Библиотека Чебышевского сборника

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Министерство просвещения Российской Федерации
Российская академия наук
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
Математический институт им. В. А. Стеклова РАН
Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В. А. Стеклова РАН
Санкт-Петербургский государственный университет
Институт истории естествознания и техники им. С. И. Вавилова РАН
Московский педагогический государственный университет
Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого
Математический центр мирового уровня МИАН
Тульский государственный университет

Алгебра, теория чисел, дискретная геометрия и многомасштабное моделирование: современные проблемы, приложения и проблемы истории

Материалы XXIV Международной конференции, посвящённой 110-летию со дня рождения академика Юрия Владимировича Линника и 110-летию со дня рождения профессора Андрея Борисовича Шидловского и 80-летию со дня рождения профессора Геннадия Ивановича Архипова

Тула, 14–17 мая 2025 года

ББК 22.1
УДК 51
А45

Алгебра, теория чисел, дискретная геометрия и многомасштабное моделирование: Современные проблемы, приложения и проблемы истории: Материалы XXIV Международной конференции, посвященной 110-летию со дня рождения академика Ю. В. Линника и 110-летию со дня рождения профессора А. Б. Шидловского и 80-летию со дня рождения профессора Г. И. Архипова. —

Тула: Тул. гос. пед. ун-т им. Л. Н. Толстого, 2025. – 191 с.
ISBN 5–87954–388–9

ББК 22.1
УДК 51

ISBN 5–87954–388–9

Пленарные доклады

УДК 512.54

Матричные представления колец эндоморфизмов абелевых групп без кручения[1]

Е. А. Благовещенская (Россия, Санкт-Петербург)
Петербургский государственный университет путей сообщения Императора Александра I
e-mail: blagoveschenskaya@pgups.ru, kblag2002@yahoo.com

Matrix representations of torsion-free abelian group endomorphism rings[1]

E. A. Blagoveshchenskaya (Russia, Saint Petersburg)
Emperor Alexander I St. Petersburg State Transport University
e-mail: blagoveschenskaya@pgups.ru, kblag2002@yahoo.com

Известно , что абелевы группы без кручения, в целом, не обладают свойством изоморфизма для различных прямых разложений. Пусть

$$X = X_1 \oplus X_2 \oplus \ldots \oplus X_s = X_1' \oplus X_2' \oplus \ldots \oplus X_t' \tag{1}$$

– различные прямые разложения группы X на неразложимые слагаемые. Пусть $\{\sigma_1, \ldots, \sigma_s\}$ и $\{\sigma_1', \ldots, \sigma_t'\}$ — множества соответствующих проекций, которые являются попарно ортогональными примитивными идемпотентами. Поскольку $X_i = X\sigma_i$ и $X_j' = X\sigma_j'$, имеются различные разложения кольца эндоморфизмов

$$\mathcal{E} = \operatorname{End} X = L_1 \oplus \ldots \oplus L_s = L_1' \oplus \ldots \oplus L_t'$$

на неразложимые правые идеалы, имеющие вид: $L_i = \sigma_i\mathcal{E}$ и $L_j' = \sigma_j'\mathcal{E}$, где $i = 1, \ldots, s$ и $j = 1, \ldots, t$. Этот факт создает фундамент для нашего рассмотрения прямых разложений некоммутативных колец, которые являются абелевыми группами без кручения как аддитивные структуры.

Сфокусируемся на более узком классе почти вполне разожимых групп специального вида. Мы рассматриваем так называемые блочно-жесткие crq-группы X ранга $n = \sum_{\tau \in T_{cr}(X)} n_\tau$, которые являются почти вполне разложимыми группами кольцевого типа с регулятором $R(X) = A = \bigoplus_{\tau \in T_{cr}(A)} A_\tau \cong \bigoplus_{\tau \in T_{cr}(A)} n_\tau \tau$, являющемся вполне разложимой группой ранга n, циклическим регуляторным фактором X/A и регуляторной экспонентой $e = exp\, X/A = |X/A|$. Отметим, что, по определению этого класса групп, критические типы $\tau \in T_{cr}(A)$, рассматриваемые в цепи $\mathbb{Z} \subset \tau \subset \mathbb{Q}$, являются подкольцами кольца рациональных чисел $\mathbb{Q}$, однородные компоненты A_τ в разложении регулятора A группы X не допускают между собой ненулевых гомоморфизмов и являются сервантными подгруппами в X.

Важную роль в классификации crq-групп играют понятие почти изоморфизма и числовые инварианты $m_\tau(X)$. Для этого определим естественный эпиморфизм

$$\overline{} : A \longmapsto A/eA = \overline{A} \tag{2}$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 25-11-00348)
[1]The research was supported by the Russian Science Foundation (Project No. 25-11-00348)

Выберем образующий элемент $b + A$ группы X/A, тогда $eb = \sum_{\tau \in T} v_\tau$, $v_\tau \in A_\tau$. Положим

$$m_\tau = m_\tau(X) = |\overline{v_\tau}| = |v_\tau + eA|, \tag{3}$$

Очевидно, $m_\tau | e$ для всех $\tau \in T$.

Одной из эквивалентных формулировок понятия почти изоморфизма является следующее.

Определение 1. *Пусть G и H — абелевы группы конечного ранга без кручения. Тогда G и H* почти изоморфны *(обозначение $G \cong_{nr} H$), тогда и только тогда, когда для каждого простого q существует мономорфизм $\phi_q : G \longrightarrow H$, для которого индекс $[H : G\phi_q]$ конечен и q не делит $[H : G\phi_q]$.*

Теорема 1. *Пусть X и Y — блочно-жесткие crq-группы. Тогда $X \cong_{nr} Y$, если и только если $R(X) \cong R(Y)$, и для всех типов τ, $m_\tau(X) = m_\tau(Y)$.*

С точностью до почти изоморфизма определяется главное разложение crq-группы X:

Теорема 2. *Пусть X — блочно-жесткая crq-группа. Тогда существует разложение $X = Y \oplus A'$ такое, что A' — вполне разложима, Y является жесткой crq-группой, и $\tau \in T_{cr}(Y)$, если и только если $m_\tau(X) > 1$, при этом $m_\tau(Y) = m_\tau(X)$. Группа Y единственна с точностью до почти изоморфизма, вполне разложимая группа A' единственна с точностью до изоморфизма.*

По отношению к главному разложению кольцо эндоморфизмов группы Y имеет представление, которое получается, если мы перечислим все критические типы группы X и запишем их в виде $T = T_{cr}(A) = \{\tau_1, \ldots, \tau_k\}$. Тогда из разложения регулятора $A = \bigoplus_{i=1}^k A_{\tau_i}$ на τ_i-однородные компоненты A_{τ_i} рангов n_i сразу следует, что кольцо $\operatorname{End} A$ изоморфно кольцу M, состоящему из $(n \times n)$-матриц F блочно-диагональной формы:

$$F = \begin{pmatrix} F_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & F_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & F_k \end{pmatrix}, \quad F_i \in M_{n_i}(\tau_i), \tag{4}$$

где $M_{n_i}(\tau_i)$ — полное матричное кольцо над τ_i и

$$F_i \in \begin{pmatrix} k' + m_{\tau_i}\tau_i & \tau_i & \ldots & \tau_i & \tau_i \\ m_{\tau_i}\tau_i & \tau_i & \ldots & \tau_i & \tau_i \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ m_{\tau_i}\tau_i & \tau_i & \ldots & \tau_i & \tau_i \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ m_{\tau_i}\tau_i & \tau_i & \ldots & \tau_i & \tau_i \end{pmatrix} \subset M_{n_\tau}(\tau), \tag{5}$$

где $m_{\tau_i} = m_{\tau_i}(X)$ и целое число $k' = k'(F)$ фиксировано для каждой блочно-диагональной матрицы F.

В рассматриваемом классе crq-групп следующая теорема устанавливает связи между различными разложениями crq-группыX и ее кольца эндоморфизмов, а, значит, и соответствующих матричных колец:

Теорема 3. *Пусть X — блочно-жесткая crq-группа кольцевого типа с множеством критических типов $T = T_{cr}(X) = \{\tau_i : i = 1, \ldots, k\}$, регулятором $A = \bigoplus_{i=1,\ldots,k} A_{\tau_i}$, регуляторным показателем e и $n_i = \operatorname{rk} A_{\tau_i}$.*

Если X обладает прямым разложением $X = X_1 \oplus X_2 \oplus \ldots \oplus X_s$, то имеется разложение $E = L_1 \oplus \ldots \oplus L_s$ матричного кольца $E \cong \operatorname{End} X$ в прямую сумму неразложимых левых идеалов таких, что ${L_f}^+ \cong_{nr} X_f \oplus (\bigoplus_{i:\tau_i \in T_{cr}(X_f)} A'_i)$, где $A'_i \cong {\tau_i}^{n_i - 1}$, $f = 1, \ldots, s$.

Замечание 1. *Существуют классы абелевых групп без кручения, являющиеся эпиморфными образами crq-групп, которые имеют представления колец эндоморфизмов целочисленными матрицами и теорию прямых разложений, схожую с теорией прямых разложений crq-групп. На них распрространяется построенная теория неизоморфных прямых разложений, которая описывает различные разложения целочисленных колец.*

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Благовещенская Е. А., Маркова О. В. Матричные структуры, представимые в виде конечных прямых сумм и цепей", Фундамент. и прикл. матем., 25:1 (2024), 31–51.
2. Благовещенская Е. А., Михалёв А. В. Матричные представления колец эндоморфизмов для некоторых классов абелевых групп без кручения, Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия, 10:3 (2023), 487–498.
3. Благовещенская Е. А., Михалёв А. В. Влияние теоремы Бэра—Капланского на развитие теории групп, колец и модулей", Фундамент. и прикл. матем., 24:1 (2022), 31–123.

УДК 514.763

Однородные k-конфигурации

Ф. М. Малышев (Россия, г. Москва)
Математический институт им. В. А. Стеклова РАН
e-mail: malyshevfm@mi-ras.ru

Homogeneous k-configurations

F. M. Malyshev (Russia, Moscow)
Steklov Mathematical Institute of RAS
e-mail: malyshevfm@mi-ras.ru

Понятие k-конфигурации введено автором в конце прошлого века в связи с необходимостью для криптографического синтеза в невырожденных разреженных матрицах L, L^{-1} над полем $GF(2)$ с равномерным распределением по строкам и столбцам их единичных элементов. Наличие у матрицы L или у L^{-1} строк либо столбцов веса 1 сопряжено с их криптографическими слабостями. В то же время представляют интерес разреженные матрицы L, как наиболее просто реализуемые, при этом матрицы L^{-1} (с учётом расшифрования) тоже должны быть разреженными. В этой связи естественным образом возникает следующее понятие.

Определение 1. *Матрицу $L \in GL(v, 2)$ (рассматриваемую с точностью до независимых перестановок строк и столбцов) называем k-матрицей, если у неё и у матрицы L^{-1} в каждой строке и в каждом столбце k единиц и $v - k$ нулей. Соответствующее семейство из v подмножеств мощности k в множестве $X = \{1, \dots, v\}$ с такой матрицей инциденций называем k-конфигурацией.*

Параметр k нечётен, иначе матрица L была бы вырожденной. Операция сложения подмножеств $A, B \subseteq X$ по правилу $A+B = (A\cup B)\setminus(A\cap B)$ позволяет сформулировать эквивалентное определение понятия k-конфигурации.

Определение 2. *Совокупность $\mathcal{X} \subset 2^X$ из v подмножеств мощности k в множестве X, $|X| = v$, называем k-конфигурацией, если:*

i) каждый элемент $x \in X$ принадлежит ровно k подмножествам из $\mathcal{X}$,

ii) каждый элемент $x \in X$ является суммой (как подмножество $\{x\}$) ровно k подмножеств из $\mathcal{X}$, причём каждое подмножество из $\mathcal{X}$ участвует в качестве слагаемого ровно в k таких суммах.

Ограничиваемся связными k-конфигурацями, когда связны соответствующие гиперграфы. Изоморфизм k-конфигураций в виде биекции, переводящих k-элементные подмножества конфигураций друг в друга, называем *комбинаторной эквивалентностью.* В построении k-конфигураций в разное время принимали участие Брославский М.В., Зубков А.М., Комягин М.М., Красулина Е.Г., Малышев Ф.М., Сачков В.Н., Тараканов В.Е., Тришин А.Е., Фролов А.А. Понятие k-конфигурации интересно не только с практической точки зрения. Первоначальные примеры k-конфигураций удавалось строить на основе правильных многогранников, регулярных и симметрических графов, квадратичных вычетов и невычетов, конечных групп, (v, k, λ)-конфигураций, включая конфигурации, которые отвечают совершенным разностным множествам, конечным проективным плоскостям и матрицам Адамара. В монографии [1] понятие совершенного разностного множества распространяется с циклических групп на группы общего вида. В нашем случае это приводит к понятию *групповой k-конфигурации.*

Определение 3. *Назовём k-конфигурацию $\mathcal{X}$ на множестве X групповой, если для некоторой структуры группы на множестве X (обозначаемой G) все подмножества из конфигурации $\mathcal{X}$ получаются друг из друга левыми (для определённости) параллельными сдвигами.*

Для конкретной структуры группы G в общем случае нет специального термина типа *группы на k-конфигурации.* В случае конечного $v = |X|$ утвердился термин (v, k)*-группы.* Одна и та же k-конфигурация может реализовываться на неизоморфных группах, как и на одной и той же группе могут быть заданы комбинаторно неэквивалентные k-конфигурации.

Пусть $\mathcal{X}$ групповая k-конфигурация на группе G с единицей $e \in H \in \mathcal{X} = \{gH |\, g \in G\}$. По условию ii) определения 2 для k-элементного подмножества $S \subset G$, определяемого равенством $\{e\} = \sum_{s\in S} s^{-1}H$, имеем

$$\{x\} = \sum_{g\in G:\, gS\ni x} gH \tag{1}$$

для всех $x \in G$. Из равенств (1) непосредственно следуют условия

$$|H \cap S| \equiv 1 \,(\mathrm{mod}\, 2), \quad |H \cap gS| \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, 2)\ \forall\, g \in G \diagdown \{e\}. \tag{2}$$

Обратно, для любой группы G с k-элементными подмножествами H и S, удовлетворяющими условиям (2), справедливы равенства (1), а значит и условия определения 2, предоставляющие k-конфигурацию $\mathcal{X} = \{gH |\, g \in G\}$, обозначаемую (G, H).

К основным классификационным результатам последнего времени для $k = 5$ относятся работы М.М. Комягина [2], [3]. С помощью компьютерных вычислений им установолено, что с точностью до комбинаторной эквивалентности для первых нетривиальных значений $v = 9, 10, 11, 12$ имеется, соответственно, ровно 1, 34, 386, 71355 $(v, 5)$-конфигураций. Методом автора компьютерными вычислениями А.Е. Тришин получил все циклические $(v, 5)$-группы [4], а А.А. Фролов – абелевы $(v, 5)$-группы с точностью до их гомоморфизмов [5]. Автором установлено [6], что кроме $(5, 3)$-конфигурации любая 3-конфигурация получается из 3-конфигурации на группе $\mathbb{Z}$ с подмножествами $\{2i, 2i+1, 2i+2\}$, $\{2i, 2i+1, 2i+3\}$, $i \in \mathbb{Z}$, факторизацией по группе $\langle 2l \rangle$, $l \geqslant 2$. С другими результатами по k-конфигурациям можно познакомиться по работе [7]. После исследований М.М. Комягина реально можно надеяться на классификации 5-конфигураций, имеющих однородное строение, без особенностей, кстати, как наиболее интересные с точки зрения криптографического синтеза. К однородным относятся групповые k-конфигурации. Большая часть известных на сегодняшний день k-конфигураций являются однородными. Приведём их.

При определении далее четырёх серий 5-конфигураций под 2-графом Γ будем понимать связный ориентированный граф на конечном или счётном множестве вершин P без петель и параллельных дуг с двумя входящими и двумя выходящими дугами для каждой вершины. В конечном случае полагаем $|P| = p$. Ориентированные циклы и граф на множестве вершин $\mathbb{Z}$ с дугами $i \to i+1$, $i \in \mathbb{Z}$, считаем 1-графами.

Серия $\boldsymbol{\mathcal{A}}$. Пусть Γ – 2-граф с множеством вершин P, $|P| \geqslant 3$. Концы дуг 2-графа Γ, выходящих из вершины $v \in P$, обозначаем $v_{\hat{0}}$ и $v_{\hat{1}}$. Полагаем $X = P \times \{0,1\}$, $X_x = \{(v,\varepsilon),(v_{\hat{0}},0),(v_{\hat{0}},1),(v_{\hat{1}},0),(v_{\hat{1}},1)\}$, $x = (v,\varepsilon) \in P \times \{0,1\}$, $\mathcal{X} = \{X_x | \, x \in X\}$. Обозначаем эту 5-конфигурацию символом $\mathcal{A}(\Gamma)$. 5-конфигурации $\mathcal{A}(\Gamma')$ и $\mathcal{A}(\Gamma'')$ комбинаторно эквивалентны тогда и только тогда, когда 2-графы Γ' и Γ'' изоморфны [8]. Прототипами 5-конфигураций серии $\mathcal{A}$ являются конфигурации из Предложения 7 работы [9], полученные Ф.М. Малышевым.

Серия $\boldsymbol{\mathcal{B}}$. Пусть Γ – 2-граф с множеством вершин P, $|P| \geqslant 3$, у которого дуги помечены либо 0, либо 1 так, что как входящие, так и выходящие дуги каждой вершины $v \in P$ помечены различно. Через $v_{\hat{\varepsilon}}$ обозначаем конец дуги, выходящей из вершины $v \in P$ с меткой $\varepsilon \in \{0,1\}$. Предполагается, что $v_{\hat{0}\hat{1}} = v_{\hat{1}\hat{0}}$ для всех $v \in P$. Тогда 2-граф Γ называем *помеченным 2-графом.* Полагаем $X = P \times \{0,1\} \times \{0,1\}$, $X_x = \{(v,\varepsilon,\nu),(v_{\hat{0}},0,\nu),(v_{\hat{0}},1,\nu),(v_{\hat{1}},\varepsilon,0),(v_{\hat{1}},\varepsilon,1)\}$, $\mathcal{X} = \{X_x | \, x \in X\}$, $x = (v,\varepsilon,\nu) \in P \times \{0,1\} \times \{0,1\}$. Обозначаем эту 5-конфигурацию $\mathcal{B}(\Gamma)$. Прототипом 5-конфигураций серии $\mathcal{B}$ явилось Следствие 2 в работе А.А. Фроолова [5].

Теорема 1. *С точностью до изоморфизма помеченными 2-графами являются:*
$\mathcal{B}_1(p)$, $p \geqslant 3$, $\mathcal{B}_1(\mathbb{Z})$, $\mathcal{B}'_1(4)$ $\quad$ $\mathcal{B}_2(2k)$, $k \geqslant 3$, $\mathcal{B}_2(\mathbb{Z})$, $\mathcal{B}'_2(2k)$, $k \geqslant 2$,
$\mathcal{B}_3(2k)$, $k \geqslant 3$, $\mathcal{B}_3(\mathbb{Z})$, $\mathcal{B}'_3(2k+1)$, $k \geqslant 2$, $\quad$ $\mathcal{B}_4(2k)$, $k \geqslant 3$, $\mathcal{B}_4(\mathbb{Z})$, $\mathcal{B}'_4(4k)$, $k \geqslant 2$,
$\mathcal{B}_5^{(0)}$, $\mathcal{B}_5^{(1)}(u)$, $\mathcal{B}_5^{(2,1)}(u,n,w)$, $[w] = n > [u] \geqslant 3$, $\mathcal{B}_5^{(2,2)}(u,w)$, $[w] = [u] > [w-u] \geqslant 3$,
$\mathcal{B}_5^{(2,3)}(u)$, $[w] = [u] = [w-u] \geqslant 3$.
Помеченные 2-графы из приведённого списка не изоморфны друг другу.

Перечисленные в утверждение орграфы получаются из 2-графа Γ на множестве вершин $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ с дугами $(x,y) \to (x+1,y)$, $(x,y) \to (x,y+1)$, факторизацией по группам параллельных сдвигов G. Группу $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ вкладываем в евклидову плоскость так, что угол между единичными векторами $(1,0)$ и $(0,1)$ равен 60°. Для группы $G \subset \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ имеем три возможности: $G = \{0\}$, $G \cong \mathbb{Z}$, $G \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. В первом случае $\Gamma / G = \Gamma$ и помеченный 2-граф Γ относим к типу $\mathcal{B}_5^{(0)}$. Во втором случае $G = \langle u \rangle$ с длиной образующего $\|u\| > 2$, а помеченный 2-граф $\Gamma / \langle u \rangle$, располагающийся на цилиндре $\mathbb{R}^2 / \langle u \rangle$, относим к типу $\mathcal{B}_5^{(1)}$ и обозначаем $\mathcal{B}_5^{(1)}(u)$. В последнем случае помеченный 2-граф относим к типу $\mathcal{B}_5^{(2)}$, если $\|u\| > 2$, $\|w\| > 2$, тогда он располагается на торе $\mathbb{R}^2 / G$, $G = \langle u, w \rangle$. Такие 2-графы обозначаем $\mathcal{B}_5^{(2)}(u,w)$. Образующие u и w выбираются с минимально возможными нормами $[u]$, $[w]$. Нормой вектора является длина кратчайшей ломаной, соединяющей начало координат с концом вектора, в которой каждый отрезок параллелен либо вектору $(1,0)$, либо $(0,1)$, либо $(1,-1)$. Для помеченных 2-графов типов $\mathcal{B}_i$, $i = 1,2,3,4$, имеем $[u] = 2$, $[w] \geqslant 2$.

Подробно теорема 1 представлена в [8]. Там область изменения образующих u, w более конкретна. Отсутствие комбинаторной эквивалентности соответствующих 5-конфигураций, наследуемых обозначения от соответствующих помеченных 2-графов, устанавливается с помощью специальных инвариантов за исключением трёх пар: $\mathcal{B}_1(4)$ и $\mathcal{B}'_2(4)$, $\mathcal{B}_2(2s)$ и $\mathcal{B}'_2(2s)$, $\mathcal{B}_4(4s)$ и $\mathcal{B}'_4(4s)$, $s \geqslant 2$. Обращаясь к группам автоморфизмов 5-конфигураций, М.М. Комягин установил комбинаторную эквивалентность $\mathcal{B}_1(4)$ и $\mathcal{B}'_2(4)$, $\mathcal{B}_2(2s)$ и $\mathcal{B}'_2(2s)$ для нечётных $s \geqslant 3$. Пары $\mathcal{B}_2(4s)$ и $\mathcal{B}'_2(4s)$, $\mathcal{B}_4(4s)$ и $\mathcal{B}'_4(4s)$, $s \geqslant 2$ комбинаторно не эквивалентны.

Серия $\mathcal{C}$. Пусть Γ – 1-граф с множеством вершин P, $|P| \geqslant 3$. Конец дуги 1-графа Γ, выходящей из вершины v, обозначаем $v_{\hat{0}}$. Полагаем $X = P \times \{0,1,2\}$, $X_x = \{(v,0),(v,1),(v,2),(v_{\hat{0}},\nu),\ \nu \in \{0,1,2\} \diagdown \{\varepsilon\}\}$, $x = (v,\varepsilon) \in P \times \{0,1,2\}$, $\mathcal{X} = \{X_x | \, x \in X\}$. Прототипами 5-конфигураций серии $\mathcal{C}$ являются конфигурации из Примера 6 работы [9], полученного В.Е. Таракановым.

Серия $\mathcal{D}$. Пусть Γ – 1-граф с множеством вершин $\mathbb{Z}$. Концом дуги 1-графа Γ, выходящей из вершины $v \in \mathbb{Z}$, будет $v+1$. Полагаем $X = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_7$,

$$X_x = \{(v,\varepsilon),(v+1,\varepsilon),(v+1,\varepsilon+(-1)^v),(v+1,\varepsilon+(-1)^v 2),(v+1,\varepsilon+(-1)^v 4)\},$$

$x = (v,\varepsilon) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_7$, $\mathcal{X} = \{X_x | \, x \in X\}$. Факторизуя данную 5-конфигурацию по группе автоморфизмов в виде $(v,\varepsilon) \mapsto (v+d,\varepsilon)$, $(v,\varepsilon) \in X$, по всем $d \in \mathbb{Z}$, кратным $2p$, $p \in \mathbb{N}$, получаем 5-конфигурацию на $14p$ вершинах. Прототипами 5-конфигураций серии $\mathcal{D}$ являются некоммутативные $(14p,5)$-группы из работы [10].

Теорема 2. *Любые две 5-конфигурации, принадлежащие различным сериям $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$, комбинаторно не эквивалентны.*

На сегодняшний день все известные 5-конфигурации являются либо коммутативно-групповыми, либо относятся к одной из серий $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$. Исключениями являются некоторые $(v,5)$-конфигурации из работ [2], [3] с $v \in \{10,11,12\}$. Нетривиальная проверка данного неформального утверждения о 5-конфигурациях потребуется только для двух бесконечных групп на 5-конфигурациях из [10].

$$G_1 = \mathbb{Z} \times D_4,\ \mathbb{Z} = \langle d \rangle,\ D_4 = \langle z,\tau |\, z^2 = \tau^4 = e,\ z\tau z = \tau^{-1}\rangle,\ H = \{e, dz, dz\tau, dz\tau^2, d\},$$

$$G_2 = \mathbb{Z}_2 \times G,\ \mathbb{Z}_2 = \langle z \rangle,\ G = \langle a,\tau |\, \tau^4 = e,\ a^{-1}\tau a = \tau^{-1}\rangle,\ H = \{e, a, a\tau, a\tau^2, a\tau z\}.$$

Теорема 3. *5-конфигурации $\mathcal{X}_i = \{gH |\, g \in G_i\}$, $i = 1,2$, на группах G_1 и G_2 являются комбинаторно эквивалентными 5-конфигурации $\mathcal{B}_4(\mathbb{Z})$.*

Теорема 4. *Коммутативно групповые 5-конфигурации серии $\mathcal{A}$ строятся по помеченным 2-графам.*

Теорема 5. *За исключением нескольких циклических $(v,5)$-групп с $v \in \{10,\dots,19\}$, любая коммутативно-групповая 5-конфигурация либо относится к одной из серий $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, либо комбинаторно эквивалентна 5-конфигурации серии $\mathcal{A}$, профакторизованной по автоморфизму второго порядка, либо комбинаторно эквивалентна 5-конфигурации серии $\mathcal{B}$, профакторизованной или по автоморфизму второго порядка, или по группе автоморфизмов, изоморфной четверной группе Клейна.*

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Холл М. Комбинаторика. М.:Мир, 1970, 424 с.

2. Комягин М.М. Классификация $(v,5)$-конфигураций для $v \leqslant 11$. Дискретная математика, **36**:1 (2024), 46–66.

3. Комягин М.М. Классификация и свойства $(12,5)$-конфигураций. Дискретная математика, **37**:1 (2025), 22–38.

4. Тришин, А.Е. Классификация циркулянтных $(v,5)$-матриц / А.Е. Тришин – Обозрение прикладной и промышленной математики, т. 11, вып. 2. – М.:ОПиПМ, 2004, с. 258-259.

5. Фролов, А.А. Классификация неразложимых абелевых $(v, 5)$-групп. Дискретная математика, **20**:1 (2008), 94–108.

6. Малышев Ф.М., Фролов А.А. Классификация $(v, 3)$-конфигураций. Математические заметки, **91**:5 (2012) 741-749.

7. Малышев Ф. М. k-конфигурации. Труды МИАН, **316** (2022), 233–253.

8. Малышев Ф.М. Классификация трех семейств 5-конфигураций. Дискрет. матем., **36**:4 (2024), 74–100.

9. Малышев Ф.М., Тараканов В.Е. О (v, k)-конфигурациях. Мат. сборник, **192**:9 (2001), 85-108.

10. Фролов А.А. Класс инволютивных неабелевых $(v, 5)$-групп. – Обозрение прикладной и промышленной математики, т. 12, вып. 1. – М.:ОПиПМ, 2005, с. 197-199.

УДК 511.32

Средние значения функций Чебышёва с экспоненциальным весом в коротких интервалах

З. Х. Рахмонов (Таджикистан, г. Душанбе)
Институт математики им. А. Джураева
e-mail: zarullo-r@rambler.ru или zarullo.rakhmonov@gmail.com

Mean values of Chebyshev functions with exponential weight in short intervals

F. Z. Rakhmonov (Tajikistan, Dushanbe)
A. Dzhurayev Institute of Mathematic
e-mail: zarullo-r@rambler.ru или zarullo.rakhmonov@gmail.com

Для характера Дирихле χ по модулю q, фиксированного натурального n и вещественного λ вводим функцию

$$\psi_n(u, \chi, \lambda) = \sum_{m \leqslant u} \Lambda(m)\chi(m)e(\lambda m^n),$$

которая при $\lambda = 0$ совпадает с обычной функцией Чебышёва, и назовём её функцией Чебышёва с экспоненциальным весом степени n. В предположении справедливости расширенной гипотезы Римана для средних значений таких функций в коротких интервалах по всем характерам модуля q при $y \geqslant \sqrt{x}\mathscr{L}^2$, $\mathscr{L} = \ln xq$, имеет место оценка

$$t_n(x; q, y, \lambda) = \sum_{\chi \bmod q} |\psi_n(x, \chi, \lambda) - \psi_n(x - y, \chi, \lambda)| \ll y + x^{\frac{1}{2}} q \mathscr{L}^2. \quad (1)$$

При решении ряда задач теории простых чисел достаточно, чтобы для $t_n(x; q, y, \lambda)$ имелась оценка, близкая к (1). Эта задача при $\lambda = 0$ и $y = x$ превращается в классическую задачу о среднем значении функций Чебышёва вида

$$t(x; q) = \sum_{\chi \bmod q} \max_{y \leq x} |\psi(y, \chi)|,$$

которую впервые исследовал Ю. В. Линник [1] для вывода нетривиальной оценки линейной тригонометрической суммы с простыми числами, а затем А. А. Карацуба [2] для изучения закона распределения чисел вида $p(p_1+a)$ в коротких арифметических прогрессиях. Воспользовавшись методом большего решета Ю. В. Линника, Г. Монтгомери [3] доказал плотностные теоремы для нулей L-функции Дирихле, с помощью которых показал, что

$$t(x;q) \ll (x + x^{\frac{5}{7}}q^{\frac{5}{7}} + x^{\frac{1}{2}}q)\mathscr{L}^{17}. \tag{2}$$

Этот результат уточнил Р. Вон [4]. Он доказал, что

$$t(x;q) \ll x\mathscr{L}^3 + x^{\frac{3}{4}}q^{\frac{5}{8}}\mathscr{L}^{\frac{23}{8}} + x^{\frac{1}{2}}q\mathscr{L}^{\frac{7}{2}}. \tag{3}$$

Дальнейшего улучшения добился автор [5, 6, 7]. Он доказал, что

$$t(x;q) \ll x\mathscr{L}^{28} + x^{\frac{4}{5}}q^{\frac{1}{2}}\mathscr{L}^{31} + x^{\frac{1}{2}}q\mathscr{L}^{32}.$$

Автор [8, 9, 10] воспользовавшись методами работы [5] и теоремой М. Ютилы о четвёртом моменте L-функций Дирихле в критической прямой, доказал, что если $y \geqslant x^{\frac{3}{5}}$, $q \leqslant xy^{-1}$, $|\lambda| \leqslant xy^{-2}$, то имеет место оценка

$$t_1(x;q,y,\lambda) \ll \left(x^{\frac{1}{2}}q + x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{2}}q|\lambda|^{\frac{1}{3}}\right)x^{0,5\varepsilon} + x^{\frac{3}{10}}y^{\frac{1}{2}}q^{\frac{1}{2}}\mathscr{L}^{35} + y\mathscr{L}^{35}.$$

В этой работе воспользовавшись методом получения последней оценки, находим равномерную оценку по параметрам оценку средних значений функций Чебышёва с экспоненциальным весом степени n в коротких интервалах по всем характерам Дирихле по модуля q.

Теорема 1. *Пусть $y \geqslant \sqrt{x}\mathscr{L}^2$, $q \leqslant x^3y^{-3}$, $|\lambda| \leqslant \left(x^{n-2}y^2\right)^{-1}$, тогда справедлива оценка*

$$t_n(x;q,y,\lambda) \ll x^{\frac{1}{2}+\frac{3}{10}\varepsilon}q + x^{\frac{n}{3}+\frac{3}{10}\varepsilon}y^{\frac{1}{2}}q|\lambda|^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{3}{10}}y^{\frac{1}{2}}q^{\frac{1}{2}}\mathscr{L}^{30} + y\mathscr{L}^{30},$$

где постоянная под знаком Виноградова зависит от n и ε.

Отсюда получим следующую упрощенную оценку.

Следствие 1. *Пусть $y \geqslant \sqrt{x}\mathscr{L}^2$, $q \leqslant x^3y^{-3}$, $|\lambda| \leqslant \left(x^{n-2}y^2\right)^{-1}$, тогда справедлива оценка*

$$t_n(x;q,y,\lambda) \ll x^{\frac{2}{3}+\frac{3}{10}\varepsilon}y^{-\frac{1}{6}}q + x^{\frac{3}{10}}y^{\frac{1}{2}}q^{\frac{1}{2}}\mathscr{L}^{30} + y\mathscr{L}^{30}.$$

где постоянная под знаком Виноградова зависит от n и ε.

Согласно теореме Дирихле о приближении действительных чисел рациональными числами, каждое α из промежутка $[-æ, 1-æ]$, $æ\tau = 1$ представимо в виде

$$\alpha = \frac{a}{q} + \lambda, \quad (a,q) = 1, \qquad 1 \leqslant q \leqslant \tau, \qquad |\lambda| \leqslant \frac{1}{q\tau}.$$

Через $\mathfrak{M}(P)$ обозначим те числа α, для которых $q \leqslant P$, через $\mathfrak{m}(P)$ обозначим оставшиеся α. $\mathfrak{M}(P)$ и $\mathfrak{m}(P)$ соответственно называются большими и малыми дугами.

Виноградов И.М. [11] первым начал изучать короткие тригонометрические суммы с простыми числами. Для сумм вида

$$S_n(\alpha;x,y) = \sum_{x-y<m\leqslant x} \Lambda(n)e(\alpha m^n),$$

при $n=1$, используя свой метод оценок сумм с простыми числами, он доказал нетривиальную оценку в малых дугах $\mathfrak{m}(\exp(c(\ln\ln x)^2))$, $\tau = x^{\frac{1}{3}}$ при $y > x^{\frac{2}{3}+\varepsilon}$. Затем С. Б. Хейзелгроув, В. Статулявычус, Ч. Д. Пан и Ч. Б. Пан, Ж. Тао для суммы $S_1(\alpha;x,y)$, $y\geqslant x^{\theta_1}$, получив нетривиальную оценку в малых дугах и изучив ее поведение в больших дугах, доказали асимптотическую формулу в тернарной проблеме Гольдбаха с почти равными слагаемыми с условиями $|p_i-N/3|\leqslant H$, $H=N^{\theta_1}$, соответственно при

$$\theta_1=\frac{63}{64}+\varepsilon,\qquad \frac{279}{308}+\varepsilon,\qquad \frac{2}{3}+\varepsilon,\qquad \frac{5}{8}+\varepsilon.$$

Дж. Лю и Ж. Тао [12, 13], изучая сумму $S_n(\alpha;x,y)$, $y\geqslant x^{\theta_n}$ в случае $n=2$, условно (в предположении справедливости расширенной гипотезы Римана) при $\theta_2=\frac{2}{3}+\varepsilon$ и безусловно при $\theta_2=\frac{11}{16}+\varepsilon$ доказали, что для любого $A>0$ существуют константы $c_i>0$, $i=1,2,3$ и справедливо соотношение

$$S_n(\alpha;x,y)=\begin{cases} M_n(\alpha;x,y)+O\left(\dfrac{y}{\mathscr{L}_x^A}\right), & q\leqslant\mathscr{L}_x^{c_1},\ |\lambda|\leqslant\dfrac{1}{xy^{n-1}\mathscr{L}_x^{c_2}};\\ O\left(\dfrac{y}{\mathscr{L}_x^A}\right), & \text{в противном случае,}\end{cases}\tag{4}$$

$$M_n(\alpha;x,y)=\frac{1}{\varphi(q)}\sum_{\substack{h=1\\(h,q)=1}}^{q}e\left(-\frac{ah^n}{q}\right)\int_{x-y}^{x}e(\lambda u^n)du,\quad \tau=\frac{y^{2n-1}}{x^{n-1}\mathscr{L}_x^{c_3}},$$

а также получили при $n=2$ асимптотическую формулу для количества представлений достаточно большого натурального числа N в виде

$$N=p_1+p_2+p_3^n,\qquad \left|p_j-\frac{N}{3}\right|\leqslant H,\quad \left|p_3^n+\frac{N}{3}\right|\leqslant H,\quad H\geqslant N^{\frac{1+\theta_n}{2}}.\tag{5}$$

Затем Г. С. Лю и Х. Х. Лао [14] безусловно доказали, что $\theta_2=\frac{2}{3}+\varepsilon$.

Дж. Лю и Ж. Тао [15] доказали соотношение (4) в случае $n\geqslant 3$ при

$$\theta_n=\begin{cases}1-\dfrac{1}{2^{n-1}+1}+\varepsilon, & \text{если } 3\leqslant n\leqslant 5;\\ 1-\dfrac{2}{n^2+3n+4}+\varepsilon, & \text{если } n\geqslant 6,\end{cases}$$

и нашли асимптотическую формулу для количества представлений числа N в виде (5). B. Huang и Z. Wang [16] показали, что имеет место

$$\theta_n=\begin{cases}\dfrac{4}{5}+\varepsilon, & \text{если } n=3;\\ 1-\dfrac{1}{2n}+\varepsilon, & \text{если } n\geqslant 4.\end{cases}$$

Наилучший результат в больших дугах принадлежит А. В. Кумчеву [17]. Он доказал: *пусть* $n\geqslant 1$, $0,7<\theta\leqslant 1$, $0<\rho\leqslant\min\left(\frac{8\theta-5}{6(n+1)},\frac{10\theta-7}{15}\right)$, $P=x^{2n\rho}$, α — *вещественное число, а целые числа* a *и* q *удовлетворяют усло-+виям*

$$1\leqslant q\leqslant P,\qquad (a,q)=1,\qquad |q\alpha-a|\leqslant x^{-n+2-2\theta}P,$$

тогда имеет место оценка

$$S_n(\alpha;x,x^\theta)\ll x^{\theta-\rho+\varepsilon}+\frac{x^{\theta+\varepsilon}}{\sqrt{q(1+x^{n-2+2\theta}|q\alpha-a|)}}.\tag{6}$$

Б. Хуан [18] в больших так и в малых дугах доказал: *пусть* $n \geqslant 3$, $0,75 < \theta \leqslant 1$, $0 < \rho \leqslant \min\left(\frac{\theta - 0{,}75}{16n(n-1)}, \delta\right)$, $\delta = \delta(n) > 0$, $P = x^{2(n-2)(n-1)n(n+1)\delta}$, α *— вещественное число, а целые числа* a *и* q *удовлетворяют условиям*

$$1 \leqslant q \leqslant \tau, \qquad (a,q) = 1, \qquad |q\alpha - a| \leqslant x^{-n+2-2\theta}P,$$

тогда имеет место оценка

$$S_n(\alpha; x, x^\theta) \ll x^{\theta(1-\rho+\varepsilon)} + \frac{x^{\theta+\varepsilon}}{(q + x^{n-2+2\theta}|q\alpha - a|)^{\frac{1}{2n}}}. \tag{7}$$

Из теоремы 1 получим нетривиальные оценки для более коротких тригонометрических сумм с простыми числами вида $S_n(\alpha; x, y)$.

Теорема 2. *Пусть* $\theta \geqslant 0,6$, α *— вещественное число, а целые числа* a *и* q *удовлетворяют условиям*

$$q \leqslant x^{3-3\theta}, \qquad (a,q) = 1, \qquad |q\alpha - a| \leqslant x^{-n+2-2\theta}q,$$

тогда для всякого $\varepsilon > 0$ *имеет место оценка*

$$S_n(\alpha; x, x^\theta) \ll \left(x^{\frac{1}{2}}q^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{n}{3}+0,5\theta}q^{\frac{1}{6}}|q\alpha - a|^{\frac{1}{3}}\right)x^{\frac{1}{3}\varepsilon} + \left(x^{\frac{3}{10}+0,5\theta} + \frac{x^\theta}{q^{0,5}}\right)(\tau(q))^{\frac{\ln n}{\ln 2}}\mathscr{L}^{31}.$$

где постоянная под знаком Виноградова зависит от n *и* ε.

Из упрощенной оценки для $t_n(x; q, y, \lambda)$ в следствие 1, имеем

Следствие 2. *Пусть* $\theta \geqslant 0,6$, α *— вещественное число, а целые числа* a *и* q *удовлетворяют условиям*

$$q \leqslant x^{3-3\theta}, \qquad (a,q) = 1, \qquad |q\alpha - a| \leqslant x^{-n+2-2\theta}q,$$

тогда для всякого $\varepsilon > 0$ *имеет место оценка*

$$S_n(\alpha; x, x^\theta) \ll x^{\frac{2}{3} - \frac{1}{6}\theta + \frac{1}{3}\varepsilon}q^{\frac{1}{2}} + \left(x^{\frac{3}{10}+0,5\theta} + x^\theta q^{-\frac{1}{2}}\right)(\tau(q))^{\frac{\ln n}{\ln 2}}\mathscr{L}^{31}. \tag{8}$$

где постоянная под знаком Виноградова зависит от n *и* ε.

Представляя q в виде $q = x^{æ}$, где $æ = \ln q\mathscr{L}^{-1}$ и воспользовавшись соотношением $\tau(q) \ll q^{\frac{\ln 2}{2\ln n}\varepsilon}$, правую часть (8) представим в виде

$$S_n(\alpha; x, x^\theta) \ll x^\theta\left(x^{-\frac{7}{6}\left(\theta - \frac{3}{5} - \frac{3}{7}\left(æ - \frac{1}{15}\right) - \frac{2}{7}\varepsilon\right)} + x^{-\frac{1}{2}\left(\theta - \frac{3}{5} - æ\varepsilon - \frac{62\ln\mathscr{L}}{\mathscr{L}}\right)} + x^{-\frac{1}{2}\left(æ - æ\varepsilon - \frac{62\ln\mathscr{L}}{\mathscr{L}}\right)}\right).$$

Следовательно оценка (8) нетривиальна, если, выполняются условия

$$\theta > \max\left(\frac{3}{5} + \frac{3}{7}\left(æ - \frac{1}{15}\right) + \frac{2}{7}\varepsilon, \quad \frac{3}{5} + æ\varepsilon + \frac{62\ln\mathscr{L}}{\mathscr{L}}\right), \qquad æ > \frac{62\ln\mathscr{L}}{(1-\varepsilon)\mathscr{L}}.$$

Отсюда и из следствие 2, а также из неравенства $æ \leqslant 3 - 3\theta \leqslant 1,2 - 3,6\varepsilon$, получим следующие утверждения.

Следствие 3. *Пусть* $x \geqslant x_0$, $P \geqslant \mathscr{L}^{\frac{66}{1-\varepsilon}}$, α *— веществ иенное число, а целые числа* a *и* q *удовлетворяют условиям*

$$P \leqslant q \leqslant \min(x^{\frac{1}{15}}, x^{3-3\theta}), \qquad (a,q) = 1, \qquad |q\alpha - a| \leqslant x^{-n+2-2\theta}P,$$

тогда при $\theta > 0,6 + \frac{2}{7}\varepsilon$ *оценка (8) нетривиальна.*

Следствие 4. *Пусть $x \geqslant x_0$, $P > x^{\frac{1}{15}}$, α — вещественное число, а целые числа a и $q = x^{æ}$ удовлетворяют условиям*

$$P \leqslant q \leqslant x^{3-3\theta}, \qquad (a,q)=1, \qquad |q\alpha - a| \leqslant x^{-n+2-2\theta}P,$$

тогда при $\theta > \frac{4}{7} + \frac{3}{7}æ + \frac{2}{7}\varepsilon$ оценка (8) нетривиальна.

Полученные оценки в отличие от оценок (6) и (7) принадлежащих соответственно А. В. Кумчеву и Б. Хуану является нетривиальным для более коротких сумм $S_n(\alpha; x, x^\theta)$, причём относительно параметра q при $q \gg \mathscr{L}_x^{70}$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Линник Ю. В. Новое доказательство теоремы Гольдбаха-Виноградова // Математический сборник. 1946. V. 19, № 1. С. 3-8.

2. Карацуба А. А. Распределение произведений сдвинутых простых чисел в арифметических прогрессиях // Доклады АН СССР. 1970. Т. 192. Вып. 4. С. 724 — 727.

3. Монтгомери Г. Мультипликативная теория чисел — М.: изд-во Мир, 1974.

4. Vaughan R. Mean value theorems in prime number theory // J. London Math. Soc. (2). 10(1975), 153 – 162.

5. Рахмонов З.Х. Теорема о среднем значении $\psi(x,\chi)$ и ее приложения // Известия Российской Академии наук. Серия математическая. 1993. Т. 57, № 4. С. 55 – 71.

6. Рахмонов З.Х. Средние значения функции Чебышёва // Доклады Российской Академии наук. 1993. Т. 331. № 3. С. 281 – 282.

7. Рахмонов З. Х., Нозиров О.О. О средних значениях функций Чебышёва и их приложениях // Чебышёвский сборник. 2021. Т. 22. № 5(81). С. 198 – 222.

8. Рахмонов З.Х. Простые числа и средние значения функций Чебышева // Автореферат дисс. … дост. физ.-матем. наук. 1996. Москваю Изд-во Моск. ун-та.

9. Рахмонов З. Х. Средние значения функций Чебышёва в коротких интервалах // Мат. межд. конф., посв. 175-летию со дня рождения П. Л. Чебышева, МГУ Москва, 14–19 мая 1996 г. 1996. Т. 1. С. 48-53.

10. Рахмонов З. Х. Средние значения функции Чебышева в коротких интервалах // Доклады Академии наук Республики Таджикистан. 1999. Т. 42. № 4. С. 14-18.

11. Виноградов И.М. Оценки некоторых простейших сумм с простыми числами // Известия АН СССР. Сер. мат. 1939. Т.3. С. 371–398.

12. Liu J., Zhan T. On sums of five almost equal prime squares // Acta Arithmetica. 1996. V. 77. P. 369-383

13. Liu J., Zhan T. Estimation of exponential sums over primes in short intervals I // Monatshefte fur Mathematik. 1999. Is. 127.P. 27-41.

14. Lu G. S., Lao H. X. On exponential sums over primes in short intervals // Monatshefte fur Mathematik. 2007. V. 151. Is. 2. P. 153-164.

15. Liu J., Zhan T. Estimation of exponential sums over primes in short intervals II // In Analytic Number Theory: Proceedings of a Conference in Honor of Heini Halberstam. Birkhauser. 1996. P 571-606.

16. Huang B., Wang Z. Exponential sums over primes in short intervals // Journal of Number Theory. 2015. V. 148. P. 204–219.

17. Kumchev A. V. On Weyl sums over primes in short intervals // “Arithmetic in Shangrila”— Proceedings of the 6th China-Japan Seminar on Number Theory. Series on Number Theory and Its Applications. Singapore: World Scientific. 2012. V. 9. P. 116–131.

18. Huang B. Exponential sums over primes in short intervals and an application to the Waring–Goldbach problem // Mathematika. 2016. V. 62. P. 508–523.

УДК 511.32

О сумме модулей коротких тригонометрических сумм с простыми числами

Ф. З. Рахмонов (Таджикистан, г. Душанбе)
Институт математики им. А. Джураева
e-mail: rakhmonov.firuz@gmail.com

On the sum of the moduli of short exponential sums with prime numbers

F. Z. Rakhmonov (Tajikistan, Dushanbe)
A. Dzhuraev Institute of Mathematics
e-mail: rakhmonov.firuz@gmail.com

Метод оценок тригонометрических сумм с простыми числами И. М. Виноградова позволил ему решить ряд арифметических проблем с простыми числами. Одной из проблем является распределение дробных частей $\{\alpha p\}$. В этом вопросе И. М. Виноградов [1] получает оценку тригонометрической суммы значительно более точную, чем в общем случае: *пусть K и x — достаточно большие целые числа, $K \leqslant x$, α — вещественное,*

$$\alpha = \frac{a}{q} + \frac{\theta}{q^2}, \qquad (a,q) = 1, \quad q \geqslant 1, \qquad |\theta| \leqslant 1, \tag{1}$$

тогда при $q \leqslant x$, будем иметь

$$V_1(K,x) = \sum_{k=1}^{K} \left| \sum_{p \leqslant x} e(\alpha k p) \right| \ll K x^{1+\varepsilon} \left(\sqrt{\frac{1}{q} + \frac{q}{x}} + x^{-0,2} \right).$$

Отсюда следует утверждение: *при любом σ с условием $0 < \sigma \leqslant 1$, число $F_\alpha(x,\sigma)$ значений $\{\alpha p\}$, $p \leqslant x$, подчиненных условию $\{\alpha p\} < \sigma$, выразится формулой*

$$F_\alpha(x,\sigma) = \sigma \pi(x) + R_\sigma(x), \quad R_\sigma(x) \ll x^{1+\varepsilon} \left(\sqrt{\frac{1}{q} + \frac{q}{x}} + x^{-0,2} \right).$$

В частности, если α — иррациональное число с ограниченными неполными частными, то можно выбрать q таким, чтобы оно было порядка $\sqrt{x}$. В этом случае в проблеме распределения дробных частей $\{\alpha p\}$, аргумент которой пробегает простые числа из интервала малой длины, то есть *для $F_\alpha(x,y,\sigma)$ – количества членов последовательности $\{\alpha p\}$ таких, что $x-y<p\leqslant x$ и $\{\alpha p\}<\sigma$, имея в виду, что $F_\alpha(x,y,\sigma)=F_\alpha(x,\sigma)-F_\alpha(x-y,\sigma)$, справедлива асимптотическая формула*

$$F_\alpha(x,y,\sigma)=\sigma(\pi(x)-\pi(x-y))+O\left(x^{\frac{4}{5}+\varepsilon}\right),$$

являющаяся нетривиальной при $y\gg x^{\frac{4}{5}+\varepsilon}$.

Методом оценок тригонометрических сумм с простыми числами И. М. Виноградова, в сочетании с методами работ [2, 3] в работе [4] доказано: *пусть K, x, y и q – достаточно большие целые числа, $K\leqslant y$, A — абсолютная постоянная, $\mathscr{L}=\ln x$, α — вещественное и имеет вид (1). Тогда при $y\gg x^{\frac{2}{3}}\mathscr{L}^{4A+16}$ и $\mathscr{L}^{4A+20}\leqslant q\leqslant Ky^2x^{-1}\mathscr{L}^{-4A-20}$ справедлива оценка*

$$V_1(K,x,y)=\sum_{k=1}^{K}\left|\sum_{x-y<p\leqslant x}e(\alpha kp)\right|\ll\frac{Ky}{\mathscr{L}^A}.$$

При $n\geqslant 2$ вопрос о распределении дробных частей $\{\alpha p^n\}$, аргумент которой пробегает простые числа p из короткого интервала $[x-y,x]$, оставался открытым.

Основным результатом этой работы является теорема 1 об оценке сумм модулей коротких тригонометрических сумм с простыми числами.

Теорема 1. *Пусть K, x, y, q – достаточно большие целые числа, $K\leqslant y<x$, n — фиксированное натурально число, α — вещественное,*

$$\alpha=\frac{a}{q}+\frac{\theta}{q^2},\qquad (a,q)=1,\quad q\geqslant 1,\qquad |\theta|\leqslant 1.$$

Тогда справедлива оценка

$$V_n(K,x,y)=\sum_{k=1}^{K}\left|\sum_{x-y<p\leqslant x}e(\alpha kp^n)\right|\ll Ky\left(\frac{1}{q}+\frac{1}{y}+\frac{q}{Ky^n}+\frac{1}{K^{2^{n-1}}}\right)^{2^{-n-1}}\mathscr{L}^{\frac{n^2}{2^{n+1}}}.$$

Доказательство теоремы 1 проводится методом Г. Вейля в соединении с идеями работ [5, 6, 7]. В этих работах, при выводе асимптотической формулы в обобщениях проблем Варинга и Эстермана с почти пропорциональными слагаемыми, теорема Хуа Ло-кена ([8], лемма 2.5) о среднем значении тригонометрической суммы

$$T(\alpha,x)=\sum_{m\leqslant x}e(\alpha m^n)$$

обобщается для коротких тригонометрических сумм Г. Вейля вида

$$T(\alpha;x,y)=\sum_{x-y<m\leqslant x}e(\alpha m^n),$$

и получена нетривиальная оценка сумм $T(\alpha;x,y)$ в малых дугах.

Теперь определим область значений параметров K, q и y при которых полученная оценка в теореме 1 является нетривиальной.

Следствие 1. *Пусть выполняются условия теоремы 1 и пусть*

$$K \gg \mathscr{L}^{4A+\frac{n^2}{2^{n-1}}}, \qquad \mathscr{L}^{2^{n+1}A+n^2} \ll q \ll Ky^2\mathscr{L}^{-2^{n+1}A-n^2}, \qquad y \gg \mathscr{L}^{2^{n+1}A+n^2},$$

где $A \geqslant 2$ — абсолютная фиксированная постоянная. Тогда справедлива оценка

$$V_n(K,x,y) \ll Ky\mathscr{L}^{-A}.$$

Из следствия 1 модифицированным методом «стаканчиков И. М. Виноградова», который разработали Г. И. Архипов и В. Н. Чубариков [9, 10], следует утверждение:

Следствие 2. *Пусть x — достаточно большое целое число, $A \geqslant 2$ — абсолютная фиксированная постоянная, α — вещественное,*

$$\left|\alpha - \frac{a}{q}\right| \leqslant \frac{1}{q^2}, \qquad (a,q)=1, \qquad \mathscr{L}^{2^{n+1}(A+2)+n^2} \ll q \ll y^3\mathscr{L}^{-2^{n+1}(A+2)-n^2}.$$

Тогда при $y \gg \mathscr{L}^{2^{n+1}A+n^2}$ для $F_\alpha(x,y,\sigma)$ — количества членов последовательности $\{\alpha p^n\}$, таких, что $x-y<p\leqslant x$ и $\{\alpha p^n\}<\sigma$, имеет место асимптотическая формула

$$F_\alpha(x,y,\sigma) = \sigma(\pi(x)-\pi(x-y)) + O\left(\frac{y}{\mathscr{L}^A}\right),$$

где $\pi(x)$ — количество простых чисел не превосходящих числа x.

Из следствие 2 для $F_\alpha(x,y,\mu,\nu)$ — количество членов последовательности $\{\alpha p^n\}$ таких, что $x-y<p\leqslant x$ и $\mu \leqslant \{\alpha p^n\} < \nu$, причём $0\leqslant\mu<\nu\leqslant 1$, воспользовавшись соотношением

$$F_\alpha(x,y,\mu,\nu) = F_\alpha(x,y,\nu) - F_\alpha(x,y,\mu),$$

получим следующее утверждение:

Следствие 3. *Пусть x — достаточно большое целое число, $A \geqslant 2$ — абсолютная фиксированная постоянная, α — вещественное,*

$$\left|\alpha - \frac{a}{q}\right| \leqslant \frac{1}{q^2}, \qquad (a,q)=1, \qquad \mathscr{L}^{2^{n+1}(A+2)+n^2} \ll q \ll y^3\mathscr{L}^{-2^{n+1}(A+2)-n^2}.$$

Тогда при $y \gg \mathscr{L}^{2^{n+1}A+n^2}$ для $F_\alpha(x,y,\mu,\nu)$ — количества членов последовательности $\{\alpha p^n\}$, таких, что $x-y<p\leqslant x$ и $\mu\leqslant\{\alpha p\}<\nu$, причём $0\leqslant\mu<\nu\leqslant 1$, имеет место асимптотическая формула

$$F_\alpha(x,y,\mu,\nu) = (\nu-\mu)(\pi(x)-\pi(x-y)) + O\left(\frac{y}{\mathscr{L}^A}\right).$$

Из следствия 3 для отклонения

$$D_\alpha(x,y) = \sup_{0\leqslant\mu<\nu\leqslant 1}\left|\frac{F_\alpha(x,y,\mu,\nu)}{\pi(x-y)-\pi(x)} - (\nu-\mu)\right|$$

членов последовательности $\{\alpha p^n\}$ таких, что $x-y<p\leqslant x$, получаем следующее утверждение:

Следствие 4. *Пусть x — достаточно большое целое число, $A \geqslant 2$ — абсолютная фиксированная постоянная, α — вещественное,*

$$\left|\alpha - \frac{a}{q}\right| \leqslant \frac{1}{q^2}, \qquad (a,q)=1, \qquad \mathscr{L}^{2^{n+1}(A+2)+n^2} \ll q \ll y^3\mathscr{L}^{-2^{n+1}(A+2)-n^2}.$$

Тогда при $y \gg \mathscr{L}^{2^{n+1}A+n^2}$ *для отклонения* $D_\alpha(x,y)$ *членов последовательности* $\{\alpha p^n\}$, *таких, что* $x-y<p\leqslant x$, *справедлива следующая оценка*

$$D_\alpha(x,y) \ll \frac{y\mathscr{L}^{-A}}{\pi(x)-\pi(x-y)}.$$

Из следствия 4 и теоремы Хис-Брауна [11] о правильном порядке числа простых чисел в интервале малой длины $(x-y,x]$ при $y \geqslant x^{\frac{7}{12}}$ получаем следующий критерий равномерной распределённости по модулю единица для последовательности $\{\alpha p^n\}$ при условии, что аргумент p принимает значения из интервала малой длины $(x-y,x]$.

Следствие 5. *Пусть* x *— достаточно большое целое число,* $A \geqslant 2$ *— абсолютная фиксированная постоянная,* α *— вещественное,*

$$\left|\alpha-\frac{a}{q}\right| \leqslant \frac{1}{q^2}, \qquad (a,q)=1, \qquad \mathscr{L}^{2^{n+1}(A+2)+n^2} \ll q \ll y^3\mathscr{L}^{-2^{n+1}(A+2)-n^2}.$$

Тогда последовательность $\{\alpha p^n\}$ *при* $x-y<p\leq x$ *и* $y \gg x^{\frac{7}{12}}$ *является равномерно распределённой по модулю, равной единице.*

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Виноградов И. М. Избранные труды — М: Изд-во АН СССР, 1952 г.

2. Рахмонов З. Х. Теорема о среднем значении $\psi(x,\chi)$ и ее приложения // Известия РАН. Сер. матем. 1993. Т. 57, № 4. С. 55 – 71.

3. Рахмонов Ф З. Оценка квадратичных тригонометрических с простыми числами // Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика. 2011. № 3. С. 56 – 60.

4. Рахмонов З. Х., Рахмонов Ф. З. Сумма коротких тригонометрических сумм с простыми числами // Доклады Академии наук. 2014. Т. 459, № 2. С. 156 – 157.

5. Рахмонов З. Х., Рахмонов Ф З. Асимптотическая формула в проблеме Варинга с почти пропорциональными слагаемыми // Чебышевский сборник. 2024. Т. 25. № 2(93). С. 139-168.

6. Рахмонов Ф З. Асимптотическая формула в обобщении тернарной проблемы Эстермана с почти пропорциональными слагаемыми // Чебышевский сборник. 2024. Т. 25. № 4(95). С. 120–137.

7. Рахмонов Ф З. Оценка коротких тригонометрических сумм Г. Вейля в малых дугах // Доклады Национальной академии наук Таджикистана. 2024. Т. 67. № 5-6. С. 238-242.

8. Вон Р. Метод Харди–Литтлвуда — Москва: Мир, 1985.

9. Архипов Г. И., Чубариков В. Н. Три теоремы о тригонометрических суммах из анализа // Доклады Российской Академии наук. 1994. Т. 335. № 4. С. 407–408.

10. Архипов Г. И., Садовничий В. А., Чубариков В. Н. Лекции по математическому анализу // Москва: Дрофа. 2004. 635с.

11. Heath-Brown D. R. The number of primes in a short interval // Journal für die reine und angewandte Mathematik. 1988. V. 389. P. 22-63.

УДК 511.36

Развитие метода Зигеля — Шидловского в теории трансцендентных чисел (к 110-летию со дня рождения А. Б. Шидловского)

В. Г. Чирский (Россия, г. Москва)
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
e-mail:vgchirskii@yandex.ru

Development of the Siegel–Shidlovsky method in the theory of transcendental numbers (on the occasion of the 110th anniversary of the birth of A. B. Shidlovsky)

V. G. Chirskii (Russia, Moscow)
Moscow Lomonosov State University
e-mail:vgchirskii@yandex.ru

Развитие метода Зигеля — Шидловского в теории трансцендентных чисел (к 110-летию со дня рождения А. Б. Шидловского)

Биография А. Б. Шидловского. История развития метода Зигеля-Шидловского в теории трансцендентных чисел. Истоки метода - теоремы Ш. Эрмита и Ф. Линдеманна о трансцендентности чисел e иpi и алгебраической независимости совокупности значений показательной функции в линейно-независимых алгебраических точках. Работы К. Зигеля 1929 года и 1949 года. Определение Е-функции, формулировка условия нормальности совокупности Е-функций. Вклад А.Б. Шидловского в развитие теории трансцендентных чисел. Понятие неприводимости. Формулировка основных теорем, дающих критерии алгебраической независимости совокупности значений Е-функций в алгебраических точках. Первая основная теорема относится к случаям однородных дифференциальных уравнений, вторая основная теорема - к случаю неоднородных дифференциальных уравнений, третья основная теорема относится к случаю наличия алгебраических связей между Е-функциями. Количественные результаты. Работа С.Ленга. Понятия меры иррациональности, меры трансцендентности, меры линейной независимости, меры алгебраической независимости чисел. Значения обобщённых гипергеометрических рядов. Теоремы В.А. Олейникова. Теоремы В.Х Салихова, дающие практически полное решение задачи об алгебраических свойствах значений обобщённых гипергеометрических рядов. Теоремы Ф. Бейкерса, В-Д. Браунвелла, Г. Хекманна о нормальности совокупности гипергеометрических рядов.. Гипотеза К. Зигеля о Е-функциях. Доказательство В.А. Горелова этой гипотезы для уравнений второго порядка. Опровержение гипотезы для уравнений более высокого порядка в работах Фишлера, и Т.Ривоаля. Линейная независимость значений Е-функций. Теорема Ю.В. Нестеренко и А.Б. Шидловского. Теоремы И. Андре и Ф. Бейкерса. Аппроксимации Эрмита-Паде гипергеометрических функций и неулучшаемые по высоте оценки. Теоремы А.И. Галочкина, А.Н.Коробова, П.Л.Иванкова. G-функции Зигеля. Теоремы М.С.Нурмагомедова, А.И. Галочкина, Г.В. Чудновского, Э. Бомбьери. F-ряды и Э-ряды. Вопросы алгебраической независимости в прямых произведениях полей. Работы В.Г.Чирского, Д.Бертрана, В.В.Зудилина, Т. Матала-Ахо. Суммирование Э-рядов. Д.Фергюсон, Т. Ривоаль, С.Фишлер.

Секция 1. Группы

УДК 512.543

Об отделимости абелевых подгрупп некоторых обобщенных свободных произведений двух групп[1]

Д. Р. Баранов (Россия, г. Иваново)
Ивановский государственный университет
e-mail: d.r.baranov.404@gmail.com
Е. В. Соколов (Россия, г. Иваново)
Ивановский государственный университет
e-mail: ev-sokolov@yandex.ru

On the abelian subgroup separability of certain generalized free products of two groups

D. R. Baranov (Russia, Ivanovo)
Ivanovo State University
e-mail: d.r.baranov.404@gmail.com
E. V. Sokolov (Russia, Ivanovo)
Ivanovo State University
e-mail: ev-sokolov@yandex.ru

Настоящая работа продолжает начатые в [1] (и анонсированные в [2]) исследования отделимости абелевых подгрупп обобщенных свободных произведений двух групп. Чтобы сформулировать полученные в ней результаты, приведем ряд определений и сведений из [1, 2].

Нетривиальный (т. е. содержащий хотя бы одну неединичную группу) класс групп $\mathcal{C}$ будем называть *корневым*, если он замкнут относительно взятия подгрупп, расширений и декартовых произведений вида $\prod_{y \in Y} X_y$, где $Y \in \mathcal{C}$ и X_y — изоморфная копия фиксированной группы $X \in \mathcal{C}$ для каждого элемента $y \in Y$. Нетрудно показать, что корневыми являются, например, классы всех конечных групп, конечных p-групп (где p — простое число), периодических π-групп конечного периода (где π — непустое множество простых чисел), всех разрешимых групп и всех групп без кручения. Легко видеть также, что нетривиальное пересечение любого числа корневых классов — снова корневой класс.

Следуя [3], будем говорить, что подгруппа Y группы X *$\mathcal{C}$-отделима* в этой группе, если для любого элемента $x \in X \setminus Y$ найдется гомоморфизм σ группы X на группу из класса $\mathcal{C}$ такой, что $x\sigma \notin Y\sigma$. Отметим, что группа X *аппроксимируется классом* $\mathcal{C}$ (или, более коротко, *является $\mathcal{C}$-аппроксимируемой*) тогда и только тогда, когда ее единичная подгруппа $\mathcal{C}$-отделима. Напомним также, что отделимость и аппроксимируемость классом всех конечных групп принято называть *финитной*.

Чжоу и Ким [4, 5] показали, что при изучении финитной отделимости конечно порожденных абелевых подгрупп обобщенных свободных произведений и HNN-расширений групп могут использоваться те же методы, что и при исследовании финитной аппроксимируемости. В [6, 7] их результаты распространены на случай произвольного корневого аппроксимирующего класса групп и фундаментальной группы произвольного графа групп. Предложенный

[1] Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 24-21-00307, `https://rscf.ru/project/24-21-00307/`

подход позволяет получить описание $\mathcal{C}$-отделимых конечно порожденных абелевых подгрупп практически для любой свободной конструкции, аппроксимируемость которой корневым классом $\mathcal{C}$ была установлена ранее.

Если $\mathcal{C}$ — класс групп, состоящий из периодических групп, то через $\mathfrak{P}(\mathcal{C})$ будем обозначать множество всех простых делителей порядков элементов групп из класса $\mathcal{C}$. В случае, когда класс $\mathcal{C}$ содержит хотя бы одну непериодическую группу, положим $\mathfrak{P}(\mathcal{C})$ равным множеству всех простых чисел. Будем говорить, что подгруппа Y группы X *$\mathfrak{P}(\mathcal{C})'$-изолирована* в этой группе, если для любого элемента $x \in X$ и для любого простого числа $q \notin \mathfrak{P}(\mathcal{C})$ из включения $x^q \in Y$ следует, что $x \in Y$.

Очевидно, что если множество $\mathfrak{P}(\mathcal{C})$ содержит все простые числа, то любая подгруппа оказывается $\mathfrak{P}(\mathcal{C})'$-изолированной. Нетрудно показать также, что если подгруппа Y $\mathcal{C}$-отделима в группе X, то она $\mathfrak{P}(\mathcal{C})'$-изолирована в этой группе. Как следствие, свойство $\mathcal{C}$-отделимости имеет смысл изучать лишь в отношении $\mathfrak{P}(\mathcal{C})'$-изолированных подгрупп. В связи с этим соображением и с характером интересующих нас подгрупп *$\mathcal{C}$-дефектом* группы X будем называть семейство $\mathfrak{P}(\mathcal{C})'$-изолированных конечно порожденных абелевых подгрупп данной группы, каждая из которых не является $\mathcal{C}$-отделимой в X.

Всюду далее запись $G = \langle A * B;\, H \rangle$ будет означать, что G — свободное произведение групп A и B с объединенной подгруппой H. Пусть (X, Y) — пара конечно порожденных абелевых подгрупп группы G и символ Z обозначает один из свободных множителей A, B. Рассмотрим следующий набор условий.

$(\lambda_{\mathcal{C}}^{Z})$ X — $\mathfrak{P}(\mathcal{C})'$-изолированная подгруппа группы Z, не являющаяся $\mathcal{C}$-отделимой в этой группе (и, следовательно, принадлежащая ее $\mathcal{C}$-дефекту); $Y = 1$.

$(\mu_{\mathcal{C}}^{Z})$ X — подгруппа группы H, $\mathfrak{P}(\mathcal{C})'$-изолированная в группе Z, но не являющаяся $\mathcal{C}$-отделимой в этой группе (и, следовательно, принадлежащая ее $\mathcal{C}$-дефекту); Y — бесконечная циклическая подгруппа, $Y \cap Z = 1$ и $[X, Y] = 1$.

Обозначим через $\mathfrak{D}_{\mathcal{C}}(G)$ семейство всех пар конечно порожденных абелевых подгрупп группы G, удовлетворяющих хотя бы одному из условий $(\lambda_{\mathcal{C}}^{A})$, $(\lambda_{\mathcal{C}}^{B})$, $(\mu_{\mathcal{C}}^{A})$, $(\mu_{\mathcal{C}}^{B})$, и положим $\mathfrak{A}_{\mathcal{C}}(G) = \{XY \mid (X, Y) \in \mathfrak{D}_{\mathcal{C}}(G)\}$.

Известно, что произвольная конечно порожденная абелева подгруппа группы G сопряжена либо с подгруппой одного из свободных множителей A, B, либо с прямым произведением подгрупп X и Y, где $X \leqslant H$, Y — бесконечная циклическая подгруппа, $Y \nleqslant A$ и $Y \nleqslant B$. Поэтому для задания семейства $\mathfrak{A}_{\mathcal{C}}(G)$, помимо умения строить конечно порожденные абелевы подгруппы группы G, достаточно знать лишь $\mathcal{C}$-дефекты групп A и B. Приводимые далее теоремы 1 и 2 указывают некоторые случаи, в которых описание $\mathcal{C}$-дефекта обобщенного свободного произведения G можно дать с использованием семейства $\mathfrak{A}_{\mathcal{C}}(G)$.

Напомним, что подгруппа Y группы X называется *ретрактом* этой группы, если существует гомоморфизм группы X, отображающий ее на подгруппу Y и действующий тождественно на последней. Будем говорить также, что группа X *$\mathcal{C}$-квазирегулярна* по подгруппе Y, если для каждой нормальной подгруппы M группы Y из включения $Y/M \in \mathcal{C}$ следует существование нормальной подгруппы N группы X, удовлетворяющей условиям $X/N \in \mathcal{C}$ и $N \cap Y \leqslant M$. Отметим, что понятие $\mathcal{C}$-квазирегулярности тесно связано с $\mathcal{C}$-отделимостью и весьма часто выступает в качестве одного из достаточных условий $\mathcal{C}$-аппроксимируемости обобщенного свободного произведения двух групп.

Теорема 1. *Пусть $G = \langle A * B;\, H \rangle$, $\mathcal{C}$ — корневой класс групп, подгруппа H $\mathcal{C}$-отделима в группе A и является ретрактом группы B. Пусть также группы A и B $\mathcal{C}$-аппроксимируемы и группа A $\mathcal{C}$-квазирегулярна по подгруппе H. При таких предположениях $\mathfrak{P}(\mathcal{C})'$-изолированная конечно порожденная абелева подгруппа группы G является $\mathcal{C}$-дефектной тогда и только тогда, когда она сопряжена с некоторой подгруппой из семейства $\mathfrak{A}_{\mathcal{C}}(G)$. В частности, группа G не имеет $\mathcal{C}$-дефекта, если $\mathcal{C}$-дефекта нет в группах A и B.*

Следствием теоремы 1 служит

Теорема 2. *Пусть $G = \langle A * B;\, H\rangle$, $\mathcal{C}$ — корневой класс групп, группы A и B $\mathcal{C}$-аппроксимируемы и подгруппа H является ретрактом каждой из них. При таких предположениях $\mathfrak{P}(\mathcal{C})'$-изолированная конечно порожденная абелева подгруппа группы G является $\mathcal{C}$-дефектной тогда и только тогда, когда она сопряжена с некоторой подгруппой из семейства $\mathfrak{A}_{\mathcal{C}}(G)$. В частности, группа G не имеет $\mathcal{C}$-дефекта, если $\mathcal{C}$-дефекта нет в группах A и B.*

Отметим, что $\mathcal{C}$-аппроксимируемость обобщенного свободного произведения G, удовлетворяющего условиям теоремы 1, установлена в [8]. $\mathcal{C}$-аппроксимируемость свободного произведения двух $\mathcal{C}$-аппроксимируемых групп с объединенными ретрактами доказана ранее в [9]. Отметим еще, что теорема 2 обобщает теорему 1.1 из [10], в которой речь идет об отделимости циклических подгрупп такого же обобщенного свободного произведения классами всех конечных и конечных p-групп.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Баранов Д. Р., Соколов Е. В. Об отделимости абелевых подгрупп свободного произведения двух групп с нормальной объединенной подгруппой // Сиб. матем. журн. 2025. Т. 66, № 2. С. 165–179.

2. Баранов Д. Р., Соколов Е. В. Об отделимости подгрупп некоторых свободных произведений групп с нормальной объединенной подгруппой // Алгебра, теория чисел, дискретная геометрия и многомасштабное моделирование: Современные проблемы, приложения и проблемы истории: Материалы XXIII Междунар. конф., посвященной 80-летию проф. А. И. Галочкина и 75-летию проф. В. Г. Чирского (Тула, 29–31 октября 2024 г.) — Тула: Тул. гос. пед. ун-т им. Л. Н. Толстого, 2024. С. 16–20.

3. Мальцев А. И. О гомоморфизмах на конечные группы // Учен. зап. Иван. гос. пед. ин-та. 1958. Т. 18. С. 49–60.

4. Zhou W., Kim G. Abelian subgroup separability of certain HNN extensions // Int. J. Algebra Comput. 2018. Vol. 28, № 3. P. 543–552.

5. Zhou W., Kim G. Abelian subgroup separability of certain generalized free products of groups // Algebra Colloq. 2020. Vol. 27, № 4. P. 651–660.

6. Соколов Е. В. Об отделимости абелевых подгрупп фундаментальных групп графов групп. I // Сиб. матем. журн. 2023. Т. 64, № 5. С. 1083–1093.

7. Соколов Е. В. Об отделимости абелевых подгрупп фундаментальных групп графов групп. II // Сиб. матем. журн. 2024. Т. 65, № 1. С. 207–228.

8. Соколов Е. В., Туманова Е. А. Достаточные условия аппроксимируемости некоторых обобщенных свободных произведений корневыми классами групп // Сиб. матем. журн. 2016. Т. 57, № 1. С. 171–185.

9. Азаров Д. Н., Туманова Е. А. Об аппроксимируемости обобщенных свободных произведений групп корневыми классами // Науч. тр. Иван. гос. ун-та. Математика. 2008. Вып. 6. С. 29–42.

10. Bobrovskii P. A., Sokolov E. V. The cyclic subgroup separability of certain generalized free products of two groups // Algebra Colloq. 2010. V. 17, № 4. P. 577–582.

УДК 512.54

О сопряженности конечных множеств подгрупп в свободных произведениях с объединением

И. В. Добрынина (Россия, г. Москва)
Московский технический университет связи и информатики
e-mail: dobrynirina@yandex.ru

On the conjugacy of finite sets of subgroups in amalgamated products of groups

I. V. Dobryninaй (Russia, Moscow)
Moscow Technical University of Communications and Informatics
e-mail: dobrynirina@yandex.ru

В данной работе рассматривается проблема сопряженности конечных множеств конечно порожденных подгрупп в свободном произведении групп с объединением по конечной подгруппе.

Определение 1. *Будем говорить, что в группе G разрешима проблема вхождения, если существует алгоритм, позволяющий для любого элемента $w \in G$ и любой конечно порожденной подгруппы $H < G$ установить, принадлежит w подгруппе H или нет.*

Определение 2. *Группа G удовлетворяет условию максимальности, если всякая возрастающая последовательность ее подгрупп $H_1 \leq H_2 \leq \ldots$ стабилизируется, то есть существует такое натуральное число N, что для любого $n, n > N$, $H_n = H_{n+1} = \ldots$.*

Лемма 1. *[1] Пусть $G = G_1 *_U G_2$, и*

1) U удовлетворяет условию максимальности;

2) в G_1, G_2 разрешимы проблемы вхождения;

3) существует алгоритм, позволяющий для любой конечно порожденной подгруппы $H < G_i, i = \overline{1,2}$, и любого элемента $w \in G_i, i = \overline{1,2}$, установить, пусто или нет пересечение $wH \cap U$;

4) существует алгоритм, выписывающий для любой конечно порожденной подгруппы $H < G_i, i = \overline{1,2}$, и подгруппы U образующие их пересечения,

тогда в группе G разрешима проблема вхождения.

Лемма 2. *Если в группе $G = G_1 *_U G_2$, где U – конечная подгруппа, в сомножителях $G_i, i = \overline{1,2}$, разрешима проблема вхождения, то в группе G разрешима проблема вхождения.*

Лемма 3. *[2] Если в группе $G = G_1 *_U G_2$, где U – конечная подгруппа, сомножители $G_i, i = \overline{1,2}$, обладают свойством: нормализатор произвольной конечно порожденной подгруппы группы G_i конечно порожден, то нормализатор произвольной конечно порожденной подгруппы группы G конечно порожден.*

Лемма 4. *[2] Если в группе $G = G_1 *_U G_2$, где U – конечная подгруппа, в сомножителях $G_i, i = \overline{1,2}$, нормализатор произвольной конечно порожденной подгруппы группы G_i конечно порожден, разрешимы проблемы вхождения и построения нормализатора конечно порожденной подгруппы, то существует алгоритм, позволяющий построить нормализатор произвольной конечно порожденной подгруппы группы G.*

Определение 3. *Будем говорить, что в группе G разрешима проблема сопряженности подгрупп, если существует алгоритм, позволяющий для любых двух конечно порожденных подгрупп H_1, H_2 из G установить, существует ли элемент $z \in G$ такой, что $z^{-1}H_1z = H_2$.*

Лемма 5. *[3] Если в группе $G = G_1 *_U G_2$, где U – конечная подгруппа, в сомножителях $G_i, i = \overline{1,2}$, разрешимы проблемы вхождения и сопряженности подгрупп, то в группе G разрешима проблема сопряженности подгрупп.*

Определение 4. *Будем говорить, что в группе G разрешима проблема пересечения классов смежности, если существует алгоритм, позволяющий для любых конечно порожденных подгрупп H_1, H_2 и любых слов $w_1, w_2 \in G$, установить, пусто или нет пересечение $w_1H_1 \cap w_2H_2$.*

Лемма 6. *[1] Если в группе $G = G_1 *_U G_2$, где U – конечная подгруппа, в сомножителях $G_i, i = \overline{1,2}$, разрешимы:*

1) проблема пересечения классов смежности;

2) проблема пересечения подгрупп,

то в группе G разрешимы проблемы 1) и 2).

Обобщением определения 4 является следующее:

Определение 5. *Будем говорить, что в группе G разрешима проблема пересечения конечного числа классов смежности, если существует алгоритм, позволяющий для любых конечно порожденных подгрупп $H_1, H_2, \ldots H_n$ и любых слов $w_1, w_2, \ldots w_n \in G$ установить, пусто или нет пересечение $w_1H_1 \cap w_2H_2 \ldots \cap w_nH_n$.*

Лемма 7. *Если в группе $G = G_1 *_U G_2$, где U – конечная подгруппа, в сомножителях $G_i, i = \overline{1,2}$, разрешима проблема пересечения конечного числа классов смежности, то в группе G разрешима проблема пересечения конечного числа классов смежности.*

Определение 6. *Будем говорить, что в группе G разрешима проблема сопряженности конечных множеств подгрупп, если существует алгоритм, позволяющий для любых двух конечных множеств конечно порожденных подгрупп $\{H_i\}$ и $\{H'_i\}, i = \overline{1,n}$, группы G установить, существует ли $z \in G$ такое, что $\&_{i=1}^{n} z^{-1}H_iz = H'_i$.*

Теорема 1. *Если в группе $G = G_1 *_U G_2$, где U – конечная подгруппа, в сомножителях $G_i, i = \overline{1,2}$, нормализатор произвольной конечно порожденной подгруппы группы G_i конечно порожден и разрешимы следующие проблемы:*

1) проблема пересечения конечного числа классов смежности;

2) проблема построения нормализатора;

3) проблема сопряженности конечных множеств подгрупп,

то в группе G разрешима проблема сопряженности конечных множеств подгрупп.

Лемма 8. *Если в группе G выполнены условия:*

1) пересечение конечно порожденных подгрупп есть конечно порожденная подгруппа;

2) разрешима проблема пересечения классов смежности;

3) существует алгоритм, выписывающий образующие пересечения двух конечно порожденных подгрупп,

то в G разрешима проблема пересечения конечного числа классов смежности.

Теорема 2. *Если в группе $G = G_1 *_U G_2$, где U – конечная подгруппа, в сомножителях $G_i, i = \overline{1,2}$, нормализатор произвольной конечно порожденной подгруппы группы G_i конечно порожден, пересечение конечно порожденных подгрупп есть конечно порожденная подгруппа и разрешимы следующие проблемы:*

1) проблема пересечения классов смежности;

2) проблема построения нормализатора;

3) существует алгоритм, выписывающий образующие пересечения двух конечно порожденных подгрупп;

4) проблема сопряженности конечных множеств подгрупп,

то в группе G разрешима проблема сопряженности конечных множеств подгрупп.

Данная проблема является обобщением результата И. С. Безверхней для свободных произведений групп [4].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Безверхний В. Н. О пересечении подгрупп в HNN-группах // Фундаментальная и прикладная математика. 1998. Т. 4, № 1. С. 199–222.
2. Добрынина И. В. О нормализаторах подгрупп в древесных произведениях групп // Алгебра, теория чисел, дискретная геометрия и многомасштабное моделирование: современные проблемы приложения и проблемы истории. Материалы XXIII Международной конференции. Тула, 2024. С. 25–27.
3. Безверхний В. Н. Решение проблемы сопряженности подгрупп в одном классе HNN-групп // Алгоритмические проблемы теории групп и полугрупп. Тула: ТГПИ, 1982. № 2. С. 50–80.
4. Безверхняя И. С. О сопряженности конечных множеств подгрупп в свободном произведении групп // Алгоритмические проблемы теории групп и полугрупп. Тула: ТГПИ, 1981. С. 102–116.

УДК 511.32

Серии комбинаторных конфигураций на группах

А. А. Фролов (Россия, г. Москва)
НКО «Фонд содействия развитию безопасных информационных технологий»
e-mail:faa75@yandex.ru

A series of combinatorial configurations on finite groups

A. A. Frolov (Russia, t. Moscow)
The Fund of assistance to development of secure information technologies
e-mail:faa75@yandex.ru

В настоящей работе рассматривается задание неабелевых групп системами образующих и определяющих соотношений. Соотношения эти возникают в связи с попыткой определения на группах системы комбинаторных объектов, согласованных с групповой операцией, определенных в работе [1]

Определение 1. *Пара (G, H), где G– конечная группа, а $H \subset G$ – ее непустое подмножество, называется (v, k)-группой, если $|G| = v$, $|H| = k$ и найдется $S \subset G$, $|S| = k$, удовлетворяющее условиям: $|H \bigcap S|$– нечетно, $|H \bigcap gS|$–четна для всех $g \in G \backslash \{e\}$.*

В статье [2] проведена классификация абелевых $(v,5)$-групп. Показано, что большую часть их составляют инволютивные $(v,5)$-группы, то есть такие $(v,5)$-группы (G,H,S), для которых $S = H^{-1}$. В отличие от $(v,3)$-групп, которые все являются абелевыми, среди $(v,5)$-групп существуют примеры неабелевых $(v,5)$-групп уже при $v=12$, и даже при $v=8$. Минимальной неабелевой $(v,5)$-группой является $(6,5)$-группа $(S_3, S_3\backslash\{id\}, S_3\backslash\{id\})$. В настоящем работе описывается ряд бесконечных серий инволютивных неабелевых $(v,5)$-групп. Напомним, что согласно [1], (v,k)-группа называется инволютивной, если $S=H^{-1}$ и $e \in H \cap S$.

Для описания и построения (v,k)-групп в работе [1] предложен универсальный способ. Для (v,k)-групп с заданным нечётным значением k этот способ (в неабелевом случае) заключается в следующем.

Пусть $\mathbb{Z}_k = \{0,1,\ldots,k-1\}$, и для каждого разбиения множества $\mathbb{Z}_k^2\backslash\{(0,0)\}$ на непересекающиеся 2-подмножества

$$\mathbb{Z}_k^2\backslash\{(0,0)\} = \bigcup_{1\leqslant\alpha\leqslant\frac{k^2-1}{2}} \mathrm{N}_\alpha,$$

$$\text{где } |\mathrm{N}_\alpha| = 2,\ i\neq r,\ j\neq t \text{ для } (i,j)\neq(r,t)\in\mathrm{N}_\alpha, \tag{1}$$

составляется система соотношений

$$\begin{gathered} h_i s_j^{-1} = h_r s_t^{-1}, (i,j),(r,t)\in\mathrm{N}_\alpha, \quad 1\leqslant\alpha\leqslant\tfrac{k^2-1}{2}, \\ h_0 = s_0 = e, \end{gathered} \tag{2}$$

для абстрактной системы образующих $h_0, h_1, \ldots, h_{k-1},\ s_0, s_1, \ldots, s_{k-1}$.

Теперь описание всех (v,k)-групп сводится к описанию всех конечных групп G с абстрактной системой образующих $h_0, h_1, \ldots, h_{k-1},\ s_0, s_1, \ldots, s_{k-1}$, для которых выполняются соотношения вида (2), а также некоторые дополнительные соотношения. При этом также необходимо, чтобы все элементы $h_0, h_1, \ldots, h_{k-1}$, как и $s_0, s_1, \ldots, s_{k-1}$ были различны. Тогда тройка (G,H,S), где $H=\{h_0,h_1,\ldots,h_{k-1}\}$, $S=\{s_0,s_1,\ldots,s_{k-1}\}$, $G=\langle H\rangle=\langle S\rangle$, $|G|=v$, будет (v,k)-группой.

Некоторые разбиения вида (1) не задают никаких (v,k)-групп. Это бывает, когда из соотношений (2) следует, что не все элементы $\{h_0,h_1,\ldots,h_{k-1}\}$ или $\{s_0,s_1,\ldots,s_{k-1}\}$ различны. Такие разбиения назовём *противоречивыми*.

Если группа является инволютивной, то выполняются соотношения $h_i s_0^{-1} = h_0 s_i^{-1}$, и разбиение (1) индуцирует разбиение

$$(\mathbb{Z}_k\backslash\{0\})^2 = \bigcup_{1\leqslant\alpha\leqslant\frac{(k-1)^2}{2}} \mathrm{N}'_\alpha, \quad |\mathrm{N}'_\alpha| = 2. \tag{3}$$

Среди этих разбиений будем рассматривать только разбиения, удовлетворяющие свойству $i\neq r, j\neq t$ для $(i,j)\neq(r,t)\in\mathrm{N}'_\alpha$ (только такие разбиения могут быть непротиворечивыми) и составлять систему соотношений

$$h_i h_j = h_r h_t, \quad (i,j),(r,t)\in\mathrm{N}'_\alpha, \quad 1\leqslant\alpha\leqslant\frac{(k-1)^2}{2}. \tag{4}$$

Далее обозначим множество индексов блоков разбиения $\left\{1,2,\ldots,\frac{(k-1)^2}{2}\right\}$ через A. Два разбиения $\bigcup_{\alpha\in A}\mathrm{N}_\alpha$ и $\bigcup_{\alpha\in A}\mathrm{M}_\alpha$ вида (3) назовём *эквивалентными*, если найдётся подстановка $\pi\in S_{k-1}$, такая, что

$\forall\alpha\in A\ \exists\beta\in A : \mathrm{M}_\alpha = \{(\pi(i),\pi(j)),(\pi(r),\pi(t))\}, \quad \mathrm{N}_\beta = \{(i,j),(r,t)\}$ или $\forall\alpha\in A\ \exists\beta\in A :$ $\mathrm{M}_\alpha = \{(\pi(i),\pi(j)),(\pi(r),\pi(t))\}, \quad \mathrm{N}_\beta = \{(j,i),(t,r)\}$.

Эквивалентные разбиения задают или одинаковые множества инволютивных (v,k)-групп или множества инволютивных (v,k)-групп, отличающиеся заменой (G,H,S) на (G,S,H).

Рассмотрим случай, когда $k=5$. Заметим, что в этом случае для любого разбиения (3) найдется эквивалентное ему разбиение $\bigcup\limits_{\alpha\in A}\mathrm{M}_\alpha$, удовлетворяющее одному из свойств:

A) $\mathrm{M}_\alpha=\{(1,1),(2,2)\}$ для некоторого $\alpha\in A$.

B) $\mathrm{M}_\alpha=\{(1,1),(2,3)\}$ для некоторого $\alpha\in A$.

Действительно в любом разбиении вида (3) элемент $(1,1)$ будет входить в пару либо с элементом (i,i), $i\neq 1$, либо с элементом (i,j), $i\neq j\geqslant 2$.

Разбиения, удовлетворяющие свойству A), в свою очередь эквивалентны разбиениям, дополнительно удовлетворяющим одному из свойств:

A1. $\mathrm{M}_\beta=\{(1,2),(2,1)\}$ для некоторого $\beta\in A$.

A2. $\mathrm{M}_\beta=\{(1,2),(2,3)\}$ для некоторого $\beta\in A$.

A3. $\mathrm{M}_\beta=\{(1,2),(3,3)\}$ для некоторого $\beta\in A$.

A4. $\mathrm{M}_\beta=\{(1,2),(3,4)\}$ для некоторого $\beta\in A$.

Рассмотрим случай A2 (в этом случае получим заведомо неабелевы инволютивные $(v,5)$-группы, если, конечно, они существуют).

Далее обозначим для удобства $h_1,h_2,h_3,\ h_4$ через a,b,c,d.

В случае A2 для элементов множества H выполняются соотношения:

$$a^2=b^2,\ ab=bc. \tag{5}$$

Все группы, удовлетворяющие этим соотношениям будут неабелевыми (в абелевой группе, удовлетворяющей соотношениям (5), $a=c$).

Неабелевы инволютивные $(v,5)$-группы, получаемые при рассмотрении случая A2, описываются следующим образом.

Теорема 1. *Пусть (G,H,S) – инволютивная $(v,5)$-группа и $H=\{e,a,b,c,d\}$. Если $a^2=b^2$, $ab=bc$, то группа (G,H,S) является гомоморфным образом одной из следующих групп:*

1. *$\hat G=\mathbb{Z}\times D_4$, где $D_4=\left\langle z,\tau\middle| z^2=e,\tau^4=e,z\tau z=\tau^{-1}\right\rangle$ – группа диэдра, $\mathbb{Z}=\langle d\rangle$, $\hat H=\left\{e,dz,dz\tau,dz\tau^2,d\right\}$;*
2. *$\hat G=G'\times\mathbb{Z}_2$, где $G'=\left\langle a,\tau\,\middle|\,\tau^4=e,\ a^{-1}\tau a=\tau^{-1}\right\rangle$, $\mathbb{Z}_2=\langle z\rangle$, $\hat H=\left\{e,a,a\tau,a\tau^2,a\tau z\right\}$;*
3. *$\hat G=\left\langle a,\tau\,\middle|\,\tau^7=e,\ a^{-1}\tau a=\tau^{-1}\right\rangle$, $\hat H=\left\{e,a,a\tau,a\tau^2,a\tau^4\right\}$.*

Перечисленные в формулировке теоремы 1 бесконечные группы $\widehat G$ с выделенным подмножествами $\widehat H$ и $\widehat S=\widehat H^{-1}$ будем называть инволютивными 5-группами. Для них выполняются все условия определения $(v,5)$-группы, кроме условия конечности группы G. Эти группы можно считать максимальными для случая A2, так как другие 5-группы (в том числе конечные $(v,5)$-группы), удовлетворяющие соотношениям (5), являются их гомоморфными образами при некотором гомоморфизме φ. В качестве множеств H и S для новых групп будут выступать множества $\varphi(\widehat H)$ и $\varphi(\widehat S)$. Для получения 5-группы гомоморфизм φ должен действовать на множестве $\widehat H$ инъективно. Следующие утверждения полностью описывают возможные $(v,5)$-группы как гомоморфные образы максимальных 5-групп. При доказательстве рассматриваются возможные дополнительные соотношения.

Утверждение 1. *Конечные $(v,5)$-группы G, являющиеся гомоморфными образами 5-группы $\widehat{G}=\mathbb{Z}\times D_4$, где $D_4=\left\langle z,\tau|z^2=e,\tau^4=e,z\tau z=\tau^{-1}\right\rangle$ – группа диэдра, $\mathbb{Z}=\langle d\rangle$, $\widehat{H}=\left\{e,dz,dz\tau,dz\tau^2,d\right\}$ исчерпываются следующим списком*

1. $G=\mathbb{Z}_m\times D_4$, *где* $m\geqslant 2$, $D_4=\left\langle z,\tau|z^2=e,\tau^4=e,z\tau z=\tau^{-1}\right\rangle$, $\mathbb{Z}_m=\langle d\rangle$, $H=\left\{e,dz,dz\tau,dz\tau^2,d\right\}$;
2. $G=\left\langle d,z,f\,\middle|\,f^2=e,\ z^2=e,\ d^{4k}=e,\ d\leftrightarrow z,f,\ zfz=fd^{2k}\right\rangle$, $H=\left\{e,dz,d^{k+1}zf,d^{2k+1}z,d\right\}$, $k\geqslant 1$;
3. $G=\mathbb{Z}_m\times D_4$, *где* $D_4=\left\langle z,\tau|z^2=e,\tau^4=e,z\tau z=\tau^{-1}\right\rangle$, $\mathbb{Z}_m=\langle h\rangle$, $m\geqslant 1$ – *нечётно*, $H=\left\{e,hz\tau^2,hz\tau^3,hz,h\tau^2\right\}$.

Утверждение 2. *Конечные $(v,5)$-группы G, являющиеся образами при гомоморфизмах $\varphi:\widehat{G}\to G$ 5-группы $\hat{G}=G'\times\mathbb{Z}_2$, где $G'=\left\langle a,\tau\,\middle|\,\tau^4=e,\ a^{-1}\tau a=\tau^{-1}\right\rangle$, $\mathbb{Z}_2=\langle z\rangle$, $\hat{H}=\left\{e,a,a\tau,a\tau^2,a\tau z\right\}$, исчерпываются следующим списком:*

1. $G=\varphi(G')\times\mathbb{Z}_2$, $\varphi(G')=\left\langle a,\tau\,\middle|\,\tau^4=e,\ a^{-1}\tau a=\tau^{-1},\ a^{2m}=e\right\rangle$, $m\geqslant 1$, $\mathbb{Z}_2=\langle z\rangle$, $H=\left\{e,a,a\tau,a\tau^2,a\tau z\right\}$;
2. $G=\varphi(G')$, $G=\left\langle a,\tau\,\middle|\,\tau^4=e,\ a^{-1}\tau a=\tau^{-1},\ a^{2m}=e\right\rangle$, $m\geqslant 1$, $H=\left\{e,a,a\tau,a\tau^2,a\tau^3\right\}$;
3. $G=\varphi(G')$, $G=\left\langle a,\tau\,\middle|\,\tau^4=e,\ a^{-1}\tau a=\tau^{-1},\ a^{2m}=e\right\rangle$, $m\geqslant 2$ – *чётно*, $H=\left\{e,a,a\tau,a\tau^2,a^{m+1}\tau\right\}$ *или* $H=\left\{e,a,a\tau,a\tau^2,a^{m+1}\tau^3\right\}$;
4. $G=\varphi(G')\times\mathbb{Z}_2$, $\varphi(G')=\left\langle a,f\,\middle|\,f^2=e,\ faf=a^{2m+1},\ a^{4m}=e\right\rangle$, $m\geqslant 2$ – *чётно*, $\mathbb{Z}_2=\langle z\rangle$, $H=\left\{e,a,a^{m+1}f,a^{2m+1},a^{m+1}fz\right\}$;
5. $G=\varphi(G')$, $G=\left\langle a,f\,\middle|\,f^2=e,\ faf=a^{2m+1},\ a^{4m}=e\right\rangle$, $m\geqslant 2$ – *чётно*, $H=\{e,a,a^{m+1}f,a^{2m+1},a^{3m+1}f\}$;
6. $G=\varphi(G')\times\mathbb{Z}_2$, $\operatorname{Ker}\varphi=\langle a^{2m}\tau^2\rangle$, $\varphi(G')=Q_8\times\mathbb{Z}_m$, *где* $m\geqslant 1$ – *нечётно*, $\mathbb{Z}_m=\left\langle a^4\right\rangle$, $Q_8=\langle a^m,\tau\rangle$ – *группа кватернионов* ($\mathbf{1}=e$, $-\mathbf{1}=\tau^2$, $\mathbf{i}=a^m$, $-\mathbf{i}=a^m\tau^2$, $\mathbf{j}=\tau$, $-\mathbf{j}=\tau^3$, $\mathbf{k}=a^m\tau$, $-\mathbf{k}=a^m\tau^3$), $H=\{e,a,a\tau,a^{2m+1},a\tau z\}$;
7. $G=\varphi(G')$, $\operatorname{Ker}\varphi=\langle a^{2m}\tau^2,\ \tau^2z\rangle$, $\varphi(G')=Q_8\times\mathbb{Z}_m$, *где* $m\geqslant 1$ – *нечётно*, $Q_8=\langle a^m,\tau\rangle$ – *группа кватернионов*, $\mathbb{Z}_m=\left\langle a^4\right\rangle$, $H=\{e,a,a\tau,a^{2m+1},a^{2m+1}\tau\}$.

Утверждение 3. *Конечные $(v,5)$-группы G, являющиеся гомоморфными образами 5-группы $\hat{G}=\left\langle a,\tau\,\middle|\,\tau^7=e,\ a^{-1}\tau a=\tau^{-1}\right\rangle$, $\hat{H}=\left\{e,a,a\tau,a\tau^2,a\tau^4\right\}$ есть группы вида $\left\langle a,\tau\,\middle|\,\tau^7=e,\ a^{-1}\tau a=\tau^{-1},\ a^{2m}=e\right\rangle$ при $m\geq 1$ с $H=\{e,a,a\tau,a\tau^2,a\tau^4\}$.*

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Малышев, Ф.М.* О (v,k)-конфигурациях / Ф.М. Малышев, В.Е. Тараканов – Мат. сборник, 2001, Т.192, № 9, С. 85-108.
2. *Фролов, А.А.* Классификация неразложимых абелевых $(v,5)$-групп / А.А. Фролов //Дискретная математика. Том 20, № 1, 2008, стр. 94-108.

УДК 512.542

Конечные группы с π-$\mathfrak{F}$-субнормальными силовскими подгруппами[1]

А. Г. Коранчук (Беларусь, г. Гомель)
Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины
e-mail:melchenkonastya@mail.ru

Finite groups with π-$\mathfrak{F}$-subnormal sylow subgroups

A. G. Koranchuk (Belarus, Gomel)
F. Scorina Gomel State University
e-mail:melchenkonastya@mail.ru

В работе рассматриваются только конечные группы. Все необходимые понятия и определения можно найти в монографиях [1, 2]. Свойства вложения силовских подгрупп в группу позволяют во многих случаях определить структуру самой группы. Например, группа нильпотентна, если каждая её силовская подгруппа субнормальна в ней. В 1969 году Т.О. Хоукс [3], применяя формационные методы, ввёл понятие $\mathfrak{F}$-субнормальной подгруппы в конечной разрешимой группе. Его идея заключалась в выделении в группе с помощью непустой насыщенной формации $\mathfrak{F}$ семейства $\mathfrak{F}$-субнормальных подгрупп, обладающих свойствами, аналогичными свойствам субнормальных подгрупп. В классе разрешимых групп понятие $\mathfrak{F}$-субнормальной подгруппы совпадает с понятием субнормальной подгруппы в случае, когда $\mathfrak{F}$ представляет собой формацию $\mathfrak{N}$ всех нильпотентных групп. В 1978 году Л.А. Шеметков в своей монографии [1] распространил понятие $\mathfrak{F}$-субнормальной подгруппы на произвольные конечные группы. Исследованию $\mathfrak{F}$-субнормальных подгрупп и их применению посвящена глава 6 монографии [4].

А.Ф. Васильев, Т.И. Васильева [5] ввели и изучили класс групп $\mathrm{w}\mathfrak{F} = (G|\pi(G) \subseteq \pi(\mathfrak{F})$ и всякая силовская подгруппа группы G является $\mathfrak{F}$-субнормальной подгруппой в G). В частности, для наследственной насыщенной формации $\mathfrak{F}$ ими доказано, что класс групп $\mathrm{w}\mathfrak{F}$ также является наследственной насыщенной формацией. Дальнейшее развитие конструкции $\mathrm{w}\mathfrak{F}$ получила в работе [6]. Отметим, что понятие $\mathfrak{F}$-субнормальной подгруппы хорошо работает в классе разрешимых групп и не учитывает все аспекты и особенности, возникающие при его применении в классе π-разрешимых групп. В настоящей работе мы развиваем исследования, начатые в работе [7]. Нами вводится и рассматривается следующее обобщение $\mathfrak{F}$-субнормальной подгруппы. Пусть π — некоторое множество простых чисел.

Определение 1. *Пусть $\mathfrak{F}$ — непустая формация. Подгруппу H группы G будем называть π-$\mathfrak{F}$-субнормальной в G (обозначается H π-$\mathfrak{F}$-sn G), если $H = G$ или существует цепь подгрупп $H = H_0 < H_1 < \ldots < H_n = G$ такая, что либо $|H_i : H_{i-1}|$ является π'-числом, либо $H_i^{\mathfrak{F}} \le H_{i-1}$ для всех $i = 1, ..., n$.*

Заметим, если $\pi(G) \subseteq \pi$ или $\pi = \mathbb{P}$ — множество всех простых чисел, то определение 1 эквивалентно определению $\mathfrak{F}$-субнормальной подгруппы из [4].

[1]Исследования выполнены при финансовой поддержке Министерства образования Республики Беларусь (грант № 20211750 "Конвергенция-2025").

Определение 2. *Пусть $\mathfrak{F}$ — непустая формация. Определим класс групп π-w$\mathfrak{F}$ следующим образом: $\pi\text{-w}\mathfrak{F} = (G \mid G$ — π-замкнутая π-разрешимая группа, где $\pi(G) \subseteq \pi(\mathfrak{F})$ и всякая силовская p-подгруппа для $p \in \pi \cap \pi(G)$ и всякая π'-холлова подгруппа группы G являются π-$\mathfrak{F}$-субнормальными подгруппами в G).*

Заметим, если $\pi = \mathbb{P}$, то определение 2 в разрешимом случае совпадает с определением класса групп w$\mathfrak{F}$ из [5]. Ниже представлены свойства π-$\mathfrak{F}$-субнормальных подгрупп.

Лемма 1. *Пусть $\mathfrak{F}$ — непустая формация, H — подгруппа группы G и $N \trianglelefteq G$. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) *если H π-$\mathfrak{F}$-sn K и K π-$\mathfrak{F}$-sn G, то H π-$\mathfrak{F}$-sn G;*
2) *если H π-$\mathfrak{F}$-sn G, то HN/N π-$\mathfrak{F}$-sn G/N;*
3) *если HN/N π-$\mathfrak{F}$-sn G/N, то HN π-$\mathfrak{F}$-sn G.*

Лемма 2. *Пусть $\mathfrak{F}$ — непустая наследственная формация, G — группа. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) *если H — подгруппа из G и $G^{\mathfrak{F}} \subseteq H$, то H π-$\mathfrak{F}$-sn G;*
2) *если H π-$\mathfrak{F}$-sn G, то H^x π-$\mathfrak{F}$-sn G для любого $x \in G$;*
3) *если G — π-замкнутая группа, H π-$\mathfrak{F}$-sn G, K — подгруппа из G, то $H \cap K$ π-$\mathfrak{F}$-sn K.*

Теорема 1. *Если $\mathfrak{F}$ — наследственная насыщенная формация, то π-w$\mathfrak{F}$ — наследственная насыщенная формация.*

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Шеметков Л. А. Формации конечных групп. — М. : Наука, 1978. 272 с.
2. Doerk K. Finite soluble groups. — Berlin–New York : Walter de Gruyter, 1992. 891 p.
3. Hawkes T. On formation subgroups of a finite soluble group // J. London Math. Soc. 1969. Vol. 44. P. 243–250.
4. Ballester-Bolinches A. Classes of Finite Groups — Springer-Verl., 2006. 385 p.
5. Васильев А. Ф., Васильева Т. И. О конечных группах с обобщенно субнормальными силовскими подгруппами // ПФМТ. 2011. № 4(9). С. 86-91.
6. Васильев А. Ф., Васильева Т. И., Вегера А. С. Конечные группы с обобщенно субнормальным вложением силовских подгрупп // Сибирский математический журнал. 2016. Том 57, № 2. С. 259-275.
7. Васильева Т. И., Коранчук А. Г. О конечных группах с $\mathbb{P}_\pi$-субнормальными подгруппами // Математические заметки. 2023. № 4(114). С. 483-496.

УДК 519.46

Сеть и сетевая группа, ассоциированные с циклическим тором[1]

В. А. Койбаев (Россия, г. Владикавказ)
Северо-Осетинский государственный университет им. К. Л. Хетагурова; Южный математический институт ВНЦ РАН
e-mail: koibaev-K1@yandex.ru

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации. Соглашение № 075-02-2025-1530

The net and net group associated with a cyclic torus

V. A. Koibaev (Russia, г. Vladikavkaz)
North-Ossetian State University; Southern Mathematical Institute VSC RAS
e-mail: koibaev-K1@yandex.ru

Пусть $x^n - d$ — неприводимый многочлен степени n над полем k, $d \in k$. Тогда $e_i = \theta^{i-1}, 1 \leq i \leq n$, образует базис радикального расширения $K = k(\sqrt[n]{d})$, $\theta = \sqrt[n]{d}$, поля $K = k(\theta)$ над k. Мы рассматриваем нерасщепимый максимальный тор $T = T(d)$ (циклический тор), который является образом мультипликативной группы поля $K = k(\sqrt[n]{d})$ при регулярном вложении в $G = GL(n, k)$.

В [1] было предложено общее определение сети и сетевой группы. В настоящей заметке определяется сеть и сетевая группа, ассоциированные с надгруппой циклического тора.

С каждым вектором $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in k^n \setminus \bar{0}$ связана невырожденная матрица $C(x)$, элементы которой вычисляются по формуле

$$(C(x))_{ij} = \begin{cases} x_{i+1-j}, & j \leq i; \\ dx_{n+i+1-j}, & j \geq i+1. \end{cases}$$

В выбранном базисе K над k тор $T = T(d)$ определяется как матричная группа $T = T(d) = \{C(x) : x \in k^n \setminus \bar{0}\}$. С каждой матрицей $C = C(x) = (c_{ij})$ связана обратная матрица $C^{-1} = C(y) = (c'_{ij}), y = (y_1, \ldots, y_n) \in k^n$, где $y_i = \frac{C_{1i}}{|C(x)|}$, причем C_{1i} — алгебраическое дополнение элемента c_{1i} матрицы $C = C(x)$.

Напомним следующие стандартные обозначения: e — единичная матрица порядка n; e_{ij} — матрица, у которой на позиции (i, j) стоит $1 \in k$, а на остальных местах нули; $t_{ij}(\xi) = e + \xi e_{ij}$ — элементарная трансвекция $\xi \in k^*$, $i \neq j$; (общая) трансвекция — это матрица вида $(\delta_{ij} + \alpha_i \beta_j)$, где $\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i \beta_i = 0$ (δ_{ij} — символ Кронекера).

Для исследования подгрупп полной линейной группы $G = GL(n, k)$, содержащих тор $T = T(d)$, определяется унитальное подкольцо $R_0 = R(d)$ поля k, порожденное элементами $x_i y_j, dx_r y_s$

$$R_0 = R(d) = \langle x_i y_j, dx_r y_s \colon \; i + j \leq n+1, r+s > n+1, \quad x \in k^n \setminus \bar{0} \rangle.$$

В дальнейшем, R — промежуточное подкольцо, $R_0 \subseteq R \subseteq k, \; d \in R$.

Пусть $A_1, A_2, \ldots, A_n$ — идеалы кольца R, причем

$$dA_n \subseteq A_1 \subseteq A_2 \subseteq \cdots \subseteq A_n.$$

Через $\sigma = (\sigma_{ij}) = \sigma(A_1, A_2, \ldots, \; A_n)$ мы обозначаем сеть идеалов, определенную следующим образом

$$\sigma_{ij} = \begin{cases} A_{i+1-j}, & j \leq i; \\ dA_{n+i+1-j}, & j \geq i+1. \end{cases}$$

Следующее определение мотивированно теоремой 2.7.7 и предложением 2.7.4 [2].

Определение 1. *Сеть $\sigma = (\sigma_{ij}) = \sigma(A_1, A_2, \ldots, \; A_n)$ называется сетью, ассоциированной с тором $T = T(d)$.*

Предложение 1. *([2], теорема 2.7.7.) Если $\sigma = (\sigma_{ij})$ – сеть, ассоциированная с тором, то тор T нормализует сетевую группу $G(\sigma)$. Следовательно, $TG(\sigma)$ — промежуточная подгруппа, содержащая тор T.*

Определение 2. *Пусть σ — сеть, ассоциированная с тором T. Подгруппу $E(\sigma)$, порожденную всеми (общими) трансвекциями из сетевой группы $G(\sigma)$, мы называем элементарной сетевой подгруппой, ассоциированной с тором T.*

Рассмотрим элементарную сетевую подгруппу

$$E_1(\sigma) = \langle t_{ij}(\xi) : \ \xi \in \sigma_{ij}, \ 1 \le i \ne j \le n \rangle,$$

порожденную элементарными трансвекциями из сетевой группы $G(\sigma)$.

Теорема 1. *Пусть $\sigma = (\sigma_{ij}) = \sigma(A_1, A_2, \ldots, \ A_n)$ — сеть ассоциированная с тором $T = T(d)$ $(A_1 = dA_n)$. Тогда*

(1) произведение $TE(\sigma)$ является промежуточной подгруппой, $T \subseteq TE(\sigma) \subseteq G$;

(2) имеет место равенство $TE(\sigma) = TE_1(\sigma)T$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Боревич З. И. Описание подгрупп полной линейной группы, содержащих группу диагональных матриц // Зап. науч. семин. ПОМИ РАН. 1976. Том 64. С. 12-29.

2. Койбаев В. А. Подгруппы группы $\mathrm{GL}(2, k)$, содержащие нерасщепимый тор. — Итоги науки. Сер. матем. монография. Владикавказ. 2009, 182 с.

УДК 512.542

Алгоритмическая проверка локальной формации конечных разрешимых групп на обладание свойством Шеметкова[1]

В. И. Мурашко (Беларусь, г. Гомель)
Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины
e-mail: mvimath@yandex.ru

An algorithmic test for a local formation of finite soluble groups to have the Shemetkov property

V. I. Murashka (Belarus, Gomel)
Francisk Skorina Gomel State University
e-mail: mvimath@yandex.ru

Все рассматриваемые здесь группы конечны. Напомним, что ненильпотентная группа, все собственные подгруппы которой нильпотентны, называется группой Шмидта в честь О. Ю. Шмидта, описавшего структуру таких групп [1] в 1924 году. В 1951 году Н. Ито [2, предложение 2] доказал, что не p-нильпотентная группа, все собственные подгруппы которой p-нильпотенты — группа Шмидта.

Напомним, что для класса групп $\mathfrak{X}$ группа $G \notin \mathfrak{X}$ называется минимальной не-$\mathfrak{X}$-группой, если все ее собственные подгруппы принадлежат $\mathfrak{X}$. В. Н. Семенчук и А. Ф. Васильев [3]

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования Республики Беларусь (грант № 20211750 “Конвергенция–2025”)

описали все наследственные локальные формации разрешимых групп $\mathfrak{F}$ такие, что каждая разрешимая минимальная не-$\mathfrak{F}$-группа является либо группой Шмидта, либо группой простого порядка. В 1984 году Л. А. Шеметков [4, проблема 9.74] в Коуровской тетради поставил задачу описания всех локальных формаций $\mathfrak{F}$ для которых каждая конечная минимальная не-$\mathfrak{F}$-группа является либо группа Шмидта, либо группа простого порядка. Решения этой проблемы представлены в [5, следствие 1] и [6, теорема 2].

Напомним, что формация $\mathfrak{F}$ называется формацией с условием Шеметкова, если каждая минимальная не-$\mathfrak{F}$-группа является либо группой Шмидта, либо группой простого порядка. Согласно [7, следствие 2.4.23] наследственная локальная формация $\mathfrak{F}$ обладает условием Шеметкова тогда и только тогда, когда:

(a) любая минимальная не-$\mathfrak{F}$-группа разрешима;

(b) $\mathfrak{F}$ локально определяется f, где $f(p_i) = \mathfrak{G}_{\pi_i}$ — класс всех π_i-групп для всех $p_i \in \pi(\mathfrak{F})$, где π_i — подмножество $\pi(\mathfrak{F})$ с $p_i \in \pi_i$.

Естественно задаться вопросом, можно ли вывести условие (a) данного результат из его условия (b). Целью данного доклада является решение частного случая этого вопроса — можно ли из условия (b) вывести, что $\mathfrak{F}$ является формацией разрешимых групп с условием Шеметкова? Получен следующий результат:

Теорема 1. *Пусть $\pi = \{p_1, p_2, \ldots, p_k\}$ — множество простых чисел, не превосходящих n, π_i — подмножество π с $p_i \in \pi_i$. Предположим, что $\mathfrak{F}$ — локальная формация с $\pi(\mathfrak{F}) = \pi$, локально определяемая f, где $f(p_i) = \mathfrak{G}_{\pi_i}$. С помощью $O(n^2)$ операций можно проверить, является ли $\mathfrak{F}$ формацией разрешимых групп со свойством Шеметкова.*

Обсуждаемые в докладе методы позволяют получить

Следствие 1. *Пусть $\pi = \{2, 3, 5, 7\}$ и $\mathfrak{F}$ — локальная формация с $\pi(\mathfrak{F}) = \pi$, локально определяемая f, где $f(2) = f(3) = \mathfrak{G}_{\{2,3,5,7\}}$, $f(5) = \mathfrak{G}_{\{3,5,7\}}$ и $f(7) = \mathfrak{G}_{\{5,7\}}$. Тогда $\mathfrak{F}$ — формация разрешимых групп с условием Шеметкова.*

Доказательство теоремы 1 основано на понятии N-критического графа. Напомним, что (p, q)-группа Шмидта — это группа Шмидта с нормальной силовской p-подгруппой. *N-критическим графом* $\Gamma_{Nc}(G)$ группы G [8, определение 1.3] называется ориентированный граф на множестве вершин $\pi(G)$ и (p, q) является ребром $\Gamma_{Nc}(G)$ тогда и только тогда, когда G имеет (p, q)-подгруппу Шмидта. Из доказательства теоремы 1 вытекают следующие результаты:

Следствие 2. *Пусть Γ — ориентированный граф такой, что $V(\Gamma)$ — конечное множество простых чисел и $n = \max V(\Gamma)$. Можно проверить за полиномиальное от n время, разрешима ли каждая группа G такая, что $\Gamma_{Nc}(G) = \Gamma$.*

Следствие 3. *Если $\{2, 3, 5, 7\}$-группа G не содержит (a, b)-подгруппы Шмидта для $(a, b) \in \{(5, 2), (7, 2), (7, 3)\}$, то G разрешима.*

С доказательствами результатов и алгоритмической проверкой, описанной в теореме 1, можно ознакомиться в [9].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Шмидт О. Ю. Группы, все подгруппы которых специальные // Матем. сб. 1924. Т. 31. С. 366–372.

2. Ito N. Note on (LM)-groups of finite order // Kodai Math. Seminar Report. 1951. Vol. 3. P. 1–6.

3. Семенчук В. Н., Васильев А. Ф. Характеризация локальных формаций $\mathfrak{F}$ по задан- ным свойствам минимальных не $\mathfrak{F}$-групп // Исследование нормального и подгруппового строения конечных групп: труды Гомельского семинара. — Минск: Наука и техника, 1984. С. 175–181.

4. Khukhro E. I., Mazurov V. D. (eds.) The Kourovka notebook: unsolved problems in group theory, 20th edn. Russian Academy of Sciences, Siberian Branch, 2022.

5. Kamornikov S. F. On two problems by L.A. Shemetkov // Sib. Math. J. 1994. Vol. 35. P. 713–721.

6. Ballester-Bolinshes A., Perez-Ramos M. D. On $\mathfrak{F}$-critical groups // J. Algebra. 1995. №. 174. P. 948–958.

7. Каморников С. Ф., Селькин М. В. Подгрупповые функторы и классы конечных групп. — Минск: Беларуская навука, 2003. 255 с.

8. Vasilyev A. F. and Murashka V. I. Arithmetic Graphs and Classes of Finite Groups // Sib. Math. J., 2019. Vol. 60. P. 41–55.

9. Murashka V. I. A test for a local formation of finite groups to be a formation of soluble groups with the Shemetkov property // arXiv:2405.20257 [math.GR], 2024. — 8 p.

УДК 512.542

О $\mathfrak{F}$-гиперцентре конечной группы с заданными системами слабых tcc-подгрупп[1]

А. А. Трофимук (Беларусь, г. Брест)
Брестский государственный университет имени А. С. Пушкина
e-mail: alexander.trofimuk@gmail.com

On the $\mathfrak{F}$-hypercentre of a finite group with given systems of weakly tcc-subgroups

A. A. Trofimuk (Belarus, Brest)
Brest State A. S. Pushkin University
e-mail: alexander.trofimuk@gmail.com

Подгруппы A и B группы G называются *перестановочными*, если $AB = BA$. Более слабое условие перестановочности было приведено в работе [1]: подгруппы A и B группы G называются сс-*перестановочными*, если A перестановочна с B^g для некоторого элемента $g \in \langle A, B\rangle$. Напомним также, что подгруппы A и B называется tcc-*перестановочными* (тотально сс-перестановочными), если для любых $X \leqslant A$ и $Y \leqslant B$ подгруппы X и Y сс-перестановочны.

Естественное обобщение понятия tcc-перестановочных подгрупп приведено в работе [2]:

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования Республика Беларусь (ГПНИ «Конвергенция-2025», № гос. рег. 20211467).

Определение 1. *Подгруппа A группы G называется* wtcc-*подгруппой (слабой* tcc-*подгруппой) в G, если в G существует подгруппа Y такая, что $G = AY$ и подгруппа A обладает главным рядом*

$$1 = A_0 \leqslant A_1 \leqslant \ldots \leqslant A_{s-1} \leqslant A_s = A$$

таким, что подгруппа A_i cc-*перестановочна с Y_1 для любого $0 \leqslant i \leqslant s$ и произвольной подгруппы Y_1 из Y.*

Кроме того, в [2] были изучены свойства wtcc-подгрупп, а также строение конечной группы, у которой сомножители, силовские и максимальные подгруппы, 2-максимальные подгруппы, максимальные подгруппы из силовских подгрупп или все минимальные подгруппы являются wtcc-подгруппами. В частности, доказана сверхразрешимость разрешимой группы G, у которой все максимальные подгруппы из каждой силовской подгруппы из H являются wtcc-подгруппами в G.

Главный фактор H/K группы называется $\mathfrak{F}$-центральным, если $[H/K](G/C_G(H/K)) \in \mathfrak{F}$. Произведение всех нормальных подгрупп из G, у которых G-главные факторы являются $\mathfrak{F}$-центральными в G, называется $\mathfrak{F}$-гиперцентром группы G и обозначается через $Z_{\mathfrak{F}}(G)$ [3].

Развитием результатов работы [2] является следующая

Теорема 1. *Пусть H нормальная подгруппа группы G и H p-разрешима. Тогда $H \leq Z_{p\mathfrak{U}}(G)$ в каждом из следующих случаев:*

(1) *каждая максимальная подгруппа из силовской p-подгруппы подгруппы H является* wtcc-*подгруппой в G;*

(2) *каждая максимальная подгруппа из силовской p-подгруппы подгруппы $F_p(H)$ является* wtcc-*подгруппой в G.*

Здесь $p\mathfrak{U}$ — класс всех p-сверхразрешимых групп.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Guo W., Shum K. P., Skiba A. N. Conditionally Permutable Subgroups and Supersolubility of Finite Groups // Southeast Asian Bull. Math. 2005. Vol. 29. P. 493-510.

2. Trofimuk A. A. *On weakly tcc-subgroups of finite groups* // Siberian Electronic Mathematical Reports. 2023. Vol. 20, № 2. P. 1464–1473.

3. Doerk, K. Finite soluble groups / K. Doerk, T. Hawkes. — Berlin ; New York : Walter de Gruyter, 1992. — 899 p.

УДК 512.541

Функторы Кокстера категории R-расщепляемых p-локальных групп

С. В. Вершина (Россия, г. Москва)
Московский педагогический государственный университет
e-mail: svetlanavershina@gmail.com

Coxeter Functors for the Category R-split p-local Groups

S. V. Vershina (Russia, Moscow)
Moscow Pedagogical State University
e-mail: svetlanavershina@gmail.com

Пусть поле K является подполем поля p–адических чисел $\widehat{\mathbb{Q}}_p = \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \widehat{\mathbb{Z}}_p$, где $\widehat{\mathbb{Z}}_p$ — кольцо целых p–адических чисел, $\mathbb{Z}_p$ — кольцо дискретного нормирования, то есть локализация кольца целых чисел $\mathbb{Z}$ относительно простого числа p. Обозначим через R кольцо $K \sqcap \widehat{\mathbb{Z}}_p$, аддитивную группу кольца R также часто будем обозначать через R. Все рассматриваемые группы являются p–локальными, то есть естественными модулями над $\mathbb{Z}_p$. Будем опускать $\mathbb{Z}_p$ в тензорных произведениях и группах гомоморфизмов.

Группа G называется R–расщепляемой, если $G \otimes R$ является прямой суммой свободного и делимого R–модулей. Рассмотрим далее категорию $K\mathfrak{L}_p$ квазигомоморфизмов R–расщепляемых p–локальных групп без кручения конечного ранга, где поле K является алгебраическим расширением конечной степени поля рациональных чисел $\mathbb{Q}$. Обозначим через A контравариантный функтор двойственности Арнольда в категории $K\mathfrak{L}_p$ и через $P = AR$ — двойственную группу для группы R. Группа R – сервантно неразложимая группа, а группа P — косервантно неразложимая [1], [2]. Заметим, что функтор Арнольда A каждой группе G категории $K\mathfrak{L}_p$ ставит в соответствие класс квазиизоморфных групп категории $K\mathfrak{L}_p$ и, таким образом, группа AG определяется с точностью до квазиизоморфизма [3]. Квазиизоморфизм будем обозначать знаком $\sim$, изоморфизм знаком $\approx$.

В работе [4] осуществлена попытка применения понятий и аппарата гомологической алгебры [5] к изучению модулей над кольцами дискретного нормирования, дедекиндовыми кольцами. Построены функторы Кокстера и рассмотрены некоторые их свойства. Для фиксированного гомоморфизма $\alpha\colon R \to \mathbb{Q}$ и точной последовательности

$$0 \to Ker\alpha \to R \xrightarrow{\alpha} \mathbb{Q} \to 0$$

рассматривается контравариантный функтор $F(\_) = Hom(\_, Ker\alpha)$ категории R-расщепляемых модулей и изучаются свойства функторов Кокстера: $C^- = AF$ и $C^+ = FA$, где A — функтор двойственности Арнольда.

В нашем случае для точной последовательности аддитивных групп

$$0 \to \mathbb{Z}_p \xrightarrow{i} P \to P_1 \to 0,$$

где $P_1 = P/i(\mathbb{Z}_p)$ и i — сервантное вложение $\mathbb{Z}_p$ в P.

Определим функтор Φ категории $K\mathfrak{L}_p$

$$\Phi(\_) = Hom(\_, P_1).$$

Отрицательный и положительный функторы Кокстера определим следующим образом: $K^- = A\Phi$ и $K^+ = \Phi A$, где A – функтор двойственности Арнольда.

Предложение 1. *Имеют место следующие соотношения:*

1. $\Phi \sim AK^- \sim K^+A$;

2. $K^+\Phi \sim \Phi K^- \sim \Phi A\Phi$.

Предложение 2. *Если размерность поля расщепления K над $\mathbb{Q}$ равна 2, то*

1. $K^-(\mathbb{Z}_p) \approx K^-(\mathbb{Q}) \approx \mathbb{Z}_p$;

2. $K^+(\mathbb{Z}_p) \approx K^+(\mathbb{Q}) \approx \mathbb{Q}$;

3. $K^-(P) \approx K^-(AP) \approx \mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_p$;

4. $K^+(P) \approx K^+(AP) \approx \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q}$.

Теорема 1. *Если размерность поля расщепления K над $\mathbb{Q}$ больше 2, то*

1. $K^+(\mathbb{Z}_p) = K^+(P) = 0$;

2. $K^-(\mathbb{Q}) = K^+(R) = 0$;

3. $K^+(\mathbb{Q}) \sim P_1, K^-(\mathbb{Z}_p) \sim AP_1$, *где* $P_1 = P/i(\mathbb{Z}_p)$, i *— сервантное вложение* $\mathbb{Z}_p$ *в* P;

4. $K^+(R)$ *— серватно неразложмая группа ранга* $n = \dim_{\mathbb{Q}} K$;

5. $K^-(P)$ *— косерватно неразложимая группа ранга* $n = \dim_{\mathbb{Q}} K$.

Заметим, что сервантно неразложимые группы — это группы, любая собственная сервантная подгруппа которых неразложима в прямую сумму собственных подгрупп. Косервантно неразложимые группы — это группы, любая собственная сервантная поддгруппа которых является свободной p–локальной группой.

Следствие 1. *В условиях теоремы для группы $G \in K\mathfrak{L}_p$ выполняется следующее:*

1. Если группа G сервантно неразложима, то $K^-(G) = 0$;

2. Если группа G косервантно неразложима, то $K^+(G) = 0$;

3. Группа $K^-(G)$ не содержит квазислагаемых вида R и $\mathbb{Q}$;

4. Группа $K^+(G)$ не содержит квазислагаемых вида P и $\mathbb{Z}_p$;

5. Группы $K^+K^-(G)$ и $K^-K^+(G)$ не имеют сервантно неразложимых и косервантных неразложимых квазислагаемых.

Таким образом, построенные функторы Кокстера каждую группу категории $K\mathfrak{L}_p$ делают сильно редуцированной, то есть не содержащей прямых квазислагаемых, которые квазиизоморфны делимым группам, свободным группам, прямым суммам групп R и прямым суммам групп квазиизоморфным группе P.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Arnold D. M., Dugas M. Co-purely indecomposable modules over discrete valuation rings // Journal of Pure and Applied Algebra. 2001, Volume 161, Issues 1–2, pp. 1-12.

2. Arnold D. M. A duality for torsion-free modules of finite rank over a discrete valuation ring // Proc. London Math. Soc. 1972, 24, No. 3, 204–216.

3. Фомин А. А. Абелевы группы со свободными подгруппами бесконечного индекса и их кольца эндоморфизмов. Матем. заметки, 36:2 (1984), 179–187.

4. Lady E. L. A Seminar on Splitting Rings for Torsion Free Modules over Dedekind Domains // Lecture Notes in Mathematics. 1006, 1–48, 1983.

5. С. Маклейн. Гомология. Издательство МИР, 1966, 544.

Секция 2. Полугруппы и универсальные алгебры

УДК 512.53

О продолжении естественного частичного порядка идемпотентов на полугруппу

В. М. Кусов (Россия, г. Волгоград)
Волгоградский государственный социально-педагогический университет
e-mail: kvm64@yandex.ru

On the extension of the natural partial order of idempotents to a semigroup

V. M. Kusov (Russia, Volgograd)
Volgograd State Pedagogical University
e-mail: kvm64@yandex.ru

Как известно (см.[1], стр. 44), множество идемпотентов E_S любой полугруппы S можно упорядочить, введя на нем *естественный частиный порядок*, если для любых $e, f \in E_s$ положить, по определению,

$$e \leq_{nat} f \Leftrightarrow ef = fe = e.$$

Задача продолжения этого порядка на всю полугруппу S (или на некоторые типы полугрупп) весьма привлекательна, здесь достаточно упомянуть исследования К. С. С. Намбурипада ([2]) и Р. Хартвига ([3]), Х. Митча ([4]), П. Р. Джонса. Обзор этих подходов и дальнейшую библиографию можно найти в работах П. Хиггинса [5] и М. Петрича [6]. Мы предлагаем подход, который заключается во введении рефлексивного замыкания отношения $\leq_{nat}$ (далее обозначаемого $\leq_{ex}$ и называемого отношением *расширенного естественного частичного порядка*).

Предложение 1. *Отношение $\leq_{ex}$, определяемое для произвольных элементов a, b полугруппы S правилом:*

$$a \leq_{ex} b \Leftrightarrow (ab = ba = a) \vee (a = b),$$

транзитивно, антисимметрично и рефлексивно, то есть является отношением частичного порядка на полугруппе S.

Тразитивность и антисимметричность отношения $\leq_{ex}$ следует из аналогичных свойств отношения $\leq_{nat}$, где идемпотентность на самом деле не требуется. Но для рефлексивности $\leq_{nat}$ нужно, чтобы в этом отношении участвовали лишь идемпотенты. Добавляя к этому отношению все пары элементов полугруппы вида (a, a), мы получаем рефлексивное отношение, которое определено на всей полугруппе S.

Описанная конструкция вряд ли нова, однако, получаемая в результате структура достаточно бедна, верояно, этим объясняется отсутствие интереса к отношению $\leq_{ex}$. Тем не менее, оно позволяет сформулировать нетривиальные результаты. Для примера рассмотрим частично упорядоченный моноид $< S, e, \leq >$, то есть полугруппу с единицей e, на которой задан согласованный с умножением частичный порядок. Элементы x моноида S со свойством $x \geq e$ назовем *надъединичными* (в моноиде бинарных отношений им соответствуют рефлексивные отношения).

Предложение 2 (критерий идемпотентности произведения надъединичных идемпотентов). *Для надъединичных идемпотентов a, b частично упорядоченного моноида,*

$$(ab)^2 = ab \Leftrightarrow ab \leq_{ex} ba.$$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Клиффорд, А.Х. Алгебраическая теория полугрупп. Т. 1 / А. Х. Клиффорд, Г. Б. Престон; Пер. с англ. В. А. Баранского и В. Г. Житомирского; Под ред. [и с предисл.] Л. Н. Шеврина. — Москва : Мир, 1972. — 285 с.

2. Nambooripad, K. S. S. The natural partial order on a regular semigroup //Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society,1980, 23(03), p.249. doi:10.1017/s0013091500003801

3. Hartwig R. How to partially order regular elements //Mathematica Japonica.1980. 25 (1), pp.1–13.

4. Mitsch, H. A natural partial order for semigroups //Proceedings of the American Mathematical Society, 1986, 97(3), pp. 384–384. doi:10.1090/s0002-9939-1986-0840614-0

5. Higgins, P. M. The Mitsch order on a semigroup //Semigroup Forum, 1994, 49(1), pp. 261–266. doi:10.1007/bf02573488

6. Petrich M. Certain partial orders on semigroups //Czechoslovak Mathematical Journal. 51 (2): pp. 415–432. doi:10.1023/a:1013711417539

УДК 512.56

О ретрактных решетках[1]

Е. М. Вечтомов (Россия, г. Киров)
Вятский государственный университет
e-mail: vecht@mail.ru
А. А. Петров (Россия, г. Киров)
Вятский государственный университет
e-mail: apetrov43@mail.ru

About retract lattices

E. M. Vechtomov (Russia, Kirov)
Vyatka State University
e-mail: vecht@mail.ru
A. A. Petrov (Russia, Kirov)
Vyatka State University
e-mail: apetrov43@mail.ru

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ, проект №24-21-00117

1. Исходные понятия

Работа посвящена теории решеток, точнее, исследованию ретрактных решеток.

Полурешеткой называется идемпотентная коммутативная полугруппа. Если в полурешетке $\langle X,+\rangle$ задать бинарное отношение $\leqslant$ формулой: $a \leqslant b \Leftrightarrow a+b=b$ для любых $a,b \in X$, то получим упорядоченное множество $\langle X,\leqslant\rangle$, в котором $a+b=\sup\{a,b\}$ для всех $a,b \in X$, называемое *верхней полурешеткой.*

Решеткой называется алгебраическая структура $\langle X,+,\cdot\rangle$, для которой $\langle X,+\rangle$ и $\langle X,\cdot\rangle$ — полурешетки и операции сложения $+$ и умножения $\cdot$ связаны законами поглощения $x+xy=x$ и $x(x+y)=x$. При этом соответствующая полурешетке $\langle X,+\rangle$ верхняя полурешетка $\langle X,\leqslant\rangle$ удовлетворяет равенству $a\cdot b=\inf\{a,b\}$ для любых $a,b\in X$. Решетка называется *решеткой с нулем*, если она обладает аддитивно нейтральным (равносильно, мультипликативно поглощающим, наименьшим) элементом 0.

Напомним, что подмножество Y упорядоченного множества $\langle X,\leqslant\rangle$ называется *выпуклым*, если $z\in Y$ для любых $x,y\in Y$ и $z\in X$, таких, что $x\leqslant z\leqslant y$. Элементы x и y из $\langle X,\leqslant\rangle$ называются *сравнимыми*, если $x\leqslant y$ или $y\leqslant x$, в противном случае — *несравнимыми*. *Цепь* — это упорядоченное множество, любые два элемента которого сравнимые.

Отношение эквивалентности ρ на решетке X называется *конгруэнцией* на X, если $a\rho b$ и $c\rho d$ влекут $(a+c)\rho(b+d)$ и $(ac)\rho(bd)$ для любых $a,b,c,d\in X$ (достаточно считать $c=d$). Классы $a/\rho=\{x\in X : x\rho a\}$, $a\in X$, конгруэнции ρ на решетке X образуют *фактор-решетку* X/ρ. Ясно также, что каждый класс a/ρ является выпуклой подрешеткой решетки X.

Сведения по теории решеток содержатся в доступных книгах [1, 2].

Ретракцией решетки X назовем любой решеточный гомоморфизм $e : X\to X$, такой, что $e(e(x))=e(x)$ для всех $x\in X$. Вместо $e(x)$ будем писать просто ex. *Ретрактом* решетки X называется образ $e(X)$ произвольной ретракции e решетки X. Каждая ретракция e решетки X порождает конгруэнцию $\rho(e)$ на решетке X по правилу

$$x\rho(e)y \text{ означает } ex=ey \text{ при любых } x,y\in X.$$

Лемма 1. *Пусть e — ретракция решетки X. Тогда отношение $\rho(e)$ будет конгруэнцией на решетке X, каждый класс которой $a/\rho(e)$, $a\in X$, представляет собой выпуклую подрешетку решетки X и $(a/\rho(e))\cap eX=\{ea\}$.*

Конгруэнция ρ на решетке X называется *ретрактной*, если $\rho=\rho(e)$ для некоторой ретракции e решетки X, в противном случае — *неретрактной*. Саму решетку назовем *ретрактной*, если все конгруэнции на ней ретрактные, в противном случае — *неретрактной*.

Лемма 2. *Конгруэнция ρ на решетке X является ретрактной тогда и только тогда, когда существует подрешетка Y в X, пресекающаяся с каждым классом a/ρ ровно по одному элементу, то есть $|Y\cap(a/\rho)|=1$ для любого элемента $a\in X$.*

Рассмотрим прямое произведение $A\times B$ решеток A и B. Пусть e_1 и e_2 — ретракции решеток A и B, соответственно. Тогда отображение $e_1\times e_2$: $A\times B\to A\times B$, определенное формулой

$$(e_1\times e_2)((a,b))=(e_1a,e_2b) \text{ при } a\in A \text{ и } b\in B,$$

является ретракцией решетки $A\times B$.

Лемма 3. [1, с. 43, теорема 13] *Произвольная конгруэнция ρ на решетке $A\times B$ имеет вид $\rho=\rho_1\times\rho_2$, где ρ_1 (ρ_2) — конгруэнция на решетке A (B) и $(a_1,b_1)(\rho_1\times\rho_2)(a_2,b_2)$ означает $a_1\rho_1a_2$ и $b_1\rho_2b_2$ для любых $a_1,a_2\in A$ и $b_1,b_2\in B$.*

2. Основные результаты

Сформулируем ряд результатов о классе ретрактных решеток.

Предложение 1. *Гомоморфные образы, равносильно, фактор-решетки, ретрактных решеток являются ретрактными решетками.*

Предложение 2. *Прямое произведение конечного числа решеток будет ретрактной решеткой тогда и только тогда, когда все сомножители являются ретрактными решетками.*

Пусть I — цепь и $(A_i)_{i\in I}$ — семейство решеток. Рассмотрим дизъюнктное объединение $\Sigma(A_i)_{i\in I}$ семейства $(A_i)_{i\in I}$ со следующими операциями сложения $+$ и умножения $\cdot$. Для любых элементов $a \in A_i$ и $b \in A_j$ положим: $a+b$ и $a \cdot b$ — сумма и произведение этих элементов в решетке A_i при $i = j$ и $a+b = b+a = b$ и $a \cdot b = b \cdot a = a$ при $i < j$. Получаем решетку $A \equiv \langle \Sigma(A_i)_{i\in I}, +, \cdot \rangle$, называемую *ординальной суммой* решеток A_i $(i \in I)$ [2, с. 15].

Пример 1. Пусть $A \times B$ — прямое произведение двухэлементных цепей и C — их ординальная сумма при условии $A < B$. Допустим, что a — наибольший элемент решетки A, b — наименьший элемент решетки B. На 8-элементной дистрибутивной решетке C рассмотрим конгруэнцию ρ с 7 классами $\{a,b\}$, $\{x\}$ при $x \in C \setminus \{a,b\}$. Поскольку 7-элементные подмножества $C \setminus \{a\}$ и $C \setminus \{b\}$ не являются подрешетками решетки C, то решеточная конгруэнция ρ неретрактная. Отметим, что 8-элементная решетка C является минимальной (по числу элементов) неретрактной решеткой.

Пример 1 показывает, что ординальная сумма двух ретрактных решеток может не быть ретрактной решеткой.

Предложение 3. *Подрешетки ретрактных решеток не обязаны быть ретрактными решетками.*

Пусть $(A_i)_{i\in I}$ — непустое семейство решеток A_i с нулем 0.

Выделим в прямом произведении $\Pi(A_i)_{i\in I}$ подрешетку $\oplus(A_i)_{i\in I}$, состоящую в точности из тех элементов-функций $f \in \Pi(A_i)_{i\in I}$, которые имеют конечное множество ненулевых координат. То есть $\oplus(A_i)_{i\in I} = \{f \in \Pi(A_i)_{i\in I} : \operatorname{supp} f$ — конечное множество$\}$, где $\operatorname{supp} f = \{i \in I : f(i) \neq 0\}$. Множество $\operatorname{supp} f$ называется *носителем* $f : I \to \cup(A_i)_{i\in I}, f(i) \in A_i$ для всех индексов $i \in I$. Решетка $\oplus(A_i)_{i\in I}$ называется *прямой суммой* (семейства) решеток с нулем A_i $(i \in I)$.

Предположим, что ρ_i — конгруэнция на решетке A_i для любого $i \in I$. Обозначим через $\times(\rho_i)_{i\in I}$ бинарное отношение на $\oplus(A_i)_{i\in I}$, означающее:

$$\forall f, g \in \oplus(A_i)_{i\in I}\ (f(\times(\rho_i)_{i\in I})g \Leftrightarrow \forall i \in I\ f(i)\rho_i g(i)).$$

Легко видеть, что бинарное отношение $\times(\rho_i)_{i\in I}$ на прямой сумме $\oplus(A_i)_{i\in I}$ будет конгруэнцией на решетке $\oplus(A_i)_{i\in I}$.

Лемма 4. *Конгруэнции на прямой сумме $\oplus(A_i)_{i\in I}$ решеток с нулем A_i суть в точности конгруэнции вида $\times(\rho_i)_{i\in I}$ по всевозможным конгруэнциям ρ_i на A_i при $i \in I$.*

Предложение 4. *Прямая сумма решеток с нулем является ретрактной решеткой тогда и только тогда, когда все ее слагаемые будут ретрактными решетками.*

Замечание 1. Поскольку любая решетка и двойственная к ней решетка имеют одни и те же конгруэнции и ретракции, то ретрактность произвольной решетки равносильна ретрактности двойственной решетки.

Замечание 2. Итак, класс всех ретрактных решеток замкнут относительно гомоморфных образов, конечных прямых произведений, прямых сумм и перехода к двойственным решеткам, но не замкнут относительно взятия подрешеток и ординальных сумм.

3. О ретракциях прямого произведения двух решеток

Пусть ρ — произвольная конгруэнция на прямом произведении $A \times B$ решеток A и B. В контексте леммы 3 $\rho = \rho_1 \times \rho_2$. Предположим, что конгруэнция ρ_1 (ρ_2) индуцируется некоторой ретракцией e_1 (e_2) решетки A (B): $\rho_1 = \rho(e_1)$ и $\rho_2 = \rho(e_2)$. Ретракция $e_1 \times e_2$ порождает исходную конгруэнцию ρ, то есть $\rho = \rho(e_1 \times e_2)$. Заметим, что конгруэнция ρ может индуцироваться ретракцией решетки $A \times B$, отличной от ретракций вида $e_1 \times e_2$. Ретракции вида $e_1 \times e_2$ будем называть *каноническими ретракциями*, в противном случае — *неканоническими*.

Если A и B — конечные решетки, имеющие соответственно k и l ретракций, то решетка $A \times B$ имеет ровно $k \cdot l$ канонических ретракций.

Предложение 5. *Пусть A, B — произвольные решетки. Для того чтобы ретракция e решетки $A \times B$ была канонической, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось следующее утверждение: если $\rho(e) = \rho_1 \times \rho_2, a_1, a_2 \in A, b_1, b_2 \in B, e((a_1, b_1)) = (a_1, b_1)$ и $e((a_2, b_2)) = (a_2, b_2)$, то $a_1 \rho_1 a_2 \Rightarrow a_1 = a_2$ и $b_1 \rho_2 b_2 \Rightarrow b_1 = b_2$.*

Для натурального числа n обозначим через C_n n-элементную цепь.

Пример 2. Найдем все ретракции «квадрата» $C_2 \times C_2 = \{(0,0), (0,1), (1,0), (1,1)\}$, где $C_2 = \{0, 1\}$. Цепь C_2 имеет 3 ретракции: константные $C_2 \to \{0\}, C_2 \to \{1\}$ и тождественную, и 2 конгруэнции: отношение равенства и одноклассовую. Поэтому решетка $C_2 \times C_2$ обладает 9 каноническими ретракциями и 4 конгруэнциями. Одноклассовая конгруэнция на решетке $C_2 \times C_2$ порождается 4 ретракциями, отношение равенства — только тождественной ретракцией, каждая из 2 двухклассовых конгруэнций — 2 каноническими ретракциями. Возьмем на решетке $C_2 \times C_2$ конгруэнцию ρ с двумя классами $\{0, 1\} \times \{0\}$ и $\{0, 1\} \times \{1\}$. И рассмотрим отображение $e : C_2 \times C_2 \to C_2 \times C_2$, переводящее класс $\{0, 1\} \times \{0\}$ в элемент $(0, 0)$, а класс $\{0, 1\} \times \{1\}$ — в элемент $(1, 1)$. По предложению 5 e будет неканонической ретракцией решетки $C_2 \times C_2$, порождающей конгруэнцию ρ. Аналогично, двойственная к e неканоническая ретракция порождает конгруэнцию с двумя классами $\{0\} \times \{0, 1\}$ и $\{1\} \times \{0, 1\}$. Таким образом, решетка $\{0, 1\} \times \{0, 1\}$ имеет 11 ретракций, включая 2 неканонические ретракции.

Замечание 3. В статье [3] получена формула для числа всех ретрактов прямого произведения $C_m \times C_n$ при любых натуральных числах m и n. В частности, число (непустых) ретрактов решетки $C_2 \times C_2$ равно 10, в то время как число ее ретракций равно 11. Отметим, что ретракт решетки может быть образом ее различных ретракций. Число ретрактов решетки $C_3 \times C_3$ равно 71 (см. [3]).Опираясь на предложение 5, нами найдены все 34 неканонические ретракции этой решетки. Учитывая 64 канонические ретракции, всего получаем 98 ретракций решетки $C_3 \times C_3$.

Задача. Найти число всех ретракций решетки $C_m \times C_n$. Мы знаем, что число ретракций n-элементной цепи равно числу Фибоначчи F_{2n} с номером $2n$. Поэтому число всех канонических ретракций $C_m \times C_n$ равно $F_{2m} \cdot F_{2n}$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гретцер Г. Общая теория решеток. — М.: Мир, 1981. 456 с.

2. Скорняков Л. А. Элементы теории структур. 2-е изд. — М.: Наука, 1982. 160 с.

3. Czédli G. Lattices of retracts of direct products of two finite chains and notes on retracts of lattices // Algebra Universalis. 2022. V. 83, Issue 3. №34.

УДК 512. 548

Применение тернарных M-квазигрупп для преобразования слов

Н. А. Щучкин (Россия, г. Волгоград)
Волгоградский государственный социально-педагогический университет
e-mail: Nikolaj_shchuchkin@mail.ru
О. А. Маслова (Россия, г. Волгоград)
Волгоградский государственный социально-педагогический университет
e-mail: alloo@yandex.ru

Transformation of words using ternary M-quasigroups

N. A. Shchuchkin (Russia, c. Volgograd)
Volgograd State Pedagogical University
e-mail: Nikolaj_shchuchkin@mail.ru
O. A. Maslova (Russia, c. Volgograd)
Volgograd State Pedagogical University
e-mail: alloo@yandex.ru

Напомним, что множество Q с одной тернарной операцией f называют тернарной квазигруппой, если для любых элементов a, b, c из Q уравнения

$$f(x,b,c) = a, f(a,y,c) = b, f(a,b,z) = c, \tag{1}$$

разрешимы однозначно ([1], стр. 6 при $n = 3$).

Рассмотрим тернарный группоид, в котором разрешимы однозначно не все три уравнения из (1), а только одно.

Определение 1. *Тернарный группоид $\langle Q, f\rangle$, в котором для любых элементов a, b, c из Q разрешимо однозначно только первое (второе, третье) уравнение из (1), будем называть тернарной L-квазигруппой (M-квазигруппой, R-квазигруппой).*

Дальше мы будем рассматривать тернарные M-квазигруппы.

В силу однозначной разрешимости второго уравнения из (1), на множестве Q имеется еще одна тернарная операция v, заданная по правилу

$$v(a,b,c) = d \Leftrightarrow f(a,d,c) = b; \tag{2}$$

Операции v и f связаны тождествами

$$v(x, f(x,y,z), z) = y = f(x, v(x,y,z), z). \tag{3}$$

Таким образом, на тернарную M-квазигруппу можно смотреть как на универсальную алгебру $\langle Q, f, v\rangle$ с набором тождеств (3).

Пусть множество Q конечно, $Q = \{1, 2, \ldots, m\}$. Тернарной M-квазигруппе $\langle Q, f\rangle$ соответствует 3-мерная матрица $B = (b_{ijk} | i, j, k = 1, 2, \ldots, m)$ m-го порядка ([2], стр. 5), где

$b_{ijk} = f(i,j,k)$, причем, в силу однозначной разрешимости второго уравнения из (1), в строках направления 2 стоят разные элементы из Q. Верно и обратное, любая 3-мерная матрица m-го порядка $B = (b_{ijk}|i,j,k = 1,2,\ldots,m)$, у которой в строках направления 2 стоят разные элементы из Q, определяет тернарную М-квазигруппу $\langle Q, f\rangle$, где $f(i,j,k) = b_{ijk}$. Итак, между тернарными М-квазигруппами и 3-мерными матрицами указанного вида имеется взаимно однозначное соответствие.

Каждая 3-мерная матрица B, которая построена выше для тернарной М-квазигруппы, где $Q = \{1,2,\ldots,m\}$, определяет набор m квадратных таблиц умножения на множестве Q с операцией $i \circ_k j = f(i,j,k)$ $(k = 1,2,\ldots,m)$. Таким образом, на 3-мерную матрицу B можно смотреть как на упорядоченный набор таблиц умножения левых квазигрупп [3] в количестве, равном числу элементов множества Q.

Мы можем вычислить количество $L(m;3)$ тернарных М-квазигрупп порядка m:

$$L(m;3) = m!^{m^2}.$$

Мы имеем большое число тернарных М-квазигрупп, построенных на конечном множестве. А значит, имеются перспективы использования тернарных М-квазигрупп в криптографии.

Для преобразования слов в заданном алфавите используют квазигруппы [4]. Мы обобщаем преобразования слов из этой работы на тернарный случай, т.е. в работе [5] было указано преобразование слов с помощью тернарных квазигрупп, а здесь будем преобразовывать слова с помощью тернарных M-квазигрупп.

Пусть $\langle Q, f\rangle$ – конечная тернарная M-квазигруппа, где $Q = \{1,\ldots,m\}$. Множество всех слов в алфавите Q обозначим

$$Q^+ = \{x_1 \ldots x_s | x_i \in Q, s \geq 1\}.$$

Для заданной пары элементов a, b из Q, в терминах работы [4] эти элементы назовем лидерами, на множестве Q^+ определим отображение

$$A_{a,b}(x_1 x_2 \ldots x_s) = y_1 y_2 \ldots y_s =$$

$$= \begin{cases} y_1 = f(a, x_1, b), \\ y_2 = f(y_1, x_2, a), \\ y_{i+1} = f(y_i, x_{i+1}, y_{i-1}), i = 2,3,\ldots,s-1. \end{cases} \tag{4}$$

Теорема 1. *Отображение $A_{a,b}$, построенное по правилу (4), является биективным.*

Для той же пары элементов a, b из Q на множестве Q^+ строим еще одно отображение

$$B_{a,b}(y_1 y_2 \ldots y_s) = x_1 x_2 \ldots x_s =$$

$$= \begin{cases} x_1 = v(a, y_1, b), \\ x_2 = v(y_1, y_2, a), \\ x_{i+1} = v(y_i, y_{i+1}, y_{i-1}), i = 2,3,\ldots,s-1. \end{cases} \tag{5}$$

Теорема 2. *Отображение $B_{a,b}$, построенное по правилу (5), является обратным для отображения $A_{a,b}$.*

Для преобразования слов с помощью тернарных M-квазигрупп можно использовать композицию отображений вида (4). Выбираем набор $\langle Q, f_1\rangle$, $\langle Q, f_2\rangle$, ..., $\langle Q, f_t\rangle$ тернарных M-квазигрупп и упорядоченные пары $(a_1,b_1),(a_2,b_2),\ldots,(a_t,b_t)$ элементов из Q $(t > 1)$. Строим по правилу (4) отображения $A^1_{a_1,b_1}, A^2_{a_2,b_2}, \ldots, A^t_{a_t,b_t}$, а затем рассматриваем композицию

$$A_{a_1,b_1,a_2,b_2,\ldots,a_t,b_t} = A^1_{a_1,b_1} \circ A^2_{a_2,b_2} \circ \ldots \circ A^t_{a_t,b_t}. \tag{6}$$

Для этих же тернарных M-квазигрупп и пар элементов строим соответственно по правилу (5) отображения $B^1_{a_1,b_1}, B^2_{a_2,b_2}, \ldots, B^t_{a_t,b_t}$, и также рассматриваем композицию $B_{a_t,b_t,\ldots,a_2,b_2,a_1,b_1} = B^t_{a_t,b_t} \circ \ldots \circ B^2_{a_2,b_2} \circ B^1_{a_1,b_1}$. Очевидно, $B_{a_t,b_t,\ldots,a_2,b_2,a_1,b_1}$ — обратное отображение для отображения $A_{a_1,b_1,a_2,b_2,\ldots,a_t,b_t}$.

В криптографии очень важно, чтобы зашифрованное слово можно было расшифровать однозначно. В нашем случае имеем следующий факт.

Теорема 3. *Пусть $\langle Q, f_1\rangle$, $\langle Q, f_2\rangle$, …, $\langle Q, f_t\rangle$ — набор тернарных M-квазигрупп, где $Q = \{1, \ldots, m\}$. Для любого слова $y_1y_2\ldots y_s$ из Q^+ и для любых упорядоченных пар $(a_1, b_1), (a_2, b_2), \ldots, (a_t, b_t)$ элементов из Q существует единственное слово $x_1x_2\ldots x_s$ из Q^+ такое, что верно равенство*

$$A_{a_1,b_1,a_2,b_2,\ldots,a_t,b_t}(x_1x_2\ldots x_s) = y_1y_2\ldots y_s.$$

В тернарном группоиде $\langle Q, f\rangle$ элемент e назовем средним нейтральным элементом, если для любого элемента a из Q верно равенство $f(a, e, a) = a$. Очевидно, в тернарной M-квазигруппе если есть средний нейтральный элемент, то он единственный. Найдем количество конечных тернарных M-квазигрупп порядка m со средним нейтральным элементом.

Теорема 4. *Количество тернарных M-квазигрупп порядка m со средним нейтральным элементом равно*

$$[(m-1)! \cdot m!^{m-1}]^m \cdot m.$$

Теорема 5. *В тернарной M-квазигруппе $\langle Q, f\rangle$ со средним нейтральным элементом e верно тождество $v(x, x, x) = v(y, y, y)$, причем $v(x, x, x) = e$. Верно и обратное, если в тернарной M-квазигруппе $\langle Q, f\rangle$ верно тождество $v(x, x, x) = v(y, y, y)$, то там есть средний нейтральный элемент $e = v(x, x, x)$.*

Операцию $m(x, y, z)$ называют термом Мальцева, если верно равенство $m(x, x, y) = y = m(y, x, x)$.

Теорема 6. *В тернарной M-квазигруппе $\langle Q, f\rangle$ со средним нейтральным элементом e имеется терм Мальцева*

$$m(x, y, z) = f(x, v(y, z, y), x).$$

Любая конгруэнция на тернарной M-квазигруппе $\langle Q, f, v\rangle$ (как на универсальной алгебре с набором тождеств (3)) это отношение эквивалентности, стабильное относительно тернарных операций f, v. Оказывается, для конечных тернарных M-квазигрупп достаточно рассматривать только стабильность отношения эквивалентности относительно операции f. Доказывается этот факт.

Теорема 7. *Отношение эквивалентности τ на конечной тернарной M-квазигруппе $\langle Q, f, v\rangle$ является конгруэнцией тогда и только тогда, когда τ стабильно относительно операции f.*

Класс конгруэнции τ обозначим $[a]_\tau$.

Теорема 8. *В тернарной M-квазигруппе $\langle Q, f, v\rangle$ со средним нейтральным элементом e класс конгруэнции, содержащий e, является тернарной M-подквазигруппой. В тернарной M-квазигруппе со средним нейтральным элементом классы конгруэнции равномощны.*

Следствие 1. *Если $\langle Q, f, u\rangle$ – конечная тернарная M-квазигруппа со средним нейтральным элементом, то порядок каждого класса конгруэнции делит порядок $\langle Q, f, u\rangle$.*

Алгебра называется простой, если в ней только тривиальные конгруэнции.

Следствие 2. *Конечная тернарная M-квазигруппа со средним нейтральным элементом простого порядка является простой.*

Определение полиномиально полной алгебры можно найти в работе [6].

Теорема 9. *([7]) Пусть A – конечная F-алгебр, содержащая по меньшей мере два элемента. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(i) A полиномиально полна;

(ii) существует терм Мальцева в $Pol(F)$ на A и алгебра A является простой и неаффинной.

Следствие 3. *Пусть $\langle Q, f\rangle$ – конечная тернарная M-квазигруппа со средним нейтральным элементом, содержащая по меньшей мере два элемента. Тогда $\langle Q, f\rangle$ полиномиально полна тогда и только тогда, когда $\langle Q, f\rangle$ является простой и неаффинной.*

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Белоусов В. Д. n-Арные квазигруппы. — Кишинев: "Штиинца 1972. 228 с.
2. Соколов Н. П. Введение в теорию многомерных матриц. — Киев: Наукова думка, 1972. 175 с.
3. В. А. Щербаков О конгруэнциях группоидов, тесно связанных с квазигруппами // Фундаментальная и прикладная математика. 2008. N 14(5). С. 237–251
4. Markovski S., Gligoroski D., Bakeva V. Quasigroup String Processing: Part 1 // Proc. of Maked. Academ. of Sci. and Arts for Math. And Tect. Sci. XX. 1999. C. 155-162
5. Щучкин Н. А. Применение тернарных квазигрупп к преобразованию слов // Дискрет. матем. 2024. N 36(2). С. 132–143
6. Артамонов В. А. Полиномиально полные алгебры. // Ученые записки Орловского государ. университета. 2012. N 6(2) С. 23–29
7. Hagemann J., Herrmann C. Arithmetically locally equational classes and representation of partial functions. // Universal Algebra, Estergom (Hungary), vol. 29, Colloq. Math. Soc. J. Bolyai. 1982. C. 345–360

УДК 512.579

Рисовски простые алгебры в некоторых подклассах класса алгебр с одним оператором и основными тернарной и нульарными операциями

В. Л. Усольцев (Россия, г. Волгоград)
Волгоградский государственный социально-педагогический университет
e-mail: usl2004@mail.ru

Rees simple algebras in some subclasses of class of algebras with one operator and main ternary and nullary operations

V. L. Usoltsev (Russia, Volgograd)
Volgograd State Pedagogical University
e-mail: usl2004@mail.ru

В работе [1] Р. Тичи обобщил понятие конгруэнции Риса [2], первоначально возникшее в теории полугрупп, на произвольные универсальные алгебры. Определение этого обобщения, приведенное ниже, дано в формулировке монографии [3]. Обозначим через $Con\,A$ решетку конгруэнций алгебры A, а через $\triangle_A$ — отношение равенства на A. Конгруэнция θ универсальной алгебры A называется конгруэнцией Риса, если $\theta = B^2 \cup \triangle_A$ для некоторой подалгебры B алгебры A; в этом случае B называется подалгеброй Риса алгебры A.

Универсальная алгебра называется рисовски простой [4], если она неодноэлементна и не имеет нетривиальных рисовских конгруэнций.

Алгеброй с операторами называется универсальная алгебра $\langle A, \Omega\rangle$ сигнатура которой является объединением двух частей Ω_1 и Ω_2, где $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$; часть Ω_1 (называемая основной) произвольна и непуста, а часть Ω_2 состоит из операторов — унарных операций, перестановочных с любой операцией из Ω_1, то есть, действующих как эндоморфизмы относительно операций из Ω_1. Тем самым, если 0 — основная нульарная операция алгебры, а f — ее оператор, то $f(0) = 0$.

Унаром называется алгебра $\langle A, f\rangle$ с одной унарной операцией f. Через $f^n(x)$ обозначается результат n-кратного применения операции f к элементу x; также полагаем $f^0(x) = x$. Элемент a унара называется периодическим, если $f^t(a) = f^{t+n}(a)$ для некоторых $t \geqslant 0$ и $n \geqslant 1$. Если a — периодический элемент, то наименьшее из чисел t, для которых $f^t(a) = f^{t+n}(a)$ при некоторых $n \geqslant 1$, называется глубиной элемента a и обозначается через $t(a)$. Глубиной $t(A)$ унара A называется наибольшая из глубин его периодических элементов, если $T(A) \neq \emptyset$. Если множество $\{t(a) \mid a \in T(A)\}$ не ограничено, то говорят, что унар имеет бесконечную глубину. Объединение непересекающихся унаров называется их суммой. Унар $\langle A, f\rangle$ называется связным, если для любых $x, y \in A$ выполняется условие $f^n(x) = f^m(y)$ для некоторых $n \geqslant 0$, $m \geqslant 0$. Максимальный по включению связный подунар унара A называется компонентой связности унара A. Элемент a унара $\langle A, f\rangle$ называется неподвижным, если $f(a) = a$. Связный унар с неподвижным элементом называется корнем.

В [5] на произвольном унаре $\langle A, f\rangle$ задается тернарная мальцевская операция $p(x, y, z)$, перестановочная с операцией f. Пусть $x, y \in A$. Положим $M_{x,y} = \{n \in \mathrm{N} \cup \{0\} \mid f^n(x) = f^n(y)\}$, а также $k(x, y) = \min\ M_{x,y}$, если $M_{x,y} \neq \emptyset$, и $k(x, y) = \infty$, если $M_{x,y} = \emptyset$. Положим далее

$$p(x,y,z) \stackrel{def}{=} \begin{cases} z, & \text{если } k(x,y) \leqslant k(y,z) \\ x, & \text{если } k(x,y) > k(y,z). \end{cases} \tag{1}$$

Основные результаты, полученные при изучении конгруэнц-свойств алгебр $\langle A, p, f\rangle$ с оператором f приводятся в [6].

На основе подхода, предложенного в [5], на произвольном унаре $\langle A, f\rangle$ определяются тернарные операции $s(x, y, z)$ и $m(x, y, z)$ (см. [4]), перестановочные с операцией f:

$$s(x,y,z) \stackrel{def}{=} \begin{cases} z, & \text{если } k(x,y) < k(y,z); \\ y, & \text{если } k(x,y) = k(y,z); \\ x, & \text{если } k(x,y) > k(y,z), \end{cases} \tag{2}$$

$$m(x,y,z) \stackrel{def}{=} \begin{cases} z, & \text{если } k(x,y) \geqslant k(y,z); \\ x, & \text{если } k(x,y) < k(y,z). \end{cases} \tag{3}$$

Из определения (2) следует, что операция s является операцией меньшинства и слабой функцией почти единогласия (weak near-unanimity function) (см., например, [7]). Из определения (3) вытекает, что операция m является операцией большинства (см., например, [8]).

Рисовски простые алгебры в классах алгебр $\langle A, m, f\rangle$, $\langle A, p, f\rangle$, $\langle A, s, f\rangle$ были описаны в работе [9].

Теорема 1. *Пусть $\langle A, d, 0, f\rangle$ — алгебра с оператором f, основной нульарной операцией 0 и основной тернарной операцией d, заданной по одному из правил (1) – (3). Алгебра $\langle A, d, 0, f\rangle$ является рисовски простой тогда и только тогда, когда выполняется одно из условий:*
1) унар $\langle A, f\rangle$ является корнем глубины 1, в котором 0 является неподвижным элементом;
2) унар $\langle A, f\rangle$ есть сумма одноэлементной компоненты связности $\{0\}$ и произвольного унара.

Теорема 2. *Пусть $\langle A, \{d, f\}\cup\Omega_0\rangle$ — алгебра с оператором f, основной тернарной операцией d, заданной по одному из правил (1) – (3), а множество Ω_0 есть множество нульарных операций на A, причем $|\Omega_0| > 1$. Тогда алгебра $\langle A, \{d, f\}\cup\Omega_0\rangle$ является рисовски простой.*

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Tichy R. F. The Rees congruences in universal algebras // Publ. Inst. Math. (Beograd). 1981. V. 29. P. 229–239.
2. Rees D. On semigroups // Proc. Cambridge Phil. Soc. 1940. V. 36. P. 387–400.
3. Chajda I., Eigenthaler G., Langer H. Congruence classes in universal algebra. — Vienna: Heldermann-Verlag, 2003. 192 p.
4. Усольцев В. Л. Алгебры Риса и конгруэнц-алгебры Риса в одном классе алгебр с оператором и основной операцией почти единогласия // Чебышевский сборник. 2016. Т. 17, вып. 4(60). С. 157–166.
5. Карташов В. К. Об унарах с мальцевской операцией // Международный семинар «Универсальная алгебра и ее приложения», посвященный памяти профессора Л. А. Скорнякова: тезисы докладов (Волгоград, 6-11 сентября 1999 г.). — Волгоград: Перемена, 1999. С. 31–32.
6. Усольцев В. Л. Унары с тернарной мальцевской операцией // Успехи математических наук. 2008. Т. 63, вып. 5. С. 201–202.
7. Maróti M., McKenzie R. Existence theorems for weakly symmetric operations // Algebra Universalis. 2008. Vol. 59. № 3–4. P. 463–489.
8. Baker K. A., Pixley A. Polynomial interpolation and the Chinese Remainder Theorem for algebraic systems // Math. Zeitschrift. 1975. V. 143. P. 165–174.
9. Усольцев В. Л. О рисовском замыкании в некоторых классах алгебр с оператором // Чебышевский сборник. 2021. Т. 22, вып. 2(78). С. 271–287.

УДК 511.32

Левые T-квазигруппы с правой единицей

А. А. Веселова (Россия, г. Волгоград)
Волгоградский государственный социально-педагогический университет
e-mail: alexandra.912@mail.ru

Left T-quasigroups with a right unit

A. A. Veselova (Russia, Volgograd)
Volgograd State Pedagogical University
e-mail: alexandra.912@mail.ru

В работе [1] изучались свойства T-квазигрупп. Эта работа подтолкнула нас изучать свойства левых T-квазигрупп.

Напомним, что квазигруппой называют группоид $(Q, *)$, в котором для любых элементов a и b из Q однозначно разрешимы уравнения

$$a * x = b, \quad y * a = b$$

(см. [2], стр. 39). В нашей работе будем рассматривать группоид $(Q, *)$, в котором для любых элементов a и b из Q однозначно разрешимо только одно из вышеуказанных уравнений.

Определение 1. *Если в группоиде $(Q, *)$ однозначно разрешимо уравнение $a * x = b$ $(y * a = b)$ для любых элементов a и b из Q, то его называют левой (правой) квазигруппой [3].*

Определим операцию левого (правого) деления $\setminus$ $(/)$ в левой (правой) квазигруппе следующим образом:

$$a \setminus b = c \Leftrightarrow a * c = b \quad (b/a = c \Leftrightarrow c * a = b). \tag{1}$$

Утверждение 1. *В левой квазигруппе с правой единицей e верно тождество $x \setminus x = y \setminus y$, причем $x \setminus x = e$. Верно и обратное, если в левой квазигруппе верно тождество $x \setminus x = y \setminus y$, то там есть правая единица $e = x \setminus x$.*

Определение 2. *Два группоида с операциями $x * y$ и $x \bullet y$, определенные на одном и том же множестве Q, называются изотопными, если существуют такие подстановки α, β, γ множества Q, что для любых $x, y \in Q$ верно $\gamma(x \bullet y) = \alpha(x) * \beta(y)$. (см. [4], стр. 13). В этом случае группоид $(Q, \bullet)$ называют изотопом группоида $(Q, *)$. Упорядоченную тройку $T = (\alpha, \beta, \gamma)$ называют изотопией. Подстановки (α, β, γ) называются соответственно левой, правой и главной компонентами изотопии T. Изотопия вида $T = (\alpha, \beta, 1)$, то есть главная компонента равна 1, называется главной. (см. [4], стр. 13)*

Утверждение 2. *Пусть $(Q, +)$ - абелева группа, α–эндоморфизм, β– автоморфизм группы $(Q, +)$, $c \in Q$. На Q определим*

$$x * y = \alpha x + \beta y + c. \tag{2}$$

Тогда $(Q, *)$–левая квазигруппа.

Определение 3. *Квазигруппу Q называют T-квазигруппой, если на ней существует структура абелевой группы $(Q, +)$ такая, что*

$$x * y = \alpha x + \beta y + c$$

для некоторых автоморфизмов α, β группы $(Q, +)$ и элемента $c \in Q$.

По аналогии с этим определением, левую квазигруппу Q назовем левой T-квазигруппой, если на ней существует структура абелевой группы $(Q, +)$ такая, что верно

$$x * y = \alpha x + \beta y + c$$

для некоторых эндоморфизма α, автоморфизма β группы $(Q, +)$ и элемента $c \in Q$, причем $(Q, +)$ будем называть T-группой, а $(Q, +, \alpha, \beta, c)$ – T-формой Q.

Определение 4. *Алгебра A называется аффинной ([5]), если A снабжена структурой аддитивной абелевой группы такой, что каждая термальная операция f имеет вид* $f(x_1, x_2 \ldots x_n) = a_0 + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n$, *где* $a_0 \in A$, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ *являются групповыми эндоморфизмами.*

Утверждение 3. *Если левая квазигруппа является аффинной, тогда она левая T-квазигруппа.*

Утверждение 4. *Левая T-квазигруппа* $(Q, *)$ *с правой единицей e является T-квазигруппой с этой же правой единицей и операция* $*$ *действует по правилу*

$$x * y = x + \beta y - \beta e \tag{3}$$

для некоторого автоморфизма β *группы* $(Q, +)$.

Утверждение 5. *Если в левой T-квазигруппе* $(Q, *)$ *есть единица e, то операция* $*$ *действует по правилу* $x * y = x + y - e$ *и* $(Q, *)$ – *группа, изоморфная* $(Q, +)$.

Предложение 1. *Пусть* $(Q, *)$ – *левая T-квазигруппа с правой единицей e и* $(Q, +)$*-это T-группа. Тогда* $(Q, +)$ *является главным изотопом* $(Q, *)$.

Предложение 2. *Любые две T-группы левой T-квазигруппы с правой единицей изоморфны.*

Утверждение 6. *Любая левая квазигруппа с правой единицей e главноизотопна левой квазигруппе с единицей.*

Утверждение 7. *Пусть* $(Q, *)$ – *левая T-квазигруппа с правой единицей и* $(Q, \bullet)$ – *левая квазигруппа с единицей. Тогда* $(Q, \bullet)$ – *T-группа левой T-квазигруппы* $(Q, *)$ *тогда и только тогда, когда* $(Q, \bullet)$ – *главный изотоп* $(Q, *)$.

Утверждение 8. *Каждая левая подквазигруппа левой T-квазигруппы с правой единицей, у которой есть такая же правая единица, является левой T-квазигруппой с правой единицей.*

Утверждение 9. *Если левая квазигруппа P является гомоморфным образом левой T-квазигруппы Q с правой единицей, тогда P является левой T-квазигруппой с правой единицей.*

Утверждение 10. *Декартово произведение левых T-квазигрупп с правой единицей является левой T-квазигруппой с правой единицей.*

Утверждение 11. *Все левые T-квазигруппы с правой единицей образуют многообразие.*

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Nemec P., Kepka T. T-quasigroups (Part I.)// Acta Universitatis Carolinae. Mathematica et Physica. 1971. Vol 12, № 1. С. 39-49.

2. Курош А. Г. Общая алгебра (лекции 1969-1970 учебного года). Москва, 1974.

3. Щербаков В. А., Табаров А. Х., Пушкашу Д. И. О конгруэнциях группоидов, тесно связанных с квазигруппами // Фундаментальная и прикладная математика. 2008. Том 14, № 5. С. 237-251.

4. Белоусов В. Д. Основы теории квазигрупп и луп. Москва, 1967.

5. Artamonov V. A., Chakrabarti S., Gangopadhyay S., Pal S. K. On Latin squares of polynomially complete quasigroups and quasigroups generated by shifts // Quasigroups and Related Systems. 2013. Vol 21, № 2. С. 117-130.

Секция 3. Кольца и модули

УДК 512.55

Градуированные кольца эндоморфизмов градуированных линейных пространств

И. Н. Балаба (Россия, г. Тула)
Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого
e-mail: ibalaba@mail.ru

Graded endomorphism rings of graded linear spaces

I. N. Balaba (Russia, Tula)
Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University
e-mail: ibalaba@mail.ru

В монографии „Линейная алгебра и проективная геометрия“ Р. Бэр [1] систематически изложил раздел алгебры, занимающийся изучением трех тесно связанных между собой объектов, ассоциированных с векторными пространствами над телами: решетки подпространств, кольца эндоморфизмов и группы автоморфизмов. В предисловии к ее русскому изданию А. Г. Курош эту ветвь алгебры, поглотившую все основное содержание проективной геометрии и связавшую проективную геометрию с теорией структур и тел, с общей теорией ассоциативных колец и модулей и с теорией классических групп, предложил называть *проективной алгеброй*.

Градуированные тела, то есть градуированные кольца, каждый ненулевой однородный элемент которых является обратимым, играют значительную роль в структурной теории градуированных колец. Несмотря на то, что градуированные тела не являются телами в обычном смысле, они сами и градуированные модули над ними обладают свойствами, аналогичными свойствам тел и линейных пространств над телами.

Все рассматриваемые кольца предполагаются ассоциативными с единицей, градуированные мультипликативной группой G с единицей e.

Легко проверить, что если $D = \bigoplus_{g\in G} D_g$ является G-градуированным телом, то D_e является телом, его носитель $G^{'} = \mathrm{Supp} D = \{g \in G \mid D_g \neq 0\}$ – подгруппа группы G и D – сильно $G^{'}$-градуированное кольцо.

Градуированный модуль V над градуированным телом D являются *gr-свободным*, то есть обладает базисом, состоящим из однородных элементов, причем все однородные базисы модуля V имеют одинаковую мощность. Градуированные модули над градуированными телами будем называть *градуированными линейными пространствами*, а число элементов базиса — *рангом* пространства.

Заметим, что если G-градуированное кольцо D с единицей 1 и каждый правый (левый) G-градуированный D-модуль является gr-свободным, то D — градуированное тело.

Пусть $V = \bigoplus_{g\in G} V_g$ – градуированное линейное пространство над D, тогда $\mathrm{END}_D(V) = \bigoplus_{g\in G} \mathrm{HOM}_D(V, V)_g \subseteq \mathrm{End}_D(V)$ – градуированное кольцо эндоморфизмов модуля V.

Если группа G конечна или модуль V_D – конечно порожден, то $\mathrm{END}_D(V) = \mathrm{End}_D(V))$, а в общем случае имеет место строгое включение.

Теорема 1 ([2], теорема 2.1). *Градуированное кольцо эндоморфизмов* $\mathrm{END}_D(V)$ *градуированного линейного пространства* V *является gr-регулярным, т.е. регулярным является каждый его однородный элемент.*

В [2] были рассмотрены свойства градуированных линейных пространств и доказан градуированный аналог треугольной теории Галуа, а именно, построены:

– изоморфизм между решеткой градуированных подпространств пространства V и решеткой правых градуированных аннуляторных идеалов градуированного кольца эндоморфизмов $A = \mathrm{END}_D(V)$;

– антиизоморфизм между решеткой градуированных подпространств пространства V и решеткой левых градуированных аннуляторных идеалов кольца A;

– антиизоморфизм между решеткой правых и решеткой левых градуированных аннуляторных идеалов кольца A.

Было установлено, что изоморфизмы градуированных колец эндоморфизмов градуированных линейных пространств индуцируются полулинейными изоморфизмами, а антиизоморфизмы – антиполулинейными изоморфизмами.

Определение 1. *Полулинейным σ-изоморфизм ($\sigma \in G$) градуированных модулей V_D и W_E называется пара отображений (β, α), где $\beta : V \to W$ – изоморфизм абелевых групп, $\alpha : D \to E$ – изоморфизм колец, причем $\alpha(D_h) \subset E_{\sigma^{-1}h\sigma}$ и $\beta(V_t) \subset W_{t\sigma}$, и $(vd)^\beta = v^\beta d^\alpha$ для всех $d \in D,\ v \in V$.*

Теорема 2 ([2], теорема 3.1). *Пусть $A = \mathrm{END}_D(V)$ и $B = \mathrm{END}_E(W)$ – градуированные кольца эндоморфизмов градуированных линейных пространств V_D и W_E над градуированными телами D и E соответственно. Тогда $\phi : A \to B$ является изоморфизмом градуированных колец в том и только том случае, если существуют элемент $\sigma \in G$ и полулинейный σ-изоморфизм (β, α) градуированных линейных пространств V_D на W_E, такие что $f^\phi = \beta f \beta^{-1}$ для любого $f \in A$.*

Легко заметить, что всякое полулинейное преобразование индуцирует изоморфизм решеток подпространств.

Теорема 3. *Пусть $A = \mathrm{END}_D(V)$ и $B = \mathrm{END}_E(W)$ – градуированные кольца эндоморфизмов градуированных линейных пространств V_D и W_E. Тогда два полулинейных преобразования V_D и W_E индуцируют один и тот же изоморфизм градуированных колец эндоморфизмов A и B в том и только том случае, если они индуцируют один и тот же изоморфизм решеток градуированных подпространств пространств V_D и W_E.*

Определение 2. *Антиполулинейным σ-изоморфизм ($\sigma \in G$) градуированных модулей ${}_DV$ и W_E называется пара отображений (γ, β), где $\beta : V \to W$ – изоморфизм абелевых групп, $\gamma : D \to E$ – антиизоморфизм колец, причем $\gamma(D_h) \subset E_{\sigma^{-1}h^{-1}\sigma}$ и $\beta(V_t) \subset W_{t^{-1}\sigma}$, и $(dv)^\beta = v^\beta d^\alpha$ для всех $d \in D,\ v \in V$.*

Для G-градуированного D-модуля V обозначим через $V^* = \mathrm{HOM}_D(V, D)$. Если V является правым градуированным D-модулем, то V^* является левым G-градуированным D-модулем и называется *дуальным* к модулю V_D.

Следующая теорема является частным случаем теоремы 2 из [3].

Теорема 4. *Пусть V_D и W_E – градуированные линейные пространства над градуированными телами D и E соответственно. Тогда $\alpha : END_D(V) \to END_E(W)$ является антиизоморфизмом градуированных колец в том и только том случае, если пространства V_D и W_E имеют конечный ранг и существуют $\sigma \in G$, и антиполулинейный σ-изоморфизм (γ, β) градуированных линейных пространств ${}_DV^*$ на W_E, такие что $(f\eta^*)^\beta = \eta^\alpha f^\beta$ для любого $f \in V^*,\quad \eta \in END(V_D)$.*

Теорема 5. *Пусть V_D и W_E – градуированные линейные пространства над градуированными телами D и E соответственно и $\alpha : END_D(V) \to END_E(W)$ – антиизоморфизм градуированных колец. Тогда существует антиизоморфизм решетки градуированных подпространств пространства V_D на решетку градуированных подпространств пространства W_E.*

Теорема 6. *Пусть V_D и W_E – градуированные линейные пространства конечного ранга над градуированными телами D и E соответственно. Тогда два антиполулинейных изоморфизма ${}_DV^*$ на W_E индуцируют один и тот же антиизоморфизм градуированных колец $END_D(V)$ и $END_E(W)$ в том и только том случае, если они индуцируют один и тот же антиизоморфизм решетки градуированных подпространств пространства V_D на решетку градуированных подпространств пространства W_E.*

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бэр Р. Линейная алгебра и проективная геометрия. — Москва: Изд-во Иностранной литературы, 1953, 400 с.
2. Балаба И. Н. Изоморфизмы градуированных колец линейных преобразований градуированных векторных пространств // Чебышевский сборник. 2005. Том 6, № 4. С. 6–23.
3. Балаба И. Н. Индуцируемость антиизоморфизмов колец эндоморфизмов градуированных модулей антиполулинейным преобразованием // Успехи мат. наук. 2008. Том 63, № 3(381). С. 151–152.

УДК 512.552

Корни многочленов в конечных полуполях[1]

О. В. Кравцова (Россия, г. Красноярск)
Сибирский федеральный университет
e-mail: ol71@bk.ru

Polynomial roots in finite semifields

O. V. Kravtsova (Russia, Krasnoyarsk)
Siberian Federal University
e-mail: ol71@bk.ru

Алгебраическая система $(Q, +, \cdot)$ с бинарными операциями $+$ и $\cdot$ называется *полуполем* (подробно, например, в [1]), если:
1) $(Q, +)$ — абелева группа;
2) $Q^* = (Q \setminus \{0\}, \cdot)$ — лупа;
3) выполнены дистрибутивные законы $(a + b)c = ac + bc$, $c(a + b) = ca + cb$ $(a, b, c \in Q)$.

Ввиду отсутствия ассоциативности умножения даже степень элемента в полуполе определена не однозначно. Индуктивно задают *правоупорядоченную* и *левоупорядоченную степени*:

$$a^{1)} = a^{(1} = a, \quad a^{n+1)} = a^{n)} \cdot a, \quad a^{(n+1} = a \cdot a^{(n}, \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

[1]Работа поддержана Красноярским математическим центром, финансируемым Минобрнауки РФ (Соглашение 075-02-2025-1790).

n-й степенью называют любое произведение n множителей, равных a. Аналогично теоретико-групповым понятиям, вводятся порядок элемента, его левый и правый порядки, спектр мультипликативной лупы Q^* ненулевых элементов, ее левый и правый спектры.

К изучению конечных полуполей применимо классическое понятие минимального многочлена ненулевого элемента. *Правоупорядоченным минимальным многочленом* элемента $a \in Q^*$ в полуполе Q порядка p^n (p – простое) называется [2] такой нормированный многочлен

$$\mu_a^r(x) = x^m + c_1 x^{m-1} + \cdots + c_{m-1}x + c_m \in \mathbb{Z}_p[x]$$

минимальной степени, что

$$a^{m)} + c_1 a^{m-1)} + \cdots + c_{m-1}a + c_m = 0.$$

Выявлена связь [3], правого порядка элемента a в конечном полуполе и канонического разложения его правоупорядоченного минимального многочлена.

В отличие от поля, в конечном полуполе Q порядка p^n число (правых) корней многочлена, даже неприводимого над простым подполем $\mathbb{Z}_p$, не ограничено степенью многочлена. Так, например, в 11 полуполях минимального порядка 16 (среди всех 23 существующих) многочлен $x^4 + x + 1$ имеет по шесть различных корней. Причину такого аномального свойства отчасти поясняют следующие рассуждения.

В полуполе Q правое умножение $R_a : x \to xa$ является линейным преобразованием n-мерного левого векторного пространства Q над полем $\mathbb{Z}_p$. Все такие преобразования образуют *регулярное множество* (spread set)

$$R = \{\theta(a) \mid a \in Q\} \subset GL_n(p) \cup \{0\}.$$

Пусть элемент $a \in Q$ имеет неприводимый правоупорядоченный минимальный многочлен $\mu_a^r(x)$ степени n, $A = \theta(a)$ – соответствующая матрица из регулярного множества. Тогда множество матриц

$$F_a = \{x_1 E + x_2 A + x_3 A^2 + \cdots + x_n A^{n-1} \mid x_i \in \mathbb{Z}_p,\ i = 1, \ldots, n\} \simeq GF(p^n)$$

будем называть *полем-компаньоном* полуполя Q с представителем a. Число полей-компаньонов не зависит от выбора базиса векторного пространства Q. Пересечение $R \cap F_a$ является линейным подпространством в Q размерности не менее двух. Разные поля-компаньоны полуполя Q могут содержать корни одного и того же многочлена $\mu_a^r(x)$, общим количеством более n. В упомянутых полуполях порядка 16 каждое из трех полей-компаньонов содержит точно по два корня многочлена $x^4 + x + 1$.

Дальнейшее изучение полей-компаньонов – их наличия, количества и пересечений с регулярным множеством – показывает, что эти признаки могут быть полезны при классификации конечных полуполей. В частности, регулярное множество всякого неассоциативного полуполя порядка p^3 содержится в объединении $p + 1$ своих полей-компаньонов, пересекаясь с каждым по двумерному подпространству. Исключительные непримитивные полуполя Кнута-Руа порядка 32 и Хентзела-Руа порядка 64 не имеют полей-компаньонов.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Johnson N. L., Jha V., Biliotti M. Handbook of finite translation planes. — Chapman and Hall, Boca Raton, London, New York, 2007, 861 p.

2. Kravtsova O. V. Minimal polynomials in finite semifields // Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Phisics. 2018. Vol. 11, no. 5. P. 588–596.

3. Kravtsova O. V., Kuzmin I. K. On spectra and minimal polynomials in finite semifields // Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics. 2025. Vol. 18, no. 1. P. 41–50.

УДК 511.32

Конструкции центрально существенных колец[1]

О. В. Любимцев (Россия, г. Нижний Новгород)
Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского
e-mail: oleg_lyubimcev@mail.ru
А. А. Туганбаев (Россия, г. Москва)
Национальный исследовательский университет МЭИ
e-mail: tuganbaev@gmail.com

Constructions of centrally essential rings

O. V. Lyubimtsev (Russia, г. Nizhny Novgorod)
National Research Lobachevsky State University of Nizhni Novgorod
e-mail: oleg_lyubimcev@mail.ru
A. A. Tuganbaev (Russia, г. Moscow)
National Research University MPEI
e-mail: tuganbaev@gmail.com

Мы рассматриваем только ассоциативные кольца с ненулевой единицей.

Определение 1. *Кольцо R называется* **центрально существенным**, *если для любого его ненулевого элемента a существуют такие ненулевые центральные элементы x и y, что $ax = y$.*

Заметим, что кольцо R с центром $Z(R)$ центрально существенно в точности тогда, когда модуль $R_{Z(R)}$ является существенным расширением модуля $Z(R)_{Z(R)}$. Ясно, что любое коммутативное кольцо является центрально существенным. Кроме того, ранее было доказано, что все полупервичные или несингулярные справа центрально существенные кольца коммутативны. Однако центрально существенное кольцо может быть некоммутативным. Например, существуют конечные некоммутативные центрально существенные групповые алгебры над полями простой характеристики. Эти, а также другие многочисленные результаты о центрально существенных кольцах можно найти в монографии А.А. Туганбаева [1].

Мы обозначаем через $Z(R)$ и $J(R)$ центр и радикал Джекобсона кольца R, соответственно. Наименьшее n, такое, что $J(R)^n = 0$, называется *индексом нильпотентности* $J(R)$ (если такое n существует). Кольцо R называется *локальным*, если $R/J(R)$ – тело. Кольцо называется *инвариантным*, если все его односторонние идеалы являются идеалами. Кольцо R называется *полусовершенным*, если факторкольцо $R/J(R)$ артиново и все идемпотенты $R/J(R)$ могут быть подняты по модулю $J(R)$ до идемпотентов в R. Кольцо R называется *полупримарным*, если оно полусовершенно и радикал $J(R)$ нильпотентен. Модуль M называется *цепным*, если множество всех подмодулей в M линейно упорядочено по включению. Кольцо R, цепное как правый R-модуль, называется *цепным справа*. Напомним, что элемент r кольца R называется

[1]Работа О. В. Любимцева поддержана Минобрнауки РФ, проект FSWR-2023-0034. Исследование А. А. Туганбаева выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22-11-00052, https://rscf.ru/project/22-11-00052.

регулярным справа или левым неделителем нуля, если из $rx = 0$ следует $x = 0$ для любого $x \in R$. Заметим, что в центрально существенном кольце односторонние делители нуля являются двусторонними; см. [1, 1.1.2(a)]. Кольцо R имеет *правое (соотв., левое) классическое кольцо частных* $Q_{\mathrm{cl}}(R_r)$ (соотв., $Q_{\mathrm{cl}}(R_l)$) в точности тогда, когда для любых элементов $a, b \in R$, где b регулярен, существуют такие элементы $c, d \in R$, где d регулярен, что $bc = ad$ (соотв., $cb = da$). Указанные условия называют обычно *условиями Оре*. Если кольца $Q_{\mathrm{cl}}(R_r)$ и $Q_{\mathrm{cl}}(R_l)$ существуют, то они изоморфны над R. В этом случае говорят о существовании двустороннего кольца частных $Q_{\mathrm{cl}}(R)$.

Теорема 1. *Если центрально существенное кольцо R имеет правое классическое кольцо частных $Q_{cl}(R_r)$, то $Q_{cl}(R_r)$ – центрально существенное кольцо.*

Задача 1. *Всякое ли центрально существенное кольцо обладает правым классическим кольцом частных?*

Задача 2. *Верно ли утверждение, обратное к теореме 1?*

Напомним, что группа G называется *гамильтоновой*, если G – неабелева и любая подгруппа в G нормальна.

Теорема 2. *Если R – область и G – гамильтонова группа, то групповое кольцо RG центрально существенно в точности тогда, когда R коммутативно и $char(R) = 2$.*

Определение 2. *Центрально существенное кольцо называется* вполне центрально существенным, *если все его фактор-кольца являются центрально существенными кольцами.*

Пример 3. *Приведем пример некоммутативного вполне центрально существенного кольца. Пусть $F = \mathbb{Q}(x, y)$ – поле рациональных функций. Рассмотрим две частные производные $d_1 = \dfrac{\partial}{\partial x}$ и $d_2 = \dfrac{\partial}{\partial y}$. Тогда кольцо R матриц*

$$\left\{ \begin{pmatrix} f & d_1(f) & g \\ 0 & f & d_2(f) \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix} \;\middle|\; f, g \in F \right\}$$

является некоммутативным центрально существенным кольцом; см. [1, Пример 3]. Рассмотрим идеал

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & g \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \;\middle|\; g \in F \right\}.$$

Так как $R/H \cong \mathbb{Q}(x, y)$ и H – наименьший идеал в R, то в R нет ненулевых собственных идеалов, отличных от H. Следовательно, R – некоммутативное артиново цепное вполне центрально существенное кольцо.

Предложение 1. *Каждое вполне центрально существенное кольцо инвариантно.*

Заметим, что существуют локальные артиновы центрально существенные не инвариантные кольца; см. [1, Пример 3.6.8]

Теорема 3. *Каждое вполне центрально существенное кольцо R обладает классическим кольцом частных $Q_{cl}(R)$, которое является вполне центрально существенным кольцом.*

Пример 4. *Кольцо*

$$R = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \;\middle|\; a, c \in \mathbb{Z},\, a - c \in 2\mathbb{Z},\, b \in \mathbb{Z}_4 \right\}$$

является некоммутативным вполне центрально существенным кольцом. По теореме 3 кольцо R имеет классическое кольцо частных, в котором будут обратимы матрицы $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$, у которых числа a и c нечетны и сравнимы по модулю 2. Кроме того, кольцо $Q_{cl}(R)$ также является вполне центрально существенным кольцом.

Хорошо известно, что каждое ассоциативное кольцо R можно рассматривать как кольцо Ли относительно лиевого умножения $[r, s] = rs - sr$ для всех $r, s \in R$. Для всех $A, B \subseteq R$, аддитивная подгруппа в R, порожденная всеми произведениями $[a, b]$ ($a \in A$, $b \in B$) обозначается $[A, B]$. Положим $R^{[1]} = R$ и для любых $i \in \mathbb{N}$, $i > 1$, $R^{[i]} = [R^{[i-1]}, R]$. Если существует такое $n \in \mathbb{N}$, что $R^{[n+1]} = 0$, то кольцо R называется *лиево-нильпотентным* кольцом. Наименьшее n с таким свойством есть *класс лиево-нильпотентности* R. Определим $R^{(1)} = R$, $R^{(2)}$ – идеал, порожденный всеми элементами $rs - sr$, где $r, s \in R$, и, индуктивно, $R^{(n)}$ – идеал, порожденный всеми $ab - ba$, где $a \in R^{(n-1)}$, $b \in R$, $n > 1$. Кольцо R называется *сильно лиево-нильпотентным*, если $R^{(m)} = 0$ для некоторого m; см., например, [2].

Теорема 4. *Пусть R – вполне центрально существенное кольцо.*

1. Если R – полупримарное кольцо и его радикал Джекобсона $J(R)$ имеет индекс нильпотентности n, то R – лиево-нильпотентное кольцо класса нильпотентности не выше n.

2. Если R – нетерово кольцо, то R сильно лиево-нильпотентно; в частности, R – PI-кольцо.

Теорема 5. *Пусть R – коммутативная область с 1, G – любая группа. Тогда вполне центрально существенное групповое кольцо RG коммутативно.*

В связи с теоремами 4 и 5 сделаем следующие замечания.

Замечание 1. *Существуют не лиево-нильпотентные центрально существенные кольца. Действительно, существуют центрально существенные кольца, которые не являются PI кольцами; см. [1, Theorem 3.4.5].*

Замечание 2. *Теорема 5 неверна для произвольных центрально существенных групповых колец. Например, групповая алгебра $RG = \mathbb{Z}_2 Q_8$, где $\mathbb{Z}_2$ – поле вычетов по модулю 2, является конечным некоммутативным центрально существенным кольцом; см. [1, Пример 1].*

Пример 5. *Существуют цепные артиновы центрально существенные кольца, не являющиеся вполне центрально существенными. Действительно, рассмотрим пример из монографии [1, Пример 4.1.8]. Пусть F – поле с нетривиальным дифференцированием δ. Рассмотрим отображение $f\colon F \to M_4(F)$ из поля F в кольцо 4×4 матриц над F, определенное соотношением*

$$\forall a \in F, \quad f(a) = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ \delta(a) & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}.$$

Непосредственно проверяется, что f – кольцевой гомоморфизм. Положим

$$x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда подкольцо R кольца $M_4(F)$, порожденное множеством $f(F) \cup \{x\}$ – некоммутативное цепное артиново центрально существенное кольцо. Рассмотрим фактор-кольцо $\overline{R} = R/Rx^2$, которое некоммутативно, поскольку $\overline{x}\overline{f(a)} \neq \overline{f(a)}\overline{x}$, где $\delta(a) \neq 0$. Центр $Z(\overline{R})$ кольца $\overline{R}$ состоит из диагональных матриц с элементами $a \in F$ на диагонали, причем $\delta(a) = 0$. Ясно, что для элемента $\overline{f(a)}$, где $\delta(a) \neq 0$, не существует такой ненулевой диагональной матрицы $\overline{C}$ из $Z(\overline{R})$, что $\overline{f(a)}\overline{C} \in Z(\overline{R}) \setminus \{\overline{0}\}$. Следовательно, кольцо $\overline{R}$ не является центрально существенным, а значит, R – не вполне центрально существенное кольцо.

Кольцо R называется *реверсивным* (*коммутативным в нуле*), если из $ab = 0$ следует $ba = 0$ для $a, b \in R$; см., например, [3]. Цепные артиновы кольца, в частности, цепные артиновы вполне центрально существенные кольца реверсивны.

Пример 6. *Пусть $K = \mathbb{Z}_2$ – поле вычетов по модулю 2, $T_2(K)$ – кольцо верхнетреугольных матриц порядка 2 над полем K. Рассмотрим кольцо*

$$R = \left\{ \begin{pmatrix} k & a & b \\ 0 & k & a \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix} \;\middle|\; k \in K; a, b \in T_2(K) \right\}.$$

Тогда R – некоммутативное центрально существенное кольцо. Заметим, что кольцо R подпрямо неразложимо с наименьшим ненулевым идеалом $I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \begin{pmatrix} 0 & K \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Так как фактор-кольцо R/I коммутативно, то коммутативны и фактор-кольца по остальным идеалам. Следовательно, R – некоммутативное вполне центрально существенное кольцо из 128 элементов. При этом кольцо R не реверсивно. Действительно, для матриц $A \in R:\ k = b = 0$, $a = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ и $B \in R:\ k = b = 0$, $a = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ имеем: $AB \neq 0$, но $BA = 0$. В частности, кольцо R не является цепным.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Туганбаев А. А. Кольца с существенным центром. — Москва: Флинта, 2025, 172 с. ISBN 978-5-9765-5746-8.

2. Catino F., Miccoli M. M. Note on strongly Lie nilpotent rings // Note di Matematica. 2000/2001. Vol. 20. no. 2. P. 35–41.

3. Cohn P. M. Reversible rings // Bulletin of the London Mathematical Society. 1999. Vol. 31. P. 641–648.

УДК 512.552, 512.643

Классификация коммутативных матричных подалгебр большой длины[1]

О. В. Маркова (Россия, г. Москва)
Механико-математический факультет МГУ имени М.В. Ломоносова
Петербургский государственный университет путей сообщения Императора Александра I
e-mail: ov_markova@mail.ru

Classification of commutative matrix subalgebras with large length

O. V. Markova (Russia, Moscow)
M.V. Lomonosov Moscow State University
Emperor Alexander I St. Petersburg State Transport University
e-mail: ov_markova@mail.ru

Доклад основан на работах [1],[2].

Определение 1. *Длиной конечной системы порождающих $\mathcal{S}$ конечномерной ассоциативной алгебры $\mathcal{A}$ над произвольным полем называется наименьшее натуральное число $l(\mathcal{S})$, такое что слова длины не большей $l(\mathcal{S})$ порождают данную алгебру как векторное пространство.* Длиной алгебры *называется максимум длин её систем порождающих, обозначим её $l(\mathcal{A})$.*

В этом определении рассматриваются все системы порождающих данной алгебры. Этим определяется сложность вычисления длины алгебры. Например, в теории матриц центральной задачей исследования длины стала проблема А. Паза 1984 г. [3] вычисления длины полной матричной алгебры как функции порядка матриц, которая до сих пор остаётся открытой.

В работе А. Паза [3] также было установлено, что длина любой коммутативной подалгебры алгебры матриц порядка n над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$ не больше $n-1$.

В [4], [5] было показано, что эта оценка справедлива и в случае, когда поле произвольно, и удалось описать коммутативные подалгебры, длина которых максимальна:

Теорема 1. *Пусть $\mathbb{F}$ — произвольное поле и $\mathcal{A}$ — коммутативная подалгебра в полной алгебре матриц $M_n(\mathbb{F})$. Тогда*
1. $l(\mathcal{A}) \leqslant n-1$;
2. $l(\mathcal{A}) = n-1$ тогда и только тогда, когда алгебра $\mathcal{A}$ порождена циклической матрицей C, т.е. такой матрицей $C \in M_n(\mathbb{F})$, что
$$\dim_{\mathbb{F}}(\langle C^0 = E_n,\ C,\ C^2, \ldots,\ C^{n-1}\rangle) = n.$$

В настоящем докладе предлагается классификация коммутативных подалгебр в алгебре $M_n(\mathbb{F})$ длин $n-1$ и $n-2$, т.е. максимальной длины и длины на единицу меньшей максимальной, над алгебраически замкнутыми полями.

1. Алгебры длины $n-1$.

Теорема 1 дает исчерпывающий структурный ответ, однако, открытым оставался вопрос о количестве различных алгебр, порождённых циклическими матрицами (здесь и далее, говоря о различных матрицах и алгебрах, мы будем имеем в виду различные с точностью до подобия). Отметим, что задачу подсчёта самих циклических матриц имеет смысл рассматривать

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Российского научного фонда (проект № 25-11-00348).

только для конечных полей, поскольку для любого бесконечного поля количество различных циклических матриц тоже заведомо всегда бесконечно.

Для дальнейшей классификации напомним необходимые сведения из теории чисел.

Определение 2. Разбиение *натурального числа n — это представление n в виде суммы положительных целых чисел, называемых частями, так что порядок следования частей не учитывается.*

Число разбиений $P(n)$ натурального числа n является одним из фундаментальных объектов изучения в теории чисел. Нахождение его выражения в виде функции от n остаётся открытой проблемой. Асимптотическое равенство для числа разбиений найдено Г.Х. Харди и С. Рамануджаном (см., например, последовательность A000041 в энциклопедии целочисленных последовательностей [6]).

Пусть $\mathbb{F}$ — алгебраически замкнутое поле. Рассмотрим циклическую матрицу $C \in M_n(\mathbb{F})$ и порожденую ей алгебру $\mathcal{C}$. В жордановой нормальной форме матрицы C каждому собственному значению соответствует единственная жорданова клетка. Поскольку жорданова нормальная форма матрицы единственна с точностью до порядка клеток, то жордановой нормальной форме матрицы C можно сопоставить разбиение числа n. Разбиения, соответствующие всем циклическим матрицам в алгебре $\mathcal{C}$, совпадают. Обозначим произвольное из них за $p_J(\mathcal{C})$.

Пусть как обычно E_{ij} обозначает (i,j)-ую матричную единицу, E — единичную матрицу. Положим $J_k = \sum\limits_{i=1}^{k-1} E_{i,i+1}$ — жорданова клетка размера k с собственным числом 0, и возьмём порождённую ей алгебру $\mathcal{N}_k = \langle E,\ J_k^i | i = 1, \dots, k-1\rangle$.

Пусть дано разбиение $\mathbf{p} = (n_1, \dots, n_m)$ числа n, где $n \geq n_1 \geq \ldots \geq n_m \geq 0$, $1 \leq m \leq n$, $\sum\limits_{i=1}^{m} n_i = n$. Тогда сопоставим ему алгебру $\mathcal{T}_{\mathbf{p}} = \bigoplus\limits_{j=1}^{m} \mathcal{N}_{n_j}$, где прямая сумма понимается как алгебра блочно-диагональных матриц.

Получаем основной результат данного раздела:

Теорема 2. *Пусть $\mathbb{F}$ — алгебраически замкнутое поле, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Рассмотрим коммутативные подалгебры $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subset M_n(\mathbb{F})$, порождённые циклическими матрицами. Тогда*
1. подалгебры $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ подобны в $M_n(\mathbb{F})$ тогда и только тогда, когда $p_J(\mathcal{A}) = p_J(\mathcal{B})$;
2. в $M_n(\mathbb{F})$ содержится ровно $P(n)$ различных с точностью до подобия подалгебр, порождённых циклическими матрицами;
3. подалгебра $\mathcal{A}$ сопряжена с верхнетреугольной подалгеброй $\mathcal{T}_{p_J(\mathcal{A})}$.

2. Алгебры длины $n-2$.

Следующая теорема показывает, что с учетом классификации алгебр максимальной длины, задачу исследования произвольных коммутативных алгебр длины $n-2$ можно свести к исследованию нильпотентных коммутативных подалгебр длины $n-2$:

Теорема 3. *Пусть $\mathbb{F}$ — алгебраически замкнутое поле и пусть $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Пусть $\mathcal{A}$ — коммутативная подалгебра в $M_n(\mathbb{F})$ длины $l(\mathcal{A}) = n-2$. Тогда существуют $m \in \mathbb{N}$, $2 \leq m \leq n$, $\mathcal{B} \subseteq M_m(\mathbb{F})$ — коммутативная подалгебра длины $m-2$ вида $\mathbb{F}E + \mathcal{N}$, $\mathcal{N}$ — нильпотентная подалгебра, и при $m < n$, $\mathcal{C} \subseteq M_{n-m}(\mathbb{F})$ — коммутативная подалгебра, порожденная циклической матрицей, такие, что алгебра $\mathcal{A}$ сопряжена с алгеброй $\mathcal{B} \oplus \mathcal{C}$.*

Используя описание нильпотентных коммутативных подалгебр в $M_n(\mathbb{F})$ индексов нильпотентности n и $n-1$, полученное Д.А. Супруненко и Р.И. Тышкевич [8], И.А. Павловым [8] и автором [9] получаем основной результат:

Теорема 4. *Пусть $n \geq 2$ и пусть $\mathbb{F}$ — алгебраически замкнутое поле. Положим $A = E_{1,2} + \dots + E_{n-2,n-1}$. Рассмотрим коммутативную подалгебру $\mathcal{A}$ в $M_n(\mathbb{F})$, содержащую единичную матрицу E_n. Тогда*
I. $l(\mathcal{A}) = n - 2$ тогда и только тогда, когда алгебра $\mathcal{A}$ сопряжена в $M_n(\mathbb{F})$ с одной из следующих алгебр:

1. $\mathbb{F}E_n$, если $n = 2$;

при $n \geq 3$

2. $\mathbb{F}E_2 \oplus \mathcal{T}_{\mathbf{p}(n-2)}$, где $\mathbf{p}(n-2)$ — всевозможные разбиения числа $n-2$, а $\mathcal{T}_{\mathbf{p}(n-2)}$ — соответствующие им в смысле обозначения из раздела 1 подалгебры в $M_{n-2}(\mathbb{F})$;

3. $\mathcal{A}_{0;n} = \langle E_n, A, A^2, \dots, A^{n-2}\rangle$,

4. $\mathcal{A}_{1;n} = \langle E_{1,n},\ C|\ C \in \mathcal{A}_{0;n}\rangle$;

5. $\mathcal{A}_{2;n} = \langle E_{n,n-1},\ C|\ C \in \mathcal{A}_{0;n}\rangle$;

6. при $n = 4$, $\mathcal{A}_{3;4}(1) = \langle E_{1,n} + E_{n,n-1},\ C|\ C \in \mathcal{A}_{0;n}\rangle$;

7. при $n = 4$, $\mathrm{char}\mathbb{F} = 2$, $\mathcal{A}_{4;4} = \langle E_4, E_{1,2} + E_{3,4},\ E_{1,3} + E_{2,4},\ E_{1,4}\rangle$;

8.j.m, где $j \in \{0, 1, 2\}$, $m \in \{3, \dots, n-1\}$: $\mathcal{A}_{j;m} \oplus \mathcal{T}_{\mathbf{p}(n-m)}$, где $\mathbf{p}(n-m)$ — всевозможные разбиения числа $n-m$, а $\mathcal{T}_{\mathbf{p}(n-m)}$ — соответствующие им подалгебры в $M_{n-m}(\mathbb{F})$;

II. Различные алгебры попарно не сопряжены.

III. 1. В $M_2(\mathbb{F})$ есть ровно 1 подалгебра длины 0 — алгебра $\mathbb{F}E_2$.

2. В $M_3(\mathbb{F})$ содержится 4 различных с точностью до сопряженности подалгебры длины 1;

3. В $M_4(\mathbb{F})$ содержится 9 различных с точностью до сопряженности подалгебр длины 2, если $\mathrm{char}\mathbb{F} \neq 2$, и 10, в противном случае;

4. При $n \geq 5$ $M_n(\mathbb{F})$ содержит $P(n-2) + 3\sum\limits_{m=3}^{n-1} P(n-m) + 3$ различных с точностью до сопряженности подалгебры длины $n-2$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Маркова О. В. Коммутативные матричные алгебры, порождённые циклическими матрицами// Зап. научн. сем. ПОМИ. 2023. Том 524. С. 112-124.

2. Маркова О. В. Классификация коммутативных подалгебр длины $n-2$ в алгебре матриц порядка n над алгебраически замкнутыми полями// Фундамент. и прикл. матем. 2024. Том 25, № 1. С. 133-159.

3. Paz A. An Application of the Cayley–Hamilton theorem to matrix polynomials in several variables// Linear and Multilinear Algebra. 1984. V. 15. P. 161-170.

4. Guterman A. E., Markova O. V. Commutative matrix subalgebras and length function// Linear Algebra and its Applications. 2009. V. 430. P. 1790-1805.

5. Маркова О. В. Характеризация коммутативных матричных подалгебр максимальной длины над произвольным полем// Вестн. Моск. унив. Сер.1. Математика. Механика. 2009. № 5. С. 53-55.

6. The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences (OEIS) [Электронный ресурс], Режим доступа: https://oeis.org/.

7. Супруненко Д. А., Тышкевич Р. И. Перестановочные матрицы. 2-е изд. М.: УРСС, 2003. 104 с.

8. Павлов И. А. О коммутативных нильпотентных алгебрах матриц// Доклады Академии наук БССР. 1967. Т. 11, № 10. С. 870-872.

9. Маркова О. В. Коммутативные нильпотентные подалгебры индекса нильпотентности $n-1$ в алгебре матриц порядка n// Зап. научн. сем. ПОМИ. 2016. Том 453. С. 219-242.

УДК 511.32

Нильпотентные эндоморфизмы примарных абелевых групп

А. Сарвари (Россия, г. Москва)
Московский педагогический государственный университет
e-mail: sarwary.asad20@gmail.com

Nilpotent endomorphisms of primary abelian groups

A. Sarwary (Russia, Moscow)
Moscow State Pedagogical University
e-mail: sarwary.asad20@gmail.com

Доклад посвящён изучению абелевых групп, содержащих хотя бы один эндоморфизм, ядро которого совпадает с его образом.

Теорема 1. *Пусть A — абелева группа, тогда эндоморфизм $\varphi\colon A \to A$, такой что $\ker\varphi = \operatorname{Im}\varphi$ существует, тогда и только тогда когда в группе A найдется подгруппа B, такая что $A/B \cong B$.*

Пример 1. Рассмотрим конечно порожденную группу $A = \langle e_1\rangle \oplus \langle e_2\rangle \oplus \langle e_3\rangle$, где $o(e_1) = o(e_2) = \infty$ и $o(e_3) = m < \infty$, то есть $A \cong \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}_m$. Тогда для ее подгруппы $B = \langle me_2\rangle \oplus \langle e_3\rangle$ имеет место изоморфизм

$$A/B \cong \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}_m \cong B.$$

Значит, по теореме 1 найдется эндоморфизм $\varphi : A \longrightarrow A$, такой что $\ker\varphi = \operatorname{Im}\varphi$.

Пример 2. Пусть $A = \mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_{p^2}$, где p-некоторое простое число.

Так как $|A| = p^3$, то не существует подгруппы B группы A, такой что $A/B \cong B$ (иначе $|A| = |B|^2$). Следовательно, не существует эндоморфизма $\varphi : A \longrightarrow A$, такой что $\ker\varphi = \operatorname{Im}\varphi$.

Лемма 2. *Если $A = \mathbb{Z}_{p^k} \oplus \mathbb{Z}_{p^n}$, где $k+n$ — четное число, то существует эндоморфизм $\varphi : A \longrightarrow A$, такой что $\ker\varphi = \operatorname{Im}\varphi$.*

Теорема 3. *Если p-примарная абелева группа A рассꞏкладывается в прямую сумму циклических групп, то эндоморфизм $\varphi : A \to A$, такой что $\ker\varphi = \operatorname{Im}\,\varphi$ существует в том и только в том случае, когода либо $|A| = n^2$ (где $n \in \mathbb{N}$), либо $|A| = \infty$.*

Следствие 4. *Если A — бесконечная ограниченная группа или счетная группа без ненулевых элементов бесконечной p-высоты, то существует эндоморфизм $\varphi : A \to A$, такой что $\ker\varphi = \operatorname{Im}\,\varphi$.*

Теорема 5. *Пусть A — почти вполне разложимая группа ранга 2. Тогда эндоморфизм $\varphi : A \to A$, такой что $\ker\varphi = \operatorname{Im}\,\varphi$, существует в том только том случае, когда A — однородная вполне разложимая группа.*

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Сарвари А. Примарные абелевы группы с нильпотентными эндоморфизмами индекса нильпотентности 2. Международная конференция «XIV Беларуская Математическая Конференция», посвященная 65-летию Института математики, сборник тезисов, 2024.

2. Фукс Л. Бесконечные абелевы группы. — Москва: Изд-во Мир, 1974. 335 с.

УДК 512.554.3

О централизаторах графовых автоморфизмов алгебр Шевалле

Г. С. Сулейманова (Россия, г. Абакан)
Хакасский технический институт – филиал Сибирского федерального университета
e-mail: suleymanova@list.ru

On centralizers of graph automorphisms of Chevalley algebras

G. S. Suleimanova (Russia, Abakan)
Hakass Technical Institute – Branch of Siberian Federal University
e-mail: suleymanova@list.ru

В теории Картана – Киллинга [2, глава 3] всякую простую комплексную конечномерную алгебру Ли $\mathcal{L}$ ассоциируют с единственной (с точностью до эквивалентности) неразложимой системой корней Φ евклидова пространства V [1, таблицы I – IX], построенного на подалгебре Картана алгебры $\mathcal{L}$. Выбор множества простых корней Π в Φ определяет линейное упорядочение $\prec$ на V с множеством V^+ векторов $v \succ 0$ и систему положительных корней $\Phi^+ = V^+ \cap \Phi$, $\Pi \subset \Phi^+$.

Элементы e_r $(r \in \Phi)$ и подходящая база $\{h_p \mid p \in \Pi\}$ подалгебры Картана алгебры Ли $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\Phi, \mathbb{C})$ дают базу Шевалле с целочисленными структурными константами [3], приводящую к алгебре Ли $\mathcal{L}(\Phi, K)$ над любым полем K, называемой алгеброй Шевалле. Ее подалгебру с базой $\{e_r \mid r \in \Phi^+\}$ обозначаем через $N\Phi(K)$ и называем нильтреугольной.

Известно [2], что алгебра Шевалле $\mathcal{L}(\Phi, K)$ обладает графовым автоморфизмом, когда Φ типа A_n, C_n или E_6. В [4] изучается централизатор $C(\theta)$ графового автоморфизма θ подалгебры $N\Phi(K)$ и доказана

Теорема 1. *Пусть θ – графовый автоморфизм подалгебры $N\Phi(K)$. Тогда выполняется одно из следующих утверждений:*

(a) $\theta^3 = 1$, Φ типа D_4 и $C(\theta) \simeq NG_2(K)$;

(b) $\theta^2 = 1$, Φ типа D_n $(n \geq 4)$ и $C(\theta) \simeq NB_{n-1}(K)$;

(c) $\theta^2 = 1$, Φ типа A_{2n-1} $(n \geq 3)$ и $C(\theta) \simeq NC_n(K)$;

(d) $\theta^2 = 1$, Φ типа E_6 и $C(\theta) \simeq NF_4(K)$;

(e) $\theta^2 = 1$, Φ типа A_{2n} $(n \geq 2)$ и централизатор $C(\theta)$ является подалгеброй, ассоциированной с системой корней типа BC_n.

В докладе рассматривается аналогичная задача для алгебры Шевалле $\mathcal{L}(\Phi, K)$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бурбаки Н. Группы и алгебры Ли (Главы IV-VI). — М.: Мир, 1972. 332 с.

2. Carter R. Simple groups of Lie type. — New York, Wiley and Sons, 1972. 332 p.

3. Chevalley C. Sur certain groupes simples // Tôhoku Math. J. 1955. Vol. 7, № 1-2. P. 14-66.

4. Levchuk V. M., Suleimanova G. S. On Centralizers of the Graph Automorphisms of Niltriangular Subalgebras of Chevalley algebras // Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics. 2022. Vol. 15, № 5. P. 679-682.

Секция 4. Прикладная и компьютерная алгебры, криптография и дискретная математика

УДК 519.175.3

Экстремальные кактусы с максимальным числом остовных деревьев

В. А. Воблый (Россия, г. Москва)
Всероссийский институт научной и технической информации РАН
e-mail: vitvobl@yandex.ru
Д. А. Кононенко (Россия, г. Москва)
Всероссийский институт научной и технической информации РАН
e-mail: dimonkononenko@gmail.com

Extremal cacti with maximum number of spanning trees

V. A. Voblyi (Russia, Moscow)
Russian Institute for Scientific and Technical Information RAS
e-mail: vitvobl@yandex.ru
D. A. Kononenko (Russia, Moscow)
Russian Institute for Scientific and Technical Information RAS
e-mail: dimonkononenko@gmail.com

Число остовных деревьев графа является важной характеристикой его надежности как сети передачи информации [3].

Найдено максимальное число остовных деревьев в кактусе с заданным числом вершин, а также в двудольном кактусе с заданным числом вершин. Экстремальными графами, в частности, являются граф дружбы, обобщенный граф дружбы и сеть Коха [6].

Определение 1. *Кактусом называется связный граф, в котором нет ребер, лежащих более чем на одном простом цикле [2].*

Определение 2. *Граф дружбы – это граф, состоящий из треугольников с единственной общей вершиной [5].*

Определение 3. *Обобщенный граф дружбы $f_q(n)$– это n-вершинный граф, состоящий из q-вершинных циклов с единственной общей вершиной [4].*

Лемма 1. *Число остовных деревьев в связном графе равно произведению чисел остовных деревьев его блоков.*

Лемма доказана в работе [1].

Теорема 1. *Пусть F_n — граф дружбы с n вершинами. Для числа остовных деревьев $t(F_n)$ в помеченном графе F_n при $n \geqslant 5$ верна формула*

$$t(F_n) = 3^{(n-1)/2} . \tag{1}$$

Лемма 2. *Для числа ребер m в кактусе с n вершинами верно неравенство*

$$m \leqslant \frac{3}{2}(n-1) . \tag{2}$$

Теорема 2. *Максимальное число остовных деревьев $T(Ca_n)$ в помеченном кактусе Ca_n с n вершинами равно*

$$T(Ca_n) = 3^{(n-1)/2} .$$

Экстремальным графом является граф дружбы.

Лемма 3. *Для числа ребер m в двудольном кактусе с n вершинами верно неравенство*

$$m \leqslant \frac{4}{3}(n-1) . \tag{3}$$

Теорема 3. *Число остовных деревьев $f_q(n)$ в помеченном обобщенном графе дружбы $f_q(n)$ равно*

$$T(f_q(n)) = q^{(n-1)/(q-1)} .$$

Теорема 4. *Максимальное число остовных деревьев $T(BCa_n)$ в помеченном двудольном кактусе BCa_n с n вершинами равно*

$$T(BCa_n) = 4^{(n-1)/3} .$$

Экстремальным графом, в частности, является обобщенный граф дружбы $f_4(n)$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Воблый В. А. О числе остовных деревьев в помеченном кактусе. Прикладная дискретная математика. Приложение. 2017. Том 10. С. 139–140
2. Харари Ф. Палмер Э., Перечисление графов. — Москва: Изд-во Мир, 197. с. 93
3. Fard N., Lee TH. Spanning tree approach in all-terminal network reliability expansion Comput. Commun. 2004, 24, 601–604
4. Fernau H. et al. A sum labeling for generalized fiendship graph. Discrete Mathematics. 2008. 308. C. 734–740
5. Mertzios G. B., Unger W. The friendship problem on graphs J. Multiple-valued Logic and Soft Computing. 2014. 27. 2-3. C. 1–11
6. Zhang Z et al. Mapping Koch curves into scale-free small-world networks J. Phys, A: Math. Theor. 2010, vol 43, 395101

УДК 511.32

Систематизация криптографических механизмов инкапсуляции ключа

Д. Н. Добрина (Россия, г. Москва)
Московский институт электроники и математики НИУ ВШЭ
e-mail: dnzelenetskaya@edu.hse.ru
А. Ю. Нестеренко (Россия, г. Москва)
Московский институт электроники и математики НИУ ВШЭ
e-mail: anesterenko@hse.ru

Systematization of key encapsulation mechanisms

D. N. Dobrina (Russia, Moscow)
HSE Tikhonov Moscow Institute of Electronics and Mathematics
e-mail: dnzelenetskaya@edu.hse.ru
A. Yu. Nesterenko (Russia, Moscow)
HSE Tikhonov Moscow Institute of Electronics and Mathematics
e-mail: anesterenko@hse.ru

1. Введение

Существующее разнообразие подходов к построению протоколов передачи ключа требует их систематизации как для оценки их безопасности, так и оценки применимости в различных прикладных сценариях. В рамках данного доклада рассматриваются новые и известные ранее механизмы инкапсуляции ключа (протоколы передачи ключа), основывающиеся на протоколах выработки общего ключа Диффи-Хеллмана и MTI, см. [1]. Приводится сравнительный анализ функциональных и эксплуатационных характеристик.

Определение 1. *Будем считать, что механизм инкапсуляции ключа представляет собой одноранговый протокол*

$$A \xrightarrow{M:=\texttt{KEM(K)}} B$$

в котором субъект A отправляет субъекту B сообщение – двоичную последовательность конечной длины $M \in \mathbb{V}_*$, позволяющую обоим субъектам получить или вычислить значение общего ключа K.

К подобного рода протоколам, традиционно, предъявляется ряд обязательных требований по безопасности [2]:

- свойство неявной аутентификации получателя сообщения, означающее, что узнать значение общего ключа K может только субъект B, которому отправляется сообщение M;
- свойство целостности, означающее что субъект B способен определить факт непреднамеренного искажения полученного сообщения M;
- свойство аутентификации отправителя сообщения, означающее, что субъект B может однозначно определить отправителя сообщения M;
- свойство уникальности ключа, означающее, что в каждой сессии выполнения протокола передачи ключа, субъект B получает уникальное, не предсказуемое для нарушителя, значение общего ключа K.

Отметим, что в случае невыполнения свойства аутентификации отправителя, нарушитель может отправлять субъекту B сообщения, тем самым, преднамеренно навязывая ему ключевые значения. Именно этот факт делает важным разработку асимметричной схемы инкапсуляции ключа, обеспечивающей аутентификацию отправителя сообщений.

2. Сравнительный перечень механизмов инкапсуляции ключа

Для всех приводимых далее схем инкапсуляции ключа, будут использованы следующие обозначения:

Определение 2. *$\mathcal{E}_{a,b}$ – эллиптическая кривая, определяемая сравнением:*

$$y^2 \equiv x^3 + ax + b \pmod p, \quad a, b \in \mathbb{F}_p, \quad 4a^3 + 27b^2 \not\equiv 0 \pmod p, \tag{1}$$

где $p > 3$ – нечетное простое число;

Определение 3. *$P \in \mathcal{E}_{a,b}$ – точка, образующая подгруппу простого порядка q, т.е:*

$$[q]P = \mathcal{O}, \tag{2}$$

где $\mathcal{O}$ – бесконечно удаленная точка, являющаяся нейтральным элементом группы точек эллиптической кривой $\mathcal{E}_{a,b}$;

Определение 4. *$m \in \mathbb{N}$ – порядок группы точек эллиптической кривой $\mathcal{E}_{a,b}$ такой, что*

$$m = cq \quad и \quad 1 \leqslant c \leqslant 4. \tag{3}$$

Величину c принято называть кофактором эллиптической кривой;

Отметим, что в отечественных средствах защиты информации рекомендуется использоваться параметры $\{p, a, b, P, q, c\}$, определяемые в Р 1323565.1.024-2019 [3].

Определение 5. *$\mathtt{tobn} : \mathcal{E}_{a,b} \to \mathbb{V}_*$ – функция, преобразующая точку эллиптической кривой в двоичную последовательность произвольной, конечной длины.*

Определение 6. *$\xi \in_R \mathbb{Z}_q^*$ – значение, выбираемое случайно равновероятно из интервала $[1, \dots, q-1]$ и рассматриваемое как отличный от нуля представитель класса вычетов по модулю q.*

Определение 7. *$\mathtt{kdf}(X)$ – преобразование (key derivation function, kdf), вырабатывающее из заданной исходной ключевой информации X двоичную последовательность, которая интерпретируется как последовательность секретных значений и производных ключей.*

Определение 8. *$\mathtt{dem}(X, K)$ – преобразование (data encryption mechanism, dem), выполняющее с помощью исходной ключевой информации X зашифрование и выработку имитовставки для ключа K, передаваемого от субъекта A к субъекту B.*

Определение 9. *$\mathtt{desm}(X, d, K)$ – преобразование (data encryption and sign mechanism, desm), выполняющее с помощью исходной ключевой информации X зашифрование ключа K, передаваемого от субъекта A к субъекту B, а также выработку электронной подписи с использованием ключа d.*

Определение 10. *$\mathtt{pdem}(S, W, X, K, w)$ – преобразование (polynomial data encryption mechanism, dpem), выполняющее зашифрование и имитозащиту данных K.*

Отметим, что величина X является ключом имитозащиты, значение которого не зависит от остальных параметров преобразования `pdem`.

Далее будут использованы следующие ключи:

Определение 11. *$d_A \in \mathbb{Z}_q^*$ и $Q_A = [d_A]P \in \mathbb{E}_{a,b}$ – соответственно, секретный и открытый ключи аутентификации субъекта A.*

Определение 12. *$d_B \in \mathbb{Z}_q^*$ и $Q_B = [d_B]P \in \mathbb{E}_{a,b}$ – соответственно, секретный и открытый ключи аутентификации субъекта B.*

Определение 13. *$s_{AB} \in \mathbb{Z}_q^*$ – предварительно распределенный между субъектами A, B ключ аутентификации.*

Начнем с описания механизмов, в основе которых лежит стандартизированный в ISO/IEC 18033-2:2017, см. [4], механизм инкапсуляции ключа ECIES. В *левой* колонке приводятся механизмы инкапсуляции, построенные на основе протокола Диффи-Хеллмана выработки общего ключа, в *правой* колонке – их аналоги, основанные на протоколе выработки общего ключа MTI/D2, изображенном на рисунке 1.

	Участник A имеет $d_A, Cert_A$		Участник B имеет $d_B, Cert_B$
t_1:	$\xi_A \in_R \mathbb{F}_q^*$, $E_A = [\xi_A]P$		
t_2:		$\xrightarrow{E_A,\ Cert_A}$	
t_3:			$\xi_B \in_R \mathbb{F}_q^*$, $E_B = [\xi_B]P$
t_4:		$\xleftarrow{E_B,\ Cert_B}$	
t_5:	$Q_B \leftarrow Cert_B$, $C_B = Q_B + E_B$, $K_{AB} = [\xi_A + d_A]C_B$		$Q_A \leftarrow Cert_A$, $C_A = Q_A + E_A$, $K_{BA} = [\xi_B + d_B]C_A$

Рис. 1: Протокол MTI/D2 (базовая схема).

Отметим, что далее приводятся только алгоритмы зашифрования, которые выполняются субъектом A.

I. ECIES-KEM.

Вход: $\{p, a, b, P, q, c\}, Q_B$

1. Выработать $\xi_A \in_R \mathbb{Z}_q^*$.
2. Вычислить $U = [\xi_A]P$.
3. Сформировать $M_1 = \mathtt{tobn}(U)$.
4. Вычислить $W = [c\xi_A]Q_B$.
5. Определить $K = \mathtt{kdf}(M_1||\mathtt{tobn}(W))$.

Выход: Ключ K, сообщение $M = M_1$.

II. ECIES-MTI-KEM.

Вход: $\{p, a, b, P, q, c\}, d_A, Q_B$

1. Выработать $\xi_A \in_R \mathbb{Z}_q^*$.
2. Вычислить $U = [\xi_A]P$.
3. Сформировать $M_1 = \mathtt{tobn}(U)$.
4. Вычислить $W = [c(\xi_A + d_A)]Q_B$.
5. Определить $K = \mathtt{kdf}(M_1||\mathtt{tobn}(W))$.

Выход: Ключ K, сообщение $M = M_1$.

III. ECIES-DEM.

Вход: $\{p, a, b, P, q, c\}, Q_B, K$

1. Выработать $\xi_A \in_R \mathbb{Z}_q^*$.
2. Вычислить $U = [\xi_A]P$.
3. Сформировать $M_1 = \mathtt{tobn}(U)$.
4. Вычислить $W = [c\xi_A]Q_B$.
5. Определить $X = \mathtt{kdf}(M_1||\mathtt{tobn}(W))$.
6. Определить $M_2 = \mathtt{dem}(X, K)$.

Выход: Сообщение $M = M_1||M_2$.

IV. ECIES-MTI-DEM.

Вход: $\{p, a, b, P, q, c\}, d_A, Q_B, K$

1. Выработать $\xi_A \in_R \mathbb{Z}_q^*$.
2. Вычислить $U = [\xi_A]P$.
3. Сформировать $M_1 = \mathtt{tobn}(U)$.
4. Вычислить $W = [c(\xi_A + d_A)]Q_B$.
5. Определить $X = \mathtt{kdf}(M_1||\mathtt{tobn}(W))$.
6. Определить $M_2 = \mathtt{dem}(X, K)$.

Выход: Сообщение $M = M_1||M_2$.

V. ECIES-DESM.

Вход: $\{p, a, b, P, q, c\}, d_A, Q_B, K$

1. Выработать $\xi_A \in_R \mathbb{Z}_q^*$.
2. Вычислить $U = [\xi_A]P$.
3. Сформировать $M_1 = \mathtt{tobn}(U)$.
4. Вычислить $W = [c\xi_A]Q_B$.
5. Определить $X = \mathtt{kdf}(M_1||\mathtt{tobn}(W))$.
6. Определить $M_2 = \mathtt{desm}(X, d_A, K)$.

Выход: Сообщение $M = M_1||M_2$.

Дополнением приведенного семейства является механизм ECISPE, впервые предложенный в работе [5].

VI. ECISPE.

Вход: $\{p, a, b, P, q, c\}, s_{AB}, Q_B, K, w$

1. Выработать $\xi_A \in_R \mathbb{V}_*$.
2. Вычислить $U = [\xi_A]P$.
3. Сформировать $M_1 = \mathtt{tobn}(U)$.
4. Вычислить $W = [c\xi_A]Q_B$.
5. Вычислить $S = [s_{AB}]P$.
6. Вычислить $X = \mathtt{kdf}(M_1||\mathtt{tobn}(W)||s_{AB})$.
7. Определить $M_2 = \mathtt{pdem}(S, W, X, K, w)$.

Выход: Сообщение $M = M_1||M_2$.

В основе следующего семейства схем лежит стандартизированный в ISO/IEC 18033-2:2017, см. [4], механизм инкапсуляции ключа PSEC.

VII. PSEC-KEM.

Вход: $\{p, a, b, P, q, c\}, Q_B$

1. Выработать $t_A \in_R \mathbb{V}_*$.
2. Вычислить $\xi_A||K = \mathtt{kdf}(t_A)$.
3. Вычислить $U = [\xi_A]P$.
4. Сформировать $M_1 = \mathtt{tobn}(U)$.
5. Вычислить $W = [c\xi_A]Q_B$.
6. Определить $X = \mathtt{kdf}(M_1||\mathtt{tobn}(W))$.
7. Сформировать $M_2 = t_A \oplus X$.

Выход: Ключ K, сообщение $M = M_1||M_2$.

VIII. PSEC-MTI-KEM.

Вход: $\{p, a, b, P, q, c\}, d_A, Q_B$

1. Выработать $t_A \in_R \mathbb{V}_*$.
2. Вычислить $\xi_A||K = \mathtt{kdf}(t_A)$.
3. Вычислить $U = [\xi_A]P$.
4. Сформировать $M_1 = \mathtt{tobn}(U)$.
5. Вычислить $W = [c(\xi_A + d_A)]Q_B$.
6. Определить $X = \mathtt{kdf}(M_1||\mathtt{tobn}(W))$.
7. Сформировать $M_2 = t_A \oplus X$.

Выход: Ключ K, сообщение $M = M_1||M_2$.

Далее, рассмотрим семейство схем асимметричного шифрования FACE.

В основе следующего семейства схем лежит стандартизированный в ISO/IEC 18033-2:2017, см. [4], механизм инкапсуляции ключа FACE.

IX. FACE-KEM.

Вход: $\{p, a, b, P_1, P_2, q\}, Q_{1B}, Q_{2B}$

1. Выработать $\xi_A \in_R \mathbb{V}_*$.
2. Вычислить $U_1 = [\xi_A]P_1$, $U_2 = [\xi_A]P_2$.
3. Сформировать $M_1 = \mathtt{tobn}(U_1)$.
4. Сформировать $M_2 = \mathtt{tobn}(U_2)$.
5. Вычислить $\alpha \equiv \mathtt{kdf}(M_1||M_2) \pmod q$,
6. Вычислить $z_A \equiv \alpha\xi_A \pmod q$,
7. Вычислить $W = [\xi_A]Q_{1B} + [z_A]Q_{2B}$.
8. Вычислить $K||T = \mathtt{kdf}(\mathtt{tobn}(W))$.

Выход: Ключ K и $M = M_1||M_2||T$ – сообщение.

X. FACE-ECISPE.

Вход: $\{p, a, b, P_1, P_2, q\}, Q_{1B}, Q_{2B}, K, w$

1. Выработать $\xi_A \in_R \mathbb{V}_*$.
2. Вычислить $U_1 = [\xi_A]P_1$, $U_2 = [\xi_A]P_2$.
3. Сформировать $M_1 = \mathtt{tobn}(U_1)$.
4. Сформировать $M_2 = \mathtt{tobn}(U_2)$.
5. Вычислить $\alpha \equiv \mathtt{kdf}(M_1||M_2) \pmod q$,
6. Вычислить $z_A \equiv \alpha\xi_A \pmod q$,
7. Вычислить $W_1 = [\xi_A]Q_{1B}$.
8. Вычислить $W_2 = [z_A]Q_{2B}$.
9. Вычислить $X = \mathtt{kdf}(\alpha||\mathtt{tobn}(W_1)||\mathtt{tobn}(W_2))$.
10. Определить $M_3 = \mathtt{pdem}(W_1, W_2, X, K, w)$.

Выход: Сообщение $M = M_1||M_2||M_3$.

XI. FACE-MTI-KEM.

Вход: $\{p, a, b, P_1, P_2, q\}, d_A, Q_{1B}, Q_{2B}$

1. Выработать $\xi_A \in_R \mathbb{V}_*$.
2. Вычислить $U_1 = [\xi_A]P_1$, $U_2 = [\xi_A]P_2$.
3. Сформировать $M_1 = \mathtt{tobn}(U_1)$.
4. Сформировать $M_2 = \mathtt{tobn}(U_2)$.
5. Вычислить $\alpha \equiv \mathtt{kdf}(M_1||M_2) \pmod q$,
6. Вычислить $z_A \equiv \alpha(\xi_A + d_A) \pmod q$,
7. Вычислить $W = [\xi_A + d_A]Q_{1B} + [z_A]Q_{2B}$.
8. Вычислить $K||T = \mathtt{kdf}(\mathtt{tobn}(W))$.

Выход: Ключ K и $M = M_1||M_2||T$ – сообщение.

XII. FACE-ECISPE-MTI.

Вход: $\{p, a, b, P_1, P_2, q\}, d_A, Q_{1B}, Q_{2B}, K, w$

1. Выработать $\xi_A \in_R \mathbb{V}_*$.
2. Вычислить $U_1 = [\xi_A]P_1$, $U_2 = [\xi_A]P_2$.
3. Сформировать $M_1 = \mathtt{tobn}(U_1)$.
4. Сформировать $M_2 = \mathtt{tobn}(U_2)$.
5. Вычислить $\alpha \equiv \mathtt{kdf}(M_1||M_2) \pmod q$,
6. Вычислить $z_A \equiv \alpha(\xi_A + d_A) \pmod q$,
7. Вычислить $W_1 = [\xi_A]Q_{1B}$.
8. Вычислить $W_2 = [z_A]Q_{2B}$.
9. Вычислить $X = \mathtt{kdf}(\alpha||\mathtt{tobn}(W_1)||\mathtt{tobn}(W_2))$.
10. Определить $M_3 = \mathtt{pdem}(W_1, W_2, X, K, w)$.

Выход: Сообщение $M = M_1||M_2||M_3$.

Отметим, что в [4] стандартизирована только схема FACE-KEM, остальные три схемы являются ее естественным развитием.

3. Сравнительный анализ

Рассмотрим вопрос о выполнении перечисленных ранее свойств безопасности, которые могут обеспечиваться предложенными вариантами схем и для наглядности сведем результаты исследования в таблицу, где заглавными римскими цифрами обозначены следующие схемы:

- **I** - ECIES-KEM,
- **II** - ECIES-MTI-KEM,
- **III** - ECIES-DEM,
- **IV** - ECIES-MTI-DEM,
- **V** - ECIES-DESM,
- **VI** - ECISPE,
- **VII** - PSEC-KEM,
- **VIII** - PSEC-MTI-KEM,
- **IX** - FACE-KEM,
- **X** - FACE-ECISPE,
- **XI** - FACE-MTI-KEM,
- **XII** - FACE-ECISPE-MTI.

Отметим, что столбец «Стойкость при известном d_B», изображенном на рисунке 2, означает невозможность нарушения свойства конфиденциальности передаваемого общего ключа в предположении, что нарушителю стал известным секретный ключ субъекта B. Если же дополнительно, нарушителю становится известным d_A – значение секретного ключа субъекта A или значение s_{AB} – предварительно распределенного секретного ключа, то ни одна из схем не обеспечивает свойство конфиденциальности, то есть защиту от, так называемого, «чтения назад». Для обеспечения данного свойства необходимо использовать итерактивные протоколы передачи ключа.

	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII
Неявная аутентификация получателя (конфиденциальность ключа)	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
Целостность	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
Аутентификация отправителя		+		+	+	+		+		+		+
Симметричный ключ аутентификации						+						
Асимметричный ключ аутентификации		+		+	+			+		+		+
Выработка уникального ключа	+			+			+	+	+	+	+	
Передача ранее созданного ключа (независимость общего ключа от долговременных ключей аутентификации)			+	+	+	+			+		+	
Стойкость при известном d_B		+		+				+		+	+	+
Кол-во операций вычисления кратной точки	2	2	2	2	2	3	2	2	4	4	4	4
Кол-во операций сложения точек									1	1		
Количество секретных ключей	1	2	1	2	2	2	1	2	5	5	6	6

Рис. 2: Сводная таблица.

3. Заключение

В докладе рассмотрен класс известных ранее и новых, предложенных авторами доклада, схем инкапсуляции ключа, реализуемых в группе точек эллиптической кривой. Приведены схемы, в основе которых лежат протоколы выработки общего ключа Диффи-Хеллмана и MTI. Показано, что схемы на основе протокола MTI обеспечивают аутентификацию отправителя сообщений, также как и схемы, использующие предварительно распределенный ключ.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Лось А.Б., Нестеренко А.Ю., Рожков М.И.* Криптографические методы защиты информации. Учебник для академического бакалавриата. — М.:Издательство Юрайт. — 2016. — 473 стр. — Серия:Бакалавр.Академический курс.

2. *Нестеренко А.Ю., Семенов А.М.* Методика оценки безопасности криптографических протоколов // Прикладная дискретная математика. — № 56. — 2022. — стр. 33-82.

3. Р 1323565.1.024–2019. Параметры эллиптических кривых для криптографических алгоритмов и протоколов. М.:Стандартинформ. – 2019.

4. ISO/IEC 18033-2:2017. Information technology. Security techniques. Encryption algorithms. Part 2: Asymmetric ciphers. – 2017.

5. *Нестеренко А.Ю., Пугачев А.В.* Об одной схеме гибридного шифрования // Прикладная дискретная математика. — № 4. — 2015. — стр. 56-71.

УДК 511.32

Моделирование биофизических трансформации на основе расширенного формализма гибридных автоматов[1]

А. А. Переварюха (Россия, г. Санкт-Петербург)
Санкт-Петербургский Федеральный исследовательский центр РАН
e-mail: madelf@rambler.ru

[1] В рамках бюджетной темы СПБ ФИЦ РАН FFZF-20250006.

Modeling of biophysical transformations based on extended hybrid automata formalism

A. Yu. Perevaryukha (Russia, St. Peterburg)
St. Petersburg Federal Research Center of the RAS
e-mail: madelf@rambler.ru

Тематика работы посвящена разработке метода формирования гибридной модели для описания волн заражений COVID-19 с учетом эволюции вируса и появления его новых штаммов. Цель представления модели в формате гибридного автомата — получить метод описания импульсно меняющих эпидемическую ситуации. Новизна работы — способ включения в модель возмущенного равномерно распределенной на $[0,1]$ σ репродуктивного запаздывания $x(t-\tau\times\sigma)$. В докладе мы развиваем способ усовершенствания вариантов поведения траектории модели волн эпидемии COVID-19. В новой модели получен вариант разрушения колебаний без необходимости дальнейшего увеличения r, $H=1/3K$:

$$\frac{dN}{dt}=rN\left(1-\frac{N(t-\tau\times\sigma)}{\mathcal{K}}\right)(H-N(t-\gamma)),\gamma<\tau. \tag{1}$$

Модель была основана на нашей идее, что для механизмов контроля имеет значение переход $N(t-\gamma)$ через предкритический порог H. Величина H трактовалось как мягкое пороговое состояние «преднасыщения» среды, когда при $N(t)\to H+\epsilon$ популяция вселенца уже начинает разрушительно воздействовать на среду. В сценарии на динамику инвазионного процесса оказывает влияние отклонение $[H-N(t-\gamma)]$, притом величина отклонения может быть как положительной, так и отрицательной. В иммунологической трактовке при такой вирусной нагрузке организм через небольшой интервал задержки сталкивается опасными симптомами. Модель описала вычислительный сценарий с выбросом траектории из окрестности цикла. После образования колебаний при превышении значения в момент $\max N_*(t_{max};r\tau\gamma)$ предельного для экосистемы уровня траектория $N(t)\to\infty$ с остановкой расчетов. В модели релаксационный цикл оказывается переходным режимом существования, а образование неограниченной траектории оценено нами как катастрофическая динамика. Используем в новой форме модели вместо квадратичной зависимости логарифмическую форму регуляции. Во варианте уравнения с внешним воздействием биотической среды дополнение модели фактором противодействия с отдельным запаздыванием изменит качественный характер решения:

$$\frac{dN}{dt}=r\ln\left(\frac{\mathcal{K}}{N(t-\tau)}\right)-\mathcal{Q}N(t-\nu), \tag{2}$$

Определим такое запаздывание адаптационным ν и будем отличать его от феноменологического регуляционного τ из уравнений Хатчинсона или Николсона. Для $f(N)=rN\ln(K/N)$ ордината точки перегиба N_p на кривой решения $\dot{N}=f(N)$ лежит ниже $K/2$, так как $f\prime(N_p)=0,N_p=K/e$. В данной модификации мы используем в обозначение $\mathcal{K}$ [2], так как достижение уровня может быть кратковременным при больших r. В вычислительном сценарии с наблюдается гибель популяции агрессивного вселенца после двух максимумов осцилляций. При уменьшении r траектория демонстрирует обычные гармонические колебания $N_*(t;\tau r)$. Усовершенствуем (1) с включением нелинейности $F(N)=-\mathcal{Q}N^k(t-\nu),\tau\geqslant\nu$, что обосновано ситуацией, когда текущее воздействие может определяться предшествующим состоянием популяции. Момент активации нового штамма вероятностно вариативен $[\tau_1,\tau_1+\Delta]$. С учетом стохастического возмущения τ_1 случайной величиной γ в диапазоне $\gamma(\omega)\in[1,2]$ опишем с возмущенным равномерной случайной величиной запаздыванием $(t-\tau_1\gamma)$ волн эпидемии при появлении доминирующего штамма с более высокой скоростью репликации в клетках:

$$\begin{cases} \frac{dY}{dt} = R_2 Y(t) \exp(-\varsigma Y(t-\gamma\tau) - \varepsilon\sqrt{(J-N(t-\tau))^2}, \\ \frac{dN}{dt} = R_1 N(t) \ln\left(\frac{\mathcal{K}}{N(t-\tau\gamma)}\right) - \frac{\delta N^2(t-\tau_1\gamma)}{(J-Y(t))^2} - \varphi Y(t), \delta > q. \end{cases} \tag{3}$$

В системе (3) учтен эффект борьбы штаммов при эволюции на уклонение от связывания с антителами. При $Y(0) < J < \mathcal{K}$ $N(t) \to 0 + \epsilon$ происходит смена характеристик осцилляционного режима. Положение экстремумов колебаний $N(t) \to N_*(t), \max N_*(t) < J, \min N_*(t)$ зависит от возмущения запаздывания. Формирование иммуного ответа вакцинацией на отдин из белков стало фактором эволюционного отобора штаммов и так поддерживает разнообразие. Предложенные уравнения предназначены для формализации в формате расширенного гибридного автомата, где происходят предикативные переключения между активностями — режимами изменения состояния, которые представляются субпроцессами на кадрах модельного времени и для каждого субпроцесса выбирается изменяющаяся форма правой части уравнения.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Переварюха А. Ю. Хаотические режимы в моделях теории формирования пополнения популяций // Нелинейный мир. 2009. Том 10, № 4. С. 925–932.

2. Переварюха А. Ю. Интерпретация поведения моделей динамики биоресурсов и моментальная хаотизация в новой модели // Нелинейный мир. 2012. Том. 10, № 4. С. 255–262.

Секция 5. Аналитическая теория чисел

УДК 511.348

О сумме квадратов четырёх простых чисел из арифметической прогрессии

И. Аллаков (Узбекистан, г. Термез)
Термезский государственный университет
e-mail: iallakov@mail.ru
О. Ш. Имамов (Узбекистан, г. Термез)
Термезский государственный университет
e-mail: oybekimamov000@gmail.com

On the sum of the squares of four prime numbers from the arithmetic progression

I. Allakov (Uzbekistan, Termez)
Termez State University
e-mail: iallakov@mail.ru
O. Sh. Imamov (Uzbekistan, Termez)
Termez State University
e-mail: oybekimamov000@gmail.com

1.Введение

Известно, что после доказательства теоремы Ж. Л. Лагранжа, о представлении заданного целого числа в виде суммы квадратов четырех целых чисел первым, кто обратил внимание на задачу представления данного целого числа в виде суммы квадратов четырёх простых чисел $p_1, ..., p_4$ был Л. К.Хуа. Пусть N-достаточно большое натуральное число и $U(N) = \{n \mid 1 < n \leqslant N, n \equiv 4(\mathrm{mod}24), n \neq p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + p_4^2\}$, $E(N) = cardU(N)$, Л. К.Хуа доказал, что $E(N) \ll N\log^{-A}N$ где $A > 0-$ некоторое постоянное, $\ll -$ символ Виноградова. Jianya Liu и Ming-Chit Liu [1] улучшили этот результат и доказали оценку $E(N) \ll N^{\theta}$, при $\theta > 13/15$. Yonghui Wang [2] доказал, что уравнение $n = p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + p_4^2 + p_5^2$ имеет решение, если $p_i \equiv b_i \,(\mathrm{mod}\, d)$, $(i = 1, 2, ..., 5)$, $d \leqslant N^{\delta}$, $n \equiv 5 \,(\mathrm{mod}24)$. Здесь и далее, во всей статье $\delta > 0$ означает достаточно малое число. В работе [3] авторы настоящей работы получили оценки снизу для количества представлений данного $n, 1 < n \leqslant N, n \equiv 5(\mathrm{mod}24)$ в виде суммы квадратов пяти простых чисел из арифметической прогрессии. Кроме того О. Имамов [4] получил оценку снизу, для количества решений уравнения

$$n = p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + p_4^2. \tag{1}$$

В данной статье мы рассмотрим вопрос о существования решений уравнения (1) в простых числах из арифметической прогрессии. Для удобства в записи обозначим:

$$U\,(N, d) = \left\{\bar{b} \in \mathbb{N}^4 : \, 1 \leqslant b_i \leqslant d, \, (b_i, d) = 1, \quad b_1^2 + \cdots + b_4^2 \equiv n \,(\mathrm{mod}\sigma(d)d)\right\}.$$

В дальнейшем будем рассматривать те $\bar{b}$, которые удовлетворяют условиям $\bar{b} = (b_1, \ldots, b_4) \in U(N, d)$ и $p_i \equiv b_i(\mathrm{mod}\ d)$, $i = 1, ..., 4$. Здесь $\sigma(d) = 1, 4, 2$ соответственно означает $2 \nmid d$, $2 \,\|d$ и $4|d$.

Пусть $S_d\,(n)-$ количество решений уравнения (1) в простых числах $p_i \equiv b_i(\bmod\ d)$, $i = 1, ..., 4$; а $E_d\,(n)$— количество n в интервале $2 < n \leqslant N$, которые не представимы в виде суммы четырёх квадратов простых чисел из арифметической прогрессии $p_i \equiv b_i(\bmod\ d)$, $i = 1, ..., 4$. Положим $Q = N^{21\delta}$. Основным результатом настоящей работы является.

Теорема 1. *Если $n \equiv 4\,(\bmod 24)$, $2 < n \leqslant N$, $2 \leqslant d \leqslant N^{\delta}$, тогда справедлива оценка $E_d(N) \ll N(Q^{15/14}\,d)^{-1}$.*

Метод, используемый в доказательстве теоремы 1, позволяет получить оценку снизу для $S_d\,(n)$ при $\frac{N}{50} < n \leqslant N$.

Следствие 1. *Для всех n, удовлетворяющих условию $n \equiv 4\,(\bmod 24)$, $\frac{N}{50} < n \leqslant N$, за исключением не более чем $E_d(N) \ll N\big(Q^{15/14}\,d\big)^{-1}$ значений из них, справедлива оценка $S_d\,(n) \gg n^{1-7\delta}(d^{1/2}\log^4 n)^{-1}$.*

В доказательстве теоремы используется метод Харди-Литтлвуда [5], метод И. М. Виноградова [6],[7] и схема работы Аллакова [8].

Следует также отметить, что оценка для $S_d(n)$, получена впервые и отличается от ожидаемого главного члена задачи на $n^{-7\delta}$.

2.Обозначения и оценка интеграла $\mathcal{R}_2(n)$

Введем обозначения:

$$T = N^{\sqrt{\delta}}, L = N/50, \tau = N^{-1}T^{\frac{1}{4}}, L_1 = \sqrt{L}, N_1 = \sqrt{N}.$$

Положим $e(y) = e^{2\pi i y}$ и $e_q(y) = e(y/q)$. Пусть

$$S_i(\alpha) = S_i(\alpha, d, b_i) = \sum_{\substack{L_1 < m_i \leqslant N_1 \\ m_i \equiv b_i(\bmod\ d)}} \Lambda(m_i) e(\alpha m_i^2), \tag{2}$$

и

$$\mathcal{R}(n) := \sum_{\substack{L_1 < n_i \leqslant N_1, \\ m_1^2 + \cdots + m_4^2 = n, \\ m_i \equiv b_i(\bmod\ d)}} \Lambda(m_1) \cdots \Lambda(m_4), \tag{3}$$

где $\Lambda(m)$-функция Мангольдта. Тогда, используя (2), $\mathcal{R}(n)$ можем представить в следующем виде:

$$\mathcal{R}(n) = \int\limits_{\tau}^{1+\tau} \prod_{i=1}^{4} S_i(\alpha) e(-n\alpha) d\alpha. \tag{4}$$

Для любых a, q, $(a, q) = 1$ при $1 \leqslant a \leqslant q \leqslant Q$, обозначим $\mathbf{m}\,(a, q) = \left[\frac{a-\tau}{q}, \frac{a+\tau}{q}\right]$. Легко видеть, что эти промежутки принадлежат интервалу $[\tau,\ 1+\tau]$ и не пересекаются (см. §2, гл.X, [9] или п.3, §5, гл.II, [10]). Пусть $\mathfrak{M} = \bigcup\limits_{a,q} \mathbf{m}(a, q)$ и $\mathfrak{m} = [\tau,\ 1+\tau] \setminus \mathfrak{M}$ обозначим через $\mathfrak{m}$. Учитывая $\mathfrak{M} \cup \mathfrak{m} = [\tau; 1+\tau]$ и (4) $\mathcal{R}(n)$ можем записать в виде

$$\mathcal{R}(n) = \left\{ \int\limits_{\mathfrak{M}} + \int\limits_{\mathfrak{m}} \right\} \prod_{i=1}^{4} S_i(\alpha) e(-n\alpha) d\alpha = \mathcal{R}_1(n) + \mathcal{R}_2(n). \tag{5}$$

В (5) интеграл по множеству $\mathfrak{M}$ обозначен как $\mathcal{R}_1(n)$, а интеграл по $\mathfrak{m}$ как $\mathcal{R}_2(n)$. Оценим $\mathcal{R}_2(n)$. Справедлива следующая теорема

Теорема 2. *Если $n \leqslant N$, $\varepsilon < 0,6\delta$ и $n \equiv 4 \,(\mathrm{mod} 24)$, то за исключением не более чем $\ll NQ^{-15/14}\, d^{-1}$ значений n, справедлива оценка*

$$|\mathcal{R}_2(n)| < NQ^{-3/7}d^{-1/2}. \tag{6}$$

Доказательство. Из леммы 2.1 работы [2] следует, что при $\left|\alpha - aq^{-1}\right| \leqslant q^{-2}$, $(a,q) = 1$, $d \leqslant N^{\delta}$, $h = (q,d)$,$\alpha \in \mathfrak{m}$ и $N > N_0(\delta)$ справедлива оценка

$$S_i(\alpha) \ll N^{\frac{1}{2}+\frac{\varepsilon}{2}}Q^{-\frac{1}{2}}. \tag{7}$$

Используя неравенство Бесселя и оценки (7), находим

$$\sum_{N/2\leqslant n\leqslant N} \left|\mathcal{R}_2\left(n\right)\right|^2 \ll \int\limits_{\mathfrak{m}} \left|S\left(\alpha\right)\right|^8 d\alpha \ll \left(N^{\frac{1}{2}+\frac{\varepsilon}{2}}Q^{-\frac{1}{2}}\right)^4 \int\limits_0^1 \left|S\left(\alpha\right)\right|^4 d\alpha. \tag{8}$$

Так как

$$\int\limits_0^1 \left|S\left(\alpha\right)\right|^4 d\alpha \leqslant \log^4 N \int\limits_0^1 \left| \sum_{\substack{L_1<m_i\leqslant N_1 \\ m_i\equiv b_i(\bmod d)}} e(\alpha m_i) \right|^4 d\alpha$$

и согласно лемме Хуа (см. лемма 2.5 работы [5]), существует такая постоянная c, что справедлива оценка

$$\int\limits_0^1 \left| \sum_{\substack{L_1<m_i\leqslant N_1 \\ m_i\equiv b_i(\bmod d)}} e(\alpha m) \right|^4 d\alpha \ll Nd^{-2}\log^c N,$$

то из (8) получим $\sum\limits_{L<n\leqslant N} \left|\mathcal{R}_2\left(n\right)\right|^2 \ll N^{3+2\varepsilon}Q^{-2}d^{-2}\log^{4+c}N.$

Отсюда следует, что количество значений n, $n \leqslant N$ для которых $\left|\mathcal{R}_2\left(n\right)\right| \geqslant N(Q^{3/7}\, d^{1/2}\,)^{-1}$, не превосходит $< N(Q^{15/14}d)^{-1}$. То есть, для всех $2 < n \leqslant N$ и $n \equiv 4 \,(\mathrm{mod} 24)$ за исключением не более чем $\ll N(Q^{15/14}d)^{-1}$ значений n, справедливо неравенство $\left|\mathcal{R}_2\left(n\right)\right| < N(Q^{3/7}d^{1/2})^{-1}$. Тем самым теорема 2 доказана.

Теперь, рассмотрим интеграл $\mathcal{R}_1(n)$. Используя свойства ортогональности характеров Дирихле и явную формулу для функции $\varphi(x,\chi) = \sum\limits_{n\leq x}\chi(n)\Lambda(n)$ интеграл $\mathcal{R}_1(n)$ можно представить в виде

$$\mathcal{R}_1(n) = \sum_{q\leqslant Q} \varphi^{-4}\left(\frac{d}{h_1}\right)\varphi^{-4}\left(\frac{q}{h_2}\right) \sum_{(a,q)=1} e_q\left(-na\right) \int\limits_{-\infty}^{\infty} e\left(-n\lambda\right) \prod_{i=1}^{4} H_i\left(a,q,\lambda\right)d\lambda + O\left(NQ^{-1}\right), \tag{9}$$

где

$$H_i\left(a,q,\lambda\right) := G_i(a,\bar{\eta}_0,q)I(\lambda) - \delta_q\tilde{\zeta}\zeta_0\left(b_i\right)G_i(a,\bar{\eta}\eta_0,q)\tilde{I}(\lambda) - F_i\left(a,q,\lambda\right), \tag{10}$$

и $F_i\left(a,q,\lambda\right) := \sum\limits_{\zeta\,(\bmod d/h_1)\eta\,(\bmod q/h_2)} \bar{\zeta}\left(b_i\right)G_i(a,\bar{\eta},q)I(\zeta\eta,\lambda)$, $G_i(a,\bar{\eta},q)$, $I(\lambda)$, $\tilde{I}(\lambda)$, $I(\chi,\lambda)$ определяется как в работе [8]

из (10) видно что произведение $\prod\limits_{i=1}^{4} H_i\left(a,q,\lambda\right)$ представляет собой сумму из 3^4 слагаемых. Эти слагаемые мы разобьём на следующие три категории.

(C1): $\prod\limits_{i=1}^{4} G_i(a,\bar{\eta}_0,q)I(\lambda)$ слагаемое;

(C2): 65 слагаемых, в каждом из которых множитель $F_i(a,q,\lambda)$ входит по крайней мере один раз;
(C3): 15 оставшихся слагаемых.
Для удобства обозначим

$$\mathcal{T}_i = \sum_{q \leqslant Q} \varphi^{-4}(dq/h) \sum_{(a,q)=1} e_q(-n\alpha) \int_{-\infty}^{\infty} e(-n\lambda) \{ \text{ сумма слагаемых в } (C_i) \} \, d\lambda, \quad (11)$$

при $i = 1, 2, 3$. Используя (9) и (11) $\mathcal{R}_1(n)$ можно представить $\mathcal{R}_1(n) = \mathcal{T}_1 + \mathcal{T}_2 + \mathcal{T}_3 + \left(NQ^{-1}\right)$. Далее, рассмотрев каждый член в отдельности можно убедится, что

$$\mathcal{R}_1(n) \gg N\left(Q^{1/3}d^{1/2}\right)^{-1}. \quad (12)$$

для всех n, $2 < n \leqslant N$, $n \equiv l(\mathrm{mod} d)$. Из (6) и (12) следует утверждение теоремы 1.

Докажем следствие. Используя равенство (3), для $\mathcal{R}(n)$ получим:

$$\mathcal{R}(n) \leqslant S_d(n) \log^4 N + O\left(N_1^{3/2} \log N\right). \quad (13)$$

Согласно равенству (5), имеем: $\mathcal{R}(n) > \mathcal{R}_1(n) - |\mathcal{R}_2(n)|$. Используя оценки $\mathcal{R}_1(n)$ и $\mathcal{R}_2(n)$, а также (13), получим: $\mathcal{R}_1(n) - |\mathcal{R}_2(n)| \leqslant S_d(n)\log^4 N + O\left(N_1^{3/2}\log N\right)$. Отсюда следует: $S_d(n) \geqslant \frac{R_1(n) - |R_2(n)|}{\log^4 N} - O\left(N_1^{3/2} \log^{-3} N\right)$ и следовательно, $S_d(n) \gg \frac{N}{Q^{1/3}d^{1/2}\log^4 N}$. Пользуясь тем, что $Q = N^{21\delta}$, а также условиями $n \equiv 4\,(\mathrm{mod} 24)$, $L < n \leqslant N$, получим, что для всех n за исключением не более, чем $E_d(N) \ll N\left(Q^{15/14}\,d\right)^{-1}$ значений из них справедлива оценка: $S_d(n) \gg n^{1-7\delta}\left(d^{1/2}\log^4 n\right)^{-1}$. Следствие доказано.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Jianya Liu va Ming-Chit Liu. The exceptional set in the four prime squares problem // Illinois journal of mathematics.2000. V 44, № 2, pp.272-293.

2. Wang, Y. Numbers representable by five prime squares with primes in an arithmetic progression // Acta Arithmetica.1999. V 3, № 90, pp.217–244.

3. Allakov I., Imamov O. A lower estimate for the quantity of a natural number represented as a sum of five squared prime numbers from an arithmetic progression // Bull. Inst. Math. 2024. V 7, №4, pp. 86-93.

4. Imamov O. On numbers representable as the sum of four squares of prime numbers // Samarkand University Scientific Bulletin., 2025, № 1, pp.105-109.

5. Vaughan R. C. The Hardy–Littlewood Method, Cambridge Univ. Press, 1997. p.248

6. Виноградов И.М. Метод тригонометрических сумм в теории чисел. — М.: Изд. Едиториал УРСС, 2021. — 144 с.

7. Виноградов И.М. Особые варианты метода тригонометрических сумм. — М.: Изд. Едиториал УРСС, 2020. — 120 с.

8. Аллаков И., Музропова Н.С. О решении одного уравнения в простых числах // Чебышевский сборник. 2024.Том 25, № 4. С. 5-26.

9. Карацуба А.А. Основы аналитической теории чисел. — М.: Изд. Едиториал УРСС, 2004. — 184 с.

10. Аллаков И. Оценка тригонометрических сумм и их приложения к решению некоторых аддитивных задач теории чисел. Термез. Изд. «Сурхан нашр» 2021. 160с.

УДК 511

О методах весового решета и их приложениях

Е. В. Вахитова (Россия, г. Воронеж)
Воронежский государственный университет
e-mail: algebraist@yandex.ru
С. Р. Вахитова (Россия, г. Воронеж)
e-mail: algebraist@yandex.ru

On weight sieve methods and their applications

E. V. Vakhitova (Russia, Voronezh)
Voronezh State University
e-mail: algebraist@yandex.ru
S. R. Vakhitova (Russia, Voronezh)
e-mail: algebraist@yandex.ru

Работа посвящена исследованию в области теории метода весового решета, активно разрабатываемого в современной теории чисел. Веса Бухштаба (1985 г.) [1], метод весового решета, содержащий решето Сельберга в сочетании с весами Бухштаба, метод весового решета, содержащий решето Бруна в сочетании с весами Бухштаба и их приложения рассмотрены в [2], [3].

Приведем одно из приложений. Будем рассматривать почти простые числа, являющиеся значениями неприводимого полинома от аргумента pq, с ограничениями на p и q, где p, q – простые числа, $p \neq q$, $(pq, \Phi(0)) = 1$, $p \leqslant x^{\alpha}$, $q \leqslant x^{1-\alpha}$, $0 < \alpha < 1$, $x > 1$. Пусть $\Phi(n)$ – неприводимый полином с целыми коэффициентами. Обозначим через g степень полинома $\Phi(n)$, $g \in \mathbf{N}$, $\rho(d)$ – число решений сравнения $\Phi(n) \equiv 0 (\mathrm{mod}\ d)$, $d \in \mathbf{N}$. Предположим, что $\rho(p) < p$ для всех простых чисел p, причем $\rho(p) < p - 1$, если $p \nmid \Phi(0)$.

Рассмотрим последовательность:

$$A := \{\Phi(pq)| \,, p \neq q,\, (pq, \Phi(0)) = 1,\, p > y_0,\, q > y_0,\, p \leqslant x^{\alpha}, q \leqslant x^{1-\alpha}, \}, \qquad (1)$$

где $x \in \mathbf{R},\ x > 1,\ y_0 = \exp((\ln\ln x)^3)$, $0 < \alpha < 1$, p, q–простые числа.

Теорема 1. *Пусть последовательность A определена условием* (1), выполнены условия на последовательность, $f(z), F(z)$ – функции в методе решета, $a, b, c' g'$ – *действительные числа, причем* $1 \leqslant b < c < \alpha a$, $g' + 1 \leqslant \alpha a \leqslant 2g' + 2$, $(r+1)c - Ma \geqslant 2c - b - 1$, $2c - b - 1 > 0, M > 0, r \in \boldsymbol{N}, r \geqslant 2$. *Тогда имеет место следующая оценка снизу:*

$$\sum_{\substack{a_n \in A \\ \nu(a_n) \leqslant r}} 1 \geqslant \frac{ae^{-\gamma}}{2}\Big(f(\alpha a) - B(\alpha, a, b, c, g')\Big) \times$$

$$\times \prod_{p \nmid \Phi(0)} \frac{1-\dfrac{\rho(p)}{p-1}}{1-\dfrac{1}{p}} \prod_{p \mid \Phi(0)} \frac{1-\dfrac{\rho(p)-1}{p-1}}{1-\dfrac{1}{p}} \frac{x}{\ln^3 x}$$

для достаточно больших x, где $B(\alpha, a, b, c, g')$ определено равенством:

$$B(\alpha, a, b, c, g') := \frac{1}{2} \int\limits_{\frac{(g'-1)\alpha a+1}{g'}}^{\alpha a-1} \frac{F(z)dz}{\alpha a - z} + \frac{1}{2c-b-1}\Bigg\{(c-b) \int\limits_{g'}^{\frac{(g'-1)\alpha a+1}{g'}} \frac{F(z)dz}{\alpha a - z} +$$

$$+ \int\limits_{\alpha a - c}^{g'} F(z)\frac{z-(\alpha a - c)}{\alpha a - z}dz + \int\limits_{\frac{g'^2\alpha a}{(g'-1)\alpha a+1}}^{\alpha a} \Bigg(\int\limits_{g'}^{\frac{(g'-1)\alpha a+1}{g'\alpha a}v} F(z)\frac{dz}{v-z}\Bigg)\frac{dv}{v} +$$

$$+ \frac{g'}{2\alpha a} \int\limits_{\frac{(g'-1)\alpha a+1}{\alpha a-1}}^{\alpha a-1} F(g')\frac{(b+1)z-(2\alpha a - b - 1)}{z(1+z)}dz +$$

$$+ \frac{g'}{\alpha a} \int\limits_{\frac{g'}{\alpha a - g'}}^{\frac{(g'-1)\alpha a+1}{\alpha a-1}} F(g')\frac{(b+1-(\alpha a/g'))z-(\alpha a - b - 1)}{z(1+z)}dz\Bigg\},$$

Доказательство теоремы 1 приведено в монографии [2] (теорема 2.3.1).

Задача для последовательности (1) другими авторами ранее не рассматривалась.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бухштаб А. А. Новый тип весового решета // Теория чисел и её приложения: тез. докл. Всесоюз. конф. Тбилиси, 1985. С. 22-24.

2. Вахитова Е. В., Вахитова С. Р. Методы весового решета и их приложения: монография. Воронеж: Издательский дом ВГУ, 2023. 352 с.

3. Вахитова Е.В., Вахитова С. Р. О методе весового решета, содержащего решето Сельберга в сочетании с весами Бухштаба // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика, 2024. № 2. С. 43-63.

УДК 511.3

Об аналоге задачи Гельфонда для разложений по линейным рекуррентным последовательностям

А. А. Жукова (Россия, г. Владимир)

Российская академия народного хозяйства и государственной службы при Президенте Российской Федерации

e-mail: georg967@mail.ru
А. В. Шутов (Россия, г. Владимир)
Владимирский государственный университет им. А. Г. и Н. Г. Столетовых
e-mail: a1981@mail.ru

On an Analogue of the Gelfond Problem for Decompositions in Linear Recurrent Sequences

A. A. Zhukova (Russia, Vladimir)
Russian Academy of National Economy and Public Administration under the President of Russian Federation, Vladimir branch
e-mail: georg967@mail.ru
A. V. Shutov (Russia, Vladimir)
Vladimir State University named after Alexander and Nicholay Stoletovs,
e-mail: a1981@mail.ru

Пусть

$$n = \sum_{i=0}^{b(n)} b_i(n) b^k,$$

где $b_i(n) \in \{0, 1 \ldots, b-1\}$, $b(n) = \max\{k : b^k \leq n\}$, – разложение натурального n в b-ичной системе счисления. Обозначим

$$N_{d,a}^{(b)}(X) = \sharp \left\{ m < X : \sum_{i=0}^{b(m)} b_i(m) \equiv a \pmod d \right\}$$

– количество натуральных чисел, не превосходящих X, для которых сумма цифр b-ичного разложения принадлежит заданному классу вычетов по модулю d. Известно, что при условии взаимной простоты d и $b-1$ существует постоянная $\mu < 1$ (зависящая от b) такая, что

$$N_{d,a}^{(b)}(X) = \frac{X}{d} + O(X^{\mu}).$$

Справедливость данной асимптотической формулы для случая, когда d – простое число, была доказана Файном [1], в общем случае указанное соотношение получил А.О. Гельфонд [2].

Данный результат в дальнейшем изучался во многих направлениях. Среди них можно выделить перенос результатов на случай, когда рассматриваются суммы цифр разложений чисел, пробегающих некоторую последовательность (например, в упомянутых работах Файна и Гельфонда m могло также пробегать арифметическую прогрессию), изучение совместного распределения сумм цифр нескольких натуральных чисел (см., например [3]), изучение аналогов задачи Гельфонда для разложений по линейным рекуррентным последовательностям.

Рассмотрим класс линейных рекуррентных последовательностей $\{T_n\}$, удовлетворяющих условиям:

1. $\{T_n\}$ является линейной рекуррентной последовательностью порядка r, то есть существуют целые числа $a_i \geqslant 0$ $(1 \leqslant i < r)$ и $a_r > 0$ такие, что для каждого $n \geqslant 0$

$$T_{n+r} = a_1 T_{n+r-1} + a_2 T_{n+r-2} + \ldots + a_r T_n.$$

2. Начальные условия определяются следующим образом:

$$T_0 = 1 \qquad \text{и} \qquad T_n \geqslant a_1 T_{n-1} + a_2 T_{n-2} + \ldots + a_n T_0 + 1 \qquad \text{при} \qquad 1 \leqslant n < r.$$

3. Коэффициенты a_1, a_2, ..., a_r удовлетворяют условию Парри [4], то есть

$$(a_s, a_{s+1}, \ldots, a_r) \preccurlyeq (a_1, a_2, \ldots, a_{r-s+1})$$

для $1 < s \leqslant d$, где $\preccurlyeq$ обозначает лексикографический порядок.

Любое натуральное число N можно представить в виде

$$N = \sum_{i=0}^{t(N)} t_i(N) T_i, \tag{1}$$

где $t(N) = \max\{i : T_i \leqslant N\}$, $t_i(N) \in \mathbb{Z}$, $t_i(N) \geqslant 0$, причем коэффициенты $t_i(N)$ подбираются так, что для любого $i \geqslant 0$ было справедливо неравенство

$$0 \leqslant N - \sum_{h=i}^{t(N)} t_h(N) T_h < T_i. \tag{2}$$

Данное условие означает, что разложение (1) получается по жадному алгоритму.

Пусть $N_{d,a}^{(T)}(X)$ — количество натуральных чисел, меньших X, для которых сумма коэффициентов разложения (1) с условием (2) сравнима с a по модулю d, то есть

$$N_{d,a}^{(T)}(X) = \sharp \left\{ m < X : \sum_{i=0}^{t(m)} t_i(m) \equiv a \pmod d \right\}.$$

Нас интересуют асимптотические результаты вида

$$N_{d,a}^{(T)}(X) = \frac{X}{d} + O(X^{\mu}).$$

Подобный результат впервые был получен при $d = 2$ в работе [5]. Некоторые более тонкие результаты об остаточном члене можно найти в [6]. В случае простейшей линейной рекуррентной последовательности – последовательности Фибоначчи, еще более тонкие результаты содержатся в [7].

Общий результат об аналоге задачи Гельфонда для произвольного d при дополнительном условии взаимной простоты d и $a_1 + \ldots + a_r - 1$ был получен в фундаментальной работе [8]. Более того, в ней был получен ряд других важных результатов, в частности, был рассмотрен аналог задачи Гельфонда в случае, когда числа пробегают арифметическую прогрессию.

В основе доказательства из [8] лежал глубокий и имеющие многочисленные приложения результат об оценке тригонометрической суммы $\sum_{m<X} e^{2\pi i(\frac{a}{b}\sum_{i=0}^{t(m)} t_i(m)+ym)}$, доказательство которого, среди прочего, использовало сложные результаты из [9].

Отметим, что константа μ в результатах из [5] и [8] зависела от d и линейной рекуррентной последовательности. В случае $d = 2$ методами из [5] и [6] можно получить достаточно простое описание константы μ в виде отношения логарифмов максимумов модулей некоторых явно выписываемых алгебраических уравнений. В случае произвольного d работа [8] по сути тоже содержит некоторый эффективный алгоритм вычисления константы μ, однако этот алгоритм чрезвычайно сложен (даже его описание заняло бы несколько страниц) и не был реализован ни для одной линейной рекуррентной последовательности.

Нами дано новое, более простое, доказательство аналога теоремы Гельфонда в случае разложений по линейным рекуррентным последовательностям, носящее чисто комбинаторный характер и не использующее оценок тригонометрических сумм. Кроме того, это доказательство позволяет получить достаточно простую формулу для показателя степени в остаточном члене. Более того, наш результат, в отличие от [8], не требует условия взаимной простоты d и $a_1+\ldots+a_r-1$, а показатель степени остаточного члена зависит только от модуля d и порядка линейного рекуррентного соотношения, но не зависит от самого соотношения.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. *Для любого $d \geqslant 3$ справедлива асимптотическая формула*

$$N_{d,a}^{(T)}(X) = \frac{X}{d} + O\left(X^{\lambda}\right),$$

где $\lambda = \log_{\tau_{d_0}\eta_{d,r}} \tau_{d_0}$, τ_{d_0} — наибольший по модулю корень уравнения $u^r - d_0 \sum\limits_{s=1}^{r} u^{r-s} = 0$,

$$\eta_{d,r} = \left(1 + \frac{1}{r(d+1)^{k_0+1}}\right)^{\frac{1}{k_0+r}},$$

$$k_0 = r(d_0-1)+1,$$

$$d_0 = \left[\frac{d}{2}\right].$$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Fine N. J. The distribution of the sum of digits $\pmod p$ // Bulletin of the American Mathematical Society. 1965. Vol. 71 (4). P. 651-652.
2. Gelfond A. O. Sur les nombres qui ont des propriétés additives et multiplicatives données // Acta Aithmetica. 1968. Vol. 13. № 3. P. 259-265.
3. Эминян К. М. Об одной бинарной задаче // Математические заметки. 1996. Т. 60. № 4. С. 478-481.
4. Parry W. On the β-expansion of real numbers // Acta Math. Acad. Sci. Hung. 1961. Vol. 12. № 3-4. P. 401-416.
5. Drmota M., Gajdosik J. The Parity of the Sum-of-Digits-Function of Generalized Zeckendorf Representations // Fibonacci Quarterly. 1998. Vol. 36. № 1. P. 3-19.
6. Жукова А. А., Шутов А. В. Об аналоге задачи Гельфонда для обобщенных разложений Цеккендорфа // Чебышевский сборник. 2021. Т. 22. № 2. С. 104-120.
7. Drmota M., Skałba M. The Parity of the Zeckendorf Sum-of-Digits-Function // Manuscripta Mathematica. 2000. Vol. 101. P. 361–383.
8. Lamberger M., Thuswaldner J. W. Distribution properties of digital expansions arising from linear recurrences // Mathematica Slovaca. 2003. Vol. 53. №1. P. 1-20.
9. Coquet J., Rhin G., Toffin Ph. Représentations des entiers naturels et indépendance statistique 2 // Annales de l'institut Fourier. 1981. Vol. 31. № 1. P. 1-15.

УДК 511.325

Средние значение квадратного корня от функции делителей

Д. Дж. Каримзода (Таджикистан, г. Душанбе)

Таджикский национальный университет
e-mail: khdj.91@mail.ru

The average value of the square root of the divisor function

D. Dj. Karimzoda (Tajikistan, Dushanbe)
Tajik national University
e-mail: khdj.91@mail.ru

Пусть $\tau_k(n)$ - число представлений n в виде произведения k натуральных сомножителей, т.е число решений в целых положительных числах $m_1, m_2, ..., m_k$ уравнения

$$m_1 \cdot m_2 \cdot ... \cdot m_k = n$$

Считаем что $\tau_k(0) = 0,\ \tau_k(1) = 1,\ \tau_1(n) = 1.$

Вопрос о поведении среднего значения функции $\tau_k(n)$ был впервые поставлен Л. Дирихле в 1849 г.

Введем обозначение

$$T_k^l(x) = \sum_{n \le x} {\tau_k}^l(n). \qquad (1)$$

Задачу о верхней оценке суммы ${T_k}^l(x)$ одним из первых стал рассматривать К.К. Марджанишвили. В 1939 г. с помощью неравенства

$$T_k(x) = \sum_{n \le x} \tau_k(n) \le x \frac{(k - 1 + \ln x)^{k-1}}{(k-1)!}. \qquad (2)$$

К.К. Марджанишвили [1] доказал следующую оценку:

$$T_k^l(x) = \sum_{n \le x} {\tau_k}^l(n) \le x A_k^l (k^l - 1 + \ln x)^{k^l - 1}.$$

где $A_k^l = \frac{k^l}{(k!)^{\frac{k^l-1}{k-1}}}$ при любых целых $x \ge 1,\ k \ge 2,\ l \ge 1.$

В 2006 г. Д.А. Митькиным была улучшена оценка для ${T_k}^l(x)$. В его работе [2] получено неравенство

$$\tau_k(n)\tau_l(n) \le \tau_{kl}(n) \qquad (3)$$

для любых целых $n \ge 1,\ k \ge 2,\ l \ge 2.$

С помощью этого неравенства, использую оценку (2) Д.А. Митькин доказал, что при любых целых $n \ge 1,\ k \ge 2,\ l \ge 1$ выполняется неравенство

$$T_k^l(x) = \sum_{n \le x} {\tau_k}^l(n) \le \frac{x}{(k^l - 1)!} (k^l - 1 + \ln x)^{k^l - 1}.$$

Г.В.Федор доказал более точное неравенство для суммы $T_k(x)$, чем ранее известное неравенство (2) тем самым улучшив оценку суммы ${T_k}^l(x)$ т.е

$$T_k(x) = \sum_{n \le x} \tau_k(x) \le x \sum_{j=0}^{k-1} \left(\begin{array}{c} k-1 \\ j \end{array} \right) \frac{\ln^j x}{j!}.$$

При $l = 1$ сумму (1) будем обозначать

$$T_k(x) = \sum_{n \le x} \tau_k(n). \qquad (4)$$

Как легко видеть, $T_k(x)$-число решений в натуральных $m_1, m_2, ..., m_k$ неравенства

$$m_1 \cdot m_2 \cdot ... \cdot m_k \le x$$

другими словами, $T_k(x)$-число целых точек ч положительными координатами под гиперболической поверхностью. Для величины $T_k(x)$ можно написать асимптотическую формулу следующего вида:

$$T_k(x) = xP_{k-1}(\log x) + O(x^{\alpha_k + \varepsilon}) \qquad (5)$$

где $\varepsilon > 0$ сколь угодно мало, P_{k-1} многочлен степени $\le k-1$ и $\alpha_k < 1$.

Проблема нахождения возможно лучшего значения α_k называется проблемой делителей Дирихле. История оценок α_k такова:

$\alpha_k \le 1 - \frac{1}{k}$, $k \ge 2$- Л. Дирихле 1849 г.

$\alpha_k \le 1 - \frac{2}{k+1}$, $k \ge 2$- Г. Вороной 1903 и Э.Ландау 1912 г.

$\alpha_k \le 1 - \frac{3}{k+2}$, $k \ge 4$- Г.Харди и Д.Литтвуд 1922 г.

А.А. Карацуба доказал что $\alpha_k \le 1 - \frac{c}{k^{\frac{2}{3}}}$.

Все эти оценки из-за формы (5) остаточного члена становятся хуже тривиальных при $k = k_0(\varepsilon)$ и, следовательно, (5) теряет смисл, если $k \to \infty$ при $x \to \infty$.

А. А. Карацуба [3] доказала следующего теорема о асимптотическая формула для величины $T_k(x)$, равномерная по параметрам x и k, которая основанная на методам комплексного интегрирования с использованием современных оценок дзета-функции Римана в критической полосе т.е.

Теорема. *Пусть $x \ge 2$ и*

$$T_k(x) = \sum_{n \le x} \tau_k(n).$$

Тогда

$$T_k(x) = xP_{k-1}(\log x) + \theta x^{1 - \frac{\gamma}{k^{\frac{2}{3}}}} (c \log x)^k$$

где P_{k-1} многочлен степени $\le k-1$ и γ-абсолютная постоянная.

В настоящий работе доказывается теорема об асимптотической поведение сумм квадратных корней от количество представлений натурального произведение четырех натуральных сомножителей.

Этот результат удается доказывать путем удачным выражением производящей функции этой суммы как произведение квадрата дзета функции Римана и регулярной функцией в интегрируемой области и использовании современной теории дзета функции Римана и метода комплексного интегрирования в арифметической задачах.

Для доказательства теоремы воспользуемся следующей леммой

Лемма. *Справедливо соотнесение*

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{\tau_4(n)}}{n^s} = \zeta^2(s)\phi(s),$$

где $\zeta(s)$-дзета функция Римана, $\phi(s)$-регулярная функция в области $\Re s > 0,5$ и

$$\Phi(s) = \prod_p \left(1 - \frac{3}{p^{2s}} + \frac{2}{p^{3s}} + (1 - \frac{1}{p^s})^2 \sum_{k=2}^{\infty} \sqrt{\binom{k+3}{3}} p^{-ks}\right)$$

Доказательство. Пользуясь мультипликативностью $\sqrt{\tau_4(n)}$, получим

$$f(s)=\prod_p\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sqrt{\tau_4(p^k)}}{p^{ks}}$$

Так как

$$\tau_4(p^k)=\frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3!}=\frac{(k+3)!}{3!k!}=\binom{k+3}{3}$$

то

$$f(s)=\prod_p\left(1+\frac{2}{p^s}+\sum_{k=2}^{\infty}\sqrt{\binom{k+3}{3}}p^{-ks}\right)=$$

$$=\zeta^2(s)\prod_p\left(1+\frac{2}{p^s}+\sum_{k=2}^{\infty}\sqrt{\binom{k+3}{3}}p^{-ks}\right)\left(1-\frac{2}{p^s}+\frac{1}{p^{2s}}\right)=$$

$$=\zeta^2(s)\prod_p\left(1-\frac{3}{p^{3s}}+\frac{2}{p^s}+\left(1-\frac{1}{p^s}\right)^2\sum_{k=2}^{\infty}\sqrt{\binom{k+3}{3}}p^{-ks}\right)$$

Лемма доказана.

Теорема. *Справедливо следующая асимптотическая формула*

$$\sum_{n\le x}\sqrt{\tau_4(n)}=x(A\ln x+B)+O(x^{\frac{1}{2}+\varepsilon}),$$

где

$$A=\phi(1),\quad B=2\phi(1)\int_1^{\infty}\frac{\rho(u)}{u^2}du+\phi'(1),\quad \rho(u)=\frac{1}{2}-\{u\}$$

ε-сколь угодно малой положительной величина.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Карацуба А.А. Основы аналитической теории чисел. - М.: Наука, 1983

2. Титчмарш Е.К Теория дзета-функции Римана. Москва, ИМФЛ 1953.

УДК 511.3

О проблеме Гольдбаха с простыми числами специального вида[1]

С. А. Гриценко (Россия, г. Москва)
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
e-mail: s.gritsenko@gmail.com

К. В. Мусина (Россия, г. Москва)
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
e-mail: kvmusina@gmail.com

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке...

On the Goldbach Ternary Problem with Primes of a Special Kind

S. A. Gritsenko (Russia, Moscow)
Lomonosov Moscow State University
e-mail: s.gritsenko@gmail.com

K. V. Musina (Russia, Moscow)
Lomonosov Moscow State University
e-mail: kvmusina@gmail.com

Работа посвящена решению тернарной проблемы Гольдбаха с простыми числами специального вида.

Пусть η — иррациональное число, множество неполных частных которого ограничено.

Пусть P — множество простых чисел таких, что $a \leq \{\eta p\} \leq b$.

Сформулируем нашу основную теорему.

Теорема 1. *Пусть N — нечётное положительное число, пусть $J_0(N)$ — число решений уравнения*

$$p_1 + p_2 + p_3 = N \tag{1}$$

в простых числах из множества P, $J(N)$ — число решений уравнения (1) в произвольных простых числах.

Тогда справедливо равенство

$$J_0(N) = J(N)\sigma(N, \eta, a, b) + O\left(N^{2-1/9}\log^6 N\right),$$

где $\sigma(N, \eta, a, b)$ представляет собой сумму ряда

$$\sigma(N, \eta, a, b) = \sum_{|m|<\infty} e^{2\pi i m(\eta N - 1{,}5(a+b))} \cdot \frac{\sin^3 \pi m(b-a)}{\pi^3 m^3}. \tag{2}$$

Данная теорема является уточнением результата С.А. Гриценко и Н.Н. Мотькиной из статьи, в которой остаточный член имеет логарифмическое понижение по сравнению с главным.

Работа выполнена на основе метода тригонометрических сумм И. М. Виноградова с использованием некоторых результатов из теории диофантовых приближений.

В основе доказательства теоремы лежит тот факт, что одну из сумм

$$S(\alpha) = \sum_{p \leq N} e^{2\pi i \alpha p}$$

и

$$S(\alpha + m\eta),$$

где $1 \leq l \leq |m| \leq N^{1/9}$, можно оценить со степенными понижением.

Опишем схему доказательства теоремы.

Пусть

$$S_0(\alpha) = \sum_{p \leq N} e^{2\pi i \alpha p}\psi(\eta p),$$

где $\psi(x)$ — стаканчик Виноградова, позволяющий выделять простые числа с условием $a \leq \{\eta p\} \leq b$, где $0 \leq a < b < 1$.

Тогда имеем

$$J_0(N) = \int_0^1 S_0^3(\alpha) e^{-2\pi i \alpha N}\, d\,\alpha.$$

Далее, пользуясь теоремой И.М. Виноградова о приближении $\psi(x)$ тригонометрическим полиномом, приходим к необходимости оценки интергралов вида

$$\int_0^1 S(\alpha)S(\alpha+\eta m)S(\alpha+\eta m_1)e^{-2\pi i\alpha N}\, d\,\alpha,$$

где $1 \le m \le N^{1/9}$, которые оцениваются с использованием тернарности задачи и возможности оценки одной из сумм $S(\alpha), S(\alpha+m\eta)$ со степенным понижением.

Из-за особенностей задачи главный член f асимптотической формулы для $J_0(N)$ отличен от $(b-a)^3 J(N)$ и равен сумме ряда (2).

Поведение указанного ряда изучалось в статье С. А. Гриценко, Н. Н. Мотькина "О вычислении некоторых особых рядов", Чеб. сб., 2011, т. 12, вып. 4, с. 85-92.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Архипов Г.И., Садовничий В.А., Чубариков В.Н. Лекции по математическому анализу.: Учебник для университетов и пед. вузов / Под ред. В. А. Садовничего — М.: Высш. шк. 1999. — 695 с.

2. Гриценко С. А., Мотькина Н. А., Тернарная проблема Гольдбаха с простыми числами специального вида, Научные ведомости БелГу// Серия: Математика. Физика. 2015. Вып. 38, С. 71–82.

3. Карацуба А. А. Основы аналитической теории чисел / А. А. Карацуба. – 2-е изд., стер. – Москва : Едиториал УРСС, 2004.

УДК 517.521

Примеры теоремы сложения для последовательности Сомос-6 [1]

М. А. Романов (Россия, г. Хабаровск)
Хабаровское отделение Института прикладной математики ДВО РАН
e-mail: romanov@iam.dvo.ru

Examples of the addition theorem for the Somos-6 sequence

M. A. Romanov (Russia, Khabarovsk)
Institute of Applied Mathematics, Khabarovsk Division
e-mail: romanov@iam.dvo.ru

Последовательность Сомос-6 $S_n \in \mathbb{C}$ определяется для всех $n \in \mathbb{Z}$ рекуррентным соотношением

$$S_{n-3}S_{n+3} = \alpha S_{n-2}S_{n+2} + \beta S_{n-1}S_{n+1} + \gamma S_n^2 \tag{1}$$

с коэффициентами α, β, γ и начальными значениями $S_0, \dots, S_5$. В дальнейшем считаем, что $S_n \ne 0$ для всех $n \in \mathbb{Z}$. С помощью новой переменной $f_n = \dfrac{S_{n+1}S_{n-1}}{S_n^2}$ соотношение (1) приводится к виду

$$f_{n-2}f_{n-1}^2 f_n^3 f_{n+1}^2 f_{n+2} = \alpha f_{n-1}f_n^2 f_{n+1} + \beta f_n + \gamma. \tag{2}$$

[1] Работа выполнена в рамках государственного задания ИПМ ДВО РАН (№ 075-00459-25-00)

Положим для $k \in \mathbb{Z}$

$$F_k(n) = \frac{S_{n+k}S_{n-k}}{S_n^2}, \quad G_k(n) = \frac{S_{n+k+1}S_{n-k}}{S_{n+1}S_n}.$$

Далее будем считать $k \geqslant 0$, поскольку $F_{-k}(n) = F_k(n)$ и $G_{-k}(n) = G_{k-1}(n)$. Функции $F_k : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ и $G_k : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ удовлетворяют рекуррентным соотношениям

$$F_{k+1}(n) = \frac{F_1^2(n)F_k(n-1)F_k(n+1)}{F_{k-1}(n)},$$
$$G_{k+1}(n) = \frac{G_1(n)G_k(n-1)G_k(n+1)}{G_{k-1}(n)}$$

с начальными значениями $F_0(n) = G_0(n) = 1$, $F_1(n) = f_n$, $G_1(n) = f_n f_{n+1}$.

Пусть $\mathbb{C}_0 = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ и $\boldsymbol{u} = (u_0, u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{C}_0^4$. Введем отображения $S : \mathbb{C}_0^4 \to \mathbb{C}_0^4$ и $T : \mathbb{C}_0^4 \to \mathbb{C}_0^4$ по формулам

$$S\boldsymbol{u} = (u_3, u_2, u_1, u_0), \quad T\boldsymbol{u} = \left(u_1, u_2, u_3, \frac{\alpha u_1 u_2^2 u_3 + \beta u_2 + \gamma}{u_0 u_1^2 u_2^3 u_3^2}\right).$$

Непосредственно проверяются равенства $S^2 = (ST)^2 = (TS)^2 = \mathbf{1}$ ($\mathbf{1}$ — тождественное отображение), из которых следует, что

$$T^{-1} = STS. \tag{3}$$

Определим функции $\Phi_k : \mathbb{C}_0^4 \to \mathbb{C}$, $\Psi_k : \mathbb{C}_0^4 \to \mathbb{C}$ с помощью соотношений

$$\begin{gathered} \Phi_0(\boldsymbol{u}) = \Psi_0(\boldsymbol{u}) = 1, \quad \Phi_1(\boldsymbol{u}) = u_2, \quad \Psi_1(\boldsymbol{u}) = u_2 u_3, \\ \Phi_{k+1}(\boldsymbol{u}) = \frac{\Phi_1^2(\boldsymbol{u})\Phi_k(T^{-1}\boldsymbol{u})\Phi_k(T\boldsymbol{u})}{\Phi_{k-1}(\boldsymbol{u})}, \\ \Psi_{k+1}(\boldsymbol{u}) = \frac{\Psi_1(\boldsymbol{u})\Psi_k(T^{-1}\boldsymbol{u})\Psi_k(T\boldsymbol{u})}{\Psi_{k-1}(\boldsymbol{u})}. \end{gathered} \tag{4}$$

Согласно уравнению (2) и определению T,

$$T(f_{n-2}, f_{n-1}, f_n, f_{n+1}) = (f_{n-1}, f_n, f_{n+1}, f_{n+2}),$$

поэтому

$$F_k(n) = \Phi_k(f_{n-2}, f_{n-1}, f_n, f_{n+1}), \quad G_k(n) = \Psi_k(f_{n-2}, f_{n-1}, f_n, f_{n+1}).$$

Кроме этого, выполняется равенство

$$\Phi_k(ST\boldsymbol{u}) = \Phi_k(\boldsymbol{u}),$$

которое доказывается индукцией по k с помощью (3) и (4).

Определение 1. *(см. [1]) Последовательность S_n, удовлетворяющая для любых $m, n \in \mathbb{Z}$ соотношениям*

$$S_{m+n}S_{m-n} = \sum_{i=1}^{r_0} a_i(m)b_i(n), \quad S_{m+n+1}S_{m-n} = \sum_{i=1}^{r_1} \tilde{a}_i(m)\tilde{b}_i(n) \tag{5}$$

с некоторыми $a_i(n)$, $b_i(n)$, $\tilde{a}_i(n)$, $\tilde{b}_i(n)$ и минимально возможными r_0, r_1, называется последовательностью конечного ранга, а число $r = \max(r_0, r_1)$ — рангом этой последовательности.

Из результатов работы [3] следует, что ранг последовательности Сомос-6 не превосходит 4.

Теорема 1. *Для функций Φ_5 и Ψ_4 справедливы разложения*

$$\begin{gathered}\Phi_5(\boldsymbol{u}) = \gamma\Phi_4(\boldsymbol{u}) + (\alpha\beta^2+\gamma I)\Phi_2(\boldsymbol{u}) + (\beta^3-\alpha^3\gamma-\gamma J)\Phi_1(\boldsymbol{u}) + \\ +\alpha^5+\alpha\beta I+\alpha^2 J, \\ \Psi_4(\boldsymbol{u}) = -\beta\Psi_3(\boldsymbol{u}) - \alpha\gamma\Psi_2(\boldsymbol{u}) + \gamma^2\Psi_1(\boldsymbol{u}) + \alpha^4+\beta I+\alpha J,\end{gathered} \tag{6}$$

где

$$\begin{gathered}I = I(\boldsymbol{u}) = \\ = \alpha\beta\left(\frac{1}{u_0}+\frac{1}{u_1}+\frac{1}{u_2}+\frac{1}{u_3}\right) + \alpha\gamma\left(\frac{1}{u_0u_1}+\frac{1}{u_1u_2}+\frac{1}{u_2u_3}\right) + \gamma(u_0u_1u_2+u_1u_2u_3) + \\ +\beta u_0u_1u_2u_3 + \frac{\beta^2}{u_0u_1u_2u_3} + \beta\gamma\left(\frac{1}{u_0u_1^2u_2u_3}+\frac{1}{u_0u_1u_2^2u_3}\right) + \frac{\gamma^2}{u_0u_1^2u_2^2u_3},\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}J = J(\boldsymbol{u}) = \\ = \alpha\beta(u_0u_1+u_1u_2+u_2u_3) + \beta\gamma\left(\frac{1}{u_0u_1}+\frac{1}{u_1u_2}+\frac{1}{u_2u_3}\right) + \alpha\gamma\left(\frac{u_0u_1}{u_3}+\frac{u_2u_3}{u_0}\right) + \\ +(\alpha^2\beta+\gamma^2)\left(\frac{1}{u_0u_1u_2}+\frac{1}{u_1u_2u_3}\right) + \alpha^2\gamma\left(\frac{1}{u_0u_1^2u_2}+\frac{1}{u_1u_2^2u_3}\right) + \frac{\alpha\beta^2}{u_0u_1^2u_2^2u_3} + \\ +\frac{\alpha\gamma^2}{u_0u_1^3u_2^3u_3} + \alpha\beta\gamma\left(\frac{1}{u_0u_1^2u_2^3u_3}+\frac{1}{u_0u_1^3u_2^2u_3}\right) + \gamma u_0u_1^2u_2^2u_3.\end{gathered}$$

— независимые первые интегралы (инварианты) уравнения (2) *(см. [2], [3]).*

Для функций I и J выполняются соотношения

$$I(T\boldsymbol{u}) = I(S\boldsymbol{u}) = I(\boldsymbol{u}), \quad J(T\boldsymbol{u}) = J(S\boldsymbol{u}) = J(\boldsymbol{u}).$$

Другими словами, величины $I(f_n, f_{n+1}, f_{n+2}, f_{n+3})$ и $J(f_n, f_{n+1}, f_{n+2}, f_{n+3})$ не зависят от n. Разложения (6) в терминах последовательности S_n имеют вид

$$\begin{gathered}S_{n+5}S_{n-5} = \gamma S_{n+4}S_{n-4} + (\alpha\beta^2+\gamma I)S_{n+2}S_{n-2} + (\beta^3-\alpha^3\gamma-\gamma J)S_{n+1}S_{n-1} + \\ +(\alpha^5+\alpha\beta I+\alpha^2 J)S_n^2, \\ S_{n+5}S_{n-4} = -\beta S_{n+4}S_{n-3} - \alpha\gamma S_{n+3}S_{n-2} + \gamma^2 S_{n+2}S_{n-1} + \\ +(\alpha^4+\beta I+\alpha J)S_{n+1}S_n\end{gathered}$$

и представляют примеры формул (5) для последовательности Сомос-6.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Авдеева М. О., Быковский В. А. Гиперэллиптические системы последовательностей и функций // ДВМЖ. 2016. Том 16, № 2. С. 115-122.

2. Hone A. N. W. Analytic solutions and integrability for bilinear recurrences of order six // Appl. Anal. 2010. Vol. 89, issue 4. PP. 473-479.

3. Fedorov Y. N., Hone A. N. W. Sigma function solution of the general Somos-6 recurrence via hyperelleptic Prym varieties // Journal of Integrable Systems. 2016. Vol. 1, issue 1. PP. 1-34.

УДК 511.344

Оценка специальных коротких линейных тригонометрических сумм с простыми числами в малых дугах

Ш. А. Хайруллоев (Таджикистан, г. Душанбе)
Таджикский национальный университет
e-mail: shamsullo@rambler.ru
Д. Д. Рахмонов (Таджикистан, г. Душанбе)
Институт математики им. А. Джураева НАН Таджикистана
e-mail: r.doston@bk.ru

Evaluation of special short linear exponential sums with primes in small arcs

Sh. A. Khayrulloev (Tajikistan, Dushanbe)
Tajik National University
e-mail: shamsullo@rambler.ru
D. D. Rakhmonov (Tajikistan, Dushanbe)
Institute of Mathematics named after A. Juraev of the NAS of Tajikistan
e-mail: r.doston@bk.ru

При решении обобщения тернарной проблемы Гольдбаха вида

$$b_1p_1 + b_2p_2 + b_3p_3 = N, \qquad \left|b_ip_i - \frac{N}{3}\right| \leqslant H, \quad H = N^{\theta}, \quad \frac{1}{2} < \theta < 1, \tag{1}$$

в простых числах p_1, p_2 и p_3 с растущими коэффициентами b_i и при условии, что слагаемые почты равны, возникает задача о поведении специальной короткой линейной тригонометрической суммы с простыми числами вида

$$S_1(b\alpha; x, y) = \sum_{x-y<n\leqslant x} \Lambda(n)e(b\alpha n).$$

Сумму $S_1(b\alpha; x, y)$ впервые изучили Рахмонов З.Х., Аллаков И. и Абраев Б. Х. [1]–[3]. Они доказали асимптотическую формулу с остаточным членом в больших дугах $\mathfrak{M}(\mathscr{L}_x^{c_1})$, $\tau = y^2x^{-1}\mathscr{L}_x^{-c_2}$, при условии

$$y \geqslant bx^{\frac{5}{8}}\mathscr{L}_x^{2,25A+c_1+81}, \qquad b \leqslant \mathscr{L}_x^B,$$

а в малых дугах $\mathfrak{m}(\mathscr{L}_x^{4A+82})$, $\tau = y^2x^{-1}\mathscr{L}_x^{-4A-82}$ они доказали нетривиальную оценку вида

$$S_1(b\alpha; x, y) \ll \frac{y}{\mathscr{L}_x^A}$$

при условии

$$y \geqslant bx^{\frac{2}{3}}\mathscr{L}_x^{\frac{8}{3}A+52}, \qquad b \leqslant \mathscr{L}_x^B,$$

где A, B, c_1 и c_2 — абсолютные постоянные числа, $c_2 \leqslant c_1$. Воспользовавшись этими результатами они получили асимптотическую формулу для количества решений (1) при условии

$$H \geqslant (b_1b_2b_3)^{\frac{4}{3}}N^{\frac{2}{3}}(\ln N)^{60}, \qquad b_i \leqslant (\ln N)^{B_i},$$

где b_1, b_2 b_3, N – попарно взаимно простые натуральные числа, B_i — произвольные фиксированные положительные числа. В [4] асимптотическая формула с остаточным членом в больших дугах вида $\mathfrak{M}(\mathscr{L}_x^{c_1})$, $\tau = y^2x^{-1}\mathscr{L}_x^{-c_1}$ была доказана при условии

$$y \geqslant x^{\frac{5}{8}} bh\mathscr{L}_x^{1{,}5A+16{,}5}, \qquad b \leqslant \mathscr{L}_x^{B},$$

где A, B, и c_1 — абсолютные постоянные числа.

В этой работе для специальной короткой тригонометрической суммы с простыми числами вида $S_1(b\alpha; x, y)$ в малых дугах доказана новая равномерная по параметрам оценка (теорема 1), следствием которой является нетривиальная оценка в малых дугах при

$$y \geqslant x^{\frac{3}{5}+\varepsilon}.$$

Основным моментом доказательства теоремы 1 является сведение оценки суммы $S_1(b\alpha; x, y)$ к оценке средних значений функций Чебышева с линейным экспоненциальным весом в коротких интервалах, то есть к суммам вида

$$t(x; q_1, y, b\lambda) = \sum_{\chi \bmod q_1} \left|\psi(x, \chi, b\lambda) - \psi(x - y, \chi, b\lambda)\right|.$$

Оценки средних значений функции Чебышева с экспоненциальными весами в коротких интервалах были получены в работах З.Х.Рахмонова [5]–[7], и мы воспользуемся следующим её линейным случаем.

Лемма 1. *Пусть $y \geq x^{\frac{3}{5}}$, $q \leqslant\ x^3y^{-3}$, $|\lambda| \leqslant xy^{-2}$, тогда справедлива оценка*

$$t(x; q, y, \lambda) \ll x^{\frac{1}{2}+0{,}3\varepsilon}q + x^{\frac{1}{3}+0{,}3\varepsilon}y^{\frac{1}{2}}q|b\lambda|^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{3}{10}}y^{\frac{1}{2}}q^{\frac{1}{2}}\mathscr{L}^{30} + y\mathscr{L}^{30}.$$

где постоянная под знаком Виноградова зависит от n и ε.

Теорема 1. *Пусть $y \geqslant x^{\frac{3}{5}}$, α — вещественное число, целые числа a и q удовлетворяют условиям*

$$q \leqslant x^3y^{-3}, \qquad (a, q) = 1, \qquad |\lambda| \leqslant \frac{x}{y^2},$$

тогда для всякого $\varepsilon > 0$ имеет место оценка

$$S_1(b\alpha; x, y) \ll x^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\varepsilon}q^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\varepsilon}y^{\frac{1}{2}}q^{\frac{1}{2}}|b\lambda|^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{3}{10}}y^{\frac{1}{2}}\mathscr{L}^{31} + \frac{y}{q^{\frac{1}{2}}}\mathscr{L}^{31},$$

где постоянная под знаком Виноградова зависит от n и ε.

Из этой теоремы, имея в виду, что $y \leqslant x^{\frac{4}{5}}\mathscr{L}^{\frac{c}{5}}$, выполняется соотношение

$$\tau = \frac{y^2}{x\mathscr{L}^c} = \frac{x^3}{y^3} \cdot \frac{y^5}{x^4\mathscr{L}^c} = \frac{x^3}{y^3} \cdot \left(\frac{y}{x^{\frac{4}{5}}\mathscr{L}^{\frac{c}{5}}}\right)^5 < \frac{x^3}{y^3},$$

Отсюда в свою очередь при $q \geqslant b\mathscr{L}_x^c$, имеем

$$\frac{1}{q\tau} = \frac{1}{q} \cdot \frac{x\mathscr{L}^c}{y^2} = \frac{\mathscr{L}^c}{q} \cdot \frac{x}{y^2} \leqslant \frac{x}{by^2},$$

то есть при $\tau = y^2x^{-1}\mathscr{L}^{-c}$ и $q \geqslant b\mathscr{L}_x^c$ выполняется условие теоремы 1, поэтому заменяя в утверждение теоремы $|b\lambda|$ на xy^{-2}, имеем

$$\begin{aligned} S_1(b\alpha; x, y) &\ll x^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\varepsilon}q^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\varepsilon}y^{\frac{1}{2}}q^{\frac{1}{2}}(xy^{-2})^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{3}{10}}y^{\frac{1}{2}}\mathscr{L}^{31} + \frac{y}{q^{\frac{1}{2}}}\mathscr{L}^{31} = \\ &= x^{\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\varepsilon}y^{-\frac{1}{6}}q^{\frac{1}{2}}\left(\left(\frac{y}{x^{1+2\varepsilon}}\right)^{\frac{1}{6}} + 1\right) + x^{\frac{3}{10}}y^{\frac{1}{2}}\mathscr{L}^{31} + \frac{y}{q^{\frac{1}{2}}}\mathscr{L}^{31} \\ &\ll x^{\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\varepsilon}y^{-\frac{1}{6}}q^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{3}{10}}y^{\frac{1}{2}}\mathscr{L}^{31} + \frac{y}{q^{\frac{1}{2}}}\mathscr{L}^{31}. \end{aligned}$$

Таким образом имеет место утверждение.

Следствие 1. *Пусть* $x^{\frac{3}{5}} < y \leqslant x^{\frac{4}{5}}\mathscr{L}^{\frac{c}{5}}$, α *— вещественное число, целые числа* a *и* q *удовлетворяют условиям*

$$\alpha = \frac{a}{q} + \lambda, \quad (a,q) = 1. \qquad b\mathscr{L}^c \leqslant q \leqslant \tau, \qquad |\lambda| \leqslant \frac{1}{q\tau}, \quad \tau = \frac{y^2}{x\mathscr{L}^c}.$$

Тогда для всякого $\varepsilon > 0$ *имеет место оценка*

$$S_1(b\alpha; x, y) \ll x^{\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\varepsilon}y^{-\frac{1}{6}}q^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{3}{10}}y^{\frac{1}{2}}\mathscr{L}^{31} + yq^{-\frac{1}{2}}\mathscr{L}^{31},$$

где постоянная под знаком Виноградова зависит от n *и* ε.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Рахмонов З.Х., Аллаков И., Абраев Б.Т. Обобщение тернарной проблемы Гольдбаха с почти равными слагаемыми // Чебышевский сборник. 2023. Том 24, № 4. С. 264-298.
2. Рахмонов З.Х., Аллаков И., Абраев Б.Т. Асимптотическая формула в обобщении тернарной проблемы Гольдбаха с почти равными слагаемыми // Доклады НАН Таджикистана. 2023. Том 66, № 5-6. С. 257-262.
3. Рахмонов З.Х., Аллаков И., Абраев Б.Т. Обобщение тернарной проблемы Гольдбаха с почти равными слагаемыми // Bulletin of the Institute of Mathematics. 2023. V. 6. No 4. P.122-148.
4. Рахмонов Д.Д. Асимптотическая формула для специальных коротких тригонометрических сумм с простыми числами в больших дугах // Доклады НАН Таджикистана. 2025. Том 68, № 1-2. С. 11-23.
5. Рахмонов З.Х. Средние значения функций Чебышёва в коротких интервалах // Мат. межд. конф., посв. 175-летию со дня рождения П.Л.Чебышева. Москва, МГУ. 14–19 мая 1996 г. Том 1. С. 48-55.
6. Рахмонов З.Х. Средние значения функции Чебышева в коротких интервалах // ДАН РТ. 1999. Том 42, № 4. С. 14-18.
7. Рахмонов З.Х. О средних значениях функций Чебышёва с экспоненциальным весом в коротких интервалах // Доклады НАН Таджикистана. 2024. Том. 67, № 9-10. С. 413-422.
8. Хайруллоев Ш. А. О вещественных нулях производной функции Харди // Чебышевский сборник. 2021. Том. 22, № 5(81). С. 235-242.
9. Хайруллоев Ш. А. О нулях арифметических рядов Дирихле, не имеющих Эйлерова произведения // Известия Академии наук Республики Таджикистан. Отделение физико-математических, химических, геологических и технических наук. 2018. № 4(173). С. 7-25.

УДК 511

О среднем числе серий решений уравнения Пелля

М. Е. Чанга (Россия, г. Москва)
Московский государственный университет геодезии и картографии
e-mail: maris_changa@mail.ru

On the average number of the Pell equation solution series

M. E. Changa (Russia, Moscow)
Moscow State University of Geodesy and Cartography
e-mail: maris_changa@mail.ru

Уравнением Пелля называется диофантово уравнение вида $x^2 - Dy^2 = C$, где D – натуральное число, не являющееся полным квадратом, а C – ненулевое целое число. При $C = 1$ уравнение Пелля всегда имеет нетривиальные решения, и наименьшее из его положительных решений будем обозначать через (x_*, y_*), и положим $\varepsilon = x_* + y_*\sqrt{D}$. Отметим, что понятие наименьшего положительного решения определено корректно, так как несложно показать, что меньшему значению y соответствует меньшее значение x, а также меньшее значение выражения $x + y\sqrt{D}$.

Два решения (x_1, y_1) и (x_2, y_2) уравнения $x^2 - Dy^2 = C$ назовем эквивалентными, если $x_1 + y_1\sqrt{D} = (x_2 + y_2\sqrt{D})\varepsilon^n$ при некотором целом n. Класс эквивалентных положительных решений уравнения $x^2 - Dy^2 = C$ назовем серией решений. При заданном D число серий решений уравнения Пелля будет функцией C, которую будем обозначать $N(C)$.

Для подсчета числа серий решений удобно пользоваться понятием базового решения. Назовем положительное решение уравнения $x^2 - Dy^2 = C$ базовым, если $x + y\sqrt{D} \leqslant \varepsilon\sqrt{|C|}$. Нетрудно показать (см. [1], предложение 8), что число серий решений $N(C)$ в точности равно количеству базовых решений.

Значения функции $N(C)$ довольно сложным образом зависят от мультипликативной структуры C. Однако среднее значение этой функции допускает простую асимптотику, которая и является основным результатом настоящей работы:

Теорема 1. *При $P \to +\infty$ имеют место асимптотические формулы*

$$\sum_{C=1}^{P} N(C) = \frac{P\ln\varepsilon}{2\sqrt{D}} + O(\sqrt{P}),$$

$$\sum_{C=-P}^{-1} N(C) = \frac{P\ln\varepsilon}{2\sqrt{D}} + O(\sqrt{P}).$$

Такого рода асимптотические формулы и рассуждения, обосновывающие их, применялись Дирихле при доказательстве формулы для числа классов (см. [2], пункт 6). Основная идея здесь заключается в сведении рассматриваемой задачи к подсчету числа целых точек в некоторой области. Целью же данной работы является применение этого подхода конкретно к уравнению Пелля и функции $N(C)$.

Коэффициент при P в главном члене как раз и представляет собой среднее количество серий решений уравнения $x^2 - Dy^2 = C$ при заданном D. Разумеется, оценку остаточного члена можно существенно улучшить, применяя метод тригонометрических сумм обычным для задач о подсчете числа целых точек в областях образом.

Доказательство.

Пусть $C > 0$ и (x, y) – положительное решение уравнения $x^2 - Dy^2 = C$. Тогда

$$x + y\sqrt{D} \leqslant \varepsilon\sqrt{C} \quad \Leftrightarrow \quad y \leqslant y_*\sqrt{C}.$$

Действительно, учитывая положительность переменных, из уравнения Пелля заключаем, что неравенство $y \leqslant y_*\sqrt{C}$ влечет неравенство $x \leqslant x_*\sqrt{C}$. Складывая оба неравенства, получим требуемое. Обратно, если $x + y\sqrt{D} \leqslant \varepsilon\sqrt{C}$, то

$$x - y\sqrt{D} = \frac{C}{x + y\sqrt{D}} \geqslant \frac{\sqrt{C}}{\varepsilon} = (x_* - y_*\sqrt{D})\sqrt{C},$$

откуда, вычитая эти неравенства друг из друга, получим требуемое.

Базовые решения уравнения $x^2 - Dy^2 = C$ суть точки с натуральными координатами, лежащие на гиперболе $x^2 - Dy^2 = C$ и притом не выше прямой $yx_* = xy_*$. В самом деле, как легко проверить, точка пересечения указанных гиперболы и прямой имеет координаты $(x_*\sqrt{C}, y_*\sqrt{C})$, поэтому условие $y \leqslant y_*\sqrt{C}$, выделяющее базовые решения, равносильно тому, что точка (x, y) гиперболы находится не выше указанной прямой. Таким образом, величина, стоящая в левой части асимптотической формулы, в точности равна числу точек с натуральными координатами в области, ограниченной осью абсцисс, прямой $yx_* = xy_*$ и гиперболой $x^2 - Dy^2 = P$. Действительно, любая точка, отвечающая базовому решению уравнения $x^2 - Dy^2 = C$ с $C \leqslant P$, принадлежит указанной области, и обратно, любая точка с натуральными координатами, лежащая в указанной области, отвечает базовому решению уравнения $x^2 - Dy^2 = C$ с соответствующим $C \leqslant P$.

Вычислим площадь S указанной области. Имеем

$$S = \int\limits_0^{y_*\sqrt{P}} \left(\sqrt{Dy^2 + P} - \frac{yx_*}{y_*}\right) dy = \int\limits_0^{y_*\sqrt{P}} \sqrt{Dy^2 + P}\, dy - \frac{Px_*y_*}{2},$$

откуда, обозначая интеграл в правой части через I и интегрируя по частям, найдем

$$I = y\sqrt{Dy^2 + P}\,\Big|_0^{y_*\sqrt{P}} - \int\limits_0^{y_*\sqrt{P}} \frac{Dy^2}{\sqrt{Dy^2 + P}}\, dy = Px_*y_* - I + \int\limits_0^{y_*\sqrt{P}} \frac{P}{\sqrt{Dy^2 + P}}\, dy.$$

Перенося I влево и вычисляя оставшийся табличный интеграл, получим

$$I = \frac{Px_*y_*}{2} + \frac{P}{2\sqrt{D}} \ln\left(y\sqrt{D} + \sqrt{Dy^2 + P}\right)\Big|_0^{y_*\sqrt{P}} = \frac{Px_*y_*}{2} + \frac{P}{2\sqrt{D}} \ln(x_* + y_*\sqrt{D}).$$

Подставляя найденное значение интеграла в первое равенство этого абзаца, находим для площади рассматриваемой области выражение

$$S = \frac{P \ln \varepsilon}{2\sqrt{D}}.$$

Оценим теперь ошибку, возникающую при замене количества точек с натуральными координатами, лежащих в области, ограниченной осью абсцисс, прямой $yx_* = xy_*$ и гиперболой $x^2 - Dy^2 = P$, на площадь S этой области. Разобьем координатную плоскость на квадратные клетки единичной площади с вершинами в целых точках. Тогда упомянутое число точек будет равно площади ступенчатой фигуры, состоящей из тех клеток, правый верхний угол которых принадлежит рассматриваемой области. Очевидно, разность площадей области и ступенчатой фигуры по абсолютной величине не превосходит числа клеток координатной плоскости, пересекаемых границей области, за исключением отрезка оси абсцисс. Поскольку угловой коэффициент y_*/x_* нашей прямой меньше единицы, то на каждом единичном промежутке по оси абсцисс прямая пересечет не больше двух клеток, а значит количество пересекаемых ее отрезком клеток есть $O(\sqrt{P})$. С другой стороны, задающая гиперболу функция $x(y)$ имеет производную

$$x'(y) = \left(\sqrt{Dy^2 + P}\right)' = \frac{Dy}{\sqrt{Dy^2 + P}},$$

которая ограничена не зависящей от P величиной $\sqrt{D}$, а значит на каждом единичном промежутке по оси ординат гипербола также пересечет не больше соответствующего фиксированного числа клеток координатной плоскости. Следовательно, количество клеток, пересекаемых участком гиперболы, также есть $O(\sqrt{P})$. Тем самым мы доказали первую из асимптотических формул теоремы.

Вторая асимптотическая формула доказывается аналогично. Пусть $C < 0$ и (x, y) – положительное решение уравнения $x^2 - Dy^2 = C$. Тогда аналогично предыдущему имеем

$$x + y\sqrt{D} \leqslant \varepsilon\sqrt{|C|} \quad \Leftrightarrow \quad x \leqslant y_*\sqrt{D|C|}.$$

Используя это условие, убеждаемся в том, что базовые решения уравнения $x^2 - Dy^2 = C$ суть точки с натуральными координатами, лежащие на гиперболе $x^2 - Dy^2 = C$ и притом не правее прямой $xx_* = Dyy_*$. Таким образом, величина в левой части второй асимптотической формулы равна числу точек с натуральными координатами в области, ограниченной осью ординат, прямой $xx_* = Dyy_*$ и гиперболой $x^2 - Dy^2 = -P$. Площадь указанной области равна

$$S = \int\limits_0^{y_*\sqrt{DP}} \left(\sqrt{\frac{x^2 + P}{D}} - \frac{xx_*}{Dy_*}\right) dx = \frac{P \ln \varepsilon}{2\sqrt{D}},$$

а оценка ошибки при замене числа целых точек в области ее площадью проводится аналогично предыдущему, что и завершает доказательство. □

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Чанга М. Е. О нахождении решений уравнения Пелля с правой частью ±2 с помощью цепных дробей // Математические заметки (*в печати*).

2. Дэвенпорт Г. Мультипликативная теория чисел. — М.: Наука, 1971. 200 с.

Секция 6. Диофантовы приближения и теория трансцендентных чисел

УДК 511.42

Распределения p-адических алгебраических чисел с заданной высотой

Д. В. Васильев (Беларусь, г. Минск)
Институт математики НАН Беларуси
e-mail: vasilyev@im.bas-net.by
Н. И. Калоша (Беларусь, г. Минск)
Институт математики НАН Беларуси
e-mail: kalosha@im.bas-net.by
М. В. Ламчановская (Беларусь, г. Минск)
Военная академия Республики Беларусь
e-mail: lammv@mail.ru

Distributions of p-adic algebraic numbers with a given height

D. V. Vasilyev (Belarus, Minsk)
Institute of Mathematics of the NAS of Belarus
e-mail: vasilyev@im.bas-net.by
N. I. Kalosha (Belarus, Minsk)
Institute of Mathematics of the NAS of Belarus
e-mail: kalosha@im.bas-net.by
M. V. Lamchanovskaya (Belarus, Minsk)
Military Academy of the Republic of Belarus
e-mail: lammv@mail.ru

При решении задачи о распределении алгебраических чисел полезными оказываются теоремы из теории трансцендентных чисел [1] и метрической теории диофантовых приближений [2], в частности обобщение леммы Гельфонда на значения целочисленных полиномов в малых по мере Лебега интервалах [3].

Лемма 1. *Пусть $\delta > 0$ — некоторое действительное число, s — натуральное, $Q = Q(\delta, s)$ – достаточно большое действительное число. Пусть далее $P_1(x), P_2(x) \in \mathbb{Z}[x]$ — два взаимно простых многочлена,*

$$\max\left(H\left(P_1\right), H\left(P_2\right)\right) = Q^{\mu}, \quad \deg P_1(x) \leqslant s, \quad \deg P_2(x) \leqslant s. \tag{1}$$

Тогда, если для всех ω из некоторого интервала $I \subset (-s, s)$, $|I| = Q^{-\eta}$, $\eta > 0$, выполняются неравенства

$$\begin{gathered} \max\left(\left|P_1(\omega)\right|, \left|P_2(\omega)\right|\right) < Q^{-\tau}, \qquad \tau > 0, \\ \tau + \mu + 2\max\left(\tau + \mu - \eta, 0\right) < 2\mu s + \delta. \end{gathered} \tag{2}$$

Мы обобщаем лемму 1 на цилиндры в $\mathbb{Q}_p$. Это обобщение позволяет оценивать количество целочисленных полиномов $P(x)$ степени $\deg P(x) \leqslant n$ и высоты $H(P) \leqslant Q$, дискриминанты которых делятся на степени простых чисел p и q.

Лемма 2. *Если в двух непересекающихся цилиндрах $K_1 \subset \mathbb{Q}_p$, $K_2 \subset \mathbb{Q}_p$ мерой Хаара $\mu K_1 = Q^{-s_1}$, $\mu K_2 = Q^{-s_2}$ выполняются неравенства*

$$\max\left(|P_1(\omega)|_p, |P_2(\omega)|_p\right) < Q^{-\tau_1}, \quad \max\left(|P_1(\omega)|_q, |P_2(\omega)|_q\right) < Q^{-\tau_2}, \quad \tau_1 > 0,\ \tau_2 > 0, \tag{3}$$

то для полиномов $P_1(\omega)$, $P_2(\omega)$ без общих корней при $Q > Q_0(\delta)$ верно неравенство

$$\tau_1 + \tau_2 + 2\max(\tau_1 - s_1, 0) + 2\max(\tau_2 - s_2, 0) < 2n + \delta. \tag{4}$$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гельфонд А. О. Трансцендентные и алгебраические числа. — Москва: Гостехиздат, 1952. 224 с.
2. Beresnevich V., Bernik V., Götze F. Integral polynomials with small discriminants and resultants // Advances in Mathematics. 2016. Vol. 298. P. 393–412.
3. Bernik V. An application of Hausdorff dimension in the theory of Diophantine Approximation // Acta Arith. 1983. Vol. 42. P. 219–253.

УДК 511.32

Об оценке числа приводимых полиномов с целыми коэффициентами фиксированной степени и высоты

Д. В. Васильев (Беларусь, г. Минск)
Институт математики НАН Беларуси
e-mail: vasilyev@im.bas-net.by
Е. В. Сурай (Беларусь, г. Минск)
Институт математики НАН Беларуси
e-mail: suraylena@mail.ru

On the estimate of the number of reducible polynomials with integer coefficients of fixed degree and height

D. V. Vasilyev (Belarus, Minsk)
Institute of Mathematics, NAS of Belarus
e-mail: vasilyev@im.bas-net.by
E. V. Suray (Belarus, Minsk)
Institute of Mathematics, NAS of Belarus
e-mail: suraylena@mail.ru

При исследовании распределения алгебраических чисел заданной степени и высоты, а также для получения оценок количества многочленов с ограничениями на дискриминант иногда необходимо оценить количество приводимых многочленов с заданными ограничениями на их высоту, что и сделано в предложении 1.

Рассмотрим полиномы с целыми коэффициентами фиксированной степени $n \geqslant 2$ и высоты $H(P)$, ограниченной некоторым натуральным числом Q:

$$P_n(Q) = \{P(x) \in \mathbb{Z}[x] : \deg P(x) = n,\ H(P) \leqslant Q\}$$

Обозначим через $R_n(Q)$ подмножество приводимых над $\mathbb{Z}$ полиномов из $P_n(Q)$. Далее знак # будет обозначать число элементов в конечном множестве.

Предложение 1. *Для $n \geqslant 3$ справедлива оценка*

$$\#R_n(Q) \leqslant c(n)Q^n,$$

где $c(n)$ — некоторая величина, зависящая лишь от степени n рассматриваемых полиномов. Эта оценка является точной, в смысле порядка роста относительно Q.

Для $n = 2$

$$\#R_2(Q) \leqslant c\,Q^2\ \log Q,$$

и эта оценка также является точной по порядку.

Если $P(x) \in R_n(Q)$ — приводимый многочлен, то

$$\exists\, t_1(x), t_2(x) \in \mathbb{Z}[x]:\ P(x) = t_1(x)t_2(x),\ H(t_1t_2) \leqslant Q.$$

Доказательство предложения 1 основано на использовании известной леммы (см.[1, 26], Лемма 8, а также [2]), согласно которой

$$H(t_1t_2) > c(n)H(t_1)H(t_2).$$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Спринджук В. Г. Проблема Малера в метрической теории чисел. — Минск: Наука и техника, 1967. 184 с.

2. Bernik V. I., Dodson M. M. Metric Diophantine approximation on manifolds. - Cambridge: Cambridge University Press, 1999. 172 p.

УДК 511.36

Об алгебраической независимости функций, являющихся интегралами от произведений гипергеометрических[1]

В.А. Горелов (Россия, г. Москва)
Национальный исследовательский университет «МЭИ»
e-mail: gorelov.va@mail.ru

On algebraic properties of functions associated with hypergeometric functions

V. A. Gorelov (Russia, Moscow)
National Research University "Moscow Power Engineering Institute"
e-mail: gorelov.va@mail.ru

Метод Зигеля — Шидловского (см. [1]), остающийся одним из основных методов теории трансцендентных чисел, позволяет устанавливать трансцендентность и алгебраическую независимость значений т.н. E-функций при алгебраических значениях аргумента. Для применения этого метода необходимо выяснение алгебраических свойств рассматриваемых функций.

[1]Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект 24-21-00196).

За последние годы автором проведены исследования (см., например, [2], [3]) E-функций, получающихся из гипергеометрических, степенных и показательных с помощью умножения и интегрирования.

В частности, были рассмотрены (см. [3]) функции

$$V_{\lambda,\nu,\alpha}(z) = \nu z^{-\nu} e^{\alpha z} \int^z t^{\nu-1} e^{-\alpha t} \varphi_\lambda(t) dt =$$

$$= 1 + \left(\alpha + \frac{\nu}{\lambda+1}\right) \frac{z}{\nu+1} + \ldots,$$

$\alpha \in \mathbb{C},\ \lambda, \nu \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}_{<0}$, удовлетворяющие уравнениям

$$y'' + \left(-\alpha - 1 + \frac{\lambda+\nu+1}{z}\right) y' + \left(\alpha - \frac{\nu + (\lambda+1)\alpha}{z} + \frac{\lambda\nu}{z^2}\right) y = \frac{\lambda\nu}{z^2},$$

где $\varphi_\lambda(z)$ — функция, введённая А.Б. Шидловским,

$$\varphi_\lambda(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{(\lambda+1)\ldots(\lambda+n)} = \lambda z^{-\lambda} e^z \int^z t^{\lambda-1} e^{-t} dt.$$

Найдены все случаи выражения функции $V_{\lambda,\nu,\alpha}(z)$ в виде многочлена от показательных функций и функций вида $\varphi_{\lambda_j}(\alpha_j z)$, а также получены необходимые и достаточные условия алгебраической зависимости функций $V_{\lambda,\nu,\alpha}(z),\ V'_{\lambda,\nu,\alpha}(z)$ над $\mathbb{C}(z)$. Возникающие при этом алгебраические тождества получены в явном виде (см. [3]).

В настоящее время этот результат обобщён автором на случай совокупности функций $V_{\lambda,\nu,\alpha}(\xi z)$ при различных значениях параметров $\lambda, \nu, \alpha, \xi$. Доказана следующая

Теорема. *Пусть $\lambda_i, \nu_i \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}_{<0},\ \ \alpha_i \in \mathbb{C},\ \ \xi_i \in \mathbb{C} \setminus \{0\},\ \ i = 1, \ldots, m,\ \ \mu_k \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$, $\gamma_k \in \mathbb{C} \setminus \{0\},\ \ k = 1, \ldots, n,\ \ \mu_k - \mu_l \notin \mathbb{Z}$ при $\gamma_k = \gamma_l,\ \ k \neq l$; числа $\beta_1, \ldots, \beta_p$, а также $\zeta_1, \ldots, \zeta_q$ принадлежат $\mathbb{C}$ и линейно независимы над $\mathbb{Q}$, $\zeta_1 \in \mathbb{Q},\ \ m, q \in \mathbb{N},\ \ n, p \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$. Тогда для алгебраической зависимости $2m+n+p+q$ функций*

$$\begin{gathered} V_{\lambda_1,\nu_1,\alpha_1}(\xi_1 z), V'_{\lambda_1,\nu_1,\alpha_1}(\xi_1 z), \ldots, V_{\lambda_m,\nu_m,\alpha_m}(\xi_m z), V'_{\lambda_m,\nu_m,\alpha_m}(\xi_m z), \\ \varphi_{\mu_1}(\gamma_1 z), \ldots, \varphi_{\mu_n}(\gamma_n z),\ e^{\beta_1 z}, \ldots, e^{\beta_p z},\ z^{\zeta_1}, \ldots, z^{\zeta_q}, \end{gathered} \tag{1}$$

над $\mathbb{C}$ необходимо и достаточно выполнения хотя бы одного из следующих условий:

1. $\nu_i = 0$, либо $\lambda_i \in \mathbb{Z},\ \xi_i \in \mathbb{L}\{\beta_1, \ldots, \beta_p\}$, либо $\lambda_i \in \mathbb{Z},\ \nu_i \in \mathbb{Z}_{>\lambda},\ \xi_i \in \mathbb{L}\{\alpha_i\xi_i, \beta_1, \ldots, \beta_p\}$, либо $\lambda_i \in \mathbb{Z},\ \nu_i - \mu_j \in \mathbb{Z},\ \nu_i - \mu_k \in \mathbb{Z},\ \alpha_i\xi_i = \gamma_j,\ (\alpha_i - 1)\xi_i = \gamma_k$, либо $\lambda_i - \mu_j \in \mathbb{Z},\ \xi_i = \gamma_j$ для некоторых $1 \leqslant i \leqslant m,\ j, k \in \{1, \ldots, n\}$.

2. $\lambda_i = 0,\ \alpha_i = 1$, либо $\lambda_i - \nu_i \in \mathbb{Z} \setminus \{0\},\ \alpha_i = 1$, либо $\lambda_i \neq \nu_i,\ \nu_i \in \mathbb{Z},\ \alpha_i = 1$, $\xi_i \in \mathbb{L}\{\beta_1, \ldots, \beta_p\}$, либо $\lambda_i \neq \nu_i,\ \alpha_i = 1,\ \nu_i - \mu_k \in \mathbb{Z},\ \xi_i = \gamma_k$, для некоторых $1 \leqslant i \leqslant m$, $1 \leqslant k \leqslant n$.

3. $\nu_i - \lambda_i = k \in \mathbb{N},\ \alpha_i \neq 1$ и либо

$$\lambda_i \sum_{n=0}^{k-1} \frac{(1-k)_n\ \alpha^{n+1}}{(2-\lambda_i-k)_n\ (\alpha-1)^n} = 0, \quad k \geqslant 2,$$

либо $\lambda_i - \mu_j \in \mathbb{Z},\ \alpha_i\xi_i = \gamma_j$ для некоторых $1 \leqslant i \leqslant m,\ 1 \leqslant j \leqslant n$.

4. $\lambda_i - \lambda_l \in \mathbb{Z},\ \xi_i = \xi_l$, либо $\lambda_i, \lambda_l \in \mathbb{Z},\ \xi_l \in \mathbb{L}\{\xi_i, \beta_1, \ldots, \beta_p\}$ для некоторых $1 \leqslant i < l \leqslant m$.

5. $\lambda_i \neq \nu_i,\ \lambda_l \neq \nu_l,\ \alpha_i = \alpha_l = 1$ и либо $\nu_i, \nu_l \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0},\ \xi_l \in \mathbb{L}\{\xi_i,\ \beta_1, \ldots, \beta_p\}$, либо $\nu_i - \nu_l \in \mathbb{Z}$, $\xi_i = \xi_l$ для некоторых $1 \leqslant i < l \leqslant m$.

6. $\lambda_i + \lambda_l = \nu_i = \nu_l,\ \xi_i + \xi_l = \xi_i\alpha_i = \xi_l\alpha_l$ для некоторых $i, l \in \{1, \ldots, m\}$.

7. $\lambda_i + \lambda_l - \nu_i = r \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$, $\nu_l - \nu_i = s \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$, $\xi_i + \xi_l = \xi_i\alpha_i = \xi_l\alpha_l$ *и либо* $\nu_i \in \mathbb{Z}$, $\xi_i + \xi_l \in \mathbb{L}\{\beta_1, \ldots, \beta_p\}$, *либо* $\nu_i - \mu_k \in \mathbb{Z}$, $\xi_i + \xi_l = \gamma_k$, $1 \leqslant k \leqslant n$, *либо при* $r > 0$

$$\alpha_i\lambda_i\lambda_l \sum_{k=1}^{r} \frac{(1-\lambda_i)_{r-k}\,(1-\lambda_l)_{k-1}}{(\alpha_i-1)^k} -$$

$$-\lambda_i\lambda_l \sum_{k=0}^{\omega-1} \frac{(\nu_i)_k\,(1-\lambda_i)_{r-k-1}}{\alpha_l^k\,(1-\alpha_l)^{-k}} + (-1)^r\lambda_l \sum_{k=\omega}^{s-1} \frac{(\nu_i)_k\,(\alpha_l-1)^k}{(\lambda_i+1)_{k-r}\,\alpha_l^k} = 0,$$

$\omega = \min(r, s)$, *а при* $r < 0$

$$\alpha_i \sum_{k=0}^{-r-1} \frac{(r-\lambda_i+1)_k}{(\lambda_l+1)_k\,(1-\alpha_i)^{-k}} + \lambda_l \sum_{k=0}^{s-1} \frac{(\nu_i)_k\,(\alpha_l-1)^k}{(\lambda_i-r)_{k+1}\,\alpha_l^k} = 0,$$

для некоторых $i, l \in \{1, \ldots, m\}$.

Пустые суммы везде полагаем равными нулю.

При нарушении любого из условий сформулированной теоремы между функциями (1) возникают алгебраические тождества, которые можно найти в явном виде.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Шидловский А. Б. Трансцендентные числа. – М: Наука, 1987. 448 с.
2. Горелов В. А. Об алгебраических свойствах интегралов от произведений некоторых гипергеометрических функций // Матем. заметки. 2024. Т. 115, вып. 2. С. 208 - 218.
3. Горелов В. А. Об алгебраических свойствах функций, связанных с гипергеометрическими // Матем. заметки. 2025. Т. 117, вып. 3. С. 365 - 374.

УДК 511.32

Применение почти полиадических чисел к построению псевдослучайных последовательностей

В. Ю. Матвеев (Россия, г. Москва)
Российская академия народного хозяйства и государственной службы при Президенте Российской Федерации
e-mail: salomaa@mail.ru

Applying almost polyadic numbers to the construction of pseudorandom sequences

V. Y. Matveev (Russia, Moscow)
The Russian Presidential Academy of National Economy and Public Administration
e-mail: salomaa@mail.ru

Рассмотрим функциональные ряды вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\lambda)_n z^n,$$

где $(\lambda)_0 = 1$, $(\lambda)_n = \lambda(\lambda+1)\dots(\lambda+n-1)$,т.е. $(\lambda)_n$–символ Похгаммера, а λ – рациональное число. Эти ряды, отличные от многочленов, имеют нулевой радиус сходимости в поле комплексных чисел, однако они имеют радиусы сходимости, большие 1 в любом поле p – адических чисел, кроме конечного числа полей p – адических чисел, тех, в которых p входит в знаменатель несократимой дроби λ. Будем считать, что $\lambda_i = \frac{a_i}{b_i}$, $i = 1, \dots, m$, где a_i, b_i –натуральные числа, Н.О.Д. $(a_i, b_i) = 1$, $i = 1, \dots, m$ и $\lambda_i - \lambda_j \notin Z$ при $i \neq j$. Можно доказать, что при этих условиях ряды $\sum_{n=0}^{\infty} (\lambda_i)_n (b_i z)^n$, $i = 1, \dots, m$, алгебраически независимы над полем рациональных функций от z [1]. Из этого следует бесконечная алгебраическая независимость полиадических чисел $\sum_{n=0}^{\infty} (\lambda_i)_n (b_i)^n$, $i = 1, \dots, m$. [2] Термин «бесконечная алгебраическая независимость» требует пояснения. Совокупности значений, принимаемых этими рядами в полях p – адических чисел, можно рассматривать, как бесконечномерные векторы. Операции сложения и умножения этих векторов определяются покоординатно. Это позволяет определить значение многочлена с целыми коэффициентами от таких векторов. Совокупность таких векторов называется бесконечно алгебраически независимой, если для любого многочлена с целыми коэффициентами, отличного от нулевого многочлена, существует бесконечное множество простых чисел p таких, что при подстановке в этот многочлен значений рассматриваемых рядов в поле p – адических чисел получается ненулевое p – адическое число. Отметим, что из бесконечной трансцендентности не следует хотя бы иррациональность суммы рассматриваемого ряда в конкретном поле p – адических чисел.

Цифры разложений частичных сумм $\sum_{n=0}^{N} (\lambda_i)_n (b_i)^n$, $i = 1, \dots, m$ рассматриваемых рядов обладают неплохими статистическими свойствами. В статье описаны результаты проведённых экспериментов.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Матвеев В. Ю. Бесконечная алгебраическая независимость некоторых почти полиадических чисел. Чебышевский сборник. 2024;25(3):365–37

2. Chirskii V. G. Product formula, global relations and polyadic integers. // Russian Journal of Mathematical Physics,2019, том 26, №3, с. 286–305

УДК 511.4

Расстояния в последовательностях Кронекера и наилучшие диофантовы приближения

А. В. Шутов (Россия, г. Владимир)
Владимирский государственный университет
e-mail: a1981@mail.ru

Distances in Kronecker sequences and best Diophantine approximations

A. V. Shutov (Russia, Vladimir)
Vladimir State University
e-mail: a1981@mail.ru

Пусть $\alpha \in \mathbb{R}^d \setminus \mathbb{Q}^d$ и $dist(\cdot,\cdot)$ – метрика на торе $\mathbb{T}^d = \mathbb{R}^d/\mathbb{Z}^d$, индуцированная некоторой нормой $|\cdot|$ пространства $\mathbb{R}^d$. Пусть

$$D_q(N) = \min\{dist(q\alpha \bmod \mathbb{Z}^d, k\alpha \bmod \mathbb{Z}^d), 0 \le k \le N, k \ne q\}.$$

Другими словами, мы рассматриваем последовательности Кронекера $\{k\alpha \bmod \mathbb{Z}^d\}_{k=0}^n$ и $D_q(N)$ измеряет возможные кратчайшие расстояния между точками данной последовательности.

Пусть

$$g_{dist}(\alpha, N) = \sharp\{D_q(N) : 0 \le q \le N\}$$

– число различных $D_q(N)$ среди всех значений $D_q(N), 0 \le q \le N$. Пусть также

$$g_{dist}(\alpha) = \sup_N g_{dist}(\alpha, N).$$

В случае норм L^2 и L^∞ мы, для краткости, будем обозначать соответствующие значения g_{dist} через g_2 и g_∞. Мы интересуемся результатами вида

$$g_{dist}(\alpha) \le C_{dist}(d)$$

для любого $\alpha \in \mathbb{R}^d \setminus \mathbb{Q}^d$. Данная постановка задачи была введена Шевалле [1] в качестве многомерного обобщения знаменитой теоремы о трех расстояниях. В настоящее время стали также рассматриваться величины

$$\overline{g}_{dist}(\alpha) = \limsup_{N\to\infty} g_{dist}(\alpha, N)$$

и

$$\underline{g}_{dist}(\alpha) = \liminf_{N\to\infty} g_{dist}(\alpha, N).$$

Мы предлагаем некоторый подход к изучению $g_{dist}(\alpha)$, $\overline{g}_{dist}(\alpha)$ и $\underline{g}_{dist}(\alpha)$, основанный на изучении наилучших диофантовых приближений.

Последовательность $\{q_n\}$ наилучших диофантовых приближений для α и метрики $dist$ может быть определена индуктивно следующим образом:

$$q_1 = 1, \quad q_{n+1} = \min\{q > q_n : dist(0, q\alpha \bmod \mathbb{Z}^d) < dist(0, q_n\alpha \bmod \mathbb{Z}^d)\}.$$

Предложение 1. *Пусть существует T такое, что*

$$q_{n+T} \ge 2q_n$$

для всех n. Тогда

$$g_{dist}(\alpha) \le T + 1.$$

Применение данного утверждения в сочетании с известными результатами о наилучших диофантовых приближениях из работ [2]–[4] позволило получить новые доказательства наилучших известных на данный момент оценок $g_2(\alpha)$ и $g_\infty(\alpha)$ из работ [5],[6].

Теорема 1. *Для любого d*

$$g_\infty(\alpha) \le 2^d + 1.$$

Теорема 2. *Для $d = 2$*

$$g_2(\alpha) \le 5.$$

Теорема 3. *Пусть K – контактное число единичного шара (относительно нормы $|\cdot|$, индуцировавшей метрику $dist(\cdot,\cdot)$), то есть*

$$K = \max\{m : \exists x_1, \ldots, x_m \in \mathbb{R}^d, |x_j| = 1, |x_j - x_k| \geq 1, 1 \leq j < k \leq m\}.$$

Тогда

$$g_{dist}(\alpha) \leq K + 1$$

Следствие 1. *Для $d = 3$*

$$g_2(\alpha) \leq 13.$$

Предложение 2. *Пусть существует T такое, что*

$$q_{n+T} \geq 2q_n$$

для бесконечно многих n. Тогда

$$\underline{g}_{dist}(\alpha) \leq T.$$

В качестве следствия получаем следующие новые результаты.

Теорема 4. *Для $d = 2$*

$$\underline{g}_2(\alpha) \leq 4$$

и

$$\underline{g}_\infty(\alpha) \leq 3.$$

Теорема 5. *Для произвольного d и произвольной метрики, индуцированной нормой в $\mathbb{R}^d$ с контактным числом K*

$$\underline{g}_{dist}(\alpha) \leq K.$$

В случае L^∞-нормы

$$\underline{g}_\infty(\alpha) \leq 2^d.$$

Применяя более сложную технику из теории диофантовых приближений, удается также доказать следующий результат.

Теорема 6. *Для произвольного d, произвольной метрики, индуцированной нормой в $\mathbb{R}^d$, для почти всех α*

$$\underline{g}_\infty(\alpha) = 1.$$

Отметим также следующий одномерный результат.

Теорема 7. *Пусть $d = 1$ и $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Тогда*

$$\overline{g}(\alpha) = \begin{cases} 3, & a_n = 1 \text{ бесконечно много раз }, \\ 2, & \text{иначе.} \end{cases}$$

и

$$\underline{g}(\alpha) = \begin{cases} 2, & \alpha \sim \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \\ 1, & \text{иначе.} \end{cases}.$$

Возможно также движение в обратном направлении: от расстояний в последовательности Кронекера к наилучшим диофантовым приближениям.

Предложение 3. *Пусть $g_{dist}(\beta, N) = T$ для некоторого $\beta \in \mathbb{R}^d$ и некоторого N. Тогда для почти всех α*

$$q_{n+T-2} < 2q_n$$

для бесконечно многих n.

Многочисленные результаты численного характера о $g_{dist}(\beta, N) = T$ можно найти в работе [7]. Приведем только одно следствие из его результатов.

Теорема 8. *Для почти всех $\alpha \in \mathbb{R}^d$ наилучшие диофантовы приближения в L^∞-норме удовлетворяют неравенству*

$$q_{n+2^{d-1}-1} < 2q_n$$

для бесконечно многих n.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Chevallier N. Distances dans la suite des multiples d'un point du tore à deux dimensions // Acta Arithmetica. 1996. Vol. 74, № 1. P. 47-59.

2. Lagarias J. C. Best simultaneous Diophantine approximations, I: Growth rates of best approximation denominators // Trans. Amer. Math. Soc. 1982. Vol. 272,№ 2. P. 545-554.

3. Мощевитин Н. Г. О наилучших двумерных совместных диофантовых приближениях в sup-норме // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех. 2005. № 6. С. 50-53.

4. Романов М. В. Совместные двумерные наилучшие диофантовы приближения в евклидовой норме // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех. 2006. № 2. С. 49-52.

5. Haynes A., Marklof J. A five distance theorem for Kronecker sequences // Int. Math. Res. Not. 2022. Vol 2022,№ 24. P. 19747–19789.

6. Haynes A., Ramirez J. J. Higher-dimensional gap theorems for the maximum metric // Int. J. Number Theory. 2021. Vol. 17,№ 7. P. 1665–1670.

7. Dettmann C. P. Kronecker sequences with many distances // Exp. Math. (published online April 2024). Режим доступа: https://www.tandfonline.com/doi/full/10.1080/10586458.2024.2340742

Секция 7. Дискретная геометрия и геометрия чисел

УДК 519.1

Граф чётностей цепной дроби и его надрграф

М. М. Галламов (Россия, г. Москва)
gallamovj@gmail.com

The parity graph of a continued fraction and its overgraph

M. M. Gallamov (Russia, Moscow)
gallamovj@gmail.com

Все построения в данной работе справедливы, как конечной, так и бесконечной дроби $\alpha = [a_0; a_1, a_2, , \ldots]$.

1. Граф чётностей цепной дроби α

Подходящие дробь $\alpha_n = \frac{p_n}{q_n} = [a_0; a_1, \ldots, a_n]$ порядка n цепных дробей $[a_0; a_1\ \ldots]$, задаются через рекуррентные формулы:

$$\begin{gathered} p_n = a_n p_{n-1} + p_{n-2},\ q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2},\ n, a_0 \in \mathbb{N}_0; \\ p_{-2} = 0,\ q_{-2} = 1,\ p_{-1} = 1,\ q_{-1} = 0 - \textit{начальные условия}, \end{gathered} \tag{1}$$

где $\mathbb{N}_0 = \{0\} \cup \mathbb{N}$, $\mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$, $a_n, p_n, q_n \in \mathbb{N}$.

При построении метода решения задачи С. В. Конягина о шахматной раскраске существенную роль играют четности компонент q_n и p_n пары $(q_n; p_n)$, см. [1]. В связи с чем введём обозначения: если q_n и p_n нечетные, то это зашептав q_n^- и p_n^-, а для четных – q_n^+ и p_n^+. Отметим, что четности $q_n^\pm$ и $p_n^\pm$ определяются четностями элементов $a_n^\pm$ в силу (1). Так как такие чётности нам нужны при любых значениях чётностей $a_n^\pm$, это удобно отражать на графе в виде бинарного дерева. Такой граф назовём *графом чётностей цепной дроби*

Вершинами графа чётностей есть пары $(q_n^\pm; p_n^\pm)$, $n \in \mathbb{N}_{-2} = \{-2, -1\} \cup \mathbb{N}_0$, а каждое ребро — направленный отрезок с весом $a_n^\pm$, $n \in \mathbb{N}_0$, за исключением первого ребра без веса в виде отрезка, соединяющего первую и вторую вершины $(q_{-2}^-; p_{-2}^+)$ и $(q_{-1}^+; p_{-1}^-)$, которые нам дают начальные условия из (1). Далее из каждой вершины $(q_n^\pm; p_n^\pm)$ исходят два направленных ребра – левое с весом a_n^-, правое с весом a_n^+, $n \in \mathbb{N}_0$. Вследствие чего вершину $(q_n^\pm; p_n^\pm)$ назовём *исходящей* и обозначим через $(q_n^\pm; p_n^\pm)^O$, а вершину, в которое входит левое ребро – *левой входящей*, а другую вершину – *правой входящей*. Левая входящая вершин $(q_{n+1}^\pm; p_{n+1}^\pm)^L$ получается из (1) при $a_n = a_n^-$, а правая входящая вершина $(q_{n+1}^\pm; p_{n+1}^\pm)^R$ – также из (1) при $a_n = a_n^+$. Полученные таким способом вершины различны относительно четности компонент, ибо при их вычислении в формуле (1) значения $p_{n-1}^\pm$, $p_{n-2}^\pm$, $q_{n-1}^\pm$, $q_{n-2}^\pm$ одни и те же (выбор плюса или минуса определяется конкретным выбором n), переменной служит только элемент a_n, равный либо a_n^-, либо a_n^+. Изложенный способ построения полностью описывает граф четности цепной дроби $[a_0; a_1\ \ldots]$, при произвольно выбранных элементах $a_0 \in \mathbb{N}_0$, $a_n \in \mathbb{N}$. Если элементы цепной дроби зафиксированы, то мы поучаем путь, который начинается в $(q_{-2}^- p_{-2}^+;)$, а далее из $(q_{-1}^+; p_{-1}^-)$ определяется направлением стрелок, задаваемых четностью соответствующего элемента фиксированной цепной дроби.

В дальнейшем различие чисел, у которых указывается четность с помощью верхнего индекса плюс или минус, рассматривается только относительно четности этих чисел. По этой причине пары считаются равным $(q_n^{\pm};p_n^{\pm})$ и $(q_m^{\pm};p_m^{\pm})$, если их соответствующие компоненты имеют одинаковую чётность, что будем записывать в виде: $(q_n^{\pm};p_n^{\pm})=(q_m^{\pm};p_m^{\pm})$. В связи с чем удобно ввести обозначения такого сорта $(\pm;\pm)_n$ вместо $(q_n^{\pm};p_n^{\pm})$, причем пара $(+;+)_n$ исключается в силу взаимной простоты чисел q_n и p_n.

Так как первые две вершины: $(-;+)_{-2}$ и $(+;-)_{-2}$ различны, то исходящая вершина $(\pm;\pm)_n^O$ и две входящие $(\pm;\pm)_{n+1}^L$, $(\pm;\pm)_{n+1}^R$ попарно различны. Тройку вершин $(\pm;\pm)_n^O$, $(\pm;\pm)_{n+1}^L$, $(\pm;\pm)_{n+1}^R$ назовём *основным треугольником* графа четностей, который обозначим $\triangle(\pm;\pm)_n^O(\pm;\pm)_{n+1}^L(\pm;\pm)_{n+1}^R$.

Порядок n подходящей дроби α_n назовем *порядком вершины* $(q_n^{\pm};p_n^{\pm})$ и её будем записывать таким образом: *n-вершина* для $n\in\mathbb{N}_{-1}=\{-1\}\cup\mathbb{N}_0$.

Займемся свойствами графа чётностей.

G1°. Количество вершин порядка равно 2^{n+1}. Действительно, $(-;+)_{-1}$ одна вершина, 0-вершин две вида: $(-;-)_0$, $(-;+)_0$ и так далее. В силу построения количество 2^{n+1} 0-вершин можем пронумеровать посредством индуктивного метода, при этом номер, полученный при пересчёте приписать порядку n n-вершин. Так, например, 0_1-вершин есть $(-;-)_{0_1}$, а 0_2-вершин $(-;+)_{0_2}$. Более того, если n-вершины в количестве 2^{n+1} записаны в таков виде: $(\pm;\pm)_{n_1}$, $(\pm;\pm)_{n_2}$, ..., $(\pm;\pm)_{n_{2^{n+1}}}$, тогда $(n+1)$-вершины согласно индукции записываются так: $(\pm;\pm)_{(n+1)_{2i-1}}$, $(\pm;\pm)_{(n+1)_{2i}}$, где $i\in\overline{1,2^{n+1}}=\{1,2,\dots,2^{n+1}\}$. Отсюда получаем, что n_{i_-}-вершина есть левая входящая, а n_{i_+}-вершина – правая входящая. Вследствие чего основной треугольник в этом случае будет иметь теперь такое обозначение $\triangle(\pm;\pm)_{n_i}(\pm;\pm)_{(n+1)_{2i-1}}(\pm;\pm)_{(n+1)_{2i}}$.

G2°. Вершины у любого $\triangle(\pm;\pm)_{n_i}(\pm;\pm)_{(n+1)_{2i-1}}(\pm;\pm)_{(n+1)_{2i}}$ попарно различны. Вследствие его при известных двух вершинах такого треугольника третья его вершина определяется однозначно.

G3°. Существует шесть различных типов основных треугольников:

$$\begin{array}{ll}
\triangle\mathbf{1}_i=\triangle(-;-)_i^O(-;+)_{i+1}^L(+;-)_{i+1}^R, & \triangle\mathbf{2}_j=\triangle(-;-)_i^O(+;-)_{j+1}^L(-;+)_{j+1}^R,\\
\triangle\mathbf{3}_k=\triangle(-;+)_k^O(-;-)_{k+1}^L(+;-)_{k+1}^R, & \triangle\mathbf{4}_l=\triangle(-;+)_l^O(+;-)_{l+1}^L(-;-)_{l+1}^R,\\
\triangle\mathbf{5}_{ml}=\triangle(+;-)_m^O(-;-)_{m+1}^L(-;+)_{m+1}^R, & \triangle\mathbf{6}_{nl}=\triangle(+;-)_n^O(-;+)_{n+1}^L(-;-)_{n+1}^R,
\end{array}$$

где числа $\overline{\mathbf{1},\mathbf{6}}$ отражают лексикографический порядок записи вершин относительно минуса и плюса, используемых в обозначения этих треугольников. Для порядков $i,j,k,l,m,n\geq 2$ все типы основных треугольников существуют. В случае (-1)-го порядка имеется только один треугольник $\triangle\mathbf{5}_{-1l}$, для 0-го порядка имеются только два треугольника $\triangle\mathbf{1}_{0_1}$, $\triangle\mathbf{3}_{0_2}$, для 1-го порядка – четыре треугольника $\triangle\mathbf{4}_{1_1}$, $\triangle\mathbf{6}_{1_2}$ $\triangle\mathbf{2}_{1_3}$, $\triangle\mathbf{5}_{1_4}$.

G4°. Только двенадцать следующих пар пересечений различных основных треугольников из тридцати имеют непустое пересечение:

$$\begin{array}{ll}
\triangle\mathbf{1}_{n_i}\cap\triangle\mathbf{4}_{(n+1)_{2i-1}}=(-;+)_{(n+1)_{2i-1}}, & \triangle\mathbf{1}_{n_i}\cap\triangle\mathbf{6}_{(n+1)_{2i}}=(+;-)_{(n+1)_{2i}},\\
\triangle\mathbf{2}_{n_i}\cap\triangle\mathbf{6}_{(n+1)_{2i-1}}=(+;-)_{(n+1)_{2i-1}}, & \triangle\mathbf{2}_{n_i}\cap\triangle\mathbf{4}_{(n+1)_{2i}}=(-;+)_{(n+1)_{2i}},\\
\triangle\mathbf{3}_{n_i}\cap\triangle\mathbf{2}_{(n+1)_{2i-1}}=(-;-)_{(n+1)_{2i-1}}, & \triangle\mathbf{3}_{n_i}\cap\triangle\mathbf{5}_{(n+1)_{2i}}=(+;-)_{(n+1)_{2i}},\\
\triangle\mathbf{4}_{n_i}\cap\triangle\mathbf{5}_{(n+1)_{2i-1}}=(+;-)_{(n+1)_{2i-1}}, & \triangle\mathbf{4}_{n_i}\cap\triangle\mathbf{2}_{(n+1)_{2i}}=(-;-)_{(n+1)_{2i}},\\
\triangle\mathbf{5}_{n_i}\cap\triangle\mathbf{1}_{(n+1)_{2i-1}}=(-;-)_{(n+1)_{2i-1}}, & \triangle\mathbf{5}_{n_i}\cap\triangle\mathbf{3}_{(n+1)_{2i}}=(-;+)_{(n+1)_{2i}},\\
\triangle\mathbf{6}_{n_i}\cap\triangle\mathbf{3}_{(n+1)_{2i-1}}=(-;+)_{(n+1)_{2i-1}}, & \triangle\mathbf{6}_{n_i}\cap\triangle\mathbf{1}_{(n+1)_{2i}}=(-;-)_{(n+1)_{2i}}.
\end{array}$$

Отметим, что точка пересечения в первом основной треугольнике является левой или правой входящей вершиной для этого треугольника, в для второго треугольника эта точка – исходящей вершиной.

G5°. Если

$$\triangle\mathbf{X}_{n_i}=\triangle(\pm;\pm)_{n_i}(\pm;\pm)_{(n+1)_{2i-1}}(\pm;\pm)_{(n+1)_{2i}},\triangle\mathbf{Y}_{(n+1)_{2i-1}}=\triangle(\pm;\pm)_{(n+1)_{2i-1}}(\pm;\\ \pm)_{(n+2)_{4i-3}}(\pm;\pm)_{(n+2)_{4i-2}},\triangle\mathbf{Z}_{(n+1)_{2i}}=\triangle(\pm;\pm)_{(n+1)_{2i}}(\pm;\pm)_{(n+2)_{4i-1}}(\pm;\pm)_{(n+2)_{4i}},$$

то $\triangle\mathbf{X}_{n_i} \cap \triangle\mathbf{Y}_{(n+1)_{2i-1}} \neq \varnothing$ и $\triangle\mathbf{X}_{n_i} \cap \triangle\mathbf{Y}_{(n+1)_{2i-1}} \neq \varnothing$ для соответствующих значений $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$ и $\mathbf{Z}$, которые указаны в G4°. В силу свойств G2°, G4°, а также (1) у треугольников $\mathbf{X}$ и $\mathbf{Y}$ общей вершиной является левая входящая вершина в $\mathbf{X}$ и исходящая вершина в $\mathbf{Y}$, и к тому же $(\pm;\pm)_{n_i} = (\pm;\pm)_{(n+2)_{4i-2}}$, $(\pm;\pm)_{(n+1)_{2i}} = (\pm;\pm)_{(n+2)_{4i-3}}$ аналогичное свойство имеет место для $\mathbf{X}$ и $\mathbf{Z}$, только $(\pm;\pm)_{n_i} = (\pm;\pm)_{(n+2)_{4i}}$, $(\pm;\pm)_{(n+1)_{2i-1}} = (\pm;\pm)_{(n+2)_{4i-1}}$.

2. Надграф графа чётностей

Надграф получается из графа чётности следующим образом.

Из графа удаляем первую вершину $(-;+)_{-2}$ и все веса $a_n^{\pm}$, далее вершины $(\pm;\pm)_{n_i}$ заменим на $\mathbf{X}_{n_i}$ такое что $(\pm;\pm)_{n_i}$ является исходной вершиной $\triangle\mathbf{X}_{n_i}$. Индекс n без нижнего индекса i у n_i из $\mathbf{X}_{n_i}$ назовём порядком вершины $\mathbf{X}_{n_i}$, а i играет ту же роль, что на графе чётности. Вершины $\mathbf{X}_n$ и $\mathbf{Y}_m$ считаются *равными*, если $\mathbf{X} = \mathbf{Y}$ и при том будем писать $\mathbf{X}_n = \mathbf{Y}_m$.

Надграф имеет только ориентированные рёбра. Каждое из них исходит из некоторой вершины $\mathbf{X}_n$ и входит в соответствующую вершину $\mathbf{Y}_{n+1}$. Это соответствие определится свойством G4° – вершине $\mathbf{X}_n \cap \mathbf{Y}_{n+1}$ $(\neq \varnothing)$ на графе четности соответствует ребро надграфа, причем оно взаимно однозначно. Ребро надграфа назовём *левым*, если оно входит в $\mathbf{Y}_{n+1} = \mathbf{Y}_{(n+1)_{2i-}}$, *правым* – в $\mathbf{Y}_{n+1} = \mathbf{Y}_{(n+1)_{2i}}$.

Если n_i-путь на графе чётности с началом в $(-;+)_{-2}$ и концом $(\pm;\pm)_{n_i}$, то ему соответствует единственный $\mathbf{X}_{n_i}$-путь на надграфе с началом $\mathbf{5}_{-2}$ и концом $\mathbf{X}_{n_i}$. Для исследований, связанных с задачей С. В. Конягина о шахматной раскраске нам необходимо знать расположение вершин на $\mathbf{X}_{n_i}$-пути. С этой целью рассмотрим пути с началом в $\mathbf{X}_{n_i}$, а далее каждый из них получается за счёт движение по ребрам надграфа, причём движение по левому ребру указывает через приписывание справа к $\mathbf{X}_{n_i}$ буквы L, а если вправо, то R. Например, $\mathbf{X}_{n_i} RLR^tL^s\mathbf{Y}_{m_j}$ есть путь с началом в $\mathbf{X}_{n_i}$, долее проходим одно правое ребро, одно левое, s левых рёбер, t правых и завершается в $\mathbf{Y}_{m_j}$ таком, что $m = n+s+t+2$ и $j = 2^s(2^t(2^2i-1)-1)+1$. Этот путь состоит из $s+t+2$ рёбер и $s+t+3$ вершин

Путь, который имеет попарно неравные вершины, кроме крайних назовём *звеном*. Каждое звено состоит из не более шести рёбер и в не менее двух силу G3° и G1°.

Звенья при фиксированном $\mathbf{X}_{n_i} \in \overline{\mathbf{1}_{n_i}, \mathbf{6}_{n_i}}$ для $n \geq 3$, а i определяется выбором $\mathbf{X}_{n_i}$ могут быть только следующего вида.

NG1°. Согласно G5° имеем по одному звену: $\mathbf{X}_{n_i} R^2 \mathbf{X}_{(n+2)_{2^2i}}$ с двумя рёбрами и

$\mathbf{X}_{n_i} L^3 \mathbf{X}_{(n+3)_{2^3(i-1)+1}}$ с тремя, которые соответственно выбираются из четырёх и восьми возможных претендентом, которые образованы путями с началом в $\mathbf{X}_{n_i}$ концом $\mathbf{X}_{(n+2)_j}$, $j \in \{2^2(i-1)+1, \ldots, 2^2i\}$, и началом в $\mathbf{X}_{n_i}$ концом $\mathbf{X}_{(n+3)_j}$, $j \in \{2^3(i-1)+1, \ldots, 2^3i\}$.

NG2°. Среди шестнадцати возможных путей (выбор производится аналогично, как для двух и трёх ребер), содержащих четыре ребра в силу NG1° являются звеньями только два: $\mathbf{X}_{n_i} LRLR \mathbf{X}_{(n+4)_{2(2(2(2i-1))-1)}}$ и $\mathbf{X}_{n_i} RLRL \mathbf{X}_{(n+4)_{2(2(2^2i-1))-1}}$.

NG3°. Среди путей с шестью ребрами существует ровно три звена;

$$\mathbf{X}_{n_i} L^2RL^2R \mathbf{X}_{(n+6)_{2(2(2(2(2(2i-1))-1)-1)-1)}}, \mathbf{X}_{n_i} LRL^2RL \mathbf{X}_{(n+6)_{2(2^2((2^2(2i-1))-1)-1)-1}},$$
$$\mathbf{X}_{n_i} RL^2RL^2 \mathbf{X}_{(n+6)_{2(2^2(2(2^2i-1)-1)-1)-1}}$$

NG4°. Требуемых образующих путей с пятью рёбрами звеньев нет, ибо каждый из нужных путей проходит через точки, которые дают равные пары, помимо крцнний.

Так как $\mathbf{X}_{n_i} \in \overline{\mathbf{1}_{n_i}, \mathbf{6}_{n_i}}$ в NG1° – NG3°, звеньев всего сорок два которые при фиксированном, можно все указать при $n \neq 2$. Если же $n = -1, 0, 1, 2$, то множество, из которого выбирается $\mathbf{X}_{n_i}$ ограничено, см. G3°. В качестве примера укажем некоторые из них: 1) $\mathbf{5}_{-1_1} LRLR \mathbf{5}_{3_6}$ проходит через вершины: $\mathbf{1}_{0_1}, \mathbf{6}_{1_2}, \mathbf{3}_{2_3}$, 2) $\mathbf{5}_{-1_1} L^2RL^2R \mathbf{5}_{5_{10}}$ – через вершины: $\mathbf{1}_{0_1}, \mathbf{4}_{1_1}, \mathbf{2}_{2_2}, \mathbf{6}_{3_3}, \mathbf{3}_{4_5}$

Если конец одного звена совпадет с началом другого, что ои составляют путь. Упи такого сорта мы может строить сколь угодно большой длины, если цепная дробь бесконечна. Среди таких путей и будут пути с начало $\mathbf{5}_{-2_1}$, которые являются аналогами тех, которые появляется при рассмотрении периодических цепных дробей, для которых решена задача С. В. Конягина, в некоторых частных случаях [1]. Будем надеться, что этот метод решения задачи С. В. Конягина будет распространен на цепные дроби, дающие пути, которые могут быть построенные с помощью звеньев, которые нами были подробно описаны выше..

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. М. М. Галламов. Целочисленная аппроксимация отрезка // Чебышевский сборник, 2022, т. 23, вып. 4, с. 20–38.
https://www.mathnet.ru/links/234a67f15bac6686abfb4000f5d3c545/cheb1220.pdf

---

УДК 514.8,531.1,531.8

О кратности скрытного ветвления передачи движения в шарнирных механизмах[1]

М. Д. Ковалёв (Россия, г. Москва)
Московский Государственный Университет им. М. В. Ломоносова
e-mail: mdkovalev@mtu-net.ru

On the multiplicity of hidden branching of motion transmission in hinge mechanisms

M. D. Kovalev (Russia, Moscow)
Lomonosov Moscow State University
e-mail: mdkovalev@mtu-net.ru

1. Однозначность и ветвление передачи движения

Мы рассматриваем плоские шарнирно-рычажные механизмы, составленные из прямолинейных абсолютно твёрдых стержней (рычагов), соединённых в своих концах шарнирами [1, 2]. Некоторые шарниры могут быть закреплены в плоскости, их называем закреплёнными, остальные — свободными. Каждый рычаг несёт по шарниру на своих концах. Если в свободном шарнире соединены лишь два рычага, — то этому шарниру отвечает обычная вращательная пара, допускающая произвольное проворачивание в плоскости рычагов одного относительно другого. Мы называем такой шарнир 1-шарниром. Если в свободном шарнире соединены $k > 2$ рычагов, то это так называемый совмещённый или сложный шарнир с одним общим центром вращения для всех k рычагов. Его называем $k-1$-шарниром. В этом шарнире каждый из k рычагов допускает проворачивание, независимое от остальных рычагов.

Рассмотрим построение из двух, обладающих одной степенью свободы механизмов M_1 и M_2, механизма M путём соединения рычагом заданной длины их подвижных свободных шарниров $p \in M_1$ и $q \in M_2$. Далее будем считать длину этого рычага pq равной единице, а

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке программы Московского центра фундаментальной и прикладной математики по соглашению №075-15-2022-284

начальными положения шарниров $p(0) = (0,0)$ и $q(0) = (0,1)$. Шарниры p и q механизма M при таком его построении оказываются сложными, а множество закреплённых шарниров механизма M есть объединение множеств закреплённых шарниров механизмов M_1 и M_2. Вообще говоря, механизм M обладает одной степенью свободы. Поскольку конфигурационное пространство шарнирного механизма с одной степенью свободы есть компонента связности алгебраической кривой, то вследствие теоремы Тарского-Зайденберга [2, 3] множество положений свободного шарнира есть часть плоской алгебраической кривой. Более того, вследствие теоремы Кемпе [3] можно так подбирать механизмы M_1 и M_2, чтобы шарниры p и q двигались по участкам K_p и K_q произвольных плоских алгебраических кривых.

Мы говорим, что движение от шарнира p передаётся к шарниру q однозначно в положении $p(0)$ шарнира p, если существуют такие окрестности U точки $p(0)$, и W точки $q(0)$, что каждому положению $p(t) \in K_p \cap U$ шарнира p отвечает единственное положение связанного с ним рычагом единичной длины шарнира $q(t) \in K_q \cap W$. В противном случае, будем говорить о неоднозначности передачи движения от p к q в положении $p(0)$, или ветвлении передачи движения от шарнира p к шарниру q.

Если рычаг $p(0)q(0)$ не нормален кривым K_p и K_q, то движение в этом положении передаётся однозначно и от шарнира p к шарниру q и в обратном направлении: от шарнира q к шарниру p.

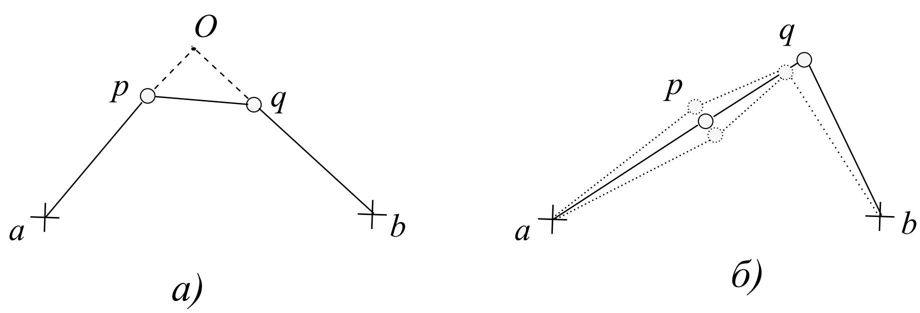


Рис. 1: Однозначность а) и неоднозначность б) передачи движения в шарнирном четырёхзвеннике.

В простейшем примере шарнирного четырёхзвенника $M = apqb$ шарниры p и q движутся по окружностям K_p и K_q с центрами a и b (Рис. 1 а)). (Для него механизмы M_1 и M_2 являются циркулями ap и bq.) В исходных положениях четырёхзвенника, в которых рычаг pq не нормален окружностям K_p и K_q, определено положение O его мгновенного центра вращения (м.ц.в.). И оно не совпадает с шарнирами p и q. Это влечёт однозначную передачу движения как от шарнира p к шарниру q, так и в обратном направлении.

Заметим, что в положении четырёхзвенника, в котором рычаги ap и pq оказываются на одной прямой (Рис. 1 б)), вращение рычага bq возможно лишь против часовой стрелки. И передача движения от шарнира p к шарниру q происходит однозначно, а вот в обратном направлении имеется ветвление передачи движения. Одному положению шарнира q отвечает два положения p.

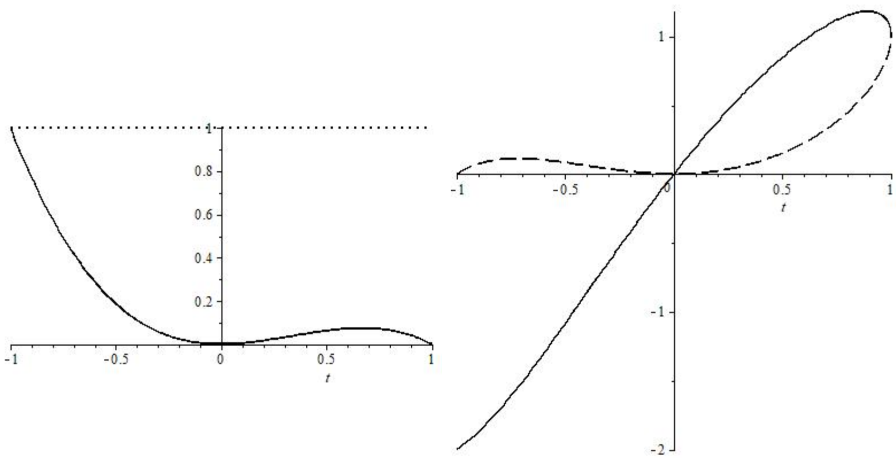
Интересно, что ветвление передачи движения в случае гладких кривых K_p и K_q может быть более сложным. По-видимому, это явление ранее не исследовалось.

2. Скрытное ветвление передачи движения

В случае нормальности рычага $p(0)q(0)$ к гладким в точках $p(0)$ и $q(0)$ кривым K_p и K_q ветвление передачи движения мы называем скрытным. Скрытное ветвление передачи движения может быть достаточно сложным, как показывает следующий пример [4].

Пусть закон движения шарнира $p(t) = \left(t, \dfrac{t^2}{2} - \dfrac{t^3}{2}\right)$, а шарнир q по-прежнему движется по прямой: $q(u) = (u, 1)$. Тогда зависимость параметра u от времени такова:

$$u_{1,2} = \frac{t}{2}(2 \pm \sqrt{-t^4 + 2t^3 - t^2 - 4t + 4}).$$



а) *б)*

Рис. 2: На рисунке а) показаны кривые, по которым движется шарнир p и шарнир q (пунктиром). На рисунке б) показана зависимость u от t.

Маклореновские разложения двух ветвей этой функции выглядят так:

$$u_1 = 2t - \frac{t^2}{2} + O(t^3); \qquad u_2 = \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{4} + O(t^4).$$

Таким образом, если двигать шарнир p из точки $(0, 0)$ направо с единичной скоростью, то шарнир q может двигаться либо направо со скоростью 2 единицы, либо направо с начальной нулевой скоростью. Если двигать шарнир p из точки $(0, 0)$ налево с единичной скоростью, то шарнир q может двигаться либо налево со скоростью 2 единицы, либо направо с начальной нулевой скоростью. Передача движения от шарнира q к p выглядит следующим образом. Если двигать шарнир q из точки $(0, 1)$ направо с единичной скоростью, то шарнир p может двигаться либо направо со скоростью 1/2 единицы, либо направо с начальной бесконечной скоростью, либо налево тоже вначале с бесконечной скоростью. Если же двигать шарнир q из точки $(0, 1)$ налево с единичной скоростью, то шарнир p будет двигаться налево со скоростью 1/2 единицы. Таким образом, ветвление передачи движения от шарнира p к шарниру q качественно отличается от ветвления передачи движения в противоположном направлении.

Будем различать направления движения по кривой — как правое и левое — и считать, что правое отвечает росту параметризующего кривую параметра. Соответственно, в точке ветвления возникают правая и левая кратности ветвления передачи движения. Так в примере правая кратность k^+_{qp} ветвления передачи движения от шарнира q к шарниру p равна трём, а левая k^-_{qp} равна единице. Кратности же ветвления передачи движения от шарнира p к шарниру q совпадают: $k^+_{pq} = k^-_{pq} = 2$.

Дадим формальное определение односторонней правой кратности k^+_{pq} ветвления передачи движения. Пусть исходные положения шарниров на гладких кривых $p_0 \in K_p$ и $q_0 \in K_q$. Если существует такое $\varepsilon > 0$, что для всех $0 < t < \varepsilon$ для положения $p_t \in K_p$ шарнира p имеется ровно k попарно не совпадающих положений $q^1, q^2, \ldots, q^k \in K_q$, то правая кратность k^+_{pq}

ветвления передачи движения от шарнира p к шарниру q в исходном положении равна k. Так же определяются и остальные три односторонние кратности ветвления передачи движения в исходном положении. Имеется очевидное связывающее их соотношение: $k^+_{qp} + k^-_{qp} = k^+_{pq} + k^-_{pq}$.

Используя метод диаграмм Ньютона для решения уравнений, определяющих конфигурационное пространство механизма M в окрестности точки ветвления, можно получить следующую теорему.

Теорема 1. *Скрытная односторонняя кратность ветвления передачи движения в шарнирных механизмах не превосходит трёх.*

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ковалёв М. Д. Геометрическая теория шарнирных устройств // Известия РАН Серия математическая, 1994, Т.58, № 1, С.45–70.
2. Ковалёв М. Д. Геометрические вопросы кинематики и статики — М.: Ленанд, URSS, 2019. 256 С.
3. Ковалёв М. Д. Что такое шарнирный механизм? И что же доказал Кемпе? // Итоги науки и техники, серия Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры, ВИНИТИ РАН Москва, 2020, том 179, с. 16-28.
4. Ковалёв М. Д. О ветвлении передачи движения в шарнирных механизмах // Материалы XXIII Международной конференции, посвящённой 80-летию профессора Александра Ивановича Галочкина и 75-летию профессора Владимира Григорьевича Чирского, Тула 2024, с. 134–138.

УДК 511.48

Новые закономерности слоистых упаковок серии “Lambda”

М. А. Лялин (Россия, г. Калининград)
Балтийский федеральный университет им. И. Канта
e-mail: maxi2704@yandex.ru

New regularity of laminated packs of the “Lambda” series

M. A. Lyalin (Russia, Kaliningrad)
Immanuel Kant Baltic Federal University
e-mail: maxi2704@yandex.ru

Определив минимальный вектор решетки $\min \Gamma = 2$, значения высот фундаментального параллелепипеда h_n решетки Γ будут соответствовать значениям коэффициентов A_n положительных квадратичных форм, приведенных по Коркину–Золотарёву и будут связаны следующим равенством [1]:

$$h_n = 2\sqrt{A_n}.$$

Решетка, для которой выполняется равенство

$$\min \Gamma = V(\Gamma)^{1/n} \gamma_n^{1/2}$$

называется экстремальной или предельной. Предельной решетке соответствует предельный класс ПКФ. При каждом n их конечное число. Задача о плотнейшей решетчатой упаковке решается после нахождения всех предельных форм. Достаточно выбрать из предельных форм ту, для которой при одинаковом для всех форм значении определителя значение минимума — наибольшее [2].

Точные значения постоянной Эрмита известны для размерностей 1 — 8 и 24 [3], для которых получены соответствующие экстремальные (предельные) решетки.

В общем случае выполняется неравенство

$$\min \Gamma \leq V(\Gamma)^{1/n} \gamma_n^{1/2}.$$

Таким образом, точное значение постоянной Эрмита в каждой размерности позволяет уменьшить верхний предел значения $\min \Gamma$, что целесообразно использовать в качестве проверочного критерия в алгоритмах поиска кратчайшего вектора в произвольных решетках. Например, известно, что $\gamma_{24} = 4$, тогда для решеток размерности $n \geq 24$ выполняется

$$\min \Gamma \leq V(\Gamma)^{1/n} * 2,$$

что значительно лучше применения оценки постоянной Эрмита в общем случае:

$$\min \Gamma \leq V(\Gamma)^{1/n} * (4/3)^{23/4} \approx V(\Gamma)^{1/n} * 5.22875.$$

В работе [4] представлен способ построения решетчатых упаковок равных шаров, соответствующих плотности упаковок серии «Lambda» в размерностях 1 — 24, с применением серии коэффициентов K_n к высоте фундаментального параллелепипеда размерности $(n-1)$: 1/2, 1/3, 1/2, 0, 1/2, 1/3, 1/2, $\sqrt{-1}$, 1/2, 1/3, 1/2, 0, 1/2, 1/3, 1/2, $\sqrt{-1}$, 1/2, 1/3, 1/2, 0, 1/2, 1/3, 1/2, а также выполнено построение решетчатых упаковок равных шаров с применением данного способа до размерности 11 включительно.

Использование полученных свойств решетчатых упаковок равных шаров в размерностях 1 — 24 является перспективным направлением для исследования следующих групп размерностей с целью распространения полученных закономерностей на случай больших размерностей.

С помощью несложных геометрических соображений, установлено, что серия коэффициентов K_n является числовым представлением угла наклона α_n нового базисного вектора в евклидовом пространстве R^n текущей размерности n относительно гиперпространства размерности $n-1$, где

$$\alpha_n = \arccos(K_n).$$

Таким образом, получена серия углов α_n для размерностей до $n = 24$:

60°, 70.53°, 60°, 90°, 60°, 70.53°, 60°, 90°, 60°, 70.53°, 60°, 90°, 60°, 70.53°, 60°, 90°, 60°, 70.53°, 60°, 90°, 60°, 70.53°, 60°.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лялин М.А. Симметрическо-групповая закономерность в распределении значений минимумов положительных квадратичных форм, приведенных по Коркину–Золотарёву / М.А. Лялин // International Journal of Open Information Technologies. — 2024. — № 6. — С. 27–32.

2. Рышков С.С. Классические методы теории решетчатых упаковок / С.С. Рышков, Е.П. Барановский // УМН. — 1979. — Т. 34. — № 4. — С. 1-68.

3. Nguyen P.Q. Hermite's constant and lattice algorithms / P.Q. Nguyen // The LLL Algorithm. Information Security and Cryptography. — Berlin; Heidelberg: Springer, 2009.

4. Лялин М.А. О способе построения решетчатых упаковок равных шаров, соответствующих плотности упаковок серии «Lambda» / М.А. Лялин, С.А. Фомин // Вестник Московского университета. Серия 15: Вычислительная математика и кибернетика. — 2025. — № 2. — С. 38–47.

УДК 511.32

О существовании двух многогранников, лизких к правильногранным

В. И. Субботин (Россия, г. Новочеркасск)
Южно-Российский государственный политехнический университет (НПИ);
Донской государственный аграрный университет
e-mail: geometry@mail.ru

On the existence of two polyhedra close to regular-faced ones

V. I. Subbotin (Russia, Novocherkassk)
Platov South-Russian State Polytechnic University (NPI); Don State Agrarian University
e-mail: geometry@mail.ru

В работе [1] была доказана полнота класса правильногранных многогранников. В связи с этим представляют интерес, в частности многогранники, близкие к правильногранным в смысле близости их граней к правильным многоугольникам: углы некоторых граней таких многогранников незначительно отличаются от правильных граней.

В работе автора [2] вводится класс так называемых RR-многогранников в E^3 (от слов "rombic"и "regular"). В классе RR помимо условия симметрии — наличия правильных граней, есть и условие симметрии на звёзды некоторых вершин — существование в многограннике так называемых *симметричных ромбических вершин.*

Определение 1. *Замкнутый выпуклый многогранник в E^3 называется* RR-многогранником, *если множество всех его граней можно разбить на два непустых непересекающихся класса — класс граней, образующих гранные звёзды симметричных ромбических вершин и класс правильных граней.*

При этом вершина V называется *симметричной n-ромбической вершиной*, если она расположена на оси вращения звезды $Star(V)$ и порядок оси совпадает с числом n ромбов звезды; для краткости вершину V в этом случае будем называть *n-ромбической.* Случай квадратов в $Star(V)$ исключается, так как в этом случае получаем класс многогранников Джонсона-Залгаллера, [1].

В следующих двух утверждениях многогранник M называется *связанным* с многогранником N, если M построен с использованием некоторой части поверхности многогранника N.

Теорема 1. *Существует RR-многогранник с девятнадцатью гранями, связанный с икосаэдром и имеющий одну тупоугольную симметричную ромбическую вершину, близкий к правильногранному.*

Заметим, что в [3] было получено следующее уравнение для угла α ромбической грани:

$$\cos\alpha = \cos^2\theta + \sin^2\theta \; cos\ \Omega, \tag{1}$$

где:

$$\Omega = 2\text{sign}\left(\frac{3\pi}{5} - \alpha\right)\arccos\frac{1 + (1-\cos\theta)\left(2\sin\frac{\alpha}{2} - 1\right)}{\sin\theta\sqrt{3 + 4\sin\frac{\alpha}{2} - 4\sin^2\frac{\alpha}{2}}} +$$

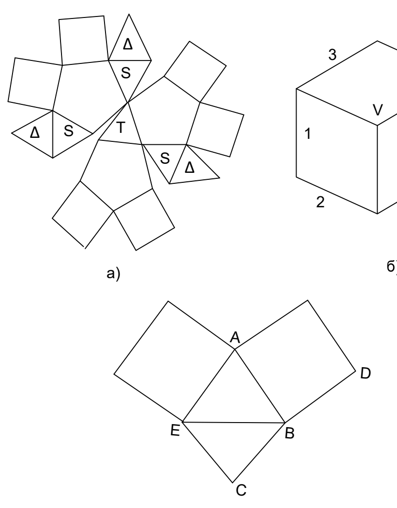
$$+\arccos\frac{1 + 4\sin\frac{\alpha}{2} - 4\sin^2\frac{\alpha}{2}}{3 + 4\sin\frac{\alpha}{2} - 4\sin^2\frac{\alpha}{2}},$$

$$\cos\theta = \frac{1}{4} + \frac{3}{4}\cos\left(\arccos\frac{\sin\frac{\alpha}{2} - 1}{\sqrt{3}\cos\frac{\alpha}{2}} + \arccos\frac{\tan\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{3}}\right).$$

Решение уравнения (1) в [3] дало значение угла ромба: $\alpha \approx 91,44^\circ$.

В докладе внимание будет сосредоточено на том, что для доказательства существования многогранника, необходимо ещё показать, что возможно такое изгибание, при котором угол α уменьшается. Возможность уменьшения угла α и утверждает доказанная теорема 1 .

Теорема 2. *Существует многогранник с девятнадцатью гранями, связанный с икосододекаэдром, близкий к RR-многограннику*



а) б) в)

Для доказательства теоремы 2 рассмотрим часть икосододекаэдра, состоящую из следующих семи граней: 1) треугольник (T), 2) соседние с Т по сторонам три 5-угольника, 3) три треугольника (S), имеющих общие вершины с T, рисунок 1, а. Присоединим к каждому 5-угольнику по два квадрата так, чтобы каждая пара квадратов имела общую сторону. В образовавшееся пространство между каждой парой квадратов поместим ещё по одному треугольнику Δ. Через центр треугольника T перпендикулярно его плоскости проходит ось вращения L_3.

Тогда в оставшееся пространство возможно поместить три равных ромба с тупыми углами, которые равны углам 5-угольных граней, т.е. по 108°.

Действительно, двугранные углы между соседними квадратными гранями равны внутренним углам 5-угольных граней, потому что эти грани перпендикулярны плоскости 5-угольной грани. Кроме того, в пространственном 6-угольнике, образованном рёбрами шести квадратных граней, имеются три пары параллельных сторон, рисунок 1, б). Стороны, отмеченные одинаковыми цифрами на рисунке 1, б), параллельны, так как в каждой паре 5-угольных граней, в силу симметрии части икосододекаэдра, имеются по одной паре параллельных рёбер.

Заполняя оставшееся пространство так, чтобы три ромба тупыми углами сходились в одной вершине V, получим модель 19-гранника с тупоугольной симметричной ромбической вершиной V, развёртка которого (без трёх ромбов) показана на рисунке 1, а).

В настоящем докладе показано, однако, что такой многогранник, связанный с икосододекаэдром, не существует, хотя и близок к правильнограннику с ромбической вершиной. Треугольники Δ незначительно, но отличаются от правильных. Построенный многогранник не является RR-многогранником, однако близок к нему и материализованная модель такого многогранника может быть построена.

Изгибание многогранной поверхности, получаемой из построенного многогранника удалением трёх ромбов, невозможно, так как невозможно изгибание части икосододекаэдра построенного многогранника.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Залгаллер В. А. Выпуклые многогранники с правильными гранями // Зап. научн. сем. ЛОМИ. Т.2. С. 1–220.
2. Субботин В. И. О двух классах многогранников с ромбическими вершинами // Зап. научн. сем. ПОМИ. 2018. Т.476. С. 153–164.
3. Субботин В. И. О существовании RR-многогранников, связанных с икосаэдром // Чебышевский сборник. 2021. Т. 22, № 4, С. 253-264.

УДК 514.17

Нижние оценки максимальной плотности плоских множеств без единичных расстояний

А. Д. Толмачев (Россия, г. Москва)
Московский физико-технический институт; Сколковский институт науки и технологий
e-mail: tolmachev.ad@phystech.edu

Lower bounds of the maximal density of planar sets without unit distances

A. D. Tolmachev (Russia, Moscow)
Moscow Institute of Physics and Technology; Skolkovo Institute of Science and Technology
e-mail: tolmachev.ad@phystech.edu

Данный доклад посвящен исследованию нижних оценок максимальной плотности плоского множества без единичных расстояний, что является одной из фундаментальных проблем комбинаторной геометрии, и основан на результатах статьи [4].

Определение 1. *Множество $A \in R^d$ не содержит единичных расстояний, если евклидово расстояние между любыми двумя точками из A не равно* 1.

Определение 2. *Пусть множество $A \in R^d$ измеримо относительно d-мерной меры Лебега. Верхняя плотность A обозначается как $\overline{\delta\,(A)}$ и определяется так:*

$$\overline{\delta(A)} = \lim_{R\to\infty} \sup \frac{\lambda_d(A \cap B_d(x,R))}{\lambda_d(B_d(x,R))},$$

где λ_d - это d-мерная мера Лебега, $B_d\,(x,R)$ - это d-мерный шар радиуса R с центром в фиксированной точке $x \in R^d$.

Последнее определение корректно, так как верхняя плотность не зависит от выбора точки $x \in R^d$. Обозначим за $m_1\left(R^d\right)$ супремум верхних плотностей всех измеримых множеств без единичных расстояний в пространстве R^d:

$$m_1\left(R^d\right) = \sup\left\{\overline{\delta(A)} : A \in R^d\text{- \textit{измеримое множество без едининчных расстояний}}\right\}.$$

Особый интерес представляют изучение структуры плоских множеств без единичных расстояний и оценка величины $m_1\left(R^2\right)$. Данная задача была поставлена Лео Мозером и Полом Эрдешем в работе [2] в середине прошлого века. Наилучшая нижняя оценка была предложена в статье [3] в 1967 году: $m_1\left(R^2\right) \geq 0.22936\ldots$ В дальнейшем верхняя оценка для величины $m_1\left(R^2\right)$ улучшалась многими исследователями, и в 2023 году в статье [1] было получено, что $m_1\left(R^2\right) \leqslant 0.247$. Данный результат опровергнул гипотезу Эрдеша о том, что $m_1\left(R^2\right)$ не меньше 1/4. Несмотря на большой прогресс в улучшении верхней оценки, нижняя оценка на протяжении почти 60 лет так и не была улучшена...

В недавней работе [4] автором исследуются нижние оценки величины $m_1\left(R^2\right)$ и предлагается новый подход, основанный на оценке $m_1\left(R^2\right)$ с помощью поиска максимального независимого множества в некотором графе, построенном на плоском торе. В данной работе нижние оценки $m_1\left(R^2\right)$ получены в результате рассмотрения плоских множеств, периодических по двум неколлинеарным векторам. Такие множества могут рассматриваться как периодическое замощение плоскости одинаковыми плоскими торами, склеенными из параллелограмма. В статье [4] получено теоретическое обоснование данного метода, а также проведены эксперименты, результаты которых показали, что для достаточно большого диапазона параметров (длины двух неколлинеарных векторов и угол между ними) предлагаемый метод не позволяет улучшить оценку Крофта $0.22936 \leqslant m_1\left(R^2\right)$. Наилучшие дискретные множества, найденные в результате такого подхода (поиск независимого множества в графе, построенном на поверхности плоского тора по некоторым правилам), являются приближениями конструкции из статьи Крофта [3]. Кроме того, в работе проведено сравнение различных подходов (в т.ч. нейросетевых) поиска максимального независимого множества на графах, возникающих при решении данной задачи.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ambrus G., Csiszarik A., Matolcsi M., Varga D., Zsamboki P. The density of planar sets avoiding unit distances // Mathematical Programming. 2024. V. 207. P. 303-327.

2. Croft H. Incidence incidents // Eureka. 1967. V. 30. P. 22-26.

3. Moser L. Poorly formulated unsolved problems of combinatorial geometr // Mimeographed. 1966.

4. Tolmachev A. On lower bounds of the density of planar periodic sets without unit distances // Discrete Mathematics, Algorithms and Applications. 2025. DOI: 10.1142/S1793830925500314

УДК 519.644

Оптимальные квадратурные формулы для вычисления интегралов от быстроосциллирующих функций

Х. М. Шадиметов (Узбекистан, г. Ташкент)
Ташкентский государственный транспортный университет
e-mail:kholmatshadimetov@mail.ru
О. Х. Гуломов (Узбекистан, г. Ташкент)
Институт Математики имени В. И. Романовского АН Республики Узбекистан;
Национальный исследовательский университет "Ташкентский институт инженеров ирригации и механизации сельского хозяйства"
e-mail:otabek10@mail.ru

Optimal quadrature formulas for calculating integrals of rapidly oscillating functions

Kh. M. Shadimetov (Uzbekistan, Tashkent)
Tashkent State Transport University
e-mail:kholmatshadimetov@mail.ru
O. Kh. Gulomov (Uzbekistan, Tashkent)
V. I. Romanovskiy Institute of Mathematics, Uzbekistan AS, Tashkent, Uzbekistan;
National Research University "Tashkent Institute of Irrigation and Agricultural Mechanization Engineers"
e-mail:otabek10@mail.ru

Аннотация. Настоящей работе методом периодизации функций будут построены оптимальные квадратурные формулы типа Эрмита в пространствах где вторые и третьи производные суммируемые с квадратами. Для этого используется оптимальные квадратурные формулы в пространствах периодических функций.

Кроме того будут получены точные верхние оценки построенных оптимальных квадратурных формул для приближенного вычисления интегралов от быстроосцилирующих функций.

Рассматриваются методы вычисления интегралов от быстроосцилирующих функций вида

$$I(\omega) = \int_a^b f(x) e^{i\omega x} dx,$$

где (a, b)- интервал на прямой, который может быть конечным или бесконечным, $f(x) \in F$ (F-некоторой пространство функций), ω - произвольной вещественное число и информация о $f(x)$ задается в N узловых точках из (a, b).

Необходимость в вычислении таких интегралов возникает при решении многих классов задач вычислительной и прикладной математики, таких как краевые задачи для уравнения в частных производных, автоматическое регулирование цифровая обработка сигналов, моделирование оптических систем и синтезированных голограмм, распознавание образов, в задачах ядерной физики и других.

Для вычисления интеграла $I(\omega)$ могут быть, применены многие известные классические правила интегрирования, однако, они дают хорошую точность в случае, если интегрируемая функция является достаточно гладкой и не быстроизменяющейся. Известные классические квадратурные формулы практически могут применяться для вычисления $I(\omega)$ при небольших значения ω. Чтобы построить квадратурные формулы, пригодные при изменении ω в широких пределах, необходимо заранее учесть наличие осциллирующею множителя.

Для вычисления интеграла $I(\omega)$ могут быть, применены многие известные классические правила интегрирования, однако, они дают хорошую точность в случае, если интегрируемая функция является достаточно гладкой и не быстроизменяющейся. Известные классические квадратурные формулы практически могут применяться для вычисления $I(\omega)$ при небольших значения ω. Чтобы построить квадратурные формулы, пригодные при изменении ω в широких пределах, необходимо заранее учесть наличие осциллирующею множителя. Это можно сделать, принимая например, такие множителя за весовые функции.

Пусть пространства $H_2^{(m)}(0,1)$- классов комплекснозначных функций, обладающих обобщенными производными порядкаm с интегрируемым квадратом скалярным произведением и нормой

$$(\varphi, f) = \int_0^1 \left(\varphi^{(m)} + \varphi^{(m-1)}(0) - \varphi^{(m-1)}(1)\right)\left(\overline{f}^{(m)} + \overline{f}^{(m-1)}(0) - \overline{f}^{(m-1)}(1)\right),$$

$$\left\| f \left| H_2^{(m)} \right\| = \left(\int_0^1 (f^{(m)} + f^{(m-1)}(0) - f^{(m-1)}(1))\left(\tilde{f}^{(m)} + \tilde{f}^{(m-1)}(0) - \tilde{f}^{(m-1)}(1)\right) dx\right)^{\frac{1}{2}}\right.$$

Определение 1. *Пусть $f(x) \in H_2^{(m)}(0,1)$, при $m \geqslant 1$. Периодизацией функции $f(x)$ будем называть нахождение функции $\varphi(x) \in H_2^{(m)}(0,1)$ удовлетворяющей условиям*

$$\varphi^{(\alpha)}(1) = \varphi^{(\alpha)}(0) \quad \text{при} \quad \alpha = 0, 1, ..., m-1,$$

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 \varphi(x)\,dx.$$

Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть $f(x) \in H_2^{(m)}(0,1)$, тогда следующая функция*

$$\varphi(x) = f(x) + \sum_{n=0}^{m-1} \frac{B_{n+1}(x)}{(n+1)!}\left(f^{(n)}(0) - f^{(n)}(1)\right)$$

Является периодической функцией в пространстве $H_2^{(m)}(0,1)$, т.е. элементом пространства $\widetilde{H}_2^{(m)}(0,1)$.

В настоящей работе методом периодизации функций будут построены оптимальные квадратурные формулы с производными для приближенного вычисления интегралов от быстроосциллирующих функций и доказывается следующие теоремы:

Теорема 2. *Пусть $f(x) \in H_2^{(3)}(0,1)$, тогда следующая квадратурная формула*

$$\int_0^1 e^{2\pi i\omega x} f(x)\,dx \cong \sum_{k=0}^{N} \overset{o}{\overline{C_k}}(3) f(hk) + \left(\frac{1}{(2\pi i\omega)^2} - \frac{h\overset{o}{C_1}(3)}{(1-e^{2\pi i\omega h})^2}\right)\left(f'(0) - f'(1)\right) -$$

$$-\left(\frac{1}{(2\pi i\omega)^3} - \frac{h^2\overset{o}{C_1}(3)\left(1+e^{2\pi i\omega h}\right)}{2\left(e^{2\pi i\omega h}-1\right)^3}\right)\left(f''(0) - f''(1)\right)$$

с функционалом погрешности

$$l_3(x) = \varepsilon_{[0,1]}(x)\, e^{2\pi i\omega x} - \sum_{k=0}^{N} \overline{\overset{o}{C}_k}(3)\, \delta(x - hk) - \left(\frac{1}{(2\pi i\omega)^2} - \frac{h\, \overset{o}{C}_1(3)}{\left(1 - e^{2\pi i\omega h}\right)^2} \right) \left(\delta'(x) - \delta'(x-1) \right) -$$

$$- \left(\frac{1}{(2\pi i\omega)^3} - \frac{h^2\, \overset{o}{C}_1(3)\left(1 + e^{2\pi i\omega h}\right)}{2\left(e^{2\pi i\omega h} - 1\right)^3} \right) \left(\delta''(x) - \delta''(x-1) \right)$$

является оптимальной в пространстве $H_2^{(3)}(0,1)$. *Здесь* $\overset{o}{C}_k(3)$

$$\overset{o}{C}_k(3) = h \left(\frac{\sin \pi\omega h}{\pi\omega h} \right)^6 \frac{60 \exp(2\pi i\omega k h)}{\cos 4\pi\omega h + 26 \cos 2\pi\omega h + 33}, \quad k = 1, 2, ..., N.$$

Оптимальные коэффициенты квадратурной формулы определяется формулой

$$\overline{\overset{o}{C}_k}(3) = \begin{cases} -\frac{1}{2\pi i\omega} + \frac{\overset{o}{!}_1(3)}{e^{2\pi i\omega h} - 1} & ?@8 \quad k = 0, \\ \overset{o}{C}_k(3) & ?@8 \;\; 1 \leqslant k \leqslant N - 1, \\ \overset{o}{C}_N(3) - \frac{\overline{C_1}(3)}{e^{2\pi i\omega h} - 1} + \frac{1}{2\pi i\omega} & ?@8 \quad k = N. \end{cases}$$

Теорема 3. *Для квадрата нормы функционала погрешности* $l_3(x)$ *в пространстве* $H_2^3(0,1)$ *справедлива следующая формулы*

$$\left\| \overset{o}{l}\, | H_2^{(3)*} \right\|^2 = \frac{1}{\omega^6} \left[1 - \left(\frac{\sin \pi\omega h}{\pi\omega h} \right)^6 \cdot \frac{60}{\cos 4\pi\omega h + 26 \cos 2\pi\omega h + 33} \right].$$

Заключение

В данной работе методом периодизации функций построены оптимальные квадратурные формулы с производными, т.е. квадратурные формулы типа Эрмита для приближенного вычисления быстроосциллирующих интегралов в пространстве дифференцируемых функций. Для построения этих формул мы использовали метод периодизации функций и оптимальные квадратурные формулы для быстроосциллирующих интегралов в пространстве периодических функций. Кроме того мы нашли точную верхнею оценку построенных оптимальных квадратурных формул.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Filon L. N. G.On a quadrature formula for trigonomrtric integrals // . Proc. Roy. Soc. Edinb. 1928, 49, C. 38-47.

2. Shadimetov Kh. M., Hayotov A. R., Abdikayimov B. B. On an Optimal Quadrature Formula in a Hilbert Space of Periodic Functions // Algorithms 2022, 15, 344, https:doi.org/10.3390/a15100344.

3. Шадиметов Х. М., Гуломов О. Х. Об одном новом методе построения составных оптимальных квадратурных формул // Проблемы вычислительной и прикладной математики, 2021. - №6(36). – С. 1-9.

4. Хемминг Р. В. Численные методы // Москва: Наука, 1968. -400 с.

Секция 8. Дискретная математика

УДК 519.1

Вопросы теории обобщенных метрических пространств

Е. И. Деза (Россия, г. Москва)
Московский педагогический государственный университет
e-mail: elena.deza@gmail.com

Questions of the theory of generalized metric spaces

E. I. Deza (Russia, Moscow)
Moscow Pedagogical State University
e-mail: elena.deza@gmail.com

Теория метрик и метрических пространств является важной составной частью современной математики. Метрики и их обобщения играют важную роль при решении множества фундаментальных и прикладных задач [1], [2].

Следуя формальному определению, назовем *метрикой* на множестве X отображение $d : X \times X \to \mathbb{R}$, удовлетворяющее, для всех $x, y, z \in X$, условиям *неотрицательности*, $d(x, y) \geq 0$, *положительной определенности*, $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$, *симметричности*, $d(x, y) = d(y, x)$, и *неравенству треугольника*, $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

Отбрасывание условия положительной определенности ведет к понятию *полуметрики* на множестве X, функции, допускающей нулевое расстояние между различными объектами. Поскольку неотрицательная линейная комбинация двух полуметрик является полуметрикой (неотрицательная линейная комбинация двух метрик является, в общем случае, лишь полуметрикой), то множество всех полуметрик на конечном множестве X образует полиедральный конус. Конус MET_n всех полуметрик на n точках является основным объектом теории конечных метрических пространств. Он имеет размерность $\frac{n(n-1)}{2}$ и обладает рядом фундаментальных свойств. С метрическим конусом MET_n тесно связаны конус *разрезов* CUT_n и конус *гиперметрик* HYP_n на том же множестве точек:

$$CUT_n \subset HYP_n \subset MET_n.$$

Если отбросить в определении метрики (полуметрики) свойство симметричности, мы получим понятие *квазиметрики* (*квазиполуметрики*). Множество всех квазиполуметрик на конечном множестве X образует полиедральный конус. Конус $QMET_n$ всех полуметрик на n точках имеет размерность $n(n-1)$; с ним связаны конус *ориентированных разрезов* $OCUT_n$ и конус *ориентированных гипермемтрик* $OHYP_n$ на том же множестве точек:

$$OCUT_n \subset OHYP_n \subset QMET_n.$$

Мы находим все образующие и грани указанных конусов, полностью описывая имеющиеся связи между ними, для малых значений n: $3 \leq n \leq 7$ в неориентированном случае (см. [1]), $3 \leq n \leq 5$ в ориентированном случае (см. [2]). Мы доказываем ряд соотношений, имеющих место для произвольного n.

Основным результатом является следующее утверждение.

• *Ориентированные обобщенные метрические структуры на n точках могут быть получены как проекции неориентированных метрических структур на $n+1$ точке; в частности, конус $OCUT_n$ ориентированных разрезов является проекцией конуса разрезов CUT_{n+1}.*

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Deza M.M., Laurent M. Geometry of cuts and metrics. – Springer-Verlag: Berlin, 1997. 625 p.
2. Deza M.M., Deza E. I., Dutour Sikirić M. Generalizations of finite metrics and cuts. – World Scientific: Singapore, 2016. 304 p.

УДК 511, 519.6

О некоторых вопросах, связанных с арифметической производной и ее приложениями

Е. И. Деза (Россия, г. Москва)
Московский Педагогический Государственный Университет
e-mail: elena.deza@gmail.com
Т. Н. Казарихина (Россия, г. Москва)
Московский Педагогический Государственный Университет
e-mail: mathanaliz@gmail.com
Д. Ю. Ганусенко (Россия, г. Москва)
Московский Педагогический Государственный Университет
e-mail: darya.ganusenko@gmail.com
С. О. Тихонов (Россия, г. Москва)
Московский Педагогический Государственный Университет
e-mail: stihonov3107@yandex.ru

Some questions related to the arithmetic derivative and its applications

E.I . Deza (Russia, Moscow)
Moscow Pedagogical State University
e-mail: elena.deza@gmail.com
T.N . Kazarikhina (Russia, Moscow)
Moscow Pedagogical State University
e-mail: mathanaliz@gmail.com
D. Y. Ganusenko (Russia, Moscow)
Moscow Pedagogical State University
e-mail: darya.ganusenko@gmail.com
S. O. Tikhonov (Russia, Moscow)
Moscow Pedagogical State University
e-mail: stihonov3107@yandex.ru

1. На числовых множествах можно ввести ряд понятий, аналогичных классическим понятиям математического анализа, включая понятия *производная, первообразная, интеграл.* Один из существующих подходов (см., например, [1], [4]) связан с построением теории так называемых *арифметических производных.*

Определим *арифметическую производную* натурального числа (см., например, [4]) следующим образом:

1. $p^{'} = 1$ для любого простого числа p;
2. $(ab)^{'} = a^{'}b + ab^{'}$ для любых натуральных чисел a и b (*правило Лейбница*).

На множества целых и рациональных чисел это понятие расширяется естественным образом: мы полагаем, что $(-n)^{'} = -n^{'}$ для любого натурального числа n, и требуем сохранения правила Лейбница.

Нетрудно убедиться в том, что значение арифметической производной рационального числа зависит только от его представления в виде произведения целых степеней различных простых чисел: если $x = \prod_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i}$, где $p_1, p_2, ..., p_k \in P$, $p_i \neq p_j$, и $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k \in \mathbb{Z}$, то

$$x' = x\sum_{i=1}^{k}\frac{\alpha_i}{p_i}.$$

Исходя из определения арифметической производной, можно утверждать, что классические правила "производная произведения" и "производная частного" имеют место и в случае дифференцирования рациональных чисел. Однако правило "производная суммы" при таком подходе сохранить не удастся. В самом деле, в случае легитимности правила суммы мы получили бы для любого натурального числа n следующий результат:

$$n^{'} = (1+1+\cdots+1)^{'} = 1^{'} + 1^{'} + \cdots + 1^{'} = 0.$$

2. Непосредственная проверка показывает, что арифметическая производная целых чисел $0, 1$ и -1 равна нулю: $0^{'} = 0$, $1^{'} = 0$, и $(-1)^{'} = 0$. Более того, $0, 1$ и -1 – единственные целые числа, обладающие нулевой арифметической производной. С другой стороны, нетрудно доказать, что существует бесконечно много рациональных чисел, арифметическая производная которых равна нулю. Например, $(\frac{4}{27})^{'} = 0$, $(\frac{27}{3125})^{'} = 0$, $(\frac{3125}{4})^{'} = 0$, $(\frac{p^p}{q^q})^{'} = 0$, $p, q \in P$, $p \neq q$.

Назовем рациональное число, арифметическая производная которого равна 0, *арифметической константой*. Арифметические константы обладают рядом важных свойств, два из которых представлены ниже.

Прежде всего, можно доказать, что арифметическую константу можно выносить из под знака арифметической производной.

Теорема 1. *Пусть $q, k \in \mathbb{Q}, q \neq 0$. Равенство*

$$(kq)' = k \cdot q'$$

выполнено тогда и только тогда, когда k – арифметическая константа.

Аналогичный результат можно сформулировать, рассматривая проблему с другой стороны. Назовем *арифметической первообразной* рационального числа a такое рациональное число x, которое является решением уравнения $x' = a$. Множество $I(a)$ всех арифметических первообразных числа a назовем *интегрирующей функцией* данного числа.

Теорема 2. *Пусть $q, k \in \mathbb{Q}, q \neq 0$. Равенство*

$$I(kr) = kI(r)$$

выполнено тогда и только тогда, когда k – арифметическая константа.

Нетрудно показать, что *существуют натуральные числа, которые не имеют натуральных первообразных*. Такими числами являются, например, 2, 3, 11, 17, 23, 29, 35 (и многих других нечетных натуральных чисел). Результат следует из свойства ограниченности арифметической производной на множестве $\mathbb{N}$ (см., например, [4]).

С другой стороны, рациональными первообразными число 2 (как и другие представленные выше натуральные числа) обладает. Например, $-\frac{21}{16} \in I(2)$. Тем не менее, в литературе можно найти следующую *гипотезу о первообразных рациональных чисел*:

• *существуют рациональные числа, которые не имеют рациональных первообразных.*

Если указанная гиптеза верна, то из теоремы 2 следует значительно более сильный результат, *уточненная гипотеза о первообразных рациональных чисел*:

• *существует бесконечно много рациональных чисел, которые не имеют рациональных первообразных.*

3. Введение понятия арифметической производной позволяет решать множество прикладных задач. Среди них – вопросы разрешимости уравнений в арифметических производных. Мы представляем ряд результатов, связанных с указанной тематикой.

1. Линейное неоднородное уравнение

$$x' + ax = b, \ \ a, b \in \mathbb{Q}. \tag{1}$$

   Получены все рациональные решения этого уравнения в случае разрешимости самого уравнения $x' + ax = b$ и соотвествующего ему однородного уравнения $x' + ax = 0$. Доказано, что $\frac{x_1}{x_0} \in I(\frac{b}{x_0})$, где x_1 – частное решение уравнения $x' + ax = b$, а x_0 – ненулевое частное решение уравнения $x' + ax = 0$.

2. Линейное неоднородное уравнение

$$x' + ax = kb, \ \ a, b, k \in \mathbb{Q}, k \in I(0). \tag{2}$$

   Доказано, что уравнение (2) разрешимо тогда и только тогда, когда разрешимо уравнение (1) и, в случае разрешимости, все рациональные решения уравнения (2) имеют вид kx_0, где x_0 – некоторое решение уравнения (1).

3. Линейные уравнения

$$x' = (a + b)x, \ \ x' = ax, \ \ x' = bx \ a, b \in \mathbb{Q}. \tag{3}$$

   Найдена связь между решениями тройки (3) дифференциальных уравнений.

Кроме того, мы рассматриваем различные аспекты решения уравнения $x' + ax = bx^n$, являющегося "арифметическим" аналогом *уравнения Бернулли*, и уравнений с переменными коэффициентами $x' + ax = f(x)x$, $x' = f(x)x$, где $f(x)$ – *рациональная полностью аддитивная функция*: $f(xy) = f(x) + f(y)$ для всех $x, y \in \mathbb{Q}$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. E. J. Barbeau, Remarks on arithmetic derivative, Canad. Math. Bull, 4 (1961), 117–122.
2. Kovič Jurij, The Arithmetic Derivative and Antiderivative, (2015) Journal of Integer Sequences, 16 (12.3.8)
3. T. Tossavainen, P. Haukkanen, J. K. Merikoski, and M. Mattila, We can differentiate numbers, too, The College Mathematics Journal 55 (2024), no. 2, 100-108.
4. Ufnarovski, V., Ahlander, B. (2003). How to differentiate a number. Journal of Integer Sequences, 6(03.3.4)

УДК 519.1

Процессный анализ

А. Н. Исаченко (Беларусь, г. Минск)
Белорусский государственный университет
e-mail: isachenkoan@mail.ru

Process analysis

A. N. Isachenko (Belarus, Minsk)
Belarusian State University
e-mail: isachenkoan@mail.ru

Целью данного сообщения является привлечение внимания исследователей к рассмотрению задач, связанных с анализом процессов.

Процесс представляет собой поведение системы, которое заключается в выполнении действий. Термин «процесс» встречается во многих предметных областях. В теории организационных систем процесс - это повторяемая последовательность действий, направленная на достижение поставленной цели, в информатике – совокупность действий, преобразующих входящие данные в исходящие. Или, эквивалентно, выполнение некоторой программы, возможно, с учётом необходимых для её выполнения ресурсов. В любом из определений процесса присутствует конечное множество действий A, $|A| = n$, с двумя выделенными подмножествами $As \subset A$ (начальные действия), $Ae \subset A$ (конечные действия), $As \cap Ae = \emptyset$, и семейство упорядоченных подмножеств выполнений действий

$F = \{(a_s, a_1, \ldots, a_k, a_e) \mid a_s \in As, a_e \in Ae, a_i \in A \setminus (As \cup As), i = 1, \ldots, k\}$.

Процесс - это многократное повторение упорядоченных подмножеств действий из F [1]. Единичная реализация конкретной совокупности действий, входящих в семейство F называется экземпляром процесса или трассой процесса. Процесс всегда можно рассматривать с одним начальным и одним конечным действиями. Для этого достаточно ввести одно начальное действие a_s, считая его непосредственно предшествующим каждому действию из As , и одно конечное действие a_e, считая его непосредственно следующим за каждым действием из Ae. Из выше данного определения следует, что для задания процесса нам необходимо указать множество действий, совершаемых при выполнении процесса, и семейство экземпляров процесса.

Ещё одно определение процесса даётся в [2]. Оно основано на понятии состояния процесса и переходе из одного состояния в другое при выполнении действия. Более точно, если A множество действий, то процесс - это четвёрка (S, s_s, s_e, R) , где S – множество состояний, $s_s \in S$ - начальное состояние, $s_e \in S$ - конечное состояние, R - подмножество вида $R \subseteq S \times A \times S$, элементы которого называются переходами. Функционирование процесса заключается в порождении последовательности переходов и выполнении действий, соответствующих этим переходам. Экземпляр процесса есть последовательность действий $a_1, a_2, \ldots, a_k$ такая, что существует последовательность состояний $s_0, s_1, s_2, \ldots, s_{k+1}$, где $s_0 = s_s$, $s_{k+1} = s_e$ и $s_i \times a_i \times s_{i+1} \in R$ для каждого $i \geq 1$. То есть, для задания процесса нам понадобится указать множество действий, множество состояний и множество переходов.

Отметим, что такому определению соответствует граф состояний процесса, вершины которого соответствуют состояниям, а дуги - действиям процесса.

Следующее определение связано с понятием причинно-следственного отношения и понятием связок действий. Процесс определяется как шестёрка (A, a_s, a_e, D, I, O) , где A – множество действий, a_s, a_e - соответственно начальное и конечное действия, $D \subseteq A \times A$ - причинно-следственное отношение, $I \in A- > 2^A$ определяет множество входных связок для действий, $O \in A- > 2^A$ определяет множество выходных связок для действий. Входная связка a^I для $a \in A$ это набор действий, непосредственно предшествующих a, выполнение которых приводит к выполнению действия a. Выходная связка a^O для $a \in A$ это набор действий, непосредственно следующих за a, выполнение которых возможно после выполнения действия a. Тройка (a, a^I, a^O) означает выполнение действия a после выполнения действий a^I с последующим выполнением действий a^O. Экземпляр процесса, как и ранее, последовательность действий от начального к конечному. Данному определению соответствует причинно-следственная сеть (С-сеть), с узлами, соответствующими действиям, и дугами, указывающими причинно-следственные отношения.

Ещё одно определение процесса даётся в терминах сети Петри [3]. Сеть Петри является четверкой $C = (P, T, I, O)$. Здесь $P = \{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$ – конечное множество позиций, $n \geq 0$. $T = \{t_1, t_2, \ldots, t_m\}$ – конечное множество переходов, $m \geq 0$. Множество позиций и множество переходов не пересекаются, $P \cap T = \varnothing$. $I : T- > P^\infty$ является входной функцией – отображением из переходов в комплекты позиций. $O : T- > P^\infty$ есть выходная функция – отображение из переходов в комплекты позиций.

Граф G сети Петри есть двудольный ориентированный мультиграф, $G = (V, A)$, где $V = P \cup T$, $P \cap T \neq \varnothing$, $P = \{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$ – множество вершин первой доли, $T = \{t_1, t_2, \ldots, t_m\}$ – вершины второй доли, $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_r\}$ – комплект направленных дуг. Так как G двудольный мультиграф, то для любой дуги $a_i \in A, a_i = (v_k, v_j)$, либо $v_k \in P$, $v_j \in T$, либо $v_j \in P$, $v_j \in T$.

Можно дать определение процесса и в других терминах и понятиях, но для обозначения проблем анализа процессов достаточно приведенных определений.

Первый возникающий вопрос – являются ли приведенные определения криптоморфными? Способы определения процессов, когда за “новые” аксиомы в определении берутся такие свойства процессов, при которых “старые” становятся “новыми” свойствами, называются криптоморфными. Другими словами, можем ли мы по одному способу задания процесса однозначно определить все структуры и характеристики, требуемые другим определением? Например, зная все трассы процесса, можно ли однозначно построить сеть Петри? Или наоборот, по сети Петри процесса перечислить все экземпляры процесса.

Вопрос вполне уместный, если учесть, что задание процесса по указанным выше первым двум определениям обладает тем недостатком, что количество трасс и состояний процесса может экспоненциально зависеть от числа действий (например, если действия могут выполняться параллельно) и, следовательно, их перечисление для задания процесса потребует больших вычислительных затрат. В этом плане сеть Петри и С-сеть являются предпочтительней, поскольку позволяют строить трассы по мере их необходимости. Удачный выбор того или иного определения при рассмотрении конкретной задачи значительно упрощает её решение.

Отметим, что в настоящее время основной задачей является переход от задания процесса совокупностью своих трасс к заданию процесса сетью Петри или С-сетью. Это объясняется тем фактом, что при анализе реальных процессов главным источником информации является журнал событий процесса. Журнал событий процесса — это перечень упорядоченных во времени действий (событий), выполняемых в рамках реализации процесса. Обязательные поля журнала событий: $Process\ ID$ — определяет экземпляр процесса, то есть перечень действий, объединённых одной меткой ID; $Event$ — определяет действия, выполняемые в рамках экземпляров процесса; $Timestamp$ — момент начала совершения действия.

Переход от одной формы задания процесса к другой осуществляется алгоритмически. Первым алгоритмом для построения сети Петри по журналу событий является альфа-алгоритм [1], основанный на выявлении по экземплярам процесса причинно-следственных отношений между действиями процесса. Определены четыре вида отношений: непосредственное предшествование $>$, чистое непосредственное предшествование ->, параллельность $||$, отсутствие предшествования $\#$. Обозначим журнал событий через L. Пусть $a, b \in A$. Укажем приведенные выше отношения:

$a >_L b$ тогда и только тогда, когда в L существует экземпляр процесса, в котором действие a непосредственно предшествует действию b;

$a- >_L b$ тогда и только тогда, когда $a >_L b$ и $b\neg >_L a$;

$a||_L b$ тогда и только тогда, когда $a >_L b$ и $b >_L a$;

$a\#_L b$ тогда и только тогда, когда $a\neg >_L b$ и $b\neg >_L a$.

Здесь $\neg$ - символ отрицания.

После определения отношения для каждой пары действий процесса, переходим к построению сети Петри. Первоначально сеть состоит только из переходов, соответствующих действиям A. Далее добавляем позиции сети Петри. Для этого определяем все пары подмножеств $(B, C), B \subset A, C \subset A$, такие что:

для любых $b \in B, c \in C$ выполняется $b- >_L c$;

для любых $b_1, b_2 \in B$ выполняется $b_1\#b_2$;

для любых $c_1, c_2 \in C$ выполняется $c_1\#c_2$.

Среди найденных пар (B, C) оставляем только те, которые являются максимальными по включению действий. Далее по каждой оставленной паре (B, C) в граф Петри добавляем позицию $p(B, C)$ с входящими в неё дугами из каждого $b \in B$ и выходящими из $p(B, C)$ дугами в каждый $c \in C$.

Добавляем начальную p_I и конечную p_O позиции в сеть Петри. Соединяем p_I дугами с каждым переходом As и каждый переход из Ae соединяем дугами с конечной позицией p_O.

Альфа-алгоритм обладает недостатками. В частности, он не обнаруживает циклы длиной один (в экземпляре процесса присутствует повторяющееся действие (... , a, a , ...) и два (в экземпляре процесса присутствует возврат к действию через одно выполненное ..., a, b, a , ...).

Альфа+ алгоритм [4] позволяет обрабатывать циклы длины один и два и помещать их в сеть Петри. Для этого вводятся дополнительные отношения для действий:

$a \triangle_L b$ тогда и только тогда, когда существует экземпляр процесса, содержащий последовательность... , a, b, a , ...;

$a \diamond_L b$ тогда и только тогда, когда существует экземпляр процесса, содержащий последовательности... , a, b, a , ... и... , b, a, b , ...

И переопределяются отношения чистого непосредственного предшествования и параллельности:

$a- >_L b$ тогда и только тогда, когда $a >_L b$ и $(b\neg >_L a \vee a \diamond_L b)$;

$a||_L b$ тогда и только тогда, когда $a >_L b$ и $b >_L a$ и $a\neg \diamond_L b$.

Первоначально альфа+ алгоритм по журналу событий L находит множество $A_1 \in A$ всех действий, образующих циклы единичной длины, и множество действий $A^1 = A \setminus A_1$. Далее для всех действий $a \in A_1$ строим пары (b, a) , где $b \in A^1$ и $b >_L a$, (a, b) , где $b \in A^1$ и $a >_L b$. Эти пары интерпретируются как дуги, которые будут добавлены в сеть Петри. Множество построенных пар обозначим E. Удаляем из журнала L записи о действиях множества A_1. Получим журнал L_1. К журналу L_1 применяем альфа-алгоритм и строим сеть Петри. Добавляем к сети Петри переходы, соответствующие действиям из A_1 и дуги множества E.

На основе альфа-алгоритма разработана серия эвристических, генетических алгоритмов и алгоритмов регионов [1] для построения сети Петри и С-сети.

Эвристические алгоритмы учитывают не только бинарные отношения, связывающие действия между собой, но и частоту действий, частоту бинарных отношений и частоту экземпляров процесса. Результатом работы эвристических алгоритмов является С-сеть. Основная идея заключается в том, что редкие экземпляры процесса не следует включать в С-сеть. Тем самым эвристические алгоритмы теряют часть трасс исходного процесса и не могут строить точную С-сеть.

Генетические алгоритмы - это адаптивные методы поиска, имитирующие эволюционное развитие. Популяции эволюционируют путем отбора наиболее приспособленных особей и создания новых особей с использованием генетических механизмов , таких как скрещивание (объединение частей двух или более особей) и мутация (случайная модификация особи). Основой для выбора особей, реализации генетических механизмов и мутации является матрица причинно-следственных отношений.

Алгоритмы регионов основаны на понятии состояния процесса и переходе из одного состояния в другое при выполнении действия. Моделью такой системы является граф с множеством вершин, соответствующих состояниям, и дуг, соответствующим действиям. Такой граф называется системой переходов. Системы перехода просты, но имеют проблемы с точным выражением параллелизма. Используя некоторую функцию представления состояний, мы можем автоматически построить систему перехода на основе журнала событий L. Преобразовав журнал событий в систему переходов, мы можем синтезировать из неё сеть Петри. Задача состоит в том, чтобы объединить большую систему переходов в меньшую сеть Петри, обнаружив параллелизм. Основная идея заключается в обнаружении регионов, которые соответствуют позициям сети Петри. Регион - это набор состояний, при котором все действия в системе переходов “согласуются” с регионом.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Wil M.P. van der Aalst. Process Mining. - Berlin: Springer, 2016. – 467 p.
2. Миронов А.М. Теория процессов.- Переславль-Залесски:: Издательство НОУ Институт программных систем. 2008. – 346 с.
3. Котов В. Е. Сети Петри. — М.: Наука, 1984. — 160 с.
4. Alves De Medeiros, A. K., Dongen, van, B. F., Aalst, van der, W. M. P., Weijters, A. J. M. M. (2004). Process mining : extending the alpha-algorithm to mine short loops. (BETA publicatie : working papers; Vol. 113). Technische Universiteit Eindhoven.

УДК 519.16

Выравнивание последовательностей со структурой[1]

Г. А. Хазиев (Россия, г. Москва)
Институт проблем передачи информации им. А. А. Харкевича РАН
e-mail: georgy.haziev@yandex.ru
А. В. Селиверстов (Россия, г. Москва)
Институт проблем передачи информации им. А. А. Харкевича РАН
e-mail: slvstv@iitp.ru

[1]Работа выполнена в рамках государственного задания ИППИ РАН, утвержденного Минобрнауки России.

В. А. Любецкий (Россия, г. Москва)
Институт проблем передачи информации им. А. А. Харкевича РАН
e-mail: lyubetsk@iitp.ru

Structure-aware sequence alignment

G. A. Khaziev (Russia, Moscow)
Institute for Information Transmission Problems of the RAS (Kharkevich Institute)
e-mail: georgy.haziev@yandex.ru
A. V. Seliverstov (Russia, Moscow)
Institute for Information Transmission Problems of the RAS (Kharkevich Institute)
e-mail: slvstv@iitp.ru
V. A. Lyubetsky (Russia, Moscow)
Institute for Information Transmission Problems of the RAS (Kharkevich Institute)
e-mail: lyubetsk@iitp.ru

1. Введение

Вычисление (обобщённого) редакционного расстояния, поиск наибольшей общей подпоследовательности и выравнивание последовательностей широко используются в биоинформатике. Обобщённое редакционное расстояние, при котором замены и вставки дают разные вклады в расстояние, легко вычислить за квадратичное время [1]. Известно несколько алгоритмов для точного вычисления редакционного расстояния за меньшее время [2, 3]. Для фиксированной верхней границы на редакционное расстояние известны алгоритмы, время работы которых линейно зависит от длины последовательностей [4]. Программа MMseqs2 реализует быстрый эвристический алгоритм [5].

Для предсказания структуры белка уже создано несколько алгоритмов [6, 7]. Однако предсказание структуры по одной последовательности может быть трудным для белков с различными альтернативными структурами, формирование которых зависит от небольших изменений внешних условий. Другой причиной изменения структуры может быть модификация отдельных аминокислот.

Менее изучены задачи выравнивания последовательностей с учётом некоторой дополнительной структуры. Примером такой структуры, важной для изучения нуклеотидных последовательностей, служат несовершенные палиндромы, рассмотренные в недавней статье [8].

Мы рассмотрим аминокислотные последовательности со структурой, участвующей в образовании димеров или более сложных комплексов белков, состоящих из нескольких субъединиц. Такие структуры белков были впервые открыты в 1952 году Фрэнсисом Криком и названы coiled-coil. Известно много типов таких структур, образованных α-спиралями с повторяющимися гидрофобными аминокислотами [9]. Поскольку на один виток α-спирали приходится в среднем 3.6 аминокислот, два витка составляют близкое к целому число аминокислот. Поэтому для взаимодействия двух α-спиралей важно повторение гидрофобных аминокислот с периодом семь. Обычно рассматривают вырожденные повторы участка $abcdefg$, где на позициях a и d расположены гидрофобные аминокислоты, а на позициях b, c и f заряженные аминокислоты. Частный случай, когда позиции с периодом семь занимает лейцин, называется лейциновой молнией. Метод для предсказания в одной последовательности такого участка, который входит в состав структуры coiled-coil, был реализован в программе COILS, которую предложил Андрей Лупас (Andrei Lupas). Однако такое предсказание не учитывает выравнивания разных последовательностей.

Мы рассматриваем задачу выравнивания двух аминокислотных последовательностей, при котором вычисляется обобщённое редакционное расстояние и общие потенциальные участки, участвующие в образовании структуры coiled-coil.

2. Предварительные результаты

Метод Нидлмана–Вунша [1] состоит в последовательном заполнении таблицы (обобщённых) редакционных расстояний между всеми префиксами двух исходных последовательностей. В итоге в нижнем правом углу этой таблицы записано расстояние между последовательностями. Масек и Патерсон в 1980 году заметили, что этот метод требует меньшего времени и меньшей памяти, если исходные последовательности разбить на блоки, которые могут повторяться. Таблица расстояний заполняется лишь для префиксов, состоящих из целого числа блоков.

3. Результаты

Задача многокритериальной оптимизации может быть сведена к задаче оптимизации одного функционала с заранее неизвестными параметрами, определяющими относительный вклад отклонения кадого из функционалов исходной задачи от оптимума.

Разметим в каждой из последовательностей (независимо от их выравнивания между собой) гептамеры — участки по семь аминокислот, соответствующие образцу для структур coiled-coil. Эти участки могут пересекаться между собой или быть разделены друг от друга любым числом аминокислот. Для всех пар гептамеров из разных последовательностей вычисляется расстояние при выравнивании без делеций. (Здесь видна аналогия с алгоритмом Масека–Патерсона.)

Рассмотрим наряду с основной таблицей расстояний между префиксами последовательностей, вспомогательные таблицы для других вариантов выравнивания.

Пусть известно оптимальное выравнивание (с оптимальной разметкой участков) для префиксов, длины которых меньше чисела j для первой или числа k для второй последовательности. Для заполнения новых ячеек таблиц, рассмотрим несколько случаев.

Если хотя бы одна из позиций — j-я в первой или k-я во второй последовательности — не покрыта ранее размеченными гептамерами, то вычисляем расстояние между префиксами, длины которых равны j и k соответственно, как обычно в методе Нидлмана–Вунша.

Если обе позиции — j-я в первой и k-я во второй последовательности — покрыты ранее размеченными гептамерами, то параллельно продолжаем выравнивание двумя путями. На первом пути к префиксу добавляется гептамер, как это делалось в алгоритме Масека–Патерсона. Результаты вносятся во вспомогательную таблицу. На втором пути добавляем дополнительный штраф (за отказ от учёта гептамера) и продолжаем заполнение второй вспомогательной таблицы, пока не будет добавлено достаточно много (хотя бы семь) новых позиций. При этом может быть вторичное разветвление. Если на втором пути получено оптимальное расстояние для префиксов достаточно большой длины, то это значение сравнивается со значением на первом пути. Из этих вариантов выбирается меньшее. После того, как такой выбор сделан, значение расстояния записывается в основную таблицу и уже не меняется. Но из-за вторичных разветвлений окончательный выбор может быть отложен.

4. Заключение

Рассматриваемый нами метод может применяться для уточнения предсказания структуры белка и также для уточнения отношения гомологичности белков с учётом структуры. Малое время работы позволит проводить вычисления с большими наборами белков, в частности, при изучении эволюции эукариотических белков.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Янковский В. О. Группы изометрий формальных языков относительно обобщенных метрик Левенштейна // Матем. заметки. 2024. Т. 116, № 2. С. 306–315.

2. Tiskin A. Semi-local longest common subsequences in subquadratic time // Journal of Discrete Algorithms. 2008. V. 6. No. 4. P. 570–581.

3. Grabowski S. New tabulation and sparse dynamic programming based techniques for sequence similarity problems // Discrete Applied Mathematics. 2016. V. 212. P. 96–103.

4. Kociumaka T., Radoszewski J., Starikovskaya T. Longest common substring with approximately k mismatches // Algorithmica. 2019. V. 81. No. 6. P. 2633–2652.

5. Steinegger M., Söding J. MMseqs2 enables sensitive protein sequence searching for the analysis of massive data sets // Nature Biotechnology. 2017. V. 35. P. 1026–1028.

6. Jumper J., Evans R., Pritzel A. et al. Highly accurate protein structure prediction with AlphaFold. Nature. 2021. V. 596. P. 583–589.

7. Rachitskii P., Kruglov I., Finkelstein A.V., Oganov A.R. Protein structure prediction using the evolutionary algorithm USPEX // Proteins. 2023. V. 91. No. 7. P. 933–943.

8. Зверков О. А., Селиверстов А. В., Шиловский Г. А. Выравнивание скрытого палиндрома // Математическая биология и биоинформатика. 2024. Т. 19, № 2, С. 427–438.

9. Truebestein L., Leonard T. A. Coiled-coils: The long and short of it // Bioessays. 2016. V. 38. No. 9. P. 903–916.

Секция 8. Теоретико-числовой метод в приближенном анализе

УДК 517.518

Диадическое разбиение единицы

П. А. Алексеев (Россия, г. Тула)
Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого
e-mail: pavel@alekseev.io

Dyadic partition of unity

P. A. Alekseev (Russia, Tula)
Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University
e-mail: pavel@alekseev.io

Определим на множестве $(-\infty,-1)\cup(-1,1)\cup(1,\infty)$ функцию $\eta(x)$:

$$\eta(x)=\exp\left(-\frac{1}{(1+x)(1-x)}\right) \tag{1}$$

Индукцией по l легко показать, что

$$\frac{d^l\eta}{dx^l}(x)=P_l\cdot\eta(x), \tag{2}$$

где $P_l(x)$ полиномы, определяемые начальным значением $P_0(x)=1$, а остальные вычисляются по рекуррентной формуле:

$$P_{l+1}(x)=P_l'(x)-y'(x)P_l,\ y=\frac{1}{(1+x)(1-x)} \tag{3}$$

Степень $P_0(x)=0$, а для остальных l:

$$l=1,2,3,\ldots,\quad degP_l(x)=3l-2 \tag{4}$$

Функция $exp(-y)$ при $y\geq 1$ убывает быстрее любой степенной функции y^{-A} для любого $A\geq 0$. Поэтому y на интервале $(-1,1)$ при $l=0,1,2,\ldots$ выполняется неравенство:

$$\frac{d^l\eta}{dx^l}(x)\underset{A,l}{\ll}((1+x)(1-x))^A \tag{5}$$

Из вышесказанного следует, что функция $\eta(x)$, доопределённая нулём вне интервала $(-1,1)$, будет бесконечно дифференцируемой на всей вещественной оси.

Определим ещё одну бесконечно дифференцируемую функцию:

$$\tilde{\Theta}(x)=\frac{1}{C}\int_{-\infty}^{x-1}\eta(2y)\,dy,\quad C=\int_{-1/2}^{1/2}\eta(2y)\,dy \tag{6}$$

и при этом

$$\tilde{\Theta}(x)=\begin{cases}0, & \text{если } -\infty<x\leq 1/2;\\ \text{монотонно возрастает,} & \text{если } 1/2\leq x\leq 3/2;\\ 1, & \text{если } 3/2\leq x<\infty.\end{cases} \tag{7}$$

И, наконец, определим ещё одну бесконечно дифференцируемую функцию

$$\Theta(x) = \tilde{\Theta}(x) - \tilde{\Theta}(x/2), \tag{8}$$

для которой

$$\Theta(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } -\infty < x \le 1/2; \\ \tilde{\theta}(x), & \text{если } 1/2 \le x \le 1; \\ \tilde{\theta}(x) - \tilde{\theta}(x/2), & \text{если } 1 \le x \le 3/2; \\ 1 - \tilde{\theta}(x/2), & \text{если } 3/2 \le x \le 2; \\ 0, & \text{если } 2 \le x < \infty. \end{cases} \tag{9}$$

Отметим также, что $\Theta(x) > 0$ $\forall x \in (1/2, 3/2)$ по причине монотонного возрастания $\tilde{\Theta}(x)$ на интервале $(1/2, 3/2)$.

Лемма 1. *Существует точка $x_0 \in (1, 3/2)$, такая что функция $\Theta(x)$ монотонно возрастает на интервале $(1/2, x_0)$ и монотонно убывает на интервале $(x_0, 2)$.*

Доказательство. Из (9) следует, что достаточно доказать монотонное возрастание $\Theta(x)$ на отрезке $[1, x_0]$ и монотонное убывание на отрезке $[x_0, 3/2]$. Из определения функции следует, что на интервале $(1/2, 3/2)$:

$$\frac{d\Theta}{dx}(x) = \frac{d\tilde{\Theta}}{dx}(x) - \frac{1}{2}\frac{d\tilde{\Theta}}{dx}(x/2) = \frac{1}{C}\left(\eta(2x-2) - \frac{1}{2}\eta(x-2)\right) =$$
$$= \frac{1}{C}\left(\exp\left(-\frac{1}{(2x-1)(3-2x)}\right) - \frac{1}{2}\exp\left(-\frac{1}{(x-1)(3-x)}\right)\right). \tag{10}$$

Равенство $\tilde{\Theta}(x) = 0$ эквивалентно равенству

$$2\exp\left(-\frac{1}{(2x-1)(3-2x)}\right) = \exp\left(-\frac{1}{(x-1)(3-x)}\right). \tag{11}$$

Прологарифмировав его по основанию e получим:

$$log(2) = f(x) - g(x),$$
$$f(x) = \frac{1}{(2x-1)(3-2x)},\ g(x) = \frac{1}{(x-1)(3-x)}\ . \tag{12}$$

Так как

$$f'(x) = \frac{8(x-1)}{(2x-1)^2(3-2x)^2},\ g'(x) = \frac{2(x-2)}{(x-1)^2(3-x)^2}, \tag{13}$$

то $f(x)$ монотонно возрастает на $(1/2, 3/2)$, а $g(x)$ там же монотонно убывает. При этом $f(1) = 1$ и $f(x) \to \infty$ при $x \to 3/2$ слева, а $g(3/2) = 4/3$ и $g(x) \to \infty$ при $x \to 1$ справа. Поэтому уравнение (12) имеет корни в единственной точке $x = x_0 \in (1, 3/2)$.

Решим уравнение (12) и найдем x_0. Общее решение сводится к уравнению 4й степени:

$$4x^4\log(2) - 24x^3\log(2) + x^2(47\log(2) - 3) - 4x(9\log(2) - 1) + 9\log(2) = 0, \tag{14}$$

Поэтому найдем решение численными методами, используя математический пакет Wolfram, и выберем действительные корни.

$$x_1 = 1,37751,\ x_2 = 3,53728, \tag{15}$$

Подходит корень x_1, что является точкой перегиба функции $\Theta(x)$.

Лемма доказана. □

Замечание 1. *Для любых целых k и l носители функций*

$$\operatorname{supp}\Theta(2^l x) = (2^{-l-1}, 2^{-l+1}),$$
$$\operatorname{supp}\Theta(2^k x) = (2^{-k-1}, 2^{-k+1}), \tag{16}$$

на которых эти функции принимают положительные значения, не пересекаются тогда и только тогда, когда $2 \leq |k-l|$. При этом они пересекаются только при $k-l=-1,0,1$.

Локальные свойства функций с компактным носителем, аналогичные свойствам $\Theta(2^l x)$ находят применение в численных методах интерполяции, как показано в работе Cavoretto и др. [1].

Лемма 2. *Для любого $x>0$:*

$$\sum_{l=-\infty}^{\infty}\Theta(2^l x) = 1. \tag{17}$$

Доказательство.Пусть для целых $k_1 \leq k_2$

$$\Theta(x;k_1;k_2) = \sum_{k_1\leq l\leq k_2}\Theta(2^l x) = \sum_{k_1\leq l\leq k_2}\Big(\tilde\Theta(2^l x) - \tilde\Theta(2^{l-1}x)\Big) =$$
$$= \sum_{k_1\leq l\leq k_2}\tilde\Theta(2^l x) - \sum_{k_1\leq l\leq k_2}\tilde\Theta(2^{l-1}x) =$$
$$= \sum_{k_1\leq l\leq k_2}\tilde\Theta(2^l x) - \sum_{k_1-1\leq l-1\leq k_2-1}\tilde\Theta(2^{l-1}x) =$$
$$= \tilde\Theta(2^{k_2}x) - \tilde\Theta(2^{k_1-1}x) \tag{18}$$

Напомним, что $\tilde\Theta(y)=0$ для $y\in(0,1/2]$ и $\tilde\Theta(y)=1$ для $y\in[3/2,\infty)$. Поэтому

$$\lim_{k_2\to\infty}\tilde\Theta(2^{k_2}x) = 1,\ \lim_{k_1\to\infty}\tilde\Theta(2^{k_1-1}x) = 0. \tag{19}$$

Следовательно, для любого $x>0$:

$$1 = \lim_{\substack{k_1\to-\infty\\ k_2\to+\infty}}\Theta(x;k_1;k_2) = \sum_{l=-\infty}^{\infty}\Theta(2^l x) \tag{20}$$

Лемма доказана. □

Подобные конструкции масштабируемых разбиений единицы подробно рассмотрены в работе Christensen и Goh [2], где обсуждаются их применения в анализе Трибеля-Лизоркина и вейвлет-теории

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Cavoretto R., De Rossi A., Perracchione E. Partition of unity interpolants on multivariate convex domains [Электронный ресурс], Режим доступа: https://arxiv.org/abs/1409.5576.

2. Christensen O., Goh C.Y. Scaling partitions of unity [Электронный ресурс], Режим доступа: https://arxiv.org/abs/1710.08290.

3. Dydak J. Partitions of unity [Электронный ресурс], Режим доступа: https://arxiv.org/abs/math/0210379.

УДК 517.9

Спектральное разложение средних по целым точкам на двуполостном гиперболоиде

В. А. Быковский (Россия, г. Тула)
Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого
И. Ю. Реброва (Россия, г. Тула)
Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого
e-mail: rebrova@tolstovsky.ru

Spectral decomposition of means over integer points on a two-sheeted hyperboloid

V. A. Bykovskii (Russia, Tula)
Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University
I. Yu. Rebrova (Russia, Tula)
Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University
e-mail: rebrova@tolstovsky.ru

Пусть $K_{\mathbb{R}}$ — множество всех бинарных квадратичных форм

$$Q(x,y) = [\alpha,\beta,\gamma](x,y) = \alpha x^2 + \beta xy + \gamma y^2$$

с вещественными коэффициентами α,β,γ из $\mathbb{R}$ и независимыми переменными x,y. Через $K'_{\mathbb{R}}$ обозначим подмножество из всех невырожденных форм Q, у которых дискриминант

$$\beta^2 - 4\alpha\gamma$$

отличен от нуля. Далее, $K_{\mathbb{R}}^{(+)}$ – подмножество в $K'_{\mathbb{R}}$, состоящее из всех форм Q с

$$\alpha > 0, \quad \gamma > 0, \quad \beta^2 - 4\alpha\gamma < 0. \tag{1}$$

Они положительно определены в том смысле, что для них

$$Q(x,y) > 0 \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

с $(x,y) \neq (0,0)$. Последнее неравенство эквивалентно системе неравенств (1). Подробнее по поводу вышесказанного можно найти в [1], [2], [3].

Обозначим через $K_{\mathbb{Z}}^{(+)}$ подмножество в $K_{\mathbb{R}}^{(+)}$, состоящее из всех положительно определенных форм

$$Q(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2$$

с целыми коэффициентами a,b,c. В соответствии с (1) для них

$$a > 0, \quad c > 0, \quad b^2 - 4ac < 0.$$

Последнее множество можно представить в виде объединения непересекающихся подмножеств

$$K_{\mathbb{Z}}(d) = \left\{ax^2 + bxy + cy^2 \mid a > 0,\ c > 0,\ d = b^2 - 4ac\right\}$$

по всем целым $d < 0$. Так как всегда

$$b^2 - 4ac \equiv 0, 1(\mod 4),$$

то $K_{\mathbb{Z}}(d)$ — пустые множества для $d \not\equiv 0, 1(\mod 4)$. Поэтому в дальнейшем мы будем рассматривать только отрицательные дискриминанты

$$d \equiv 0, 1(\mod 4).$$

Элементам (a, b, c) из $K_{\mathbb{Z}}(d)$ соответствуют точки $(\alpha, \beta, \gamma) = (a, b, c)$, лежащие на двуполостном гиперболоиде

$$G(d) = \left\{(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3 \,|\, 4\alpha\gamma = \beta^2 - d;\ \alpha > 0,\ \gamma > 0\right\}.$$

Для изучения асимптотического поведения количества целых точек на $G(d)$ в ограниченных областях обычно работают с средними

$$\sum_{(a,b,c)\in G(d)} \varphi\left(\frac{b}{2c}, \frac{\sqrt{|d|}}{2c}\right) \tag{2}$$

с весовой функцией

$$\varphi : (-\infty, \infty) \times (0, \infty) \to \mathbb{C}.$$

Наша цель состоит в том, чтобы получить спектральное разложение суммы (2) по собственным функциям $PSL_2(\mathbb{R})$ — инвариантного оператора

$$\Delta = -y^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right),$$

действующего на пространстве автоморфных функций

$$F : \mathbb{H} = \{z = x + iy \,|\, x, y \in \mathbb{R};\ y > 0\} \to \mathbb{C}$$

относительно полной модулярной группы $PSL_2(\mathbb{Z})$.

Теорема 1. *Пусть $\varphi(x, y)$ — бесконечно дифференцируемая комплекснозначная функция на $(-\infty, \infty) \times (0, \infty)$ с компактным носителем. Тогда для любого отрицательного дискриминанта $d < 0$ и $\forall\varepsilon > 0$*

$$\sum_{\substack{b^2-4ac=d\\ c>0}} \varphi\left(\frac{b}{2c}, \frac{\sqrt{|d|}}{2c}\right) = \frac{3}{\pi^2}\sqrt{|d|}G_d(1) \cdot \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{0}^{\infty} \varphi(x, y)\frac{dxdy}{y^2} + O_{\varphi,\varepsilon}\left(|d|^{\frac{1}{3}+\varepsilon}\right).$$

Доказательство. Пусть

$$\Phi(u, s) = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{0}^{\infty} \varphi(x, y)e^{-iux}y^{s-1}dxdy$$

— преобразование Фурье по первой переменной и преобразование Меллина по второй. Она бесконечно дифференцируема по u и голоморфна по s на всей плоскости комплексного переменного. Интегрированием по частям легко показать, что для любого вещественного σ и любого положительного B равномерно по $Re\ s \geq \sigma$

$$\Phi(u, s) \underset{\sigma,B}{\ll} ((1 + |s|)(1 + |u|))^{-B}.$$

При этом

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(x,y)e^{-iux}dx = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{Re\ s=\sigma} \Phi(u,s)y^{-s}ds.$$

Вертикальную прямую интегрирования можно выбрать $\sigma = -2$.

Применяя формулу суммирования Пуассона, находим

$$A_d(\varphi) = \sum_{\substack{b^2-4ac=d\\ c>0}} \varphi\left(\frac{b}{2c}, \frac{\sqrt{|d|}}{2c}\right) =$$

$$= \sum_{c=1}^{\infty} \sum_{b(\mod 2c)} \delta_{4c}(b^2-d) \sum_{m=-\infty}^{\infty} \varphi\left(\frac{b}{2c}+m, \frac{\sqrt{|d|}}{2c}\right) =$$

$$= \sum_{c=1}^{\infty} \sum_{b(\mod 2c)} \delta_{4c}(b^2-d) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi\left(\frac{b}{2c}+x, \frac{\sqrt{|d|}}{2c}\right) e^{-2\pi inx}dx =$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{c=1}^{\infty} S_d(c;n) \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi\left(x, \frac{\sqrt{|d|}}{2c}\right) e^{-2\pi inx}dx =$$

$$= A_d^{(0)}(\varphi) + R_d(\varphi),$$

где для натурального q и целого a

$$\delta_q(a) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad a \equiv 0(\mod q), \\ 0, & \text{если} \quad a \not\equiv 0(\mod q) \end{cases}$$

— символ Коробова.

$$S_d(c;n) = \sum_{b(\mod 2c)} \delta_{4c}(b^2-d)e^{2\pi i\frac{nb}{2c}},$$

$$A_d^{(0)}(\varphi) = \sum_{c=1}^{\infty} S_d(c;0) \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi\left(x, \frac{\sqrt{|d|}}{2c}\right) dx =$$

$$= \sum_{c=1}^{\infty} S_d(c;0)\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{Re\ s=2} \Phi(0,-s)\left(\frac{\sqrt{|d|}}{2c}\right)^s ds =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{Re\ s=2} \left(\frac{|d|}{4}\right)^{\frac{s}{2}} \frac{\zeta(s)}{\zeta(2s)}G_d(s)\Phi(0,-s)ds$$

с

$$\frac{\zeta(s)}{\zeta(2s)}G_d(s) = \sum_{c=1}^{\infty} \frac{S_d(c;0)}{c^s}.$$

Опираясь на методы, используемые в работе [4] и монографии [5], получим утверждение теоремы.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Венков Б. А. Элементарная теория чисел. ОНТИ. НКТП. СССР, 1937.

2. Дирихле П. Лекции по теории чисел. М., Л., 1936, 404 с.

3. Давенпорт Г. Мультипликативная теория чисел. Главная редакция физико-математической литературы. Издательство "Наука". 1971.

4. Быковский В. А. Спектральные разложения некоторых автоморфных функций и их теоретико-числовые приложения. В кн.: Записки научных семинаров ЛОМИ. Л.: Наука, 1984, с. 15–33.

5. Быковский В. А. Арифметические средние и L–ряды автоморфных форм. Хабаровск, Издательство ТОГУ, 2017 г., 68 с.

УДК 517.9

Принципы классификации задач с кубическими нелинейностями в методе угловых пограничных функций

И. В. Денисов (Россия, г. Тула)
Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого
e-mail: den_tspu@mail.ru

Principles of classification of problems with cubic nonlinearities in the method of angular boundary functions

I. V. Denisov (Russia, Tula)
Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University
e-mail: den_tspu@mail.ru

В прямоугольнике $\Omega = \{(x,t)\,|\,0 < x < 1,\ 0 < t < T\}$ рассматривается начально-краевая задача для сингулярно возмущенного параболического уравнения

$$\varepsilon^2\left(a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial t}\right) = F(u,x,t,\varepsilon), \quad (x,t)\in\Omega,$$

$$u(x,0,\varepsilon) = \varphi(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant 1,$$

$$u(0,t,\varepsilon) = \psi_1(t), \quad u(1,t,\varepsilon) = \psi_2(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T.$$

Кроме стандартных, необходимых для разрешимости задачи, условий предполагается, что в угловых точках области функция F является кубической. На разрешимость задачи существенное влияние оказывает характер монотонности и выпуклости функции F, поэтому эти свойства берутся за основу классификации возможного разнообразия кубических многочленов.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Денисов А. И., Денисов И. В. Классификация кубических многочленов в нелинейном методе угловых пограничных функций // Чебышевский сборник, 2025. Т. 26. № 3 (в печати).

УДК 518.865

Границы для увеличения капитала в математической модели экономической задачи теории роста

А. И. Козко (Россия, г. Москва)
Московский государственный университет;
Московский центр фундаментальной и прикладной математики
e-mail: prozerpi@yahoo.co.uk
Л. М. Лужина (Россия, г. Москва)
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
e-mail: lluzhina@gmail.com
А. Ю. Попов (Россия, г. Москва)
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова;
Московский центр фундаментальной и прикладной математики
e-mail: prozerpi@yahoo.co.uk
В. Г. Чирский (Россия, г. Москва)
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
e-mail: vgchirskii@yandex.ru

The limits for capital increase in the mathematical model of the economic problem of growth theory

A. I. Kozko (Russia, Moscow)
Lomonosov Moscow State University,
Moscow Center of Fundamental and Applied Mathematics
e-mail: prozerpi@yahoo.co.uk
L. M. Luzhina (Russia, Moscow)
Lomonosov Moscow State University
e-mail: lluzhina@gmail.com
A. Yu. Popov (Russia, Moscow)
Lomonosov Moscow State University,
Moscow Center of Fundamental and Applied Mathematics
e-mail: prozerpi@yahoo.co.uk
V. G. Chirskii (Russia, Moscow)
Lomonosov Moscow State University
e-mail: vgchirskii@yandex.ru

В работе мы рассматриваем математическую модель Рамсея – Касса – Купманса [1]–[12] и изучаем основные свойства функций, входящих в эту модель. Поставим экстремальную задачу, состоящую в том, чтобы найти траекторию $c(t)$, которая бы максимизировала полную полезность U:

$$U = \int_0^{+\infty} u(c(t))e^{-(\rho-n)t}\,dt \to \max$$

при наличии бюджетного ограничения

$$\dot{\hat{k}} = f(\hat{k}) - \hat{c} - (x + n + \delta) \cdot \hat{k},$$

неравенств $\hat{c} \geqslant 0$, $\hat{k} \geqslant 0$ и заданном начальном условии $\hat{k}(0)$ (здесь $\hat{k}(t) = k(t) \cdot e^{-xt}$, $\hat{c}(t) = c(t) \cdot e^{-xt}$). Предполагается, что производственная функция $f(\hat{k})$ и функция полезности $u(c)$ обладают неоклассическими свойствами и являются гладкими, монотонными, вогнутыми функциями, удовлетворяющими условиям Инады (далее мы эти функции выберем конкретными, поэтому не будем уточнять условия). Группа констант (n, x, δ, θ) связана с такими характеристиками изучаемой экономической системы, как темпы прироста населения, развитие уровня технологии, выбывание капитала, а также ставкой временного предпочтения. Подробно с ними можно ознакомиться в [1]–[12].

Применим принцип максимума Понтрягина к этой экстремальной задаче. Гамильтониан запишется в виде:

$$J = u(c(t))e^{-(\rho-n)t} + \lambda(t)\left(f(\hat{k}) - c(t)e^{-xt} - (x + n + \delta)\hat{k}\right).$$

Условия первого порядка после преобразований приводят к системе двух дифференциальных уравнений относительно функций $\hat{c}$, $\hat{k}$

$$\begin{cases} \dot{\hat{k}} = f(\hat{k}) - \hat{c} - (x + n + \delta) \cdot \hat{k}, \\ \dot{\hat{c}} = \theta^{-1} f'(\hat{k})\hat{c} - (\theta^{-1}(\delta + \rho) + x)\hat{c}. \end{cases}$$

Для краткости записи положим $C = \hat{c}$, $K = \hat{k}$. Далее будем использовать производственную функцию Кобба – Дугласа $f(K) = aK^{\alpha}$. Производственная функция Кобба – Дугласа с показателем $\alpha < 0.5$ делает экономическую модель заведомо неэффективной. Впрочем, значения $\alpha \in [0.5; 0.7]$ также представляют, в основном, теоретический интерес. Наиболее востребованы в приложениях значения $\alpha \in [0.72; 0.96]$, а чаще всего берут $\alpha = 0.75$ (см. [12]). В модели Рамсея – Касса – Купманса, применяемой в теории экономического роста, определяющую роль играет система двух дифференциальных уравнений, которой удовлетворяют функции $K(t)$ — капитал в момент времени t и $C(t)$ — потребление в момент времени t (с производственной функцией Кобба – Дугласа):

$$\begin{cases} \dot{K}(t) = aK^{\alpha}(t) - C(t) - x_1 K(t), \\ \dot{C}(t) = \theta^{-1}\alpha a K^{\alpha-1}(t)C(t) - x_2 C(t). \end{cases} \tag{1}$$

В систему входит набор констант a, α, θ и x_1, x_2, характеризующих рассматриваемую экономическую структуру. Вторая группа констант, линейными комбинациями которых являются $x_1 = x + n + \delta$ и $x_2 = \frac{\delta+\rho}{\theta} + x$, связана с характеристиками изучаемой экономической системы (n, x, δ, θ). Подробно с ними и оценками на эти константы можно ознакомиться в [12]. Отметим, что x_1, x_2 — небольшие положительные числа, как правило, лежащие в пределах от 0.01 до 0.1.

Нами получен ряд результатов на компоненты $(K(t),\ C(t))$. Мы исследовали их монотонность и получили оценки на рост. Приведём один из результатов. Положим $x_3 = \frac{x_2}{\alpha}$, $\xi = \alpha x_1 - x_2$, $b = 1 + \frac{\xi K_0}{\alpha C_0}$.

Теорема 1. *Пусть $\theta > 1$, выполняется условие $\frac{\alpha}{\theta}\frac{f(K_0)}{K_0} > x_2$ и равенство*

$$f(K_0) = \frac{\theta}{\theta - 1} b C_0.$$

Тогда решение $(K(t),\ C(t))$ задачи Коши

$$\begin{cases} \dot K = aK^{\alpha} - b\,C - x_3K, \\ \dot C = \theta^{-1}\alpha a K^{\alpha-1}C - x_2C, \quad \text{где} \ \ b > 0, \end{cases}$$

$C(0) = C_0,\ K(0) = K_0$ *существует на всём луче* $[0,\ +\infty)$*, обе компоненты его возрастают и стремятся к следующим пределам:*

$$\lim_{t\to+\infty} K(t) = \left(\frac{a\alpha}{x_2\theta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}, \quad \lim_{t\to+\infty} C(t) = \frac{\theta-1}{b}\left(\frac{a}{\theta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}\left(\frac{\alpha}{x_2}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

На луче $0 \leqslant t \leqslant +\infty$ *справедливы тождества*

$$C(t) = \frac{\theta-1}{b\theta} f(K(t)), \quad \int\limits_{K_0}^{K(t)} \frac{du}{\theta^{-1}f(u) - (\frac{x_2}{\alpha})u} = t.$$

Мы предполагаем, что в начальный момент времени $C_0 < f(K_0)$, т.к. иначе функция капитала $K(t)$ была бы убывающей с начального момента времени. В случае $\xi = 0$ и $C_0 = \frac{\theta-1}{\theta} f(K_0)$ имеет место "идеальная экономическая ситуация описанная в теореме. Функции $K(t)$ и $C(t)$ возрастают на луче $[0; +\infty)$, причём, как следует из теоремы выше,

$$\lim_{t\to+\infty} K(t) = \left(\frac{a\alpha}{x_2\theta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}.$$

Поскольку $\alpha \in (0; 1)$, x_1 — достаточно малая константа, то величина $\left(\frac{a\alpha}{x_2\theta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$, вообще говоря, может быть намного больше начального значения K_0. Если же $\xi \geqslant 0$ и $C_0 > \frac{\theta-1}{\theta} f(K_0)$, то $K(t)$ не может возрастать на луче $[0; +\infty)$ и обязательно имеет на нем точку максимума, значение в которой обозначим $K_{\max}$. Величина оценивается через K_0 с помощью неравенства

$$K_{\max} \leqslant K_0 \left(\frac{1}{\theta\frac{C_0}{f(K_0)} - (\theta-1)}\right)^{\frac{1}{\alpha(\theta-1)}}.$$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Козко А. И., Лужина Л. М., Попов А. Ю., Чирский В. Г. Сведение математической модели некоторых задач математической экономики к системам дифференциальных уравнений, допускающих решение в квадратурах // Чебышевский сборник. 2024. Том 25, № 3. С. 187-200.

2. Козко А. И., Лужина Л. М., Попов А. Ю., Чирский В. Г. Метод приближённого решения системы дифференциальных уравнений из модели Рамсея — Касса — Купманса, основанный на решении в квадратурах одного подкласса сходных систем // Чебышевский сборник. 2022. Том 23, № 4. С. 115-125. https://doi.org/10.22405/2226-8383-2022-23-4-115-125

3. Козко А. И., Лужина Л. М., Попов А. Ю., Чирский В. Г. Оптимальная экспонента в задаче Рамсея — Касса — Купманса с логарифмической функцией полезности // Чебышевский сборник. 2019. Том 20, № 4. С. 197-207. https://doi.org/10.22405/2226-8383-2018-20-4-197-207.

4. Козко А. И., Лужина Л. М., Попов А. Ю., Чирский В. Г. О задаче Рамсея — Касса — Купманса для потребительского выбора // Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. 2020. Том 182. С. 39–44. DOI: 10.36535/0233-6723-2020-182-39-44

5. Козко А. И., Лужина Л. М., Попов А. Ю., Чирский В. Г. Модель задачи Рамсея — Касса — Купманса // Издательство: Московский педагогический государственный университет (Москва). Классическая и современная геометрия, материалы международной конференции, посвященной 100-летию со дня рождения В. Т. Базылева. под ред. А. В. Царева. Москва. 2019. С. 87-88.

6. Козко А. И., Лужина Л. М., Попов А. Ю., Чирский В. Г. Оценка необходимого начального экономического ресурса в задаче Рамсея — Касса — Купманса // Чебышевский сборник. 2019. Том 20, № 4. С. 188-196. https://doi.org/10.22405/2226-8383-2018-20-4-188-196.

7. Козко А. И., Лужина Л. М., Попов А. Ю., Чирский В. Г. Функция потребления в модели экономического роста Рамсея — Касса — Купманса в случае стационарности функции сбережения // Чебышевский сборник. 2022. Том 23, № 1. С. 118-129. https://doi.org/10.22405/2226-8383-2022-23-1-118-129.

8. Козко А. И., Лужина Л. М., Попов А. Ю., Чирский В. Г. Локализация показателя оптимальной экспоненты задачи Рамсея — Касса — Купманса стремящейся к бесконечности степенной функции полезности // Чебышевский сборник. 2021. Том 22, № 2. С. 121-134. https://doi.org/10.22405/2226-8383-2021-22-2-121-134

9. Козко А. И., Лужина Л. М., Попов А. Ю., Чирский В. Г. Ограничения на значения функции потребления в модели экономического роста Рамсея — Касса — Купманса в случае стационарности функции сбережения // Чебышевский сборник. 2021. Том 22, № 2. С. 501-509. https://doi.org/10.22405/2226-8383-2021-22-2-501-509

10. Козко А. И., Лужина Л. М., Попов А. Ю., Чирский В. Г. Об идеальной экономической ситуации — росте капитала и функции потребления в некоторых моделях экономического роста // Чебышевский сборник. 2023. Том 24, № 2. С. 256-265. https://doi.org/10.22405/2226-8383-2023-24-2-256-265

11. Козко А. И., Лужина Л. М., Попов А. Ю., Чирский В. Г. Сведение математической модели некоторых задач математической экономики к системам дифференциальных уравнений, допускающих решение в квадратурах // Чебышевский сборник. 2024. Том 25, № 3. С.187-200. https://doi.org/10.22405/2226-8383-2024-25-3-187-200

12. Барро Р. Дж., Сала-и-Мартин Х. Экономический рост // М.: БИНОМ. Лаборатория знаний. 2010.

УДК 511.32

Неравенство Маркова — Бернштейна для квазиполиномов

Чун Давун (Республика Корея, Сеул)
Московский Государственный Университет имени М.В. Ломоносова
e-mail: finalluz@gmail.com

The Markov–Bernstein inequality for quasi-polynomials

Dawoon Chung (South Korea, Seoul)
Moscow State University
e-mail: finalluz@gmail.com

Для тригонометрических полиномов хорошо известно неравенство Бернштейна $\|t_n'\| \leqslant n\|t_n\|$, где $\|t_n\| = \sup_{x\in\mathbb{T}} |t_n(x)|$ — равномерная норма на периоде, причем равенство достигается, когда полином t_n пропорционален $\sin(nx+\alpha)$ при некотором $\alpha \in \mathbb{R}$. Неравенство Маркова для алгебраических многочленов степени не выше, чем n на отрезке $[-1;1]$ утверждает, что выполнено $\|p_n'\| \leqslant n^2\|p_n\|$, причём равенство достигается в точности, когда p_n пропорционален полиному Чебышева T_n. Неравенства данного типа изучались достаточно подробно см. [1] —[2] и посвященнно много монографий.

Рассмотрим функции вида: $p(t) = \sum_{k=1}^{n} p_k e^{-h_k t}$, где $h_1,\ h_2,\ \dots h_n$ — заданные комплексные показатели (в случае кратных показателей соответствующая экспонента умножается на степени t^k, $k = 0,\dots,m-1$, где m — кратность корня).

Изучаем неравенство
$$\|p^{(l)}\|_\infty \leqslant C_{n,l}\|p\|_\infty \tag{1.1}$$
для произвольного $l \in \mathbb{N}$ и произвольных $h_1,\ h_2,\ \dots h_n$. здесь $\|p\|_\infty = \sup_{t\geqslant 0}|p(t)|$. Если $l \in \mathbb{N}$ и показатели чисто мнимые и составляют арифметическую прогрессию, то данное неравенство соответствует неравенству Бернштейна. Случай, когда показатели действительные и составляют арифметическую прогрессию, то неравенство (1.1) соответствует неравенству Маркова.

Рассмотрим набор пар $(h_k, s_k) \in \mathbb{C}\times\mathbb{N} : k = 1,\dots,m; s_1+\ldots+s_m = n; h_p \neq h_q, p \neq q$ и систему экспонент $E_h = \{e^{-h_k t}\}_{k=1}^{n}$. По этому набору строится вектор
$$\mathbf{h} = (\underbrace{h_1, h_1, \dots, h_1}_{s_1}, \underbrace{h_2, h_2, \dots, h_2}_{s_2}, \dots, \underbrace{h_m, h_m, \dots, h_m}_{s_m}).$$
Число s_k из пары (h_k, s_k) будем называть кратностью числа h_k. Множество всех таких $\mathbf{h}$, определённых выше, со свойством $Reh_k > 0, k = 1,\dots,m$, мы обозначим через $\mathbb{C}^n_{++}$. Некоторые из чисел h_k могут совпадать, в этом случае соответствующие экспоненты умножаются на степени t: если, например, компоненты $h_1,\ \dots h_r$ равны и отличны от остальных, т.е., показатель h_1 имеет кратность r, то функции $e^{-h_1 t}$, $e^{-h_2 t}$, $\dots e^{-h_r t}$ заменяются на $e^{-h_1 t}$, $te^{-h_2 t}$, $\dots t^{r-1}e^{-h_r t}$ соответственно. Полиномом по системе $\{e^{-h_k t}\}_{k=1}^{n}$, или квазиполиномом называется любая линейная комбинация данных экспонент с комплексными коэффициентами. Пространство полиномов по данной системе на полупрямой будем обозначать $\mathcal{P}_h$. Это n-мерное подпространство пространства $C_0(\mathbb{R}_+)$ функций непрерывных на $\mathbb{R}_+$. Отображение $\mathbf{h} \mapsto \mathcal{P}_h$ корректно определено и непрерывно см. [1], [3].

Действительная часть квазиполинома является линейной комбинацией с действительными коэффициентами функций $t^m e^{-\alpha_k\ t}\cos\beta_k t$, $t^m e^{-\alpha_k\ t}\sin\beta_k t$, $k = 1,2,\dots r$, где α_k, β_k — действительная и мнимая части h_k, а степень m не превосходит кратности h_m. Линейные комбинации таких функций с действительными коэффициентами составляют пространство действительных квазиполиномов $\mathcal{RP}_\mathbf{h}$.

Введём множества
$$D_n = \{z \in \mathbb{C}^n \mid |z| \leqslant 1, Rez_k > 0,\ k = 1,\dots,n\} \quad I_n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid 0 < x_k \leqslant 1,\ k = 1,\dots,n\}.$$
Для заданного вектора $h \in C^n_{++}$ положим
$$M_l(\mathbf{h}) = \max_{\|p\|_\infty\leqslant 1,\ p\in\mathcal{P}_h} \|p^{(l)}\|_\infty M_{l,n} = \max_{\mathbf{h}\in D_n} M_l(\mathbf{h}).$$

Если экстремальный полином ищется среди полиномов с действительными показателями h_k, то $\mathbf{h}$ — действительный положительный вектор, и множество D_n превращается в незамкнутый единичный куб $I_n = (0;1]^n$

$$m_l(\mathbf{h}) = \max_{\|p\|_\infty \leqslant 1,\ p \in \mathcal{RP}_h} \|p^{(l)}\|_\infty, \quad m_{l,n} = \max_{\mathbf{h} \in I_n} m_l(\mathbf{h}).$$

Задача о нахождении величины $m_l(h)$ более широкая, чем неравенства Бернштейна и Маркова. Для n, $l \in \mathbb{N}$ определим константы

$$\varkappa_{n,l} = \sup_{\tau \in T_n, \tau \not\equiv 0} \frac{\|\tau^{(l)}\|_{[0;2\pi]}}{\|\tau\|_{[0;2\pi]}};$$

$$\tilde{\varkappa}_n = \sup_{P \in P_n, \tau \not\equiv 0} \frac{\|P'\|_{[0;1]}}{\|P\|_{[0;1]}}.$$

- если $l \in \mathbb{N}$ и показатели чисто мнимые и составляют арифметическую прогрессию, неравенство (1.1) соответствует неравенству Бернштейна;
- если показатели действительные и составляют арифметическую прогрессию, неравенства (1.1) соответствует неравенству Маркова.

Известны следующие результаты (см. [4], [5]):

Лемма 1. *Неравенство (1.1) соответствует неравенству Бернштейна в случае когда показатели чисто мнимые и составляют арифметическую прогрессию следующего вида $h_k = ik$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$, т.е. выполнено*

$$m_l(0, i, 2i, \ldots, (n-1)i) = \varkappa_{n-1,l} = (n-1)^l.$$

Лемма 2. *Неравенство Маркова для алгебраических полиномов соответствует неравенству (1.1) в случае $h_k = (k-1)$, $k = 1, 2, \ldots, n$, т.е. справедливо*

$$m_1(0, 1, 2, \ldots (n-1)) = \tilde{\varkappa}_n = 2n^2.$$

Лемма 3 (Скляров). *Если R_{n-1} — алгебраический чебышевский полином степени $n-1$ с весом Лагерра e^{-t}, то для каждого $l \in \mathbb{N}$ имеем*

$$\frac{8^l (n-1)!\, l!}{(n-1-l)!(2l)!}\left(1 - \frac{l}{2(n-1)}\right) \leqslant |R_{n-1}^{(l)}(0)| \leqslant \frac{8^l (n-1)!\, l!}{(n-1-l)!(2l)!}.$$

Лемма 4 (Протасов). *Пусть l, $n \in \mathbb{N}$ и $\mathbf{h} \in I_n$. Тогда*

$$\max_{p \in \mathcal{RP}(\mathbf{h})} \|p^{(l)}\|_\infty \leqslant m_{l,n} \|p\|_\infty,$$

где равенство достигается на полиноме $T_e = e^{-t} R_{n-1}$, и

$$\sum_{j=0}^{l} \left(1 - \frac{j}{2(n-1)}\right) \frac{8^j \binom{n-1}{j}\binom{l}{j}}{\binom{2j}{j}} \leqslant m_{l,n} \leqslant \sum_{j=0}^{l} \frac{8^j \binom{n-1}{j}\binom{l}{j}}{\binom{2j}{j}}.$$

(все сдагаемые при $j \geqslant n$ считаем нулевыми).

Нами получен следующий результат:

Теорема 1. *Пусть l, $n \in \mathbb{N}$ и $\mathbf{h} \in I_n$. Тогда*

$$\max_{p \in \mathcal{RP}(\mathbf{h})} \|p^{(l)}\|_\infty \leqslant m_{l,n} \|p\|_\infty,$$

где равенство достигается на полиноме $T_e = e^{-t} R_{n-1}$, и

$$m_{l,n} = \frac{8^l \Gamma(l+1)}{\Gamma(2l+1)} n^l + O(n^{l-1}) = \frac{4^l \cdot n^l}{(2l-1)!!} + O(n^{l-1}), \quad n \to +\infty.$$

(все сдагаемые при $j \geqslant n$ считаем нулевыми).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Крейн М.Г., Нудельман А.А. Проблема моментов А.А. Маркова и экстремальные задачи: Идеи и проблемы П.Л. Чебышева и А.А. Маркова и их дальнейшее развитие // Москва. Наука. 1973.

2. Стечкин С.Б. Избранные труды математика // Москва: Наука. 1998. С. 15-248.

3. Karlin S. Representation theorem for positive functions // J. Math. Mech. 1963. Vol. 12, № 4. C. 599-618.

4. Скляров В. П. О точной константе в неравенстве Маркова для веса Лагерра // Матем. сб. 2009. Том 200, № 6. С. 109–118. DOI: https://doi.org/10.4213/sm4525

5. Протасов В. Ю. Обобщенные неравенства Маркова–Бернштейна и устойчивость динамических систем // Труды МИАН. 2022. Том 319, С. 251–267.

Секция 9. История и методология математики

УДК 511.32

Конфигурации и конечные геометрии

В. Г. Алябьева (Россия, г. Пермь)
Пермский государственный национальный исследовательский университет
e-mail: vgalyabeva@gmail.com

Configurations and finite geometries

V. G. Alyabieva (Russia, Perm)
Perm State University
e-mail: vgalyabeva@gmail.com

Термин «конфигурация» происходит от позднелатинского слова *configuratio*, означающего расположение, очертание, внешний вид предметов и их частей. Термин имел и имеет широкое хождение в математике и вне её. Если говорить о математике, то в настоящее время термин «конфигурация» широко используется в разных разделах дискретной математики. Речь, прежде всего, идёт о геометрических и комбинаторных конфигурациях. Между геометрическими и комбинаторными конфигурациями существовали многообразные связи, стимулирующие развитие тех и других конфигураций. Как выяснилось позднее, многие из комбинаторных конфигураций являлись конечными геометриями или вкладывались в них. Рассмотрим историю первых определений, первых исследований и применений геометрических и комбинаторных конфигураций.

Комбинаторные и геометрические конфигурации явились реализацией идей Лейбница об искусстве комбинаторики и об особом геометрическом исчислении, названным им analysis situs.

В XIX в. взгляды Лейбница на комбинаторику разделял Сильвестр, который многократно обращался к комбинаторным исследованиям. В своей статье 1844 г. «Элементарные исследования в анализе комбинаторных агрегатов» [1] утверждал, что число, место и комбинация являются тремя пересекающимися, но различными сферами, к которым имеют отношение все математические идеи. К обсуждению комбинаторной составляющей математики Сильвестр вернулся в 60-х годах XIX в. в серии статей. В статье 1861 г. он пишет: «Я дал общее название *Тактика* разделу чистой математики, в котором порядок является основной сферой подобно тому, как число и пространство — сферой двух других». Артур Кэли также занимался комбинаторными исследованиями. Он поддерживал Сильвестра в высокой оценке значимости комбинаторики и в именовании *тактикой* раздела математики, изучающего расположение элементов друг относительно друга. В статье 1864 г «Понятие и границы алгебры» [2] предлагал различать в алгебре два вида операций: тактические и логистические. *Тактическая* операция связана с *расположением* множества вещей некоторым образом, логистическая (арифметическая) операция представляет собой вычисление для получения в результате числа.

Термин «тактический», «тактическая операция», позднее — «тактическая конфигурация» — прижился, особенно в англоязычной среде, и используется до сих пор. В Европе чаще использовался термин «комбинаторная конфигурация».

Известными тактическими задачами, привлекавшими внимание многих математиков в XIX веке, были задача Киркмана о 15 школьницах (1850) и комбинаторные задачи Штейнера (1853).

В 1896 году американский математик Елиаким Гастингс Мур (Eliakim Hastings Moore, 1862–1932) в статье «Tactical memoranda» [3] ввёл термин *тактическая конфигурация*. Пусть задано n множеств $a_1, a_2, \ldots, a_n$, для элементов которых задано отношение инцидентности. Эти множества образуют тактическую конфигурацию, если для любых g и h ($g \neq h$) каждый элемент из множества g инцидентен с одним и тем же числом a_{gh} элементов из множества h. Конфигурация называется геометрической, если для элементов принадлежащих ей множеств можно ввести геометрическую терминологию, отождествив элементы множества i с подпространством R_{i-1} размерности $i-1$ из пространства R_n размерности n. В своей статье Мур рассматривает многочисленные примеры тактических систем и доказывает их свойства.

Обобщением понятия «тактическая конфигурация» в XX явилось понятие блок-схемы. В 1935–1940 годах в статьях Фишера Р. и в работах его сотрудников, посвященных планированию эксперимента, появился сначала термин *block arrangement*, затем — *block design*, дословный перевод которого — «блочный план». С. А. Широкова (Рукова) в 1966 г. предложила перевести *block design* как «блок-схема». Этот перевод в русской литературе утвердился. Под блок-схемой понимается система подмножеств конечного множества, удовлетворяющая некоторым условиям, относящимся к частоте появления пар элементов в подмножествах системы. Блок-схема задаётся парой множеств (V, B), где $V = \{a_1, a_2, \ldots, a_v\}$, $B = \{B_1, B_2, \ldots, B_b\}$. Элементы множества V называются *элементами* блок-схемы, а элементы множества B — её *блоками*. Обозначим через v число элементов в схеме, через b — число блоков. Число элементов, принадлежащих блоку B_j, обозначим через k_j. Число блоков, инцидентных элементу a_i обозначим через r_i. Через λ_{ij} обозначим число блоков, которым принадлежит пара элементов $\{a_i, a_j\}$. Если все блоки состоят из одинакового количества k элементов, если каждый элемент входит в одно и то же число r блоков и если число блоков, которым принадлежит любая пара элементов $\{a_i, a_j\}$ постоянна и равна λ, то схема называется *уравновешенной неполной* блок-схемой. Слово «уравновешенный» характеризует одинаковую частоту появлений элементов и пар элементов, а слово «неполный» служит указанием на то, что, вообще говоря, не все k-элементные множества входят в качестве блоков в схему. Для параметров уравновешенной неполной блок-схемы выполняются соотношения:

$$vr = kb,\ \lambda(v-1) = r(k-1).$$

Частным видом тактических конфигураций являются конечные проективные и аффинные геометрии, которые были аксиоматически определены в конце XIX – начале XX века. Так система троек из семи элементов, в которых каждая пара элементов встречается точно один раз, построенная Киркманом, является конечной проективной плоскостью порядка 2.

Первые подсчёты, относящиеся к числу точек, прямых и плоскостей в конечных проективных пространствах, выполнил K.G.Ch. Staudt в «Дополнениях к геометрии положения» (1856)[4], примеры конечных проективных плоскостей с 7 и 13 точками были построены итальянским математиком J. Fano (1892) [5], G. Hessenberg (1902-1903) аналитически построил конечную проективную плоскость над полем простого порядка. O. Veblen и N. I. Bassey в 1906 году в статье «Конечные проективные геометрии» дали аксиоматическое определение проективных пространств и указали общий метод их построения над полями Галуа.

В статье «Недезарговы и непаскалевы геометрии» (1907) O. Veblen и J. H. M. Wedderburn доказали, что для проективной мерной геометрии выполняется теорема Дезарга и построили первые примеры недезарговых конечных проективных плоскостей порядка 9. Выполнимость теоремы Дезарга для конечной проективной плоскости зависит от свойств координатизирующей системы. Если конечная плоскость построена над конечным *полем*, то теорема Дезарга в конечной плоскости выполняется.

В 1968 г. опубликована книга P. Dembowski «Конечные геометрии» [6].

Истории конечных геометрий посвящена кандидатская диссертация «Возникновение и развитие конечных геометрий» (1982) Аллы Ефимовны Малых.

Попытки развития *геометрических* идей Лейбница получили в XIX веке в различных направлениях: в построении звёздчатых многогранников в работах Луи Пуансо, в проективной геометрии и в топологии. Л. Карно называл «Gèomètrie de position» (1803) проективную геометрию. Х. Штаудт в «Geometrie der Lage» (1847) показал, что основная задача проективной геометрии состоит и изучении взаимного расположения точек, прямых и плоскостей.

Рассмотрим основные вехи в исследовании геометрических конфигураций в XIX в. Исследованиями геометрических конфигураций занимались многие математики, прежде всего немецкие: К. Т. Рейе, З. Кантор, Э. Штейниц, А. М. Шёнфлис, Я. Штейнер, Ф. Клейн и др. На страницах немецких журналов появлялись статьи, посвящённые исследованиям конфигураций, англичанина А. Кэли, итальянца Дж. Веронезе, голландца Я. Фриза. В 1910 году в «Энциклопедии математических знаний» Штейниц (Steinitz E.) поместил большой обзор «Конфигурации в проективной геометрии».

Впервые определение геометрической конфигурации дал К. Т. Рейе в 1882 году, но исследование конфигураций в проективной геометрии производилось задолго до 1882 года. Рейе в статье «Проблема конфигураций» [7] дал определение плоской симметричной конфигурации n_i и пространственной геометрической конфигурации n_i. Плоская геометрическая конфигурация n_i состоит из n точек и n прямых, расположенных так, что каждая из n точек инцидентна i прямым и каждая из n прямых инцидентна i точкам.

Пространственная конфигурация n_i состоит из n точек и n плоскостей таких, что в каждой плоскости лежит i точек и через каждую точку проходит i плоскостей. Если пространственной конфигурации принадлежит ещё g прямых, таких, что на каждой прямой лежит k точек и через каждую прямую проходит k плоскостей, то такая конфигурация обозначается символом (n_i, g_k).

Точки, прямые, плоскости конфигурации называются её элементами. В качестве элементов конфигурации могут быть выбраны другие геометрические образы, например, прямые и конические сечения. Тогда отношением, связывающим прямые и конические сечения, может быть касание. Однако в дальнейшем, если это не оговорено особо, под элементами конфигурации мы будем понимать точки, прямые, плоскости.

Проблему конфигураций Рейе видит в нахождении чисел n и i, для которых существуют конфигурации, и в изучении свойств конфигураций. Заслуга Рейе состоит в том, что он впервые предпринял систематическое изучение конфигураций в проективной плоскости и обратил всеобщее внимание на этот важный раздел проективной геометрии.

Поставленную Рейе проблему последовательно решал З. Кантор из Праги (Seligman Kantor, 1857 – ок. 1940). Непосредственным построением можно убедиться, что параметр n для конфигурации n_3 удовлетворяет неравенству $n \geqslant 7$. Случаи $n = 7, 8, 9, 10$ подвергались наиболее тщательному изучению. Для $n = 7$ конфигурация 7_3 единственная, в вещественной плоскости она не реализуется. Это так называемая конфигурация Фано, или конечная проективная плоскость порядка 2.

Конфигурация 8_3 также единственная. Ещё Мёбиус в 1828 году показал, что она не реализуется в вещественной плоскости, хотя может быть представлена мнимыми элементами. Он же показал, что конфигурацию можно представить системой двух 4-угольников, одновременно вписанных и описанных друг около друга. В 1940 году П. К. Рашевский показал, что конфигурация 8_3 реализуется в конфигурациях $(13_4, 13_4)$ и $(21_5, 21_5)$, т. е. в конечных проективных плоскостях порядка 3 и 4 (хотя термина «конечные плоскости» автор не использует).

В 1881–1882 гг. З. Кантор исследовал конфигурации 9_3 и 10_3. Он доказал, что существует три неизоморфные конфигурации 9_3 и десять неизоморфных конфигураций 10_3. Все три конфигурации 9_3 реализуются в вещественной проективной плоскости. Одна из конфигураций 9_3 есть конфигурация Паскаля, изучаемая уже давно. Из десяти конфигураций 10_3 в вещественной плоскости реализуются девять. Одна из конфигураций 10_3 известна как конфигурация

Дезарга (с 1646 г.). Теоремы Паппа и Дезарга являются важнейшими классификационными теоремами проективных плоскостей. Начиная с 30-х годов XX столетия, исследовались алгебраические эквиваленты для различных конфигураций 9_3 и 10_3, из отечественных учёных, обратившихся к этой тематике, отметим Аргунова Б. И. и Скорнякова Л. А.

Простейшие пространственные конфигурации образуют вершины, рёбра и грани многогранников. В 1828 году Мёбиус исследовал такое расположение тетраэдров, при котором каждый вписан в другой. К. А. Андреев, обобщая построения Мёбиуса, построил целый класс пространственных конфигураций вида $\left(2_n^{n-1}, 2_n^{n-1}\right)$, которые незаслуженно стали называть конфигурациями Кокса.

Значительный импульс исследованиям геометрических конфигураций сообщили работы А. Клебша. К моменту выхода его статей 1863 года в теории кривых и поверхностей различных порядков накопилось много разрозненных фактов, требующих для своей систематизации некоторой общей идеи. Использовав теорию функций Римана, Клебш построил общую теорию, исследовал геометрические конфигурации на плоскости.

Зимой 1920–21 гг. Давид Гильберт прочёл в Гёттингене курс «Наглядная геометрия», один из разделов которого был посвящён конфигурациям. Позднее лекции Гильберта, обработанные его учеником С. Кон-Фоссеном, были изданы отдельной книгой. В 1929 году Ф. Леви в книге «Геометрические конфигурации» подвёл итог развитию геометрических конфигураций в XIX в.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Sylvester J. J. Elementary researches in the analysis combinatorial aggregation // The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical magazine and Journal of science. 1844. Vol 24, P. 285–296.

2. Cayley A. On the notion and boundaries of algebra // Quarterly Journal of pure and applied mathematics. 1864. Vol 6, P. 282–384.

3. Moore E. H. Tactical memoranda I-III // American journal of mathematics. 1896. Vol 18, P. 264–303.

4. Staudt K. G. Ch. von. Beiträge zur Geometrie der Lage. — Nürnberg, 1856.

5. Fano G. Sui postulate fondamentali della geometria projettiva in uno spazio lineare a un numero qualungue di dimensioni // Giornali stadenti delle universita Italiane. Napoli. 1892. Vol 30, P. 106–131.

6. Dembowski P. Finite geometries. — Berlin: Springer, 1968.

7. Reye K. T. Das Problem der Configurationen // Acta Mathematica. 1882. Vol 1, P. 92–96.

УДК 519.716

О мало сократимых группах Гриндлингера

Б. П. Ваньков (Россия, г. Тула)
Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого
e-mail: vankovbp@mail.ru

About smallly reducible Gründlinger groups

B. P. Vankov (Russia, Tula)
Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University
e-mail: vankovbp@mail.ru

Метод М. Дэна решения проблемы равенства слов для фундаментальных групп замкнутых ориентируемых двумерных многообразий был распространен на широкие классы групп, удовлетворяющих условию малого сокращения определяющих слов. Тартаковский В. А. в 1949 году [1] привел решение проблемы равенства слов для класса групп, удовлетворяющих набору комбинаторных условий, включая предположение малых сокращений $C'(1/6)$.

В начале 1960-х годов М.Д. Гриндлингер [2,4] сформулировал основные положения теории малых сокращений. «Метрическое» условие малых сокращений или условие малого налегания $C'(1/p)$ означает, что при сокращении произведения любых двух не взаимно обратных определяющих слов сокращается меньше $1/p$длины каждого из них. Условие $T(q)$означает, что любая последовательность пар из h, $3 \leqslant h < q$, не взаимно обратных определяющих слов содержит хотя бы одну несократимую пару.

Если симметризованное множество R определяющих слов конечно определенной группы удовлетворяет условиям $C'(1/p)$ и $T(q)$, то речь идет о $T(q)-1/p-$ группах. Натуральные p и q, удовлетворяющие условию $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{1}{2}$, определяют три класса $T(q)-1/p-$групп, называемых группами Гриндлингера с малой мерой налегания: $1/6-$группы, $T(4)-1/4-$группы и $T(6)-1/3-$группы.

Гриндлингер М.Д. получил описание структуры слов, равных единице, для $1/6-$групп, известное как лемма Гриндлигера [3].

Пусть R удовлетворяет условию $C'(1/6)$. Предположим, что W – нетривиальное циклически приведённое слово, равное *1* в G. Тогда либо

1. $W \in R$,

   либо некоторая циклически приведённая перестановка W^* элемента W содержит одно из следующих:

2. два непересекающихся подслова, каждое из которых $> (5/6)R$,

3. три непересекающихся подслова, каждое из которых $> (4/6)R$,

   четыре непересекающихся подслова, два из которых $> (4/6)R$ и два $> (3/6)R$,

4. пять непересекающихся подслов, четыре из которых $> (3/6)R$, и одно $> (4/6)R$, или

5. шесть непересекающихся подслов, каждое из которых $> (3/6)R$.

Похожий результат был получен М. Д. Гриндлингером для $T(4)$-1/4-групп в 1965 году [3].

Пусть R удовлетворяет условию $C'(1/4)$ и $T(4)$. Предположим, что W – нетривиальное циклически приведённое слово, равное 1 в G. Тогда либо

1. $W \in R$,

   либо некоторая циклически приведённая перестановка W^* элемента W содержит одно из следующих:

2. два непересекающихся подслова, каждое из которых $> (3/4)R$,

3. три непересекающихся подслова, два из которых $> (1/2)R$ каждое, и одно $> (3/4)R$,

4. четыре непересекающихся подслова, каждое из которых $> (1/2)R$.

Таким образом, любое нетривиальное слово, равное единице в 1/6-группе или $T(4)-1/4-$группе, содержит более половины некоторого определяющего слова, что приводит к решению проблемы равенства слов для этих классов групп при помощи алгоритма Дэна.

С помощью незначительного обобщения алгоритма Дэна в 1966 году [4] Гриндлингер М.Д. показал разрешимость проблемы сопряжённости для1/6-групп и $T(4)-1/4-$групп.

Из геометрической интерпретации Линдона условий малых сокращений [3] следует, что для приведенной диаграммы $T(q)-1/p-$группы любая внутренняя R – область имеет не менее $p+1$ пограничного ребра, а из каждой внутренней вершины v выходит не менее q ориентированных ребер.

В результате диаграмма $T(6)-1/3-$группы получается дуальной диаграмме для 1/6-группы, а следовательно любое нетривиальное слово, равное единице в $T(6)-1/3-$группе, содержит либо более половины некоторого определяющего слова, либо подслово S_1S_2, которое можно при помощи двух определяющих слов заменить на более короткое слово. Такое обобщение алгоритма Дэна решает проблему равенства слов для *T(6)-1/3*-групп.

Для приведенной R – диаграммы $T(q)-1/p-$группы имеем, что внутренняя область содержит не менее $p+1$ пограничного ребра и каждой внутренней вершине инцидентно не менее q ориентированных ребер. Тогда, если для приведённой R – диаграммы $T(q)-1/p-$группы Vобозначает число вершин, E - число рёбер, а F- число областей, то $2E \geqslant Vq$ и $2E \geqslant F(p+1)$, а поэтому, учитывая $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{1}{2}$, получаем $V+F<E$. Таким образом, $T(q)-1/p-$группы являются аторическими. то есть не могут иметь приведённую диаграмму на торе.

В работе 1979 года [5] А.Ю. Ольшанским показано, что перестановочные элементы аторических групп являются степенями одного и того же слова.

Этот результат был получен в 1966 году [4] М.Д. Гриндлингером для1/6−групп и в 1969 году [6] В.В. Солдатовой для $T(4)-1/4-$групп.

Трюффо В. [7] в 1974 комбинаторными методами показал, что централизатор нетривиальных элементов 1/6−группы циклический. Для $T(4)-1/4-$групп также комбинаторными методами этот результат был доказан автором в [8].

В 1975 году [9] В. П. Классен для 1/6−групп, и в 1986 [10] автор для $T(4)-1/4-$групп доказали, что любая подгруппа с нетривиальным тождеством для этих групп является или циклической или свободным произведением двух групп второго порядка.

Метрические $T(q)-1/p-$группы Гриндлингера являются гиперболическими. Лысенок И.Г. доказал, что для всякой гиперболической группы есть возможность конечного задания, для которого проблема равенства решается с помощью алгоритма Дэна.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Тартаковский В.А. Решение проблемы тождества для группы с k-сократимым базисом при k = 6 // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1949. Т. 13. С. 483–494.

2. Greendlinger M. On Dehn's algoriths for the conjugacy and word problems with applications // Comm. Pure and Appl. Math. 1960. V. 13. P. 641–677.

3. Линдон Р., Шупп П. Комбинаторная теория групп. – М.: Мир, 1980. 368с.

4. Гриндлингер М.Д. О проблеме сопряжённости и совпадений с антицентром в теории групп // Сиб. матем. журнал. 1966. Т.7. С.785-803.

5. Ольшанский А.Ю. Бесконечная простая нётерова группа без кручения // Изв.АН СССР. Серия Математика. 1979. Т.43. С.1328-1394.

6. Солдатова В.В. О централизаторе любого элемента // Учёные записки Ивановского гос. пед. ин та. 1969. Т. 66. С. 209-224.

7. Truffault B. Centralisateurs des element dans les groups de Greendlinger // Math. Z. – 1974. Bd 136. N 1. P.317-319.

8. Ваньков Б.П. О централизаторе мало сократимых групп // Деп.в ВИНИТИ 31 мая 1983 г. № 2912-83.

9. Классен В.П. О цикличности подгупп с тождеством в группах с σ-базисом // Прикладная математика – Тула, 1975. – С.99-107.

10. Ваньков Б.П. Тождества в подгуппах Гриндлингера // Алгоритмические проблемы теории групп и полугрупп: межвуз. сб. науч. трудов – Тула: Тул.гос.пед.ин-т им.Л.Н.Толстого, 1986 – С.66–71.

УДК 51(091)

Геометрические и аналитические методы в механике Ньютона

Е. А. Зайцев (Россия, г. Москва)
e-mail: e_zaitsev@mail.ru

Geometrical and Analytical Methods in Newton's Mechanics

E. A. Zaytsev (Russia, Moscow)
e-mail: e_zaitsev@mail.ru

9 января 1894 года на торжественном объединенном заседании Московского математического общества и IX Съезда русских естествоиспытателей и врачей, посвященном 25-летию Московского математического общества, Н.Е. Жуковский произнес речь «О геометрическом истолковании в механике». В ней корифей отечественной науки изложил свое видение вопроса об использовании в механике аналитических и геометрических методов. В начале речи Жуковский кратко перечисляет основоположников геометрического метода в механике, особенно выделяя Ньютона – творца классической механики. Затем, переходя к Лагранжу и его последователям, он дает следующую характеристику аналитическому методу, пришедшему на смену геометрическому подходу:

«Геометрическая постановка задачи заменилась составлением возможной работы, реакции связей – неопределенными множителями, изыскание движения отождествилось с задачей об интегрировании дифференциальных уравнений» [1, с. 182].

Указав достижения аналитической школы, Жуковский тут же отмечает ее главный недостаток – игнорирование собственно механического содержания решаемых аналитикой проблем, что приводит к трудностям при решении задач о движении твердого тела и гидродинамики (следуют примеры этих трудностей).

«Здесь на помощь анализу, – продолжает Жуковский, – снова явилось забытое на время геометрическое толкование. В своем изящном мемуаре «Новая теория вращения тел» Пуансо поставил себе задачей «изучать вещи сами в себе» и, следуя этому девизу, давал геометрическую интерпретацию рассматриваемого движения до той степени наглядности, при которой оно со всеми подробностями рисуется перед глазами читателя» [1, с. 182].

Геометрический метод сыграл также важную роль в исследованиях по гидродинамике (работы Г. Гельмгольца).

«Таким образом, – резюмирует Жуковский, – конец нашего столетия ознаменовался возвращением к геометрическому толкованию и соединением аналитического метода исследования с геометрическим. Механика сознательно пошла по тому пути, которого при своем возникновении держалась по необходимости» [1, с. 184].

Свое выступление он заканчивает словами:

«Механика должна равноправно опираться на анализ и геометрию, заимствуя от них то, что наиболее подходит к существу задачи. Своими новыми методами: исследованием интегралов по дифференциальным уравнениям, изысканием признаков, при которых существуют алгебраические интегралы, и т. д. анализ дает нам могущественное орудие для разрешения задач динамики. Но последняя обработка решений – всегда будет принадлежать геометрии. Геометр всегда будет являться художником, создающим окончательный образ построенного здания» [1, с. 184-185].

Важной вехой в истории теоретической механики является период становления классической механики в XVII веке. Хорошо известно, что «Математические начала натуральной философии» Ньютона – трактат, завершающий этот период, изложен почти исключительно на языке геометрии. Возникает вопрос, а как изначально были получены приведенные в нем результаты? Дело в том, что Ньютон примерно через 30 лет после публикации трактата настаивал на том, что свои результаты он сначала нашел при помощи метода флюксий (т.е., аналитически) и лишь затем «перевел» на язык геометрии.

Вот несколько высказываний на эту тему, сделанных в период примерно с 1710 по 1720 гг., когда Ньютон планировал издание «Начал», в которое должен был войти новый раздел, посвященный методу флюксий (Ньютон пишет о себе в третьем лице):

«Г-н Ньютон открыл большинство Предложений своих «Начал философии» при помощи нового Анализа; но поскольку Древние стремились к достоверности и не допускали использования в Геометрии ничего, что не было доказано синтетически, он эти Предложения доказал синтетически, чтобы Система Небес могла опираться на хорошую Геометрию. Поэтому-то неопытным людям сейчас трудно усмотреть Анализ, при помощи которого были открыты эти Предложения» [2, p. 122].

А вот другое высказывание на эту же тему:

«Предложения в этой книге были найдены при помощи Анализа. Но, учитывая, что древние ... не допускали в геометрию ничего, что не было прежде доказано при помощи метода композиции (т.е. геометрического рассуждения – Е.З.), я изложил то, что изобрел с помощью анализа, на языке геометрии .... Именно поэтому в данной Книге принято многословное изложение в стиле древних, без аналитических выкладок (calculations). Однако всякий, кто владеет Анализом, легко переведет доказательства этих предложений обратно на язык Анализа и, таким образом, увидит, при помощи каких аналитических методов они были получены. Именно это имел в виду маркиз де Лопиталь, когда утверждал, что эта Книга («Математические начала натуральной философии» – Е.З.) почти полностью состоит из анализа бесконечно малых» [2, p. 122-123].

И, наконец, последнее заявление, касающееся получения одного из важнейших результатов «Начал» – теоремы об эллиптичности планетарных орбит (первый закон Кеплера). Ньютон пишет:

«В 1677 году при помощи обратного метода флюксий я нашел доказательство астрономического утверждения Кеплера о том, что планеты движутся по эллипсам; оно составляет содержание Предложения 11 из Первой книги "Начал"» [2, p. 123].

Как же на деле были получены основные теоремы «Начал»?

Обсуждение этого вопроса начинается, по сути, только на рубеже XIX-XX веков. Первым по поводу метода Ньютона высказался Мориц Кантор в своих знаменитых «Лекциях по истории математики».

Вначале Кантор цитирует фрагмент из работы Лейбница «О скрытой геометрии» (1686), касающийся открытия им самим и Ньютоном исчисления бесконечно малых:

«Исаак Ньютон, геометр глубочайшего ума, не только самостоятельно сделал это же открытие, но также завершил его, придав весьма общий вид; если бы он опубликовал свои соображения, которые, как я понимаю, он все еще скрывает, то наука, без сомнения, получила бы значительное развитие... » [3, S. 198].

«И вот – продолжает Кантор, переходя на эпический стиль изложения, – между апрелем 1686 и июлем 1687 года выходит из печати труд Ньютона «Математические начала натуральной философии». Наши читатели, вероятно, полагают, что в этом трактате, который уже заранее получил одобрение Лондонского Королевского общества и который с нетерпением ждали, Ньютон откликнется на пожелание Лейбница и воспользуется возможностью показать, как применяется созданный им математический инструментарий.

Ничего подобного! В трактате Ньютона можно найти рассуждения о том, как рождаются величины, в нем встречаются выражения «мгновенное изменение» и «течение»; но нет самого главного – единой аналитической теории, изложенной при помощи характерных ньютоновских обозначений (переменная с точкой наверху), хотя, согласно рукописным заметкам, Ньютон владел этой техникой с 1665 года» [3, S. 198].

Сам Кантор склоняется к версии об открытии законов механики при помощи метода флюксий. В качестве аргумента в пользу такого вывода он цитирует фрагмент приведенного выше второго высказывания Ньютона.

В пользу применения Ньютоном метода флюксий совершенно определенно высказался другой крупный немецкий историк математики – Генрих Вилейтнер:

«Несомненно, что при выводе своих основоположных механических теорем Ньютон применил метод флюксий или, лучше сказать, как раз в связи с этим его разработал. Однако при изложении небесной механики он им не воспользовался. На это имелись две причины. Во-первых, Ньютону пришлось бы разъяснять читателю не только метод флюксий, но и его приложение к механике, а кроме того, он, конечно, с полным правом сомневался в том, что законы, основанные на новом исчислении, окажут такое же влияние, как если он выведет их на старой геометрической основе» [4, с. 126].

К этой точке зрения присоединяется выдающийся отечественный историк механики – Иван Николаевич Веселовский. Отметив, что первой задачей, которую Ньютон решил в «Началах», была задача об определении закона изменения силы, которая действует на планеты, когда они перемещаются по эллипсам, он пишет: «В настоящее время известно, что Ньютон решил задачу на основании созданного им анализа бесконечно малых; но ее решение он записал обычным в то время геометрическим методом. Сейчас решение этой задачи можно произвести при помощи анализа бесконечно малых» [5, с. 118-119].

Обратимся теперь к ученым, которые, напротив, полагали, что открытия в механике Ньютон делал при помощи геометрических методов.

Начнем с замечания Н.Е. Жуковского, сделанного в юбилейной речи «Ньютон, как основатель теоретической механики» (1887-88). Описав несколько геометрических доказательств из «Начал», Жуковский пишет:

«Подобными геометрическими приемами Ньютон справлялся с самыми трудными задачами теоретической механики, и некоторые авторы (Клеро, Араго, Боссю), приходя в недоумение над геометрическим решением особенно трудных вопросов, предполагают даже, что они были найдены Ньютоном методом флюксий (которым он уже владел при издании «Principia») и потом приведены к геометрической форме. Но нам думается, что объяснение заключается в синтетическом складе ума великого геометра, который в самый метод флюксий ввел идеи о пространстве и времени» [6, с. 271].

Сходного мнения придерживается Д.Д. Мордухай-Болтовской в комментариях к переводу математических работ Ньютона. Не рассматривая вопрос о математическом методе «Начал», Мордухай-Болтовской обращает внимание на ньютоновские методы решения чисто математических задач. Поводом для высказывания служит задача, которую Ньютон решает сначала аналитически, а потом – геометрически.

Комментарий к этим двум решениям Мордухай-Болтовской озаглавил «Геометризация дифференциального исчисления». Вот что он пишет по поводу двух методов Ньютона:

«Ум Ньютона по преимуществу геометрический и обладает могучей пространственной интуицией. Мне кажется, что синтетический характер его доказательств вызывается не только слабым развитием анализа, но и склонностями Ньютона. Обращаю внимание читателя на особое искусство Ньютона оперировать с бесконечно малыми треугольниками и четырехугольниками и советую ему облечь ньютоновские доказательства в современную форму, мысля на месте равенства — эквивалентность и обнаруживая последнюю путем определения порядка малости элементов. Ньютон является если и не творцом, то тем человеком, которому мы больше всего обязаны синтетическим методом, которому и теперь следуют многие авторы, спасая себя от выкладок, нередко связанных с аналитическими методами» [7, с. 334].

Аналогичной точки зрения придерживается и автор специального исследования, посвященного геометрическому методу «Начал» Ньютона, В.И. Антропова. Проведя анализ геометрических приемов, использовавшихся Ньютоном для решения ряда трудных задач теории тяготения (предложения 70 и 71 «Начал»), Антропова пишет:

«Все указанные преобразования без труда переводятся на аналитический язык ... . И, как нам представляется, за преобразованиями Ньютона не следует искать ... еще какие-то чисто аналитические рассуждения, «переведенные» Ньютоном на язык геометрии. Не забудем, что в конце XVII в. обозначения анализа бесконечно малых были разработаны плохо, общепринятой символики не существовало, не было современных символов для тригонометрических функций, в частности, для применяемых Ньютоном здесь косинусов. Поэтому Ньютону легче всего было вести рассуждение на языке геометрии» [8, с. 215].

В пользу утверждения о том, что Ньютон получил доказательства теорем «Начал» методами геометрии, говорят также исследования рукописного наследия Ньютона, проводившиеся, начиная с 60-х гг. прошлого столетия (Д. Уайтсайд, Дж. Херивел, Б. Коэн, Н. Гвиччардини) [2, p. 122-123].

Так, изучение подготовительных рукописей к «Началам» показало, что в них основные результаты, включая закон площадей (второй закон Кеплера) и теоремы о форме орбит в виде конических сечений, были, как и в печатной версии, получены Ньютоном при помощи геометрических рассуждений. Аналитические рассуждения в них практически отсутствуют.

Б. Коэн пишет: «Нет, однако, ни малейшего доказательства того, что «Начала» были созданы в соответствии с некоторой тайной математической техникой, отличной от той, что была использована Ньютоном при представлении полученных результатов. Не существует ни писем, ни черновых вариантов теорем, нет даже простого клочка бумаги, которые указывали бы на способ изложения, отличный от опубликованного варианта» [2, p. 123].

В одной из цитат Ньютон говорит о том, что «любой человек, который понимает Анализ», сможет «легко» свести геометрические доказательства «Начал» «обратно к Анализу». Современные специалисты считают, что такое сведение было бы не по силам и самому Ньютону. Отметим, что ведущим механикам XVIII века потребовалось около 70 лет, чтобы «перевести» геометрические доказательства Ньютона на аналитический язык. «Перевод» при этом осуществлялся на язык бесконечно малых Лейбница – значительно более удобный, чем исчисление флюксий Ньютона.

Также обращает на себя внимание тот факт, что утверждения об использовании метода флюксий были сделаны Ньютоном в разгар полемики с Лейбницем о приоритете в открытии дифференциального и интегрального исчисления. Поэтому высказывания Ньютона логичнее рассматривать не как указание на истинное положение дел, а как своеобразный полемический прием.

Наконец, если верить последнему высказыванию Ньютона о теореме, касающейся эллиптичности орбит, то придется сделать вывод, что с гипотезой обратных квадратов Ньютон был знаком еще за два года до знаменитого обмена письмами с Р. Гуком (которому эта гипотеза принадлежит).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Жуковский Н.Е. О значении геометрического истолкования в теоретической механике (1894) // Н.Е. Жуковский. Полное собрание сочинений. Т. 9. М. –Л.: ОНТИ, 1937. С. 181-187.
2. Cohen I.B. A Guide to Newton's Principia // Isaac Newton. Mathematical Principles of Natural Philosophy. Berkeley etc.: University of California Press, 1999. P. 9-370.
3. Cantor M. Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. 2 Aufl. Bd. 3. Leipzig, 1901.
4. Вилейтнер Г. История математики от Декарта до середины XIX столетия. М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1960.
5. Веселовский И.Н. Очерки по истории теоретической механики. М.: Высшая школа, 1974.
6. Жуковский Н.Е. Ньютон, как основатель теоретической механики // Н.Е. Жуковский. Полное собрание сочинений. Т. 9. М.–Л.: ОНТИ, 1937. С. 263-274.
7. Ньютон И. Математические работы / Пер. с лат., вводная статья и комментарии Д.Д. Мордухай-Болтовского. М.–Л.: ОНТИ, 1937.
8. Антропова В.И. О геометрическом методе «Математических начал натуральной философии» И. Ньютона // Историко-математические исследования. Вып. 17. 1966. С. 205–228.

УДК 512.55

Ранняя история недезарговых плоскостей[1]

А. В. Селиверстов (Россия, г. Москва)
Институт проблем передачи информации им. А. А. Харкевича РАН
e-mail: slvstv@iitp.ru

Early history of non-Desarguesian planes

A. V. Seliverstov (Russia, Moscow)
Institute for Information Transmission Problems of the RAS (Kharkevich Institute)
e-mail: slvstv@iitp.ru

1. Предыстория

Основателем аксиоматического подхода считают Гиппократа Хиосского, автора первого текста *Начал*, работавшего в Афинах в V веке до н. э. Теорема Паппа была известна в III веке.

[1]Работа выполнена в рамках государственного задания ИППИ РАН, утвержденного Минобрнауки России.

Многие авторы называют теорему Паппа теоремой Паскаля, в частности, на это указывает А. В. Васильев [1].

Теорема Паппа. *Пусть точки P_1, P_2 и P_3 лежат на одной прямой, а точки P'_1, P'_2 и P'_3 лежат на другой прямой. Пусть три прямые $P_1P'_2$, $P_1P'_3$ и $P_2P'_3$ пересекают три прямые P'_1P_2, P'_1P_3 и P'_2P_3 соответственно в точках P_{12}, P_{13} и P_{23}. Тогда точки P_{12}, P_{13} и P_{23} лежат на одной прямой.*

Теорема Дезарга известна с XVII века. Два треугольника $P_1P_2P_3$ и $P'_1P'_2P'_3$ перспективны (из точки), если прямые, соединяющие соответственные вершины треугольников, проходят через одну точку O.

Теорема Дезарга. *Если два треугольника $P_1P_2P_3$ и $P'_1P'_2P'_3$ перспективны, то коллинеарны три точки P_{12}, P_{13} и P_{23} пересечения пар прямых, содержащих пары соответственных сторон треугольников.*

Во второй половине XIX века было предложено много различных подходов к формализации математики, которая быстро развивалась, выходя за привычные рамки *Начал* Евклида. Оглядываясь назад, можно сказать, что ранние работы относятся к вещественной проективной геометрии. Многие математики старались внести уточнения, чтобы точнее описать свойства привычной вещественной плоскости. Но только молодой Джино Фано (Gino Fano, 1871–1951) отбросил эти ограничения и рассмотрел конечную проективную плоскость. Для многих геометров мысль о конечной плоскости была абсурдной. Но это не было слишком смелым в 1892 для Фано, который в 1888 году поступил, а 22 июня 1892 года окончил Туринский университет, защитив диссертацию. В том же году Фано опубликовал систему аксиом проективной геометрии и конечную проективную плоскость, содержащую семь точек и семь прямых. Отметим, что сегодня аксиомой Фано называют условие, запрещающее существование проективной плоскости из семи точек и семи прямых.

2. Недезарговы плоскости в XIX веке

В 1891 году Г. Винер (H. Wiener) из Галле (Halle) сообщил о независимости теоремы Дезарга (на плоскости) от некоторых аксиом плоскости [2]. Точнее, такова поздняя интерпретация его результата у Моултона [3] и Васильева [1]. Винер не указывает никакой системы аксиом в привычном виде, а использует лишь набор допустимых операций. Вероятно, это была первая попытка обосновать нетривиальность теорем Паппа (Паскаля) и Дезарга.

Следующий шаг сделал Давид Гильберт в 1899 году в книге *Grundlagen der Geometrie*. В ней построен пример недезарговой (аффинной) плоскости, удовлетворяющей группам аксиом сочетания (инцидентности) на плоскости, порядка, параллельности и непрерывности. Другой результат Гильберта состоит в возможности сопоставить дезарговой плоскости тело, элементы которого будут координатами. Коммутативность умножения, когда тело будет полем, эквивалентна выполнимости теоремы Паппа.

Книга *Основания геометрии* Гильберта в переводе на русский публикуется в 1923 году в Петрограде (книгоиздательство “Сеятель” Е. В. Высоцкого). Перевод сделан с 5-го издания. Русское издание включает большую (24 стр.) вступительную статью Александра Васильевича Васильева (1853–1929), в которой рассмотрена история аксиоматического подхода в геометрии [1]. В частности, отмечается важность работ Лобачевского, фон Штаудта и Винера.

3. Плоскость Моултона

Изящный пример недезарговой плоскости нашёл американский астроном Форест Рэй Моултон (Forest Ray Moulton, 1872–1952), представивший свою работу 2 января 1902 года [3]. Возможно, эта конструкция была связана с изучением преломления света. В своей работе по геометрии Моултон ссылается на Винера [2] и Гильберта.

Рассмотрим обычную вещественную аффинную плоскость с декартовой системой координат. Ось абсцисс делит плоскость на две полуплоскости. Каждую прямую, имеющую положительный наклон к оси абсцисс, изменим следующим образом: её луч, лежащий в верхней полуплоскости, заменим лучом, имеющим вдвое меньший угловой коэффициент: $\mathrm{tg}\varphi = 2\mathrm{tg}\varphi'$. Первоначальная прямая изламывается при пересечении с осью абсцисс, а полученная ломаная рассматривается как прямая новой модели. Все остальные прямые, включая параллельные оси абсцисс, остаются прежними. Вслед за Гильбертом, Моултон рассматривает аффинную плоскость, но она может быть дополнена несобственной прямой, чтобы получилась проективная плоскость. На определённой так плоскости Моултона выполнены все аксиомы инцидентности. Но на ней не выполняется теорема Дезарга. Достаточно рассмотреть конфигурацию девяти точек из теоремы Дезарга, из которых восемь лежат в нижней полуплоскости, а одна в верхней, причём из трёх прямых конфигурации, проходящих через эту точку верхней полуплоскости, только одна имеет положительный наклон. Излом этой прямой на плоскости Моултона по сравнению с обычной плоскостью вызовет нарушение теоремы Дезарга.

4. Конечные недезарговы плоскости

Герхард Хессенберг (Gerhard Hessenberg, 1874–1925) доказал в 1905 году, что теорема Дезарга следует из теоремы Паппа. В то же время Джозеф Веддербарн (Joseph Henry Maclagan Wedderburn, 1882–1948), бывший в 1904–1905 годы в Университете Чикаго, доказал, что каждое конечное тело коммутативно. Отсюда следует, что в конечной дезарговой плоскости верна теорема Паппа.

Хотя конечную проективную плоскость построил Фано в 1892 году, долгое время оставался открытым вопрос о существовании конечной недезарговой плоскости. Конечные недезарговы плоскости представлены 22 апреля 1905 года и опубликованы в 1907 году молодыми математиками — геометром Освальдом Вебленом (Oswald Veblen, 1880–1960) и алгебраистом Джозефом Веддербарном [4]. В частности, они построили недезаргову проективную плоскость порядка 9.

Если обычные геометрии строились над полем, то здесь Веблен и Веддербарн используют алгебры, которые незадолго до этого рассмотрел Леонард Юджин Диксон (Leonard Eugene Dickson, 1874–1954). Рассмотрим двумерное линейное пространство над полем вычетов по модулю три. Его элементами служат линейные комбинации $a + bj$, где a и b пробегают поле из трёх элементов $\{0, 1, 2\}$ с обычными операциями по модулю три, а через j обозначен новый порождающий элемент. Определим умножение, полагая $j^2 = 2$ и в общем случае

$$(a+bj)(c+dj) = \begin{cases} (ac-bd)+(bc+ad)j, & a^2+b^2 \in \{0,1\} \\ (ac+bd)+(bc-ad)j, & a^2+b^2 = 2. \end{cases}$$

Мы предполагаем операции по модулю три, не указывая $\pmod 3$. Так определена некоммутативная ассоциативная алгебра с делением из девяти элементов, в которой выполняется левая дистрибутивность $x(y+z) = xy + xz$, но не всегда выполняется правая, вообще говоря, $(y+z)x \neq yx + zx$. Поэтому рассматриваемая алгебра не является телом.

Точки проективной плоскости соответствуют классам эквивалентных троек (x, y, z) элементов алгебры, среди которых хотя бы один отличен от нуля. Для ненулевого элемента κ две тройки координат (x, y, z) и $(\kappa x, \kappa y, \kappa z)$ определяют одну точку. Всего 91 точка.

Линии определяются линейными уравнениями. В отличие от обычной геометрии, здесь важно место коэффициентов линейных уравнений. Авторы предлагают рассматривать следующие уравнения: 81 вида $x + yb + zc = 0$, девять вида $y + zc = 0$ и ещё $z = 0$. Итого, получится 91 линия по 10 точек в каждой. Так определена недезаргова плоскость порядка 9.

5. Плоскости Муфанг

Джон Грейвс (John Thomas Graves, 1806–1870) открыл октавы в 1843 году, вскоре их независимо открыл Артур Кэли (Arthur Cayley, 1821–1895). В Томске гиперкомплексные числа изучал Федор Эдуардович Молин (Theodor Georg Andreas Molien, 1861–1941).

Однако октавную плоскость создала Рут Муфанг (Ruth Moufang, 1905–1977) лишь в начале 1930-х под руководством Макса Дена (Max Wilhelm Dehn, 1878–1952). Более того, в серии работ с 1931 по 1937 годы был изучен большой класс плоскостей Муфанг, в которых выполнена малая теорема Дезарга — частный случай теоремы Дезарга, когда центр перспективы лежит на линии перспективы. Муфанг доказала, что малая теорема Дезарга эквивалентна теореме о полном четырёхстороннике. Но в общем случае бесконечная плоскость Муфанг недезаргова. Напротив, конечная проективная плоскость, в которой выполнена малая теорема Дезарга (иными словами, микродезаргова плоскость), всегда будет дезарговой. Поэтому все нетривиальные плоскости Муфанг бесконечные.

Отметим, что Веблен и Веддербарн использовали ассоциативные алгебры, в которых нарушается (правая) дистрибутивность, а Муфанг рассмотрела альтернативные алгебры с делением, которые могут не быть ассоциативными.

6. Диссертация Вальтера Вагнера

В 1937 году Вальтер Вагнер (Walter Wagner) из Касселя (Kassel) защитил диссертацию "Über die Grundlagen der projektiven Geometrie und allgemeine Zahlensysteme" [5] во Франкфуртском университет имени Иоганна Вольфганга Гёте (Goethe-Universität Frankfurt am Main) под руководством Макса Дена и Карла Зигеля (Carl Ludwig Siegel, 1896–1981). Вагнер показал, что существует проективная плоскость, в которой выполнены теорема Дезарга и новое предложение, но не выполнена теорема Паппа. Но это предложение не выводимо из теоремы Дезарга.

7. Работы 1940-х годов

Новые недезарговы плоскости нашёл Маршалл Холл (Marshall Hall, 1910–1990) [6]. В современной интерпретации, Холл дал примеры конечных неассоциативных квазиполей [7].

Серию статей о недезарговых плоскостях написал Лев Анатольевич Скорняков (1924–1989). Этой теме посвящены его кандидатская диссертация "Альтернативные тела и альтернативные плоскости" (1950) и докторская диссертация "Некоторые вопросы теории тел и теории проективных плоскостей" (1956). Отметим, что в ходе Великой Отечественной войны происходил интенсивный обмен работами по математике между США и СССР. В частности, работу Холла [6] цитирует Скорняков в 1949 году [8]. Также в 1947 году опубликован перевод книги Натана Джекобсона 1943 года [9].

8. Заключение

Недезарговы плоскости возникли в XIX веке при развитии аксиоматического подхода к современной геометрии. Поиск новых *конечных* проективных плоскостей, в которых заведомо нарушается теорема Дезарга, позволит конструировать новые комбинаторные дизайны и блочные коды, исправляющие ошибки.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Васильев А. В. От Евклида до Гильберта // Вступительное слово в книге: Д. Гильберт. Основания геометрии. — Петроград: Сеятель, 1923.

2. Wiener H. Ueber Grundlagen und Aufbau der Geometrie // Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung. 1890/91. V. 1. P. 45–48.

3. Moulton F. R. A simple non-Desarguesian plane geometry // Transactions of the American Mathematical Society. 1902. V. 3. P. 192–195.

4. Veblen O., Maclagan-Wedderburn J. H. Non-Desarguesian and non-Pascalian geometries // Transactions of the American Mathematical Society. 1907. V. 8. P. 379–388.

5. Wagner W. Über die Grundlagen der projektiven Geometrie und allgemeine Zahlensysteme // Mathematische Annalen. 1937. V. 113. P. 528–567.

6. Hall M. Projective planes // Transactions of the American Mathematical Society. 1943. V. 54, № 2. P. 229–277.

7. Кравцова О. В., Логинова В. С. Вопросы строения конечных квазиполей Холла // Тр. ИММ УрО РАН. 2024. Т. 30, № 1. С. 128–141.

8. Скорняков Л. А. Натуральные тела Веблен–Веддербарновои проективной плоскости // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1949. Т. 13, № 5. С. 447–472.

9. Джекобсон Н. Теория колец. / Пер. с англ. Н.Я. Виленкина. — М.: Иностранная литература, 1947. 287 с. Перевод: Jacobson N. The Theory of Rings. 1943.

УДК 511.32

Становление В. В. Голубева, как аэромеханика (к 140-летию со дня рождения)

В. Н. Чиненова (Россия, г. Москва)
e-mail: v.chinenova@yandex.ru

Formation of V. V. Golubev as an aeromechanic (on the 140th anniversary of his birth)

V. N. Chinenova (Russia, Moscow)
e-mail: v.chinenova@yandex.ru

Владимир Васильевич Голубев (1884-1954) – выдающийся математик, механик, педагог, первый декан механико-математического факультета МГУ, член-корреспондент АН СССР, профессор, проработавший в Московском университете более тридцати лет.

Некоторые из его работ были чисто теоретическими, другие – имели прикладной характер, получившие интересную инженерную разработку и практическое применение.

Голубев был замечательным организатором, он долгие годы заведовал кафедрой аэромеханики, дважды избирался деканом механико-математического факультета, возглавлял Научно-исследовательский институт механики МГУ, был начальником кафедры высшей математики Военно-воздушной инженерной академии им. Н. Е. Жуковского, инженером-исследователем ЦАГИ.

В 1917 г. В.В.Голубев поехал из Москвы работать в Саратов, где организовывался университет и требовались энергичные, не боящиеся трудностей, молодые ученые. Вдали от столичных научных школ В. В. Голубев самостоятельно преодолел барьер между чистой и прикладной математикой, занявшись приложениями теории функций комплексного переменного к вопросам аэродинамики. Его исследования заинтересовали теоретическую группу ЦАГИ. По приглашению С. А. Чаплыгина, он переехал в Москву [1].

Первая работа В. В. Голубева по аэродинамике вышла в 1927 г. в «Трудах ЦАГИ». Это была монография «Теория крыла аэроплана в плоскопараллельном потоке» [2], в которой общим методом исследования выступает теория конформных отображений. В этой работе В. В. Голубев развивает идеи Н. Е. Жуковского и С. А. Чаплыгина в области теории крыла в плоскопараллельном потоке.

Продолжением этой работы стала вышедшая в 1931 г. «Теория крыла аэроплана конечного размаха» [3]. Здесь проведена цепь теоретических построений, ведущих от общих уравнений гидродинамики к формулам и методам количественного расчета аэроплана. Подробно излагаются идеи Прандтля относительно модели крыла конечного размаха, выясняется ценность и смысл его соображений.

Еще одна монография Голубева «Лекции по теории крыла» (1949) [4] посвящена гидродинамической теории крыла. Автор дает изложение основных результатов, задач и методов рассматриваемой теории. В гидродинамической теории рассматривается движение крыла со скоростью, значительно меньшей скорости звука, когда можно пренебречь сжимаемостью воздуха. При этом вся теория крыла разделяется на две части: теория крыла в плоскопараллельном потоке, не учитывающая влияние на условия обтекания формы крыла и его боковых кромок, и теория крыла конечного размаха, учитывающая это влияние. Последнюю можно считать естественным обобщением и развитием исходных идей теории крыла бесконечного размаха. Дальнейшим развитием теории является исследование движения крыла в более сложных условиях обтекания потоком (например, с учетом влияния на работу крыльев фюзеляжа или обтекание при повороте или фигурных полетах).

Особое место занимает теория нестационарного движения крыла.

Следует отметить, что аэромеханические работы В. В. Голубева проанализированы в содержательных очерках Космодемьянского [5].

Названные монографии являются обработкой содержания лекций, прочитанных Голубевым студентам Саратовского, Свердловского и Московского университетов. Последовательное изложение идей, высказанных разными авторами в области теории крыла, органически связано здесь с собственными изысканиями Владимира Васильевича в данном направлении. Эти работы получили широкую известность. В то время в мировой научной литературе не было ничего подобного курсу В. В. Голубева, и только позднее за границей появились курсы, аналогичные его работам.

В целом результаты Владимира Васильевича, полученные в аэродинамике, относятся к теории механизированного крыла, теории пограничного слоя, теории вихревого сопротивления, теории крыла конечного размаха, теории крыла малого удлинения и теории машущего крыла.

Остановимся несколько подробнее на результатах Голубева, связанных с теорией механизированного крыла, т. е. крыла с различными приспособлениями, улучшающими его работу.

Механизированные крылья представляют собой конструкции, оснащённые подвижными поверхностями, которые изменяют геометрию крыла в полёте. Закрылки, или щитки, как их называл Голубев, позволяют увеличивать подъёмную силу на низких скоростях, что особенно важно при взлёте и посадке. Голубев сосредоточился на изучении аэродинамических эффектов, вызванных отклонением закрылков, и разработал методы расчёта изменений подъёмной силы, сопротивления и момента крена.

Его подход сочетал теоретические выкладки с анализом данных, полученных в аэродинамических трубах ЦАГИ, где он проводил свои исследования.

В своей работе 1939 г. Голубев подробно описал физические процессы, происходящие при отклонении закрылков [4]. Он показал, что опускание закрылка увеличивает кривизну профиля крыла, что приводит к росту подъёмной силы за счёт усиления циркуляции потока. Например, при отклонении закрылка на 30 градусов коэффициент подъёмной силы мог увеличиваться на 50–70 процентов, в зависимости от формы крыла и скорости полёта. Однако, это сопровождалось ростом сопротивления, что требовало тщательного баланса при проектировании.

Голубев разработал математическую модель для расчёта этих изменений. Он использовал теорию тонких крыльев, дополнив её поправками на вязкостные эффекты в пограничном слое. Одним из ключевых уравнений стало выражение для приращения подъёмной силы, зависящее от угла отклонения закрылка и его длины относительно хорды крыла. Например, он показал, что увеличение длины закрылка с 20 до 30 % хорды повышало подъёмную силу на 25% при фиксированном угле отклонения. Эти формулы позволяли предсказывать поведение крыла с точностью до 5%, что подтверждалось экспериментами.

Особое внимание Голубев уделил изучению различных типов закрылков. Он рассмотрел простые щитки, которые опускаются вниз, и более сложные конструкции, такие, как щелевые закрылки, где между крылом и закрылком образуется зазор. Щелевые закрылки, по его расчётам, обеспечивали прирост подъёмной силы на 10–15% больше, чем простые, за счёт ускорения потока через щель, что задерживало срыв. В работе 1939 г. он привёл пример, где использование щелевого закрылка на модели крыла увеличило максимальный коэффициент подъёмной силы с 1,5 до 1,8 при скорости 50 метров в секунду [4].

Голубев также исследовал влияние закрылков на момент крена, который возникает из-за неравномерного распределения подъёмной силы вдоль размаха крыла. Он показал, что отклонение закрылков на 40 градусов могло увеличить момент крена на 20%, что требовало компенсации с помощью элеронов или других устройств. Его расчёты помогали конструкторам предсказывать эти эффекты и проектировать системы управления, способные поддерживать устойчивость самолёта.

Ещё одним важным аспектом исследований Голубева стало изучение взаимодействия закрылков с пограничным слоем. Он отметил, что отклонение закрылка изменяет градиент давления вдоль крыла, что может привести к отрыву потока. В своих выкладках он определил критический угол отклонения, при котором начинался срыв. Например, для закрылка длиной 25% хорды этот угол составлял около 450 при скорости 60 м/ сек. Эти данные были важны для предотвращения потери подъёмной силы при взлёте и посадке.

Голубев подкреплял свои теоретические выводы экспериментальными данными. В работе 1939 г. он ссылался на испытания моделей крыльев с закрылками в аэродинамической трубе ЦАГИ [4]. Эти испытания показали, что его предсказания совпадали с измеренными значениями подъёмной силы и сопротивления с погрешностью не более 4% . Такой уровень точности сделал его методы надёжным инструментом для инженерных расчётов.

Теория механизированных крыльев, разработанная Голубевым, нашла широкое применение в авиационной промышленности. Его исследования помогли конструкторам оптимизировать системы закрылков, что улучшило эксплуатационные характеристики самолётов. В 1930-е годы, когда авиация переживала период быстрого развития, эти разработки были особенно ценными для создания машин с высокими взлётно-посадочными качествами.

Одним из главных практических результатов стало повышение безопасности при взлёте и посадке. Благодаря расчётам Голубева инженеры могли выбирать оптимальные размеры и углы отклонения закрылков, чтобы обеспечить достаточную подъёмную силу при низких скоростях. Например, увеличение коэффициента подъёмной силы на 60% позволяло сократить длину разбега с 800 до 500 метров для самолёта массой 5 т., что было критически важным для коротких аэродромов.

Работы Голубева также повлияли на проектирование военных самолётов. Истребители, такие как ИЛ-16, разрабатывавшиеся в ЦАГИ, использовали закрылки для улучшения маневренности и устойчивости на малых скоростях. Хотя прямых доказательств применения его методов к конкретным моделям нет в открытом доступе, известно, что его исследования активно использовались в конструкторских бюро того времени. Его расчёты помогали сбалансировать подъёмную силу и сопротивление, что позволяло самолётам эффективно работать в бою.

Кроме того, теория Голубева способствовала развитию многофункциональных систем управления. Его анализ момента крена и условий срыва потока позволял конструкторам интегрировать закрылки с другими элементами, такими, как элероны и предкрылки, для создания более сложных механизированных крыльев. Это нашло отражение в проектировании пассажирских самолётов, где комбинация закрылков и предкрылков обеспечивала плавный переход между различными режимами полёта.

В долгосрочной перспективе идеи Голубева легли в основу современных систем управления крылом. Сегодняшние самолёты, такие как Boeing 737 или Airbus A320, используют сложные многосегментные закрылки, принципы работы которых уходят корнями в исследования 1930-х годов. Хотя вычисления Голубева выполнялись вручную, их структура была настолько логичной, что позже они были адаптированы для компьютерных программ, что ускорило процесс проектирования.

Таким образом, теория механизированных крыльев, разработанная Владимиром Васильевичем Голубевым и изложенная в его работе 1939 г. [4], стала важным вкладом в аэромеханику. Его исследования предоставили конструкторам инструменты для создания более эффективных и безопасных самолётов, что оказало влияние на развитие авиации как в Советском Союзе, так и за его пределами.

Подробно его результаты были освещены в монографии [6]. В ней Голубев по-новому подошел к задаче: он искал эффект, вызываемый работой предкрылка, не в непосредственном увеличении подъемной силы, а в изменении характера обтекающего потока, благодаря чему крыло работает на плавное обтекание при углах, значительно превосходящих соответствующие углы крыла без предкрылка.

Исследования Владимира Васильевича Голубева в аэромеханике представляют собой выдающийся пример сочетания теоретической глубины и практической значимости. За годы своей работы он создал методы, которые не только решили актуальные задачи своего времени, но и заложили фундамент для будущих достижений в авиации.

«В лице профессора В. В. Голубева мы имеем ученого, значительно обогатившего математику и механику рядом ценных работ, выдвигающего в своих механических и технических работах на первый план физическую сущность проблемы, не ограничивающегося чисто формальной, математической трактовкой вопроса», — писали А. И. Некрасов и А. А. Ильюшин в отзыве о научных трудах В. В. Голубева [7, с. 21].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Протасова Л. А., Тюлина Н. А. Владимир Васильевич Голубев. 1884-1954. — Москва: Изд-во Наука, 1995.

2. Голубев В. В. Теория крыла аэроплана в плоскопараллельном потоке, 2-е изд. — Москва - Ленинград: Изд-во ГИТТЛ, 1938.

3. Голубев В. В. Теория крыла аэроплана конечного размаха // р. ЦАГИ. 1931. № 108.

4. Голубев В. В. Лекции по теории крыла — Москва - Ленинград: Изд-во ГИТТЛ, 1949.

5. Космодемьянский А. А. Очерки по истории механики — Москва: Изд-во Просвещение, 1964. С. 385-408.

6. Голубев В. В. Труды по аэромеханике — Москва - Ленинград: Изд-во ГИТТЛ, 1957. С. 31-137.

7. Некрасов А. И., Ильюшин А. А. О научных трудах члена-корреспондента Академии наук СССР, Заслуженного деятеля науки и техники Голубева Владимира Васильевича. 1946. // Архив Научно-мемориального музея Н. Е. Жуковского. Материалы к истории ЦАГИ. Ученые ЦАГИ — члены-корреспондёнты АН СССР. 1962. № 3(Работа 004190). С. 13-22.

УДК 511.32

Изучение связи и связанности в системе из двух маятников на основе теоретических представлений Л. И. Мандельштама

А. О. Юлина (Россия, г. Санкт-Петербург)
Санкт-Петербургский государственный архитектурно-строительный университет;
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого
e-mail: parfenova19761976@mail.ru
В. Г. Соловьев (Россия, г. Санкт-Петербург)
Военная академия связи имени Маршала Советского Союза С. М. Будённого;
Псковский государственный университет
e-mail: solovyev_v55@mail.ru

Study of connection and connectivity in a system of two pendulums based on the theoretical concepts of L. I. Mandelstam

A. O. Yulina (Russia, St. Petersburg)
Saint Petersburg State University of Architecture and Civil Engineering; Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University
e-mail: parfenova19761976@mail.ru
Dr. Sci. V.G. Solovyev
S. M. Budyonny Military Academy of Telecommunications; Pskov State University
e-mail: solovyev_v55@mail.ru

В 2024 году исполнилось 145 лет со дня рождения Леонида Исааковича Мандельштама (1979 – 1944) [1]. 70 лет назад Академия наук СССР завершила издание пятитомного полного собрания трудов академика Л.И. Мандельштама [2]. Но даже теперь, много десятилетий спустя, нельзя не согласиться с мнением Комиссии по изданию трудов Л.И. Мандельштама о том, что курс теории колебаний, прочитанный Леонидом Исааковичем в 1930 – 1932 гг., «несмотря на свою давность, сохранил значительный научный и педагогический интерес» (это находит свое подтверждение и в современных классических учебниках [3]).

Рассмотрение этих вопросов оказывается еще более актуальным, если учесть, что далеко не во всех современных научно-методических публикациях на эту тему проводится четкое разграничение понятий «связь» и «связность», обсуждается их физический смысл и вводятся соответствующие математические соотношения, из-за чего у читателя часто возникает путаница при использовании этих понятий.

Отдавая дань уважения выдающемуся отечественному ученому и замечательному человеку, авторы настоящей работы взяли на себя смелость напомнить читателям и проиллюстрировать на простом примере некоторые идеи Л.И. Мандельштама, относящиеся к связи и связанности двух маятников.

Рассмотрим колебательную систему с двумя степенями свободы на примере двух связанных пружиной жесткостью k одинаковых физических маятников.

Пусть для каждого маятника массой m момент инерции относительно оси вращения равен I_0, расстояния от оси вращения до центра масс и до точки закрепления пружины равны соответственно $d_0 = O_1C_1 = O_2C_2$ и $a_0 = O_1B_1 = O_2B_2$, длина недеформированной пружины равна O_1O_2. В качестве обобщенных координат выберем углы отклонения φ_1 и φ_2 маятников от положения их равновесия. Тогда при малых колебаниях рассматриваемой системы уравнения Лагранжа II рода можно записать в виде:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_1} - \dfrac{\partial T}{\partial \varphi_1} = -\dfrac{\partial \Pi}{\partial \varphi_1}, \\ \\ \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_2} - \dfrac{\partial T}{\partial \varphi_2} = -\dfrac{\partial \Pi}{\partial \varphi_2} \end{cases}$$

При этом кинетическая энергия рассматриваемой системы $T = \dfrac{I_0}{2}(\dot{\varphi}_1^2 + \dot{\varphi}_2^2)$, а потенциальная энергия $\Pi = \dfrac{mgd_0}{2}(\varphi_1^2 + \varphi_2^2) + \dfrac{ka_0^2}{2}(\varphi_1 - \varphi_2)^2$.

Запишем соответствующие производные:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_1} = I_0\dot{\varphi}_1, \frac{d}{dt}(I_0\dot{\varphi}_1) = I_0\ddot{\varphi}_1, \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_2} = I_0\dot{\varphi}_2, \frac{d}{dt}(I_0\dot{\varphi}_2) = I_0\ddot{\varphi}_2,$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi_1} = (mgd_0 + ka_0^2)\cdot\varphi_1 - ka_0^2\cdot\varphi_2 = [\varphi_1 - \rho\varphi_2]\cdot(mgd_0 + ka_0^2),$$
$$\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi_2} = (mgd_0 + ka_0^2)\cdot\varphi_2 - ka_0^2\cdot\varphi_1 = [\varphi_2 - \rho\varphi_1]\cdot(mgd_0 + ka_0^2),$$

введенный безразмерный коэффициент связи (обобщенный коэффициент жесткости)

$$\rho = \frac{ka_0^2}{ka_0^2 + mgd_0} \tag{1}$$

характеризует связанное движение маятников.

Таким образом, уравнения Лагранжа II рода примут вид:

$$I_0\ddot{\varphi}_1 + \varphi_1\cdot mgd_0 + ka_0^2(\varphi_1 - \varphi_2) = 0, \tag{2}$$

или

$$I_0\ddot{\varphi}_1 + (ka_0^2 + mgd_0)(\varphi_1 - \varphi_2\rho) = 0$$

$$I_0\ddot{\varphi}_2 + \varphi_2\cdot mgd_0 + ka_0^2(\varphi_2 - \varphi_1) = 0, \tag{3}$$

или

$$I_0\ddot{\varphi}_2 + (ka_0^2 + mgd_0)(\varphi_2 - \varphi_1\rho) = 0.$$

Складывая и вычитая левые и правые части уравнений (2) и (3), получим:

$$I_0(\ddot{\varphi}_1 + \ddot{\varphi}_2) + (\varphi_1 + \varphi_2)mgd_0 = 0, \tag{4}$$
$$I_0(\ddot{\varphi}_1 - \ddot{\varphi}_2) + (\varphi_1 - \varphi_2)(mgd_0 + 2ka_0^2) = 0. \tag{5}$$

Введем обозначения:

$$\omega_+ = \sqrt{\frac{mgd_0}{I_0}}, \tag{6}$$

$$\omega_- = \sqrt{\frac{mgd_0 + 2ka_0^2}{I_0}}. \tag{7}$$

Величины ω_+ и ω_- представляют собой собственные циклические частоты нормальных колебаний рассматриваемой системы с двумя степенями свободы. Если разорвать связь между маятниками, то каждый из них, как известно, будет колебаться с частотой ω_+, задаваемой формулой (6). Эту частоту называют основной. Решения дифференциальных уравнений (4) и (5) могут быть записаны в виде:

$$\varphi_1 + \varphi_2 = A_+ \cos(\omega_+ t + \delta_+), \tag{8}$$

$$\varphi_1 - \varphi_2 = A_- \cos(\omega_- t + \delta_-). \tag{9}$$

Складывая и вычитая левые и правые части уравнений (8) и (9), получим:

$$\varphi_1 = \frac{A_+}{2} \cos(\omega_+ t + \delta_+) + \frac{A_-}{2} \cos(\omega_- t + \delta_-), \tag{10}$$

$$\varphi_2 = \frac{A_+}{2} \cos(\omega_+ t + \delta_+) - \frac{A_-}{2} \cos(\omega_- t + \delta_-). \tag{11}$$

Таким образом, в общем случае колебания каждого маятника рассматриваемой системы представляют собой суперпозицию двух гармонических нормальных колебаний с собственными частотами ω_+ и ω_-.

Введенный ранее коэффициент связи (1) можно представить в виде:

$$\rho = \frac{ka_0^2}{ka_0^2 + mgd_0} = \frac{T_+^2 - T_-^2}{T_+^2 + T_-^2}.$$

В общем случае величина ρ меняется между нулем и единицей, причем при отсутствии связи $\rho = 0$, а для жесткой связи $\rho = 1$. Рассмотрим ряд частных случаев, определяемых начальными условиями.

1. Синфазные колебания

Зададим начальные условия в следующем виде: в момент времени $t_0 = 0$ начальные обобщенные координаты маятников одинаковы ($\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_0$), а начальные скорости равны нулю. Тогда из (10) и (11) следует:

$$\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_0 \cos \omega_+ t. \tag{12}$$

Таким образом, при таком нормальном колебании связь не играет никакой роли, и оба маятника колеблются в одной фазе с основной частотой ω_+.

2. Встречные колебания

Зададим следующие начальные условия: в момент времени $t_0 = 0$ $\varphi_2 = -\varphi_1 = \varphi_0$, а начальные скорости будем по-прежнему считать равными нулю. Тогда из (10) и (11) следует:

$$\begin{cases} \varphi_1 = -\varphi_0 \cos \omega_- t \\ \varphi_2 = \varphi_0 \cos \omega_- t \end{cases} \quad (13)$$

В этом случае маятники колеблются в противофазе, совершая зеркально-симметричные нормальные колебания с частотой ω_-. Наличие связи между маятниками оказывается уже существенным.

3. Биения

Зададим начальные условия следующим образом: $t_0 = 0$ $\varphi_1(0) = \varphi_0, \varphi_2(0) = 0$, начальные скорости по-прежнему равны нулю. Тогда из (10) и (11) получим:

$$\begin{cases} \varphi_1 = \dfrac{\varphi_0}{2} \cos \omega_+ t + \dfrac{\varphi_0}{2} \cos \omega_- t = \varphi_0 \cos\left(\dfrac{\omega_+ + \omega_-}{2} t\right) \cdot \cos\left(\dfrac{\omega_- - \omega_+}{2} t\right) \\ \varphi_2 = \dfrac{\varphi_0}{2} \cos \omega_+ t - \dfrac{\varphi_0}{2} \cos \omega_- t = \varphi_0 \sin\left(\dfrac{\omega_+ + \omega_-}{2} t\right) \cdot \sin\left(\dfrac{\omega_- - \omega_+}{2} t\right). \end{cases} \quad (14)$$

При слабой связи между маятниками ($\gamma << 1$) $\omega_- - \omega_+ << \omega_+ + \omega_-$ поэтому уравнение (14) можно переписать в виде:

$$\begin{cases} \varphi_1 = A_1(t)\cos\omega t \\ \varphi_2 = A_2(t)\sin\omega t, \end{cases}$$

где $\omega = \dfrac{2\pi}{T} = \dfrac{\omega_+ + \omega_-}{2}$, а амплитуды A_1 и A_2 медленно меняются со временем. В этом случае возникают биения с периодом

$$T_б = \frac{2\pi}{\omega_- - \omega_+}, \tag{15}$$

так что маятники обмениваются энергией с циклической частотой $\omega_б = \omega_- - \omega_+$.

Как отмечал Л.И. Мандельштам, неравенство $\rho << 1$, свидетельствующее о слабости связи, «мало что дает, *не это* характеризует явление... . Важна степень физической “связанности”» (см. [2], Т. 4, С. 254–255), а она, в свою очередь, зависит от того, выполняется или нет неравенство

$$\rho << \frac{|n_1^2 - n_2^2|}{n_1 n_2}, \tag{16}$$

где n_1 и n_2 – *парциальные частоты* колебаний маятников (парциальная частота – это частота колебаний одного маятника при неподвижном другом маятнике; парциальные частоты в общем случае лежат *между собственными частотами* колебаний маятников, входящих в рассматриваемую систему). При $n_1 = n_2 = n$, *несмотря на сколь угодно малую связь, связанность огромна,* так что наблюдается своего рода «резонанс». Однако, при этом следует иметь в виду, что время τ «перекачки» энергии от одного маятника к другому при биениях обратно пропорционально коэффициенту связи. Действительно, при $\rho << 1$ из (1), (6), (7) и (15) следует, что $\tau \approx \dfrac{\pi}{n \cdot \rho}$ [3].

«В случае, когда ρ очень мало по отношению к единице, но не по отношению к $\dfrac{|n_1^2 - n_2^2|}{n_1 n_2}$, то, несмотря на “слабую связь”, взаимодействие будет очень сильное... . При этом, если $n_1 = n_2$, то вообще не может быть малой “связанности”... Если же оба маятника расстроены $n_1 \neq n_2$ и слабо связаны (выполнено (16)), то каждый сохраняет приблизительно свою частоту. Если мы отклоним и приведем в колебание первый маятник, то второй почти не колеблется» (см. [2], Т. 4, С. 255).

Таким образом, теоретические представления Л.И. Мандельштама о связи и связанности двух осцилляторов, сформулированные еще в начале прошлого столетия, предельно ясно показывают физический смысл понятий «связь» и «связанность». Справедливость этих фундаментальных представлений может быть легко подтверждена в ходе простых модельных экспериментов.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Горелик Г.Е. Леонид Мандельштам и его школа // Вестник Российской Академии Наук. 2004. № 10. С. 932–940.

2. Мандельштам Л.И. Полное собрание трудов: в 5 т. / под ред. С.М. Рытова, М.А. Леонтовича; вступ. ст. Н.Д. Папалекси. М.: Изд-во АН СССР, 1947–1955.

3. Стрелков С.П. Введение в теорию колебаний: Учебник. 3-изд. СПб.: «Лань», 2005. 440 с. С. 258–260.

УДК 511.32

Дифференциальные параметры первого и второго порядка в работах О. И. Сомова

А. О. Юлина (Россия, г. Санкт-Петербург)
Санкт-Петербургский государственный архитектурно-строительный университет
e-mail: parfenova19761976@mail.ru

Differential parameters of the first and second order in the works of O. I. Somov

A. O. Yulina (Russia, St. Petersburg)
Saint Petersburg State University of Architecture and Civil Engineering
e-mail: parfenova19761976@mail.ru

В электрических и магнитных исследованиях потенциал определяется так, что результирующая сила в любом направлении измеряется уменьшением потенциала в этом направлении. Этот метод использования выражения делает его соответствующим по знаку потенциальной энергии, которая всегда уменьшается, когда тела перемещаются в направлении сил, действующих на них. Геометрическая природа связи между потенциалом и вектором, полученным из него, проясняется благодаря открытию Гамильтоном формы оператора, с помощью которого вектор выводится из потенциала.

Петербургский математик и механик О.И. Сомов первый в России использовал аппарат векторного исчисления в курсе теоретической механики. Сомов глубоко проработал труды Гамильтона и взял из них самое необходимое и полезное для изложения механики на принципиально новом уровне.

Сомов расширил понятие дифференциального параметра, придав ему векторный смысл. Выделил дифференциальный параметр первого порядка (градиент) и второго порядка (дивергенция).

Ему принадлежит введение математического понятия градиента, годографа, векторного произведения, линии и поверхности уровня, потенциала и их геометрического и векторного смысла. Однако же работы академика Сомова незаслуженно забыты. Постараемся восполнить этот пробел в данной работе.

К 1873 году общая теория электромагнитного поля завершилась в фундаментальных работах Джеймса Кларка Максвелла. Вводятся следующие определения силового поля и потенциального поля. Силовым полем называется область пространства, в каждой точке которого на помещенную туда материальную точку действует сила, однозначно определенная по величине и направлению в любой момент времени (функция точки). Примеры силовых полей: поле силы тяжести вблизи земной поверхности, гравитационное поле, поле силы упругости, электростатическое поле.

Таким образом, если функция точки – скалярная величина, то соответствующие поле скалярное, если же векторная, поле векторное. Потенциальная энергия и потенциальная функция в математической физике отличаются только знаком.

Силовое поле называется потенциальным, если для него существует функция точки (функция координат), такая, что проекции действующей силы могут быть вычислены через ее частные производные по соответствующим координатам.

Потенциальная сила всегда направлена по нормали к эквипотенциальной поверхности (понятие уровня, поверхность точек с равной потенциальной энергией) в сторону уменьшения значений потенциальной энергии. Такой вектор назвали градиентом (дифференциальный параметр).

$$\operatorname{grad}\Pi(x,y,z) = \frac{\partial \Pi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial \Pi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial \Pi}{\partial z}\vec{k}$$

Важная характеристика векторного поля – расходимость (дивергенция). Расходимость поля представляет собой предел отношения потока поля через малую замкнутую поверхность к объему, ограниченному этой поверхностью.

$$\div\ \operatorname{grad} U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$$

Дифференциальный оператор $\nabla U = \dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 U}{\partial z^2}$ - оператор Лапласа, $U(x,y,z)$ – скалярная функция.

В 1862 году Питер Гёсри Тэт представил дифференциальный оператор, не зависящий от аналитического выражения функции – оператор набла.

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k},$$
$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Лаплас дал выражение дифференциального параметра второго порядка в сферических или полярных координатах, Ламе нашел выражения обоих параметров в каких-либо прямоугольных координатах.

Сомов представил дифференциальный параметр как отрезок, отложенный на нормали к поверхности уровня (касательной). Приняв такой геометрический образ параметра и, определив его независимо от системы координат как производную функции точки относительно перемещения нормального к поверхности уровня, Сомов показал прямой способ для выражения дифференциальных параметров первого и второго порядка и кривизны поверхности в каких либо координатных системах ортогональных или косоугольных. Этот способ составления дифференциальных параметров первого порядка охватывает все графические и аналитические способы для построения нормалей к поверхностям и кривым линиям.

Таким образом, Сомов придал дифференциальному параметру векторный смысл, что стало революционным поворотом в изложении механики.

Изложение кинематики с помощью векторного анализа является заслугой О.И. Сомова. Большая часть его статей в этом направлении научной работы вошла в его учебник «Рациональная механика» («Прямой способ для выражения дифференциальных параметров первого или второго порядка в криволинейных координатах»; «Об ускорении различных порядков в относительном движении»; «Construct. des axes d'un ellipse», «Преобразование прямолинейных координат в эллиптические»; «Attract. d'un couche mince sur un point de sa surface»; «О решении одного вопроса механики, предложенного Абелем»; «Доказательство Коши для уравнения равновесия»; «Спрямление кривых линий»; «Алгебраическое доказательство Гамильтонова начала».) Поэтому далее подробно мы проанализируем его фундаментальный труд «Рациональная механика» [2].

Первая часть «Рациональной механики» (кинематика) Сомова была издана в 1872 году, в 1874 году была выпущена и неоконченная вторая часть (статика, динамика). После смерти автора эти два тома были переведены на немецкий язык в 1878 году. После Курса Сомова в механике прочно закрепился векторный анализ, впоследствии это привело к созданию теории поля. Приведем основные элементы теории поля в работах Сомова.

Сомов определяет величину и направления хорды, стягивающей пространство, пройденное точкой в данное время, геометрическое дифференцирование по разным переменным. Вводит следующие понятия: геометрическая вариация, функция точки, уровень, общий способ координат, дифференциальные параметры первого порядка. Также приводит наиболее замечательные системы координат [4].

В задачах геометрии, механики и математической физики часто приходится рассматривать два выражения, составленных из из частных производных функции координат точки. Если это декартовы координаты, то дифференциальный параметр первого порядка представляет собой квадратный корень из суммы квадратов частных производных первого порядка, а его величина и направление могут быть представлены длиною, для которой проекции на осях и служат эти производные. В этом случае, дифференциальный параметр второго порядка есть сумма частных производных второго порядка [5].

Успех решения геометрической задачи очень часто зависит от выбора системы координат. *Во многих вопросах геометрии и механики употребление прямолинейных координат представляет неудобство, состоящее в длинных выкладках, маскирующих весьма часто прямой путь к достижению желаемого результата.*

Лаплас дал выражение дифференциального параметра второго порядка в криволинейных координатах, Ламе нашел выражения обоих параметров в декартовых координатах.

О.И. Сомов представил способ прямого выражения дифференциальных параметров в координатах *каго-либого рода.*

Дифференциальный параметр первого порядка функции, которая должна сохранять постоянное значение для точек некоторой поверхности, направлен по нормали к этой поверхности и может служить для определения этой прямой, а равно и касательной плоскости и различных, зависящих от нее величин. Равнодействующая притягательных или отталкивающих сил представляется дифференциальным параметром первого порядка функции, называемой потенциалом [3].

Поворотным моментом в истории изложения механики явилось введение понятия градиента, или, как его сначала называли, дифференциального параметра. Впервые его рассмотрел Г. Ламе в своем Курсе [1] как

$$p = \sqrt{(\frac{dF}{dx'})^2 + (\frac{dF}{dy'})^2 + (\frac{dF}{dz'})^2} = \sqrt{(\frac{dF}{dx})^2 + (\frac{dF}{dy})^2 + (\frac{dF}{dz})^2}$$

«...общие выражения дифференциальных параметров. Стоит отметить, что эти параметры сохраняют тот же характер и ту же независимость, когда функции точки выражаются в криволинейных координатах.» («...Expressions générales des paramétres différentiels. Il s'agit de constater que ces paramétres conservent le même caractére et la même indépendance, quand les fonctions-de-point sont exprimées en coordonnées curvilignes»)

Производная от функции точки $V = f(m)$ относительно перемещения нормального к поверхности уровня, проходящего через точку m, называется дифференциальным параметром первого порядка функции V. (Это название дал Ламе.[1]).

Пусть $O'MN$ будет линия, перпендикулярная в точке M к поверхности уровня AB, и n длина этой линии, начинающейся в точке O', и оканчивающейся в точке M, тогда дифференциальный параметр (далее для краткости просто параметр) функции V в этой точке изобразится длиною $MP = \frac{dV}{dn}$, отложенною на нормали к поверхности AB в ту сторону, где $\Delta V > 0$.

Производная $MQ = \dfrac{dV}{ds}$ функции V относительно какого- нибудь перемещения dS равна проекции дифференциального параметра на направление этого перемещения.

Обозначая через P величину и направление параметра, будем иметь

$$\frac{dV}{ds} = P\cos(P, ds)$$

Дифференциальный параметр второго порядка имеет большое значение во многих отраслях математической физики. Сомов излагает простой способ вывода уравнения теплопроводности с помощью дифференциальных параметров первого и второго порядка. Подробно находит выражения дифференциального параметра второго порядка в общих координатах. Для понимания дальнейшего изложения приведем определение этого параметра, которое дает Сомов.

Дифференциальный параметр второго порядка функции φ, величина которой зависит от положения точки A и которая изменяется непрерывно, когда эта точка получает какое-либо перемещение, есть отношение кубического расширения дифференциала объема к соответствующему времени, при чем каждая точка этого объема перемещается со скоростью, которая по величине и по направлению равна дифференциальному параметру первого порядка функции φ. [3]

«*В математической теории теплоты, дифференциальным параметром первого порядка температуры определяется количество теплоты, проходящего через поверхность тела; температура же внутри тела, когда оно однородно, должна удовлетворять уравнению, которое получается через приравнивание производной температуры относительно времени параметру второго порядка температуры, помноженному на некоторое постоянное количество. По сему, состояние постоянной температуры в однородном теле определяется условием, что дифференциальный параметр второго порядка равен нулю.*»[3]

$$\iiint \Delta_2\varphi \cdot dV = \int \frac{d\varphi}{dn} \cdot ds$$

$P\cos(Pn) = \dfrac{d\varphi}{dn}$ - дифференциальный параметр первого порядка функции φ, dn - толщина слоя, заключающегося между поверхностями уровней φ и $\varphi + d\varphi$.

Если φ - температура тела в точке (q_1, q_2, q_3) в момент времени t, то вторая часть уравнения, помноженная на коэффициент проводимости (q), и который предполагает постоянным, будет выражать количество теплоты, проходящей за время dt через поверхность тела, как входящей в тело, так и выходящей из него, разделенное на dt. Если первая часть последнего уравнения приведется к одному элементу $\Delta_2\varphi \cdot dV$, то количество теплоты будет равняться

$$c\rho\frac{d\varphi}{dt}dV,$$

c - удельный теплород (удельная теплоемкость), ρ - плотность тела. Таким образом

$$c\rho\frac{d\varphi}{dt}dV = q\Delta_2\varphi \cdot dV,$$

или

$$k\frac{d\varphi}{dt} = \Delta_2\varphi,$$

где $k = \dfrac{c\rho}{q}$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Lame G. Lecons sur les coordonnees curvilignes. Paris. 1859.-410 P.
2. Сомов О.И. Рациональная механика. Кинематика. С-Петербург. Типография Императорской Академии Наук. 1872г.- 491 с.
3. Сомов О.И. Прямой способ для выражения дифференциальных параметров первого или второго порядка в криволинейных координатах //Записки Императорской Академии наук. Санкт-Петербург: Типография Императорской Академии Наук. Т.8, кн.1. т. 1865г. Раздельная пагинация.
4. Сомов О.И. Об ускорении различных порядков в относительном движении //Записки Императорской Академии наук. Санкт-Петербург: Типография Императорской Академии Наук. Т.9, кн.1. т. 1865г. Раздельная пагинация.
5. Сомов О.И. Преобразование прямолинейных координат в эллиптические //Записки Императорской Академии наук. Санкт-Петербург: Типография Императорской Академии Наук. Т.10, кн.2. т. 1860г. Раздельная пагинация.

Секция 12. Многомасштабное математическое моделирование в физике

УДК 537.86

К вопросу об эволюции пространственно квазимонохроматического начального возмущения при пучковой неустойчивости, развивающейся в режиме коллективного эффекта Черенкова

Ю. В. Бобылев (Россия, г. Тула)
Тульский государственный педагогический университет им. Л.Н. Толстого
e-mail: bobylev.yu@mail.ru

On the evolution of a spatially quasi-monochromatic initial perturbation under beam instability developing in the regime of the collective Cherenkov effect

Yu. V. Bobylev (Russia, г. Tula)
Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University
e-mail:bobylev.yu@mail.ru

В настоящей работе мы продолжаем начатое в [1] рассмотрение пучковой неустойчивости, развивающейся в плазме, без каких либо предварительных упрощающих предположений, считая плазму и пучок входящими в теорию равноправно, и являющимися нелинейными.

Как и ранее, примем за исходную следующую достаточно общую математическую модель пучково-плазменной системы, которой присущи все наиболее характерные черты явления пучковой неустойчивости в плазме. А именно, рассмотрим цилиндрический металлический волновод с произвольным односвязным поперечным сечением, в котором находятся бесконечно тонкие в поперечном сечении нерелятивистский электронный пучок и плазма, движение же тяжелых ионов при этом вообще не учитывается. Будем также считать, что волновод помещен в продольное сильное внешнее магнитное поле, препятствующее поперечным движениям электронов пучка и плазмы.

В случае нерелятивистского пучка в плазме будут возбуждаться потенциальные (электростатические) возмущения, для описания которых нужно использовать уравнение Пуассона для скалярного потенциала и кинетическое уравнение Власова с самосогласованным полем. Не воспроизводя здесь вывода, подробности которого, можно найти, например, в [2], приведём окончательный результат:

$$\begin{aligned} \frac{d^2y_p}{d\tau^2} &= -\frac{i}{2}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{a_n}{n}[(\rho_{pn}+\nu q_n\rho_{bn})exp(iny_p)-k.c.],\\ \frac{d^2y_b}{d\tau^2} &= -\frac{i}{2}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{a_n}{n}[(q_n\rho_{pn}+\nu\rho_{bn})exp(iny_b)-k.c.]. \end{aligned} \tag{1}$$

Данные уравнения записаны в безразмерном виде. Физический смысл, входящих в них переменных и параметров, можно найти, например, в [1, 2]. Здесь же для краткости отметим только, что параметры q_n определяют степень связи пучковой и плазменной подсистем, при этом в общем случае выполняется неравенство $0 < q_n < 1$, а $q_n = 1$ соответствует совпадению местоположения пучков [2]; $\rho_{\alpha n}$ - амплитуды гармоник плотностей пучка и плазмы, даваемые выражениями

$$\rho_{\alpha n} = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{2\pi} exp(-iny_\alpha) dy_0, \quad (\alpha = p, b). \tag{2}$$

Уравнения (1) дополняются соответствующими начальными условиями на координаты и скорости электронов. Возьмём данные условия в таком виде [2]:

$$y_p(0) = y_0, \quad \frac{dy_p}{d\tau}(0) = 0, \quad y_b(0) = y_0 + \sum_n b_n cos(ny_0 + \zeta_n), \quad \frac{dy_b}{d\tau}(0) = \frac{k_z u}{\omega} \equiv \Delta. \tag{3}$$

В настоящей работе, как и в [1], оставим в сумме в (3) только малое число (конкретно - пять) соседних слагаемых, что соответствует задаче об эволюции пространственно квазимонохроматического начального возмущения [2].

Для численного решения системы уравнений (1)-(3), чтобы рассмотреть неустойчивость квазимонохроматического начального возмущения при коллективном эффекте Черенкова, зададим все параметры, как и при исследовании одночастичного режима в [1], для резонанса на первой пространственной гармонике, но положим $q_n = 5$.

На Рис.1 изображена временная динамика амплитуд первой, второй и пятой гармоник возмущения плотности электронов пучка ρ_{bn} и плазмы ρ_{pn} .

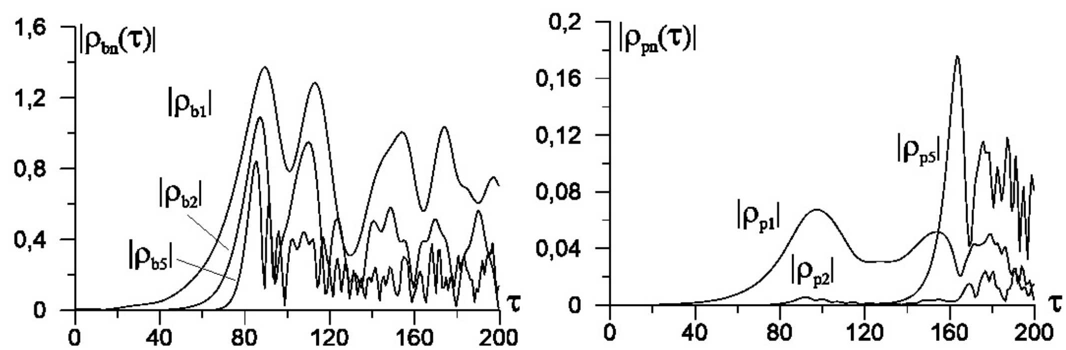


Рис. 1: Временная динамика амплитуд первой, второй и пятой гармоник возмущения плотности электронов пучка | ρ_{bn} | (слева) и плазмы | ρ_{pn} | (справа).

Видно, что в целом сохранились прежние, описанные в [1], закономерности. Правда уменьшились по сравнению с одночастичным случаем максимальные амплитуды пространственных гармоник, возросло время насыщения неустойчивости и исчезли регулярные осцилляции амплитуды первой гармоники на стадии после насыщения. Связано это с уменьшением инкремента неустойчивости и с изменением механизма её нелинейной стабилизации.

На Рис.2 в моменты времени $\tau = 100$, $\tau = 120$ и $\tau = 160$ изображены фазовые плоскости электронов пучка и электронов плазмы (зависимости безразмерных скоростей электронов $\eta_b(y)$ и $\eta_p(y)$ от их координаты y). Из этих рисунков следует, что плазма достаточно долгое время после насыщения неустойчивости остаётся практически линейной, и только при $\tau = 160$ видно, что модуляция электронов плазмы происходит на двух пространственных масштабах. При этом крупномасштабная (длинноволновая) модуляция обусловлена возбуждением резонансной (первой) гармоники плазменной волны. Это – обычная при пучковой неустойчивости модуляция, имеющаяся на любом этапе. Однако поверх обычной модуляции образовалась и существенно более мелкомасштабная структура, связанная с генерацией высших гармоник плотности плазмы, преобладающей при этом является пятая гармоника, очень интенсивный рост которой, в данный момент времени виден и на Рис.1.

Учитывая такое поведение электронов плазмы, можно сделать вывод о том, что насыщение неустойчивости, как и при одночастичном эффекте Черенкова, обусловлено нелинейностью электронов пучка. В частности, как видно из Рис.2 (при $\tau = 100$), на каждом периоде первой пространственной гармоники имеется группа отраженных электронов. Они отражаются от «горбов» потенциала ленгмюровской волны самого пучка, т.е. при коллективном эффекте Черенкова электроны пучка захватываются пучковой волной. При этом сама пучковая волна разрушается, что приводит к быстрой последующей хаотизации электронного пучка и исчезновению регулярных осцилляций амплитуды резонансной гармоники, что и наблюдается на Рис.1 и Рис.2. Такое явление, как известно, называется самозахватом [2].

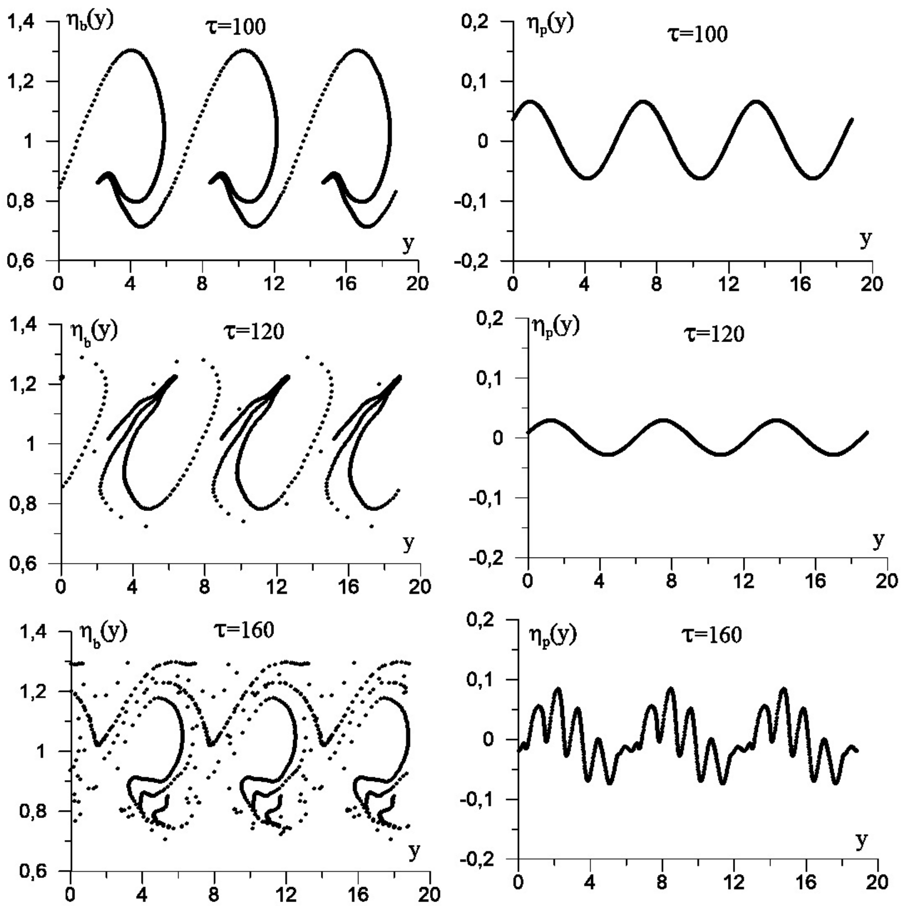


Рис. 2: Фазовые плоскости электронов пучка (слева – зависимости $\eta_b(y)$) и плазмы (справа – зависимости $\eta_p(y)$)

Итак, расчеты показывают, что имеется механизм перекачки энергии плазменных колебаний, возбуждаемых электронным пучком, в коротковолновую часть спектра. Поскольку механизм этот обусловлен нелинейностью плазмы, то проявляется он примерно одинаково как в одночастичном, так и в коллективном режимах. Но, если есть механизм перекачки энергии в коротковолновую часть спектра, и нет механизма поглощения в этой области спектра энергии, то энергия должна аккумулироваться около самой высшей из учтенных гармоник, что и подтверждается численными расчетами. Конечно, зависимость спектра от числа учитываемых гармоник является не физическим эффектом, свидетельствующим о недостатках используемой физической модели. Необходим учёт поглощения энергии в коротковолновой области спектра. Таковым может быть затухание Ландау [2], которое именно в коротковолновой части спектра велико. Однако, проводя соответствующие оценки [2], можно показать, что затухание Ландау могло бы проявиться только на очень больших временах, когда начали бы возбуждаться гармоники с номерами выше 20, но столь поздние стадии процесса здесь не рассматриваются.

Для характеристики спектральной плотности пространственных гармоник пучковых и плазменных колебаний введём функции

$$\rho_{\alpha n}(\Omega) = \left| \int\limits_0^{\tau} \rho_{\alpha n}(\tau') exp(i\Omega\tau') d\tau' \right|, \qquad (4)$$

Рассчитанные по данным формулам величины $\rho_{pn}(\Omega)$ оказываются, в целом, аналогичными величинам, вычисленным в [1] для случая развития неустойчивости в режиме одночастичного эффекта Черенкова, поэтому приведём только спектральные плотности гармоник плазмы $\rho_{pn}(\Omega)$ при $n = 1, 2, 5$ для двух моментов времени: $\tau = 120$ и $\tau = 160$ - Рис.3.

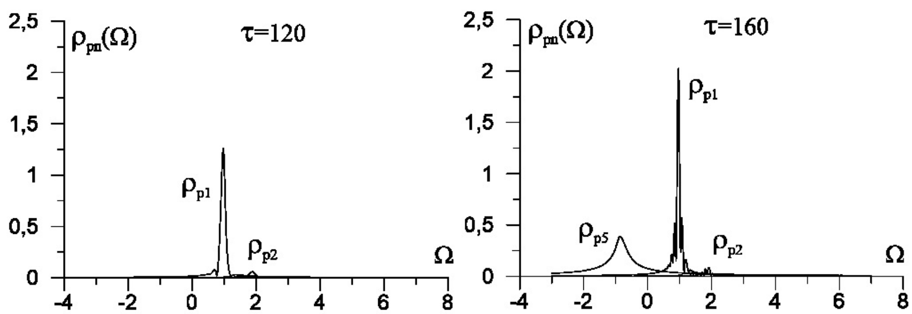


Рис. 3: Спектральные плотности гармоник плазмы $\rho_{pn}(\Omega)(n = 1, 2, 5)$

Из графиков, представленных на Рис.3, видно, что спектр первой пространственной гармоники весьма узок и имеет резкий максимум при $\Omega \approx 1$, что соответствует её резонансному возбуждению пучком. Высшие же пространственные гармоники плазменной волны до времени $\tau \sim 140$ практически не возбуждаются, и, очень слабо заметные максимумы $\rho_{p2}(\Omega)$ являются следствием нелинейности пучка.

Наиболее интересен спектр пятой пространственной гармоники. А именно, из Рис.3 при $\tau = 160$ видно, что максимум спектральной плотности данной гармоники приходится на отрицательную частоту $\Omega \approx -1$ (или $\omega = -\omega_p$). Появление в спектре плазменных волн такой составляющей свидетельствует о перекачке энергии плазменных колебаний в коротковолновую часть спектра, обусловленную индуцированным рассеянием плазменных волн на медленных электронах плазмы [2].

Отметим в заключении, что в настоящей публикации, а также предшествующей ей работе [1], изучалась эволюция пространственно квазимонохроматического начального возмущения при пучковой неустойчивости, развивающейся в режимах одночастичного и коллективного эффектов Черенкова. Рассмотрению эволюцию начального возмущения, не являющегося монохроматическим, предполагается посвятить последующие работы.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бобылев Ю. В., Панин В. А. К вопросу об эволюции пространственно квазимонохроматического начального возмущения при пучковой неустойчивости. // Сборник материалов

XXIII Международной конференции «Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы, приложения и проблемы истории», посвященной 80-летию профессора А.И. Галочкина и 75-летию профессора В.Г. Чирского. — Тула: Тул. гос. пед. ун-т им. Л.Н. Толстого, 2024, С. 214-218.

2. Кузелев М. В., Рухадзе А. А., Стрелков П. С. Плазменная релятивистская СВЧ - электроника. — М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2002. 544с.

УДК 372.853

Моделирование колебаний пружинного маятника с двумя степенями свободы и вынуждающей силой

А. И. Грибков (Россия, г. Тула)
Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого
e-mail: gribkovai@tolstovsky.ru
Р. В. Романов (Россия, г. Тула)
Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого
e-mail: romanovrv@tolstovsky.ru

Simulation of oscillations of a spring pendulum with two degrees of freedom and a driving force

A. I. Gribkov (Russia, г. Tula)
Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University
e-mail: gribkovai@tolstovsky.ru
R. V. Romanov (Russia, г. Tula)
Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University
e-mail: romanovrv@tolstovsky.ru

Колебательные процессы, видимо, являются самыми распространёнными в природе и технике, и их изучение входит в обязательную программу по физике как в школе, так и вузе.

В школе обычно рассматривают одномерные гармонические колебания [1, С. 11]. В курсе общей физики вузов добавляются затухающие и вынужденные колебания [2, С. 521, 524], а также сложение независимых перпендикулярных колебаний, например, фигуры Лиссажу (Jules Antoine Lissajous) [3, С. 230]. Системы с двумя степенями свободы изучаются уже в курсах классической механики [4, С. 233] или спецкурсах.

В качестве примеров берутся разнообразные осцилляторы, однако самыми распространёнными являются математический и пружинный маятники.

Колебания груза на пружине, обычно одномерные, можно рассматривать и как систему с двумя степенями свободы, если добавить маятникообразные колебания в вертикальной плоскости. Продолжая эту логику, можно довести число степеней свободы до бесконечности [4, С. 233].

Для демонстрации в учебном процессе различных видов колебаний авторы предлагают программу моделирования такого маятника, ограничившись двумя степенями свободы. Других ограничений практически нет.

Колебательная система, использованная для моделирования, показана в главном окне Windows-приложения (рис. 1). Груз малых размеров массой m висит на пружине, длина которой в ненапряжённом состоянии l_0, а коэффициент жёсткости k. Считаем, что в процессе колебаний пружина не изгибается, и её линейная упругость сохраняется при любом растяжении. Сила сопротивления среды пропорциональна первой степени скорости с коэффициентом пропорциональности μ.

Опуская детали вывода уравнений движения, который может быть проведён различными методами, запишем окончательный результат в декартовой системе отсчёта с горизонтальной осью OX, направленной вправо, и осью OY, направленной вниз (рис. 1). Для координат груза x и y имеем систему нелинейных дифференциальных уравнений

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = -2\delta\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} - \omega_0^2\left(x - x_m\sin\omega t\right)\left(1 - \frac{l_0}{\sqrt{\left(x - x_m\sin\omega t\right)^2 + y^2}}\right), \quad 2\delta = \frac{\mu}{m},$$
$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} = -2\delta\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} - \omega_0^2 y\left(1 - \frac{l_0}{\sqrt{\left(x - x_m\sin\omega t\right)^2 + y^2}}\right) + g, \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m}. \tag{1}$$

Вынуждающая сила обеспечивается постоянной вертикальной силой тяжести с ускорением g и горизонтальным гармоническим движением точки подвеса пружины $\sim x_m\sin\omega t$ с амплитудой x_m и циклической частотой ω.

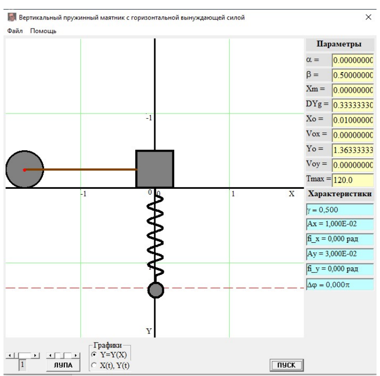


Рис. 1: главное окно программы

Рис. 2: траектория движения груза

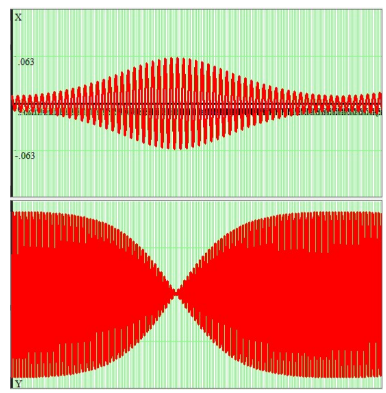


Рис. 3: зависимости $X(\tau)$ и $Y(\tau)$

Аналитическое решение системы (1) авторам неизвестно, поэтому расчёты проводились численными методами, для чего удобно использовать безразмерные величины: $\tau = \omega_0 t$, $\alpha = \frac{\delta}{\omega_0}$, $\beta = \frac{\omega}{\omega_0}$, $X = \frac{x}{l_0}$, $Y = \frac{y}{l_0}$, $X_m = \frac{x_m}{l_0}$.

$$\frac{\mathrm{d}^2X}{\mathrm{d}\tau^2} = -2\alpha\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}\tau} - \left(X - X_m\sin\beta\tau\right)\left(1 - \frac{1}{\sqrt{\left(X - X_m\sin\beta\tau\right)^2 + Y^2}}\right), \tag{2}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2Y}{\mathrm{d}\tau^2} = -2\alpha\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}\tau} - Y\left(1 - \frac{1}{\sqrt{\left(X - X_m\sin\beta\tau\right)^2 + Y^2}}\right) + \Delta Y_g, \quad \text{где} \quad \Delta Y_g = \frac{g}{\omega_0^2 l_0} = \frac{\Delta l_g}{l_0}. \tag{3}$$

В системе уравнений (2) остаются 4 параметра: α – декремент затухания, β – отношение вынуждающей и собственной вертикальной частот, X_m – амплитуда вынуждающей силы, ΔY_g – смещение груза под действием силы тяжести от начальной длины пружины, и 4 начальных условия.

На рис. 2 показана траектория груза при отсутствии силы сопротивления $\alpha = 0$, выключенной вынуждающей силе $X_m = 0$, $\beta = 0,5$ (в данном случае не имеет значения), $\Delta Y_g = 0,333$ и начальных условиях при $\tau = 0$, обеспечивающих малые колебания: $X_0 = 0,01$, $V_{X0} = 0$, $Y_0 = 1,363$ (небольшое смещение от положения равновесия), $V_{Y0} = 0$.

На начальном этапе получается практически фигура Лиссажу с соотношением частот 2:1. На рис. 3 показаны зависимости горизонтальной и вертикальной координат от времени. Также демонстрируется перекачка энергии и биения.

Совсем иная картина получается, если включить малую вынуждающую силу, даже если исходно маятник находится в положении равновесия. Для полноты картины и реалистичности добавим ещё небольшую силу сопротивления. Параметры и начальные условия: $\alpha = 0,001$, $\beta = 0,5$, $X_m = 0,1$, $\Delta Y_g = 0,333$, $X_0 = 0$, $V_{X0} = 0$, $Y_0 = 1,333$, $V_{Y0} = 0$ (положение равновесия).

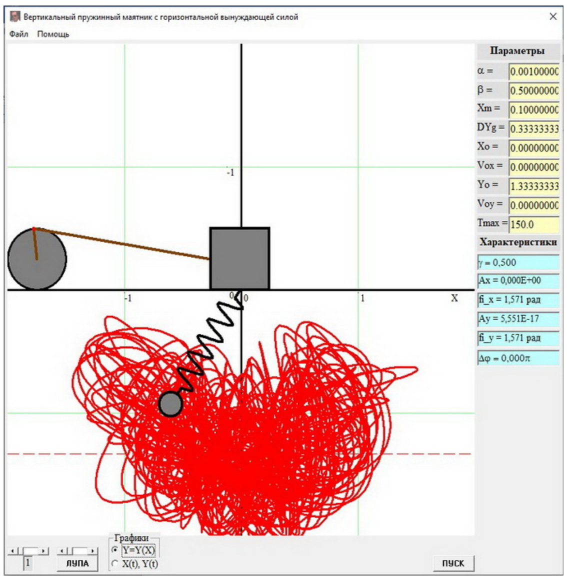


Рис. 4: колебания с вынуждающей силой.

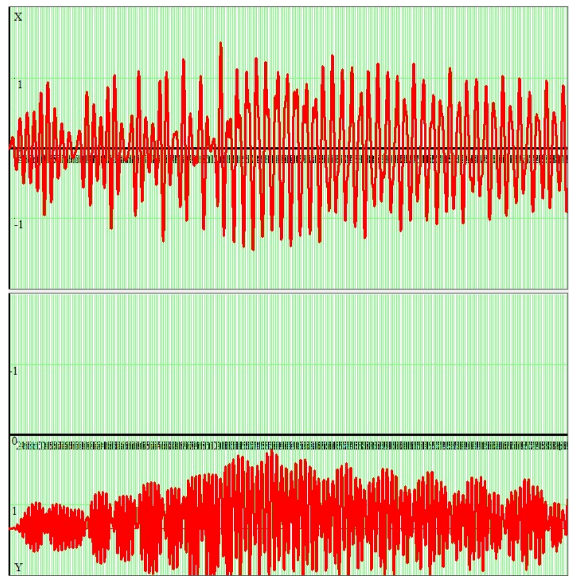


Рис. 5: зависимости $X(\tau)$ и $Y(\tau)$

При заданных условиях получаем хороший пример, когда сочетание достаточно простых движений приводит практически к движению хаотического характера (рис. 4, 5), как, например, для двойного маятника.

Предложенная программа уже реально используется в качестве виртуального демонстрационного эксперимента при изучении как простых, так и сложных видов колебательного движения для студентов физических специальностей нашего вуза.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Мякишев Г. Я. Физика. Колебания и волны. 11 кл. Профильный уровень: учеб. для общеобразоват. учреждений / Г. Я. Мякишев, А. З. Синяков. 9-е изд., стереотип. – М.: Дрофа, 2010. 287 с. – [Электронный ресурс]. – URL: https://www.roslit.ru/catalog/1405/55608913/. (Дата обращения: 27.04.2025). — Режим доступа: свободный.

2. Сивухин Д. В. Общий курс физики. Учеб. пособие: Для вузов. В 5 т. Т. III. Электричество. — 4-е изд., стереот. — М.: ФИЗМАТЛИТ; Изд-во МФТИ, 2004. – 656 с. – [Электронный ресурс]. – URL: https://djvu.online/file/mvNfRySqduriP. (Дата обращения: 27.04.2025). — Режим доступа: свободный.

3. Путилов К. А. Курс физики: В 3 т. Т. 1. Механика. Акустика. Молекулярная физика. Термодинамика / К. А. Путилов. – 11-е изд. – М.: ГИ ФМЛ, 1963. – 560 с. – [Электронный ресурс]. – URL: https://archive.org/details/B-001-014-360/page/4/mode/2up . (Дата обращения: 27.04.2025).

4. Стрелков С. П. Введение в теорию колебаний / учебник для вузов / С. П. Стрелков. — 5-е изд., стер. — Санкт-Петербург: Лань, 2024. – 440 с. [Электронный ресурс]. URL: https://e.lanbook.com/book/392417?category=930

5. Романов Р. В. Вертикальный пружинный маятник с горизонтальной вынуждающей силой // Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ №2020619105. Дата государственной регистрации в Реестре программ для ЭВМ 11.08.2020. [Электронный ресурс]. URL: https://elibrary.ru/item.asp?id=43889257. (Дата обращения: 27.04.2025). — Режим доступа: свободный.

УДК 669.295

Исследование мартенситного превращения никелида титана с разным исходным состоянием методом внутреннего трения

Е. М. Косова (Россия, г. Тула)
Тульский государственный университет
e-mail: katya.kosova111@mail.ru
О. А. Кулагина (Россия, г. Тула)
Тульский государственный университет
e-mail: oksana_kulagina_ok@mail.ru
К. А. Полякова (Россия, г. Москва)
Национальный исследовательский технологический университет МИСИС
e-mail: vachiyan@yandex.ru
И. В. Тихонова (Россия, г. Тула)
Тульский государственный университет
e-mail: tivtihonova@yandex.ru

Investigation of the martensitic transformation of titanium nickelide with different initial states by the method of internal friction

E. M. Kosova (Russia, Tula)
Tula State University
e-mail: katya.kosova111@mail.ru
O. A. Kulagina (Russia, Tula)
Tula State University
e-mail: oksana_kulagina_ok@mail.ru
K. A. Polyakova (Russia, Moscow)
National University of Science and Technology “MISIS”
e-mail: vachiyan@yandex.ru
I. V. Tikhonova (Russia, Tula)
Tula State University

e-mail: tivtihonova@yandex.ru

Стареющий никелид титана Ti-50,8 ат. %Ni с эффектом памяти формы является перспективным материалом для костных имплантатов. Значения модуля Юнга, одной из важнейших характеристик последних, при температуре человеческого тела можно регулировать термомеханической обработкой по различным режимам [1]. Однако до настоящего времени многочисленные исследования сплава проводили по классической схеме: деформационная и последующая термическая обработка сплава и определение функциональных свойств, а также параметров микро- и субструктуры различными современными методами анализа. По полученным результатам осуществляли выбор наилучшего из реализованных вариантов термомеханической обработки. При таком подходе нет оснований полагать, что предлагаемый вариант будет оптимальным, то есть позволит реализовать весь ресурс функциональных возможностей никелида титана и получить действительно наименьшее значение модуля упругости при температуре человеческого тела. В настоящей работе предпринята попытка продемонстрировать перспективность применения методов теории принятия оптимальных решений [2] для обоснования выбора режимов обработки никелида титана на заданный комплекс свойств. Целью работы явилось исследование влияния температурно–временных режимов старения на параметры мартенситного превращения сплава Ti–50,8 ат. %Ni в различных исходных состояниях и последующая оптимизация параметров старения по разработанным статистическим моделям свойств.

Исследования выполнены на сплаве Ti-50,8 ат. %Ni с общим содержанием примесей 0,1 ат.%, выплавленном в ОАО «МАТЕК СПФ» (Россия, Москва). Последующая обработка включала прессование, ротационную ковку, радиально-сдвиговую прокатку и горячее волочение для получения проволоки толщиной 0,6 мм.

Проволочные образцы были разделены на две части, одну из которых не подвергали дополнительной термообработке (I), а на второй проводили рекристаллизационный отжиг при температуре 850 °C, 1 ч (II): I). Горячее волочение при температуре 850 °C (структура динамической полигонизации и динамической рекристаллизации). II). Горячее волочение при температуре 700-750 °C + рекристаллизационный отжиг при температуре 850 °C, 1 ч (рекристаллизованная структура с размером зерна 25 мкм).

Образцы обеих групп подвергли старению при температурах 300, 430 и 500 °C в течение 1 и 5 ч. Старение сплавов системы TiNi позволяет целенаправленно регулировать их функциональные свойства. Выбор режимов старения обусловлен следующими соображениями. В диапазоне температур 300-500 °C процессы разупрочнения и упрочнения в горячедеформированном материале протекают одновременно. Частицы Ti_3Ni_4 выделяются на дефектах, их размер увеличивается при увеличении времени старения. В рекристаллизованном материале протекает только старение с выделением частиц Ti_3Ni_4.

Характеристические температуры мартенситного превращения, протекающего в никелиде титана при охлаждении и нагреве (M_s - температура прямого мартенситного превращения при охлаждении, A_s - температура обратного мартенситного превращения при нагреве), а также поведение квадрата резонансной частоты f^2, отображающего изменение модуля сдвига, изучали методом внутреннего трения на релаксаторе РКМ-ТПИ [3]. Температурные зависимости f^2 проволочных образцов сплава TiNi измеряли в диапазоне температур от 100 до -50 °C, причем низкотемпературные измерения проводили в парах жидкого азота.

Значимость влияния исходных обработок: горячее волочение или дополнительный рекристаллизационный отжиг, с одной стороны, старения по различным режимам, с другой, на параметры мартенситного превращения и f^2 – определяли методом двухфакторного дисперсионного анализа [4]. Построение моделей свойств проводили регрессионным анализом в пакете прикладных программ «StatgraphicsPlus5.»; выбор режимов старения никелида титана на заданный комплекс свойств по разработанным моделям свойств осуществляли методом одноцелевого программирования [2].

Температурные зависимости квадрата резонансной частоты (ТЗf^2) проволочных образцов I и II групп при всех режимах старения имеют четко выраженный V-образный характер с минимумами при температуре начала прямого мартенситного превращения M_s при охлаждении и температуре обратного мартенситного превращения As при нагреве (рисунок 1).

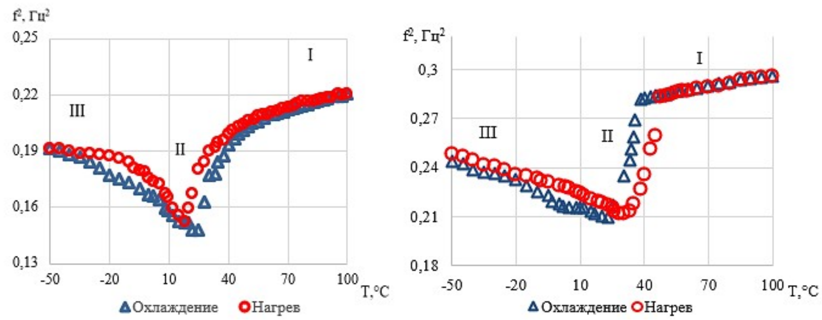


Рис. 1: ТЗf^2 сплава TiNi: где а – ГВ+500 °С, 5 ч; б – ГВ+850 °С, 1 ч + 500 °С, 5 ч

Так как f^2 пропорционален модулю сдвига, величина которого отвечает за силу межатомного взаимодействия, такое поведение ТЗf^2 свидетельствует о следующем. На участке I сплав находится в аустенитном состоянии с решеткой В2. При понижении температуры (участок II) f^2 достаточно резко уменьшается, это свидетельствует о том, что силы межатомного взаимодействия в решетке аустенита перед началом мартенситного превращения ослабевают. Минимальное значение f^2 достигается при M_s. Превращение решетки аустенита с ослабленными силами связи между атомами, в решетку мартенсита (участок III), также происходит в диапазоне температур. Для разных режимов старения протяженность на участке II колеблется от 10 до 31 °С. Температурный интервал восстановления значений f^2 (участок III) для разных режимов старения составляет от 10 до 45°С.

На рисунке 2 приведены значения M_s, минимумов f^2, соответствующих прямому мартенситному превращению, значения A_s, минимумов f^2, соответствующих обратному мартенситному превращению в разных исходных состояниях.

Состояние образцов	Горячее волочение				Горячее волочение + рекристаллизация 850 °С, 1 ч			
	M_s, °С	min f^2	A_s, °С	min f^2	M_s, °С	min f^2	A_s, °С	min f^2
Исходное состояние	– 4	0,137	8	0,227	– 25	0,222	– 8	0,227
Старение 300 °С, 1 ч	18	0,154	30	0,183	– 20	0,147	– 10	0,183
300 °С, 5 ч	33	0,151	40	0,207	5	0,222	-5	0,207
430 °С, 1 ч	40	0,163	42	0,217	– 30	0,207	– 8	0,217
430 °С, 5 ч	43	0,152	48	0,171	30	0,175	43	0,171
500 °С, 1 ч	22	0,165	27	0,203	18	0,202	25	0,202
500 °С, 5 ч	18	0,152	25	0,212	23	0,209	30	0,212

Рис. 2: Значения основных параметров ТЗf^2 образцов сплава Ti-50,8 ат.%Ni в горячедеформированном и рекристаллизованом состояниях

В образцах I группы только в горячедеформированном состоянии M_s имеет отрицательное значение, равное минус 4 °С. В состаренных образцах значения температуры прямого мартенситного превращения положительные и в зависимости от режимов старения варьируются в диапазоне от 18 до 43 °C. В образцах II группы (горячее волочение + рекристаллизационный отжиг) M_s имеет отрицательные значения не только в исходном (без старения) состоянии, но и после кратковременного (1 ч) старения при 300 и 430 °C , после старения при отмеченных температурах длительностью 5 ч значения M_s положительные и приближаются к температуре человеческого тела.

Для сравнения значимости влияния исходного состояния (I и II) и параметров старения на минимальное значение квадрата резонансной частоты при охлаждении выполнен двухфакторный дисперсионный анализ с однократными наблюдениями, результаты которого свидетельствуют о более существенном вкладе исходной структуры в минимизацию значений квадрата резонансной частоты по сравнению со структурными изменениями при старении.

Комплекс полученных экспериментальных данных свидетельствует о возможности регулирования параметров мартенситного превращения и квадрата резонансной частоты применением различных исходных обработок сплава.

Возможности старения в регулировании параметров мартенситного превращения сплава рассмотрены на образцах группы I, демонстрирующих в состаренном состоянии положительные значения M_s и пониженные значения f^2. Разработаны адекватные экспериментальным данным модели, описывающие влияние режимов старения на минимальное значение квадрата резонансной частоты и на температуру начала прямого мартенситного превращения при охлаждении.

Для управления свойствами сплава Ti-50,8 ат. %Ni при использовании его в качестве костных имплантатов сформулирована одноцелевая задача оптимизации. В качестве целевой функции принимали модель влияния режимов старения на минимальные значения квадрата резонансной частоты при охлаждении, в качестве ограничения – модель для температуры начала прямого мартенситного превращения. Задачу решали многократно, причем каждый вариант отличался значением M_s, который варьировали от 10 до 80 °C. По полученным результатам построена номограмма, позволяющая определить режимы старения, способствующие получению заданных значений M_s и минимальных (из всех возможных для конкретных условий) значений квадрата резонансной частоты (рисунок 3).

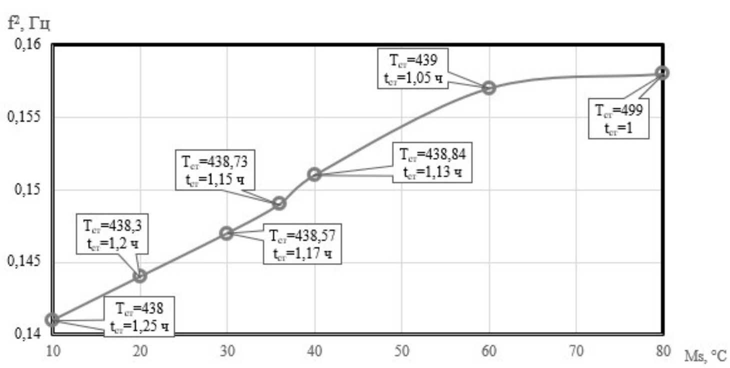


Рис. 3: Зависимость f^2 от M_s (у каждой точки приведены конкретные режимы старения)

Сочетание минимальных из возможных значений квадрата резонансной частоты, связанного с модулем сдвига, при изменении M_s от 10 до 60°C, то есть в интервале, в который входит и температур тела человека, достигается после старения вблизи 430 °C (температуры наиболее интенсивного развития процессов старения) с длительностью выдержки 1 – 1,25 ч.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 24-79-10322, https://rscf.ru/project/24-79-10322/

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ryklina, E., Murygin, S., Komarov V., Polyakova K., Resnina N., Andreev V. On Structural Sensitivity of Young's Modulus of Ni-Rich Ti-Ni Alloy. Metals 2023,13,1428.
2. Теория прогнозирования и принятия решений: учебное пособие / С.А. Саркисян, В.И. Каспин, В.А. Лисичкин [и др.]. – Москва: Высш.школа, 1977. – 351 с.
3. Криштал М.А., Пигузов Ю.В., Головин С.А. Внутреннее трение в металах и сплавах. – М.Металлургия, 1964. – 245 с.
4. Лецкий Э. Планирование эксперимента в исследовании технологических процессов / К. Хартман, Э. Лецкий, В. Шефер. – Москва: Мир, 1977. – 360 с.

УДК 621.762.242

Влияние режимов спекания на пористость порошкового интерметаллида TiNi [1]

Г. В. Маркова (Россия, г. Тула)
Тульский государственный университет
e-mail: galv.mark@rambler.ru
Д. В. Пермякова (Россия, г. Тула)
Тульский государственный университет
e-mail: darya.per@gmail.com
А. Д. Гусев (Россия, г. Тула)
Тульский государственный университет
e-mail: dkines07@gmail.com

Effect of sintering parameters on the porosity of TiNi powder intermetallic compound

G. V. Markova (Russia, Tula)
Tula State University
e-mail: galv.mark@rambler.ru
D. V. Permyakova (Russia, Tula)
Tula State University
e-mail: darya.per@gmail.com
A. D. Gusev (Russia, Tula)
Tula State University
e-mail: dkines07@gmail.com

В последние годы отмечено бурное развитие биоматериалов, которые используются при изготовлении конструкций или имплантатов для восстановления формы и функции утраченных или поврежденных биологических структур в организме. Несмотря на расширение использования органических и керамических материалов, металлические сплавы занимают свое место при изготовлении имплантатов благодаря сочетанию механических и физических свойств.

[1]Исследование выполнено при поддержке Российского научного фонда (грант № 25-29- 20055, https://rscf.ru/project/25-29-20055/) и Комитета Тульской области по науке и инноватике

Успех или неудача при установке имплантатов определяется несколькими факторами: 1) биологической совместимостью с точки зрения взаимодействия ткани и материала имплантата, 2) механической биосовместимостью с точки зрения правильного размещения и стабильности функционирования имплантата, 3) гистосовместимостью с точки зрения вероятности неблагоприятного воспалительного и иммунного ответа со стороны организма [1].

Одной из основных проблем биомеханической совместимости является несоответствие модулей упругости костной ткани и вживляемой конструкции, что приводит к деградации кости и/или ее разрушению. В течение последних десятилетий большое внимание уделяется интерметаллиду TiNi со структурой β-фазы, в которой реализуется обратимое мартенситное превращение термоупругого типа, благодаря чему сплав проявляет функциональные свойства – сверхупругость и память формы. В точке фазового перехода величина модуля упругости сплава снижается до 50 ГПа, что обеспечивает высокую биомеханическую совместимость [2].

Величина модуля упругости сплава может быть еще более приближена к модулю кости за счет создания пористых структур [3, 4]. В связи с этим перспективной технологией получения сплавов представляется порошковая металлургия. Формирование пористой структуры материала имплантата способствует лучшей остеоинтеграции, т.е. стабильному закреплению имплантата за счет прорастания костной ткани в поры имплантата. Количество, размер пор и архитектура порового пространства определяются как морфологией исходного порошка, так и условиями консолидации.

Среди порошковых технологий получения TiNi выделяется гидридно-кальциевый синтез, который позволяет получать порошки без расплавления основных компонентов и, следовательно, без риска формировании негомогенной структуры. Процесс синтеза и консолидации гидридно-кальциевого порошка TiNi достаточно хорошо отработан для получения компактных заготовок [5]. Однако при получении пористых заготовок требуется корректировка технологических параметров прессования и спекания.

Целью данной работы является установление зависимости пористости спеченных заготовок из сплава TiNi от температуры и продолжительности спекания.

Для получения пористых заготовок использовали гидридно-кальциевый порошок интерметаллида TiNi, полученный из шихты, состоящей из диоксида титана TiO_2, порошка карбонильного никеля и гидрида кальция CaH_2. Шихту нагревали до температуры 1200 °C в течение 8 часов. Полученный в результате синтеза порошок промывали в слабом растворе соляной кислоты, затем в воде, сушили и рассевали. Прессование порошка выполняли на гидростатическом прессе холодного прессования CIP 62330 фирмы Avure Technologies с рабочим давлением 200 МПа и выдержкой 2 минуты. Спекание проводили в вакуумной шахтной электропечи сопротивления СШВ-1.2,5/25 И1, в вакууме при температурах от 900 до 1290 °C в течение 10-360 мин с последующим медленным охлаждением с печью. Пористость образцов связана с плотностью, которую определяли методом гидростатического взвешивания. В дальнейшем в качестве выходного параметра использовали плотность.

Для определения влияния температуры и продолжительности спекания на пористость TiNi была составлена матрица планирования и реализовано 24 эксперимента с разными температурно-временными параметрами спекания, после каждого из которых проведено определение плотности образцов.

Результаты эксперимента обработаны с помощью программы Minitab и получено уравнение множественной регрессии в виде полинома второй степени

$$Y = 54,4 - 0,103X_1 + 0,000051X_1^2, \quad (1)$$

где Y – выходной параметр - плотность, ρ; X_1 – параметр температуры спекания t.

Регрессионный анализ показал, что продолжительность спекания (X_2) в изученном интервале времени несущественно влияет на плотность образцов, что подтверждается оценкой уровня значимости параметров уравнения 1 (рисунок 1). Для параметра «время» значение P-value = 0,9391, а для фактора «температура» P-value - менее 10^{-5}.

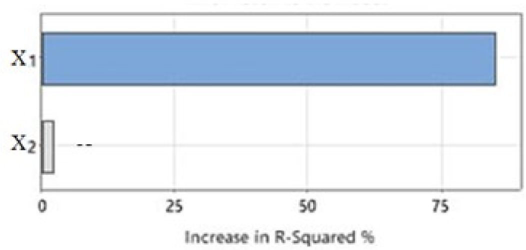


Рис. 1: Оценка влияния переменных X_1 и X_2 в уравнении 1

В результате без учета временного фактора зависимость плотности образцов от температуры спекания наилучшим образом описывается экспоненциальным уравнением в виде:

$$\rho = \rho_0 + \alpha \times e^{t/b}, \tag{2}$$

где ρ – плотность образца после конкретного режима спекания; ρ_0 – плотность образца до спекания; a и b – коэффициенты; t – температура спекания.

Определены значения коэффициентов уравнения 2: ρ_0 = 2,37 г/см^2; a = 3,14×10^{-23}; b = 24,24. Коэффициент детерминации полученной модели R=0,99.

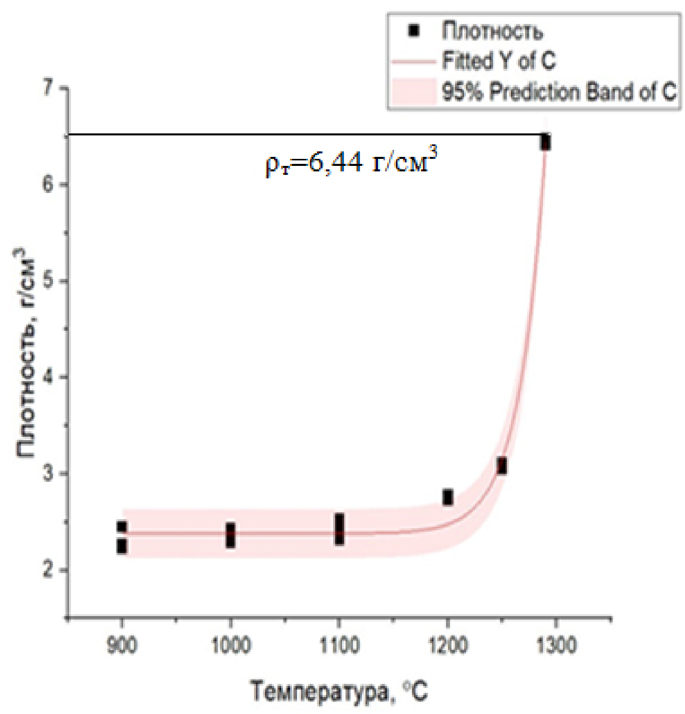


Рис. 2: Зависимость плотности образцов от температуры спекания

Из рисунка 2 видно, что при низких температурах спекания изменение плотности несущественно, и только, начиная с температуры около 1200 °С, наблюдали интенсивное повышение ρ. При температуре спекания 1290 °С плотность образцов практически становится равной теоретической (ρ_T), а пористость, соответственно, исчезает.

Проведенные эксперименты показали, что получение образцов с разной пористостью при спекании порошка TiNi представляет собой непростую задачу. Существенное изменение плотности наблюдается только после нагрева до 1200 °C. При этом фактор времени спекания в исследованном интервале значений τ влияет незначимо, что уменьшает возможности варьирования технологических режимов для получения разной пористости. Поэтому, чтобы получить такие образцы необходимо точно выдерживать температуру спекания в сравнительно небольшом интервале 1200 – 1280 °C, поскольку нагрев выше 1280 °C нежелателен из-за возможного оплавления сплава.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Bandyopadhyay A, Mitra I., Goodman S.B., Kumar M., Bose S. Improving biocompatibility for next generation of metallic implants //Progress in Materials Science. 2023. 133. 101053

2. Пушин В. Г., Прокошкин С. Д., Валиев Р. З. и др. Сплавы никелида титана с памятью формы. Ч. 1. Структура, фазовые превращения и свойства – Екатеринбург: Изд-во УрО-РАН. 2006. 439 с.

3. Greiner C., Oppenheimer S. M., Dunand D. C. High strength, low stiffness, porous NiTi with superelastic properties//Actabiomaterialia. 2005. V.1, №. 6. P. 705-716

4. Pałka K., Pokrowiecki R. Porous Titanium Implants: A Review// Adv. Eng. Mater. 2018. 1700648 DOI: 10.1002/adem.201700648

5. Касимцев А.В., Маркова Г.В., Володько С.С., Юдин С.Н., Карпов Б.В., Алимов И.А. Порошковый никелид титана: технология и свойства // Металлы. 2020. №6. С. 31 – 40

УДК 517.91

Инварианты динамических систем с переменной диссипацией

М. В. Шамолин (Россия, г. Москва)
Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
e-mail: shamolin@rambler.ru, shamolin@imec.msu.ru

Invariants of dynamical systems with variable dissipation

M. V. Shamolin (Russia, Moscow)
Lomonosov Moscow State University
e-mail: shamolin@rambler.ru, shamolin@imec.msu.ru

В работе предъявлены тензорные инварианты (первые интегралы, дифференциальные формы) для динамических систем на касательных расслоениях к гладким n-мерным многообразиям. Показана связь наличия данных инвариантов и полным набором первых интегралов, необходимых для интегрирования геодезических, потенциальных и диссипативных систем. При этом вводимые силовые поля делают рассматриваемые системы диссипативными с диссипацией разного знака и обобщают ранее рассмотренные.

Как известно, нахождение достаточного количества тензорных инвариантов (не только автономных первых интегралов) [1, 2, 3] облегчает исследование, а иногда позволяет точно проинтегрировать систему дифференциальных уравнений. Так наличие инвариантной дифференциальной формы фазового объема позволяет уменьшить количество требуемых первых интегралов. Для консервативных систем этот факт естествен, когда фазовый поток сохраняет объем с гладкой (или постоянной) плотностью. Сложнее (в смысле гладкости инвариантов) дело обстоит для систем, обладающих притягивающими или отталкивающими предельными множествами. Для них коэффициенты искомых инвариантов должны, вообще говоря, включать функции, обладающие существенно особыми точками (см. также [4, 5, 6]). Наш подход в том, что для точного интегрирования автономной системы порядка m надо знать $m-1$ независимый нетривиальный тензорный инвариант. При этом для достижения точной интегрируемости приходится соблюдать также ряд дополнительных условий.

Ранее [5, 7] важные случаи интегрируемых систем с конечным числом степеней свободы в неконсервативном поле сил уже рассматривались автором. При этом упор делался на нахождение достаточного количества именно первых интегралов. Но, как известно, иногда полного набора первых интегралов для систем может и не быть, зато достаточное количество инвариантных форм может быть обеспечено.

Понятия “консервативность”, “силовое поле”, “диссипация” и др. для систем классической механики вполне естественны. Поскольку в работе изучаются системы на касательном расслоении к гладкому многообразию (пространству положений), уточним данные понятия для таких систем.

Исследование “в целом” начинается с изучения приведенных уравнений геодезических, левые части которых при правильной параметризации представляют собой ускорение движения материальной частицы, а правые части приравнены к нулю. Соответственно, величины, которые ставятся в дальнейшем в правую часть, рассматриваются как обобщенные силы. Такой подход традиционен для классической механики, а теперь он естественно распространяется на более общий случай касательного расслоения к гладкому многообразию. Последнее позволяет, в некотором смысле, конструировать “силовые поля”. Так, например, введя в систему коэффициенты, линейные по одной из координат касательного пространства (по одной из квазискоростей системы), получим силовое поле (генератор сдвига) с диссипацией разного знака.

Словосочетание “диссипация разного знака” несколько противоречиво, тем не менее, будем его употреблять. Учитывая при этом, что в математической физике диссипация “со знаком “плюс” — это рассеяние полной энергии в обычном смысле, а диссипация “со знаком “минус” — это своеобразная “подкачка” энергии (при этом в механике силы, обеспечивающие рассеяние энергии называются диссипативными, а силы, обеспечивающие подкачку энергии называются разгоняющими).

Консервативность для систем можно понимать в традиционном смысле, но мы добавим к этому следующее. Будем говорить, что система консервативна, если она обладает полным набором гладких первых интегралов, что говорит о том, что она не обладает притягивающими или отталкивающими предельными множествами. Если же она последними обладает, то будем говорить, что система обладает диссипацией какого-то знака. Как следствие этого — обладание системы хотя бы одним первым интегралом (если они вообще есть) с существенно особыми точками.

В предлагаемой работе силовое поле (генератор сдвига системы) разделяется на так называемые внутреннее и внешнее. Внутреннее поле характерно тем, что оно не меняет консервативности системы. А внешнее может вносить в систему диссипацию разного знака. Заметим также, что вид внутренних силовых полей заимствован из классической динамики твердого тела.

В данной работе приведены первые интегралы, а также инвариантные дифференциальные формы классов однородных по части переменных динамических систем с конечным числом степеней свободы. При этом силовое поле разделяется на внутреннее (консервативное) и внешнее, которое обладает диссипацией переменного знака. Внешнее поле вводится с помощью некоторого унимодулярного преобразования и обобщает силовые поля, рассматриваемые ранее.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Poincaré H. Calcul des probabilités, Gauthier–Villars, Paris, 1912, 340 pp.

2. Колмогоров А. Н. О динамических системах с интегральным инвариантом на торе // Доклады АН СССР. 1953. Т. 93. № 5. С. 763–766.

3. Козлов В. В. Тензорные инварианты и интегрирование дифференциальных уравнений // Успехи матем. наук. 2019. Т. 74. № 1(445). С. 117–148.

4. Шамолин М. В. Об интегрируемости в трансцендентных функциях // Успехи матем. наук. 1998. Т. 53. Вып. 3. С. 209–210.

5. Шамолин М. В. Новые случаи однородных интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении двумерного многообразия // Доклады РАН. Математика, информатика, процессы управления. 2020. Т. 494. № 1. С. 105–111.

6. Шамолин М. В. Новые случаи интегрируемых систем нечетного порядка с диссипацией // Доклады РАН. Математика, информатика, процессы управления. 2020. Т. 491. № 1. С. 95–101.

7. Шамолин М. В. Новый случай интегрируемости в пространственной динамике твердого тела, взаимодействующего со средой, при учете линейного демпфирования // Доклады РАН. 2012. Т. 442. № 4. С. 479–481.

Содержание