \subseteq R_{d+1}(G).$$

Действительно, если существует радиус r_0, допускающий вложение графа G в S^{d-1}, то так как $S^{d-1}(r_0) \subset S^d(r)$, для любого $r \geq r_0$, граф G вкладывается в $S^d(r)$, причём движение точек графа G задаётся движением точек по направлению от экватора к полюсу сферы.

Есть также факт о связи $R_d(G)$ с нечётным обхватом графа, который необходимо упомянуть.

Определение 6. *Нечетным обхватом $g_{odd}(G)$ графа G называется длина кратчайшего нечётного цикла в этом графе. Если граф двудольный, полагаем $g_{odd}(G) = \infty$.*

Теорема 1. *Справедлива оценка*

$$\inf R_d(G) \geq \frac{1}{2\cos(\frac{\pi}{2g_{odd}(G)})}.$$

Перечислим некоторые достаточно простые утверждения про непрерывное вложение в сферу.

Утверждение 2. *Нечётный цикл C_{2k+1} имеет S^{d-1}-непрерывное вложение при $d \geq 3$ на интервале $(r_{0,k}, +\infty)$.*

Утверждение 3. *k-дерево имеет S^{k+1}-непрерывное вложение относительно радиуса на всём интервале $(\frac{1}{2}, +\infty)$.*

Утверждение 4. *k-дерево, не содержащее подграфа $K_{3,k}$, имеет S^k-непрерывное вложение на интервале $(\frac{1}{2}, +\infty)$ за исключением дискретного множества радиусов.*

Кроме того, классы графов из утверждений 2,3 и 4 имеют непрерывное вложение в пространство Лобачевского той же размерности относительно длины ребра.

Утверждение 5. *Полный граф K_d имеет S^{d-1}-непрерывное вложение на интервале $(\sqrt{\frac{d}{2d+2}}, +\infty)$, непрерывное вложение в $\mathbb{H}^{d-1}$ при длине ребра $l \in (0, +\infty)$, и не имеет непрерывного вложения в меньших размерностях.*

Далее мы убедимся, что класс графов, имеющих непрерывное вложение, не допускает какого-либо простого описания при помощи конечного множества запрещенных подграфов.

Определение 7. *Граф G, состоящий из некоторого цикла C_k и вершины v, смежной со всеми вершинами цикла, будет называть* ***колесом*** *W_{k+1}.*

Утверждение 6. *Граф не имеет S^2-непрерывного вложения ($\mathbb{H}^2$-непрерывного вложения), если он содержит W_{k+1}.*

Задача о наличии непрерывного вложения графа может значительно усложниться даже при добавлении одного ребра.

Гипотеза 1. *Граф, получающийся из конечного 2-дерева при проведении дополнительного ребра, не имеет S^2-непрерывного вложения.*

Заметим, что колесо является частным случаем такого графа.

Данная гипотеза возникла, потому что на плоскости Лобачевского аналогичное утверждение удается достаточно просто доказать.

Теорема 2. *Любой граф G полученный из конечного 2-дерева путём добавления дополнительного ребра не может иметь непрерывного вложения на плоскости Лобачевского.*

Продолжить доказательство теоремы на сферу не удается из-за того, что на сфере только несколько триангуляций не содержат вершин внутри треугольников (треугольник, тетраэдр, октаэдр, икосаэдр и триангуляция плоскости как предельный случай).

В работе Франкл, Купавского и Сванпоэла [1] о евклидовой размерности графов было сформулировано достаточное условие для существования вложения графа в сферу.

Теорема 3. *Пусть $d > 3$. Любой граф G, имеющий менее $\binom{d+2}{2}$ ребер, может быть реализован в $\mathbb{R}^d$. Если G к тому же не содержит $K_{d+2} - K_3$ или K_{d+1}, то он может быть реализован в S^{d-1}.*

Тривиальным следствием из Теоремы 3 и Утверждения 1 будет наличие непрерывного вложения графов, удовлетворяющих условиям теоремы, в сферу $S^{d-1}(r)$ относительно радиуса на интервале $(r_0, +\infty)$. Однако можно получить и другие утверждения, связанные с этой теоремой.

Определение 8. *Граф $G = (V, E)$ называется k-разложимым, если любой подграф G содержит вершину степени не более k.*

Утверждение 7. *Для $2 \leq d \leq 4$ если граф $G - x$, где x - вершина степени не более $d - 2$ непрерывно вкладывается в S^{d-1} в общем положении, то и граф G непрерывно вкладывается в S^{d-1} в общем положении.*

Непосредственно из Утверждения 7 по индукции получаем следующую лемму.

Лемма 1. *При $2 \leq d \leq 4$ любой $d-2$-разложимый граф имеет непрерывное вложение в $S^{d-1}(r_0)$, где $r_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}$, относительно длины ребра в окрестности $l_0 = 1$.*

Разумеется, $(d-2)$-разложимость не является необходимым условием. В частности, имеем следующее

Утверждение 8. *Граф $K_{n,m}$ вкладывается непрерывно в $S^{d-1}(r)$ на интервале $r \in (r_0, +\infty)$, где $r_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}$, при $d \geq 5$.*

Конструкции Сванпоэла–Вальтра [2] и Эрдёша–Хикерсона–Паха [3] показывают, что граф, имеющий непрерывное вложение в S^2, может иметь больше ребер, чем следует из количества уравнений, неизвестных и размерности $SO(3)$, т.е. больше $2n-3$ в графе на n вершинах, и сколь угодно большую среднюю степень. Но эти графы являются двудольными.

Для получения конструктивных нижних оценок хроматических чисел сфер могут быть использованы графы с достаточно большим хроматическим числом, имеющие, кроме того, непрерывное вложение. В частности, серия таких графов может быть построена на основе конструкции строго самодвойственных многогранников Л. Ловаса. Первый нетривиальный граф, который используется в этих построениях — граф Грёча, имеющий 11 вершин и 20 ребер (иначе говоря, мычельскиан цикла C_5).

Следующее утверждение было получено на основе компьютерных расчётов.

Утверждение 9. *Граф Грёча без ребра имеет непрерывное вложение в сферу при* $0.539 < r < \sqrt{3}/3$.

Наконец, для построения 4-хроматического графа используется цепочка 4-критических графов с удаленным ребром.

Утверждение 10. *Пусть граф диаметров некоторого многогранника Ловаса после удаления одного ребра допускает непрерывное вложение в сферу $S^2(r)$ в некоторой окрестности $r = r_0$. Тогда в некоторой окрестности r_0 существует явная конструкция графа единичных расстояний с хроматическим числом 4, непрерывно вложенного в $S^2(r)$.*

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Frankl N., Kupavskii A., Swanepoel K. J. Embedding graphs in Euclidean space //Journal of Combinatorial Theory, Series A. – 2020. – Т. 171. – С. 105146.

2. Swanepoel K. J., Valtr P. The unit distance problem on spheres //Contemporary Mathematics. – 2004. – Т. 342. – С. 273-280.

3. Erdös P., Hickerson D., Pach J. A problem of Leo Moser about repeated distances on the sphere //The American Mathematical Monthly. – 1989. – Т. 96. – №. 7. – С. 569-575.

4. Lovász L. Self-dual polytopes and the chromatic number of distance graphs on the sphere //Acta Sci. Math.(Szeged). – 1983. – Т. 45. – №. 1-4. – С. 317-323.

УДК 519.147

Дополнительная симметрия символов Делоне на подрешетках кубической решетки

К. Г. Серавкин (Россия, г. Апатиты)
Кольский научный центр РАН
e-mail: seravkin@rambler.ru

Additional simmetry of Delone's simbols on sublattices of cubic lattice

K. G. Seravkin (Russia, Apatity)
Kola Science Centre of the RAS
e-mail: seravkin@rambler.ru

В качестве развития программного комплекса [1], [2], [3] построены области Вороного-Дирихле для подрешеток кубической решетки, найдены параметры приведенного четырехсторонника Зеллинга, определен сорт решетки Делоне и сингония подрешетки. На символе Делоне, по мимо минимально необходимых для подрешетки, может возникать дополнительное равенство или даже пара равенств параметров Зеллинга, что проявляется как дополнительная симметрия области Вороного-Дирихле.

Три последовательных минимума решетки a, b, c и суммарный вектор $d = -a-b-c$ называются четырехсторонником Зеллинга. Символ Делоне представляет собой проекцию проволочного тетраэдра, построенного на векторах четырехсторонника Зеллинга. На ребрах тетраэдра проставляются величины скалярных произведений соответственных пар сторон четырехсторонника - параметры Зеллинга. Преимущество параметров Зеллинга - это однородность по сравнению с кристаллографическими параметрами решетки a, b, c, α, β, γ.

Ни одной из проекций тетраэдра Делоне не отдается предпочтение, символ нужно рассматривать как пространственный, его вращение вокруг граней тетраэдра приводит к образованию 81 варианта проекции. Дополнительный набор проекций можно получить в некоторых случаях преобразованием через 0. Данная операция позволяет переставить параметры Зеллинга, не изменяя их количественно. Выбор определенной проекции является условным.

В работах [4], [5] описан алгоритм приведения параметров Зеллинга на символе Делоне. У приведенного символа Делона все параметры меньше либо равны нулю. Наличие нуля среди параметров Зеллинга является важной характеристикой и означает, что скалярное произведение соответствующих двух векторов равно нулю. Приведенные параметры Зеллинга являются геометрическими константами решетки и не зависят от последовательности шагов приведения.

Наличие осей симметрии области Вороного-Дирихле приводит к образованию определенно расположенных равенств среди параметров Зеллинга. Количество нулей, наличие равенств параметров и их взаимное расположение однозначно определяет один из 24 сортов решетки Делоне. Каждый сорт решетки Делоне, в свою очередь, однозначно определяет решетку Браве.

В работах Делоне приводятся таблицы с необходимыми и достаточными наборами условий на символах Делоне для определения сорта решетки Делоне. К сожалению, работы разных лет содержат разный подход, местами не совпадают между собой и содержат опечатки.

Проанализированы подрешетки кубической решетки с индексом подрешетки N до 8 включительно. Обнаружено, что помимо минимально необходимых равенств на символе Делоне, может возникнуть дополнительное равенство или даже пара равенств. При этом количество равенств может сравняться с количеством равенств более высокой сингонии, важным является их относительное расположение на символе Делоне. Наличие дополнительного равенства на символе Делоне приводит к наличию дополнительной симметрии области Вороного-Дирихле.

На рисунке 1 представлены примеры символов Делоне с наличием дополнительных симметрий. В подписях указаны международный символ типа рашетки Браве, сорт решетки Делоне и матрица подрешетки. Матрица подрешетки представлена в компактном формате строк диагональной матрицы $[a\,b\,c|d\,e|f] \equiv \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix}$.

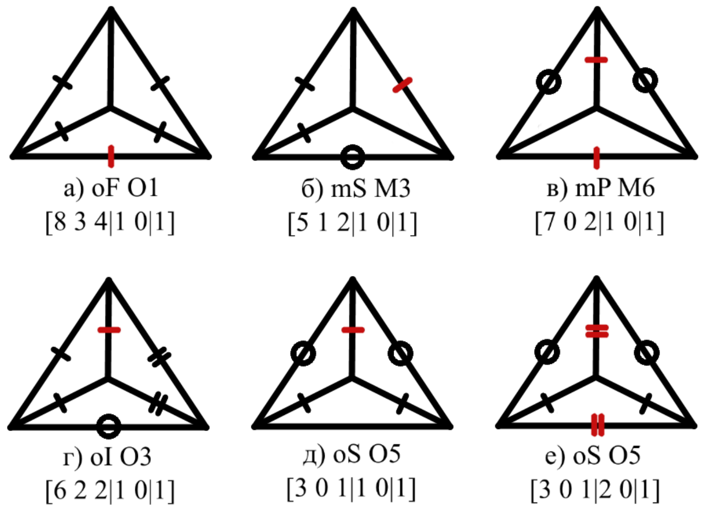

Рис. 1: Дополнительная симметрия на символах Делоне

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Малеев А.В., Шутов А.В., Серавкин К.Г. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2018618771. Программа перебора вариантов периодических упаковок заданного набора трехмерных поликубов с фиксированным объёмом фундаментальной области. 2018

2. Серавкин К.Г. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2021618438. Программа перебора вариантов решетчатого разбиения трёхмерного пространства на поликубы с фиксированным объёмом фундаментальной области. 2021

3. Серавкин К.Г. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2021617966. Графическая оболочка метода дискретного моделирования молекулярных упаковок в кристаллах. 2021

4. Делоне Б., Падуров Н., Александров А. Математические основы структурного анализа кристаллов. — Л.: Изд-во ОНТИ ГТТИ, 1934. 328 с.

5. Делоне Б.Н., Галиулин Р.В., Штогрин М.И. Теория Браве и ее обобщение на n-мерные решетки // Избранные научные труды. Кристаллографические этюды. Огюст Браве. — Л.: Изд-во «Наука», 1973. 419 с.

УДК 511.32

О конструктивном доказательстве существования одного симметричного многогранника

В. И. Субботин (Россия, г. Новочеркасск)
Южно-Российский государственный политехнический университет им. М. И. Платова;
Донской государственный аграрный университет
e-mail: geometry@mail.ru

On a constructive proof of the existence of one symmetric polyhedron

V. I. Subbotin (Russia, Novocherkassk)
Platov South-Russian State Polytechnic University; Don State Agrarian University
e-mail: geometry@mail.ru

В работе [1] автором была доказана теорема:

Теорема 1. *Существует RR-многогранник первого типа с четырьмя тупоугольными ромбическими вершинами и двадцатью восемью гранями, имеющий тетраэдральную симметрию.*

При этом, под RR-многогранником первого типа понимается многогранник с симметричными ромбическими вершинами и правильными гранями одного типа. Других граней, кроме правильных и ромбов, составляющих звезду ромбической вершины, такой многогранник не имеет, [1].

На рисунке 1 показаны две из четырёх ромбических вершин многогранника из теоремы 1: V и W.

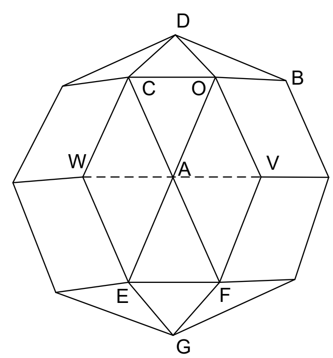

Рис. 1: 28-гранник с четырьмя ромбическими вершинами.

Доказательство следующих трёх теорем вполне аналогично конструктивному доказательству теоремы 1 из [1].

Теорема 2. *Существует RR-многогранник с правильными гранями различного вида и с восемью тупоугольными ромбическими вершинами, имеющий 54 грани и октаэдральную симметрию.*

Теорема 3. *Существует RR-многогранник с правильными гранями различного вида и с двадцатью тупоугольными ромбическими вершинами, имеющий 132 грани и икосоэдральную симметрию.*

Теорема 4. *Существует невыпуклый (!) RR-многогранник с правильными гранями различного вида и с двенадцатью остроугольными ромбическими вершинами, имеющий 140 граней и икосоэдральную симметрию.*

Замечание 1. *В многограннике теоремы 2 правильные грани являются треугольными и квадратными.*

В теореме 3 правильные грани многогранника являются треугольными и пятиугольными.

В многограннике теоремы 4 правильные грани являются треугольными.

Замечание 2. *Представленные выше теоремы относятся к современному разделу геометрии, в котором изучаются различные классы многогранников, расширяющих классы правильных и полуправильных многогранников, см., например, [2].*

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Субботин В. И. О перечислении выпуклых RR-многогранников // Чебышевский сборник. 2023. Том 24, № 5. С. 194-207.

2. Cromwell P. R. A. Polyhedra. — Cambridge: Cambridge University Press, 1999.

Секция 8. Теоретико-числовой метод в приближенном анализе

УДК 511.32

Программная реализация преобразования Фурье по параллелепипедальным сеткам в 2-мерном случае[1]

Ю. А. Басалов (Россия, г. Тула)
Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого
e-mail: basalov_yurij@mail.ru

Software implementation of the Fourier transform on parallelepiped grids in the 2-dimensional case

Yu. A. Basalov (Russia, Tula)
Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University
e-mail: basalov_yurij@mail.ru

Теоретическое построение быстрого дискретного преобразование Фурье на многомерных теоретико-числовых сетках изложено в статье [2]. В ней впервые было получено преобразование, сводящее s-мерную интерполяцию в одномерную. Использование этих результатов позволяет получить наиболее быструю интерполяцию в многомерном случае, и для периодических функций - наиболее точную [3].

В рамках развития существующей библиотеки численных алгоритмов на языке C#, опубликованной на ПОИВС ТМК [1], был реализован функционал:

- многомерного преобразования Фурье по параллелепипедальным сеткам;
- многомерного численного интерполирования;
- построения сферических и гиперболических сеток.

Сама библиотека опубликована в общедоступном пакетном менеджере Nuget [5]. Внутренняя реализация быстрого преобразования Фурье использует библиотеку MathNet.Numerics.

Метод $CreateSphericalGrid(n, a)$ строит оптимальную гиперболическую сетку непосредственным перебор всех точек под гиперболой с асимптотической сложностью $O(N \log N)$.

Метод $CreateHyperbolicGrid(n, a)$ строит оптимальную сферическую сетку с помощью предварительной редукции базиса параллелепипедальной сетки по полной системы вычетов с помощью алгоритма Ленстры-Ленстры-Ловаса (LLL-алгоритма). Затем производится полный перебор всех точек внутри сферы.

Редукция алгоритма Ленстры-Ленстры-Ловаса (LLL-алгоритма) работает в обыкновенных дробях (с помощью класса $Fraction$). Реализация алгоритма приведена в листинге 1.

Разработанная библиотека может быть использована при решении большого числа физических и прикладных задач, в том числе

- задачи распространения волн в различных средах;
- радиолокационные и акустические задачами, в том числе задачи томографии;
- задачи теплопроводимости в различных средах;
- многомерное преобразование информации с выделением периодических компонент.

[1]Исследование выполнено в рамках госзадания № 073-03-2022-117/7 по теме "Теоретико-числовые методы в приближенном анализе и их приложения в механике и физике"

Алгоритм 1 Реализация алгоритма Ленстры-Ленстры-Ловаса

```
public static long[][] Reduction(long[][] x, double delta = 0.75)
{
     var basis = x.ToFraction();
     var n = basis.Length;
     var ortho = GramSchmidt(basis);

     var k = 1;
     while(k < n)
     {
          for (int j = k - 1; j > -1; j-)
          {
               var mu_kj = Mu(ortho, basis, k, j);
               if (Math.Abs(mu_kj.Numerator) * 2 > mu_kj.Denominator)
               {
                    basis[k] = basis[k].Sub(
                         basis[j].Mul((long)Math.Round((double)mu_kj))
                    );
                    ortho = GramSchmidt(basis);
               }
          }

          var mu = (double)Mu(ortho, basis, k, k - 1);
          var coef = delta - mu * mu;
          if ((double)ortho[k].SDot() >= coef*coef*(double)ortho[k - 1].SDot())
          {
               k++;
          }
          else
          {
               (basis[k], basis[k - 1]) = (basis[k - 1], basis[k]);

               ortho = GramSchmidt(basis);
               k = Math.Max(k - 1, 1);
          }
     }

     return basis.Select(arr => arr.Select(t => t.Numerator).ToArray()).ToArray();
}
```

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Басалов Ю.А., Программная реализация квадратурных формул по параллелепипедальным сеткам в 2-мерном случае // Записки научных семинаров Тульской школы теории чисел. - 2022. - Выпуск 1. - С. 11-17.

2. Басалов Ю.А., Добровольский Н.Н., Чубариков В.Н. Многомерная Фурье-интерполяция и быстрые преобразования Фурье // Доклады Российской академии наук. Математика, информатика, процессы управления. - 2024. - Т. 517. - №1. - С. 41-43. https://doi.org/10.31857/S2686954324030074

3. Родионов А.В., Добровольский М.Н., Добровольский Н.Н., Добровольский Н.М. Интерполяция для системы концентрических сеток. Чебышевский сборник. - 2023. - Т. 24. - Вып. 3. - С. 95-121. https://doi.org/10.22405/2226-8383-2023-24-3-95-121

4. N. N. Dobrovol'skii, N. M. Dobrovol'skii, Yu. A. Basalov, E. D. Rebrov , Fast Calculation of Parameters of Parallelepipedal Nets for Integration and Interpolation Part of the Lecture Notes in Networks and Systems book series (LNNS,volume 702) https://link.springer.com/chapter/10.1007/978-3-031-34127-4_16

5. Пакетный менеджер Nuget - MathAlgo.Interpolation [Электронный ресурс], Режим доступа: https://www.nuget.org/packages/MathAlgo.Interpolation

---

УДК 517.9

Об опорных и коренных функциях

А. И. Денисов (Россия, г. Тула)
Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого
e-mail: den_tspu@mail.ru
И. В. Денисов (Россия, г. Тула)
Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого
e-mail: den_tspu@mail.ru

About supporting and root functions

A. I. Denisov (Russia, Tula)
Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University
e-mail: den_tspu@mail.ru
I. V. Denisov (Russia, Tula)
Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University
e-mail: den_tspu@mail.ru

В рамках нелинейного метода угловых пограничных функций существование решений нелинейных краевых задач доказывается через построение барьерных функций. В работе [1] были собраны и систематизированы функции, называнные опорными. Эти функции сами выступают в роли барьерных и через них конструируются более сложные барьеры.

Барьерная функция Z называется опорной, если ее использование в качестве барьера для задачи с нелинейностью $F(u)$ приводит к неравенству, линейному относительно этой нелинейности. Выделено три опорных функции:

$$Z_1 = 0, \quad Z_2 = -\frac{st}{\varphi - \bar{u}_0}, \quad Z_3 = -2\sqrt{st}.$$

Их использования в качестве барьерных приводит к неравенствам вида

$$F(\bar{u}_0 + s + t) - F(\bar{u}_0 + s) - F(\bar{u}_0 + t) \geq 0, \tag{1}$$

$$F\left(\bar{u}_0 + s + t - \frac{st}{\varphi - \bar{u}_0}\right) - \left(1 - \frac{s}{\varphi - \bar{u}_0}\right) F(\bar{u}_0 + t) - \left(1 - \frac{t}{\varphi - \bar{u}_0}\right) F(\bar{u}_0 + s) \geq 0, \tag{2}$$

$$F\left(\bar{u}_0 + s + t - 2\sqrt{st}\right) - \left(1 - \frac{\sqrt{s}}{\sqrt{t}}\right) F\left(\bar{u}_0 + t\right) - \left(1 - \frac{\sqrt{t}}{\sqrt{s}}\right) F\left(\bar{u}_0 + s\right) -$$
$$- \frac{\sqrt{s}}{t\sqrt{t}} \int_0^t F(\bar{u}_0 + u) du \leq 0, \tag{3}$$

где s и t принадлежат промежутку $(0, \varphi - \bar{u}_0]$.

Неравенства (1)–(3) представляют самостоятельный функциональный интерес. Однако их исследование приводит к громоздким выкладкам. В работе [2] представлен способ, существенно упрощающий получение результатов. Возможные решения неравенств строятся в виде многочленов. Начальный этап предполагает выделение многочлена наивысшей интересующей степени. Такой многочлен назван коренным. Далее к коренному многочлену последовательно добавляются многочлены низших степеней, названные примыкающими многочленами.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Денисов А.И., Денисов И.В. Опорные барьерные функции для нелинейных параболических задач // Чебышевский сборник, 2024, т. 25, вып. 2, с. 235–242.

2. Денисов А.И., Денисов И.В. Решение неравенств с помощью коренных и примыкающих функций // Чебышевский сборник, 2024, т. 25, вып. 3, (в печати).

УДК 511.3

О числе точек неполной решетки в прямоугольных областях[1]

Н. М. Добровольский (Россия, г. Тула)
Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого
e-mail: dobrovol@tsput.ru

[1]Исследование выполнено в рамках госзадания № 073-03-2022-117/7 по теме «Теоретико-числовые методы в приближенном анализе и их приложения в механике и физике»

On the number of points of an incomplete lattice in rectangular regions

N. M. Dobrovol'skii (Russia, Tula)
Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University
e-mail: dobrovol@tsput.ru

В работе [2] впервые было предложено сведение многомерной Фурье-интерполяции к одномерной. Суть этого сведения состоит в следующем, если параллелепипедальная сетка

$$M_k = \left(\left\{\frac{c_1 k}{N}\right\}, \ldots, \left\{\frac{c_s k}{N}\right\}\right) \quad (k = 0, 1, 2, \ldots, N-1),$$

где $(c_j, N) = 1$ $(j=1, \ldots, s)$, то периодической функции многих переменных $f(\vec{x})$ из класса E_s^α ставится в соответствие периодическая функция одной переменной $f_{\vec{c}}(x) = f(\{c_1 x\}, \ldots, \{c_s x\})$ из класса E_1^β, где $\beta \leqslant \alpha$. Нетрудно видеть, что справедливы равенства

$$f_{\vec{c}}\left(\frac{k}{N}\right) = f(M_k) \quad (k = 0, \ldots, N-1).$$

Если $f(\vec{x}) = \sum_{\vec{m} \in \mathbb{Z}^s} c(\vec{m}) e^{2\pi i (\vec{x}, \vec{m})}$, $\quad c(\vec{m}) = \int\limits_0^1 \ldots \int\limits_0^1 f(\vec{x}) e^{-2\pi i (\vec{x}, \vec{m})} d\vec{x}$, то

$$f_{\vec{c}}(x) = \sum_{\vec{m} \in \mathbb{Z}^s} c(\vec{m}) e^{2\pi i (m_1 c_1 + \ldots + m_s c_s) x} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_{\vec{c}}(m) e^{2\pi i m x}, \quad c_{\vec{c}}(m) = \int\limits_0^1 f_{\vec{c}}(x) e^{-2\pi i m x} dx.$$

Нетрудно видеть, что $c_{\vec{c}}(m) = \sum_{\vec{m} \in \mathbb{Z}^s} c(\vec{m}) \delta(m_1 c_1 + \ldots + m_s c_s - m)$, $\quad \delta(m) = \begin{cases} 0, & \text{если } m \neq 0, \\ 1, & \text{если } m = 0. \end{cases}$
Отсюда сразу следует, что $c_{\vec{c}}(m) = 0$, если $(c_1, \ldots, c_s) \nmid m$, а при $m = (c_1, \ldots, c_s) m'$ имеем

$$c_{\vec{c}}(m) = \sum_{\vec{m}' \in \mathbb{Z}^s} c(\vec{m}' \cdot (c_1, \ldots, c_s)) \delta(m_1' c_1' + \ldots + m_s' c_s' - m'),$$

где $\vec{c}\,' = (c_1', \ldots, c_s')$, $c_j' = \frac{c_j}{d}$ $(j = 1, \ldots, s)$, $d = (c_1, \ldots, c_s)$ — наибольший общий делитель коэффициентов диофантова уравнения.

При изучении вопроса о величине коэффициентов Фурье функции одной переменной, возникающей при этой замене, в работе [1] возникла неполная s–1-мерная решётка $\Lambda(\vec{c}) = \{\vec{m} | m_1 c_1 + \ldots + m_s c_s = 0\}$ и сумма

$$\sum_{\vec{m}' \in \Lambda(\vec{c}\,')} c(d(\vec{n}(m') + \vec{m'})),$$

где $\vec{n}(m') = (n_1, \ldots, n_s)$ — целочисленный вектор $\vec{n}$ с минимальным значением усечённой нормы $q(\vec{n}) = \overline{n_1} \ldots \overline{n_s}$, для которого $n_1 c_1' + \ldots + n_s c_s' - m' = 0$, и $c(d(\vec{n}(m') + \vec{m'}))$ — коэффициенты Фурье функции многих переменных $f(\vec{x})$.

Гиперболический параметр $q(\Lambda(\vec{c}))$ решетки решений линейного диофантова уравнения $n_1 c_1 + \ldots + n_s c_s = 0$ определяется как минимальное значение произведения $\overline{m}_1 \ldots \overline{m}_s$, где $m_1, \ldots, m_s$ — произвольное нетривиальное решение этого линейного диофантова уравнения

$$c_1 m_1 + \ldots + c_s m_s = 0. \tag{1}$$

Таким образом, $q(\Lambda(\vec{c})) = q(\vec{n}(0))$.

Нам потребуется следующая простая лемма.

Лемма 1. *При $x \leqslant y$ справедливо равенство*

$$\sum_{x\leqslant t\leqslant y} 1 = [y] - [x] + [1 - \{x\}].$$

Для простоты изложения будем считать, что $s = 2$. В этом случае решётка $\Lambda(\vec{c})$ имеет простой вид

$$\Lambda(\vec{c}) = \left\{ t\left(\frac{c_2}{(c_1,c_2)}, -\frac{c_1}{(c_1,c_2)}\right) \middle| \, t \in \mathbb{Z} \right\}.$$

По определению величины $\vec{n}(m')$ имеем $m' = c'_1 n_1 + c'_2 n_2$ и

$$q = q_{1,2}(m') = \overline{n_1} \cdot \overline{n_2} = \min_{t\in\mathbb{Z}} \overline{n_1 + tc'_2} \cdot \overline{n_2 - tc'_1}.$$

Пусть m' – произвольное целое число и целые n_1, n_2 определены из условия $c'_1 n_1 + c'_2 n_2 = m'$ и величина $q(m') = \overline{n_1} \cdot \overline{n_2}$ наименьшая среди всех решений этого диофантова уравнения. Так как $(c'_1, c'_2) = 1$, то значения линейной формы $c'_1 n_1 + c'_2 n_2$ пробегают все целые числа и вектор $\vec{n}(m') = (n_1, n_2)$ определён для любого целого m'.

Рассмотрим представления $n_1 = q_1 c'_2 + r_1$, $0 \leqslant r_1 \leqslant c'_2 - 1$, $n_2 = q_2 c'_1 + r_2$, $0 \leqslant r_2 \leqslant c'_1 - 1$. Тогда

$$q = \overline{n_1} \cdot \overline{n_2} = \min_{t\in\mathbb{Z}} \overline{r_1 + (t+q_1)c'_2} \cdot \overline{r_2 - (t-q_2)c'_1}.$$

Лемма 2. *Пусть периодическая функция $f(x_1, x_2)$ задана своим рядом фурье*

$$f(x_1,x_2) = \sum_{m_1,m_2=-\infty}^{\infty} c(m_1,m_2) e^{2\pi i(m_1x_1+m_2x_2)},$$

$$c(m_1,m_2) = \int_0^1 \int_0^1 f(x_1,x_2) e^{-2\pi i(m_1x_1+m_2x_2)} dx_1 dx_2.$$

Тогда для коэффициентов Фурье функции одной переменной $f_{\vec{c}}(x) = f(\{c_1x\}, \{c_2x\})$ справедливы равенства

$$f_{\vec{c}}(x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_{\vec{c}}(m) e^{2\pi imx} = \sum_{m'=-\infty}^{\infty} c_{\vec{c}}(dm') e^{2\pi idm'x}, \quad c_{\vec{c}}(m) = \int_0^1 f\left(\{c_1x\}, \{c_2x\}\right) e^{-2\pi imx} dx,$$

$$c_{\vec{c}}(dm') = \sum_{t=-\infty}^{\infty} c(n_1 + tc'_2, n_2 - tc'_1),$$

где $d = (c_1, c_2)$ — наибольший общий делитель коэффициентов c_1, c_2, $c'_1 = \frac{c_1}{d}$, $c'_2 = \frac{c_2}{d}$, и n_1, n_2 — произвольное фиксированное решение диофантового уравнения $c'_1 m_1 + c'_2 m_2 = m'$.

Сначала рассмотрим самый простой случай $m = 0$.

Лемма 3. *Справедливо неравенство*

$$|c_{\vec{c}}(0)| \leqslant \|f(\vec{x})\|_{E_2^\alpha} \left(1 + \frac{2\zeta(2\alpha)}{(c'_1 c'_2)^\alpha}\right).$$

Лемма 4. *При ненулевом целом m справедливы неравенства:*

при $m \not\equiv 0 \pmod{c_1}$

$$|c_{\vec{c}}(mc_2)| \leqslant \|f(\vec{x})\|_{E_2^\alpha}\cdot$$
$$\cdot\begin{cases} \left(\frac{1}{|m|^\alpha}+\frac{1}{(c_2'(c_1'-|m|))^\alpha}+\frac{\zeta(2\alpha)+\zeta(\alpha)}{(c_1'c_2')^\alpha}\right), & \text{если } |m|<c_1', \\ \left(\frac{1}{|m|^\alpha}+\frac{1}{c_2'^\alpha}\left(\frac{\zeta(\alpha)}{(c_1')^\alpha}+\frac{1}{(q_1r_1)^\alpha}+\frac{1}{((q_1+1)(c_1'-r_1))^\alpha}+\frac{(2^{\alpha+1}+1)\zeta(\alpha)}{|m|^\alpha}\right)\right), \\ \text{если } |m|=q_1c_1'+r_1, q_1>0, 0<r_1<c_1'; \end{cases}$$

при $m \not\equiv 0 \pmod{c_2}$

$$|c_{\vec{c}}(mc_1)| \leqslant \|f(\vec{x})\|_{E_2^\alpha}\cdot$$
$$\cdot\begin{cases} \left(\frac{1}{|m|^\alpha}+\frac{1}{(c_1'(c_2'-|m|))^\alpha}+\frac{\zeta(2\alpha)+\zeta(\alpha)}{(c_1'c_2')^\alpha}\right), & \text{если } |m|<c_2', \\ \left(\frac{1}{|m|^\alpha}+\frac{1}{c_1'^\alpha}\left(\frac{\zeta(\alpha)}{(c_2')^\alpha}+\frac{1}{(q_2r_2)^\alpha}+\frac{1}{((q_2+1)(c_2'-r_2))^\alpha}+\frac{(2^{\alpha+1}+1)\zeta(\alpha)}{|m|^\alpha}\right)\right), \\ \text{если } |m|=q_2c_2'+r_2, q_2>0, 0<r_2<c_2'; \end{cases}$$

при $m \neq 0$

$$|c_{\vec{c}}(mc_1c_2)| \leqslant \frac{\|f(\vec{x})\|_{E_2^\alpha}\left(c_1^\alpha+c_2^\alpha+(2^{\alpha+1}+2)\zeta(\alpha)d^\alpha\right)}{(|m|c_1c_2)^\alpha}$$

Пусть $m'=c_1'n_1+c_2'n_2$ и $q=\overline{n_1}\cdot\overline{n_2}=\min_{c_1'm_1+c_2'm_2=m'}\overline{m_1}\cdot\overline{m_1}=\min_{t\in\mathbb{Z}}\overline{n_1+tc_2'}\cdot\overline{n_2-tc_1'}$. Определим функцию $\varphi(m_1,m_2)$ равенствами

$$\varphi(m_1,m_2)=\begin{cases} 0, & \text{если} \quad \overline{m}_1\overline{m}_2<q, \\ \delta(c_1'm_1+c_2'm_2-m'), & \text{если} \quad \overline{m}_1\overline{m}_2\geqslant q. \end{cases}$$

Определим для целых неотрицательных m_1, m_2 сумму

$$S(m_1,m_2)=\sum_{|k_1|\leqslant m_1,|k_2|\leqslant m_2}\varphi(k_1,k_2).$$

Лемма 5. *Справедливы соотношения:*
при $\overline{m}_1\overline{m}_2<q$ $S(m_1,m_2)=0$;
при $\overline{m}_1\overline{m}_2\geqslant q$

$$S(m_1,m_2)=\min\left(\frac{m_1}{c_2'}-\frac{m'}{c_1'c_2'},\frac{m_2}{c_1'}\right)-\max\left(-\frac{m_1}{c_2'}-\frac{m'}{c_1'c_2'},\frac{-m_2}{c_1'}\right)+\delta(m_1,m_2),$$
$$\min\left(\frac{m_1}{c_2'}-\frac{m'}{c_1'c_2'},\frac{m_2}{c_1'}\right)-\max\left(-\frac{m_1}{c_2'}-\frac{m'}{c_1'c_2'},\frac{-m_2}{c_1'}\right)=$$
$$=\begin{cases} \frac{2m_2}{c_1'}, & \text{при } \frac{m_2}{c_1'}\leqslant\frac{m_1}{c_2'}-\frac{m'}{c_1'c_2'}, \\ \frac{2m_1}{c_2'}, & \text{при } \frac{m_2}{c_1'}>\frac{m_1}{c_2'}+\frac{m'}{c_1'c_2'}, \\ \frac{m_1}{c_2'}+\frac{m_2}{c_1'}-\frac{m'}{c_1'c_2'}, & \text{при } \frac{m_1}{c_2'}-\frac{m'}{c_1'c_2'}<\frac{m_2}{c_1'}\leqslant\frac{m_1}{c_2'}+\frac{m'}{c_1'c_2'}, \end{cases}$$

где $-1<\delta(m_1,m_2)\leqslant 1$.

Лемма 6. *Справедливы оценки*

$$S(m_1,m_2)\leqslant\begin{cases} 0 & \text{при } \overline{m}_1\overline{m}_2<q, \\ 2\left(\frac{m_1}{c_2'}+\frac{m_2}{c_1'}\right)+1, & \text{при } \overline{m}_1\overline{m}_2\geqslant q. \end{cases}$$

Пусть m' – произвольное целое число и целые n_1, n_2, $\ldots$, n_s определены из условия $c'_1n_1 + c'_2n_2 + \ldots + c'_sn_s = m'$ и величина $q(m') = \overline{n_1} \cdot \overline{n_2} \cdot \ldots \cdot \overline{n_s}$ наименьшая среди всех решений этого диофантова уравнения. Так как $(c'_1, c'_2, \ldots, c'_s) = 1$, то значения линейной формы $c'_1n_1 + c'_2n_2 + \ldots + c'_sn_s$ пробегают все целые числа и вектор $\vec{n}(m') = (n_1, n_2, \ldots, n_s)$ определён для любого целого m'.

Определим функцию $\varphi(m_1, m_2, \ldots, m_s)$ равенствами

$$\varphi(m_1, m_2, \ldots, m_s) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad \overline{m}_1\overline{m}_2\ldots\overline{m}_s < q, \\ \delta(c'_1m_1 + c'_2m_2 + \ldots + c'_sm_s - m'), & \text{если} \quad \overline{m}_1\overline{m}_2\ldots\overline{m}_s \geqslant q, \end{cases}$$

где для краткости полагаем $q = q(m')$.

Определим для целых неотрицательных m_1, m_2, $\ldots$, m_s сумму

$$S(m_1, m_2, \ldots, m_s) = \sum_{|k_1| \leqslant m_1, |k_2| \leqslant m_2, \ldots, |k_s| \leqslant m_s} \varphi(k_1, k_2, \ldots, k_s).$$

Лемма 7. *Пусть номера ν и μ удовлетворяют условию*

$$\frac{m_\mu}{c'_\nu} + \frac{m_\nu}{c'_\mu} = \min_{1 \leqslant i < j \leqslant s} \left(\frac{m_j}{c'_i} + \frac{m_i}{c'_j} \right),$$

тогда справедливы оценки

$$S(m_1, m_2, \ldots, m_s) \leqslant \begin{cases} 0 & \text{при } \overline{m}_1\overline{m}_2 \cdot \ldots \cdot \overline{m_s} < q, \\ \left(\prod\limits_{j \neq \nu, \mu} (2m_j + 1) \right) \left(\frac{2m_\mu}{c'_\nu} + \frac{2m_\nu}{c'_\mu} + 1 \right), & \text{при } \overline{m}_1\overline{m}_2 \cdot \ldots \cdot \overline{m_s} \geqslant q. \end{cases}$$

Замечание 1. *Не трудно видеть, что утверждение леммы 7 справедливо при любых значениях ν и μ, если $\nu \neq \mu$.*

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ю. А. Басалов, В. А. Быковский, Н. Н. Добровольский, В. Н. Чубариков, Н. М. Добровольский. Погрешность многомерной Фурье-интерполяции и трудоемкость быстрого преобразования Фурье // Чебышевский сборник (в печати).

2. Ю. А. Басалов, Н. Н. Добровольский, В. Н. Чубариков. Многомерная Фурье-интерполяция и быстрые преобразования Фурье // Докл. РАН. Матем., информ., проц. упр., 517 (2024) С. 41–43.

УДК 517.927.25

О методе исследования асимптотики спектра оператора Штурма — Лиувилля для потенциалов специального класса

А. В. Качкина (Россия, г. Москва)
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
e-mail: alisa-kachkina@mail.ru

On a method of exploring the asymptotics of the spectrum of Sturm–Liouville operator for potentials of a special class

A. V. Kachkina (Russia, Moscow)
Lomonosov Moscow State University
e-mail: alisa-kachkina@mail.ru

1. Введение

В гильбертовом пространстве $L_2[0,+\infty)$ рассматривается оператор Штурма–Лиувилля $\mathbb{L}_q$, порождаемый дифференциальным выражением: $l_q(y) = -y''(x)+q(x)y(x)$, и граничным условием в нуле: $y(0)\cos\alpha + y'(0)\sin\alpha = 0$, где $q(x)$ — непрерывная на $[0,+\infty)$ действительнозначная функция. Область определения оператора $\mathbb{L}_q$: $D(\mathbb{L}_q) = \{y \in L_2[0,+\infty) : y, y'$ абсолютно непрерывны на любом $[a,b] \subset [0,+\infty)$, $-y''+q(x)y \in L_2[0,+\infty)$ и $y(0)\cos\alpha + y'(0)\sin\alpha = 0\}$.

Если функция (потенциал) $q(x) \to +\infty$, $x \to +\infty$, то оператор $\mathbb{L}_q$ полуограничен снизу и имеет чисто дискретный спектр $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\lambda_n \to +\infty$, $n \to +\infty$ (Э. Ч. Титчмарш [1], А. М. Молчанов [2]). Поэтому можно говорить об асимптотике собственных значений, занумеровав их в порядке возрастания.

Распределение спектра хорошо изучено в случае степенного роста потенциала q (Э. Ч. Титчмарш [1, с. 158–163]). Так, например, если $q(x) = x^k$, $k > 0$, то собственные значения λ_n оператора $\mathbb{L}_q$ имеют степенную асимптотику. Если потенциал q растет на бесконечности быстрее любой степенной функции, то собственные значения оператора $\mathbb{L}_q$ имеют другой характер асимптотики. А. И. Козко [3] установил, что для потенциала $q(x) = e^x$ выполнено соотношение:

$$\lambda_n \sim \left(\frac{\pi n}{2\ln(\pi n)}\right)^2, \ n \to +\infty.$$

В данной работе исследуется метод нахождения асимптотики собственных значений оператора $\mathbb{L}_q$ для классов потенциалов, быстро растущих на бесконечности.

2. Классы быстро растущих потенциалов. Вспомогательные утверждения

Обозначим через $\mathfrak{Q}$ класс функций $q \in C[0,+\infty)\cap C^2(0,+\infty)$, удовлетворяющих условиям:

$$q''(x) \geq 0, \quad x \geq x_0,$$
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{xq'(x)}{q(x)} = +\infty. \tag{1}$$

Из последнего равенства, в частности, следует, что существует такое число $\widetilde{x}$, что для всех значений аргумента $x > \widetilde{x}$ значения $q(x)$ не обращаются в ноль, а также выполнено неравенство $\dfrac{q'(x)}{q(x)} > 0$. Без ограничения общности всюду далее будем считать, что эти соотношения выполнены при $x > 0$ (т.е. $\widetilde{x} = 0$).

Лемма 1. *Рассмотрим произвольную функцию $q \in \mathfrak{Q}$. Верны следующие утверждения.*

1. Функции q' и q принимают только положительные значения на аргументах, больших некоторого x_1. Кроме того, эти функции растут на бесконечности быстрее любой степенной функции, т. е. для любого $k \in \mathbb{N}$ имеем $x^k = o(q(x))$, $x \to +\infty$.

2. Пусть функция p — обратная к функции q, то есть $q(p(x)) = x$ для $x > x_1$. Тогда функция p растет медленнее любой степенной функции, т. е. для любого $\delta > 0$ имеем $p(x) = o(x^\delta)$, $x \to +\infty$.

Пример 7. *Все целые функции с неотрицательными тейлоровскими коэффициентами, отличные от полинома, входят в класс $\mathfrak{Q}$.*

Обозначим через $\widetilde{\mathfrak{Q}}$ подкласс функций $q \in \mathfrak{Q}$, хотя бы при одном значении $1 < \gamma < 4/3$ удовлетворяющих следующему условию:

$$q''(x) \leq (q'(x))^\gamma, \quad x \geq x_0. \tag{2}$$

Пример 8. *Целые функции конечного порядка вида $q(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$, $a_n \geq 0$, $n \in \mathbb{N}_0$, отличные от полинома, лежат в классе $\widetilde{\mathfrak{Q}}$.*

3. Основной результат

Обозначим $c_n = (\pi n)^2$, $n \in \mathbb{N}$. В работе [3] доказано, что в случае $q \in \widetilde{\mathfrak{Q}}$ имеет место асимптотика $n \sim \frac{1}{\pi}\lambda_n^{1/2} p(\lambda_n)$, $n \to +\infty$. Отсюда получаем, что $\lambda_n \sim \frac{c_n}{p^2(\lambda_n)}$, $n \to +\infty$, то есть для некоторой последовательности $\alpha_n \to 1$, $n \to +\infty$ выполнено равенство:

$$\lambda_n = \frac{\alpha_n c_n}{p^2(\lambda_n)},\ n \in \mathbb{N}.$$

Тогда $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\lambda_n}{c_n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\alpha_n}{p^2(\lambda_n)} = 0$ в силу неограниченного монотонного роста функции p. Значит, $\lambda_n = o(c_n)$, $n \to +\infty$. Поэтому, начиная с некоторого номера, выполняется неравенство $\lambda_n < c_n$.

В принятых ранее обозначениях для натуральных i положим по определению:

$$R_n^0 = c_n, \quad L_n^i = \frac{\alpha_n c_n}{p^2(R_n^{i-1})}, \quad R_n^i = \frac{\alpha_n c_n}{p^2(L_n^i)}.$$

Теорема 1. *Рассмотрим произвольную функцию $q \in \widetilde{\mathfrak{Q}}$ и обратную к ней функцию p. Зафиксируем для q введенные выше обозначения для последовательностей. Тогда в этих обозначениях для всех номеров n, больших некоторого $N \in \mathbb{N}$, верны следующие утверждения:*

$$1)\ L_n^i < L_n^{i+1},\ R_n^{i-1} > R_n^i; \qquad 2)\ L_n^i < \lambda_n < R_n^i, \quad i \in \mathbb{N}.$$

Данная теорема доказывается с помощью леммы 1, основываясь на характере роста функции p, обратной для потенциала. С помощью полученного метода можно исследовать поведение собственных значений оператора Штурма-Лиувилля для различных классов потенциалов, удовлетворяющих условиям формул (1) и (2). Подобный метод с конечным числом итерационных шагов использован для нахождения асимптотики спектра оператора $\mathbb{L}_q$ в случае более узкого класса потенциалов в работе [4]. Асимптотики собственных значений оператора $\mathbb{L}_q$ могут использоваться при нахождении регуляризованных следов [5]–[8], при решении обратных задач и при нахождении базисных свойств собственных функций.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Титчмарш Э. Ч. Разложение по собственным функциям, связанные с дифференциальными уравнениями второго порядка // т.1, Москва, ИЛ, 1960.

2. Молчанов А. М. Об условиях дискретности спектра самосопряженных дифференциальных уравнений второго порядка // Труды Моск. матем. об-ва т.2, 1953, 169–200.

3. Козко А. И. Асимптотика спектра дифференциального оператора $-y'' + q(x)y$ с граничным условием в нуле и быстро растущим потенциалом // Дифференц. уравнения, 41:5 (2005), 611–622; Differ. Equ., 41:5 (2005), 636–648.

4. Качкина А. В., Оператор Штурма–Лиувилля с быстро растущим потенциалом и асимптотика его спектра // Чебышевский сборник, т. XXV, вып. 3 (94), 2024, с. 143–157.

5. Козко А. И., Печенцов А. С. Регуляризованные следы сингулярных дифференциальных операторов с каноническими краевыми условиями // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем. Мех. 2011. № 4, С. 11–17.

6. Козко А. И., Печенцов А. С. Спектральная функция сингулярного дифференциального оператора порядка $2m$ // Известия Российской академии наук. Серия математическая. 2010. Т. 74, №6. С. 107–126.

7. Козко А. И., Печенцов А. С. Регуляризованные следы сингулярных дифференциальных операторов высших порядков - Математические заметки - 2008. Т. 83, №1. С. 39–49.

8. Садовничий В. А., Печенцов А. С., Козко А. И. Регуляризованные следы сингулярных дифференциальных операторов // Доклады РАН. 2009, том 427, с. 461-465.

УДК 518.865

Некоторые случаи математической модели для экономической задачи теории роста. Сведение к системам дифференциальных уравнений, допускающих решение в квадратурах

А. И. Козко (Россия, г. Москва)
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова;
Московский центр фундаментальной и прикладной математики
e-mail: prozerpi@yahoo.co.uk
Л. М. Лужина (Россия, г. Москва)
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
e-mail: lluzhina@gmail.com
А. Ю. Попов (Россия, г. Москва)
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова;
Московский центр фундаментальной и прикладной математики
e-mail: prozerpi@yahoo.co.uk
В. Г. Чирский (Россия, г. Москва)
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
e-mail: vgchirskii@yandex.ru

Some cases of a mathematical model for the economic problem of growth theory. Reduction to systems of differential equations that can be solved in quadratures

A. I. Kozko (Russia, Moscow)
Lomonosov Moscow State University;
Moscow Center of Fundamental and Applied Mathematics
e-mail: prozerpi@yahoo.co.uk

L. M. Luzhina (Russia, Moscow)
Lomonosov Moscow State University
e-mail: lluzhina@gmail.com
A. Yu. Popov (Russia, Moscow)
Lomonosov Moscow State University;
Moscow Center of Fundamental and Applied Mathematics
e-mail: prozerpi@yahoo.co.uk
V. G. Chirskii (Russia, Moscow)
Lomonosov Moscow State University
e-mail: vgchirskii@yandex.ru

В работе мы рассматриваем математическую модель Рамсея – Касса – Купманса [1]–[11] и изучаем основные свойства функций, входящих в эту модель. Поставим экстремальную задачу. Наша задача состоит в том, чтобы найти траекторию $c(t)$, которая бы максимизировала полную полезность U:

$$U = \int_0^{+\infty} u(c(t))e^{-(\rho-n)t}\,dt \to \max$$

при наличии бюджетного ограничения

$$\dot{\hat{k}} = f(\hat{k}) - \hat{c} - (x+n+\delta)\cdot\hat{k},$$

неравенств $\hat{c} \geqslant 0$, $\hat{k} \geqslant 0$ и заданном начальном условии $\hat{k}(0)$ (здесь $\hat{k}(t) = k(t)\cdot e^{-xt}$, $\hat{c}(t) = c(t)\cdot e^{-xt}$). Предполагается, что производственная функция $f(\hat{k})$ и функция полезности $u(c)$ обладают неоклассическими свойствами и являются гладкими, монотонными, вогнутыми функциями, удовлетворяющими условиям Инады (далее мы эти функции выберем конкретными, поэтому не будем уточнять условия). Группа констант (n, x, δ, θ) связана с такими характеристиками изучаемой экономической системы, как темпы прироста населения, развитие уровня технологии, выбывание капитала, а также ставкой временного предпочтения. Подробно с ними можно ознакомиться в [1]–[11].

Применим принцип максимума Понтрягина к этой экстремальной задаче. Гамильтониан запишется в виде:

$$J = u(c(t))e^{-(\rho-n)t} + \lambda(t)\left(f(\hat{k}) - c(t)e^{-xt} - (x+n+\delta)\hat{k}\right),$$

условия первого порядка, после преобразований, приводят к системе двух дифференциальных уравнений на функции $\hat{c}$, $\hat{k}$

$$\begin{cases} \dot{\hat{k}} = f(\hat{k}) - \hat{c} - (x+n+\delta)\cdot\hat{k}, \\ \dot{\hat{c}} = \theta^{-1}f'(\hat{k})\hat{c} - (\theta^{-1}(\delta+\rho)+x)\hat{c}. \end{cases}$$

Для краткости записи положим $C = \hat{c}$, $K = \hat{k}$. Далее будем использовать производственную функцию Кобба – Дугласа $f(K) = aK^{\alpha}$. Производственная функция Кобба – Дугласа с показателем $\alpha < 0.5$ делает экономическую модель заведомо неэффективной. Впрочем, значения $\alpha \in [0.5; 0.7]$ также представляют, в основном, теоретический интерес. Наиболее востребованы в приложениях значения $\alpha \in [0.72; 0.96]$, а чаще всего берут $\alpha = 0.75$ (см. [11]). В модели Рамсея – Касса – Купманса, применяемой в теории экономического роста, определяющую роль играет система двух дифференциальных уравнений, которой удовлетворяют функции $K(t)$ — капитал в момент времени t и $C(t)$ — потребление в момент времени t (с производственной функцией Кобба – Дугласа):

$$\begin{cases} \dot{K}(t) = aK^{\alpha}(t) - C(t) - x_1K(t), \\ \dot{C}(t) = \theta^{-1}\alpha aK^{\alpha-1}(t)C(t) - x_2C(t). \end{cases} \tag{1}$$

В систему входит набор констант a, α, θ и x_1, x_2, характеризующих рассматриваемую экономическую структуру. Вторая группа констант, линейными комбинациями которых являются $x_1 = x + n + \delta$ и $x_2 = \frac{\delta+\rho}{\theta} + x$, связана с характеристиками изучаемой экономической системы $(n,\ x,\ \delta,\ \theta)$. Подробно с ними и оценками на эти константы можно ознакомиться в [11]. Отметим, что x_1, x_2 — небольшие положительные числа, как правило, лежащие в пределах от 0.01 до 0.1.

Нами получен ряд результатов на компоненты $(K(t),\ C(t))$. Мы исследовали их монотонность, получили оценки на рост. Приведём один из результатов. Положим $x_3 = \frac{x_2}{\alpha}$, $\xi = \alpha x_1 - x_2$, $b = 1 + \frac{\xi K_0}{\alpha C_0}$.

Теорема 1. *Пусть $\theta > 1$, выполняется условие $\frac{\alpha}{\theta}\frac{f(K_0)}{K_0} > x_2$ и равенство*

$$f(K_0) = \frac{\theta}{\theta - 1} b C_0.$$

Тогда решение $(K(t),\ C(t))$ задачи Коши

$$\begin{cases} \dot{K} = aK^{\alpha} - b\,C - x_3 K, \\ \dot{C} = \theta^{-1}\alpha a K^{\alpha-1} C - x_2 C, \quad \text{где} \ \ b > 0, \end{cases}$$

$C(0) = C_0$, $K(0) = K_0$ существует на всём луче $[0,\ +\infty)$, обе компоненты его возрастают и стремятся к следующим пределам:

$$\lim_{t\to+\infty} K(t) = \left(\frac{a\alpha}{x_2\theta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}, \quad \lim_{t\to+\infty} C(t) = \frac{\theta-1}{b}\left(\frac{a}{\theta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}\left(\frac{\alpha}{x_2}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

На луче $0 \leqslant t \leqslant +\infty$ справедливы тождества

$$C(t) = \frac{\theta - 1}{b\theta} f(K(t)), \quad \int\limits_{K_0}^{K(t)} \frac{du}{\theta^{-1} f(u) - (\frac{x_2}{\alpha})u} = t.$$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Козко А. И., Лужина Л. М., Попов А. Ю., Чирский В. Г. Сведение математической модели некоторых задач математической экономики к системам дифференциальных уравнений, допускающих решение в квадратурах // Чебышевский сборник. 2024. Том 25, № 3. С. 187-200.

2. Козко А. И., Лужина Л. М., Попов А. Ю., Чирский В. Г. Метод приближённого решения системы дифференциальных уравнений из модели Рамсея — Касса — Купманса, основанный на решении в квадратурах одного подкласса сходных систем // Чебышевский сборник. 2022. Том 23, № 4. С. 115-125. https://doi.org/10.22405/2226-8383-2022-23-4-115-125

3. Козко А. И., Лужина Л. М., Попов А. Ю., Чирский В. Г. Оптимальная экспонента в задаче Рамсея — Касса — Купманса с логарифмической функцией полезности // Чебышевский сборник. 2019. Том 20, № 4. С. 197-207. https://doi.org/10.22405/2226-8383-2018-20-4-197-207.

4. Козко А. И., Лужина Л. М., Попов А. Ю., Чирский В. Г. О задаче Рамсея — Касса — Купманса для потребительского выбора // Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. 2020. Том 182. С. 39–44. DOI: 10.36535/0233-6723-2020-182-39-44

5. Козко А. И., Лужина Л. М., Попов А. Ю., Чирский В. Г. Модель задачи Рамсея — Касса — Купманса // Издательство: Московский педагогический государственный университет (Москва). Классическая и современная геометрия, материалы международной конференции, посвященной 100-летию со дня рождения В. Т. Базылева. под ред. А. В. Царева. Москва. 2019. С. 87-88.

6. Козко А. И., Лужина Л. М., Попов А. Ю., Чирский В. Г. Оценка необходимого начального экономического ресурса в задаче Рамсея — Касса — Купманса // Чебышевский сборник. 2019. Том 20, № 4. С. 188-196. https://doi.org/10.22405/2226-8383-2018-20-4-188-196.

7. Козко А. И., Лужина Л. М., Попов А. Ю., Чирский В. Г. Функция потребления в модели экономического роста Рамсея — Касса — Купманса в случае стационарности функции сбережения // Чебышевский сборник. 2022. Том 23, № 1. С. 118-129. https://doi.org/10.22405/2226-8383-2022-23-1-118-129.

8. Козко А. И., Лужина Л. М., Попов А. Ю., Чирский В. Г. Локализация показателя оптимальной экспоненты задачи Рамсея — Касса — Купманса стремящейся к бесконечности степенной функции полезности. Чебышевский сборник. 2021. Том 22, № 2. С. 121-134. https://doi.org/10.22405/2226-8383-2021-22-2-121-134

9. Козко А. И., Лужина Л. М., Попов А. Ю., Чирский В. Г. Ограничения на значения функции потребления в модели экономического роста Рамсея — Касса — Купманса в случае стационарности функции сбережения. Чебышевский сборник. 2021. Том 22, № 2. С. 501-509. https://doi.org/10.22405/2226-8383-2021-22-2-501-509

10. Козко А. И., Лужина Л. М., Попов А. Ю., Чирский В. Г. Об идеальной экономической ситуации — росте капитала и функции потребления в некоторых моделях экономического роста. // Чебышевский сборник. 2023. Том 24, № 2. С. 256-265. https://doi.org/10.22405/2226-8383-2023-24-2-256-265

11. Барро Р. Дж., Сала-и-Мартин Х. Экономический рост // М.: БИНОМ. Лаборатория знаний. 2010.

УДК 517.518.83

Приближение функций в пространствах с несимметричной нормой и знакочувствительным весом

А. И. Козко (Россия, г. Москва)
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова;
Московский центр фундаментальной и прикладной математики
e-mail: prozerpi@yahoo.co.uk

Approximation of functions in spaces with an asymmetric norm and sign-sensitive weight

A. I. Kozko (Russia, Moscow)
Lomonosov Moscow State University;
Moscow Center of Fundamental and Applied Mathematics
e-mail: prozerpi@yahoo.co.uk

Пусть $\mathbb{T}$ — одномерный тор, реализованный как отрезок $[-\pi;\pi]$ с отождествлёнными точками $-\pi$ и π. Через $L_p(\mathbb{T})$, $1 \leqslant p < +\infty$ обозначим пространство действительнозначных на $\mathbb{T}$ функций, суммируемых в p-ой степени, с нормой

$$\|f(\cdot)\|_p = \left(\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} |f(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

В случае $p = +\infty$ предполагается, что $f \in C(\mathbb{T})$ и $\|f\|_\infty = \max_{x\in\mathbb{T}} |f(x)|$.

Для $r \in \mathbb{N}$, $a > 0$, $h \in \mathbb{R}$ определим обобщённый разностный оператор порядка r:

$$\Delta_h^{a,r}(f,x) = \Delta_h\Delta_{ah}\ldots\Delta_{a^{r-1}h}(f,x),$$

где $\Delta_h f(x) = f(x) - f(x+h)$.

Обозначим $\omega_{a,r}(f;h) = \sup_{|t|\leqslant h}\|\Delta_t^{a,r} f\|_p$ и $E_n(f)_{L_p(\mathbb{T})} = \inf_{t\in\mathbb{T}_n}\|f - t\|_{L_p(\mathbb{T})}$ — наилучшее приближение функции f в норме $L_p(\mathbb{T})$ тригонометрическими полиномами степени не выше, чем n.

Определение 1. *Обозначим, через Ψ класс норм на плоскости, для которых выполнены следующие пять свойств. Таким образом $\psi \in \Psi$ означает*

i) $\psi(\mathbf{w}) \geqslant 0,$ *для любого* $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^2,$ *причём* $\psi(\mathbf{w}) = 0 \Longleftrightarrow \mathbf{w}w = (0;0)$ *для* $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^2$;

ii) $\psi(\alpha\mathbf{w}) = |\alpha|\psi(\mathbf{w}), \qquad \mathbf{w} \in \mathbb{R}^2,\ \alpha \in \mathbb{R}$;

iii) $\psi(\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2) = \psi(u_1 + u_2, v_1 + v_2) \leqslant \psi(\mathbf{w}_1) + \psi(\mathbf{w}_2) = \psi(u_1, v_1) + \psi(u_2, v_2), \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \in \mathbb{R}^2.$

Будем говорить, что норма ψ симметричная, если выполнены i)-iii) и свойство

$$iv)\ \psi(u,v) = \psi(v,u), \quad \forall u, v \in \mathbb{R}.$$

Будем говорить, что норма ψ монотонная, если выполнены i)-iii) и свойство

$$v)\ \forall u_1, u_2, v_1, v_2 \in \mathbb{R}:\ |u_1| \le |u_2|,\ |v_1| \le |v_2| \Longrightarrow \psi(u_1,v_1) \leqslant \psi(u_2,v_2).$$

Приведём примеры наиболее распространённых монотонных, симметричных норм на плоскости: $\psi(u,v) = |u| + |v|$; $\psi(u,v) = (u^2+v^2)^{1/2}$ (Евклидова норма); $\psi(u,v) = \max\{|u|,|v|\}$; $\psi(u,v) = (|u|^p + |v|^p)^{1/p}$, $p \in [1;+\infty)$; $\psi(u,v) = |u| + |v| + |u - v|$.

Определение 2. *Будем рассматривать несимметричную норму $\psi_{\varrho,\mathbf{p}}$ и будем писать $\psi_{\varrho,\mathbf{p}} \in \Psi_{\varrho,\mathbf{p}}$, если несимметричная норма порождается функцией $\psi \in \Psi$, обладающей свойствами i)-v), парой $\mathbf{p} = (p_1, p_2)$ элементов расширенной числовой прямой $(1 \leqslant p_1, p_2 \leqslant +\infty)$ и знакочувствительным весом $\varrho = (\varrho_+(x), \varrho_-(x))$ – парой произвольных неотрицательных измеримых функций ϱ_+ и ϱ_-, которые могут, вообще говоря, принимать и бесконечные значения. Эта "норма" задается формулой*

$$\begin{aligned}\psi_{\varrho,\mathbf{p}}(f) = \psi_{\varrho,\mathbf{p}}(f^+, f^-) = \\ = \psi\left(\left(\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}}\varrho_+(x)(f^+(x))^{p_1}\,dx\right)^{\frac{1}{p_1}}, \left(\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}}\varrho_-(x)(f^-(x))^{p_2}\,dx\right)^{\frac{1}{p_2}}\right) = \\ = \psi\left(\|f^+(\cdot)\|_{\varrho_+,p_1}, \|f^-(\cdot)\|_{\varrho_-,p_2}\right).\end{aligned}$$

Различным задачам теории приближения в несимметричных пространствах посвящено много работ см. [1]–[5] и список цитируемой литературы там. Нами получен аналог прямой теоремы приближения для несимметричных пространств со знакочувствительными весами, в которой оценивается наилучшее приближение через модуль гладкости см. [1]. Приведём следствие для симметричного случая (для обычной L_p нормы без знакочувствительных весов).

Следствие 1. *Для любого $r, n, a \in \mathbb{N}$ и $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ — возрастающей последовательности положительных чисел,* $\lim_{n\to+\infty}\lambda_n = +\infty$, $f \in L_p$, $p \in [1;+\infty]$ *справедливо*

$$E_n(f)_{L_p(\mathbb{T})} \leqslant C\omega_{a,r}(f, \lambda_n^{-1})_p, \quad 1 \leqslant p \leqslant +\infty. \tag{1}$$

с положительной константой C.

Для $a = 1$, т.е. для классического модуля непрерывности r-го порядка в обычных $L_p(\mathbb{T})$ пространствах, следствие 1 было получено С.Б. Стечкиным в 1949 г. и опубликовано с полным доказательством в [6] в 1951 г. Он интересовался случаем $p = +\infty$, хотя его методы дают возможность без труда получить это утверждение при любом $p \in [1;+\infty]$. В то же время появились публикации М.Ф. Тимана, где такое же утверждение (для классического модуля непрерывности в $L_p(\mathbb{T})$ пространствах) было доказано для $1 < p < +\infty$. С.Б. Стечкин в своей работе для $r \in \mathbb{N}$ использовал ядра вида $K_n(t) = b_p J_n(t)$, где $J_n(t) = \left(\frac{\sin(pt/2)}{\sin(t/2)}\right)^{2k_0}$, где k_0 — целое, не зависит от n, $2k_0 \geqslant r+2$, натуральное p определяется из неравенств $\frac{n}{2k_0} < p \leqslant \frac{n}{2k_0}+1$, а b_p выбирается из условия $\int_{-\pi}^{\pi} K_n(t)\,dt = 1$.

Для $a = 1$ и $r = 1$, в пространствах $C(\mathbb{T}) = L_\infty(\mathbb{T})$ следствие 1 см. [7] было получено Д. Джексоном в следущем виде $E_n(f)_{L_\infty(\mathbb{T})} \leqslant 12\omega_{1,1}(f, n^{-1})_\infty$. Константа 12 была получена на ядре Джексона $K_n(t) = t(x)/\gamma_n$, где $t(x)$ и γ_n были определены выше. Более точно Д.Джексон получил $E_n(f)_{L_\infty(\mathbb{T})} \leqslant 6\omega_{1,1}(f, \frac{2}{n+1})_\infty$ для нечетных n и $E_n(f)_{L_\infty(\mathbb{T})} \leqslant 6\omega_{1,1}(f, \frac{2}{n})_\infty$ для четных n.

Отметим ещё несколько случаев оценок вида (1), которые были получены другими методами, отличным от изложенного нами.

Случай $a = 1$ и $r = 1$ в пространствах $C(\mathbb{T}) = L_\infty(\mathbb{T})$ с $\lambda_n = 2nk$, $k \in \mathbb{N}$ был изучен в работах Н.П. Корнейчука (см, например, [8]), в которых он доказал, что точная константа $C_{1,k}$ в неравенстве $E_n(f)_{L_\infty(\mathbb{T})} \leqslant C_{1,k}\omega_{1,1}(f, \frac{1}{2kn})_\infty$ удовлетворяет $\left(1 - \frac{1}{2n}\right)\frac{k+1}{2} \leqslant C_{1,k} \leqslant \frac{k+1}{2}$. Оценка сверху в данном результате можно получить как при помощи теорем сравнения, так и при помощи приближения вспомогательным классом функций. Оценка снизу получена Н.П. Корнейчуком на специальной последовательности функций.

Случай $a = 1$ и $r = 2$ в пространствах $C(\mathbb{T}) = L_\infty(\mathbb{T})$ с $\lambda_n = 4n$ был получен в работе В.В. Жука и В.А. Шалаева (см. [9], гл. 8, §3, теорема 3 и комментарий к гл. 8, §3]). $E_n(f)_{L_\infty(\mathbb{T})} \leqslant C_1\omega_{1,2}(f, \frac{1}{4n})_\infty$, причём они доказали, что точная константа C_1 удовлетворяет неравенству $1 - 1/2n \leqslant C_1 \leqslant 1$.

Для случая $a \in \mathbb{N}$ нечётно, $a \geqslant 3$ и $p = 2$ оценка на наилучшую константу в неравенстве (1) $C = C(a, r, 2, \lambda_n)$ для $\lambda_n = \frac{n}{\gamma\pi}$, $\gamma \geqslant 1$ получена в работе [10]:

$$\frac{1}{\sqrt{2^r}} \leqslant C(a, r, 2, \lambda_n) \leqslant \sqrt{1 + \frac{1}{[\gamma]}}\,\frac{1}{\sqrt{2^r}}.$$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Козко А. И. Оценки приближений функций тригонометрическими полиномами в пространствах с несимметричной нормой и знакочувствительным весом. // Чебышевский сборник. 2024. Том 25, № 3. С. 177-186.

2. Козко А.И. Многомерные неравенства разных метрик в пространствах с несимметричной нормой // Матем. сб. 1998. Том. 189. №9. С. 85–106.

3. Козко А.И. Аналоги неравенств Джексона–Никольского для тригонометрических полиномов в пространствах с несимметричной нормой // Матем. заметки. 1997. Том. 61. № 5. С. 687–699.

4. Козко А.И. Полнота ортогональных систем в несимметричных пространствах со знакочувствительным весом // Современная математика и ее приложения. 2005. Том. 24. С. 135–147.

5. Козко А.И. О порядке наилучшего приближения в пространствах с несимметричной нормой и знакочувствительным весом на классах дифференцируемых функций // Изв. РАН. Сер. матем. 2002. Том. 66. №1. С. 103–132.

6. Стечкин С.Б. О порядке наилучших приближений непрерывных функций // Известия АН СССР. Сер. матем. 1951. Том 15. С. 219–242.

7. Натансон И.П. Конструктивная теория функций. // Из-во Тех-Теорит. Литературы М. 1949. 688 с.

8. Корнейчук Н.П. Точные константы в теории приближения // М.: Наука. 1987. 424.

9. Жук В.В. Аппроксимация периодических функций. //Л.: ЛГУ. 1982. 366 с.

10. Козко А. И., Рождественский А. В. О неравенстве Джексона в L_2 с обобщенным модулем непрерывности // Матем. сб. 2004. Том. 195 №8. С. 3—46.

УДК 511.32

О гиперболической дзета-функции двумерных диагональных унимодулярных решёток[1]

А. П. Крылов (Россия, г. Тула)
Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого
e-mail: alek.krylov@gmail.com

On the hyperbolic zeta function of two-dimensional diagonal unimodular lattices

A. P. Krylov (Russia, Tula)
Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University
e-mail: alek.krylov@gmail.com

1. Введение

В работе [3] была доказана полнота метрического пространства двумерных диагональных унимодулярных решёток. Каждая двумерная диагональная унимодулярная решётка является декартовой решёткой, а, следовательно, гиперболическая дзета-функция этой решётки имеет аналитическое продолжение на всю комплексную плоскость (см. [1], [4]).

Цель нашей работы — изучить свойства аналитического продолжения гиперболической дзета-функции двумерных диагональных унимодулярных решёток в левой полуплоскости.

[1]Исследование выполнено в рамках госзадания № 073-03-2022-117/7 по теме «Теоретико-числовые методы в приближенном анализе и их приложения в механике и физике»

2. Дзета-функция диагональных унимодулярных решёток

Диагональные решётки — самый простой класс решёток. Они получаются растяжением по координатам фундаментальной двумерной решётки $\mathbb{Z}^2$: $\Lambda(d_1, d_2) = \{(d_1m_1, d_2m_2)|m_1, m_2 \in \mathbb{Z}\}$, $(d_1, d_2 > 0)$.

Диагональная унимодулярная решётка $\Lambda(d) = \Lambda\left(d, \frac{1}{d}\right)$, $d > 0$. Она имеет простой базис $\vec{\lambda}_1 = (d, 0)$, $\vec{\lambda}_2 = \left(0, \frac{1}{d}\right)$ и базисную матрицу $M(d)$ вида

$$M(d) = \begin{pmatrix} d & 0 \\ 0 & \frac{1}{d} \end{pmatrix}.$$

Взаимная решётка $\Lambda^*(d) = \Lambda\left(\frac{1}{d}, d\right)$ имеет взаимную базисную матрицу

$$M^*(d) = \begin{pmatrix} \frac{1}{d} & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}.$$

Поэтому, без ограничения общности, будем считать, что всегда в этой работе $d \geqslant 1$, так как взаимная решётка будет симметричной к ней диагональная решётка с параметром $\frac{1}{d} \leqslant 1$.

В работе [3] доказана лемма о расстояниях (определение метрики на пространстве решёток см. [2], стр.165).

Лемма 1. *Пусть $d_1 \geqslant d_2$, тогда $\rho(\Lambda(d_1), \Lambda(d_2)) \leqslant \ln\left(2\frac{d_1}{d_2} - 1\right)$.*

Лемма 2. *Пусть $d_1 \geqslant d_2$, $\Lambda(d_1) = A \cdot \Lambda(d_2)$ и $\|A - E_2\| \leqslant \delta < 1$, тогда $d_1 - d_2 = d_2\delta_1$, где $0 \leqslant \delta_1 \leqslant \frac{\delta}{2}$.*

Гиперболическая дзета-функция диагональной унимодулярной решётки $\Lambda(d) = \Lambda\left(d, \frac{1}{d}\right)$ имеет вид:

$$\zeta_H(\Lambda(d)|\alpha) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2}{\overline{dm}^{\alpha}} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2}{\overline{\frac{1}{d}m}^{\alpha}} + \sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{4}{\overline{dm}^{\alpha} \cdot \overline{\frac{1}{d}n}^{\alpha}} \quad (\alpha = \sigma + it, \quad \sigma > 1).$$

Нетрудно видеть, что $\zeta_H(\Lambda(d)|\alpha) = \zeta_H(\Lambda^*(d)|\alpha) = \zeta_H\left(\Lambda\left(\frac{1}{d}\right) \mid \alpha\right)$.

Пользуясь тем, что $d \geqslant 1$, и вводя обозначение

$$f(d|\alpha) = \sum_{1 \leqslant m < d} \left(1 - \frac{1}{\left(\frac{1}{d}m\right)^{\alpha}}\right) = \sum_{1 \leqslant m < d} \left(1 - \frac{d^{\alpha}}{m^{\alpha}}\right),$$

получим

$$\zeta_H(\Lambda(d)|\alpha) = 2\zeta(\alpha)\left(\frac{1}{d^{\alpha}} + d^{\alpha}\right) + 2f(d|\alpha) + 4\zeta^2(\alpha) + 4\zeta(\alpha)f(d|\alpha). \quad (1)$$

3. Непрерывность гиперболической дзета-функции решёток на пространстве диагональных унимодулярных решёток

Как было отмечено во введении, диагональная унимодулярная решётка является декартовой и поэтому имеет аналитическое продолжение на всю комплексную плоскость за исключением точки $\alpha = 1$, где у неё полюс второго порядка.

Для дальнейшего нам потребуется функциональное уравнение для дзета-функции Римана:

$$\zeta(\alpha) = M(\alpha)\zeta(1-\alpha), \quad M(\alpha) = \frac{2\Gamma(1-\alpha)}{(2\pi)^{1-\alpha}} \sin\frac{\pi\alpha}{2} \text{— множитель Римана}, \quad \alpha = \sigma + it, \quad \sigma < 0.$$

Здесь $\Gamma(x)$ — гамма функция Эйлера.

Лемма 3. *Для гиперболической дзета-функции диагональной унимодулярной решётки справедливо функциональное уравнение*

$$\zeta_H(\Lambda(d)|\alpha) = 2M(\alpha)\zeta(1-\alpha)\left(\frac{1}{d^\alpha}+d^\alpha\right) + 2f(d|\alpha) + 4\left(M(\alpha)\zeta(1-\alpha)\right)^2 + 4M(\alpha)\zeta(1-\alpha)f(d|\alpha)$$

при $\alpha = \sigma + it, \quad \sigma < 0.$

Теорема 1. *Для любой диагональной унимодулярной решётки* $\Lambda(d)$ $(d \geqslant 1)$ *гиперболическая дзета-функция* $\zeta_H(\Lambda(d)|\alpha)$ *является аналитической функцией на всей комплексной плоскости кроме точки* $\alpha = 1$*, в которой у неё полюс второго порядка с вычетом*

$$Res_1\zeta_H(\Lambda(d)|\alpha) = 2\left(\frac{1}{d}+d\right) + 8\gamma + 4\sum_{1\leqslant m<d}\left(1-\frac{d}{m}\right).$$

Теорема 2. *На метрическом пространстве двумерных диагональных унимодулярных решёток гиперболическая дзета-функция* $\zeta_H(\Lambda(d)|\alpha)$ *и её вычет в точке* $\alpha = 1$ *являются непрерывными функциями, как функции от параметра* d.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Л. П. Добровольская, М. Н. Добровольский, Н. М. Добровольский, Н. Н. Добровольский Гиперболические дзета-функции сеток и решёток и вычисление оптимальных коэффициентов // Чебышевский сборник 2012. Т. 13, вып. 4(44). С. 4–107.

2. Касселс Д. Введение в геометрию чисел. М.: Мир, 1965. 422 с.

3. А. П. Крылов, Н. М. Добровольский. Метрическое пространство двумерных диагональных унимодулярных решёток // Записки научных семинаров Тульской школы теории чисел. 2022. Вып. 1, С. 37–41.

4. Dobrovolskaya L. P., Dobrovolsky M. N., Dobrovol'skii N. M., Dobrovolsky N. N. On Hyperbolic Zeta Function of Lattices // Continuous and Distributed Systems. Solid Mechanics and Its Applications. Vol. 211. 2014. P. 23–62. doi: 10.1007/978-3-319-03146-0_2.

УДК 511.3+511.4

О теоретико-числовых методах решения интегральных уравнений Фредгольма II рода[1]

А. С. Подолян (Россия, г. Тула)
Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого
e-mail: alena.balabaeva.93@mail.ru
Е. М. Рарова (Россия, г. Тула)
Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого
e-mail: rarova82@mail.ru

[1]Исследование выполнено в рамках госзадания № 073-03-2022-117/7 по теме «Теоретико-числовые методы в приближенном анализе и их приложения в механике и физике»

On number-theoretic methods for solving Fredholm integral equations of the second kind

A. S. Podolyan (Tula, Russia)
Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University
e-mail: alena.balabaeva.93@mail.ru
E. M. Rarova (Russia, Tula)
Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University
e-mail: rarova82@mail.ru

Одним из важных классов интегральных уравнений с теоретической и практической точек зрения является уравнение Фредгольма второго рода, то есть уравнение вида

$$\varphi\left(\vec{t}\right) = \lambda \iint\limits_{G_s} K_s\left(\vec{t},\vec{u}\right)\varphi\left(\vec{u}\right)d\vec{u} + f\left(\vec{t}\right), \tag{1}$$

где $G_s = [0;1)^s$.

Характерная особенность уравнения (1) — его линейность: неизвестная функция φ входит в него линейно и на неё воздействует линейный интегральный оператор с ядром $K_s\left(\vec{t},\vec{u}\right)$.

Первые работы по применению теоретико-числовых методов для приближенного решения данного уравнения принадлежат Н.М. Коробову (1959 г., 2004 г.). Современные результаты в этой области получены Ребровым Е.Д., Селивановым С.В. (2012 г.). Мы будем исследовать уравнение (1) для случая периодических функций, когда свободный член $f\left(\vec{t}\right)$ и ядро $K_s\left(\vec{t},\vec{u}\right)$ этого уравнения принадлежат, соответственно, классам $E_s^\alpha(C_1)$ и $E_{2s}^\alpha(C_2)$. Ясно, что и решение $\varphi\left(\vec{t}\right)$ будет являться периодической функцией.

Теорема 1. *Пусть $q < 1$ и*

$$|\lambda| \leqslant \frac{q}{\|K_s\left(\vec{t},\vec{u}\right)\|_{E_s^\alpha}(1+2\zeta(2\alpha))^s}. \tag{2}$$

Тогда уравнение Фредгольма (1) имеет единственное решение и для него справедливо представление в виде ряда Неймана

$$\varphi\left(\vec{t}\right) = f\left(\vec{t}\right) +$$
$$+\sum_{\vec{k}=1}^{\infty}\lambda^k \iint\limits_{G_{sk}} K_s(\vec{t},\vec{u}_1)K_s(\vec{u}_1,\vec{u}_2)\dots K_s(\vec{u}_{k-1},\vec{u}_k)f(\vec{u}_k)d\vec{u}_1\dots d\vec{u}_k$$

и справедливо соотношение

$$\varphi\left(\vec{t}\right) = f\left(\vec{t}\right) +$$
$$+\sum_{k=1}^{n}\lambda^k \iint\limits_{G_{sk}} K_s(\vec{t},\vec{u}_1)K_s(\vec{u}_1,\vec{u}_2)\dots K_s(\vec{u}_{k-1},\vec{u}_k)f(\vec{u}_k)d\vec{u}_1\dots d\vec{u}_k+$$
$$+\frac{q^{n+1}\cdot\Theta\cdot\|f(\vec{t})\|_{E_s^\alpha}}{1-q}, \quad \text{где} \quad |\Theta| \leqslant (1+2\zeta(2\alpha))^s.$$

Теперь для вычисления кратных интегралов можно применить квадратурные формулы с алгебраическими сетками. здесь возможны два различных подхода.

Первый подход основан на том, что для каждой размерности sk, где $k = 1, 2, \ldots, n$, выбирается свой неприводимый полином

$$P_{\vec{a}}(x) = \sum_{\nu=0}^{sk-1} a_\nu x^\nu + x^{sk}, \tag{3}$$

у которого все корни действительные. В качестве такого многочлена можно взять многочлен

$$P_k(x) = x(x-2)(x-4)\ldots(x-2sk+2) - 1.$$

Теорема 2. *Пусть $a_1,\ldots,a_n$ — различные целые числа. Тогда многочлен*

$$P_{1,\vec{a}}(x) = (x-a_1)\ldots(x-a_n) - 1$$

неприводим над $\mathbb{Q}$.

Лемма 1. *Пусть $n = 2m$ — четное, $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$ — различные целые числа и выполнены неравенства*

$$\prod_{\nu=1}^{n} \left(a_\nu - \frac{a_{2\mu} + a_{2\mu+1}}{2} \right) > 1 \quad (\mu = 1, \ldots, m-1),$$

тогда все корни многочлена $P_{1,\vec{a}}(x)$ — вещественные.

Лемма 2. *Пусть $n = 2m+1$ — нечетное, $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$ — различные целые числа и выполнены неравенства*

$$\prod_{\nu=1}^{n} \left(a_\nu - \frac{a_{2\mu-1} + a_{2\mu}}{2} \right) > 1 \quad (\mu = 1, \ldots, m),$$

тогда все корни многочлена $P_{1,\vec{a}}(x)$ — вещественные.

Теорема 3. *Пусть натуральное $n > 1$, $\varepsilon = 2\left\{\frac{n}{2}\right\}$, $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$ — различные целые числа, для которых выполнено условие*

$$\prod_{\nu=1}^{n} \left(a_\nu - \frac{a_{2\mu-\varepsilon} + a_{2\mu+1-\varepsilon}}{2} \right) > 1 \quad (\mu = 1, \ldots, m+\varepsilon-1).$$

Тогда многочлен

$$P_{1,\vec{a}}(x) = (x-a_1)\ldots(x-a_n) - 1$$

неприводим над $\mathbb{Q}$ и все его корни вещественные.

Теорема 4. *Если для приближенного вычисления интеграла*

$$\iint\limits_{G_{sk}} K_s(\vec{t},\vec{u}_1)K_s(\vec{u}_1,\vec{u}_2)\ldots K_s(\vec{u}_{k-1},\vec{u}_k)f(\vec{u}_k)d\vec{u}_1\ldots d\vec{u}_k$$

использовать квадратурные формулы, соответствующие решетке $\Lambda(t\cdot T(\vec{a}))$ и многочлену $P_{\vec{a}}(x) = P_k(x)$, то погрешность приближенного решения уравнения Фредгольма второго рода будет

$$\|f(\vec{t})\|_{E_s^\alpha} \cdot O\left(\frac{q^{n+1}}{1-q} + \frac{\ln^{sn-1} t}{t^{s\alpha}}\right).$$

Второй подход для выбора чисто-вещественного алгебраического поля связан с использованием башни полей Дирихле: $\mathbb{Q}\left(\sqrt{2}\right), \mathbb{Q}\left(\sqrt{2}, \sqrt{3}\right), \ldots, \mathbb{Q}\left(\sqrt{2}, \sqrt{3}, \ldots, \sqrt{p_m}\right)$, где p_m — m-ое простое число и $2^{m-1} < sn \leqslant 2^m$.

Пусть натуральное l_k выбрано из условия $2^{l-1} < sk \leqslant 2^l$. Рассмотрим чисто-вещественное кольцо целых алгебраических чисел $\mathbb{Z}_l = \mathbb{Z}\left[\sqrt{2}, \ldots, \sqrt{p_l}\right]$ и соответствующее чисто-вещественное алгебраическое поле степени 2^l $\mathbb{Q}_l = \mathbb{Q}\left(\sqrt{2}, \ldots, \sqrt{p_l}\right)$. Через $\Lambda_l(t)$ обозначим алгебраическую решётку $\Lambda_l(t) = \{\vec{x} = (t\Theta_1, \ldots, t\Theta_{2^l}) | \, \Theta = \Theta_1 \in \mathbb{Z}_l\}$, где $\Theta_1, \ldots, \Theta_{2^l}$ – алгебраически сопряженные числа.

Теорема 5. *Если для приближенного вычисления интеграла*

$$\iint\limits_{G_{sk}} K_s(\vec{t}, \vec{u}_1) K_s(\vec{u}_1, \vec{u}_2) \ldots K_s(\vec{u}_{k-1}, \vec{u}_k) f(\vec{u}_k) d\vec{u}_1 \ldots d\vec{u}_k$$

использовать квадратурные формулы, соответствующие решетке $\Lambda_l(t)$*, то погрешность приближенного решения уравнения Фредгольма второго рода будет*

$$\|f(\vec{t})\|_{E_s^\alpha} \cdot O\left(\frac{q^{n+1}}{1-q} + \frac{\ln^{2^m-1} t}{t^{2^m \alpha}}\right).$$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Н. М. Добровольский, А. С. Подолян. Алгебраические сетки и их приложение к численному решению линейных интегральных уравнений // Чебышевский сборник, 2022, т. 23, вып. 4, с. 162–169.

УДК 517

Об алгоритме построения обобщённой параллелепипедальной сетки[1]

А. В. Родионов (Россия, г. Тула)
Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого
e-mail: rodionovalexandr@mail.ru

On the algorithm for constructing a generalized parallelepipedal grid

A. V. Rodionov (Russia, Tula)
Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University
e-mail: rodionovalexandr@mail.ru

[1]Исследование выполнено в рамках госзадания № 073-03-2022-117/7 по теме «Теоретико-числовые методы в приближенном анализе и их приложения в механике и физике»

1. Введение

При решении задач многомерного численного интегрирования важным аспектом является выбор сеток, которые используются для построения квадратурных формул.

В 1959 году Н. М. Коробов предложил квадратурные формулы, основанные на параллелепипедальных сетках с оптимально подобранными коэффициентами.

Для этих формул на классах E_s^α справедлива оценка погрешности $|R_N[f]| = O\left(\frac{\ln^\gamma N}{N^\alpha}\right)$, где параметр γ определяется только размерностью s и порядком гладкости α.

Дополнительную информацию о классах функций и оценках погрешности интегрирования при использовании различных типов сеток можно найти, например, в работе [1].

Настоящая работа посвящена разработке алгоритмов построения обобщённых параллелепипедальных сеток, которые являются одним из типов сеток, применяемых в задачах многомерного численного интегрирования.

Определение 1. *Пусть в вещественном арифметическом пространстве $\mathbb{R}^s$ задана линейно независимая система векторов $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_s$. Совокупность Λ всех векторов вида*

$$n_1\vec{a}_1 + \ldots + n_s\vec{a}_s,$$

где n_j независимо друг от друга пробегают все целые рациональные числа, называется решеткой в $\mathbb{R}^s$, а сами векторы $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_s$ — базисом этой решетки.

Символом G_s будем обозначать полуоткрытый единичный s-мерный куб $G_s = [0;1)^s$.

Определение 2. *Для произвольной решетки Λ обобщенной параллелепипедальной сеткой $M(\Lambda)$ называется пересечение взаимной решетки к решетке Λ с единичным s-мерным кубом $M(\Lambda) = \Lambda^* \cap G_s$.*

Среди рассматриваемых нами решёток особый интерес представляют целочисленные, так как получаемые в этом случае параллелепипедальные сетки — рациональные, и квадратурные формулы с использованием таких сеток будут с равными весами.

Отметим, что базису $\vec{\lambda}_\nu = (a_{\nu 1}, \ldots, a_{\nu s})$ $(\nu = 1, \ldots, s)$ решетки Λ взаимным базисом $\vec{\lambda}_\nu^*$ $(\nu = 1, \ldots, s)$ взаимной решетки Λ^* будут векторы

$$\vec{\lambda}_\nu^* = \left(\frac{A_{\nu 1}}{\det\Lambda}, \ldots, \frac{A_{\nu s}}{\det\Lambda}\right) \quad (\nu = 1, \ldots, s).$$

Из определения сетки $M(\Lambda)$ следует, что

$$M(\Lambda) = \left\{\vec{x} \,\middle|\, 0 \leqslant x_\nu = \frac{k_1 A_{1\nu} + \ldots + k_s A_{s\nu}}{\det\Lambda} < 1\, (\nu = 1, \ldots, s);\ \vec{k} \in \mathbb{Z}^s\right\}. \tag{1}$$

2. Преобразование базиса решётки

Равенство (1) не даёт простого представления того, каким образом строить обобщённую параллелепипедальную сетку $M(\Lambda)$. Построение такой сетки будет наиболее удобным, если базис соответствующей целочисленной решётки представлен в виде $\vec{b}_\nu = (b_{\nu 1}, \ldots, b_{\nu\nu}, 0, \ldots, 0)$.

Другими словами, базисная матрица решётки имеет треугольный вид:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \ldots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{s1} & a_{s2} & \ldots & a_{ss} \end{pmatrix}.$$

Более того, базисные векторы можно выбрать таким образом, что все их ненулевые компоненты удовлетворяли условию $0 \leqslant a_{\nu\mu} < a_{\mu\mu}$ $(1 \leqslant \mu < \nu \leqslant s)$.

Существование такого базиса следует из теоремы 1 монографии Дж. В. С. Касселса «Введение в геометрию чисел» [2].

Лемма 1. *Пусть $\vec{a}_i = (a_{i1}, \ldots, a_{is})$ и $\vec{a}_j = (a_{j1}, \ldots, a_{js})$ — два произвольных вектора, принадлежащие некоторому базису целочисленной решётки Λ, при чём для некоторого t $(1 \leqslant t \leqslant s)$ числа a_{it} и a_{jt} — натуральные. Пусть, также, дроби $\frac{p_1}{q_1}, \ldots, \frac{p_n}{q_n} = \frac{a_{it}}{a_{jt}}$ — подходящие дроби к числу $\frac{a_{it}}{a_{jt}}$.*

Тогда набор векторов, полученный заменой в данном базисе векторов $\vec{a}_i$ и $\vec{a}_j$ соответственно на векторы

$$\vec{b} = -q_n\vec{a}_i + p_n\vec{a}_j \quad \vec{c} = (-1)^{n+1}\left(q_{n-1}\vec{a}_i - p_{n-1}\vec{a}_j\right),$$

также является базисом этой решётки, при этом:

1) $b_t = 0$;

2) $c_t = (a_{it}, a_{jt})$, где (a_{it}, b_{it}) — наибольший общий делитель чисел a_{it} и a_{jt}.

Доказательство. Первое свойство следует из равенства $\frac{a_t}{a_t} = \frac{p_n}{q_n}$.

Для доказательства второго свойства воспользуемся тем, что дробь $\frac{p_n}{q_n}$ несократима. Тогда $a_t = (a_t, b_t)\cdot p_n$, $b_t = (a_t, b_t)\cdot q_n$. Получим $c_t = (-1)^{n+1}\big((a_t, b_t)\cdot q_{n-1}p_n - (a_t, b_t)\cdot p_{n-1}q_n\big) = (a_t, b_t)$.

Покажем теперь, что новый набор векторов также является базисом данной решётки. Если A — исходный базис решётки, то указанное преобразование задаётся матрицей

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & \ddots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & \ldots & -q_n & \ldots & p_n & \ldots & 0 \\ 0 & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & 0 \\ 0 & \ldots & (-1)^{n+1}q_{n-1} & \ldots & (-1)^n p_{n-1} & \ldots & 0 \\ 0 & \ldots & \ldots & \ldots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

В матрице B элементы $b_{ii} = -q_n$, $b_{ij} = p_n$, $b_{ji} = (-1)^{n+1}q_{n-1}$, $b_{jj} = (-1)^n p_{n-1}$; прочие элементы главной диагонали — единицы; остальные элементы матрицы — нули.

Модуль определителя $|\det B| = \left|(-1)^{n+1}(q_n p_{n-1} - p_n q_{n-1})\right| = 1$, из чего следует, что данное преобразование является унимодулярным, а значит матрица $B \cdot A$ является базисной для данной решётки. $\square$

Теперь опишем *алгоритм приведения базиса решётки Λ к нижнему треугольному виду.*

Шаг 1. Запишем базисную матрицу решётки Λ

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1s} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{s1} & \ldots & a_{ss} \end{pmatrix}.$$

Зафиксируем $i = s$.

Шаг 2. Каждую строку матрицы с первой по i-тую, для которой $a_{ji} < 0$ $(1 \leqslant j \leqslant i)$ заменим на противоположную. Если $a_{ii} = 0$, то поменяем местами i-тую строку с произвольной j-той строкой $(1 \leqslant j \leqslant i)$, в которой $a_{ji} \neq 0$.

Заметим, что матрица, полученная в результате указанных преобразований будет являться базисной матрицей решётки Λ. Существование такой строки, в которой $a_{ji} \neq 0$ следует из линейной независимости базисных векторов.

В результате выполнения первого шага получим базисную матрицу решётки Λ, в которой все элементы $a_{1i}, a_{2i}, \ldots, a_{ii}$ неотрицательны, при этом $a_{ii} \neq 0$.

Шаг 3. Для строки с номером $j = 1$ выполним следующую операцию. Если $a_{ji} \neq 0$, заменим первую строку матрицы на строку $-q_n\vec{a}_i + p_n\vec{a}_j$, а i-тую строку на $(-1)^{n+1}\,(q_{n-1}\vec{a}_i - p_{n-1}\vec{a}_j)$. Здесь $\vec{a}_i$ и $\vec{a}_j$ — i-тая и j-тая строки матрицы соответственно, p_{n-1}, p_n — числители, q_{n-1}, q_n — знаменатели подходящих дробей к дроби $\frac{a_{ii}}{a_{ij}}$ $(\frac{p_n}{q_n} = \frac{a_{ii}}{a_{ij}})$.

Повторим *шаг 3* для значений j: $2 \leqslant j \leqslant i-1$.

Согласно лемме 1 в результате выполнения этого шага мы получим матрицу, в которой $a_{1i} = a_{2i} = \ldots = a_{i-1\,i} = 0$, $a_{ii} > 0$.

Повторим *шаги 2–3* для $i = s-1, \ldots, \ldots, 1$. В результате получим базисную матрицу решётки Λ, приведённую к верхнему треугольному виду.

Заметим, что в полученной матрице все элементы на главной диагонали положительны, а прочие ненулевые элементы могут принимать произвольные значения.

3. Построение обобщённой параллелепипедальной сетки

Пусть базис целочисленной решётки Λ имеет нижний треугольный вид, причём все её элементы неотрицательны (элементы на главной диагонали строго положительны в силу полноты решётки):

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \ldots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{s1} & a_{s2} & \ldots & a_{ss} \end{pmatrix}, \quad a_{ij} \geqslant 0 \ (i, j = 1, \ldots, s). \tag{2}$$

Её детерминант равен $\det\Lambda = a_{11} \cdot \ldots \cdot a_{ss}$.

В этом случае базисная матрица взаимной решётки Λ^* будет верхней треугольной:

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \ldots & b_{1s} \\ 0 & b_{22} & \ldots & b_{2s} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & b_{ss} \end{pmatrix}, \tag{3}$$

где

- при $i > j \quad b_{ij} = 0$;
- при $i = j \quad b_{ii} = \frac{1}{a_{ii}}$;
- при $i < j \quad b_{ij} = -\frac{1}{a_{jj}} \sum\limits_{k=1}^{i-1} b_{ki}a_{jk}$.

Её детерминант равен $\det\Lambda^* = \frac{1}{\det\Lambda}$.

Теорема 1. *Пусть базисная матрица целочисленной решётки Λ задана равенством (2), а базисная матрица взаимной решётки Λ^* — равенством (3). Тогда обобщённая параллелепипедальная сетка $M(\Lambda)$ имеет вид*

$$M(\Lambda) = \left\{ \left\{ k_1\vec{b}_1 + \ldots + k_s\vec{b}_s \right\} \middle| \, k_i = 0, \ldots, a_{ii} - 1, i = 1, \ldots, s \right\}, \tag{4}$$

где $\{\vec{x}\} = (\{x_1\}, \ldots, \{x_s\})$ — дробная часть вектора $\vec{x}$.

С вопросом построения параллелепипедальной сетки тесно связаны вопросы нахождения гиперболических параметров целочисленной решётки и построение абсолютно наименьшей полной гиперболической системы вычетов данной решётки. Эти задачи представляют интерес для дальнейшего исследования.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. И. Ю. Реброва, В. Н. Чубариков, Н. Н. Добровольский, М. Н. Добровольский, Н. М. Добровольский. О классических теоретико-числовых сетках // Чебышевский сборник. 2018. Т. 19, вып. 4, С. 118–176.
2. J. W. S. Cassels. An Introduction to the Geometry of Numbers. 345 pp.

УДК 511.3

Ряды Дирихле второго рода для неприводимых решёток, повторяющихся умножением[1]

Р. В. Тарабрин (Россия, г. Оренбург)
Оренбургский государственный университет
e-mail: reanimators@rambler.ru
Н. Н. Добровольский (Россия, г. Тула)
Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого
e-mail: cheb@tspu.tula.ru, nikolai.dobrovolsky@gmail.com
Н. М. Добровольский (Россия, г. Тула)
Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого
e-mail: dobrovol@tsput.ru

Dirichlet series of the second kind for irreducible lattices repeated by multiplication[1]

R. V. Tarabrin — postgraduate student, (Russia, Orenburg).
Orenburg State University
e-mail: reanimators@rambler.ru
N. N. Dobrovol'skii (Russia, Tula)
Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University
e-mail: cheb@tspu.tula.ru, nikolai.dobrovolsky@gmail.com
N. M. Dobrovol'skii (Russia, Tula)
Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University
e-mail: dobrovol@tsput.ru

Хорошо известно, что максимальная неприводимая решётка, повторяющаяся умножением, в пространстве $\mathbb{R}^s$ задается чисто вещественным алгебраическим полем F_s степени s над полем рациональных чисел $\mathbb{Q}$ (см. [3]).

Если F_s — чисто вещественное алгебраическое расширение степени s поля рациональных чисел $\mathbb{Q}$ и $\mathbb{Z}_{F_s}$ — кольцо целых алгебраических чисел поля F_s, то s-мерной решёткой является множество $\Lambda(F_s)$, следующим способом образованное с помощью $\mathbb{Z}_{F_s}$:

$$\Lambda(F_s) = \{(\Theta^{(1)}, \ldots, \Theta^{(s)}) \mid \Theta^{(1)} \in \mathbb{Z}_{F_s}\}, \tag{1}$$

[1]Работа выполнена по гранту РНФ № 23-21-00317 «Геометрия чисел и диофантовы приближения в теоретико-числовом методе в приближенном анализе.

[1]The work has been prepared by the RSF grant № 23-21-00317 "Geometry of numbers and Diophantine approximations in the number-theoretic method in approximate analysis"

где $\Theta^{(1)}, \ldots, \Theta^{(s)}$ — система алгебраически сопряженных чисел, и если d – дискриминант поля F_s (см. [2]), то $\det\Lambda(F_s) = \sqrt{d}$.

Для любой неприводимой решётки Λ, повторяющейся умножением, можно рассмотреть ряды Дирихле второго рода, в которых в знаменателе стоит норма алгебраического числа, она же норма соответствующей точки решётки, а числители удовлетворяют дополнительному условию, что сумма всех числителей для точек с одинаковой нормой абсолютно сходится.

$$f(\alpha|\Lambda, a(\cdot)) = \sum_{\vec{x}\in\Lambda\setminus\{\vec{0}\}} \frac{a(\vec{x})}{|x_1\cdot\ldots\cdot x_s|^\alpha} = \sum_{k=1}^{\infty} A(\lambda_k)\lambda_k^{-\alpha} \quad \alpha = \sigma + it, \quad \sigma > \sigma_f \geqslant \sigma_f^*,$$

где σ_f — абсцисса абсолютной сходимости и σ_f^* — абсцисса сходимости, а λ_k — точки норменного спектра $N_{sp}(\Lambda)$, который определяется равенством

$$N_{sp}(\Lambda) = \{\lambda \mid \lambda = N(\vec{x}),\ \vec{x}\in\Lambda\setminus\{\vec{0}\}\}, \quad N(\vec{x}) = |x_1\cdot\ldots\cdot x_s|,$$

и

$$A(\lambda_k) = \sum_{|x_1\cdot\ldots\cdot x_s|=\lambda_k} a(\vec{x}), \qquad \sum_{|x_1\cdot\ldots\cdot x_s|=\lambda_k} |a(\vec{x})| < \infty.$$

Так как выполняется очевидное включение $N_{sp}(\Lambda)\subset\mathbb{N}$ и норменный спектр $N_{sp}(\Lambda)$ является моноидом натуральных чисел, то получаем связь с теорией рядов Дирихле для моноидов натуральных чисел (см. [6]).

В частности, если нам даны два ряда Дирихле второго рода для произвольной неприводимой решётки Λ, повторяющейся умножением: $f(\alpha|\Lambda, a(\cdot))$ и $f(\alpha|\Lambda, b(\cdot))$, то можно рассмотреть их произведение в силу абсолютной сходимости рядов $A(\lambda_n)$ и $B(\lambda_m)$:

$$f(\alpha|\Lambda, a(\cdot))\cdot f(\alpha|\Lambda, b(\cdot)) = f(\alpha|\Lambda, c(\cdot)) = \sum_{k=1}^{\infty} C(\lambda_k)\lambda_k^{-\alpha},$$

где

$$c(\vec{x}) = \sum_{\vec{y}\cdot\vec{z}=\vec{x}} a(\vec{y})b(\vec{z}), \quad C(\lambda_k) = \sum_{|x_1\cdot\ldots\cdot x_s|=\lambda_k} c(\vec{x}) = \sum_{\lambda_n\lambda_m=\lambda_k} A(\lambda_n)B(\lambda_m).$$

Таким образом, если мы через $\mathbb{D}(\Lambda)$ обозначим множество рядов Дирихле второго рода для произвольной неприводимой решётки Λ, повторяющейся умножением, то это будет коммутативная алгебра с единицей, так как $1\in\mathbb{D}(\Lambda)$.

Обозначим через $\mathbb{U}_{F_s}$ группу алгебраических единиц кольца целых алгебраических чисел $\mathbb{Z}_{F_s}$ чисто вещественного алгебраического поля F_s. Согласно теореме Дирихле эта бесконечная группа имеет $s-1$ образующую — фундаментальные единицы. Пусть $\mathbb{Z}^*_{F_s}$ — мультипликативный моноид ненулевых целых алгебраических чисел кольца целых алгебраических чисел $\mathbb{Z}_{F_s}$. Пусть Ω_s — система целых алгебраических чисел ω по одному из каждого класса фактор моноида $\mathbb{Z}^*_{F_s}\setminus\mathbb{U}_{F_s}$, тогда $\mathbb{Z}^*_{F_s} = \bigcup_{\omega\in\Omega_s}\omega\cdot\mathbb{U}_{F_s}$. Будем считать, что всегда $1\in\Omega_s$. Ясно, что справедливо равенство $\omega_1\cdot\omega_2 = \omega_3\cdot\varepsilon$, где $\omega_1,\omega_2,\omega_3\in\Omega_s$, $\varepsilon\in\mathbb{U}_{F_s}$ и ω_3,ε однозначно определяются по ω_1,ω_2.

На основании вышесказанного можно на Ω_s определить алгебраическую операцию

$$\omega_1 * \omega_2 = \omega_3,$$

где ω_3,ε однозначно определяются по ω_1,ω_2 с помощью равенства $\omega_1\cdot\omega_2 = \omega_3\cdot\varepsilon$. Таким образом, множество Ω_s превращается в мультипликативный моноид относительно операции $*$.

Будем говорить, что на Ω_s определена мультипликативная функция $b(\cdot)$, если справедливо равенство

$$b(\omega_1 * \omega_2) = b(\omega_1)\cdot b(\omega_2).$$

Будем через $\vec{x}(\omega) = (\omega^{(1)}, \ldots, \omega^{(s)})$ обозначать точку алгебраической решётки $\Lambda(F_s)$, соответствующую целому алгебраическому числу $\omega \in \mathbb{Z}_{F_s}$. Если $\vec{x} \cdot \vec{y} = (x_1y_1, \ldots, x_sy_s)$ — произведение двух точек, то справедливо равенство для точек алгебраической решётки$\Lambda(F_s)$:

$$\vec{x}(\omega_1) \cdot \vec{x}(\omega_2) = \vec{x}(\omega_3) \cdot \vec{x}(\varepsilon),$$

при этом сомножители в правой части равенства однозначно определяются сомножителями в левой части.

С другой стороны, для любой точки $\vec{x}(\omega) \in \Lambda(F_s)$ однозначно определены $\omega^* \in \Omega_s$ и $\varepsilon^* \in \mathbb{U}_{F_s}$ такие, что

$$\vec{x}(\omega) = \vec{x}(\omega^*) \cdot \vec{x}(\varepsilon^*).$$

Для дальнейшего нам потребуется функция числа делителей алгебраического числа $\omega_3 \in \Omega_s$, которая обозначается через $d(\omega_3)$ и определяется равенством

$$d(\omega_3) = \sum_{\substack{\omega_1, \omega_2 \in \Omega_s, \varepsilon \in \mathbb{U}_{F_s} \\ \omega_3 = \omega_1 \cdot \omega_2 \cdot \varepsilon}} 1.$$

В силу предыдущего можно определить функцию числа делителей произвольной точки $\vec{x}(\omega_3)$ алгебраической решётки $\Lambda(F_s)$:

$$d(\vec{x}(\omega_3)) = \sum_{\substack{\omega_1, \omega_2 \in \Omega_s, \varepsilon \in \mathbb{U}_{F_s} \\ \vec{x}(\omega_3) = \vec{x}(\omega_1) \cdot \vec{x}(\omega_2) \cdot \vec{x}(\varepsilon)}} 1 = d(\omega_3).$$

Обозначим через $\zeta_{D_0}(\alpha|F_s)$ дзета-функцию Дедекинда главных идеалов (ω) чисто-вещественного поля F_s (см. [5]):

$$\zeta_{D_0}(\alpha|F_s) = \sum_{(\omega)} |N(\omega)|^{-\alpha},$$

которую можно записать как

$$\zeta_{D_0}(\alpha|F_s) = \sum_{\omega \in \Omega_s} |N(\omega)|^{-\alpha} \quad (\alpha = \sigma + it, \quad \sigma > 1).$$

Пусть на группе $\mathbb{U}_{F_s}$ алгебраических единиц кольца целых алгебраических чисел $\mathbb{Z}_{F_s}$ чисто вещественного алгебраического поля F_s определена произвольная функция $a(\varepsilon)$ $(\varepsilon \in \mathbb{U}_{F_s})$, которая удовлетворяет условию сходимости

$$\sum_{\varepsilon \in \mathbb{U}_{F_s}} |a(\varepsilon)| < \infty.$$

Таким образом, для величины

$$A(\mathbb{U}_{F_s}, a(\cdot)) = \sum_{\varepsilon \in \mathbb{U}_{F_s}} a(\varepsilon)$$

справедливо неравенство $|A(\mathbb{U}_{F_s}, a(\cdot))| < \infty$. Будем кроме того требовать выполнение условия невырожденности: $A(\mathbb{U}_{F_s}, a(\cdot)) \neq 0$.

Теперь мы можем записать общий вид ряда Дирихле второго рода с мультипликативной функцией числителя для неприводимых решёток, повторяющихся умножением. Рассмотрим алгебраическую решетку $\Lambda(T) = T \cdot \Lambda(F_s)$ с растущим детерминантом $\det(T \cdot \Lambda(F_s)) = T^s\sqrt{d}$ $(t \to \infty)$:

$$f(\alpha|\Lambda(T), b(\cdot), a(\cdot)) = \sum_{\vec{x}(\omega) \in \Lambda(F_s)} \frac{b(\omega^*)a(\varepsilon^*)}{(T^s \cdot N(\vec{x}))^\alpha} = \sum_{\omega \in \Omega_s} \sum_{\varepsilon \in \mathbb{U}_{F_s}} \frac{b(\omega)a(\varepsilon)}{|T^s \cdot N(\omega)|^\alpha} =$$

$$= \frac{A(\mathbb{U}_{F_s}, a(\cdot))}{T^{s\alpha}} \sum_{\omega \in \Omega_s} \frac{b(\omega)}{|N(\omega)|^\alpha}.$$

Теорема 1. *Для любого $\sigma > 1$ справедливо равенство*

$$f(\alpha|\Lambda(T), 1, a(\cdot)) = \frac{A(\mathbb{U}_{F_s}, a(\cdot))}{T^{s\alpha}} \cdot \zeta_{D_0}(\alpha|F_s).$$

Будем говорить, что функция $a(\varepsilon)$ ($\varepsilon \in \mathbb{U}_{F_s}$) нормированная, если $A(\mathbb{U}_{F_s}, a(\cdot)) = 1$. Очевидно, что функция $a^*(\varepsilon) = \frac{a(\varepsilon)}{A(\mathbb{U}_{F_s}, a(\cdot))}$ будет нормированной. Нетрудно видеть, что справедливо равенство

$$f(\alpha|\Lambda(T), b(\cdot), a(\cdot)) = f\left(\alpha\,|\Lambda(T), b(\cdot)A(\mathbb{U}_{F_s}, a(\cdot))\,, \frac{a(\varepsilon)}{A(\mathbb{U}_{F_s}, a(\cdot))}\right).$$

Таким образом, если $a^*(\varepsilon)$ — нормированный сомножитель числителя ряда Дирихле второго рода для неприводимой решётки, повторяющийся умножением, то справедливо равенство

$$f(\alpha|\Lambda(T), b(\cdot), a^*(\cdot)) = \frac{1}{T^{s\alpha}} \sum_{\omega \in \Omega_s} \frac{b(\omega)}{|N(\omega)|^{\alpha}}.$$

Мы получили парадоксальный результат, что значение ряда Дирихле второго рода с мультипликативным числителем для неприводимой решётки, повторяющийся умножением, не зависит от нормированного сомножителя числителя ряда Дирихле.

Второй парадоксальный результат состоит в том, что справедливо равенство

$$f(\alpha|\Lambda(T), b(\cdot), a^*(\cdot)) = \frac{1}{T^{s\alpha}} f(\alpha|\Lambda(F_s), b(\cdot), a^*(\cdot)).$$

Из этого равенства следует, что вопрос об асимптотики рядов Дирихле второго рода с мультипликативным числителем и нормированным сомножителем для неприводимой решётки, повторяющийся умножением, становится тривиальным.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бернштайн Д., Гелбарт С. Введение в программу Ленгпендса, 2008

2. Гекке Э. Лекции по теории алгебраических чисел. М.; Л.: Гостехиздат, 1940.

3. Б. Н. Делоне, Д. К. Фаддеев. Теория иррациональностей третьей степени // Тр. Матем. ин-та им. В. А. Стеклова, 11, Изд-во АН СССР, М.–Л., 1940, С. 3–340.

4. Л. П. Добровольская, М. Н. Добровольский, Н. М. Добровольский, Н. Н. Добровольский Гиперболические дзета-функции сеток и решёток и вычисление оптимальных коэффициентов // Чебышевский сборник 2012. Т. 13, вып. 4(44). С. 4–107.

5. Н. Н. Добровольский. О двух асимптотических формулах в теории гиперболической дзета-функции решёток // Чебышевский сборник. 2018. Т. 19, вып. 3, С. 109–134.

6. Н. Н. Добровольский, М. Н. Добровольский, Н. М. Добровольский, И. Н. Балаба, И. Ю. Реброва. Алгебра рядов Дирихле моноида натуральных чисел // Чебышевский сборник. 2019. Т. 20, вып. 1, С. 180–196.

Секция 9. История и методология математики

УДК 51(09)

Основание Петербургской академии наук в исторической ретроспективе

В. Г. Алябьева (Россия, г. Пермь)
Пермский государственный национальный исследовательский университет
e-mail: vgalyabeva@gmail.com

The foundation of the St. Petersburg Academy of Sciences in historical retrospect

V. G. Alyabieva (Russia, Perm)
Perm State University
e-mail: vgalyabeva@gmail.com

Из Петербурга «есть пошла» российская наука [1], российская математика, российское высшее и, прежде всего, высшее математическое и техническое, образование. Более двухсот лет Санкт-Петербург-Петроград-Ленинград был единственным академическим городом России. Только в нём существовали академические учреждения и сама Академия наук, которая определяла математическую жизнь в стране. В город приезжали иностранные учёные для проживания после заключения контракта о научной деятельности и последующего избрания в члены Академии. В столицу обязаны были переезжать и отечественные учёные после их избрания.

Петру Первому принадлежит идея создания академии наук в России и реализация этой идеи.

Академию наук Пётр Первый создавал в стране, где не существовало науки, не было высшего образования, не было людей, подготовленных к получению высшего образования. Возводилась северная столица России, одерживались победы в военных компаниях на юге и севере страны, «прорубалось окно в Европу», строился Балтийский флот, развивалась промышленность. Требовались кадры для воплощения грандиозных планов Петра по глубокому обновлению России. Пётр считал академию наук одним из важнейших инструментов для реализации этих планов.

Взгляды Петра на развитие просвещения и науки в России складывались под влиянием крупнейшего мыслителя своего времени, организатора науки, знаменитого философа и математика Г.В. Лейбница [4, с. 250].

Свой замысел создания Российской академии Пётр тщательно продумывал. Замысел вызревал не менее 10 лет. С 1714 года Петру стали поступать проекты. Первоначально речь шла о создании университета. Однако к этому времени университеты в Европе утратили своё господствующее положение в научной жизни. Всё большую роль стали играть научные организации нового типа: научные общества и академии. Пётр принял решение о создании Академии.

Не найдя в России тех, «кто учён», Пётр решил «приискать» таковых за рубежами отечества. Он решил пригласить в Академию не просто способных людей, а цвет европейской науки, крупнейших учёных того времени. Начались долгие и непростые переговоры. Не каждый соглашался сменить привычный уклад жизни на неведомую жизнь в далёкой северной стране, в «варварской» России. В результате российскими академиками стали: Николай и Даниил Бернулли, Христиан Гольдбах; астроном и географ Жан Делиль; физик Георг Крафт; историк Г. Ф. Миллер, позднее — Леонард Эйлер.

Пётр Первый пересмотрел организационную основу иностранных академий. Если за рубежом академии представляли собой только научно-исследовательские учреждения, то в российских условиях царь пожелал, чтобы Академия была также образовательным центром. По мысли Петра, академики должны были не только заниматься исследовательской работой, выполнять все виды научно-технического обслуживания государства, но и обучать юношество, преподавать в университете и в гимназии, созданных при академии, то есть умножать сословие знающих и искусных людей. По инициативе императора был составлен «Проект положения об учреждении Академии» [1].

Пётр Первый продумал процедуру утверждения Академии. Он пожелал, чтобы это было сделано публично, чтобы всем было ясно: речь идёт о деле чрезвычайной важности. Пётр принимает решение: «Положение об учреждении Академии» будет утверждать Сенат. На 22 января 1724 назначено заседание Сената, на которое прибыл сам император, слетелись все «птенцы гнезда Петрова»: адмирал *Апраксин*, канцлер *Головкин*, князь *Меншиков*, генерал-прокурор *Ягужинский*. Повестка дня, говоря современным языком, была такой:

1. обсуждение «Проекта Академии»,

2. о материальном обеспечении нового учреждения.

В ходе дискуссии Пётр утвердил «Положение» об учреждении Академии, принял решение о статусе Академии. Царь повелел, а господа сенаторы согласились: Академия должна быть *государственной структурой*. Первое лицо в Академии — президент — назначается монархом. *Все члены Академии считаются принятыми на царскую службу*, обеспечиваются *«довольным жалованием»*. Твёрдое бюджетное финансирование выгодно отличало детище Петра от европейских академий, где они действовали в качестве общественных объединений [1].

В проекте чётко разработаны обязанности академиков. Обязанности сводились к следующему:

1. Изучать, «розыскивать» всё, что уже сделано в данной науке. составлять «экстракты» из лучших сочинений «добрых авторов» в своей области и готовить их для издания.

2. Дальше развивать свою науку, исследуя в ней всё, что необходимо к её «изправлению или прирощению», свои открытия вручать секретарю.

3. Участвовать в еженедельных заседаниях, в которых «каждый мнение своё предлагает, советом и мнением других пользоватца и партикулярно учинённые эксперименты в присудствии всех членов поверять может». Подчёркивается, что полезно участие в опытах учёных разных специальностей, ибо «в таких экспериментах многократно один другого, яко например анатомикус механика и пр., к совершенной демонстрации требует». Особым образом подчёркивается значение собрания, так как оно осуществляет коллективный характер исследований, ибо Академия есть «социетет (собрание) персон. которые для произведения наук друг друга вспомогать имеют».

4. «Розыскивать» иначе говоря, подвергнуть экспертизе открытия и изобретения посторонних лиц», определяя «верны ли оные» и насколько они новы и полезны. В другом месте, где речь идёт о пользе Академии, записано:«Притом же бы вольные художества и мануфактуры, которые уже здесь заведены, суть и впредь заведены быть могут, от упомянутого заведения пользу имели, когда им удобные машины показаны и инструменты их исправлены будут». Таким образом. от академиков ожидали не только экспертизы

изобретений, но и содействия в улучшении технического оснащения производств и ремёсел.

5. Выполнять специальные исследования по поручениям: «ежели его императорское величество потребует, чтоб академикус из своей науки некоторое дело сискивал». Этот пункт специфичен для петровского проекта и подчёркивает обязанность академика как лица, состоящего на государственной службе.

6. Написать «систем или курс в науке своей в пользу учащихся младых людей» — учебник, который будет печататься на латинском языке и в русском переводе. Для этой цели в каждом классе должен быть *переводчик*.

7. «Младых людей» публично обучать — это значит: читать публичные лекции в университете.

8. Обучать своих помощников. Для этого нужно, «дабы каждому академику один или два человека из младых студентов даны были и довольным жалованием снабдены». Эти молодые люди, которые «со всем прилежанием обучаться и академикам вспомогать имеют» должны в то же время *преподавать в гимназии*. В награду они, кроме жалования, «надежду имеют произойти (получить повышение) и учителям своим наследовать».

Таким образом, система обучения представлена в Проекте в виде трехступенчатой организации: академики, студенты, гимназисты. В учебные обязанности академиков входило чтение лекций всем желающим и особо обучение своих помощников, которые входят в штат Академии и выступают в роли учителей в гимназии. Таким образом, в России впервые возникла широко трактуемая профессия ученого, которому средства к существованию и содержанию семьи обеспечивала исследовательская работа. В европейских странах ученых такого типа было мало и были они, пожалуй, только среди астрономов [2, с. 61].

В отношении *пособий* для научной работы предусмотрено, что в распоряжении Академии должна быть *библиотека* и *«натуральных вещей камора»*, а в обязанности библиотекаря входит не только выписка нужных книг, но и инструментов к опытам, за которые, как и за книги, должно «ис казны платится». Записана также в Проекте необходимость издания научных трудов ежегодно или через каждые два года и содержания для этой цели при Академии *живописца* и *гравёра*. Что же касается общего руководства, то это «здание» должно «само себя править», избирая президента постоянного или на год, или на полгода, и еще «имеет оное токмо под ведением императора, яко протектора своего, быть». Итак, Академия не подчиняется никакому государственному учреждению, а только непосредственно императору. В качестве его помощников по управлению хозяйством и финансами Проект называет кураторов, которые бы заботились о «благосостоятельстве» академиков и докладывали императору «нужду их при всех оказиях». Такие кураторы были в некоторых европейских университетах, в Берлинском научном обществе кураторы были из числа знатных особ, приближенных к королю [2, с. 61].

В Проекте указана сумма, назначенная на Академию, — в рукописи она изменена дважды: сначала 20 тыс., потом исправлено на 24 тыс. и наконец рукой Петра написано: «24 912 рублев» [4, с. 191]. Как предполагалось распределить эту сумму, видно из записки, датированной 10 февраля: жалованье 11 профессорам — по 1000 руб., секретарю и библиотекарю по 800, 12 студентам по 250, четырем переводчикам по 200, живописцу и граверу по 400, переплетчику 120, резерв 2000 руб. Все это вместе составляет 19 320 руб. Следовательно, из общей суммы за вычетом жалованья должно было оставаться больше 5.5 тыс. на оборудование, книги, дрова, свечи и т. п. По масштабам деятельности, которые намечены в Проекте, эта сумма должна была представляться достаточной, во всяком случае она намного превышала соответствующие статьи в расходах Парижской академии и Берлинского научного общества [2, с. 62].

Следующая памятная дата в истории российской науки — 28 января (8 февраля по новому стилю) 1724 года. В этот день Правительствующий Сенат *издал указ* об учреждении Академии, полностью изложив в тексте документа «Положение» (указ 4443 «Об учреждении Академии и о назначении для содержания оной доходов таможенных и лицентных, собираемых с городов Нарвы, Дерпта, Пернова и Аренсбуга. - С приложением проекта об учреждении Академии». В Положении утверждается "... сие здание удобнейше Академиею назвать...") [3].

Итак, «Положение» одобрено императором, объявлено указом Сената. 28 января 1724 года по праву считается датой основания Российской академии наук, преемницы Академии, основанной Петром Первым. В современной России *8 февраля* отмечается (с 1999 г.) как *День российской науки*.

Выпуск сенатского указа — значительная веха в отечественной истории. Петру оставалось дождаться ещё одного торжества — первого научного собрания Академии. Увы. Пётр скончался 28 января 1725 года. Академия приступила к работе уже после его смерти. Петербуржцам Академия была представлена на торжественном публичном собрании 27 декабря 1725 года. На нём присутствовал весь цвет Петербурга: придворные, члены Сената и Синода, командование армии и флота, представители самых знатных фамилий России.

Для работы учёных в Академии были созданы идеальные условия: достойное жалование и жильё, свободный выбор тематики научных исследований, хорошая оснащённость приборами и инструментами для исследований. Христиан Вольф, последователь Лейбница и заинтересованный помощник в деле подбора кадров для Академии, характеризовал Петербург как «рай для учёных». В Петербургской Академии расцвёл гений Эйлера. Здесь он сделал головокружительную карьеру.

В начале двадцатого века Санкт-Петербург оставался столицей империи, в нём находилась Академия наук. Математическая школа Петербурга была лидирующей в стране, университет готовил профессоров для всей России. В городе сложилась сильное математическое сообщество: академики Н. Я. Сонин, А. А. Марков, А. М. Ляпунов, А. Н. Крылов, профессора Ю. В. Сохоцкий, В. А. Стеклов, Б. М. Коялович, Н. М. Гюнтер, И. И. Иванов, Д. Ф. Селиванов, А. В. Васильев. определяли как научный, так и педагогический уровни математического образования. С 1890 г. действовало первое математическое общество.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Алябьева В. Г. Математика Петербурга в исторической ретроспективе и в лицах // Чебышевский сборник. 2018. Т. 19. Вып. 2. С. 7–14.

2. Копелевич Ю. Х. Основание Петербургской академии наук. Ленинград: Наука, 1977.

3. Полный свод законов Российской империи. Т. VII. №4427. С. 207, 220–224.

4. Копелевич Ю. Х. Возникновение научных академий. Ленинград: Наука, 1974.

5. Петербургская Академия наук в истории академий мира // Материалы международной конференции. Санкт-Петербург. Т. 4, 1999.

УДК 51(091)

От науки — к конструкции: к 110-летию со дня рождения академика В. Н. Челомея (1914–1984)

А. Н. Богданов (Россия, г. Москва)
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова; Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана
e-mail: bogdanov@imec.msu.ru
И. М. Кондратьев (Россия, г. Москва)
Институт машиноведения им. А. А. Благонравова РАН
e-mail: kiimash@yandex.ru
П. М. Шкапов (Россия, г. Москва)
Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана
e-mail: spm@bmstu.ru

From science to design: on the 110th anniversary of the birth of Academician V. N. Chelomey (1914–1984)

A. N. Bogdanov (Russia, Moscow)
Lomonosov Moscow State University; Bauman Moscow State Technical University
e-mail: bogdanov@imec.msu.ru
I. M. Kondrat'ev (Russia, Moscow)
Mechanical Engineering Research Institute of the RAS
e-mail: kiimash@yandex.ru
P. M. Shkapov (Russia, Moscow)
Bauman Moscow State Technical University
e-mail: spm@bmstu.ru

30 июня нынешнего года исполнилось 110 лет со дня рождения академика Владимира Николаевича Челомея. Он известен прежде всего как инженер-конструктор ракетно-космических систем, а о его научной и педагогической деятельности обычно упоминают гораздо реже. Между тем ещё в год 95-летия В.Н. Челомея отмечалось его особое место “в плеяде пяти корифеев ракетно-космической техники — С.Королёв, В.Челомей, Л.Люльев, Н.Янгель, В.Глушко”. «Если все они были инженерами от Бога с колоссальной научной интуицией и способностью научно-технического предвидения, то Челомей прежде всего был выдающимся учёным-аналитиком, талантливым педагогом, а затем уж конструктором. Как вспоминает С.Хрущёв, “в своих разработках Челомей шёл не от конструкции к науке, а от науки к конструкции” [1].

С.Н. Хрущёв, десять лет проработавший под руководством Челомея, характеризовал его как «генератора идей». «Он их извлекал из себя, как фокусник платки из бездонной шляпы. И тут же делился ими со всеми желающими, что жалеть — у него в запасе новинок без счёта, одна оригинальней другой» [2].

Свою первую научную работу В.Н. Челомей написал в 1933 году, будучи 19-летним студентом Киевского авиационного института (КАИ): выполняя домашнее задание, он применил в расчетах аппарат векторного исчисления. Позднее, в 1936 году, вышла его книга «Векторное исчисление» – краткий курс векторного анализа с примерами его практического применения в механике. Написавший предисловие к этой публикации И.Я. Штаерман так отзывался о молодом авторе: «Его блестящий талант счастливо сочетает глубокое теоретическое проникновение с прекрасной изобретательностью инженера. Он не отвлекается в сторону беспочвенных абстракций, а решает действительно нужные и важные проблемы...».

Обучаясь в КАИ инженерным дисциплинам, Челомей одновременно посещал лекции по математическому анализу, теории дифференциальных уравнений, математической физике, теории упругости и механике в Киевском университете и таким образом получил фундаментальное математическое образование.

Одним из первых примеров успешного практического применения теоретических знаний стало определение причин поломки кривошипно-шатунного механизма авиационного поршневого двигателя во время летней практики 1935 г. на Запорожском авиационном моторостроительном заводе. Рекомендация студента Челомея по устранению выявленной им причины – возникновению резонанса, показалась руководству предприятия парадоксальной, но он доказал правильность своих подкреплённых расчётами выводов о необходимости облегчения, а не утолщения вала, что исключало резонансный эффект.

Ещё в период обучения наметилось приоритетное для Челомея направление – теория колебаний (тема его дипломного проекта – «Колебания в авиационных двигателях») и, в частности, вопросы динамической устойчивости упругих систем. Работы в этой области он продолжил и в Институте математики АН УССР, куда его пригласили после окончания КАИ в 1937 г. Динамической устойчивости упругих систем посвящены и кандидатская (защищена в 1939 г. в Киевском политехническом институте), и докторская (1951, МВТУ им. Баумана) диссертации Челомея.

В своей научной работе Челомей придерживался принципа, исповедуемого Н.Е. Жуковским: «Я делаю маленькие допущения, ничтожно, на полпроцента изменяющие результат формулы, но после них она становится настолько удобной и применимой в жизни, что каждый инженер может ею воспользоваться», – писал «отец русской авиации» [3].

В ряду научных задач, решённых Челомеем, можно выделить то, что он впервые описал упругую систему при динамическом воздействии пульсирующих сил в виде бесконечной системы линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами и разработал приближенный метод расчета таких систем. «Естественно, что проблему динамической устойчивости упругих систем в научно-технической литературе связывают с основополагающими результатами В.Н. Челомея», – отмечали академики Н.Н. Боголюбов и Л.И. Седов [4].

Научная работа Челомея отличалась завидной продуктивностью. Так, только в 1937-38 гг. в «Трудах Киевского авиационного института» опубликовано полтора десятка его статей. Высокую научную активность он поддерживал на протяжении всей жизни, хотя убедиться в этом непросто: большая часть более поздних его работ, связанных с оборонной тематикой, была засекречены. Однако о признании значимости теоретических разработок Челомея говорит хотя бы такой факт: в ряду полученных им званий и наград имеется в том числе золотая медаль имени А.М.Ляпунова – высшая награда АН СССР (а ныне – РАН), присуждаемая «за выдающиеся работы в области математики и механики».

В.Н. Челомей не был учёным-одиночкой. В решении сложных научно-технических задач он – и возглавляемые им коллективы – взаимодействовали с другими группами учёных и инженеров. Примером подобного взаимодействия может служить сотрудничество АО «Военно-промышленной корпорации «НПО машиностроения» (не раз менявшая свое наименование, эта организация выросла из КБ, организованного Челомеем в 1944 г. Челомеем) с НИИ механики МГУ, который был образован по постановлению Совета министров РСФСР № 1936 от 11 декабря 1959 года в «целях развертывания научно-исследовательских работ в области механики, направленных на решение важнейших задач современной техники» [5].

Сотрудничество двух организаций во многом определялось личными отношениями В.Н. Челомея и академика Л.И. Седова, научного руководителя исследований по гидродинамике

НИИ механики МГУ. Большую роль в установлении этих отношений сыграла руководитель службы гидромеханики НПО Раиса Яковлевна Кребс, ранее работавшая в ЦАГИ под руководством Л.И. Седова [6]. "Университетским человеком"в НПО стал Юрий Львович Якимов, по определению направившего его в НПО Л.И. Седова, – один "из самых глубоких гидромехаников нашего времени". Коллеги отмечали железную логику Юрия Львовича в рассуждениях, способность аргументированно обосновать и доказательно отстоять свой вариант решения задачи, умение найти нетривиальный выход из сложной ситуации [7].

Сотрудничество началось в январе 1959 года, ещё до официального, в декабре 1959 года, открытия НИИ механики МГУ. Направления сотрудничества составляли целый ряд исследовательских работ [8]:

1. Создание теории движения тела в воде с большими скоростями.

2. Построение класса автомодельных течений, связанных с движением по инерции тела с фиксированными кромками отрыва каверны (кавитатора) произвольной формы.

3. Создание экспериментальных установок для изучения условий входа в широком диапазоне скоростей и углов входа тел в жидкость и проведение цикла экспериментальных исследований высокоскоростного (с реальными скоростями до 400 м/с) проникания тел в воду.

4. Разработка методики моделирования сжимаемости на сравнительно небольших скоростях и ее экспериментальная проверка.

5. Исследования по снижению ударных нагрузок при входе тел в воду и разработка антиперегрузочных устройств.

6. Разработка и экспериментальное подтверждение способа вывода объектов с большой глубины к поверхности без потери начальной скорости за счет увеличения плавучести объекта созданием присоединенной к нему газовой каверны.

7. Разработка способов создания искусственных каверн около тела с помощью поддува газа для снижения сопротивления движущегося под водой тела в случае, если его скорость недостаточна велика для образования естественной развитой каверны. Исследование автоколебательных режимов течения с интенсивными пульсациями давления как в каверне, так и в подводящих воду и воздух магистралях.

Результаты проведенных исследований были реализованы в НПО при создании реальных ракетных комплексов [6].

Воспитанник Киевского политехнического и выделившегося из него Киевского авиационного институтов, В.Н. Челомей был занят созданием конкретных летательных аппаратов. Выпускник отделения математики физико-математического факультета МГУ Л.И. Седов тяготел к "сосредоточенной теоретической работе над отдельными конкретными проблемами". Оказавшийся в свое время на руководящей должности в авиационной отрасли Леонид Иванович сам подал в отставку [9]. Оба, и Челомей, и Седов, вели большую преподавательскую работу, были яркими лекторами. Студенты МВТУ на кафедре М2, созданной В.Н. Челомеем, с удовольствием вспоминают его лекции по теории колебаний. Один из авторов статьи до сих пор приводит в своих лекциях по теоретической механике живые примеры академика. Другой слушал лекции и специализировался на возглавляемой Л.И. Седовым кафедре гидромеханики в МГУ.

Слушавшим курс по теории колебаний и устойчивости сложных динамических систем студентам Владимир Николаевич запомнился демонстрацией своего "маятника Челомея «перевёрнутого», но занимающего устойчивое положение из-за вибрирующего воздействия точки подвеса [10].

В 1960 году он основал в МВТУ кафедру М2 и бессменно руководил ею до конца жизни. Оказавшись в стенах одного из старейших технических вузов страны, где зародился «русский метод» обучения инженеров, сочетавший в себе фундаментальную научную подготовку с практикой, В.Н. Челомей естественным образом продолжил традицию, поскольку понимал, что по-настоящему передовую технику могут создавать специалисты, обладающие не только инженерным мышлением, но и владеющие новейшими научными достижениями. По воспоминаниям С.Н. Хрущёва, для Челомея «инженер — это не выпускник высшего учебного заведения, а мастер, познавший суть вещей». «Хороший инженер способен описать летательный аппарат системой из двух дифференциальных линейных уравнений второго порядка, плохому не хватит и десятка страниц», — любил повторять Челомей [2].

Работая в МВТУ им. Н.Баумана, Челомей уделял большое внимание подготовке кадров и поиску талантливых инженеров и создал свою научно-педагогическую школу механики в ракетно-космической отрасли, лично подготовив пять докторов и 44 кандидата наук.

Всю жизнь Владимир Николаевич сохранял верность механике – его любимой научной дисциплине, и в особенности проблемам, связанным с механическими колебаниями, и применению теории колебаний к решению практических задач.

«Не думайте, что всё уже открыто и сделано в механике, в этой одной из древнейших наук. Здесь также много неоткрытого и необъяснённого. Только мы часто проходим мимо совершенно необычных явлений, не замечая их. Очень важно научиться видеть эти необычные явления, а потом понять и объяснить их», - говорил своим студентам Челомей.

Доказательством этого тезиса служит публикация в журнале «Доклады Академии наук СССР» за 1983 г. статьи «Парадоксы в механике, вызванные вибрациями», в которых Челомей рассмотрел «странные» эффекты, связанные с действием высокочастотных вибраций на динамические системы. Позже он собирался опубликовать теоретическое обоснование наблюдаемых эффектов. Но не успел: в 1984 г. В.Н. Челомея не стало...

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Згуровский М. Засекреченный конструктор. К 95-летию со дня рождения Владимира Челомея // «Зеркало недели. Украина». — 2009. — 1 авг. (№28).

2. Хрущев С. Н. Никита Хрущев. Рождение сверхдержавы. — М.: Время, 2010. 574 с.

3. Чуев Ф. Стечкин. — М.: Мол. гвардия, 1979. 256 с.

4. Боголюбов Н. Н, Седов Л. И. Владимир Николаевич Челомей // Избранные проблемы прикладной механики. Сборник работ, посвящённый шестидесятилетию академика Владимира Николаевича Челомея. — М.: Наука, 1974. С. 7—10.

5. Любимов Г.А., Окунев Ю.М., Остапенко Н.А. Институт механики Московского университета//Институт механики 60 лет. — М.: «КДУ»,«Университетская книга», 2019. 290 с.

6. Бондаренко Л.А. Тезисы выступления в НИИ механики МГУ на мемориальном заседании памяти Ю.Л. Якимова 16 марта 2016 года // Рукопись. Архив кабинета-музея академика Л.И. Седова НИИ механики МГУ.

7. Рязанцев Ю.С. <Предисловие> // Якимов Ю.Л. Сборник статей. — М.: Издательство Московского университета, 2013. 536 с.

8. Ерошин В.А., Прокофьев В.В. Лаборатория нестационарной гидродинамики // Институт механики 60 лет. — М.: «КДУ», «Университетская книга», 2019. 290 с.

9. Седов Л.И. Министру Авиационной Промышленности Петру Васильевичу Дементьеву. Заявление//Рукопись. Архив кабинета-музея академика Л.И. Седова НИИ механики МГУ.

10. Курбатов А.М., Челомей С.В., Хромушкин А.В. К вопросу о маятнике В.Н. Челомея // Механика твердого тела. 1986. № 6. С. 63–65.

УДК 514.7, 514.82, 519.63

Многогранники и развертки: история доказательства фундаментальной теоремы А. Д. Александрова

Д. Ю. Волков (Россия, г. Санкт-Петербург)
Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения
e-mail: dmitrivolkov@mail.ru, dmitrivolkov@guap.ru
К. В. Галунова (Россия, г. Санкт-Петербург)
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого
e-mail: galounova@gmail.com

The Alexandrov's Theorem on Polyhedra and Their Developments: A Historical Perspective

D.Yu Volkov (Russia, St. Petersburg)
Saint-Petersburg State University of Aerospace Instrumentation
e-mail: dmitrivolkov@mail.ru, dmitrivolkov@guap.ru
K. V. Galunova (Russia, St. Petersburg)
Peter the Great St.Petersburg Polytechnic University
e-mail: galounova@gmail.com

Доклад посвящен фундаментальной теореме Александр Даниловича Александрова о существовании и единственности многогранника, заданного разверткой [1, 2]. Сформулируем эту теорему, следуя книги А.Д. Александрова "Выпуклые многогранники"[2]. Разверткой будем называть объединение конечного числа простых многоугольников с указанным правилом склеивания их по сторонам. Для простоты будем считать, что в качестве многоугольников берутся треугольники. Правила склеивания следующие:

1. Любые склеиваемые отрезки сторон имеют равные длины.

2. От каждого треугольника к другому можно перейти идя по треугольникам,имеющим склеенные стороны.

3. Каждая сторона любого треугольника либо не склеивается ни с какой либо стороной, либо склеивается только с одной стороной.

Для задания развертки, по которой строится выпуклый многогранник, введем два условия.

Условие положительности кривизны развертки означает, что сумма углов при каждой вершине развертки, полученной в результате склеивания, не превышает 2π . Это условие необходимо для того, чтобы при склеивании развертки получился выпуклый многогранник.

Условие Эйлера для развертки имеет вид: $V - E + F = 2$, где F — число треугольников, E — число ребер, V — число вершин. Это соотношение связывает числовые характеристики любой развертки, которая гомеоморфна сфере.

Теорема А.Д. Александрова Если дана развертка, удовлетворяющая условию положительности кривизны и условию Эйлера, то существует единственный выпуклый многогранник, поверхность которого изометрична этой развертке. При этом предполагается, что дважды покрытый выпуклый многоугольник также считается выпуклым многогранником.

История этой знаменитой теоремы Александра Даниловича Александрова началась с его новаторского подхода к проблеме Германа Вейля о существовании выпуклой поверхности, заданной метрикой положительной кривизны на сфере [3,4]. Г.Вейль поставил эту проблему в 1915 году и сам наметил ее решение для метрики, близкой к метрике сферы, сведя задачу к нахождению решения нелинейного уравнения в частных производных типа Монжа -Ампера.

Для аналитических метрик решение получил Х. Леви в 1937 году. Александр Данилович стал решать ее совершенно по другому. Он предложил решить проблему сначала для выпуклых многогранников и потом с помощью предельного перехода перейти к выпуклым поверхностям. Так и появилась теорема Александрова о существовании и единственности выпуклого многогранника, заданного разверткой. Это теорема было огромным прорывом. Она позволило связать теорию гладких выпуклых поверхностей с теорией выпуклых многогранников. После решения общей проблемы Вейля возник ряд фундаментальных вопросов относительно свойств выпуклых поверхностей. Среди наиболее значимых можно выделить следующие:

Проблема единственности: Являются ли изометричные выпуклые поверхности равными.

Проблема регулярности: Каким образом гладкость метрики заданной на поверхности влияет на гладкость самой поверхности?

Устойчивость решений: Как меняется форма выпуклой поверхности при малых возмущениях метрики? Эта проблема также известна как проблема Кон-Фоссена.

Исчерпывающие ответы на первые две проблемы были получены Алексеем Васильевичем Погореловым [3, 4]. Он доказал теорему единственности изометричных замкнутых выпуклых поверхностей, а также установил зависимость регулярности поверхности от гладкости ее метрики. Эти результаты имеют фундаментальное значение для геометрии и нашли широкое применение в различных областях математики.

К 50 годам 20 века века для теоремы о существовании выпуклого многогранника с заданной разверткой было известно несколько доказательств. Сам Александр Данилович Александров предложил два подхода: топологический, основанный на свойствах непрерывных отображений [2], и аналитический, связанный с исследованием реализуемых метрик [1]. Третью идею доказательства выдвинул Лазарь Аронович Люстерник. Он предложил решать задачу о многограннике, аппроксимируя его гладкими поверхностями, для которых уже были разработаны соответствующие методы. В своей книге "Выпуклые многогранники"[2], изданной в 1950 году, Александр Данилович Александров поставил задачу найти вариационное доказательство основной теоремы о существовании многогранника. Идея заключалась в том, чтобы свести геометрическую проблему к аналитической задаче нахождения экстремума некоторого функционала. Подобный подход ранее предлагался Бляшке и Герглотцем для решения проблемы Вейля для поверхностей, однако полное доказательство так и не было найдено.

Александров поручил в 1952 году своему аспиранту Юрию Александровичу Волкову решить эту задачу. Ю.А. Волков предложил оригинальный вариационный подход к доказательству существования выпуклого многогранника с данной разверткой [5, 6. 7]. Его метод можно разделить на несколько этапов:

Построение развертки источника: исходная развертка преобразуется в так называемую "развертку источника". Эта новая развертка строится путем выделения множества точек, в которые из некоторой выбранной вершины можно провести несколько кратчайших линий. Полученные линии разделяют развертку на части, каждая из которых содержит только точки, до которых ведет единственная кратчайшая.

Построение обобщенного многогранника: на основе развертки источника строится обобщенный многогранник. Он представляет собой совокупность пирамид с общей вершиной, основаниями которых служат треугольники развертки. Важно отметить, что этот многогранник, в общем случае, не является евклидовым, так как углы при его внутренних ребрах могут превышать 2π.

Минимизация суммы длин ребер: Волков доказал, что при постепенном уменьшении длин ребер обобщенного многогранника углы при его внутренних ребрах стремятся к 2π. Таким образом, многогранник с минимальной суммой длин ребер становится евклидовым и может быть реализован в трехмерном пространстве.

В дальнейшем Ю.А. Волков успешно применил разработанный им вариационный метод для решения важной задачи устойчивости в геометрии, поставленной известным немецким математиком Кон-Фоссеном. Результаты исследований Ю.А. Волкова позволили получить количественную оценку того, насколько сильно две поверхности могут отличаться друг от друга при заданном различии внутренних расстояний. Результаты этой работы легли в основу докторской диссертации Ю.А. Волкова, защищенной в 1968 году.

Таким образом, к началу 1970-х годов благодаря работам А.Д. Александрова, А. В. Погорелова , Ю.А. Волкова и других математиков были получены глубокие результаты в области теории выпуклых многогранников и поверхностей, связанные с основной теоремой о существовании многогранника и проблемы Вейля для выпуклых поверхностей.

С развитием компьютерных технологий в середине XX века возникла новая область математики — вычислительная геометрия. Она занимается разработкой алгоритмов и программ для решения геометрических задач на компьютере. Развитие вычислительной геометрии привело к возрожденному интересу к классической геометрии, особенно к теории выпуклых многогранников.

Многие результаты, полученные в Советском Союзе, особенно в школе А.Д. Александрова, долгое время оставались малоизвестными на Западе из-за языкового барьера. Однако, с развитием международного научного сотрудничества, эти результаты были переоткрыты и получили широкое признание. Одной из ключевых задач вычислительной геометрии стала проблема построения геодезических линий на поверхностях [11, 12]. Эта задача оказалась тесно связана с классической проблемой построения выпуклого многогранника по его развертке. Исследования в этой области привели к глубокому изучению так называемых множеств разреза, которые определяют структуру развертки.

Результаты Ю.А. Волкова и Е.Г. Подгорновой [8], касающиеся строения множеств разреза, были переоткрыты и получили новое развитие в рамках вычислительной геометрии. Это позволило разработать эффективные алгоритмы для построения разверток источника и, как следствие, для решения задачи о построении многогранника по развертке.

В 2006 году А.И. Бобенко и И. Изместьев [9, 10], опираясь на работы Ю.А. Волкова, предложили алгоритм построения выпуклого многогранника по развертке, а также разработали программную реализацию этого алгоритма.

Открытие А.Д. Александрова о существовании выпуклого многогранника с заданной разверткой, долгое время остававшееся теоретическим результатом, сегодня приобретает все большую практическую значимость благодаря развитию компьютерной геометрии. Современные исследователи активно работают над созданием эффективных алгоритмов для построения многогранников по их разверткам. Эти алгоритмы находят применение в различных областях, от компьютерной графики и робототехники до архитектуры и дизайна. Можно предположить, что в будущем основная теорема Александрова станет неотъемлемой частью инструментария инженеров и дизайнеров, позволяя им создавать сложные трехмерные модели на основе двумерных чертежей.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Александров, А. Д.*Внутренняя геометрия выпуклых поверхностей.* Гостехиздат, М.–Л., 1948. - 388 с.

2. Александров, А. Д.*Выпуклые многогранники.* Гостехиздат, М.–Л., 1950. - 428 с.

3. Погорелов, А.В. *Внешняя геометрия выпуклых поверхностей* Наука, М. 1969. - 760 с.

4. Бураго, Ю.Д. *Геометрия поверхностей в евклидовых пространствах* Геометрия -3, Итоги науки и техн. Сер. Совр.проблемы математики Фундам. направления, 48, ВИНИТИ, М.,1989, 5-97;

5. Волков Ю. А *Существование выпуклого многогранника с данной разверткой* Вестник ЛГУ 1960 19 Серия математики, механики и астрономии. вып.4- С. 75-86

6. Волков Ю. А Е.Г. Подгорнова Е. Г. *Существование многогранника с данной разверткой* Ученые записки Ташкентского Государственного педагогического института им. Низами 1972- т. 85 - С. 3-54

7. Волков Ю. А *Существование многогранника с данной разверткой* Записки научных семинаров ПОМИ, том 476, 2018 , С. 50 –78

8. Волков Ю.А., Подгорнова Е.Г. *Множество разреза развертки положительной кривизны* Украинский геометрический сборник вып. 11, 1972 - с.11-25.

9. Bobenko A. I., Izmestiev I.V. *Alexandrov's theorem, weighted Delaunay triangulations, and mixed volumes* Annales de l'institut Fourier. – 2008. – Т. 58. – №. 2. – С. 447-505.

10. Izmestiev I.V. *A variational proof of Alexandrov's convex cap theorem* Discrete & Computational Geometry. – 2008. – Т. 40. – №. 4. – С. 561-585.

11. Bose P. et al. *A survey of geodesic paths on 3D surfaces* Computational Geometry. – 2011. – Т. 44. – №. 9. – С. 486-498.

12. Crane K. et al. *A survey of algorithms for geodesic paths and distances* arXiv preprint arXiv:2007.10430. – 2020.

УДК 51(091)

Геометрические и аналитические методы в классической механике (XVII–XIX вв.)

Е. А. Зайцев (Россия, Москва)
e-mail: e_zaitsev@mail.ru

Geometrical and analytical methods in classical mechanics (17th – 19th c.)

E. A. Zaytsev (Russia, Moscow)
e-mail: e_zaitsev@mail.ru

Движение можно описать математически двумя способами – при помощи геометрических построений и посредством аналитических методов. В XVII в., в период становления классической механики, движение описывалось почти исключительно методами геометрии. В XVIII в. началось формирование альтернативного подхода, в рамках которого вместо наглядных геометрических построений стали использовать методы анализа бесконечно малых. В этой статье мы коротко осветим существенные моменты противоречивого развития этих двух стратегий.

Свое наиболее полное выражение геометрический метод находит в трактате И. Ньютона «Математические начала натуральной философии» (1687) [1]. В нем основным объектом изучения являются линии движения (траектории), которые строятся с учетом сил, действующих на тело. Свойства движения «дедуцируются», исходя из способа построения этих линий. Механика превращается в раздел геометрии.

Визитной карточкой аналитического метода является трактат Ж.-Л. Лагранжа «Аналитическая механика», вышедший в свет в 1788 г. [2]. В нем предметом исследования являются не геометрические линии, а функциональные зависимости между количественными параметрами движения, выраженные в алгебраическом символизме. Механика превращается в раздел математического анализа: свойства движения «дедуцируются», исходя из свойств функций – решений дифференциальных уравнений.

Опишем в общих чертах схему построения и исследования траекторий, которой следовали творцы классической механики в XVII в.

Движение в силовом поле они рассматривали как композицию двух независимых движений. Первое движение было инерциальным – равномерным и прямолинейным; второе – равноускоренным под действием силы. Траектория строилась по точкам, определяемым на каждом шаге сложением этих двух движений по правилу параллелограмма.

Общая схема классической механики была реализована в двух вариантах. Первый был разработан для описания движения брошенного тела (летящего снаряда) в силовом поле «плоской Земли». Решение этой задачи было получено сначала для частного случая горизонтальной стрельбы (Т. Гарриот, ок. 1607, Б. Кавальери, 1632 и Г. Галилей, 1638). В общем случае, для ненулевого угла возвышения орудия, она была решена Э. Торричелли (1641).

При нулевом угле возвышения движение снаряда представляли в виде композиции инерциального движения по горизонтали и свободного падения по вертикали. Первое движение изображали при помощи серии равных отрезков, откладываемых в горизонтальном направлении; второе – посредством последовательности отрезков, возрастающих в соответствии с последовательностью нечетных чисел – 1, 3, 5, 7 и т.д. (закон свободного падения). В результате построенная по точкам траектория имела вид полупараболы. В схеме Торричелли в качестве инерциального бралось движение по линии возвышения орудия, тогда как вертикальная компонента строилась, исходя из закона свободного падения. В этом случае получалась полная симметричная парабола.

Второй вариант двухкомпонентной схемы был разработан для движения в поле центральной силы. Это было сделано И. Ньютоном в «Математических началах натуральной философии».

В этом варианте существенно то, что направление как инерциального, так и равноускоренного движений постоянно меняется. Чтобы отразить это обстоятельство, приходится прибегать к представлению линии движения в виде серии элементарных перемещений за малое время. Каждое из этих перемещений представляет собой композицию двух бесконечно малых перемещений – инерциального, направленного по касательной, и равноускоренного, направленного к центру силы. При сложении этих двух перемещений по правилу параллелограмма получаются отрезки бесконечно малой величины, из которых строится траектория, имеющая вид ломаной линии. При стремлении элементарных интервалов времени к нулю, ломаная линия превращается в криволинейную траекторию. При этом свойства ломаной переносятся на траекторию, которая и становится главным источником информации о свойствах движения. В качестве характерного примера применения геометрического метода можно указать на доказательство Ньютоном закона площадей – обобщенного варианта второго закона Кеплера: «Площади, описываемые радиусами, проводимыми от обращающегося тела к неподвижному центру сил, лежат в одной плоскости и пропорциональны временам описания их» [1 , с. 73-75].

Обратимся теперь к аналитическому подходу. За сорок лет до публикации ньютоновских «Начал» в математическом мире произошло знаменательное событие – создание Декартом аналитической геометрии (1637). Замысел ее творца состоял в том, чтобы протяженным величинам геометрии поставить в соответствие лишенные протяженности безразмерные алгебраические символы, операции с которыми, производимые по определенным правилам, позволяли решать сложные геометрические задачи. Необходимость в наглядных представлениях при этом отпадала: геометрический чертеж использовался только на начальном этапе решения, а именно, для установления соответствия между буквами и геометрическими величинами с последующей записью уравнения.

Лейбниц, следуя замыслу Декарта, распространил идею соответствия между протяженными величинами и алгебраическими символами на бесконечно малые величины и дифференциалы, заложив основы анализа бесконечно малых. Тем самым, был указан путь, следуя которому, механики XVIII в. превратили теорию движения в раздел математического анализа.

Историков математики долгое время занимал вопрос об использовании анализа Ньютоном при написании «Математических начал». Дело в том, что на склоне лет Ньютон утверждал, что свои результаты он получил при помощи метода флюксий (т.е., аналитически), а затем «переписал» на более привычном для математиков того времени языке геометрии. Вот одно из его высказываний на эту тему:

«Предложения в следующей книге были найдены (invented) при помощи Анализа. Но, учитывая, что древние ... не допускали в геометрию ничего, что не было прежде доказано посредством метода композиции (т.е. посредством геометрического построения – *Е.З.*), я изложил то, что изобрел с помощью анализа на языке геометрии .... Именно поэтому в данной Книге принято многословное изложение в стиле древних, без аналитических выкладок (calculations). Однако всякий, кто владеет (understands) Анализом, легко переведет доказательства этих предложений обратно на язык Анализа и, таким образом, увидит, при помощи каких аналитических методов они были получены. Именно это имел в виду маркиз де Лопиталь, когда утверждал, что эта Книга («Математические начала натуральной философии» – *Е.З.*) почти полностью состоит из анализа бесконечно малых» [3, p. 122-123].

Исследование рукописного наследия Ньютона не подтвердило этой версии – все доказательства Ньютона, содержащиеся в подготовительных версиях «Начал», опираются на геометрические построения. Аналитические рассуждения в них практически отсутствуют.

На самом деле становление аналитической механики заняло целое столетие. Оно проходило в несколько этапов, на каждом из которых геометрические методы лишь постепенно вытеснялись аналитическими. На раннем этапе основной вклад в развитие нового подхода внесли швейцарские математики – Якоб Бернулли, Якоб Герман и Леонард Эйлер, ориентировавшиеся в своих трудах на анализ бесконечно малых Лейбница. Поскольку для целого ряда задач не удавалось найти чисто аналитического решения, приходилось идти на компромисс – использовать предложения, доказанные геометрически. В качестве характерного примера можно привести аналитическое доказательство теоремы о том, что движение тела в поле центральной силы, убывающей по закону обратных квадратов, следует по траектории, совпадающей с одним из конических сечений (сам Ньютон, сформулировав эту теорему, оставил ее без доказательства). Первые аналитические доказательства этого важного для механики факта были получены независимо тремя учеными – Германом, Иоганном Бернулли и П.Вариньоном в 1710 г. Однако, каждый из них использовал при этом закон площадей, доказанный геометрически. Только в 1717 г. Герману удалось найти чисто аналитическое доказательство этого закона и, тем самым, теоремы о форме траектории движения. При этом Герман полагал, что предложенное Ньютоном геометрическое доказательство не может считаться полностью корректным; свое собственное доказательство, изложенное при помощи дифференциальных уравнений, он ставил выше ньютоновского [4]. Полностью перевести результаты Ньютона на язык аналитики бесконечно малых удалось Эйлеру в середине 1730-х гг.

В предисловии к «Механике» (1736) Эйлер – аналитик par excellence – так описывал мотивы своего обращения к исчислению бесконечно малых Лейбница:

«Однако если анализ где-либо и необходим, так это особенно относится к механике. Хотя читатель и убеждается в истине выставленных предложений, но он не получает достаточно ясного и точного их понимания, так что, если чуть-чуть изменить те же самые вопросы, он едва ли будет в состоянии разрешить их самостоятельно, если не прибегнет сам к анализу и те же предложения не разрешит аналитическим методом. Это как раз случилось со мной, когда я начал знакомиться с „Принципами“ Ньютона и „Форономией“ Германа; хотя мне казалось, что я достаточно ясно понял решение многих задач, однако задач, чуть отступающих от них, я уже решить не мог. И вот тогда-то, я попытался, насколько умел, выделить анализ из этого синтетического метода и те же предложения для собственной пользы проработать аналитически; благодаря этому я значительно лучше понял суть вопроса» [5, с. 33-34].

В этом фрагменте Эйлер указывает на два преимущества аналитического метода – его общность и превосходство над геометрическими рассуждениями в плане «понимания сути вопроса». С первым тезисом Эйлера трудно не согласиться. Действительно, аналитика, в отличие от геометрии, которая требует особого решения для каждой конкретной задачи, предлагает общий рецепт для решения целого класса однородных задач (описываемых дифференциальным уравнением определенного вида). Со вторым тезисом дело обстоит сложнее. Здесь мнения механиков разделились. Адепты лейбницевской идеи универсальной характеристики ставили аналитику выше геометрии, полагая, что общность метода открывает путь для более глубокого проникновения в суть механического движения. Однако, многие механики придерживались противоположной точки зрения. Признавая эффективность аналитики для решения задач, они вместе с тем указывали на превосходство геометрии в плане понимания «сути дела».

Именно с этих позиций на рубеже XVIII-XIX вв. аналитическая механика Лагранжа была подвернута критике со стороны Л. Пуансо. В противоположность Эйлеру и Лагранжу, Пуансо считал, что исключительное использование аналитики в механике ведет к выхолащиванию ее научного содержания. В качестве альтернативы он предлагал вернуться к разработке и использованию геометрических методов.

Аналитику Лагранжа Пуансо критиковал, в основном, за утрату наглядности. Исходя из практики преподавания механики в инженерной школе, он считал, что «видение» геометрических очертаний механических процессов является необходимым условием их подлинного понимания. Пуансо отмечал, что с распространением аналитики «стали избегать, так сказать, занятий самой наукой, которая превратилась в простой математический расчет. ... Книга г-на Лагранжа ... не давала ничего ясного, если не считать успехов в области математических расчетов» [6, p. 263-264].

Пуансо сам написал ряд важных работ, в которых, помимо критики Лагранжа, изложил простые и интуитивно понятные геометрические доказательства теорем, ранее доказанных аналитически. Кроме того, при помощи геометрического метода он решил несколько трудных задач, с которыми аналитика того времени не справлялась.

Свои наиболее важные результаты в динамике Пуансо изложил в мемуаре «Новая теория вращения тел» (1834). В этом трактате, помимо механико-математических результатов, мы находим яркую формулировку его научного кредо. Перечислив результаты, полученные в задаче о вращении тела вокруг неподвижной точки Даламбером, Эйлером и Лагранжем, Пуансо отмечал: «Надо согласиться с тем, что во всех этих решениях мы видим только вычисления без какой-либо *ясной картины* вращения тела. Конечно, эти вычисления, более или менее длинные и сложные, позволяют определить, где окажется тело к заданному времени, но мы вовсе *не видим*, как оно туда попало, мы его полностью *теряем из виду*, тогда как хотелось бы *наблюдать его и следить за ним, так сказать, взглядом* в течение всего вращения. И я старался открыть именно это *отчетливое представление* вращательного движения, чтобы сделать доступным обозрению то, что пока еще никем не было *изображено*» (курсив мой – *Е.З.*; цит. по [7, с. 137]).

Полемика по вопросу соотношения аналитических и геометрических методов в механике продолжалась в течение всего XIX в. В середине столетия важную роль в продвижении геометрического подхода сыграли работы Г.Гельмгольца по гидродинамике (теория вихрей). В конце века идея геометризации нашла живой отклик в трудах Н.Е. Жуковского [8, 9].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ньютон И. «Математические начала натуральной философии» М.: Наука, 1989.
2. Лагранж Ж.-Л. Аналитическая механика. Т. 1-2. М. –Л.: ГИТТЛ, 1950.
3. Cohen I.B. A Guide to Newton's *Principia* // Isaac Newton. Mathematical Principles of Natural Philosophy / Transl. by I.B. Cohen and A. Whitman. Berkeley etc.: University of California Press, 1999. P. 9–370.
4. Guicciardini N. An Episode in the History of Dynamics: Jacob Hermann's Proof (1716–1717) of Proposition 1, Book 1, of Newton's *Principia* // Historia mathematica. Vol. 23. 1996. Pp. 167–181.
5. Эйлер Л. Основы динамики точки. М. –Л.: ГИТТЛ, 1938.
6. Poinsot L. Éléments de statique. Paris: Mallet-Bachelier, 1861.
7. Погребысский И.Б. От Лагранжа к Эйнштейну. Москва: Янус, 1996.
8. Жуковский Н.Е. О значении геометрического истолкования в теоретической механике (1894) // Полное собрание сочинений. Т. 9. М. –Л.: ОНТИ, 1937. С. 181-187.
9. Жуковский Н.Е. Работы Гельмгольца по механике (1892) // Полное собрание сочинений. Т. 9. М. –Л.: ОНТИ, 1937. С. 313-328.

УДК 51(092)

Виктор Иосифович Левин и его ученики в Тульском государственном педагогическом институте

Н. М. Исаева (Россия, г. Тула)
Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого
isaevanr@yandex.ru

Viktor Iosifovich Levin and his students at the Tula State Pedagogical Institute

N. M. Isaeva (Russia, Tula)
Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University
isaevanr@yandex.ru

Виктор Иосифович Левин, известный ученый-математик, родился в декабре 1909 в Могилеве. Получил хорошее образование. Учился в Берлинской высшей технической школе, которую закончил в 1932 году. Одновременно посещал факультативно лекции по математике в Берлинском техническом университете, которые читал Эдмунд Ландау, один из ведущих математиков того времени. Защитил в Берлинском техническом университете диссертацию «О суммах коэффициентов некоторых классов степенных рядов». Затем Виктор Иосифович продолжил свое образование в аспирантуре Кембриджского университета, был учеником Г. Харди. Получил степень доктора философии. По окончанию Кембриджского университета преподавал в Калькуттском университете.

Возвратившись на родину в 1938 году, защитил диссертацию на соискание ученой степени доктора физико-математических наук (1939), получил ученое звание профессора (1939). Был преподавателем и заведующим кафедрой высшей математики МЭИ (1938—1949), Пензенского индустриального института (1949—1951), Московского заочного педагогического института (1951—1959), Московского института стали и сплавов (1959—1962). В 1961—1985 гг. заведовал кафедрой математической физики Московского государственного педагогического института, был деканом факультета повышения квалификации.

В.И. Левин написал несколько учебников по анализу и математической физике [2-4], переводил английские учебники на русский язык, например «Неравенства» Харди, Поли и Литлвудда, был автором около 40 научных статей.

В июне 1951 года профессор В. И. Левин начал работать на кафедре математического анализа Тульского государственного педагогического института. С его именем связано становление аспирантуры на кафедре и факультете. В числе его учеников были выпускники физико-математического факультета Чернов В.М., Аристова В.С, Ефимова Н.С, Лёвина С.Н., Есипова И.С., Пестун Л.В.

Уже 1 октября 1951 г. его первой аспиранткой становится Софья Николаевна Лёвина. Она стала первой выпускницей аспирантуры кафедры, успешно защитившей диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук в 1955 году. 50 лет Лёвина С.Н. посвятила педагогической деятельности. Работала в ТГПИ до 1974 года, а с августа 1974 года по апрель 2004 года преподавала на кафедре высшей математики Московского государственного технического университета гражданской авиации. Лёвина С.Н. она является автором большого числа научных и учебно-методических трудов.

В 1954 году в аспирантуру к профессору Левину В.И. поступил Виктор Михайлович Чернов. После окончания аспирантуры в 1957 году В.М.Чернов работает в Тульском механическом институте, сначала ассистентом, затем старшим преподавателем. В 1964 году Виктор Михайлович защитил кандидатскую диссертацию. В.М.Чернов заведовал кафедрой вычислительной математики и программирования Тульского политехнического института, был деканом факультета ТК, заведующим кафедрой высшей математики, заместителем декана механического факультета. С 1982 году по 1987 год В. М. Чернов возглавлял кафедру математического анализа ТГПИ, в 1984–93 гг. являлся проректором по научной работе ТГПИ.

Нина Сергеевна Ефимова поступила в аспирантуру к Левину В.И. в 1953 году и окончила ее в 1956 году. Работала в ТГПИ с 1956 по 1987 год на кафедрах высшей математики и математического анализа. В 1957–59 годах была деканом физико-математического факультета, в 1986–1987 гг. – заместителем декана математического факультета. Научные работы в области асимптотических разложений в ряды и методики преподавания математического анализа.

Валентина Савватьевна Аристова в 1955 году была принята в аспирантуру по специальности математический анализ. После окончания аспирантуры с 1958 по 1988 год работала на кафедрах высшей математики и математического анализа ТГПИ. Научные работы в области тауберовых теорем, научно-методические статьи по вопросам преподавания математического анализа.

Пестун Любовь Васильевна поступила на физико–математический факультет ТГПИ в 1950 году. Институт закончила с отличием в 1954 году. С 1958 по 1960 год работала на кафедре элементарной математики ТГПИ. Летом 1960 года поступила в аспирантуру профессора В. И. Левина по специальности математический анализ, которую закончила в 1963 году. После этого работала на кафедрах высшей математики и математического анализа. Научные работы в области интегральных преобразований и дифференциальных уравнений в частных производных, методические работы по вопросам преподавания математического анализа. Несколько лет была заместителем декана математического факультета.

Подводя итог, можно сделать вывод, что Виктор Иосифович Левин и ученики сыграли огромную роль в становлении и развитии кафедры математического анализа, которая была создана на физико-математическом факультете в 1950 году и просуществовала до 2009 года.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Денисов И.В. Пути развития математического анализа в Тульском государственном педагогическом университете имени Л. Н. Толстого (к 70-летию образования кафедры математического анализа) // Чебышевский сборник, 2021, Т.22, №5(21), С.270-306.

2. Левин В. И. Ряды и интегралы Фурье. Элементы операционного исчисления. М., Советское радио, 1948. 116 с.

3. Левин В. И., Гросберг Ю.М. Дифференциальные уравнения математической физики. М.–Л., Гостехиздат, 1951. 576 с.

4. Левин В. И., Фукс Б. А. Функции комплексного переменного и некоторые их приложения. М.–Л., Гостехиздат, 1951. 308 с.

5. Чернов В. М. Асимптотические свойства двумерного преобразования Лапласа // Изв. вузов. Математика. 1965. № 1. С. 158-167.

6. Лёвина С. Н. О решении уравнения колебаний на всей оси времен // Доклады АН СССР. 1957. Т. 114. № 6. С. 18-20.

7. Лёвина С. Н. Операторное решение некоторых задач математической физики на всей оси времен // Уч. зап. Пед. ин-та. Тула, 1960. Вып. 7. С. 113-137.

8. Ефимова Н. С. Двойные асимптотические разложения // Уч. зап. Пед. ин-та. Тула, 1960. Вып. 7. С. 98-112.

9. Исаева Л. В. Решение задачи Коши для уравнения // Волж. матем. сб. 1965 Вып. 3. С. 289-295.

УДК 51(091)

Выпускник МТУСИ: Хамадун Туре

Е. В Манохин (Россия, г. Тула)
Тульский филиал Финансового университета при Правительстве Российской Федерации
e-mail: emanfinun@mail.ru
И. В. Добрынина (Россия, г. Химки)
Московский технический университет связи и информатики
e-mail: dobrynirina@yandex.ru

Graduate of MTUCI: Hamadoun Toure

E. V. Manokhin (Russia, Tula)
Financial University under the Government of the Russian Federation (Tula Branch)
e-mail: emanfinun@mail.ru
I. V. Dobrynina (Russia, Khimki)
Moscow Technical University of Communications and Informatics
e-mail: dobrynirina@yandex.ru

1. Из биографии Хамадуна Туре

Хамадун Туре (фр. Hamadoun Touré, род. 3 сентября 1953, Мали) — малийский инженер, Генеральный секретарь Международного союза электросвязи (МСЭ), специализированного учреждения ООН, занимающегося вопросами информационно-коммуникационных технологий, с января 2007 по декабрь 2014 года.

В.В.Путин при встрече с генеральным секретарем Международного союза электросвязи Хамадуном Туре сказал «Уважаемый господин генеральный секретарь! Не представляете, как приятно вдали от родины, здесь, за границей, встретить своего земляка. Вы действительно мой земляк в том смысле, что учились в Петербурге и недавно получили там звание почётного доктора в Институте имени Бонч-Бруевича» Диссертацию на соискание ученой степени кандидата технических наук Туре защитил в Москве, в 2004г. в Московском техническом университете связи и информатики (МТУСИ).

Хамадун Туре сделал выдающуюся карьеру в спутниковой индустрии, работая с 1985 по 1996 г. в Intelsat и управляя быстрым расширением компании в Африке и на Ближнем Востоке.

Активно продвигал серию мероприятий ITU Connect, первое из которых, ConnectAfrica, было проведено в Нигере и Сомали в 1997 году. За 7 лет было привлечено 55 млн долл. для улучшения телекоммуникационной инфраструктуры Африки.

В 1998 г. на Полномочной конференции в Миннеаполисе был избран директором Бюро развития электросвязи МСЭ, переизбран на конференции в Марракеше в 2002 г. Позднее был назначен Генеральным секретарем МСЭ, переизбран на второй срок в 2010 г.

В 2015 г., после ухода из МСЭ, г-н Туре вернулся в Мали и занял пост исполнительного директора-основателя Альянса SMART AfricaAlliance. Владеет 4 официальными языками МСЭ: английским, французским, русским и испанским.

2. Научная деятельность Хамадуна Туре

В 2004г. в Московском техническом университете связи и информатики Хамадун Туре защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата технических наук по теме «Исследование вопросов повышения эффективности международной сети радиоконтроля». Научный руководитель: доктор технических наук, профессор, член-корреспондент РАН Ю.Б. Зубарев. Методы исследования включали применение методов математической статистики, математического моделирования, проведение оценок с помощью процедур Монте-Карло.

Так, в третьей главе «Ошибки определения пеленга» проанализированы природа и характер ошибок, возникающих при пеленегации в ВЧ диапазоне. Ошибки в этом диапазоне могут носить статистический и методический характер. К статистическим ошибкам измерения относятся ошибки измерения азимута (пеленга) за счет шумов в тракте приема и, что специфично для ВЧ диапазона, шумоподобные ошибки, вызванные быстрыми флюктуациями углов прихода волны, отразившейся от ионосферы. При наличии шума и шумоподобной помехи повышение точности достигается усреднением результатов определения пеленга.

Методические ошибки определяются ошибками оператора и боковым отклонением радиолуча. Ошибки оператора могут быть связаны, например, с размытием линии пеленга при приема двух передатчиков, работающих в одной полосе частот под разными азимутами. Оператор может посчитать это размытие следствием влияния шума и произвести усреднение и наоборот.

Боковое отклонение радиолуча, вызывается появлением горизонтальных градиентов коэффициента преломления на трассе распространения. Ошибки этого рода носят региональный характер.

В четвертой главе «Методология определения местоположения» разработаны методические основы определения местоположения источника радиоизлучения в ВЧ диапазоне при триангуляции. Особенности методики определения местоположения в этом диапазоне, в отличие от работы в других диапазонах радиоспектра, связаны со значительными расстояниями до наблюдаемого передатчика, при которых сферичностью Земли пренебрегать нельзя и с существенным влиянием ионосферы на результаты измерений. Сферичность Земли приводит к нелинейной связи ошибок измерения угла с линейными отклонениями линии пеленга от истинного направления. Это приводит к появлению значительных трудностей при разработке оптимальных методов объединения результатов измерений для оценки местоположения источника излучения.

Полученные результаты показывают, что для точностей измерения углов современных пеленгаторов допустима линеаризация, примерно, в 500-километровой окрестности точки пересечения линий пеленгов. Для больших расстояний точки пересечения линий пеленгов должны быть получены по формулам сферической геометрии, а в окрестности точки пересечения допустимо применение линейного приближения.

Статистические ошибки определения координат методом триангуляции описываются функцией распределения, зависящей от совокупности полученных результатов измерений и параметров функции распределения. подлежащих определению.

Распределение ошибок определения координат подчиняется закону Релея, а область пространства, внутри которой находится истинное местоположение излучателя с заданной вероятностью, ограничивается эллипсом ошибок. Для того, чтобы объявленная точность определения координат являлась гарантированной, целесообразно величину ошибки характеризовать максимальным размером эллипса ошибок — длиной большой оси эллипса ошибок. Кроме статистической ошибки, при определении координат в ВЧ диапазоне зачастую присутствует методическая ошибка, связанная с боковым отклонением линий пеленга. Вероятность отклонения оценки местоположения от истинного значения в этом случае получить не удается. Для этого случая степень неопределенности результатов измерения предложено оценивать размером многоугольника, вершинами которого являются точки пересечения линий пеленгов, проведенных от каждого пеленгатора, участвующего в измерениях, а в качестве оценки степени неопределенности использовать максимальную диагональ этого многоугольника.

Возможность численного расчета величин ошибок двух типов позволяет определить преобладающий характер ошибки при конкретном измерении. Если длина большой оси эллипса ошибок больше максимальной диагонали многоугольника, то преобладает статистическая погрешность. Улучшение результата в этом случае может быть достигнуто усреднением серии измерений.

Если длина максимальной диагонали многоугольника превышает длину большой оси эллипса ошибок, то, скорее всего, рассеяние результатов связано с методическими ошибками (с боковым отклонением луча). В этом случае в ряде ситуаций улучшение может быть достигнуто отбрасыванием наихудшего пеленга из нескольких имеющихся. Наихудшим считается пеленг, линия которого максимально удалена от оцененного местоположения. В соответствии с изложенным, была разработана программа объединения результатов измерения пеленгов и определения степени их рассеяния. В пятой главе "Методика оценки качества сетей пеленгаторов" разработана методика оценки качества сетей пеленгаторов.

3. Заключение

Хамадун Туре не забывает годы учебы в Ленинградском электротехническом институте связи, защиту кандидатской в МТУСИ. Помнит и о 60-летии НИИ радио, и о 150-летии Попова. Во время ITU TELECOM-2009 открывал самый большой в МСЭ конференц-зал – имени русского изобретателя радио. Во время встречи с В.В. Путиным он сказал следующее: «Как Вы сказали, я как выпускник Института имени Бонч-Бруевича считаю себя питерцем и, следовательно, представителем Российской Федерации в МСЭ. Как Вы сказали, почти 150 лет назад Россия стала одним из членов–основателей МСЭ. В мае этого года мы отмечали 146-летие МСЭ.

Мы очень высоко ценим научный вклад России в масштабы всего мирового сообщества, и в особенности в области связи, среди которых – запуск первого в мире искусственного спутника, а также первый пилотируемый полёт в космос, который совершил Юрий Гагарин 50 лет назад – первый в мире космонавт. Мы также глубоко благодарны России за её весьма активное участие в работе МСЭ. При поддержке Российской Федерации МСЭ смог принять много важных политических и технических решений, которые помогают нам выполнять наш мандат – соединять мир. При Вашей поддержке МСЭ добивается успехов в содействии глобальному развитию информационно-коммуникационных технологий и достижении реального социально-экономического прогресса.»

УДК 51(091)

Н. М. Коробов и его последняя оценка[1]

И. Ю. Реброва (Россия, г. Тула)
Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого
e-mail: i_rebrova@mail.ru

[1]Работа выполнена по гранту РНФ № 23-21-00317 "Геометрия чисел и диофантовы приближения в теоретико-числовом методе в приближенном анализе"

N. M. Korobov and his latest estimate

I. Yu. Rebrova (Russia, Tula)
Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University
e-mail: i_rebrova@mail.ru

В этом году 25 октября исполнилось 20 лет, как не стало профессора Н. М. Коробова — основателя теоретико-числового метода в приближенном анализе.

Пусть, как обычно, через $q = q(a_1, \ldots, a_s)$ обозначается минимальное значение произведения $\overline{m}_1 \cdot \ldots \cdot \overline{m}_s$, где $m_1, \ldots, m_s$ — произвольное нетривиальное решение сравнения

$$a_1 m_1 + \ldots + a_s m_s \equiv 0 \pmod p, \tag{1}$$

а гиперболическая дзета–функция решетки решений этого линейного сравнения задается равенством

$$\zeta_H(\Lambda(a_1, \ldots, a_s; p)|\alpha) = \sideset{}{'}\sum_{m_1, \ldots, m_s = -\infty}^{\infty} \frac{\delta_p(a_1 m_1 + \ldots + a_s m_s)}{(\overline{m}_1 \ldots \overline{m}_s)^\alpha} \quad (\alpha > 1). \tag{2}$$

Эти два объекта играют определяющую роль в методе оптимальных коэффициентов Н. М. Коробова.

При $p > 2 \cdot 3^s + 1$ величина p^* определяется из условий

$$N_s(p^*) < \frac{p-1}{2} \leqslant N_s(p^* + 1),$$

где $N_s(t)$ — количество ненулевых наборов $(m_1, \ldots, m_s)$, удовлетворяющих неравенству $\overline{m}_1 \ldots \overline{m}_s \leqslant t$. Так как $N_s(1) = 3^s$ и $N_s(t) \leqslant t(3 + 2\ln t)^{s-1}$, то $p^* = O\left(\frac{p}{(\ln p)^{s-1}}\right)$ и $p^* > \frac{p}{2(3+2\ln p)^{s-1}}$.

В работе [1] доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Для любого простого $p > 2 \cdot 3^s + 1$ среди $P = (p-1)^s$ различных наборов $(a_1, \ldots, a_s)$ с $(1 \leqslant a_1, \ldots, a_s \leqslant p-1)$ имеется не менее $P/4+1$ таких, что $q = q(a_1, \ldots, a_s) \geqslant p^*$ и при $\alpha > 1$, $N = p$ для $f \in E_s^\alpha(C)$ погрешность квадратурной формулы*

$$\int_0^1 \ldots \int_0^1 f(x_1, \ldots, x_s) dx_1 \ldots dx_s = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} f\left(\left\{\frac{a_1 k}{p}\right\}, \ldots, \left\{\frac{a_s k}{p}\right\}\right) - R_N[f]$$

удовлетворяет неравенству

$$|R_N[f]| \leqslant C \frac{C(\alpha, s)(2 + 2s \ln\ln p)(5 + 2\ln p)^{s-1}}{p q^{\alpha-1}},$$

где константа $C(\alpha, s) > 0$ зависит только от α, s.

В работе [1] было указано: "Заметим, что для всех наборов $(a_1, \ldots, a_s)$, удовлетворяющих условию теоремы, для которых $q \ll p/\ln\ln p$, оценка теоремы 1 лучше известной оценки (см. [2] стр. 126)

$$|R_N[f]| \leqslant 4C\alpha \left(\frac{3\alpha^2}{\alpha - 1}\right)^s \frac{(1 + \ln q)^{s-1}}{q^\alpha}.$$

Но вопрос о существовании наборов даже с $q \gg p \ln^{1-s+\varepsilon} p$ для любого $\varepsilon > 0$ остается открытым."

В книге [3] Н. М. Коробов на странице 141 написал:

"Наконец, с помощью соображений, использованных при доказательстве теоремы 19 (с. 96), можно получить наиболее сильную оценку:

$$|R_N[f]| \ll \frac{\ln^{s-1} p}{pq^{\alpha-1}}.$$

"

На протяжении 19 лет оставался открытым вопрос о доказательстве этой оценки и лишь в прошлом году в работе [4] ученикам Н. М. Коробова удалось провести доказательство этого результата. Была доказана следующая теорема.

Теорема 2. *Для любого простого* $p > 2 \cdot 3^s + 2$ *среди* $P = (p-1)^s$ *различных наборов* $(a_1, \ldots, a_s)$ *с* $(1 \leqslant a_1, \ldots, a_s \leqslant p-1)$ *имеется не менее* $P/4+1$ *таких, что* $q = q(a_1, \ldots, a_s) \geqslant p^*$ *и при* $\alpha > 1 + \frac{1}{\ln\ln p}$, $N = p$ *для* $f \in E_s^\alpha(C)$ *погрешность квадратурной формулы*

$$\int_0^1 \ldots \int_0^1 f(x_1, \ldots, x_s) dx_1 \ldots dx_s = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} f\left(\left\{\frac{a_1 k}{p}\right\}, \ldots, \left\{\frac{a_s k}{p}\right\}\right) - R_N[f]$$

удовлетворяет неравенству

$$|R_N[f]| \leqslant C\left(\frac{8s \cdot e^s\left((3+2\ln\ln p)^s + 2(3+2\ln p)^{s-1}\right)}{pq^{\alpha-1}} + 4\alpha\left(\frac{3\alpha^2}{\alpha-1}\right)^s \frac{(1+\ln p)^{s-1}}{qp^{\alpha-1}}\right).$$

Доказанная оценка по порядку точнее оценки Бахвалова—Коробова.

Остается вопрос о доказательстве данного результата для произвольного составного модуля.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Добровольский Н. М., Коробов Н. М. Об оценке погрешности квадратурных формул с оптимальными параллелепипедальными сетками // Чебышевский сборник. 2002 Т. 3, вып. 1(3). С. 41–48.

2. Коробов Н. М. Теоретико-числовые методы в приближенном анализе. М.: Физматгиз, 1963.

3. Коробов Н. М. Теоретико-числовые методы в приближенном анализе. (второе издание) / М.: МЦНМО, 2004.

4. Н. М. Коробов, М. Н. Добровольский, Н. Н. Добровольский, Н. М. Добровольский. Об оценке погрешности квадратурных формул с оптимальными параллелепипедальными сетками II// Чебышевский сборник. 2023. Т. 24, вып. 4, С. 345–353.

УДК 51(091), 51(092)

Систематизация иконографии Л. Эйлера и рассказ о находке автопортрета Эйлера в его записной книжке

Г. И. Синкевич (Россия, г. Санкт-Петербург)
Санкт-Петербургский государственный архитектурно-строительный университет
e-mail: galina.sinkevich@gmail.com

L. Euler's iconography systematization and a story on Euler's self-portrait discovery in his manuscripts

G. I. Sinkevich (Russia, Saint-Petersburg)
Saint Petersburg State University of Architecture and Civil Engineering
e-mail: galina.sinkevich@gmail.com

Иконография Леонарда Эйлера весьма богата, известно более 40 его портретов и других изображений, сделанных различными художниками, граверами и скульпторами. Но только четыре портрета, одна гравюра и один барельеф являются достоверными прижизненными изображениями. Остальные изображения представляют собой копии, либо копии с копий, либо вольные интерпретации портретистов, отдаленно воспроизводящих основные черты Эйлера. К достоверным прижизненным художественным портретам относятся три работы Якоба Эмануэля Хандмана 1753 и 1756 годов (погрудный, поясной и поколенный), портрет работы Иосифа Фридриха Августа Дарбеса 1778 г.; гравюра Василия Петровича Соколова 1766 г. по утраченному портрету кисти Иоганна Георга Бруккера 1737 г., а также профильный барельеф скульптора Доминика Рашетта 1781 г. Во всех этих случаях сходство с оригиналом было подтверждено свидетельствами близко знавших Л. Эйлера людей. Портреты работы Хандмана находятся в Базеле и Мюнхене; портрет работа Дарбеса находится в Женеве, его авторское повторение – в Третьяковской галерее в Москве; отпечатки гравюры Соколова – в Государственном музее истории искусств (Москва), Государственном Русском музее и Российской национальной библиотеке (Санкт-Петербург); профильный барельеф Рашетта – в Парижской академии наук. Среди прижизненных изображений, сделанных с натуры, можно назвать профильный барельеф М.И. Павлова, не совсем сходный с достоверными изображениями, и посмертный бюст Эйлера (1784), выполненный хорошо знавшим его Д. Рашеттом.

Научная слава Эйлера вызвала необходимость изготовления большого количества его гравюр как для фронтисписов книг, так и для свободной продажи, а также скульптурных изображений. Далеко не всегда они выполнялись крупными мастерами, зачастую представляли собой копии с копий без знания достоверных изображений, либо приобретали посторонние черты по личной прихоти, либо по отсутствию таланта исполнителей.

В нашем докладе мы покажем более сорока изображений Эйлера работы таких копиистов, как граверы и литографы И. Штенглин, И.-Р. Хубер-мл., С.-Г. Кютнер, Х. Дархов, Г. Пфенингер, Ж.-П. Дюпен, Х. Мехель, И. Липс, Т. Кук, Ф. Бартолоцци, Дж. Торнтуэйт, К. Ридель, К. Вестермеер, Дж. Чепмен, Ш.-П. Ландон, Ж. Адам, Ж.-Б. Маду, Ф. Унцельманн, Ж.-К. Формантен, Морис, Б. Холл, Ф. Вебер, А. Руссо; силуэтисты Ф. Антинг, Ф.В. Сидо; медальер А. Абрамзон; скульпторы В.И. Демут-Малиновский, Г. Руф, Ю.Г. Клюгге; художники Л.-Э. дю Пьери, А. Лорнья, А. Менцель Ф. Унцельманн, И. Кёниг, а также рисунок, сделанный сыном Эйлера Иоганном Альбрехтом, и некоторые работы неизвестных мастеров.

Можно наглядно убедиться, что чем больше ступеней в каскаде интерпретаций с вариациями, тем слабее сходство с достоверными прижизненными портретами.

Выделив достоверные портреты среди общего множества изображений Эйлера, перейдем к нашей главной находке.

В 2021 г. мы с доцентом СПбГУ Дмитрием Михайловичем Столяровым просматривали рукописи Л. Эйлера для отбора некоторых из них на выставку ICM-2022. В течение всей своей жизни Л. Эйлер делал черновые записи в своих записных книжках, это 12 больших тетрадей, первую из которых Эйлер начал еще в Базеле, будучи учеником И. Бернулли, а последние, заполняемые руками его секретарей и помощников, содержат записи последних лет жизни. Как правило, в этих записных книжках содержатся черновые записи формулировок и решения проблем математики, механики, физики и астрономии, чертежи. В книжках практически нет бытовых записей. Но во второй книжке, соответствующей переезду 20-летнего Эйлера в

Санкт-Петербург, есть дорожные записи, планы Эйлера изучения наук, записи о поручениях живущих в Петербурге швейцарских коллег и единственный на все записные книжки рисунок молодого человека. Д.М. Столяров высказал предположение, что это автопортрет.

В пользу этого предположения говорят следующие аргументы. Эйлер приехал в Петербург 24 мая 1727 года и поселился в квартире своего друга Даниила Бернулли. По поручению Д. Бернулли и других соотечественников, проживающих в Петербурге, Эйлер привез им некоторые покупки, список которых в верхней части листа. В центре листа изображен в профиль хрупкий юноша с едва пробивающейся бородкой, со шпагой на перевязи, в зимней шапке, с радостно удивленным лицом. Возможно, он только что начал перед зеркалами Д. Бернулли, большого франта, примерять теплую одежду для петербургской погоды, В правой руке у него глиняная голландская курительная трубка с цветком лотоса в чаше трубки. Это явная аллюзия к девятой песне «Одиссеи», которую Эйлер хорошо знал и имел в своей библиотеке. В этой песне рассказывается о том, как Одиссей со своими попутчиками пристали к острову лотофагов, угостивших их лотосами. Как пишет Гомер, эти цветы вызывают забвение родины и сильное желание остаться на острове ради грядущего счастья. Юного Эйлера манили перспективы научных исследований и успешной деятельности, вдыхая аромат лотоса, он забывал о родном доме ради возможности заниматься наукой. За головой юноши виньетки, в которых угадывается буква «E» - начальная буква его имени, и скрипичный ключ (Эйлер был музыкален). Рядом набросок плана дома. Все, изображенное на этой странице, выполнено одной рукой и тем же карандашом, что и на других страницах. Это личные записи Эйлера.

Сходство профиля юноши на рисунке и достоверного профиля на барельефе Эйлера, выполненного Д. Рашеттом, нужно было доказать. Мы решили последовать описанному в литературе методу идентификации портретов. Этот метод наложения по контрольным точкам использовал литературовед, исследователь творчества М.Ю. Лермонтова, И.Л. Андроников для идентификации портрета Лермонтова, и исследователь творчества Н.И. Лобачевского, Б.В. Федоренко, для того, чтобы отвергнуть предположение о том, что портрет молодого человека кисти художника В. Щеголькова является портретом Лобачевского.

Сделав наложение рисунка из записной книжки и барельефа Рашетта (за что большое спасибо моему сыну, А.В. Синкевичу) мы убедились, что, несмотря на большую временну́ю дистанцию между этими изображениями, основные точки лица совпали. Таким образом, мы располагаем самым ранним портретом Леонарда Эйлера.

Список литературы, потребовавшийся для этого исследования, содержит более 51 наименования. Мы надеемся, что полный текст статьи вскоре появится в «Чебышевском сборнике».

УДК 511.32

Дифференциальные параметры и связь между потенциалом и вектором

А. О. Юлина (Россия, г. Санкт-Петербург)
Санкт-Петербургский государственный архитектурно-строительный университет
e-mail:parfenova19761976@mail.ru

Differential parameters and the relationship between potential and vector

A. O. Yulina (Russia, Saint Petersburg)
Saint Petersburg State University of Architecture and Civil Engineering
e-mail: parfenova19761976@mail.ru

Хронологические рамки нашей работы относятся к первой половине 19 века (1796 – 1873). Формирование математического аппарата электромагнитной картины мира представим в следующей таблице. В электрических и магнитных исследованиях потенциал определяется так,

Имя	Вклад	Год
Pierre-Simon Laplace	дифференциальный оператор второго порядка	1796
George Green	потенциальная функция	1828
William Hamilton	вектор, векторные операторы	1853
Gabriel Lamé	дифференциальный оператор первого порядка	1859
Осип Иванович Сомов	геометрическая функция, векторное произведение, дифференциальные операторы первого и второго порядка	1860
Peter Guthrie Tait	векторные операторы, оператор набла	1862
James Clerk Maxwell	силовое поле, градиент, дивергенция, ротор	1873

что результирующая сила в любом направлении измеряется уменьшением потенциала в этом направлении. Этот метод использования выражения делает его соответствующим по знаку потенциальной энергии, которая всегда уменьшается, когда тела перемещаются в направлении сил, действующих на них.

Геометрическая природа связи между потенциалом и вектором, полученным из него, проясняется благодаря открытию Гамильтоном формы оператора, с помощью которого вектор выводится из потенциала.

Рассматривается особый класс сил, действующих на частицы – потенциальные. Работа таких сил не зависит ни от траектории, по которой перемещается точка, ни от характера движения, а определяется лишь начальным и конечным положением точки. Вводятся следующие определения силового поля и потенциального поля.

Рассматривается особый класс сил, действующих на частицы – потенциальные. Работа таких сил не зависит ни от траектории, по которой перемещается точка, ни от характера движения, а определяется лишь начальным и конечным положением точки. Вводятся следующие определения силового поля и потенциального поля.

Силовым полем называется область пространства, в каждой точке которого на помещенную туда материальную точку действует сила, однозначно определенная по величине и направлению в любой момент времени (функция точки). Примеры силовых полей: поле силы тяжести вблизи земной поверхности, гравитационное поле, поле силы упругости, электростатическое поле.

Сила, как мера движения и взаимодействия, определяется двумя основными параметрами: величина и направление. Как описать это математически? Появляется на свет – Вектор. Таким образом, если функция точки – скалярная величина, то соответствующие поле скалярное, если же векторная, поле векторное.

Потенциальная функция в физике – потенциальная энергия. Силовое поле называется потенциальным, если для него существует функция точки (функция координат), такая, что проекции действующей силы могут быть вычислены через ее частные производные по соответствующим координатам.

О.И. Сомов оставил богатое научное наследие в математике и механике. В теоретической механике он является одним из основателей общего аналитического метода постановки и решения фундаментальных задач кинематики и динамики. Эти задачи он великолепно выполняет, используя интегральное и дифференциальное исчисление, аппарат теории эллиптических функций, векторный анализ. Все вопросы механики Сомов рассматривает в тесной взаимосвязи с математикой. В его фундаментальных работах блестяще показано как математический анализ помогает раскрывать законы движения и действия сил природы с одной стороны, а с другой как механика помогает развитию аналитических и геометрических методов исследования. Однако же работы академика Сомова незаслуженно забыты. Постараемся восполнить этот пробел в данном докладе.

Изложение кинематики с помощью векторного анализа является заслугой О.И. Сомова. Большая часть его статей в этом направлении научной работы вошла в его учебник «Рациональная механика» ("Прямой способ для выражения дифференциальных параметров первого или второго порядка в криволинейных координатах"[1]; "Об ускорении различных порядков в относительном движении"[2]; "Construct. des axes d'un ellipse"[3], "Преобразование прямолинейных координат в эллиптические"[4]; "Attract. d'un couche mince sur un point de sa surface"[5]; "О решении одного вопроса механики, предложенного Абелем"[6]; "Доказательство Коши для уравнения равновесия"[7]; "Спрямление кривых линий"[8]; "Алгебраическое доказательство Гамильтонова начала"[9].) Поэтому далее подробно мы проанализируем его фундаментальный труд «Рациональная механика» [12]. Читая курс механики в С-Петербургском университете, Сомов разрабатывал изложение своих лекций рациональной механики, стараясь разъяснить теоретические основы, а также упростить доказательства многих предложений и приемов решения. Учебник Сомова предназначен студентам, изучающим физико-математические науки в университетах. Преподавание теоретической механики в классических (академических) школах, по мнению Сомова, должно быть направлено не только на ознакомление обучающихся с основными истинами, на которые опирается вся наука, но также и «изощрение учащихся в математическом анализе и геометрии» [12]. Математический анализ помогает раскрывать основные законы движения, а механика помогает развитию аналитических и геометрических методов исследования. История дифференциального и интегрального исчисления показывает, что механика была постоянно источником вопросов, для решения которых придумывали новые способы интегрирования функций и уравнений. Два внушительных тома Механики Эйлера фактически представляют сборники задач интегрального исчисления. В аналитической механике Лагранжа четко виден общий метод, следуя которому из одной формулы выводятся решения всех вопросов одного рода. Лекции по динамике Карла Якоби посвящены примерам, объясняющим способы интегрирования дифференциальных уравнений канонического вида и уравнений в частных производных первого порядка. Физико-математические исследования о гравитационных потенциалах, электричестве и магнетизме, теплоте, упругости, звуке, свете представляют собой учение о свойствах функций, их различных разложений в ряды и об интегрировании линейных уравнений в частных производных. Сомов глубоко чувствовал внутренние связи между анализом, геометрией, механикой и математической физикой, которые он убедительно продемонстрировал в своей «Рациональной механике».

Обобщая опыт предшествующих изложений об ускорениях высших порядков, Сомов выходит на более высокий уровень абстракций, дает формулу для дифференцирования геометрического произведения, аналогичную с формулой Лейбница для дифференцирования алгебраического произведения и показывает, как она применяется для определения проекций скоростей и ускорений на данных, неподвижных или подвижных осях. Среди прорывных достижений Сомова в «Рациональной механике» назовем распространение правила умножения двух алгебраических сумм на геометрические суммы, способы выражения геометрическими производными какой-либо переменной прямолинейной длины при помощи скорости и ускорения крайних точек, геометрическое дифференцирование по разным переменным и некоторые предложения, относящиеся к геометрическим вариациям. Из всех обобщений и аналогий Сомов составил принципиально новый метод для кинематических исследований, заменяющий прежние синтетические приемы и облегчающий значительно приложения анализа к кинематике. Огромным значением этого новаторского метода было то, что он позволял избегать длинных выкладок, обусловленных, нередко без необходимости, использованием прямолинейных координат.

Поворотным моментом в истории изложения механики явилось введение понятия градиента, или, как его сначала называли, дифференциального параметра. Впервые его рассмотрел Г. Ламе в своем Курсе [13] как

$$p = \sqrt{(\frac{dF}{dx'})^2 + (\frac{dF}{dy'})^2 + (\frac{dF}{dz'})^2} = \sqrt{(\frac{dF}{dx})^2 + (\frac{dF}{dy})^2 + (\frac{dF}{dz})^2}$$

«...общие выражения дифференциальных параметров. Стоит отметить, что эти параметры сохраняют тот же характер и ту же независимость, когда функции точки выражаются в криволинейных координатах.» («...Expressions générales des paramétres différentiels. Il s'agit de constater que ces paramétres conservent le même caractére et la même indépendance, quand les fonctions-de-point sont exprimées en coordonnées curvilignes»)

Сомов гениально обобщил понятие дифференциального параметра Ламе, придав ему роль универсальной характеристики.

Исключительно Сомову принадлежат формирование и изложение в анализе (теория поля) и механике таких понятий как линия уровня, поверхность уровня, потенциал.

Важным введением Сомова в приложении анализа к кинематике является прямой способ для определения дифференциальных параметров первого порядка от функции точки. Г. Ламе рассматривал дифференциальный параметр первого порядка функции точки как аналитическое выражение, в декартовых координатах [13]. Сомов представил дифференциальный параметр как отрезок, отложенный на нормали к поверхности уровня (касательной). Приняв такой геометрический образ параметра и, определив его независимо от системы координат как производную функции точки относительно перемещения нормального к поверхности уровня, Сомов показал прямой способ для выражения дифференциальных параметров первого и второго порядка и кривизны поверхности в каких либо координатных системах ортогональных или косоугольных. Этот способ составления дифференциальных параметров первого порядка охватывает все графические и аналитические способы для построения нормалей к поверхностям и кривым линиям. Сомов изложил его в 7-й главе своей Кинематики с новым развитием (после Ламе) и с приложением к определению координатных параметров наиболее типичных систем координат. Таким образом, Сомов придал дифференциальному параметру векторный смысл, что стало революционным поворотом в изложении механики.

Дифференциальный параметр второго порядка имеет большое значение во многих отраслях математической физики. Сомов излагает простой способ вывода уравнения теплопроводности с помощью дифференциальных параметров первого и второго порядка. Подробно находит выражения дифференциального параметра второго порядка в общих координатах. Для дальнейшего изложения приведем определение этого параметра, которое дает Сомов.

Дифференциальный параметр второго порядка функции φ, величина которой зависит от положения точки A и которая изменяется непрерывно, когда эта точка получает какое-либо перемещение, есть отношение кубического расширения дифференциала объема к соответствующему времени, при чем каждая точка этого объема перемещается со скоростью, которая по величине и по направлению равна дифференциальному параметру первого порядка функции φ.

$$\iiint \Delta_2\varphi \cdot dV = \int \frac{d\varphi}{dn} \cdot ds$$

$P\cos(Pn) = \dfrac{d\varphi}{dn}$ - дифференциальный параметр первого порядка функции φ, dn - толщина слоя, заключающегося между поверхностями уровней φ и $\varphi + d\varphi$.

Если φ - температура тела в точке (q_1, q_2, q_3) в момент времени t, то вторая часть уравнения, помноженная на коэффициент проводимости (q), и который предполагает постоянным, будет выражать количество теплоты, проходящей за время dt через поверхность тела, как входящей в тело, так и выходящей из него, разделенное на dt. Если первая часть последнего уравнения приведется к одному элементу $\Delta_2\varphi \cdot dV$, то количество теплоты будет равняться

$$c\rho\frac{d\varphi}{dt}dV,$$

c - удельный теплород (удельная теплоемкость), ρ - плотность тела. Таким образом

$$c\rho\frac{d\varphi}{dt}dV = q\Delta_2\varphi \cdot dV,$$

или

$$k\frac{d\varphi}{dt} = \Delta_2\varphi,$$

где $k = \dfrac{c\rho}{q}$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Сомов О.И. Прямой способ для выражения дифференциальных параметров первого или второго порядка в криволинейных координатах //Записки Императорской Академии наук. Санкт-Петербург: Типография Императорской Академии Наук. Т.8, кн.1. т. 1865г. Раздельная пагинация.

2. Сомов О.И. Об ускорении различных порядков в относительном движении //Записки Императорской Академии наук. Санкт-Петербург: Типография Императорской Академии Наук. Т.9, кн.1. т. 1865г. Раздельная пагинация.

3. Сомов О.И. Construct. des axes d'un ellipse //Записки Императорской Академии наук. Санкт-Петербург: Типография Императорской Академии Наук. Т.18, кн.1. т. 1870г. Раздельная пагинация.

4. Сомов О.И. Преобразование прямолинейных координат в эллиптические //Записки Императорской Академии наук. Санкт-Петербург: Типография Императорской Академии Наук. Т.10, кн.2. т. 1860г. Раздельная пагинация.

5. Сомов О.И. Attract. d'un couche mince sur un point de sa surface //Записки Императорской Академии наук. Санкт-Петербург: Типография Императорской Академии Наук. Т.19, кн.1. т. 1871г. Раздельная пагинация.

6. Сомов О.И. О решении одного вопроса механики, предложенного Абелем //Записки Императорской Академии наук. Санкт-Петербург: Типография Императорской Академии Наук. Т.9, кн.1. т. 1866г. Раздельная пагинация.

7. Сомов О.И. Доказательство Коши для уравнения равновесия//Записки Императорской Академии наук. Санкт-Петербург: Типография Императорской Академии Наук. Т.13, кн.1. т. 1869г. Раздельная пагинация.

8. Сомов О.И. Спрямление кривых линий //Записки Императорской Академии наук. Санкт-Петербург: Типография Императорской Академии Наук. Т.15, кн.1. т. 1869г. Раздельная пагинация.

9. Сомов О.И. Алгебраическое доказательство Гамильтонова начала//Записки Императорской Академии наук. Санкт-Петербург: Типография Императорской Академии Наук. Т.17, кн.1. т. 1870г. Раздельная пагинация.

10. Юлина. А.О. К истории задачи о вращении твердого тела около неподвижной точки в случае первоначального удара. // История науки и техники. 2021. 12. - С. 3-8.

11. Юлина А.О. История развития теории эллиптических функций в работах Абеля, Якоби, Вейерштрасса, Сомова. // Таврический вестник информатики и математики. 2021. 3. - С. 79-92.

12. Сомов О.И. Рациональная механика. Кинематика. С-Петербург. Типография Императорской Академии Наук. 1872г.-491 с.

13. Lame G. Lecons sur les coordonnees curvilignes. Paris. 1859.-410 P.

Секция 10. Алгебраическая теория чисел

УДК 511.32

Обобщение теоремы Лежандра о трёх квадратах

Х. Аль-Ассад (Сирия, г. Дамаск)
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
e-mail:1hbrh0@gmail.com

A generalisation of Legendre's three-square theorem

H. Al-Assad (Syria, Damascus)
Lomonosov Moscow State University
e-mail: 1hbrh0@gmail.com

1. Постановка задачи

Основной результат этой работы, теорема 2, приведенная ниже, был предложен с помощью компьютерных расчетов, выполненных Али Дибом (dib_a@spbstu.ru), Высшая школа управления кибер-физическими системами, Институт компьютерных наук и кибербезопасности, Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого (СПбПУ).

Теорема 1. *(Лежандр). Пусть m — целое положительное число. Уравнение*

$$m = x^2 + y^2 + z^2$$

имеет решение в $x, y, z \in \mathbb{Z}$ если и только если m удовлетворяет условию $m \neq 4^a(8b+7)$; $a, b \in \mathbb{Z}$, $a, b \geq 0$.

Теорема 2. *Пусть $m, m' \in \mathbb{Z}$ — пара положительных целых чисел, удовлетворяющих условиям теоремы Лежандра. Система*

$$q^2 m = a^2 + b_1^2 + c_1^2,$$

$$q^2 m' = a^2 + b_2^2 + c_2^2 \tag{1}$$

имеет решение в положительных q, a, b_1, b_2, c_1, c_2 тогда и только тогда, когда пара (m, m') не сравнима с $(0, 3)$ или $(3, 4)$ по модулю 8 и не сравнима ни с одной из

$$(0, 3 \cdot 2^{k-3}), (0, 3 \cdot 2^{k-2}), (0, 7 \cdot 2^{k-3}), (2^{k-3}, 3 \cdot 2^{k-2}), (5 \cdot 2^{k-3}, 3 \cdot 2^{k-2})$$

по модулю 2^k, для любого четного целого $k \geq 4$.

Более того, существует решение системы (2) такое, что q нечетно и взаимно просто с a.

2. Задача по модулю степени нечетного простого числа

Лемма 1. *Пусть p — нечетное простое число, а $k \geq 1$ — целое число. Система (1) разрешима по модулю p^k для всех m, m'.*

Предложение 1. *Если $m \not\equiv 0 \mod p$, то сравнение*

$$x^2 + y^2 \equiv m \mod p$$

разрешимо.

Дальше по индукции предполагаем, что система (1) разрешима по модулю p^{k-1}, так что

$$x^2 + y^2 \equiv m \mod p^{k-1} \implies x^2 + y^2 \equiv m + rp^{k-1} \mod p^k;\ 0 \leq r \leq p-1,$$

где, поскольку $m \not\equiv 0 \mod p$, можем считать, что $x \not\equiv 0 \mod p$.
Следовательно, берем $\tilde{r}$ — единственное решение сравнения

$$2x\tilde{r} \equiv -r \mod p.$$

3. Задача по модулю степени 2

Лемма 2. *Пусть $k \geq 3$ — целое число. Система (1) разрешима по модулю 2^k для всех m, m', за исключением тех исключений, которые указаны в формулировке теоремы 2.*

Здесь мы также действуем по индукции:

$$\begin{aligned} t^2 + x^2 + y^2 &\equiv m_0 + r2^{k-1} \mod 2^k, \\ t^2 + z^2 + w^2 &\equiv m_1 + s2^{k-1} \mod 2^k, \end{aligned} \tag{2}$$

где $r, s \in \{0, 1\}$.

4. Доказательство основного результата

Рассмотрим систему двух диагональных квадратичных форм с целыми коэффициентами

$$\begin{aligned} mu^2 - t^2 - x^2 - y^2 &= 0, \\ m'u^2 - t^2 - z^2 - w^2 &= 0. \end{aligned} \tag{3}$$

Лемма 3. *Пусть $f_i \in \mathbb{Z}_p[X_1, \ldots, X_h]$ — однородные многочлены с целыми $p-$адическими коэффициентами, и пусть $f_{i,k} \in (\mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z})[X_1, \ldots, X_h]$ обозначают их приведения по модулю p^k. Тогда f_i имеют общий нетривиальный нуль в $(\mathbb{Q}_p)^h$ тогда и только тогда, когда $f_{i,k}$ имеют общий примитивный нуль в $(\mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z})^h$ для всех $k > 1$.*

Теорема 3. *Пусть $\mathbb{K}$ — числовое поле и ϕ, ϕ_1, ϕ_2 — невырожденные бинарные квадратичные формы с коэффициентами из $\mathbb{K}$.*

Рассмотрим трехмерное $\mathbb{K}-$многообразие V в проективном пространстве $\mathbb{P}^5_{\mathbb{K}}$, заданное пересечением двух квадратных уравнений

$$\phi(u_1, v_1) = \phi_1(x, y),\ \phi(u_2, v_2) = \phi_2(x, y).$$

Предположим, что ϕ_1 или ϕ_2 анизотропны. Тогда если V имеет $\mathbb{K}_p$-ую точку для каждого пополнения $\mathbb{K}_p$ поля $\mathbb{K}$, то V имеет $\mathbb{K}$-ую точку.

Теорема 4. *(Давенпорт-Касселс). Пусть f — положительно определенная квадратичная форма от h переменных с целыми коэффициентами.*

Предположим, что для любого $(y_1, \ldots, y_h) \in \mathbb{Q}^h$ существует $(x_1, \ldots, x_h) \in \mathbb{Z}^h$ такое, что

$$f(\vec{x} - \vec{y}) < 1.$$

Тогда любое целое число, представимое f в $\mathbb{Q}$, представимое f в $\mathbb{Z}$.

Лемма 4. *Если целое число представляется в виде суммы двух рациональных квадратов, то оно представляется в виде суммы двух целых квадратов.*

5. Гипотезы для исследования

Основная тема исследования — минимальное значение q для данной пары (m, m'). В частности, для каких пар (m, m') минимальное значение q равно 1?

Таким образом, обозначим через $q(m, m')$ минимальное значение q для пары (m, m').

Пусть $x, y \in \mathbb{Z}; x > y \geq 0$ и рассмотрим последовательность $b_n = nx + y$.

Вычисления до $n = 10^9$ указывают на следующие гипотезы:

Гипотеза 2. *Пусть $x = 2^r, r \in \mathbb{Z}, r \geq 1$. Тогда:*
1. Если $y = 0$ или $y = 2^{r-1}$, то существует бесконечно много n таких, что $q(b_n, b_{n+1}) > 1$.
2. Иначе существует $N > 0$ такое, что $\forall n \geq N$, имеем $q(b_n, b_{n+1}) = 1$.

Гипотеза 3. *Пусть $x = 1$ or $x = 2^r \prod_{i=1}^{t} p_i^{r_i}, r, r_i \in \mathbb{Z}, r \geq 0, r_i \geq 0$, а $\{p_i\}$ — нечетные простые числа. Тогда:*
1. Если $2^r | y$, то существует бесконечно много n таких, что $q(b_n, b_{n+1}) > 1$.
2. Иначе существует $N > 0$ такое, что $\forall n \geq N$, имеем $q(b_n, b_{n+1}) = 1$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Knapp A. Advanced Algebra. — Birkhäuser Boston, 2006. — 730 pgs.
2. Serre J-P. A Course in Arithmetic. — Springer Verlag, New York, 1973. — 115 pgs.
3. Colliot-Thélène J.L., Sansuc J.J., Swinnerton-Dyer P. Intersections of two quadrics and Châtelet surfaces // Journal für die reine und angewandte Mathematik. — 1987. — V. 373. — P. 37-107.
4. Colliot-Thélène J.L., Coray D. Descente et principe de Hasse pour certaines variétés rationnelles // Journal für die reine und angewandte Mathematik. — 1980. — V. 320. — P. 150-191.
5. Salberger P. On the arithmetic of intersections of two quadrics containing a conic // arXiv:2305.02289 [math.NT].

Секция 11. Арифметическая и алгебраическая геометрии

УДК 512.772

Об одном классе взаимных расположений кубики и пары коник[1]

Г. М. Полотовский (Россия, г. Нижний Новгород)
Высшая школа экономики — Нижний Новгород
e-mail: polotovsky@gmail.com

About one class of mutual arrangements of cubic and pair of conics

G. M. Polotovskiy (Russia, Nizhny Novgorod)
Higher School of Economics — Nizhny Novgorod
e-mail: polotovsky@gmail.com

Пусть две коники в вещественной проективной плоскости $\mathbb{R}P^2$ пересекаются в четырех различных точках так, как показано на рис. 1, и нечетная ветвь M-кубики[1] пересекает границу модели проективной плоскости[2] один раз и пересекает каждую из коник в пяти точках на внешней дуге и в одной точке на внутренней дуге, т. е. общие точки кубики и коник распределены между дугами коник так, как показано на рис. 1. Какими с точностью до изотопии в $\mathbb{R}P^2$ бывают расположения кривых описанного вида?

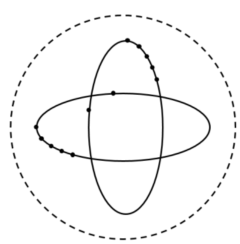

Рис. 1

Теорема 1. *Любая кривая степени 7, распадающаяся в произведение кубики и пары коник при указанных выше условиях, изотопна в $\mathbb{R}P^2$ одному из расположений, показанных на рис.* 2.

Доказательство проводится следующим образом.

Сначала с помощью несложных рассмотрений комбинаторного характера устанавливается, что имеются всего 9 попарно различных топологических моделей кривых, удовлетворяющих наложенным выше условиям и не противоречащих топологическим следствиям теоремы Безу и известным сведениям о взаимных расположениях коники и кубики.

[1]Исследование осуществлено в рамках Программы фундаментальных исследований НИУ ВШЭ.

[1] M-кривая степени 3 (M-кубика) состоит в $\mathbb{R}P^2$ из двух непересекающихся окружностей, одна из которых – нечетная ветвь – вложена в $\mathbb{R}P^2$ односторонне, а вторая – овал – двусторонне.

[2]В качестве модели $\mathbb{R}P^2$ будет использоваться круг, диаметрально противоположные точки границы которого считаются отождествлёнными.

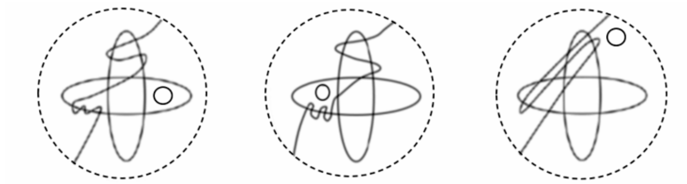

Рис. 2

Затем с помощью метода Оревкова [1], основанного на рассмотрении ассоциированных с этими моделями кос из 7 нитей, доказывается нереализуемость кривыми степени 7 шести из полученных на первом этапе девяти топологических моделей кривых.

Оставшиеся три модели реализуются кривыми степени 7 с помощью построений методом малого параметра.

Настоящая работа является продолжением довольно большое серии статей разных авторов о топологии вещественных распадающихся алгебраических кривых, начатой статьёй [2] (ссылки на работы по этой теме, опубликованные до 2020 года, приведены в [3]).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Orevkov S. Yu. Link theory and oval arrangements of real algebraic curves // Topology. 1999. V. 38, № 4. P. 779-810.

2. Полотовский Г. М. Каталог M-распадающихся кривых 6-го порядка // ДАН СССР. 1977. Том 236, № 3. С. 548-551.

3. Борисов И. М., Полотовский Г. М. О топологии плоских вещественных распадающихся кривых степени 8 // Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз. 2020. Том 176. С. 3-18.

Секция 12. Многомасштабное математическое моделирование в физике

УДК 537.86

К вопросу об эволюции пространственно квазимонохроматического начального возмущения при пучково-плазменной неустойчивости

Ю. В. Бобылев (Россия, г. Тула)
Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого
e-mail: bobylev.yu@mail.ru
В. А. Панин (Россия, г. Тула)
Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого
e-mail: panin@tspu.tula.ru

On the evolution of a spatially quasi-monochromatic initial perturbation under beam-plasma instability

Yu. V. Bobylev (Russia, г. Tula)
Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University
e-mail:bobylev.yu@mail.ru
V. A. Panin (Russia, г. Tula)
Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University
e-mail:panin@tspu.tula.ru

Одной из важных задач теоретической плазменной СВЧ электроники является изучение различных пучково–плазменных неустойчивостей, возникающих в волноводах с плазменным заполнением [1, 2]. Описанию процессов, протекающих в таких системах, посвящена многочисленная литература. При этом подробно исследуется как линейная стадия этих неустойчивостей — определяются различные режимы их развития и вычисляются соответствующие инкременты, так и нелинейная стадия, в рамках которой происходит стабилизация неустойчивости, обусловленная тем или иным фактором [1, 2]. Для описания же нелинейной стадии неустойчивости зачастую используются различные упрощающие предположения, существенно облегчающие вычисления, такие, например, как линейность плазмы, малость изменения скорости электронов пучка и т.д. В настоящей работе мы рассмотрим пучковую неустойчивость в плазме, без каких либо предварительных предположений такого вида, при этом плазма и пучок будут входить в теорию равноправно, что позволит описать все процессы, происходящие в такой системе при эволюции изначально созданных в ней возмущений.

Будем исходить из следующей достаточно общей математической модели пучково-плазменной системы, которой присущи все наиболее характерные черты явления пучковой неустойчивости в плазме. Рассмотрим цилиндрический металлический волновод с произвольным односвязным поперечным сечением, в котором находятся бесконечно тонкие в поперечном сечении (“игольчатые”) нерелятивистский электронный пучок и плазма, при этом движение тяжёлых ионов вообще не учитывается. Волновод помещён в продольное сильное внешнее магнитное поле, препятствующее поперечным движениям электронов пучков.

В случае нерелятивистского пучка в плазме будут возбуждаться потенциальные (электростатические) возмущения, для описания которых нужно использовать уравнение Пуассона для скалярного потенциала и кинетическое уравнение Власова с самосогласованным полем.

Не воспроизводя здесь вывода, подробности которого, можно найти, например, в [1], приведём окончательный результат:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 y_p}{\partial \tau^2} &= -\frac{i}{2}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{a_n}{n}[(\rho_{pn}+\nu q_n\rho_{bn})exp(iny_p)-k.c.],\\
\frac{\partial^2 y_b}{\partial \tau^2} &= -\frac{i}{2}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{a_n}{n}[(q_n\rho_{pn}+\nu\rho_{bn})exp(iny_b)-k.c.].
\end{aligned}
\tag{1}
$$

Здесь $\tau = \omega_p t$ и $y_\alpha = k_z z_\alpha$ — безразмерные время и координата (z_α — координаты частиц в продольном направлении волновода); α — сорт частиц ($\alpha = p$ — электроны плазмы; $\alpha = b$ — электроны пучка); $k_z = 2\pi/L$ — основное продольное волновое число (предполагается, что начальное возмущение в рассматриваемой системе имеет характерный продольный размер L); $\nu = \omega_b^2/\omega_p^2 = n_b/n_p$ ($\omega_\alpha = \sqrt{4\pi e^2 n_\alpha/m_\alpha}$ — ленгмюровские частоты частиц сорта α, n_α — их невозмущённые плотности); u — начальная скорость электронов пучка; a_n и q_n — безразмерные геометрические параметры, причём физический смысл a_n состоит в том, что они определяют дисперсию плазменных и пучковых волн, а q_n определяют степень связи пучковой и плазменной подсистем, при этом в общем случае выполняется неравенство $0 < q_n < 1$, а $q_n = 1$ соответствует совпадению местоположения пучков [2]; $\rho_{\alpha n}$ — амплитуды гармоник плотностей пучка и плазмы, даваемые выражениями

$$
\rho_{\alpha n} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} exp(-iny_\alpha)dy_0, \quad (\alpha = p, b). \tag{2}
$$

Уравнения (1) представляют собой уравнения движения электронов пучка и плазмы, в правые части которых входят поля, выраженные через заряды с помощью уравнения Пуассона. Эти уравнения должны быть дополнены соответствующими начальными условиями на координаты и скорости электронов. Возьмём данные условия в таком виде:

$$
y_p(0) = y_0, \quad \frac{dy_p}{d\tau}(0) = 0, \quad y_b(0) = y_0 + \sum_n b_n cos(ny_0+\zeta_n), \quad \frac{dy_b}{d\tau}(0) = \frac{k_z u}{\omega} \equiv \Delta. \tag{3}
$$

Первое условие в (3) означает, что электроны плазмы в начальный момент равномерно распределены в пространстве (т.е. плазма не замодулирована); второе условие означает, что начальная скорость электронов плазмы равна нулю. Третье условие в (3) означает, что пучок промодулирован по плотности, причём глубина модуляции на n – ой гармонике пропорциональна $b_n(\mid b_n \mid << 1)$, а ζ_n — начальные фазы, последнее условие в соотношениях (3) означает, что в начальном состоянии все электроны пучка имеют скорость u в чём легко убедиться из определений безразмерных величин τ и y_b.

В зависимости от количества слагаемых, содержащихся в сумме по n в (3) различают три варианта начальных условий [2]. А именно, если в этой сумме будет отлично от нуля только малое число (несколько единиц) соседних слагаемых (или даже только одно такое слагаемое), то этот вариант соответствует задаче об эволюции пространственно квазимонохроматического начального возмущения. Второй вариант, когда в сумме по n отлично от нуля большое число (несколько десятков) слагаемых, но все фазы ζ_n одинаковы, например, равны нулю, соответствует задаче об эволюции немонохроматического регулярного начального возмущения. Третий вариант соответствует шумовому начальному возмущению. При этом в сумме по n содержится большое число слагаемых, но фазы ζ_n являются случайными числами из диапазона от 0 до 2π. В настоящей работе мы ограничимся рассмотрением первого варианта начальных условий.

Для лучшего уяснения смысла параметров и порядков величин нашей задачи, приведём основные результаты линейного анализа уравнений (1) [2]. В зависимости от значения параметра связи q_n пучковая неустойчивость может развиваться в следующих режимах. При совпадении частот плазменной и пучковой волн реализуется коллективный резонанс волна – волна. При этом $q_n << 1$, а номера волн, находящихся в этом резонансе, определяются из уравнения:

$$n\Delta = \sqrt{a_n}(1 + \sqrt{\nu}) \tag{4}$$

При совпадении частоты плазменной волны с частотой $nk_z u$, или в безразмерной форме $n\Delta$, в системе реализуется одночастичный резонанс волна-частица. При этом $q_n = 1$, а номер плазменной волны, находящейся в одночастичном резонансе, отличается от (4) отсутствием слагаемого $\sqrt{\nu}$.

Для численного решения системы уравнений (1)-(3) выберем следующие значения параметров: $\nu = 10^{-2}$; все $a_n = 1$; при рассмотрении одночастичного эффекта Черенкова, будем полагать $q_n = 1$, а при коллективном эффекте $q_n = 1/2$; параметр Δ в (3), можно определять из условия (4), задавая номер резонансной моды n.

Рассмотрение численных решений начнём с одночастичного эффекта Черенкова при резонансе пучка с первой ($n = 1$) пространственной гармоникой плазменных колебаний, при этом из (3) имеем $\Delta = 1.0945$. В суммах по n в уравнениях (1) и условиях (3) пока оставим только первые пять слагаемых, что соответствует задаче об эволюции пространственно квазимонохроматического начального возмущения, при этом положим $b_1 = 0,01; b_n = 0 (n \geq 2)$. Заметим, что модуляция в начальный момент времени всех пространственных гармоник практически не влияет на последующую динамику неустойчивости, поскольку основной является первая, резонансная гармоника, а гармоники с $n = 2 \div 5$ могут стать существенными из-за их нелинейной генерации.

На рис. 1 изображены временная динамика амплитуд первой, второй и пятой гармоник возмущения плотности электронов пучка ρ_{bn} и плазмы ρ_{pn}.

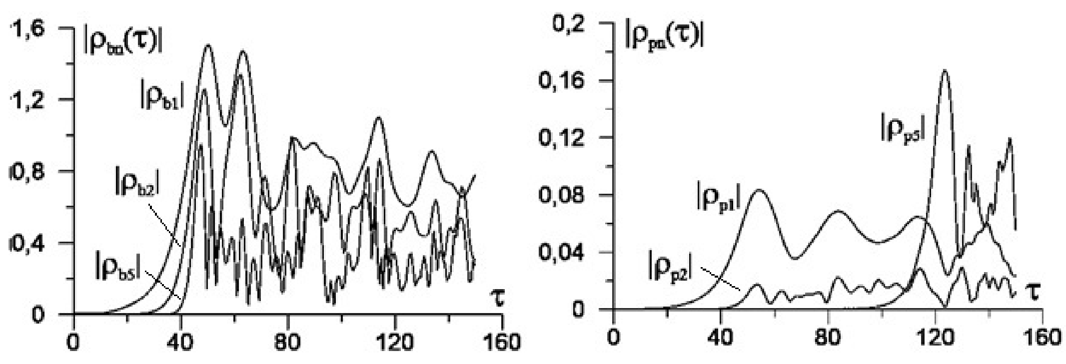

Рис. 1: Временная динамика амплитуд первой, второй и пятой гармоник возмущения плотности электронов пучка $\mid \rho_{bn} \mid$ (слева) и плазмы $\mid \rho_{pn} \mid$ (справа).

Приведённые на рис. 1 зависимости соответствуют общепринятой теории, описывающей стабилизацию неустойчивости пучка в плазме при одночастичном эффекте Черенкова за счёт захвата электронов пучка плазменной волной [1]. Данный вывод также подтверждается динамикой электронов пучка и плазмы на соответствующих фазовых плоскостях. Эти зависимости, имеющие достаточно стандартный вид, мы здесь приводить не будем, а остановимся на вопросе о частотном (или временном) спектре возбуждаемых колебаний, Введём функции

$$\rho_{\alpha n}(\Omega) = \left| \int_0^\tau \rho_{\alpha n}(\tau') exp(i\Omega\tau') d\tau' \right|, \tag{5}$$

определяющие спектральную плотность пространственных гармоник пучковых и плазменных колебаний. На Рис.2 представлены спектральные плотности гармоник плазмы для $n = 1{,}2{,}5$ в моменты времени $\tau_1 = 50$, $\tau_2 = 60$, $\tau_3 = 85$, $\tau_4 = 120$. Из этих графиков видно, что спектр первой пространственной гармоники весьма узок и имеет резкий максимум при $\Omega \approx 1$, что соответствует её резонансному возбуждению пучком. Однако со временем (начиная с $\tau_2 = 60$) в спектре первой гармоники присутствуют ещё два заметных максимума, появление которых является следствием известной сателлитной неустойчивости [1].

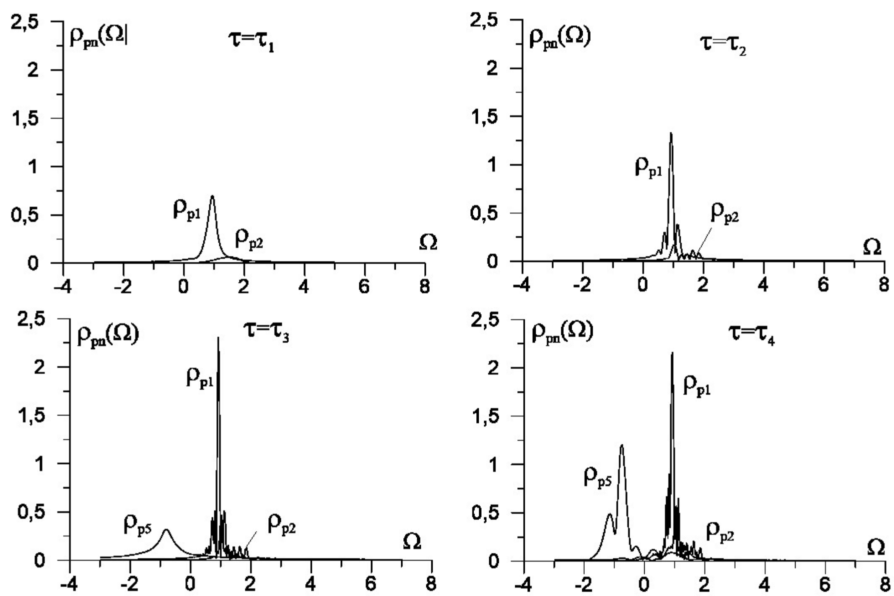

Рис. 2: Спектральные плотности гармоник плазмы $\rho_{pn}(\Omega)(n = 1, 2, 5)$

Из рис. 2 также видно, что и вторая, существенно менее интенсивная по сравнению с резонансной, пространственная гармоника также имеет максимум в районе плазменной частоты, или $\Omega \approx 1$, что свидетельствует о нелинейности плазмы. Другие максимумы в спектре второй гармоники обусловлены нелинейностью пучка. Наиболее интересен спектр пятой пространственной гармоники. А именно, из рис. 2 при $\tau_3 = 85$ видно, что максимум спектральной плотности данной гармоники приходится на отрицательную частоту $\Omega \approx -1$ (или $\omega = -\omega_p$). Пространственной гармонике с таким спектром соответствует плазменная волна, распространяющаяся навстречу пучку. Появление в спектре плазменных волн такой составляющей свидетельствует о перекачке энергии плазменных колебаний в коротковолновую часть спектра, обусловленную индуцированным рассеянием плазменных волн на медленных электронах плазмы [1]. Появление на более поздних временах ($\tau_4 = 120$) дополнительных максимумов в спектре данной гармоники является, как и в случае второй гармоники, следствием нелинейности пучка. Помимо отмеченных особенностей в спектрах плазменных волн при развитии неустойчивости в режиме одночастичного эффекта Черенкова, интересные особенности наблюдаются и при развитии неустойчивости в коллективном режиме, рассмотрению которого мы предполагаем посвятить последующие работы.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кузелев М. В., Рухадзе А. А., Стрелков П. С. Плазменная релятивистская СВЧ-электроника. — М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2002. 544с.

2. Бобылёв Ю. В., Кузелев М. В., Панин В. А. Методы теоретической плазменной СВЧ–электроники // В Сборнике научных трудов, посвящённом 70-летию А.А. Рухадзе, Издат. ТГПУ, 2000, С.42-114.

УДК 550.34.013

Высокопроизводительные системы в задачах обработки сейсмических данных

Ю. В. Бурцева (Россия, г. Тула)
Тульский филиал Финансового университета при Правительстве Российской Федерации
e-mail: burcevajulia1@gmail.com

High-performance systems for seismic data processing tasks

Yu. V. Burtseva (Russia, Tula)
Financial University under the Government of the Russian Federation (Tula Branch)
e-mail: burcevajulia1@gmail.com

Для современной индустрии сейсморазведки важной задачей является разработка систем для сбора, хранения и анализа геофизической информации, обеспечивающий максимальный охват исследуемых областей, что приводит к все более и более возрастающему объему исходных данных [[1],[2]], требующий для обработки и анализа применения высокопроизводительных систем. В настоящий момент в России проектирование, разработка, использование таких систем сталкивается с рядом проблем, связанных как с самим оборудованием так и с программным обеспечением [[3]].

Поскольку объемы сейсмических данных могут достигать терабайта, то для их обработки необходимы значительные вычислительные мощности поэтому рассмотрим существующие высокопроизводительные системы и тенденции в их развитии. Согласно актуальному списку Топ-500 [[5]], самых мощных высокопроизводительных систем, сейчас преобладает гибридная архитектура кластера – узлы, как с центральными процессорами, так и с графическими ускорителями. Подобная архитектура накладывает определенные ограничения на класс решаемых задач в силу своих особенностей. Межпроцессорное взаимодействие, которое, с одной стороны, позволяет разделить вычислительную нагрузку и данные между разными вычислительными узлами, но при этом приводит к накладным расходам, связанным с передачей данных по сети. Следовательно, если исходная задача не распадается на набор независимых подзадач, то межпроцессорное взаимодействие может свести на нет все преимущества от использования вычислительного кластера. Приходится использовать либо максимально простые алгоритмы в рамках множества независимых подзадач, причем каждый узел будет выполнять свою часть работы, а сетевое взаимодействие будет сведено к минимуму, либо работать с крайне вычислительно сложными алгоритмами, чтобы процесс передачи данных был незначителен по сравнению с временем расчетов. Когда речь заходит о графических ускорителях и многопроцессорных системах, таких как Intel Xenon Phi или современных процессоров от AMD, следует использовать вычислительные алгоритмы, ориентированные на так называемую «массивную» параллельность, что приводит к отказу от рекурсий и сложных зависимостей по данным, вызывая переход к более трудоемким (из-за объемов), но простым по структуре операциям. Для иллюстрации рассмотрим следующий простой пример: необходимо получить скользящее среднее в окне размером в M элементов в массиве из N элементов. Не сложно посчитать, что, используя простейшую рекурсию, объем вычислительных операций будет составлять примерно (зависит от четности/нечетности M): 2*(N-M+1). При этом отказавшись от рекурсии, мы получим (с учетом суммирования 0 в крайних отсчетах): N*M операций. Не учитывая накопление ошибки, которое свойственно некоторым рекурсивным алгоритмам, остановимся на высокопроизводительных системах схожих по архитектуре с графическими ускорителями. Очевидно, что рекурсивный алгоритм не будет работать в параллельном режиме и время его выполнения будет напрямую связано с числом операций, а вот решение без рекурсии прекрасно делится на число вычислителей (Np), если оно меньше, чем N. В нашем примере положим M«N, Np <N, M«Np (короткое окно и множество независимых вычислителей). Время выполнения рекурсивного метода можно примерно оценить в числе операций как: 2N, а массивно-параллельного как: N*M/Np, что значительно быстрее. Следует отметить, что так как сейсмические данные имеют очень большой объем, то работа с сопроцессорами (такими как графические карты) дополнительно усложняется серьезным ограничением в размерах оперативной памяти таких устройств.

Важнейшей, и по факту основной, задачей геофизических исследований является восстановления внутреннего строения земных недр на основе сейсмических наблюдений на поверхности [[4]]. Изучая эту задачу, с алгоритмической точки зрения, мы приходим к решению так называемой задаче полноволновой инверсии поля [[6]]. Конечно, подобные задачи встречаются не только в сейсмике, но и в медицине или промышленности, поэтому подобные математические модели могут быть использованы и в других областях. Для решения задачи полноволновой инверсии поля необходимо многократно решать прямую задач – задачу моделирования распространения волн в среде, а затем при помощи многокритериальной оптимизации уточнять текущую модель данных, чтобы привести результат моделирования к реальным полевым наблюдениям. Рассмотрим несколько современных подходов к решению прямой задачи. В целом их можно разделить на два класса: численное моделирование [[7]] и лучевая томография [[8]]. Начнем с численного моделирования. В этом случае необходимо решить волновое уравнение – линейное гиперболическое дифференциальное уравнение в частных производных. Наиболее простыми для реализации на высокопроизводительных системах являются методы конечных разностей и конечных объемов. Подобные подходы, однако, накладывают ограничения на размер сетки/ячейки, что приводит к очень большой, как вычислительной нагрузке, так и затрат по памяти при использовании постоянной сетки. Таким образом организация сгущающихся (самосгущающихся) сеток – одно из текущих направлений исследования в этой области. Благодаря таким подходам можно обслуживать сложные мелкомасштабные вкрапления в сплошной среде, практически не теряя в общей производительности. А основной проблемой остается большой объем передоваемых данных между вычислителями, зависящий от порядка численной схемы. Томография, в свою очередь, опирается на лучевые методы, которые страдают от постепенной потери освещенности (выпущенный веер лучей из одной точки постепенно «разбегается», что приводит к тому, что не все точки модели будут вступать с ними в контакт), таким образом приходится существенно повышать число испускаемых лучей и, дополнительно, требует специальную подготовку данных, т.к. требуется перейти от сейсмических трасс – к импульсным трассам. Кроме того, решать задачу приходится «послойно», т.к. одновременная корректировка всех глубинных слоев крайне сложна. При таком подходе каждый вычислитель берет на себя свой независимый набор лучей, что исключает межпроцессорное взаимодействие, оставляя его лишь для конечной фазы, когда результаты моделирования будут агрегироваться. Оба этих алгоритма достаточно хорошо ложатся на архитектуру современных высокопроизводительных систем, позволяя решать эту задачу практически независимо в рамках сейсмограмм общего пункта приема или общего пунктов взрыва. Однако, даже при таком разделении, они все еще являются вычислительно сложными. Естественно, кроме задачи волнового моделирования при обработке сейсмических данных возникает и множество других подзадач, например, шумоподавления, тем не менее заметим, что многие из них схожи с задачами обработки изображений, что позволяет использовать и схожие методы, таким образом в данный момент одним из направлений исследований является возможность применения искусственного интеллекта для этих решения.

Задачи обработки сейсмических данных требуют применения высокопроизводительных систем как из-за огромного объема входных данных, так и из-за высокой вычислительной сложности. Впрочем, особенности представления данных, полученных в ходе полевых наблюдений, позволяют эффективно решать их с использованием современных вычислительных кластеров, пусть и не все алгоритмы могу полностью задействовать многопроцессорные системы, в частности графические ускорители. Текущие тенденции в развитии суперкомпьютеров требуют от разработчиков максимально задействовать такие вычислители, так как именно они становятся доминирующими.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Global Market Size, Forecast, and Trend Highlights Over 2024-2036. Отчет компании Research Nester [Электронный ресурс].

   Режим доступа: https://www.researchnester.com/reports/seismic-survey-market/3590.

2. Seismic Survey Global Market Report 2024. Отчет компании The Business [Электронный ресурс], Режим доступа: https://www.thebusinessresearchcompany.com/report/seismic-survey-global-market-report.

3. Мануков В.С. Актуальные проблемы в наземной и скважинной сейсморазведке и пути их решения // Экспозиция Нефть Газ. 2015. №6 (45).

4. Nazmul Haque Mondol, Knut Bjørlykke. Seismic Exploration // Petroleum Geoscience. 2010. pp. 375-402.

5. Топ-500. Актуальная информация по современным суперкомпьютерам [Электронный ресурс], Режим доступа: https://www.top500.org/.

6. Oscar Calderon Agudo, Tenice Nangoo, Tatiana Kalinicheva. Chapter 11 - Full-waveform inversion of seismic data // Interpreting Subsurface Seismic Data. 2022. pp. 321-362.

7. Kaltenbacher, M. Fundamental Equations of Acoustics // Computational Acoustics. CISM International Centre for Mechanical Sciences. Vol 579. 2018.

8. Andreas Fichtner, Brian L. N. Kennett, Victor C. Tsai, Clifford H. Thurber, Arthur J. Rodgers, Carl Tape, Nicholas Rawlinson, Roger D. Borcherdt, Sergei Lebedev, Keith Priestley, Christina Morency, Ebru Bozdağ, Jeroen Tromp, Jeroen Ritsema, Barbara Romanowicz, Qinya Liu, Eva Golos, Fan-Chi Lin. Seismic Tomography 2024 // Bulletin of the Seismological Society of America. 2024. pp. 1-29.

УДК 534.2

Приближенное решение методом коллокаций задачи рассеяния звуковой волны составным жидким телом произвольной формы[1]

Д. В. Горбачев (Россия, г. Тула)
Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого
e-mail: dvgmail@mail.ru
Д. Р. Лепетков (Россия, г. Тула)
Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого
e-mail: lepetckov@ya.ru

Approximate solution using the collocation method for the problem of sound wave scattering by a compound liquid body of arbitrary shape

D. V. Gorbachev (Russia, Tula)
Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University
e-mail: dvgmail@mail.ru
D. R. Lepetkov (Russia, Tula)
Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University
e-mail: lepetckov@ya.ru

В неограниченной области $\Omega_0 \subset \mathbb{R}^3$, заполненной идеальной жидкостью с плотностью ρ_0, скоростью звука c_0 и волновым числом $k_0 = \omega/c_0$, находится включение в виде тела $\Omega_1 \subset \Omega_0$, заполненного другой идеальной жидкостью с параметрами ρ_1, c_1, $k_1 = \omega/c_1$. В Ω_0 распространяется плоская гармоническая звуковая волна с потенциалом скорости $\Psi_{\mathrm{i}}(x) = e^{ik_0 x\cdot d}$, где $x \in \mathbb{R}^3$, $d \in \mathbb{S}^2$ — единичный направляющий вектор.

В результате рассеяния волны Ψ_{i} включением Ω_1 образуются два вторичных звуковых поля: рассеянная в Ω_0 волна с потенциалом Ψ_{s} и поле звуковых колебаний в Ω_1 с потенциалом скорости звуковых колебаний Ψ_1 [5, 1]. Требуется найти потенциал рассеянной волны Ψ_{s}.

Данная задача изучалась для тел Ω_1 канонической формы, например, шара, где известно аналитическое решение. Мы рассматриваем случай произвольного тела Ω_1, поверхность которого приближенно задается треугольной 3D-сеткой — треугольным мешем. Такой способ задания часто возникает в инженерных приложениях. Для решения данной задачи применяется метод граничных элементов с комбинированным интегральным уравнением Бертона–Миллера, что решает проблему неустойчивости решения. Приближенное решение находится методом коллокаций по вершинам меша. Для приближенного интегрирования мы применяем масс-формулу — квадратурную формулу с узлами в вершинах меша и весами, равными площадям ячеек Вороного. Она имеет первый порядок точности, что достаточно для используемой кусочно-линейной аппроксимации потенциалов.

Пусть $S = \partial\Omega_1$, $n = n_x$, $x \in S$, — внешняя нормаль, $G_k(x, y) = (4\pi r)^{-1} e^{ikr}$, $r = |x - y|$, — функция Грина, $\Psi_0 = \Psi_{\mathrm{i}} + \Psi_{\mathrm{s}}$. Для $x \in \Omega_0$ имеем интегральные уравнения метода граничных элементов [3]

$$C(x)\Psi_0(x) = \int_S [\partial_{n'} G_{k_0}(x', x)\Psi_0(x') - G_{k_0}(x', x)\partial_{n'}\Psi_0(x')]\, dx' + \Psi_{\mathrm{i}}(x), \tag{1}$$

[1] Работа выполнена в рамках государственного задания Министерства просвещения РФ соглашение № 073-00033-24-01 от 09.02.2024 тема научного исследования «Теоретико-числовые методы в приближенном анализе и их приложения в механике и физике».

$$(C(x)-1)\Psi_1(x)=\int_S[\partial_{n'}G_{k_1}(x',x)\Psi_1(x')-G_{k_1}(x',x)\partial_{n'}\Psi_1(x')]\,dx', \tag{2}$$

где $dx'=dS(x')$, $n'=n_{x'}$, $C(x)$, $x\in S$, — положительный кусочно-постоянный геометрический коэффициент ($C(x)=1/2$ в точках гладкости S), $C(x)=0$ внутри Ω_1 и $C(x)=1$ снаружи Ω_1.

Для нахождения неизвестных граничных потенциалов присоединяем граничные условия

$$\rho_0\Psi_0(x)=\rho_1\Psi_1(x),\quad \partial_n\Psi_0(x)=\partial_n\Psi_1(x),\quad x\in S.$$

Как показано в [3] решение граничного уравнения (1) неединственно, если $-k_0^2$ — собственной значение оператора Лапласа для внутренней задачи. В этом случае численное решение неустойчиво. Чтобы избежать этого применяется метод Бертона–Миллера [3], который состоит во введении комбинированного уравнения. Оно получается дифференцированием тождества (1) по нормали, умножением его на комплексный параметр α и прибавлением к (1):

$$C(x)T_\alpha(\Psi_0(x))=\int_S[T_\alpha(\partial_{n'}G_{k_0}(x',x))\Psi_0(x')-T_\alpha(G_{k_0}(x',x))\partial_{n'}\Psi_0(x')]\,dx'+T_\alpha(\Psi_{\mathrm{i}}(x)),$$

где $T_\alpha(f)=f+\alpha\partial_n f$. Обычно полагают $\alpha=i/k_0$, что обосновывается модельным случаем шара. К уравнению (1) метод Бертона–Миллера не применяем.

Поверхностные интегралы с функцией Грина G_k сингулярные, так как $G_k(x',x)=O(r^{-1})$ и в точках гладкости поверхности $\partial_{n'}G_k(x',x)=O(r^{-1})$, $\partial^2_{n,n'}G_k(x',x)=O(r^{-2})$. Поэтому требуется регуляризация. Это делается на основе тождеств для статической функции Грина G_0, что влечет

$$\int_S\partial_{n'}G_k(x',x)\Psi(x')\,dx'=\int_S[\partial_{n'}G_k(x',x)\Psi(x')-\partial_{n'}G_0(x',x)\Psi(x)]\,dx'-C(x)\Psi(x), \tag{3}$$

$$\begin{aligned}\int_S\partial^2_{n,n'}G_k(x',x)\Psi(x')\,dx'=\int_S[\partial^2_{n,n'}G_k(x',x)\Psi(x')-\partial^2_{n,n'}G_0(x',x)L_\Psi(x',x)]\,dx'\\+\int_S\partial_nG_0(x',x)\nabla_S\Psi(x)\cdot n'\,dx',\end{aligned} \tag{4}$$

где $L_\Psi(x',x)=\Psi(x)+\nabla_S\Psi(x)\cdot(x'-x)_n$, $(x)_n=x-(x\cdot n)n$ — проекция вектора на касательную плоскость, $\nabla_S\Psi=(\nabla\Psi)_n$ — поверхностный градиент.

На поверхности S задача сводится к системе из двух граничных интегральных уравнений, если положить $\Psi_1=(\rho_0/\rho_1)\Psi_0$, $\partial_n\Psi_0=\partial_n\Psi_1$. Отсюда получаем следующее утверждение.

Предложение 1. *Пусть $x\in S$. Для неизвестных Ψ_0, $\partial_n\Psi_1$ имеем*

$$C(x)(\Psi_0(x)+\alpha\partial_n\Psi_1(x))=\int_S[T_\alpha(\partial_{n'}G_{k_0}(x',x))\Psi_0(x')-T_\alpha(G_{k_0}(x',x))\partial_{n'}\Psi_1(x')]\,dx'+T_\alpha(\Psi_{\mathrm{i}}(x)),$$

$$(C(x)-1)(\rho_0/\rho_1)\Psi_0(x)=\int_S[\partial_{n'}G_{k_1}(x',x)(\rho_0/\rho_1)\Psi_0(x')-G_{k_1}(x',x)\partial_{n'}\Psi_1(x')]\,dx',$$

где для вычисления сингулярных интегралов применяется регуляризация (3), (4).

Гладкость класса $C^{1,\beta}$ и единственность решения задачи получается аналогично [4]. Потенциал рассеянной волны во внешности Ω_1 вычисляется по формуле

$$\Psi_{\mathrm{s}}(x)=\int_S[\partial_{n'}G_{k_0}(x',x)\Psi_0(x')-G_{k_0}(x',x)\partial_{n'}\Psi_1(x')]\,dx',\quad x\in\Omega_0\setminus(\Omega_1\cup S).$$

Для валидации численного метода на основе предложения 1 мы использовали аналитическое решение для случая единичного шара $\Omega_1=\{x\in\mathbb{R}^3\colon |x|=1\}$. Оно было получено на основе представлений $\Psi_{\mathrm{i}}(x) = \sum_{l=0}^{\infty} \gamma_l j_l(k_0 r) P_l(d\cdot\hat{x})$, $\gamma_l = (2l+1)i^l$, $\Psi_0(x) = \sum_{l=0}^{\infty} U_l P_l(d\cdot\hat{x})$, $U_l = \gamma_l j_l(k_0) + A_l h_l(k_0)$, $\partial_n \Psi_1(x) = \sum_{l=0}^{\infty} V_l P_l(d\cdot\hat{x})$ и сферического разложения Джексона для функции Грина

$$G_k(x',x) = ik\sum_{l=0}^{\infty} \frac{2l+1}{4\pi}\, j_l(kr_<)h_l(kr_>)P_l(\hat{x'}\cdot\hat{x}),$$

где $r_< = \min(r,r')$, $r_> = \max(r,r')$, $r=|x|$, $r'=|x'|$, $\hat{x}=x/|x|$, j_l и h_l — сферические функции Бесселя и Ганкеля соответственно, P_l — многочлены Лежандра. Имеем

$$A_l = -\gamma_l\,\frac{k_0 j_l'(k_0)j_l(k_1)\rho_1 - k_1 j_l'(k_1)j_l(k_0)\rho_0}{k_0 h_l'(k_0)j_l(k_1)\rho_1 - k_1 j_l'(k_1)h_l(k_0)\rho_0}.$$

В численной реализации предполагается, что поверхность S аппроксимирована равномерным треугольным мешем из вершин $\{x_i\}_{i=1}^N \subset \mathbb{R}^3$ с нормалями $\{n_i\}_{i=1}^N \subset \mathbb{S}^2$. Для приближенного вычисления интегралов по поверхности применяется формула $\int_S f(x)\,dx \approx \sum_{i=1}^N w_i f(x_i)$, где w_i — площади ячеек Вороного с центрами в вершинах x_i, на которые разбивается меш.

В данной ситуации для решения задачи удобно использовать метод коллокаций. Сопоставим (x,n,x',n') с (x_i,n_i,x_j,n_j) и положим $f^{(i)} = f(x_i)$, $f^{(i,j)} = f(x_i,x_j)$. Тогда дискретная версия задачи из предложения 1 с учетом регуляризации записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} C^{(i)}(\Psi_0^{(i)} + \alpha\partial_{n_i}\Psi_1^{(i)}) &= \sum_{j=1}^N w_j[\partial_{n_j}G_{k_0}^{(j,i)}\Psi_0^{(j)} - T_\alpha(G_{k_0}^{(j,i)})\partial_{n_j}\Psi_1^{(j)}] + T_\alpha(\Psi_{\mathrm{i}}^{(i)}) \\ &+ \alpha\sum_{j=1}^N w_j[\partial^2_{n_i,n_j}G_{k_0}^{(j,i)}\Psi_0^{(j)} - \partial^2_{n_i,n_j}G_0^{(j,i)}L_{\Psi_0}^{(j,i)} + \partial_{n_i}G_0^{(j,i)}\nabla_S\Psi_0^{(i)}\cdot n_j], \quad (5)\end{aligned}$$

$$(2C^{(i)}-1)R\Psi_0^{(i)} = \sum_{j=1}^N w_j[\partial_{n_j}G_{k_1}^{(j,i)}R\Psi_0^{(j)} - \partial_{n_j}G_0^{(j,i)}R\Psi_0^{(i)} - G_{k_1}^{(j,i)}\partial_{n_j}\Psi_1^{(j)}], \quad (6)$$

где $R=\rho_0/\rho_1$, $T_\alpha(G_{k_0}^{(j,i)}) = G_{k_0}^{(j,i)} + \alpha\partial_{n_i}G_{k_0}^{(j,i)}$, $T_\alpha(\Psi_{\mathrm{i}}^{(i)}) = \Psi_{\mathrm{i}}^{(i)} + \alpha\partial_{n_i}\Psi_{\mathrm{i}}^{(i)}$, $L_{\Psi_0}^{(j,i)} = \Psi_0^{(i)} + \nabla_S\Psi_0^{(i)}\cdot(x_j-x_i)_{n_i}$. Для оценки поверхностного градиента используется $L_{\Psi_0}^{(i',i)} \approx \Psi_0^{(i')}$ для вершин $x_{i'}$, близких к x_i. Тогда имеем систему $(x_{i'}-x_i)_{n_i}\cdot\nabla_S\Psi_0^{(i)} = \Psi_0^{(i')} - \Psi_0^{(i)}$, $i'\in R_i$, где R_i — множество индексов вершин, соседних с x_i. Ее можно представить в виде $Ug=f$, где $g=\nabla_S\Psi_0^{(i)}$ — неизвестный вектор. Система переопределенная, поэтому $g=U^+f$, где U^+ — псевдообратная матрица. В итоге, приходим к следующему утверждению.

Предложение 2. *Неизвестные значения $\Psi_0^{(i)}$, $\partial_{n_i}\Psi_1^{(i)}$, $i=1,\ldots,N$, находятся из системы линейных уравнений размера $2N$, получаемой из уравнений* (5), (6).

Обоснование сходимости метода коллокаций можно провести по аналогии с [2]. Ключевую роль играют единственность и липшицева $C^{1,\beta}$-гладкость решения, а также оценки интегралов со слабо сингулярным ядром. Для приближенного вычисления потенциала рассеянной волны используем вытекающую из (1) формулу

$$\Psi_{\mathrm{s}}(x) \approx \sum_{j=1}^N w_j[\partial_{n_j}G_{k_0}(x_j,x)\Psi_0^{(j)} - G_{k_0}(x_j,x)\partial_{n_j}\Psi_1^{(j)}],$$

где x лежит снаружи меша в дальней зоне.

Представляемый метод был протестирован на разных мешах. Он имеет определенные преимущества перед методом конечных элементов, адаптированным для акустических задач [1], в частности, в скорости решения (на порядок меньше).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Скобельцын С.А. Некоторые обратные задачи дифракции звуковых волн на неоднородных анизотропных упругих телах // Дисс. ... докт. физ.-мат. наук. — Тула, ТулГУ, 2020.

2. Халилов Э. Г. Обоснование метода коллокации для интегрального уравнения смешанной краевой задачи для уравнения Гельмгольца // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2016. Том 56, № 7. С. 1340–1348.

3. Burton A. J., Miller G. F. The application of integral equation methods to the numerical solution of some exterior boundary-value problems // Proc. R. Soc. Lond. A: Math. Phys. Sci. 1971. Vol. 323, no. 1553. P. 201–210.

4. Lin T. C. A proof for the Burton and Miller integral equation approach for the Helmholtz equation // Journal of mathematical analysis and applications. 1984. Vol. 103, no. 2. P. 565–574.

5. Skudrzyk E. The Foundations of Acoustics Basic Mathematics and Basic Acoustics. — New York, Wien: Springer-Verlag, 1971.

УДК 372.853

Виртуальное моделирование колебаний реального маятника

А. И. Грибков (Россия, г. Тула)
Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого
e-mail: ks7a@yandex.ru
Р. В. Романов (Россия, г. Тула)
Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого
e-mail: rom_rom_vas@mail.ru

Virtual simulation of the oscillations of a real pendulum

A. I. Gribkov (Russia, г. Tula)
Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University
e-mail: ks7a@yandex.ru
R. V. Romanov (Russia, г. Tula)
Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University
e-mail: rom_rom_vas@mail.ru

В школе речь идёт о гармонических колебаниях математического маятника [1, С. 11], в реальности маленького шарика на нити. В вузе уже рассматривается физический маятник, то есть некоторое тело, без указания его параметров, что позволяет теоретически включить силу сопротивления, линейно зависящую от скорости [2, С. 521]. В этом случае задача решается аналитически до конца, хотя о каком-либо сравнении с реальностью речь не идёт. В [3, С. 205] указывается, что при больших скоростях необходим учёт силы сопротивления, квадратично зависящей от скорости. Некоторое представление о том, что считать «большой скоростью», даёт число Рейнольдса (O. Reynolds) Re. Более аккуратный критерий, связывающий параметры тела (только шара) и среды приведён в [4].

Настоящая публикация описывает модель маятника с вполне реалистичными параметрами, что позволяет выполнить теоретические расчёты, а затем проверить их экспериментально.

В качестве колебательной системы выберем сферу с не тонкими стенками, надетую на длинный жёсткий стержень не бесконечно малого диаметра. Конструкция прикреплена к перевёрнутой призме, опирающейся на плоскую горизонтальную поверхность. Такая установка (Рис. 1) достаточно легко реализуема на практике, позволяет избежать трудностей, связанных с учётом влияния силы трения в точке опоры, и относительно просто написать исходные уравнения для расчётов.

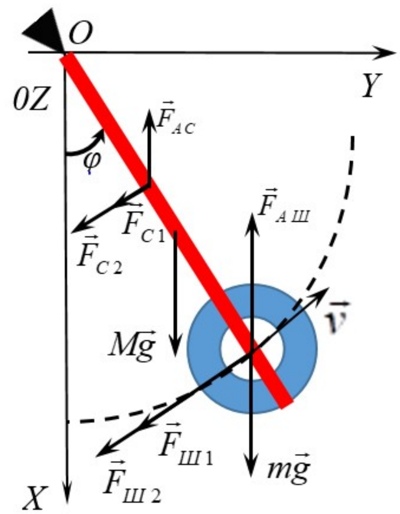

Рис. 1: принципиальная схема установки

Без подробного вывода приведём уравнение, описывающее динамику изменения угла отклонения φ

$$\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2} + 2\delta\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{\varphi_2}\left|\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\right|\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2\sin\varphi = 0, \tag{1}$$

отличающееся от обычного уравнения маятника третьим слагаемым, которое при выбранных в эксперименте параметрах и играет основную роль. В (1) декремент затухания

$$\delta = \frac{\eta}{2I}\left[3\pi d_2\left(L - \frac{d_2}{2}\right)^2 + \mu_C\left(\frac{L-d_2}{2}\right)^2\right], \tag{2}$$

собственная циклическая частота колебаний

$$\omega_0 = \sqrt{|\omega_0^2|},\ \omega_0^2 = \frac{g}{I}\left[m\left(1-\frac{\rho_0}{\rho}\right)\left(L-\frac{d_2}{2}\right) + M\left(\frac{L}{2} - \frac{\rho_0}{\rho}\left(\frac{L-d_2}{2}\right)\right)\right], \tag{3}$$

характерный угол φ_2, при котором только под действием квадратичной по скорости силы сопротивления скорость уменьшается в e раз

$$\frac{1}{\varphi_2} = \frac{\rho_0}{2I}\left[c\pi R^5\left[\frac{3}{4}\left(\frac{L}{R}-1\right) + \left(\frac{L}{R}-1\right)^3\right] + \frac{c_C D}{4}(L-d_2)^4\right]. \tag{4}$$

Момент инерции системы «сфера + стержень» с учётом теоремы Штейнера

$$I = \frac{1}{3}ML^2\left(1 + \frac{3}{16}\left(\frac{D}{L}\right)^2\right) + \frac{1}{10}m\frac{d_2^5-d_1^5}{d_2^3-d_1^3} + m\left(L-\frac{d_2}{2}\right)^2. \tag{5}$$

При записи (1)-(5) использованы следующие обозначения параметров компонент установки и среды: сфера: масса — m, внешний диаметр — d_2, внутренний диаметр — d_1, средняя плотность — $\rho_{\text{ш}}$; круглый в сечении стержень: масса — M, полная длина — L, диаметр — D, плотность — ρ_c; среда: плотность — ρ_0, коэффициент динамической вязкости — η; ускорение свободного падения для Тулы $g = 9,814$ м/с^2.

При записи (1) учитывались силы тяжести и Архимеда, действующие на сферу и стержень и силы аэродинамического сопротивления по Ньютону (I. Newton). Для сферы с шероховатой поверхностью использовался коэффициент лобового сопротивления $c_{\text{ш}} = 0,47$. Для круглого цилиндра (стержня), продуваемого перпендикулярно образующей при $L/D > 40$, такой же коэффициент $c_c = 1,20$. При записи моментов этих сил учитывалась зависимость линейной скорости от расстояния до оси вращения. Аналогично учитывались силы вязкого трения по Стоксу (G. Stokes). Здесь заметим, что все расчёты показывают для данных условий их очень незначительное влияние, поэтому ещё и с учётом $D << d_2$ коэффициент для стержня принимался $\mu_c = 0$.

Влияние призмы и крепёжных материалов не учитывалось, так как оценки показывают их незначительный вклад.

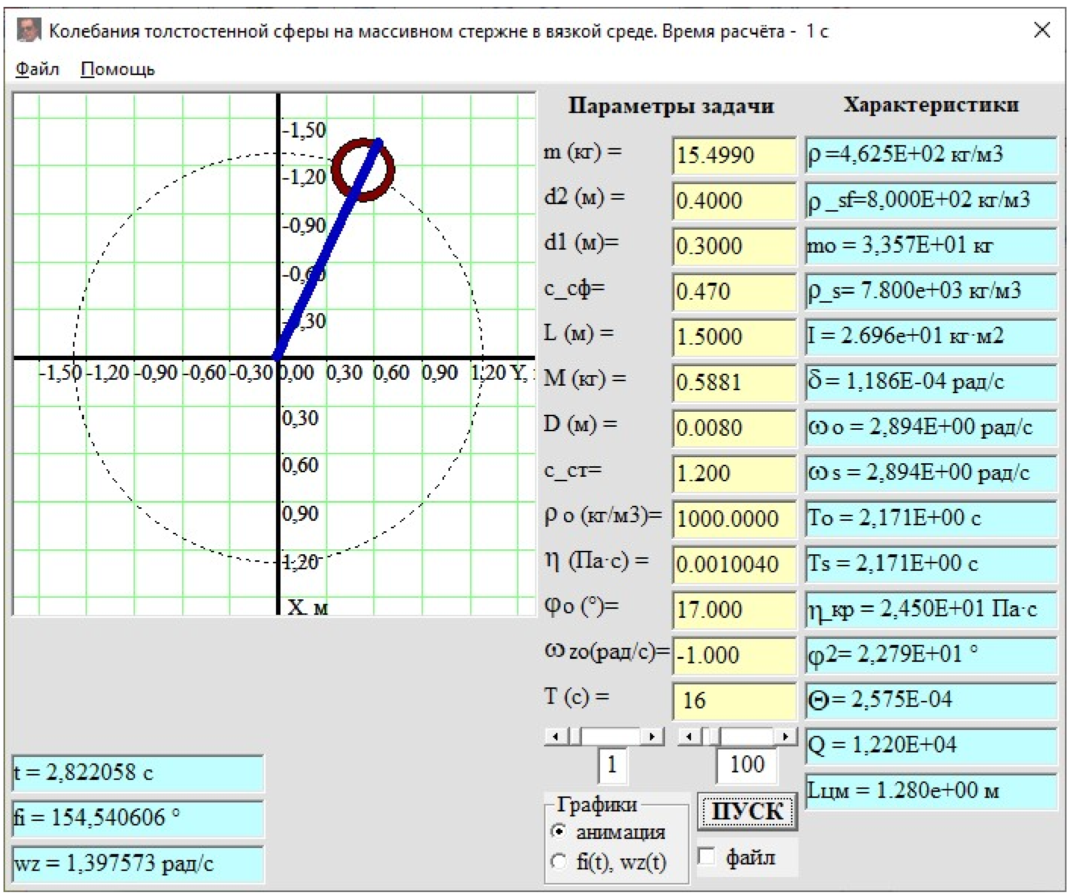

Рис. 2: главное окно Windows-приложения

Уравнение (1) — нелинейное из-за третьего и четвёртого слагаемого и вряд ли допускает аналитическое решение. Гармоническое слагаемое можно было бы традиционно посчитать линейным при малых углах, так как в этом случае $sin\varphi \approx \varphi$. Тем более, что при больших углах отклонения стержень начинает изгибаться и предположение о его жёсткости становится неприменимым. Вместе с тем, слишком малые углы делать нельзя, так как снижается точность экспериментального определения углов. Третье же слагаемое не поддаётся упрощению, поэтому уравнение (1) решалось численными методами.

Для его решения и демонстрации результатов авторами было написано Windows-приложение, вид главного окна которого представлен на рисунке 2. Большое количество параметров позволяет смоделировать достаточно разные реальные системы, в том числе и довольно экзотические. Так на рисунке 2 большая стальная сфера с толщиной стенок 5 мм на полутораметровом стержне колеблется в воде. Средняя плотность меньше плотности воды, поэтому колебания происходят вблизи верхней точки. Также программа позволяет смоделировать и вращательное движение. Кроме окна анимации движения можно показать зависимости $\varphi(t)$ и угловой скорости $\omega_z(t)$.

Без дополнительных сложностей реальный эксперимент можно проводить в воздухе, если размеры сферы достаточно велики, а сама она не слишком тяжелая. В этом случае влияние силы сопротивления можно учесть с приемлемой степенью точности. С другой стороны, систему нельзя делать слишком лёгкой, так как становится затруднительным учесть небольшие факторы, как, например, упругость стержня, призмы и платформы, возможность колебаний в перпендикулярном направлении, гладкость поверхностей сферы и стержня и т.д.

В натурном эксперименте использовались следующие параметры: сфера: $m = 0,920$ кг, $d_2 = 0,343$ м, $d_1 = 0,335$ м; стержень (две соединённые стандартные шпильки): $M = 1,426$ кг, $L = 1,947$ м, $D = 0,012$ м; среда (воздух при 20°C): $\rho_0 = 1,199$ кг/м^3, $\eta = 0,0000182$ Па $\cdot$ с. Начальный угол отклонения $\varphi_0 = 6,26°$, начальной скорости ω_{z0} нет.

Сравнение теории и эксперимента показало сходство с точностью около 6%, что следует признать вполне хорошим результатом, тем более что коэффициенты лобового сопротивления не табличные величины, как мы использовали, а различные для каждого конкретного шара и стержня.

Предложенная программа может быть использована для дальнейшего уточнения теории и исследований, а также уже применяется в качестве виртуального демонстрационного эксперимента и в лабораторном практикуме.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Мякишев Г. Я. Физика. Колебания и волны. 11 кл. Профильный уровень: учеб. для общеобразоват. учреждений / Г. Я. Мякишев, А. З. Синяков. 9-е изд., стереотип. – М.: Дрофа, 2010. 287 с.

2. Сивухин Д. В. Общий курс физики. Учеб. пособие: Для вузов. В 5 т. Т. III. Электричество. — 4-е изд., стереот. — М.: ФИЗМАТЛИТ; Изд-во МФТИ, 2004. - 656 с.

3. Путилов К. А. Курс физики: В 3 т. Т. 1. Механика. Акустика. Молекулярная физика. Термодинамика / К. А. Путилов. – 11-е изд. – М.: ГИ ФМЛ, 1963. – 560 с.

4. Бобылёв Ю. В., Грибков А. И., Романов Р. В. О сочетании аналитических и численных методов при решении физических задач // Инновации в образовании, 2018, №11, С.115-126.

УДК 539.3:534.26

Неосесимметричная задача рассеяния цилиндрических акустических волн произвольной моды неоднородным упругим цилиндрическим слоем[1]

Д. Ю. Ефимов (Россия, г. Тула)
Тульский государственный университет
e-mail: bogart.efimov@yandex.ru

The non-axisymmetric problem of scattering cylindrical acoustic waves of arbitrary mode by an inhomogeneous elastic cylindrical layer

D. Yu. Efimov (Russia, Tula)
Tula State University
e-mail: bogart.efimov@yandex.ru

1. Введение

Изучение рассеяния звука объектами цилиндрической формы имеет большую практическую значимость, ведь множество объектов в реальном мире имеют схожую с цилиндром форму. Рассеяние наклонно падающей плоской звуковой волны однородными тонкостенной и толстостенной упругими цилиндрическими оболочками исследовано в [1, 2]. Сегодня все больше внимания уделяется функционально-градиентным материалам, способным обеспечить нужные звукоотражающие свойства. Дифракция плоской звуковой волны на трансверсально-изотропным неоднородном цилиндрическом слое с особыми свойствами была изучена в [3]. В [4] рассматривалась задача дифракция плоской звуковой волны радиально-неоднородной толстостенной упругой цилиндрической оболочкой конечной длины. Важно отметить, что плоская звуковая волна — это идеализация, применяемая, когда расстояние от источника звука до рассеивателя значительно превышает длину волны. В реальности приходится учитывать кривизну фронта волны, что делает изучение дифракции звуковых волн от цилиндрических и сферических источников особенно актуальным. Дифракция цилиндрической звуковой волны на тонкостенной цилиндрической оболочке была рассмотрена в работах [5]. Рассеяние цилиндрической звуковой волны упругим сплошным круговым цилиндром и упругим цилиндром с радиально-неоднородным покрытием исследовалось в [6, 7]. В [5, 6, 7], как и в большинстве других исследований на эту тему, предполагалось, что источник волн имеет линейную форму и расположен параллельно оси цилиндра. В работах [8, 9] считалось, что источник располагается в пространстве произвольным образом. В [8] рассматривался самый простой случай, когда рассеиватель являлся абсолютно жестким, а в [9] исследовался упругий цилиндр с радиально-неоднородным покрытием. При этом в работах [8, 9] полагалось, что цилиндрический источник излучает симметричную цилиндрическую звуковую волну нулевой моды.

В настоящей работе рассматривается задача рассеяния цилиндрической звуковой волны m-ой моды радиально-неоднородным изотропным упругим полым цилиндром в случае, когда оси источника и рассеивателя не являются параллельными и не лежат в одной плоскости.

[1]Работа выполнена в рамках государственного задания Министерства просвещения РФ соглашение № 073-00033-24-01 от 09.02.2024 тема научного исследования «Теоретико-числовые методы в приближенном анализе и их приложения в механике и физике»

2. Математическая модель и аналитическое решение задачи

Рассмотрим неоднородный изотропный упругий полый цилиндр бесконечной длины. Внешний радиус цилиндра – R_1, а внутренний – R_0. Выберем прямоугольную декартову x, y, z и цилиндрическую r, φ, z системы координат, связанные с телом, таким образом, что их координатные оси z совпадают с осью вращения цилиндрического слоя. Полагаем, что модули упругости λ и μ материала цилиндрического слоя описываются дифференцируемыми функциями радиальной координаты r, а его плотность ρ – непрерывной функцией координаты r. Полагаем, что в полости цилиндра – вакуум. Окружающая тело жидкость является идеальной сжимаемой, плотность и скорость звука которой соответственно равны ρ_1 и c.

Пусть из внешнего пространства на цилиндр падает монохроматическая цилиндрическая волна. Падающая волна излучается бесконечно длинным цилиндрическим источником, на поверхности которого возбуждена одна из мод, расположенным таким образом, что оси источника и цилиндрического рассеивателя не являются параллельными и не лежат в одной плоскости.

Начало O координатных систем x, y, z и r, φ, z выберем на оси z так, чтобы из точки O выходил общий перпендикуляр к оси z и линейному источнику. Длину этого перпендикуляра обозначим через d. Ось x направим так, чтобы указанный перпендикуляр лежал на этой оси. Без ограничения общности будем считать, что линейный источник пересекает отрицательную часть оси x в точке $x = -d,\ d > 0$. Осуществим параллельный перенос вдоль оси x до точки O прямой, на которой лежит линейный источник. Пусть полученная прямая будет общей осью z_1 прямоугольной x_1, y_1, z_1 и цилиндрической r_1, φ_1, z_1 систем координат с началом в точке O. При этом ось x_1 совместим с осью x. Обозначим через α угол между осями z и z_1.

Потенциал скорости падающей цилиндрической волны, излучаемой цилиндрическим источником порядка m, в системе координат x_1, y_1, z_1 запишется в виде

$$\Psi_0 = AH_m\left(kR\right)\exp\left[i\left(m\theta - \omega t\right)\right], \quad R = \sqrt{\left(x_1 - d\right)^2 + y_1^2}, \quad \mathrm{tg}\theta = y_1/\left(x_1 - d\right), \tag{1}$$

где A – амплитуда волны; $H_m\left(x\right)$ – цилиндрическая функция Ганкеля первого рода порядка m; $k = \omega/c$ – волновое число жидкости; ω – круговая частота; t – время. В дальнейшем временной множитель $\exp\left(-i\omega t\right)$ будем опускать.

Определим акустическое поле, рассеянное телом, и поле смещений в неоднородном упругом цилиндрическом слое.

Распространение малых возмущений в идеальной жидкости в случае установившихся колебаний описывается уравнением Гельмгольца [10] относительно потенциала смещения частиц жидкости Ψ в полном акустическом поле, образованном суперпозицией полей падающей и рассеянной волн

$$\Delta\Psi + k^2\Psi = 0, \quad \Psi = \Psi_0 + \Psi_S,$$

где Ψ_0 – потенциал скорости падающей звуковой волны; Ψ_S – потенциал скорости рассеянной волны. Скорость частиц и акустическое давление в жидкости определяется через потенциал смещения по формулам

$$\mathbf{v} = \mathrm{grad}\ \Psi, \quad p = i\rho_1\omega\Psi.$$

Воспользуемся интегральной формой записи цилиндрических волновых функций через декартовы базисные решения уравнения Гельмгольца:

$$H_m\left(kR\right)\exp\left(im\theta\right) = \frac{\gamma_m i^m}{\pi k^m}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\left(\eta - i\xi\right)^m}{\eta}\exp\left[i\left(\pm\xi y_1 + \eta\left|x_1 - d\right|\right)\right]d\xi, \quad \eta = \sqrt{k^2 - \xi^2}, \tag{2}$$

где знак плюс у показателя экспоненты и $\gamma_m = 1$ соответствуют $x_1 - d < 0$, а знак минус и $\gamma_m = \left(-1\right)^m$ соответствуют $x_1 - d > 0$. Формула (2) получена на основе соотношений, приведенных в [11].

Используя интегральное представление (2) и известное разложение плоской звуковой волны по цилиндрическим волновым функциям [11], потенциал звуковой волны (1) записывается в цилиндрической системе координат на внешней поверхности цилиндрического рассеивателя в виде

$$\Psi_0|_{r=R_1} = A\frac{i^m}{\pi k^m}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\exp(id\eta)}{\eta}(\eta - i\xi)^m \exp(i\xi z\sin\alpha)\sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n J_n(\beta R_1)\exp[in(\varphi-\gamma)]\,d\xi, \quad (3)$$

где $J_n(x)$ – цилиндрическая функция Бесселя порядка n; $\beta = \sqrt{k^2 - \xi^2\sin^2\alpha}$;
$\gamma = \operatorname{arctg}(-\xi\cos\alpha/\eta)$.

С учетом условий излучения на бесконечности потенциал скорости рассеянной волны Ψ_S, являющейся решением уравнения Гельмгольца, будем искать в виде

$$\Psi_S = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\exp(i\xi z\sin\alpha)\sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n(\xi)\,H_n(\beta r)\exp[in(\varphi-\gamma)]\,d\xi. \quad (4)$$

Деформация тела, вызванная акустическим воздействием, описывается полной системой уравнений линейной теории упругости изотропного неоднородного тела, состоящей из системы уравнений движения сплошной среды, обобщенного закона Гука и линейного тензора деформации Коши-Грина [12]. В отсутствии объемных сил для установившегося режима движения в произвольной ортогональной системе координат эти уравнения соответственно имеют вид

$$\nabla^j\sigma_{ij} = -\rho\omega^2 u_i, \quad \sigma_{ij} = \lambda\,\mathrm{div}\,\mathbf{u}\,\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij}, \quad \varepsilon_{ij} = (\nabla_i u_j + \nabla_j u_i)/2, \quad (5)$$

где σ_{ij} – компоненты тензора напряжений в неоднородном слое; u_i – компоненты вектора смещений $\mathbf{u}$; ε_{ij} – компоненты тензора деформаций; ρ, λ, μ – соответственно плотность и модули упругости. Указанные физико-механические характеристики материала являются непрерывными функциями цилиндрической радиальной координаты r.

Граничные условия на внешней боковой поверхности цилиндрического слоя заключаются в равенстве нормальных скоростей частиц упругой среды и жидкости, равенстве на ней нормального напряжения и акустического давления, отсутствии касательных напряжений. На внутренней боковой поверхности цилиндра должны выполняться граничные условия, заключающиеся в отсутствии нормальных и тангенциальных напряжений.

В математической постановке задача состоит в нахождении решений системы уравнений (5), удовлетворяющих граничным условиям.

Представим компоненты вектора смещений $\mathbf{u}$ в виде разложений в ряды Фурье

$$u_w = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\exp(i\xi z\sin\alpha)\sum_{n=-\infty}^{\infty} U_{ln}(r,\xi)\exp[in(\varphi-\gamma)]\,d\xi; \quad w = r,\varphi,z; \quad l = 1,2,3; \quad w \leftrightarrow l. \quad (6)$$

Из условия равенства нормальных скоростей при $r = R_1$ находим коэффициенты $A_n(\xi)$, выраженные через $U_{1n}(R_1,\xi)$:

$$A_n(\xi) = -\frac{Ai^n\exp(id\eta)\,\Omega_m(\xi)\,\beta J_n'(\beta R_1) + i\eta\pi\omega U_{1n}(R_1,\xi)}{\eta\pi\beta H_n'(\beta R_1)}, \quad \Omega_m(\xi) = \frac{i^m(\eta - i\xi)^m}{k^m}. \quad (7)$$

Система (5) с учетом (6) сводится к системе линейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка. Присоединяя соответствующие граничные условия на внешней и внутренней боковых поверхностях цилиндрического слоя, получаем краевую задачу, которая решается методом сплайн-коллокации. Решив краевую задачу, находим значения $\mathbf{u}$ на внешней боковой поверхности цилиндра. Зная значения $\mathbf{u}$, можно определить поле Ψ_S по формулам (4), (7).

3. Заключение

Были проведеный расчеты амплитуды рассеянного акустического поля в дальней зоне ($kr \gg 1$). Установлено, что неоднородность материала цилиндрического слоя позволяет эффективно изменять характеристики рассеяния цилиндрического тела при соответствующем выборе законов неоднородности материала покрытия. Отметим, что на основе прямой задачи можно определить такие законы неоднородности материала цилиндра, для которых будем иметь наименьшее усредненное рассеяние звука в заданном диапазоне частот аналогично тому, как показано в [13].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лямшев Л. М. Дифракция звука на безграничной тонкой упругой цилиндрической оболочке // Акустический журнал. 1958. Т.4. № 2. С. 161-167.
2. Векслер Н. Д., Корсунский В. М., Рыбак С. А. Рассеяние плоской наклонно падающей волны круговой цилиндрической оболочкой // Акустический журнал. 1990. Т. 36. № 1. С. 12-16.
3. Скобельцын С. А., Толоконников Л. А. Рассеяние звуковых волн трансверсально-изотропным неоднородным цилиндрическим слоем // Акустический журнал. 1995. Т. 41. № 1. С. 134-138.
4. Добровольский Н. Н., Ефимов Д. Ю., Толоконников Л. А. Дифракция звуковых волн на неоднородной толстостенной упругой цилиндрической оболочке конечной длины // Чебышевский сборник. 2023. Т. 24. Вып. 5. С. 274-288.
5. Белоозеров Н. Н., Долгова И. И. Дифракция цилиндрической волны на слабоотражающей цилиндрической оболочке // Акустический журнал. 1970. Т. 16. № 3. С. 364-371.
6. Lee F. A. Scattering of a cylindrical wave of sound by an elastic cylinder // Acustica. 1963. Vol. 13, № 3. P. 26–31.
7. Толоконников Л. А., Ефимов Д. Ю. Дифракция цилиндрических звуковых волн на упругом цилиндре с радиально-неоднородным покрытием // Чебышевский сборник. 2021. Т. 22. Вып. 1. С. 460-472.
8. Корсунский С. В. Неосесимметричная задача дифракции цилиндрических звуковых волн на абсолютно жестком цилиндре // Акустический журн. 1988. Т. 34. № 3. С. 481-484.
9. Толоконников Л. А., Ефимов Д. Ю. Рассеяние упругим цилиндром с неоднородным покрытием звуковых волн, излучаемых произвольно расположенным линейным источником // Математическое моделирование. 2024. Т. 36. №1. С. 71-84.
10. Шендеров Е. Л. Волновые задачи гидроакустики. Л.: Судостроение, 1972. 352 с.
11. Иванов Е. А. Дифракция электромагнитных волн на двух телах. Минск: Наука и техника, 1968. 584 с.
12. Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872 с.
13. Добровольский Н. Н., Ефимов Д. Ю., Толоконников Л. А. Неосесимметричная задача дифракции цилиндрических звуковых волн на упругом цилиндре с неоднородным покрытием, расположенном вблизи границы упругого полупространства // Чебышевский сборник. 2024. Т. 25. Вып. 2. С. 269-285.

УДК 539.3:534.26

Математическая модель продольно-поперечных колебаний объектов с движущимися границами с учетом геометрической нелинейности

В. Л. Литвинов (Россия, г. Москва)
Самарский государственный технический университет
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
e-mail: vladlitvinov@rambler.ru
К. В. Литвинова (Россия, г. Москва)
Самарский государственный технический университет
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
e-mail: vladlitvinov@rambler.ru

Mathematical model of longitudinal-transverse vibrations of objects with moving boundaries, taking into account geometric nonlinearity

V. L. Litvinov (Russia, Moscow)
Samara State Technical University
Lomonosov Moscow State University
e-mail: vladlitvinov@rambler.ru
K. V. Litvinova (Russia, Moscow)
Samara State Technical University
Lomonosov Moscow State University
e-mail: vladlitvinov@rambler.ru

Until now, problems of longitudinal-transverse vibrations of objects with moving boundaries were solved mainly in a linear formulation; geometric nonlinearity, energy exchange through a moving boundary, and the interaction between longitudinal and transverse vibrations were not taken into account. In rare cases, the action of resistance forces of the external environment was taken into account. Real technical objects are much more complex; for example, when the intensity of vibrations increases, the geometric nonlinearities of the object have a great influence on the oscillatory process.

In connection with the intensive development of numerical methods, it has become possible to more accurately describe complex mathematical models of longitudinal-transverse oscillations of objects with moving boundaries, taking into account a large number of factors influencing the oscillatory process.

This paper presents a number of new nonlinear mathematical models for the analysis of one-dimensional boundary value problems with moving boundaries, taking into account geometric nonlinearity and the interaction between longitudinal and transverse vibrations. The derivation of boundary conditions is given in the case of interaction between parts of the object to the left and right of the boundary. The problem of longitudinal-transverse vibrations of objects with moving boundaries has been linearized. In this case, the principle of homogeneity is observed: in the particular case of small oscillations, the obtained linear models coincided with the classical ones, which indicates the correctness of the results obtained.

New nonlinear mathematical models of longitudinal and transverse oscillations of one-dimensional spatially variable objects with moving boundaries have been formulated, which take into account geometric nonlinearity, viscoelasticity, the action of external resistance forces, and flexural rigidity.

Special cases of longitudinal-transverse vibrations of objects with moving boundaries are considered. The resulting mathematical models make it possible to describe high-intensity oscillations of systems with moving boundaries.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Litvinov V.L. Solution of boundary value problems with moving boundaries using an approximate method for constructing solutions of integro-differential equations // Tr. Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences. 2020.Vol. 26, No. 2. P. 188-199..

2. Litvinov V.L., Anisimov V.N. Application of the Kantorovich - Galerkin method for solving boundary value problems with conditions on moving boundaries // Bulletin of the Russian Academy of Sciences. Rigid Body Mechanics. 2018. No. 2. P. 70–77..

УДК 511.32

Стохастические эволюционные уравнения

А. А. Лобода (Россия, г. Москва)
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
e-mail: orion1312@yandex.ru

Stochastic evolution equations

A. A. Loboda (Russia, Moscow)
Lomonosov Moscow State University
e-mail: orion1312@yandex.ru

1. Стохастические уравнения, описывающие эволюцию квантовых систем. Существует несколько различных подходов к описанию эволюции квантовых систем. Один из них основан на изучении уравнений Хадсона – Партасарати, которые являются обобщением на стохастический случай уравнения Гейзенберга. Кроме этого, можно исследовать поведение квантовой системы с помощью уравнений Шрёдингера – Белавкина, которые являются обобщением на стохастический случай уравнения Шрёдингера.

Мы рассмотрим уравнения Шрёдингера – Белавкина. Эти уравнения описывают марковскую аппроксимацию динамики открытых квантовых систем (то есть систем, взаимодействующих с окружающей средой), в частности, эволюции квантовых систем, находящихся под непрерывным наблюдением. Поскольку фактически не существует изолированных квантовых систем, то есть все системы можно считать открытыми, уравнения такого типа имеют большое значение для приложений.

Дадим определение случайной функции, которая и является неизвестной в уравнении Шрёдингера – Белавкина.

Пусть $(\Omega, \mathbb{A}, \nu)-$ вероятностное пространство (Ω - множество; $\mathbb{A}$ - $\sigma-$алгебра его подмножеств; $\nu-$ неотрицательная счетно-аддитивная нормированная мера на $\mathbb{A}$).

Определение 1. *Случайной величиной со значениями в измеримом пространстве* $(T, \mathcal{B}_T)$ *называется измеримое отображение* $F : \Omega \to T$; *измеримость означает, что если* $B \in \mathcal{B}_T$, *то* $F^{-1}(B) \in \mathbb{A}$.

При этом вероятностная мера на $\mathcal{B}_T$, являющаяся образом меры ν при отображении F, называется распределением случайной величины F.

Пусть $(\mathcal{Q}, \mathcal{B}_\mathcal{Q})$ и $(\mathcal{P}, \mathcal{B}_\mathcal{P})$ – два измеримых пространства, а $I(\mathcal{Q}, \mathcal{P})$ – множество (некоторых) измеримых отображений из $\mathcal{Q}$ в $\mathcal{P}$.

Определение 2. *Случайной функцией на множестве* $\mathcal{Q}$, *принимающей значения в измеримом пространстве* $(\mathcal{P}, \mathcal{B}_\mathcal{P})$, *называется функция на* $\mathcal{Q}$, *значениями которой являются случайные величины, принимающие значения в измеримом пространстве* $(\mathcal{P}, \mathcal{B}_\mathcal{P})$.

Пусть $C_0[a,b]$ – это пространство непрерывных ограниченных функций на $[a,b]$ с равномерной нормой, принимающих вещественные значения и в точке a обращающихся в ноль; $\mathfrak{B}$ – σ–алгебра борелевских подмножеств на $C_0[a,b]$; $w_{a,b}$– стандартная мера Винера на $\mathfrak{B}$.

Таким образом, $(C_0[a,b], \mathfrak{B}, w_{a,b})$– вероятностное пространство. Винеровским процессом называется случайная функция, задаваемая равенством $B_\omega(t) = \omega(t), \omega \in C_0[a,b]$.

Далее обычно случайные функции определены на множестве $[0, +\infty) \times Q$ (здесь Q– конфигурационное пространство). Для обозначения случайных функций используется символ $\Psi_\omega(x)$. При этом обычно $x \in [0, +\infty) \times Q$, поэтому случайная функция из изучаемого нами уравнения Шрёдингера – Белавкина будет обозначаться $\Psi_\omega(t)(q)$.

Уравнение Шрёдингера – Белавкина – это стохастическое уравнение с мультипликативным белым шумом, имеющее вид

$$d\Psi_\omega(t)(q) = i(\Psi_\omega(t))''(q)dt + (iV(q) - \frac{\lambda}{4}q^2)\Psi_\omega(t)(q)dt + + \sqrt{\frac{\lambda}{2}}q\Psi_\omega(t)(q)dB_\omega(t). \tag{1}$$

Здесь λ – это числовой параметр, характеризующий точность измерения, квантовой системы, эволюцию которой описывает уравнение Шрёдингера – Белавкина, V – потенциал. Остальные обозначения были определены выше.

Стохастическим это уравнение является из-за слагаемого $\sqrt{\frac{\lambda}{2}}q\Psi_\omega(t)(q)dB_\omega(t)$, где символ $dB_\omega(t)$ означает гауссовский белый шум.

Уравнение (1) получается в результате измерений координаты частицы, которая является наблюдаемой в рассматриваемой квантовой системе (один из возможных выводов см. в [1]). Аналогичные уравнения можно получить, измеряя поочередно координату и импульс частицы, но в таких уравнениях возникает двумерный белый шум (уравнение этого типа получено в [2]).

Уравнения Шрёдингера – Белавкина могут применяться при изучении управления квантовыми системами, поэтому получить решения, удовлетворяющие задачам Коши с этими уравнениями представляется весьма целесообразным.

2. Интегральное представление решения уравнения Шрёдингера – Белавкина (формула Фейнмана – Каца). Для задачи Коши уравнения (1) с начальным условием вида $\Psi_\omega(0)(q) = \varphi_0(q)$ при некоторых ограничениях на начальное условие φ_0 и потенциал V можно найти решение в виде функционального интеграла, свойства которого можно изучать с помощью метода Монте – Карло или специально подобранных аппроксимаций, информация о которых содержится в [3].

Для формулировки основного результата нам потребуется несколько вспомогательных утверждений.

Теорема 1. *Пусть для* $t \in [0, +\infty), q \in Q$ *функция* $\Phi_{t,q}$ *на вероятностном пространстве* $(C_0[0,t], \mathfrak{B}, w_{0,t})$ *определяется как* $\Phi_{t,q}(\xi) = e^{c\int_0^t R(q+\xi(\tau))dB_\omega(\tau)}$, *где символ* $\int_0^t R(q+\xi(\tau))dB_\omega(\tau)$

обозначает стохастический интеграл Ито. Тогда $\Phi_{t,q}$ *интегрируема по мере* $w_{0,t}$, *то есть интеграл*

$$\int_{C_0(0,t)} e^{c\int_0^t R(q+\xi(\tau))dB_\omega(\tau)} w_{0,t}(d\xi)$$

существует.

Этот факт необходим для обоснования существования интегрального представления решения уравнения (1), так как экспонента от стохастического интеграла (в смысле Ито) не встречается в стандартных формулах Фейнмана – Каца и может повлиять на существование решения в нужном нам виде. В этом основная сложность при нахождении решения стохастического уравнения. В нестохастическом случае представления решений математическими ожиданиями (формулы Фейнмана – Каца) известны давно и этой тематике посвящено немало работ.

Теорема 2. *Пусть функция* V *непрерывна в области* $S = \{z : z = re^{i\gamma}, r \geq 0, 0 \leq \gamma \leq \frac{\pi}{4}\}$, *сужение* V *на* S_0 *аналитично и ее производная в области* S *непрерывна и ограничена.*

Тогда функция Ψ, *определяемая равенством*

$$\Psi(\omega,t,q) = \int_{C_0[0,t]} \exp\left\{\int_0^t V(\sqrt{i}q+\xi(\tau))d\tau - \int_0^t \frac{\lambda}{2}(\sqrt{i}q+\xi(\tau))^2 d\tau\right\} \times$$
$$\times \exp\left\{\int_0^t \sqrt{\frac{\lambda}{2}}(\sqrt{i}q+\xi(\tau))dB_\omega(\tau)\right\} \varphi_0(\sqrt{i}q+\xi(t))w_{0,t}(d\xi) \tag{2}$$

$q \in Q, t \in [0,+\infty)$ *является решением следующей задачи Коши для стохастического уравнения типа Шредингера*

$$d\Psi_\omega(t)(q) = i(\Psi_\omega(t))''(q)dt + \left(V(q) - \frac{\lambda}{4}q^2\right)\Psi_\omega(t)(q)dt + +\sqrt{\frac{\lambda}{2}}q\Psi_\omega(t)(q)dB_\omega(t), \Psi_\omega(0,q) = \varphi_0(q). \tag{3}$$

Интегральное представление (2) для вспомогательного уравнения, которое называется уравнением Шредингера, из задачи Коши (3) необходимо для того, чтобы с помощью аналитического продолжения получить формулу Фейнмана – Каца для задачи Коши с уравнением (1).

Лемма 1. *Пусть функция* ϕ *аналитична внутри области*

$$S = \{q = \alpha e^{i\gamma}, 0 < \alpha < \infty, 0 \leq \gamma \leq \frac{\pi}{4}\}$$

и непрерывна вплоть до ее границы. Пусть $w-$ *мера Винера на множестве функций, определенных на* $Q = [0,+\infty)$ *и обращающихся в нуле в ноль. Пусть* $\zeta-$ *это отображение луча* Q *в луч*

$$Q_1 = \{q = \alpha e^{i\frac{\pi}{4}}, 0 \leq \alpha < \infty\},$$

определяемое так: $\zeta(q) = \sqrt{i}q$. *Тогда справедливо равенство:*

$$\int_{C_0([0,t],Q)} \phi(q+\xi(t))w_{0,t}(d\xi) = \int_{C_0([0,t],Q_1)} \phi\left(q_1 + \frac{\xi_1(\tau)}{\sqrt{-i}}\right) w_{0,t}\zeta^{-1}(d\xi_1). \tag{4}$$

Здесь символы $C_0([0,t],Q)$ *и* $C_0([0,t],Q_1)$ *используются для того, чтобы указать множество, которому принадлежит пространственная переменная.*

Лемма позволяет сделать замену переменных для получения формулы Фейнмана – Каца. Наконец, справедлива следующая основная теорема.

Теорема 3. *Пусть выполнены предположения теоремы 2 и леммы 1. Тогда функция $\mathcal{G}$, определяемая равенством*

$$\mathcal{G}(t,q_1)=\int_{C_0[0,t]}\exp\left\{\int_0^t iV(q_1+\sqrt{i}\xi_1(\tau))d\tau-\int_0^t\frac{\lambda}{4}(q_1+\sqrt{i}\xi_1(\tau))^2d\tau\right\}\times$$
$$\times\exp\left\{\int_0^t\sqrt{\frac{\lambda}{2}}(q_1+\sqrt{i}\xi_1(\tau))dB_\omega(\tau)\right\}\varphi_0(q_1+\sqrt{i}\xi_1(t))w_{0,t}\zeta^{-1}(d\xi_1)\qquad(5)$$

является решением задачи Коши для уравнения Шрёдингера – Белавкина (1)

$$d\Psi_\omega(t)(q)=i(\Psi_\omega(t))''(q)dt+(iV(q)-\frac{\lambda}{4}q^2)\Psi_\omega(t)(q)dt+\sqrt{\frac{\lambda}{2}}q\Psi_\omega(t)(q)dB_\omega(t),\Psi_\omega(0,q)=\varphi_0(q).\qquad(6)$$

Подробности получения интегрального представления (5) можно найти в работах [4] и [5].

3. Уравнение с двумерным белым шумом. Здесь мы не будем останавливаться на деталях вывода уравнения с двумерным белым шумом, а лишь ещё раз укажем, что такое уравнение может описывать марковскую аппроксимацию движения частицы, у которой непрерывным измерениям подвергаются координата и импульс. Такое уравнение имеет вид

$$d\Psi(t)=\left(\left(-i\hat{\mathcal{H}}-\frac{\mu_1}{2}k^2(\hat{q})-\frac{\mu_2}{2}h^2(\hat{p})\right)\Psi(t)\right)dt-\sqrt{\mu_1}k(\hat{q})(\Psi(t))dW_1(t)-\sqrt{\mu_2}h(\hat{p})(\Psi(t))dW_2(t).\qquad(7)$$

Здесь $\hat{\mathcal{H}}$ – это гамильтониан наблюдаемой системы, $k(\hat{q})$, $h(\hat{p})$ – это некоммутирующие дифференциальные операторы, W_1 и W_2 – независимые стандартные винеровские процессы, а $\Psi(t)\in L_2(\mathbb{R})$ – это случайная функция, описывающая эволюцию смешанных состояний наблюдаемой системы. Уравнение (7) описывает эволюцию открытой квантовой системы, у которой непрерывному измерению подвергаются наблюдаемые $k(\hat{q})$, $h(\hat{p})$.

Решение уравнения (7) в работе [7] получено с помощью построения черновских аппроксимаций (см. [3]), предел которых, определённый в работе [7], приводит к некоторому функциональному интегралу. В отличие от интеграла (5) этот интеграл берётся не по счётно-аддитивной мере, а по обобщенной мере, имеющей намного более узкую область определения и не являющейся счётно-аддитивной. Тем не менее такая мера позволяет строить интегральные представления решений для широкого класса уравнений.

Конечно, стохастическое уравнение Шрёдингера – Белавкина может иметь и многомерный белый шум, а также получаться в результате непрерывного измерения различных наблюдаемых (см. [6]), а не только координат и импульсов, но мы остановимся на двух рассмотренных случаях.

Обзор различных подходов к решению эволюционных уравнений проведён в работе [8].

4. Возможные направления развития тематики.

1) Уравнения (1) и (7) получены для коммутирующих переменных (бозонный случай). Представляет интерес вывод этого уравнения в случае антикоммутирующих переменных (фермионный случай). Такое уравнение более приближено к физическим реалиям, а решать его можно, используя те же приёмы, что и в бозонном случае. Конечно, возникают определённые трудности, так что работа с этими вопросами является серьёзным исследованием.

2) Представляет интерес построение черновских аппроксимаций к интегралу (5), с последующим изучением скорости сходимости к решению. Более глобально речь может идти о создании численных методов решения уравнений (не только стохастических) больших размерностей с помощью черновских аппроксимаций. Сейчас эта тематика активно развивается, но пока материала немного, а с другой стороны, для решения многомерных уравнений не удаётся применять стандартные сеточные методы, такие, как метод Рунге – Кутты, поэтому исследование в указанном направлении весьма перспективны.

3) Уравнения Шрёдингера – Белавкина могут быть полезны при изучении квантовых компьютеров, так что целесообразно исследовать задачи, связанные с применением этих уравнений к вопросам, связанным с развитием квантовых компьютеров.

4) Решения эволюционных уравнений могут строиться с помощью черновских аппроксимаций ([3], [7]), с помощью замены переменной ([4], [5]) и с помощью аналитического продолжения по параметру ([1]). При этом накладываются различные ограничения на коэффициенты уравнения. Интересен вопрос о том, какие условия на коэффициенты позволяют применять несколько из перечисленных методов, а также изучить связь между возникающими в этих ситуациях различными представлениями решений.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. O. G. Smolyanov, A. Truman. Schrödinger–Belavkin equations and associated Kolmogorov and Lindblad equations. // Teoret. Mat. Fiz. 1999. Vol. 120, № 2. P. 193–207.
2. O. O. Obrezkov, O.G. Smolyanov, A. Truman. The Generelized Chernoff Theorem and Randomized Feynman Formula. // Doklady Mathematics. 2005. Vol. 71, № 1. P. 105–110.
3. O. G. Smolyanov, A. G. Tokarev, A. Truman. Hamiltonian Feynman path integrals via Chernoff formula. // J. Math. Phys. 2002. Vol. 43,№ 10. P 5161–5171.
4. Loboda A.A. Ito Method for Proving the Feynman – Kac Formula for the Euclidean Analog of the Stochastic Schrödinger Equation. // Differential Equations. 2018. Vol. 54,№ 4. P 557–561.
5. Loboda A.A. The Doss Method for the Stochastic Schrödinger – Belavkin Equation. // Mathematical Notes. 2019. Vol. 106,№ 2. P 311–315.
6. Loboda A. A. Schröinger Equation with Signed Hamiltonian. // Russian Journal of Mathematical Physics. 2020. Vol. 27,№ 1. P 99–103.
7. Gough J., Obrezkov O. O., Smolyanov O. G. Randomized Hamiltonian Feynman integrals and Shcrödinger-Itô stochastic equations.
Izvestiya: Mathematics. 2005. Vol. 69,№ 6. P. 1081–1098.
8. Лобода А. А. Методы получения представлений решений стохастических уравнений Шредингера. // Современные проблемы математики и механики. Материалы международной конференции, посвященной 80-летию академика РАН В. А. Садовничего (Москва, 13-15 мая 2019 г.) — Т. 1 из ISBN 978-5-317-06133-3. Москва, МАКС Пресс, 2019. С. 91–94..

УДК 517.44

Полиномы Аппеля для уравнений математической физики

А. И. Нижников (Россия, г. Москва)
Московский педагогический государственный университет
e-mail: nizhnikov.ai@mail.ru
О. Э. Яремко (Россия, г. Москва)
Московский государственный технологический университет «Станкин»
e-mail: yaremki@yandex.ru

Appell polynomials for equations of mathematical physics

A. I. Nizhnikov (Russia, Moscow)
Moscow State Pedagogical University
e-mail: nizhnikov.ai@mail.ru
O. E. Yaremko (Russia, Moscow)
Moscow State University of Technology "Stankin"
e-mail: yaremki@yandex.ru>

В работе решаются прямая и обратная задачи Коши для уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = p\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)u$$

на действительной оси [1], с начальным условием $f(x) = u(x, 0)$, где $p(z)-$ многочлен, для которого при действительном λ выполнено условие $Rep(\lambda) \geq 0$.

Прямая задача Коши чаще всего оказывается корректно поставленной. Обратная задача для подобных уравнений состоит в восстановлении априори неизвестного начального состояния динамической системы по ее известному конечному состоянию. Обратная задача Коши (ретроспективная задача) для уравнения теплопроводности служит примером некорректно поставленной задачи [2].

Стандартный путь для решения прямой задачи Коши состоит в получении решения в форме интеграла типа Пуассона. Это решение может быть найдено методом Фурье и выражается формулой типа Пуассона [5]

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x-\xi,t)f(\xi)d\xi, \tag{1}$$

где

$$G(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-tp(\lambda)}e^{i\lambda x}d\lambda.$$

Решение в форме интеграла типа Пуассона не всегда удобно при создании вычислительных алгоритмов. В работе [4] для решения уравнения теплопроводности была получена формула для аналитического представления температурного поля в момент t в точке x

$$u(x,t) = \frac{e^{-\frac{x^2}{4(t+\beta)}}}{2\sqrt{\pi(t+\beta)}}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{(2\sqrt{t+\beta})^j}H_j\left(\frac{x}{2\sqrt{t+\beta}}\right)\frac{\beta^{\frac{j}{2}}}{j!}f_j,$$

где

$$f_j = \int_{-\infty}^{\infty} H_j\left(\frac{\xi}{2\sqrt{\beta}}\right)f(\xi)\,d\xi,$$

$\beta > 0-$ произвольное, $H_j(z)-$ полином Эрмита [6].

Цель настоящего исследования состоит в переносе результатов для уравнения теплопроводности на случай уравнений вида $\frac{\partial u}{\partial t} = p\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)u$. В полученных автором формулах полиномы Эрмита заменяются полиномами Аппеля.

Приведем необходимые сведения из теории.

Пусть задана некоторая последовательность $a_0, a_1, ..., a_n, ...$ комплексных чисел. Полиномы Аппеля [3] $p_n(x)$ определяются формулой

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k x^{n-k}, n = 0, 1, ...$$

Экспоненциальная производящая функция последовательности многочленов Аппеля [3] $p_n(x)$ имеет вид

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{p_n(x)}{n!} t^n = A(t) \exp(xt)\,,$$

где $A(t)$ некоторый степенной ряд по t.

Будем считать далее, что

$$A(t) = e^{-\beta p(it)}, \beta > 0,$$

где $p(z)-$ многочлен, для которого выполнено условие $Rep(\lambda) \geq 0$. Тогда

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{p_n(x,\beta)}{n!} (i\lambda)^n = e^{-\beta p(\lambda)} \exp(ix\lambda)\,. \tag{2}$$

Соотношение (2) будет служить основой доказательства главного результата исследования.

Полиномы Эрмита являются частным случаем полиномов Аппеля.

Для дальнейшего доказательства преобразуем формулу (1) таким образом, чтобы решение задачи Коши представлялось в форме суммы ряда произведений полинома Аппеля $p_n(x,\beta)$ на неизвестный множитель переменного t. При этом второй множитель конструируется с помощью коэффициентов разложения начального условия в ряд полиномов Аппеля.

Теорема 1. *Пусть функция $f(x)$ из пространства быстро убывающих функций [1], тогда решение задачи Коши $u(x,t)$ в пространстве бесконечно дифференцируемых по переменной $t, t \geq 0$ быстро убывающих по переменной x функций существует, единственно и имеет вид*

$$u\,(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{p_n(x,\beta)}{n!} f_{n,t+\beta},$$

где

$$f_{n,t+\beta} = (-1)^n \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^n G(\xi, t+\beta)}{\partial \xi^n} f(\xi) d\xi.$$

В качестве следствия получены формулы для коэффициентов разложения по полиномам Аппеля

$$f\,(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{p_n(x,\beta)}{n!} f_{n,\beta},$$

где

$$f_{n,\beta} = (-1)^n \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^n G(\xi, \beta)}{\partial \xi^n} f(\xi) d\xi.$$

Обратная задача Коши для уравнения (1) состоит в определении начального условия $f(x)$ по решению $u(x,t)$, заданному в момент t.

Формула, определяющая решение обратной задачи Коши, имеет вид разложения в ряд полиномов Аппеля

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{p_n(x,\beta)}{n!} u_{n,\beta-t}, t < \beta,$$

где

$$u_{n,\beta-t} = (-1)^n \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^n G(\xi,\beta-t)}{\partial \xi^n} u(\xi,t) d\xi.$$

Для уравнения теплопроводности идея искать решение обратной задачи Коши разложением в ряд полиномов Эрмита принадлежит И. Снеддону [6], однако в его формулах участвуют производные решения $u^{(k)}_{x\ldots x}(x,t), k = 1, 2, ...$ в момент t. Значит, формулы И.Снеддона не пригодны в вычислительной практике.

Полученная в работе формула для решения обратной задачи может служить основой для регуляризирующих вычислительных алгоритмов.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Владимиров В. С., Вашарин А.А., Каримова Х.Х., Михайлов В. П. , Сидоров Ю.В., Шабунин М. И. Сборник задач по уравнениям математической физики / Под ред. В.С. Владимирова. 4-е изд., стереотип. Физматлит, 2003. 288 с.

2. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука. 1979.

3. Чубариков В. Н. Обобщённая формула бинома Ньютона и формулы суммирования. Чебышевский сб., №21, вып.4 , 2020, 270–301.

4. Яремко Н. Н., Селютин В. Д., Журавлева Е. Г. Новые формулы обращения для интегральных преобразований Лапласа, Вейерштрасса и Меллина. Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки, 2018, № 1, 24–35.

5. Andrews, G. E., Askey, R., Roy, R. Hermite Polynomials. Cambridge, Cambridge University Press, 1999.

6. Sneddon I.N. *Fourier Transforms*. New York. McGraw-Hill. 1951.542 p.

УДК 511

P-адическая квантовая статистика белка и обобщенные меры Хаара

Н. Н. Шамаров (Россия, г. Москва)
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
e-mail: nikolai.shamarov@math.msu.ru

P-adic quantim statistics of protein and generalized Haar measures

N. N. Shamarov (Russia, Moscow)
Lomonosov Moscow State University
e-mail: nikolai.shamarov@math.msu.ru

В работах А. Х. Бикулова с соавторами (см., например, [1] и ссылки там) показано, что гензелевы “$\mathfrak{p}$-адические числа” позволяют теоретически (феноменологически) структурировать массив экспериментов по конформационной динамике протеинов, причем пока не существует иной теоретической основы для описания таких экспериментов и предсказания их результатов.

Ниже предлагается конструкция соответствующего модели Бикулова квантово-статистического подхода, а в качестве попутных результатов получены: вариант канонической обобщенной меры Хаара на бесконечномерном (и, значит, не являющимся локально компактным) пространстве над полем $\mathfrak{p}$-адических чисел, а также L_2-унитарный гармонический анализ на таком пространстве, основанный на этой обобщенной мере.

1. Введение и обозначения

В работах А.Х. Бикулова с соавторами (см., например, [1] и ссылки там) показано, что гензелевы “$\mathfrak{p}$-адические числа” позволяют теоретически (феноменологически) структурировать массив экспериментов по конформационной динамике протеинов, причем пока не существует иной теоретической основы для описания таких экспериментов и предсказания их результатов.

Напомним, что, для каждого простого натурального числа $\mathfrak{p} > 1$, стандартная $\mathfrak{p}$-адическая норма $\|q\|_\mathfrak{p}$ ($\geqslant 0$) ненулевого рационального числа $q = \frac{m}{n}\mathfrak{p}^\gamma$ ($\in \mathbb{Q}$, $\gamma \in \mathbb{Z}$) вычисляется по формуле: $\|\frac{m}{n}\mathfrak{p}^\gamma\|_\mathfrak{p} = \mathfrak{p}^{-\gamma}$, если знаменатель $n \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$, числитель $m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ и основание $\mathfrak{p}$ попарно взаимно просты.

Пополнение поля $\mathbb{Q}$ всех рациональных вещественных чисел по такой норме обозначается $\mathbb{Q}_\mathfrak{p}$, называется (ультра-) нормированным полем $\mathfrak{p}$-адических чисел (а $\mathfrak{p}$-адическими числами, естественно, называются его элементы), а как абелева топологическая группа с вполне несвязной топологией и локальной базой открытых компактных шаровых окрестностей она самодвойственна по Понтрягину и имеет каноническую борелевскую меру Хаара, для которой мера замкнутого шара радиуса вида $\mathfrak{p}^N$ ($N \in \mathbb{Z}$) равна этому его (минимальному) радиусу.

2. Подробнее о физических мотивировках.

Отражение иерархии структур свертывания макромолекул типа протеинов в упомянутых выше математических работах как раз и состоит в иерархии компактно-открытых шаров в $\mathbb{Q}_\mathfrak{p}$: каждый замкнутый шар радиуса $\mathfrak{p}^N$ состоит ровно из $\mathfrak{p}$ попарно не пересекающихся замкнутых шаров радиуса $\mathfrak{p}^{N-1}$. Отметим, что конкретное простое значение $\mathfrak{p}$ в статистических описаниях соответствующих экспериментов пока неважно. Пока неясно, останется ли соответствующая физическая теория (после её развития) инвариантной относительно выбора простого значения $\mathfrak{p}$, или же появятся эксперименты, выделяющие конкретные значения этого параметра.

Более точно можно сказать, что иерархичностью обладает пространство тех состояний (конформаций) электромагнитного поля, порождаемого неденатурированной молекулой, которые устойчивы относительно небольших возмущений. Эти возмущения обычно привносит тепловое движение окружающих молекулу веществ, наряду с возможным наложением внешнего электромагнитного поля. Интересно при этом, что пространство доступных конформаций может заметно зависеть от температуры. Таким образом, используемое в работе [1] пространство $L_1(\mathbb{Q}_\mathfrak{p})$ отражает классическую статистическую физику конформаций. Однако известно, что коллективное поведение мезоскопических количеств (10^{12}–10^{15}) однотипных белковых молекул в совершенно гетерогенном коллоиде живой клетки разительно отличается от навье-стоксовского, которое было бы разумно ожидать. Это обстоятельство позволяет предположить квантовую связанность молекул живой клетки и рассматривать, наряду с интегрируемыми плотностями распределений состояний молекулы по конформациям (то есть, элементами банахова пространства L_1), также и комплексные амплитуды плотностей вероятностей — то есть, элементы комплексного гильбертова пространства $L_2(\mathbb{Q}_\mathfrak{p})$ (единичной нормы). Кроме того, квантовая бозонная статистика большого коллектива таких молекул описывается сепарабельным вариантом бесконечной тензорной гильбертовой степени пространства $L_2(\mathbb{Q}_\mathfrak{p})$, которому посвящен раздел 4 далее.

3. Гармонический анализ: собственный базис преобразования Фурье в $L_2(\mathbb{Q}_\mathfrak{p})$.

Каждое $\mathfrak{p}$-адическое число $q \in$ имеет единственное (гензелево) разложение вида $q = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_{\mathfrak{p},n}(q)\mathfrak{p}^n$, причем все $\mathfrak{p}$-адические “цифры” $c_{\mathfrak{p},n}(q) \in \{0,\ 1,\ ,2\ ,...,\ (\mathfrak{p}-1)\}$ числа q (в отличие от $\mathfrak{p}$-ичных) обращаются в нуль при всех $n < -\log_\mathfrak{p}(\|q\|_\mathfrak{p}) \equiv \operatorname{ord}_\mathfrak{p}(q)$. Поэтому “$\mathfrak{p}$-адическая дробная часть” $\{q\}_\mathfrak{p} = \sum_{n=\operatorname{ord}_\mathfrak{p}(q)}^{-1} c_{\mathfrak{p},n}(q)\mathfrak{p}^n$ того же числа q является неотрицательным рациональным числом, строго меньшим единицы, и потому может и будет интерпретироваться как действительное число из полуинтервала $[0;1)$. Это позволяет описать интегральные ядра обратного и прямого унитарных (парсевалевых) преобразований-изоморфизмов Фурье в $L_2(\mathbb{Q}_\mathfrak{p})$ (относительно упомянутой меры Хаара dx) как $K^\pm(x,y) = \chi_\mathfrak{p}(\pm xy) \equiv e^{\pm 2\pi i\{xy\}_\mathfrak{p}}$:

$$F\psi = F^-\psi = \tilde{\psi}, \quad \tilde{\psi}(y) = \int_{\mathbb{Q}_\mathfrak{p}} K^-(x,y)\psi(x)\,dx.$$

Конечно, в буквальном смысле Лебега такая интегральная формула, как обычно, определена только для $\psi \in (L_2 \cap L_1)$, а затем для получения F нужно относительно L_2-нормы замыкать график полученного сужения $F|_{L_1\cap L_2}$. Полезно также и более узкое пространство пробных функций — $\mathcal{D}(\mathbb{Q}_\mathfrak{p})$ состоящее из непрерывных финитных функций с конечным числом ненулевых комплексных значений — оно инвариантно относительно $F^{\pm1}$ и также является областью их существенной унитарности; другими словами, $\mathcal{D}(\mathbb{Q}_\mathfrak{p})$ является комплексной линейной оболочкой множества индикаторов шаров строго положительных радиусов.

При этом, как следует из [2], $\mathcal{D}(\mathbb{Q}_\mathfrak{p})$ является суммой счетного числа своих конечномерных $F^{\pm1}$-инвариантных подпространств вида $\mathcal{D}_N(\mathbb{Q}_\mathfrak{p})$ $(N = 0,\ 1,\ 2,\dots)$ размерности $\mathfrak{p}^{2N}$, каждое из которых состоит из функций, обращающихся в нуль вне центрального замкнутого шара радиуса $\mathfrak{p}^N$ и при этом постоянных на любом замкнутом шаре радиуса $\mathfrak{p}^{-N}$. Таким образом, начиная с индикаторной функции e_0 центрального замкнутого единичного шара (обозначаемого $\mathbb{Z}_\mathfrak{p}$ и состоящего из так называемых “целых $\mathfrak{p}$-адических чисел”, то есть, имеющих нулевую $\mathfrak{p}$-адическую дробную часть злементов поля $\mathbb{Q}_\mathfrak{p}$), строится ортонормированный базис $\{e_k : k = 0,\ 1,\ 2,\dots\}$ собственных функций преобразований Фурье $F^{\pm1}$. При этом, аналогично унитарному преобразованию фурье в $L_2(\mathbb{R})$, спектр содержится в множестве корней четвертой степени из единицы, и собственному числу 1 отвечает бесконечномерное собственное подпространство.

4. Квантовая бозонная статистика над $\mathbb{Q}_\mathfrak{p}$ и унитарный гармонический анализ в фоковском пространстве.

Множество всех формально бесконечных, но финитных, последовательностей-мультииндексов $\mathbf{k} = (k_1, k_2, ...) = (k_j)_{j\in\mathbb{N}}$ с неотрицательными целочисленными компонентами $k_j \in \mathbb{N}\cup\{0\}$) (финитность здесь, как обычно, означает, что $\exists J \in \mathbb{N}, \forall j > J\ k_j = 0$) обозначим символом $c_{00}(\mathbb{N}\cup\{0\}) \equiv c_{00}$. Такое множество является счётным, и его элементы-мультииндексы $\mathbf{k}$ будут далее нумеровать базисные функции вида $e_\mathbf{k}$, общей областью определения которых является пространство $c_0 \equiv c_0(\mathbb{Q}_\mathfrak{p})$ стремящихся к нулю последовательностей вида $\mathbf{x} = (x_1,\ x_2,\ ...) = (x_j)_{j\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{Q}_\mathfrak{p})^\mathbb{N}$ с $\mathfrak{p}$-адическими компонентами x_j .

Сепарабельный фон-неймановский класс эквивалентности в “счетной гильбертовой тензорной степени пространства $L_2(\mathbb{Q}_\mathfrak{p})$” [3], порожденный постоянной последовательностью векторов

$$\mathbb{N} \ni n \mapsto e_0 \in L_2(\mathbb{Q}_\mathfrak{p}),$$

мы далее обозначим $L_2(c_0)_{e_0}$, выделяя отмеченный вектор e_0, и определим этот класс как такое гильбертово пространство функций на $c_0(\mathbb{Q}_\mathfrak{p})$, счётным ортонормированным базисом в котором назначим множество "тензорных" произведений вида

$$e_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}) = \prod_{j=1}^{\infty} e_{k_j}(x_j),$$

где $\mathbf{k} = (k_1, k_2, ...) = (k_j)_{j\in\mathbb{N}} \in c_{00}(\mathbb{Q}_\mathfrak{p})$.

Наш базис $\{e_{\mathbf{k}} : \mathbf{k} \in c_{00}\}$ по определению порождает в гильбертовом пространстве $L_2(c_0)_{e_0}$ плотное линейное подпространство, которое обозначим $\mathcal{D}(c_0)_{e_0}$. Это пространство $\mathcal{D}(c_0)_{e_0}$ состоит из таких функций, которые, наряду со своим поточечным квадратом, в некотором смысле являются абсолютно интегрируемыми по c_0 относительно не являющегося счетно аддитивным аналога меры Хаара. Соответственно, назовем этот аналог стандартной обобщенной мерой Хаара в c_0, обозначим L и, по аналогии с обобщенной единицей из теории обобщенных функций, зададим как линейный функционал на пространстве $\mathcal{D}(c_0) = \mathcal{D}(c_0)_{e_0}$ пробных функций следующим образом (по аналогии с обозначениями обычной теории обобщенных функций, для обобщенной единицы используя эквивалентную запись вида
$L(\Psi) \equiv (1, \Psi)_{(\mathcal{D}'(c_0),\mathcal{D}(c_0))} \equiv \int_{c_0} \Psi(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}$.)

Во-первых, если $\mathbf{k} = \mathbf{0} = (0, 0, ...) \in c_{00}$ — нулевая последовательность, то $L(e_{\mathbf{0}}) = 1$. Если же носитель $supp(\mathbf{k}) = \{j \in \mathbb{N} : k_j \neq 0\}$ финитной последовательности $\mathbf{k} \in c_{00}$ непуст, то полагаем $L(e_{\mathbf{k}}) = \prod_{j\in\ supp(\mathbf{k})} \int_{\mathbb{Q}_\mathfrak{p}} e_{k_j}(x_j)dx_j$, — конечное произведение интегралов, каждый из которых берется по "одномерной" мере Хаара в $\mathbb{Q}_\mathfrak{p}$.

Конечно, поскольку для всех $\mathbf{k} = \mathbf{0} = (0, 0, ...) \in c_{00}$ справедливо равенство $L(e_{\mathbf{k}}) = \prod_{j=1}^{\infty} \int_{\mathbb{Q}_\mathfrak{p}} e_{k_j}(x_j)dx_j$, то L в подходящем смысле является счетной ("прямой", или "тензорной") степенью той меры Хаара, которую мы определили на полукольце шаров в одномерном пространстве над $\mathbb{Q}_\mathfrak{p}$ (ср. [4]).

Кроме того, существует естественный гильбертов изоморфизм бозонного [5] фоковского пространства H_B, построенного над одночастичным $L_2(\mathbb{Q}_\mathfrak{p})$, на всё пространство $L_2(c_0)_{e_0}$, а естественность изоморфизма заключается в том, что в каждый базисный вектор вида $e_\neg$ переходит фоковский вектор из $n_{\mathbf{k}}$-частичного подпространства, где $n_{\mathbf{k}}$ — число элементов в множестве $supp(\mathbf{k})$.

Наконец, унитарные в $L_2(c_0)_{e_0}$ взаимно-обратные операторы $F_B^{\pm 1}$ обратного и прямого преобразований Фурье задаются практически прежней формулой: на пробных функциях $\Psi \in \mathcal{D}(c_0)_{e_0}$

$$F_B\psi = F_B^{-}\psi = \tilde{\Psi}, \quad \tilde{\Psi}(\mathbf{y}) = \int_{c_0} K_B^{-}(\mathbf{x}, \mathbf{y})\psi(\mathbf{x})\, d\mathbf{x},$$

где $K_B^{\pm}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \chi_\mathfrak{p}(\pm 2\pi i \sum_{j=1}^{\infty} x_j y_j)$ — интегральные ядра операторов $F_B^{\pm 1}$ соответственно, причем элементы $e_{\mathbf{k}} \in \mathcal{D}(c_0)_{e_0}$ ($\mathbf{k} \in c_{00}$) ортонормированного в $L_2(c_0)_{e_0}$ базиса образуют также и собственный базис для $F_B^{\pm 1}$, а "вакуумная" функция $e_{\mathbf{0}}$ переходит в себя.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Bikulov A. Kh., Zubarev A. P.: Ultrametric theory of conformational dynamics of protein molecules in a functional state and the description of experiments on the kinetics of CO binding to myoglobin // Physica A: Statistical Mechanics and its Applications Volume 583, 1 December 2021, 126280. // DOI: https://doi.org/10.1016/j.physa.2021.126280

2. Владимиров В. С., Волович И. В., Зеленов Е. И. P-адический анализ и математическая физика. — М.: Наука, Физматлит, 1994.

3. Neumann J. v. On infinite direct products// Compositio Mathematica, 1939, Vol. 6, P. 1–77.

4. Sakbaev V. Zh. Flows in infinite-dimensional phase space equipped with a finitely-additive invariant measure// Mathematics, 11:5 (2023), 1161 , 49 pp.

5. Березин Ф.А.: “Метод вторичного квантования”, М., Наука, 1986.

Содержание