ЖИЗНЬ И ДЕЯТЕЛЬНОСТЬ
ВЫДАЮЩЕГОСЯ
СОВЕТСКОГО МАТЕМАТИКА

НИКОЛАЯ МИХАЙЛОВИЧА КОРОБОВА

(1917 – 2004)

LIFE and WORK of
THE GREATEST SOVIET
MATHEMATICIAN

NIKOLAY MIKHAILOVICH KOROBOV

(1917 – 2004)

Николай Михайлович Коробов родился в Москве 23 ноября 1917 года в семье

служащих, ответственных работников почтамта – ***Варвары Георгиевны Георгиевой*** и ***Михаила Никитича Коробова***.

Nikolay Mikhailovich Korobov was born November, 23, 1917 in Moscow. His parents ***Varvara Georgievna Georgieva*** and ***Mikhail Nikitich Korobov*** were postal employees.

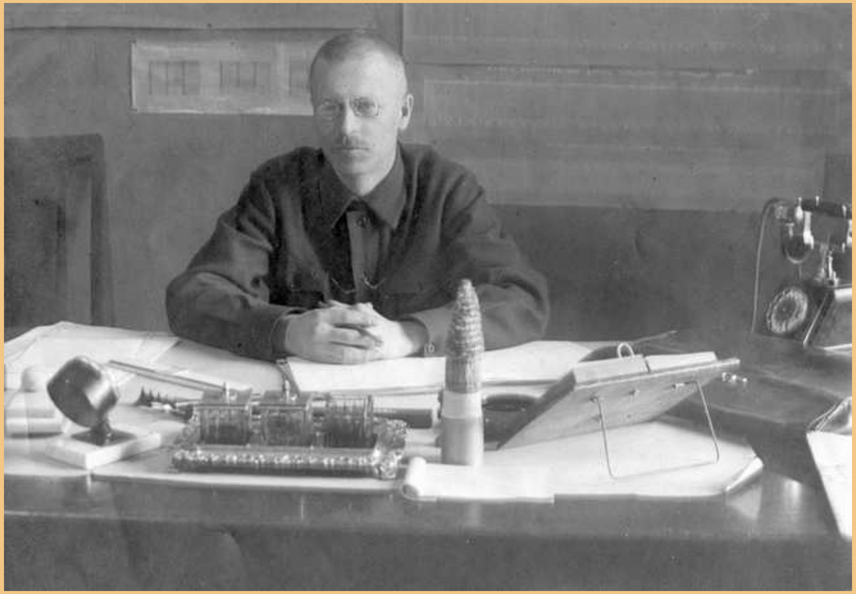
Родители Н. М. Коробова
Korobov’s parents

Старший брат Николая Михайловича ***Виктор*** родился на четыре года раньше, до Первой мировой войны, в 1913 году.

Виктор и Николай Коробовы
Victor Korobov and Nikolay Korobov

Victor Mikhailovich was the eldest brother of Nikolay Mikhailovich, he was born before the beginning of World War I in 1913.

Отец – Коробов Михаил Никитич (1882 – 1940) – работал на Московском почтамте на Мясницкой улице одним из ведущих инженеров связи.



Михаил Никитич на почтамте
Mikhail Nikitich at post office

Nikolay’s father Mikhail Nikitich Korobov (1882 – 1940) worked at the Moscow post office at Myasnitskaya street in the capacity of the chief communication engineer.

С отцом Михаилом Никитичем
Nikolay Mikhailovich with his father

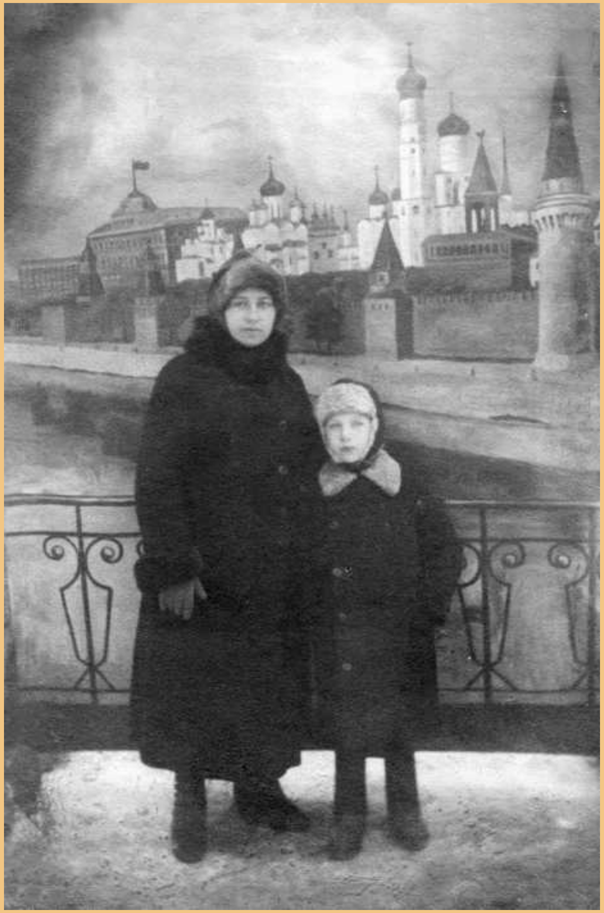
Мать – Варвара Георгиевна Георгиева (1888 – 1962) – родилась в Москве, окончила 3 класса, после чего работала швеей. В 1904 году поступила на Пречистинские вечерние рабочие курсы (2 года общеобразовательные и 3 года специализированные математические курсы).

Nikolay's mother Varvara Georgievna Georgieva (1888 – 1962) was born in Moscow. After finishing 3 forms of school she started to work as the seamstress. In 1904 she entered evening school for workers (2 years of general education and 3 years of special mathematical education).

Варвара Георгиевна
Varvara Georgievna

В 1908 году Варвара Георгиевна выдержала экстерном экзамены на звание учителя математики (алгебра и геометрия). Именно она сформировала интерес к математике у Николая Коробова. В 1909 году Варвара Георгиевна поступила работать на Московский почтамт.

In 1908 Varvara Georgievna passed examinations without attending lectures to become teacher of mathematics (algebra and geometry). She did inculcate in Nikolay Korobov interest in mathematics. In 1909 Varvara Georgievna began to work at Moscow post office.



Коля Коробов с мамой
Nikolay Korobov with his mother

С 1924 по 1935 годы Николай Михайлович учился в 24-ой школе Бауманского района города Москвы.

Nikolay Mikhailovich studied at school №24 of Bauman district of Moscow from 1924 to 1935.

Школьные друзья
School friends

В июне 1935 года Николай Коробов принял участие в ***Первой Московской Математической Олимпиаде***, где был награжден первой премией.


Коробов Николай Михайлович

первой премией

In June 1935 Nikolay Korobov took part in the ***First Moscow Mathematical Competition*** where he was awarded the first prize.

В 1935 году Николай Михайлович Коробов поступил на механико-математический факультет ***Московского Государственного университета им. М. В. Ломоносова.***

МГУ им. М. В. Ломоносова

Lomonosov Moscow State University

In 1935 Nikolay Mikhailovich Korobov entered the Faculty of Mechanics and Mathematics of ***Lomonosov Moscow State University (MSU)***.

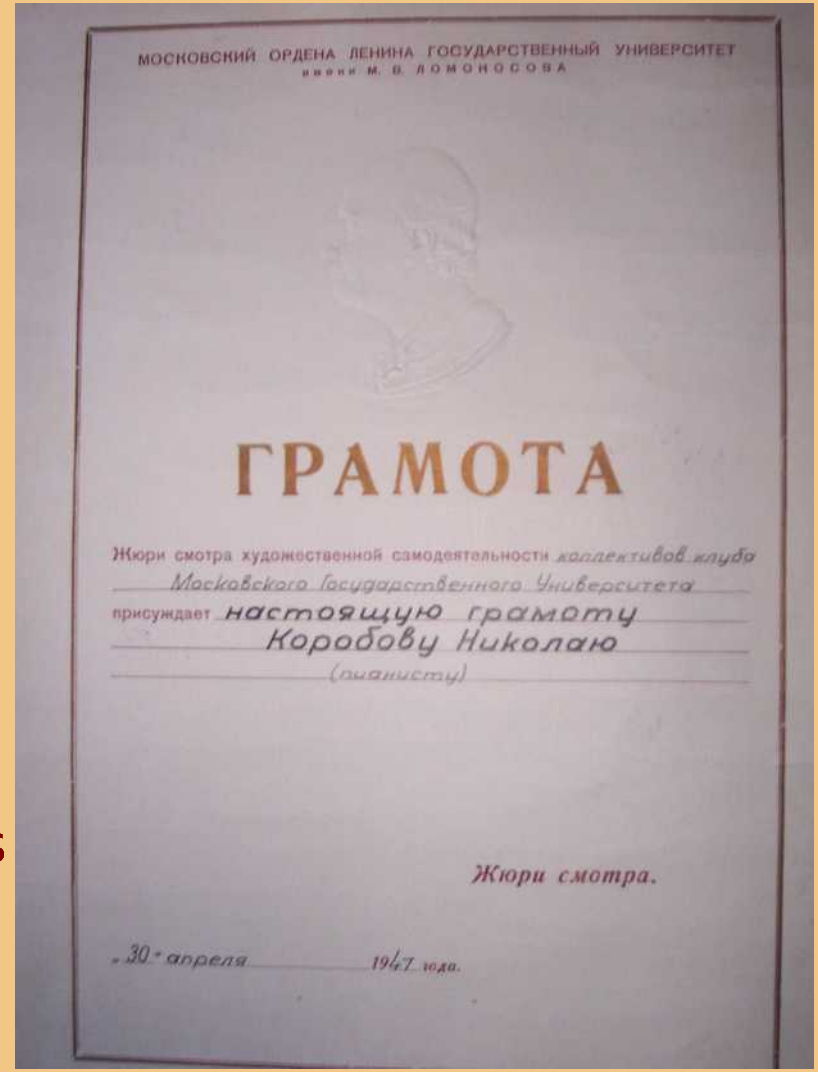
Здесь, будучи еще студентом, Николай Коробов начал свою педагогическую деятельность, работая со школьниками в математическом кружке при МГУ.

When Nikolay Korobov was still a student he started his educational work in MSU. He worked with pupils in the mathematical study group attached to Moscow State University.

Студент университета Коробов
Korobov, the student of University

Музыка, розы и математика были источником духовных сил Николая Михайловича Коробова на протяжении всей его жизни.

Music, roses and mathematics were pure sources of inspiration for Nikolay Mikhailovich Korobov during his life.



МОСКОВСКИЙ ОРДЕНА ЛЕНИНА ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М. В. ЛОМОНОСОВА

ГРАМОТА

Жюри смотра художественной самодеятельности коллективов клуба Московского Государственного Университета присуждает настоящую грамоту Коробову Николаю (пианисту)

Жюри смотра.

„30“ апреля 1947 года.

Встреча на четвертом курсе со своим будущим учителем и научным руководителем, членом-корреспондентом АН СССР ***Александром Осиповичем Гельфондом*** определила круг научных интересов Н. М. Коробова.

Теория чисел стала основным полем его научной и педагогической деятельности.

А. О. Гельфонд
A. O. Gelfond

When Korobov was a four-year student he met with his prospective teacher and scientific adviser, the Corresponding Member of the USSR Academy of Sciences ***Alexander Osipovich Gelfond.*** Korobov’s scientific interests were defined by the meeting with Gelfond.

The Theory of Numbers became the main in his scientific and educational work.

В 1940 году Н. М. Коробов окончил с отличием университет. В апреле 1941 года у него родилась старшая дочь ***Анна***. После войны у него родились два сына ***Олег*** и ***Андрей*** и две дочери ***Зоя*** и ***Александра***.

In 1940 N. M. Korobov graduated the university with honors. In April 1941 his senior daughter **Ann** was born. After the World War II his two sons **Oleg** and **Andrey** and two daughters **Zoya** and **Alexandra** were born.

Н. М. Коробов с дочерью Аней
N. M. Korobov with his daughter Ann

В годы Великой Отечественной войны Николай Михайлович Коробов служил в рядах Красной Армии – преподавал высшую математику в ***Ленинградской военно-воздушной академии***.

In the years of The Great Patriotic War Nikolay Mikhailovich Korobov was in the ranks of the Red army. He taught higher mathematics in ***The Leningrad Air Force Academy*.**

Н. М. Коробов, 1943 год
N. M. Korobov, 1943

После демобилизации в 1945 году Николай Михайлович поступил в аспирантуру МГУ к Александру Осиповичу Гельфонду и в 1948 году защитил кандидатскую диссертацию по теме ***«Некоторые вопросы равномерного распределения»***.

In 1945 after demobilization Nikolay Mikhailovich entered the post-graduate courses of MSU. ***Alexander Osipovich Gelfond*** was his scientific adviser. In 1948 he defended Ph.D. Thesis on the subject of ***«Some problems of even distribution»***.

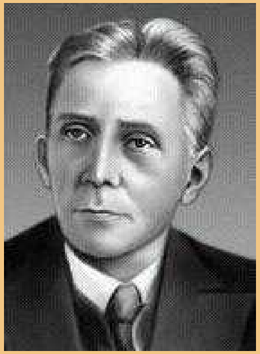
В 1953 году Н. М. Коробов получил степень доктора физико-математических наук, защитив диссертацию по теме ***«Об арифметических свойствах показательных функций»***. Оппонентами по докторской диссертации были выдающиеся специалисты по теории чисел Ю. В. Линник, А. Я. Хинчин и Н. Г. Чудаков.

Ю. В. Линник

U. V. Linnik

А. Я. Хинчин

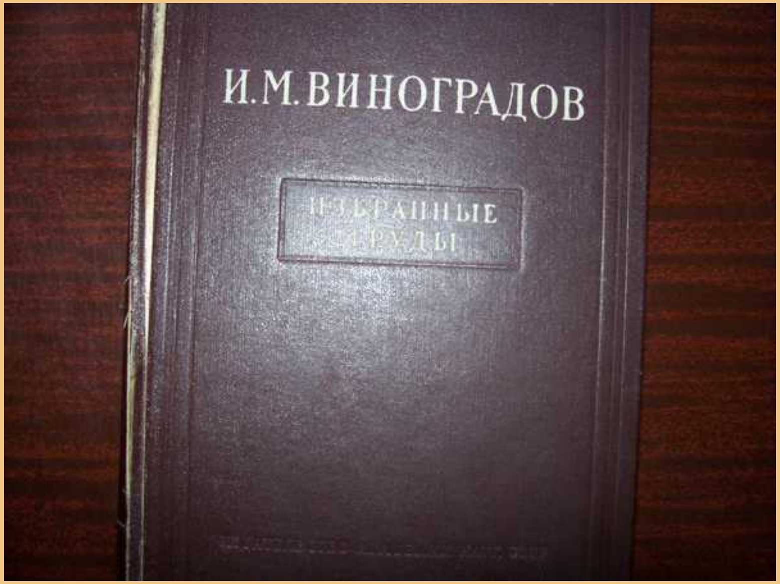
A. Y. Hinchin

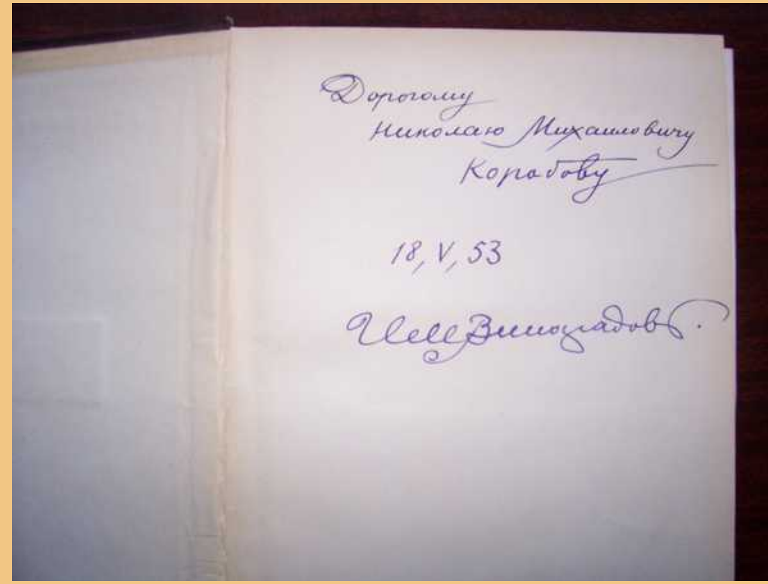


Н. Г. Чудаков

N. G. Chudakov

In 1953 N. M. Korobov took a doctoral degree in physics and mathematics. He defended the Thesis on the subject of ***«About arithmetial characteristics of the exponential functions»***. The opponents of doctoral thesis were the famous specialists in the theory of numbers U. V. Linnik, A. Y. Hinchin, N. G. Chudakov.


И.М.ВИНОГРАДОВ
ИЗБРАННЫЕ ТРУДЫ

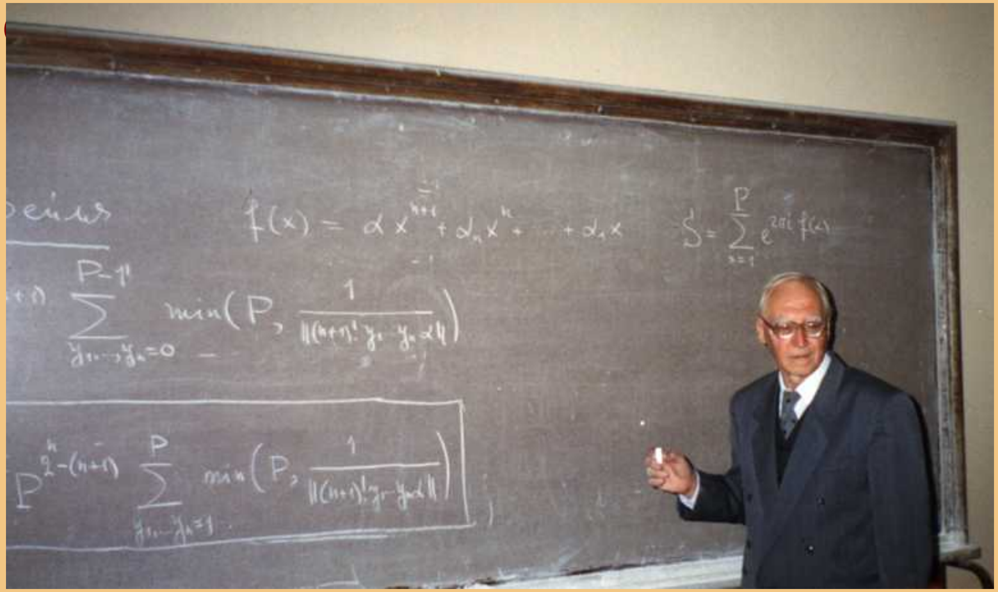

Дорогому
Николаю Михайловичу
Коробову
18, V, 53


АКАДЕМИК
И.М.ВИНОГРАДОВ
ИЗБРАННЫЕ
ТРУДЫ
ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ НАУК СССР
Москва
1952

В 1948 году Николай Михайлович начал преподавать на ***кафедре теории чисел механико-математического факультета*** Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова. Здесь в 1955 году ему было присвоено звание профессора.

In 1948 Nikolay Mikhailovich began to teach at the ***Department of the Theory of Numbers of the Faculty of Mechanics and Mathematics*** of Lomonosov Moscow State University. In 1955 the rank of professor was given to him.

Мастерство педагога и филигранные лекции Коробова были достоянием широкой студенческой аудитории в Московском механическом институте, Московском энергетическом институте, Московском государственном педагогическом институте им. В. И. Ленина и МВТУ им. Н. Э. Баумана.



Николай Михайлович на лекции
Nikolay Mikhailovich at the lecture

The mastery of teaching and thorough Korobov’s lectures were the property of the general student audience in Moscow Mechanical Institute, Moscow Institute of Energetics, Lenin Moscow State Pedagogical Institute and Bauman Moscow Higher Technical College.

Однако научная деятельность Н. М. Коробова была связана не только с Московским государственным университетом. На протяжении пятидесяти семи лет он проработал в системе ***Академии Наук***:

1948–1972 – Математический институт АН СССР им. В. А. Стеклова;

1979–1988 – Вычислительный центр АН СССР;

1988–2004 – Институт истории естествознания и техники РАН им. С. И. Вавилова.

However Korobov's scientific effort was allied not only to Moscow State University. For 57 years he has worked in the ***Academy of Sciences***:

1948–1972 – Steklov Mathematical Institute of the USSR Academy of Sciences;

1979–1988 – Computing center of the USSR Academy of Sciences;

1988–2004 – Vavilov Natural History and Technics Institute of Russian Academy of Sciences.

Научная деятельность Николая Михайловича Коробова развивалась в трех направлениях, в каждом из которых он добился выдающихся результатов:

1. Исследование вопросов распределения дробных долей;
2. Исследование и оценки тригонометрических сумм и применение этих оценок к различным вопросам аналитической теории чисел;
3. Исследование вопросов приближённого вычисления кратных интегралов.

There were three directions of Korobov’s scientific effort. In each of these directions he has achieved the great results:

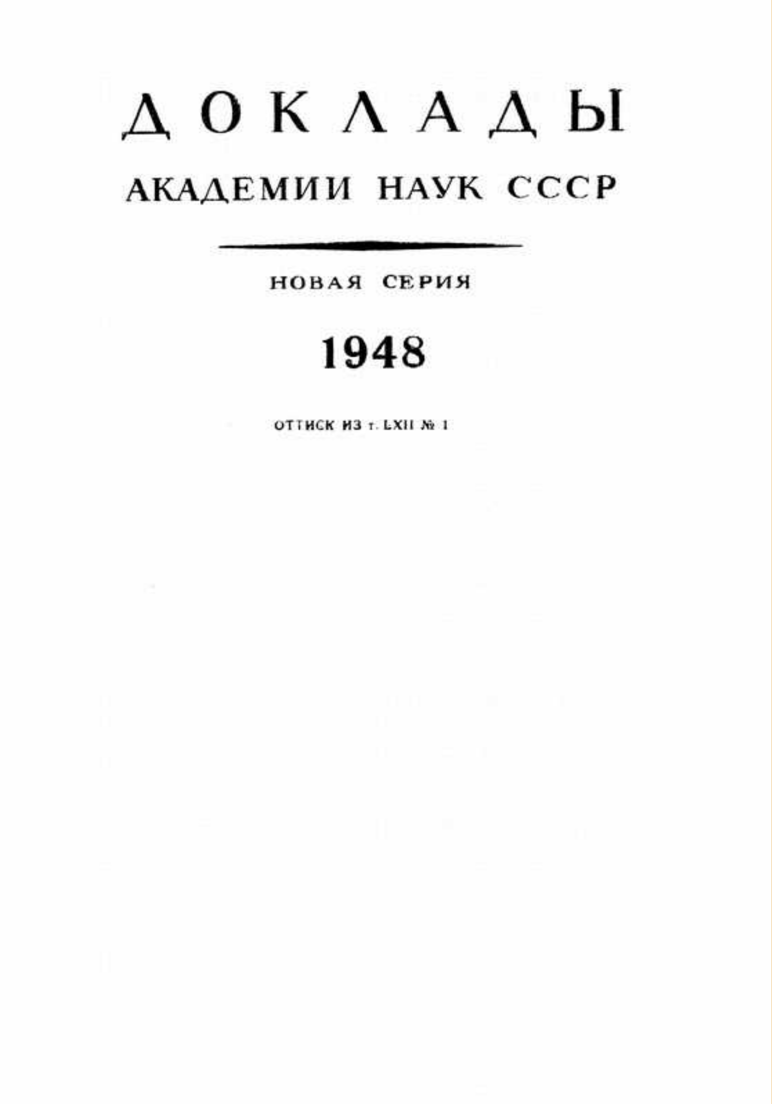
1. The research into fractional distribution;
2. The research and estimations of trigonometric sums and the application of evaluated estimates to different problems of analytical theory of numbers;
3. The research into approximate computation of multiple integrals.

В рамках исследования вопросов распределения дробных долей Н.М. Коробовым:

было введено понятие вполне равномерного распределения

In the context of Korobov’s research into fractional distribution

the conception of quite even distribution was introduced


ДОКЛАДЫ

АКАДЕМИИ НАУК СССР

НОВАЯ СЕРИЯ

1948

ОТТИСК ИЗ т. LXII № 1

В рамках исследования вопросов распределения дробных долей Н.М. Коробовым:

было введено понятие вполне равномерного распределения

In the context of Korobov’s research into fractional distribution

the conception of quite even distribution was introduced

Доклады Академии Наук СССР
1948. Том LXII, № 1

МАТЕМАТИКА

Н. М. КОРОБОВ

О ФУНКЦИЯХ С РАВНОМЕРНЫМ РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ ДРОБНЫХ ДОЛЕЙ

(Представлено академиком И. М. Виноградовым 25 VI 1948)

Функция $f(x)$ называется равномерно распределенной (mod 1), если для $x=1, 2, \ldots, P$ число $P(\alpha, \beta)$ выполнений неравенства

$$\alpha \leqslant \{f(x)\} < \beta$$

удовлетворяет соотношению:

$$P(\alpha, \beta) = (\beta - \alpha) P + o(P)$$

для любого интервала $(\alpha, \beta) \in (0, 1)$.

В 1916 г. Вейлем [1] была доказана равномерность распределения дробных долей полиномов произвольной степени, имеющих хотя бы один иррациональный коэффициент (не считая свободного члена).

Результаты Вейля были в 1931 г. обобщены Ван дер Корпутом [2], доказавшим равномерность распределения функций $f(x)$, для которых конечная разность некоторого порядка n стремится к иррациональному числу при неограниченном возрастании x, а также для функций, удовлетворяющих условиям

$$\lim_{x\to\infty} x|\Delta^n f(x)| = \infty, \qquad \lim_{x\to\infty} \Delta^n f(x) = 0,$$

причем стремление $\Delta^n f(x)$ к нулю монотонно.

Как полиномы, так и функции $f(x)$, рассмотренные Ван дер Корпутом, обладают тем свойством, что существуют не все равные нулю целые $m_1, m_2, \ldots, m_s$, при которых функция

$$F_s(x) = m_1 f(x+1) + \cdots + m_s f(x+s) \tag{1}$$

уже не будет равномерно распределена.

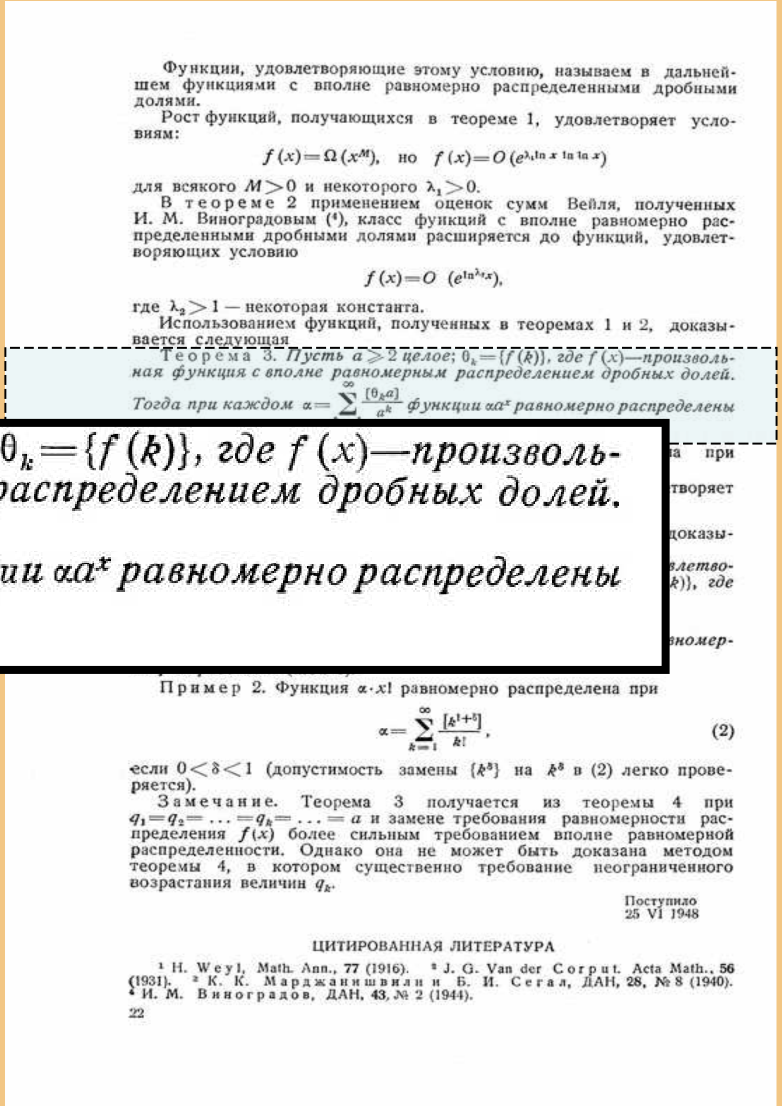
Легко видеть также, что для каждой из этих функций существует константа $M>0$ такая, что при возрастающих x будет

$$f(x) = o(x^M).$$

В теореме 1 настоящей работы с помощью оценки сумм Вейля, полученной К. К. Марджанишвили и Б. И. Сегалом [3], находятся аналитические функции, для которых при любом выборе целых $m_1, \ldots, m_s$, не всех равных нулю, функция (1) будет равномерно распределена.

В рамках исследования вопросов распределения дробных долей Н.М. Коробовым:

было введено понятие вполне равномерного распределения



Функции, удовлетворяющие этому условию, называем в дальнейшем функциями с вполне равномерно распределенными дробными долями.

Рост функций, получающихся в теореме 1, удовлетворяет условиям:

$$f(x)=\Omega(x^M), \quad \text{но} \quad f(x)=O(e^{\lambda_1 \ln x \ln \ln x})$$

для всякого $M>0$ и некоторого $\lambda_1>0$.

В теореме 2 применением оценок сумм Вейля, полученных И. М. Виноградовым (4), класс функций с вполне равномерно распределенными дробными долями расширяется до функций, удовлетворяющих условию

$$f(x)=O(e^{\ln^{\lambda_2} x}),$$

где $\lambda_2>1$ — некоторая константа.

Использованием функций, полученных в теоремах 1 и 2, доказывается следующая

Теорема 3. *Пусть $a \geqslant 2$ целое; $\theta_k=\{f(k)\}$, где $f(x)$—произвольная функция с вполне равномерным распределением дробных долей. Тогда при каждом $\alpha=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{[\theta_k a]}{a^k}$ функции αa^x равномерно распределены*

Пример 2. Функция $\alpha \cdot x!$ равномерно распределена при

$$\alpha=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{[k^{1+\delta}]}{k!}, \qquad (2)$$

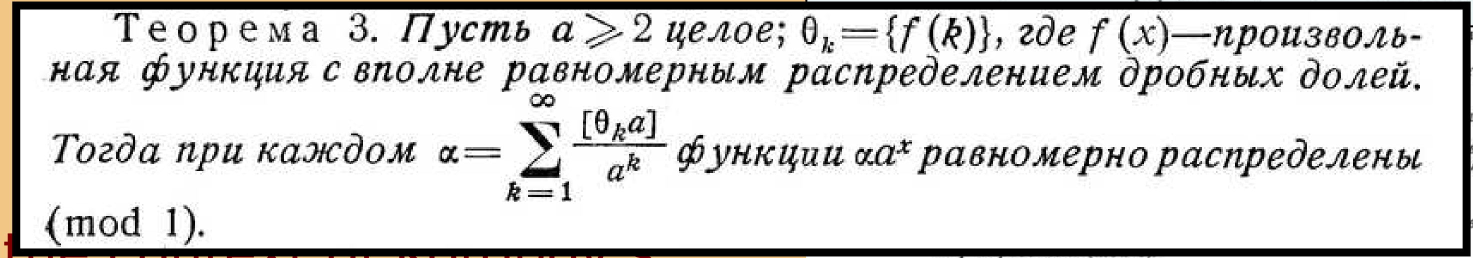
если $0<\delta<1$ (допустимость замены $\{k^\delta\}$ на k^δ в (2) легко проверяется).

Замечание. Теорема 3 получается из теоремы 4 при $q_1=q_2=\ldots=q_k=\ldots=a$ и замене требования равномерности распределения $f(x)$ более сильным требованием вполне равномерной распределенности. Однако она не может быть доказана методом теоремы 4, в котором существенно требование неограниченного возрастания величин q_k.

Поступило 25 VI 1948

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] H. Weyl, Math. Ann., 77 (1916). [2] J. G. Van der Corput, Acta Math., 56 (1931). [3] К. К. Марджанишвили и Б. И. Сегал, ДАН, 28, № 8 (1940). [4] И. М. Виноградов, ДАН, 43, № 2 (1944).



Теорема 3. *Пусть $a \geqslant 2$ целое; $\theta_k=\{f(k)\}$, где $f(x)$—произвольная функция с вполне равномерным распределением дробных долей. Тогда при каждом $\alpha=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{[\theta_k a]}{a^k}$ функции αa^x равномерно распределены* (mod 1).

In the context of Korobov's research into fractional distribution

the conception of quite even distribution was introduced

В рамках исследования вопросов распределения дробных долей Н.М. Коробовым:

было введено понятие вполне равномерного распределения

In t
research into fractional distribution

the conception of quite even distribution was introduced

Теорема 4. *Пусть целые* $q_1 \leqslant q_2 \leqslant \ldots \leqslant q_k \leqslant \ldots$ *удовлетворяют условиям:* $q_1 \geqslant 2$; $\lim\limits_{k \to \infty} q_k = \infty$; *пусть далее* $\theta_k = \{f(k)\}$, *где* $f(x)$ *произвольная равномерно распределенная функция.*

Тогда при каждом $\alpha = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{[\theta_k q_k]}{q_1 \ldots q_k}$ *функции* $\alpha q_1 \ldots q_x$ *равномерно распределены* (mod 1).

Функции, удовлетворяющие этому условию, называем в дальнейшем функциями с вполне равномерно распределенными дробными долями.

Рост функций, получающихся в теореме 1, удовлетворяет условиям:

$$f(x) = \Omega(x^M), \quad \text{но} \quad f(x) = O(e^{\lambda_1 \ln x \ln \ln x})$$

для всякого $M > 0$ и некоторого $\lambda_1 > 0$.

В теореме 2 применением оценок сумм Вейля, полученных И. М. Виноградовым [4], класс функций с вполне равномерно распределенными дробными долями расширяется до функций, удовлетворяющих условию

$$f(x) = O(e^{\ln^{\lambda_2} x}),$$

где $\lambda_2 > 1$ — некоторая константа.

Использованием функций, полученных в теоремах 1 и 2, доказывается следующая

Теорема 3. *Пусть* $a \geqslant 2$ *целое;* $\theta_k = \{f(k)\}$, *где* $f(x)$—*произвольная функция с вполне равномерным распределением дробных долей.*

...еделены

...а при

...творяет

...доказы-

...влетво-

...k)\}, где

...вномер-

$$\alpha = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{[k^{1+\delta}]}{k!}, \tag{2}$$

если $0 < \delta < 1$ (допустимость замены $\{k^\delta\}$ на k^δ в (2) легко проверяется).

Замечание. Теорема 3 получается из теоремы 4 при $q_1 = q_2 = \ldots = q_k = \ldots = a$ и замене требования равномерности распределения $f(x)$ более сильным требованием вполне равномерной распределенности. Однако она не может быть доказана методом теоремы 4, в котором существенно требование неограниченного возрастания величин q_k.

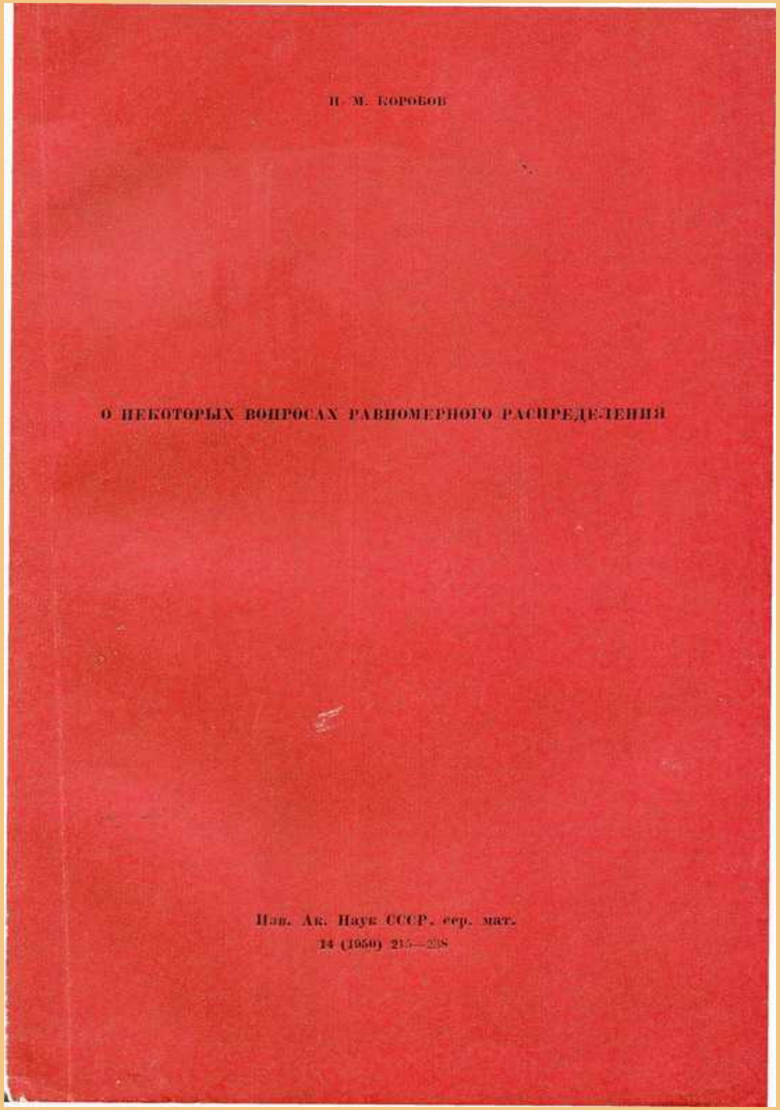
Поступило
25 VI 1948

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] H. Weyl, Math. Ann., 77 (1916). [2] J. G. Van der Corput, Acta Math., 56 (1931). [3] К. К. Марджанишвили и Б. И. Сегал, ДАН, 28, № 8 (1940). [4] И. М. Виноградов, ДАН, 43, № 2 (1944).

В рамках исследования вопросов распределения дробных долей Н.М. Коробовым:

было введено понятие вполне равномерного распределения

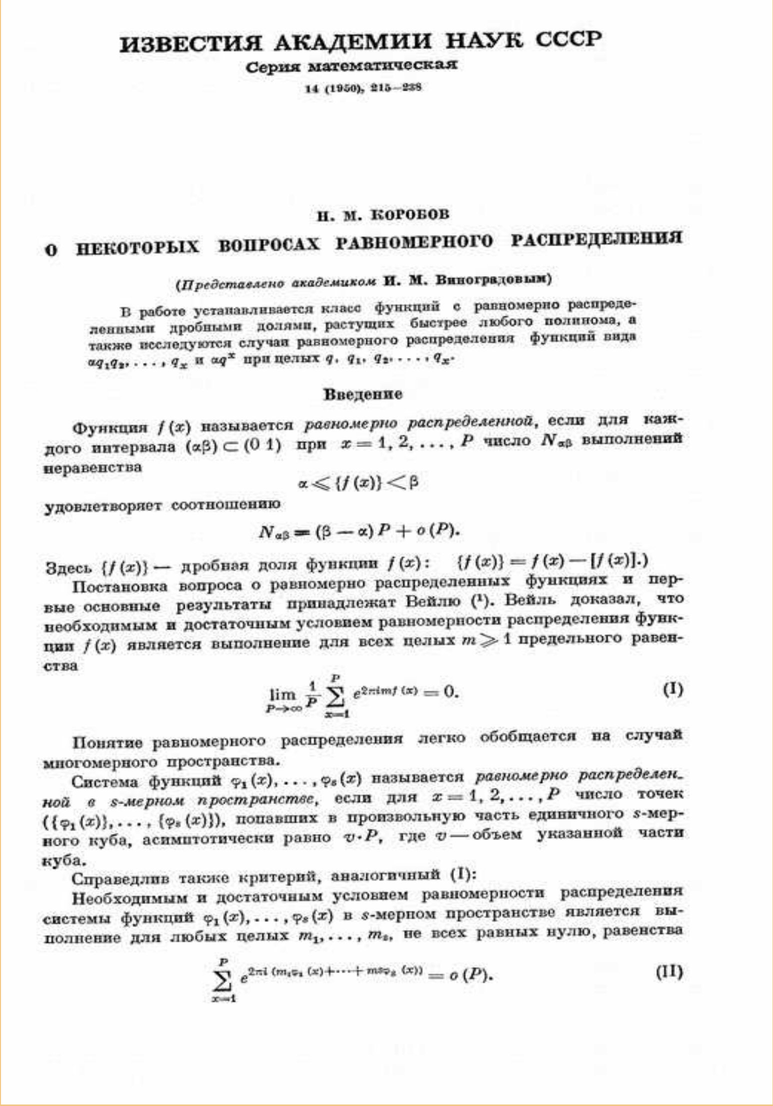


In the context of Korobov's research into fractional distribution

the conception of quite even distribution was introduced

В рамках исследования вопросов распределения дробных долей Н.М. Коробовым:

было введено понятие вполне равномерного распределения



ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР

Серия математическая

14 (1950), 215–238

Н. М. КОРОБОВ

О НЕКОТОРЫХ ВОПРОСАХ РАВНОМЕРНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

(*Представлено академиком* **И. М. Виноградовым**)

В работе устанавливается класс функций с равномерно распределенными дробными долями, растущих быстрее любого полинома, а также исследуются случаи равномерного распределения функций вида $\alpha q_1 q_2, \ldots, q_x$ и αq^x при целых $q, q_1, q_2, \ldots, q_x$.

Введение

Функция $f(x)$ называется *равномерно распределенной*, если для каждого интервала $(\alpha\beta) \subset (0\ 1)$ при $x = 1, 2, \ldots, P$ число $N_{\alpha\beta}$ выполнений неравенства

$$\alpha \leqslant \{f(x)\} < \beta$$

удовлетворяет соотношению

$$N_{\alpha\beta} = (\beta - \alpha) P + o(P).$$

Здесь $\{f(x)\}$ — дробная доля функции $f(x)$: $\{f(x)\} = f(x) - [f(x)]$.)

Постановка вопроса о равномерно распределенных функциях и первые основные результаты принадлежат Вейлю (1). Вейль доказал, что необходимым и достаточным условием равномерности распределения функции $f(x)$ является выполнение для всех целых $m \geqslant 1$ предельного равенства

$$\lim_{P \to \infty} \frac{1}{P} \sum_{x=1}^{P} e^{2\pi i m f(x)} = 0. \qquad (I)$$

Понятие равномерного распределения легко обобщается на случай многомерного пространства.

Система функций $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_s(x)$ называется *равномерно распределенной в s-мерном пространстве*, если для $x = 1, 2, \ldots, P$ число точек $(\{\varphi_1(x)\}, \ldots, \{\varphi_s(x)\})$, попавших в произвольную часть единичного s-мерного куба, асимптотически равно $v \cdot P$, где v — объем указанной части куба.

Справедлив также критерий, аналогичный (I):

Необходимым и достаточным условием равномерности распределения системы функций $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_s(x)$ в s-мерном пространстве является выполнение для любых целых $m_1, \ldots, m_s$, не всех равных нулю, равенства

$$\sum_{x=1}^{P} e^{2\pi i (m_1\varphi_1(x) + \cdots + m_s\varphi_s(x))} = o(P). \qquad (II)$$

In the context of Korobov's research into fractional distribution

the conception of quite even distribution was introduced

В рамках исследования вопросов распределения дробных долей Н.М. Коробовым:

было введено понятие вполне равномерного распределения

In the context of Korobov’s research into fractional distribution

the conception of quite even distribution was introduced

С помощью критерия (I) Вейль доказал равномерность распределения полиномов произвольной степени $n \geqslant 1$

$$f(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0,$$

имеющих хотя бы один иррациональный коэффициент (кроме a_0).

Другое, чисто арифметическое доказательство теоремы о дробных долях полинома было получено И. М. Виноградовым ([2]). Вопросы распределения дробных долей рассматривались также в ряде последующих работ И. М. Виноградова ([3]).

Дальнейшее развитие метод Вейля получил в работах Ван дер Корпута ([4]), который доказал равномерность распределения некоторых классов функций, растущих как полиномы.

Как для полиномов, так и для функций $f(x)$, рассмотренных Ван дер Корпутом, можно выбрать целые $m_1, \ldots, m_s$, не все равные нулю, так, что функция

$$F_s(x) = m_1 f(x+1) + \cdots + m_s f(x+s)$$

уже не будет равномерно распределена; для каждой из этих функций существует константа $\gamma > 0$ такая, что при возрастающих x будет:

$$f(x) = o(x^{\gamma}).$$

В первой главе этой работы строятся равномерно распределенные функции

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k,$$

рост каждой из которых удовлетворяет условию

$$f(x) = \Omega(x^{\gamma}) \quad (\gamma \text{ — произвольно большое}).$$

Эти функции отличаются от полиномов и функций, изученных Ван дер Корпутом, еще и тем, что при любом выборе целых $m_1, \ldots, m_s$, не равных одновременно нулю, линейная комбинация

$$F_s(x) = m_1 f(x+1) + \cdots + m_s f(x+s) \quad (s \geqslant 1 \text{ произвольно})$$

также представляет собой равномерно распределенную функцию. Функции, обладающие этим свойством, назовем *вполне равномерно распределенными*.

В теореме 1 с помощью оценки тригонометрических сумм, полученной К. К. Марджанишвили и Б. И. Сегалом ([5]) по методу Вейля, строится сравнительно узкий класс вполне равномерно распределенных функций $f(x)$, рост которых удовлетворяет условиям:

$$f(x) = o(x^{\lambda_1 \ln \ln x}), \quad f(x) = \Omega(x^{\lambda_2 \ln \ln x}) \quad (\lambda_1 > \lambda_2 > 0).$$

В теореме 2 применением новых, значительно более сильных оценок сумм Вейля, полученных И. М. Виноградовым ([6]), класс функций с вполне равномерно распределенными дробными долями расширяется до функций,

В рамках исследования вопросов распределения дробных долей Н.М. Коробовым:

было введено понятие вполне равномерного распределения

In the context of Korobov’s research into fractional distribution

the conception of quite even distribution was introduced

растущих быстрее чем $x^{(\ln x)^{\frac{1}{2}-\varepsilon}}$ при любом $\varepsilon > 0$. (Результаты теоремы 1 являются следствием теоремы 2.)

Вторая глава посвящена вопросам равномерности распределения функций вида

$$f(x) = \alpha \cdot \psi(x)$$

(α иррационально; $\psi(x)$ — функция, принимающая целые значения).

Рассматриваются два случая:

1. $f(x) = \alpha \cdot q_1 \cdots q_x$, где целые q_x удовлетворяют условиям

$$q_x \geqslant 2 \ (x = 1, 2, \ldots), \quad \lim_{x \to \infty} q_x = \infty.$$

2. $f(x) = \alpha q^x$ ($q \geqslant 2$, целое).

В теореме 3 доказывается, что необходимым и достаточным условием равномерности распределения функции $\alpha q_1 \cdots q_x$ является представимость α рядом

$$\alpha = \delta_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{[\theta_k q_k]}{q_1 \cdots q_k} \quad (\delta_0 = [\alpha]),$$

где $\theta_k = \{\varphi(k)\}$ — дробные доли какой-нибудь равномерно распределенной функции $\varphi(x)$.

В теореме 4 с помощью введенного выше понятия вполне равномерного распределения доказывается достаточное условие равномерности распределения функции αq^x, состоящее в представимости α рядом

$$\alpha = \delta_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{[\theta_k q]}{q^k},$$

где θ_k — дробные доли произвольной вполне равномерно распределенной функции.

Так, например, функции $\alpha_1 x!$ и $\alpha_2 \cdot 2^x$ будут равномерно распределены для α_1 и α_2, определенных рядами:

$$\alpha_1 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{[k^{1+\lambda}]}{k!} \quad (0 < \lambda < 1), \quad \alpha_2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{[2\{\varphi(k)\}]}{2^k}.$$

(Можно выбрать $\varphi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-k^2} x^k$ — функцию вполне равномерно распределенную, в силу теоремы 2.)

Функции вида $\alpha \cdot \psi(x)$ изучались Вейлем [1]. Для случаев, разобранных во второй главе, из результатов Вейля следовала равномерность распределения почти для всех значений параметра α, однако не было известно ни одного примера α, при котором получалось бы равномерное распределение.

Теорема 5 дает другое решение вопроса о величинах α, для которых функции αq^x равномерно распределены. В отличие от аналитического метода теоремы 4 здесь доказательство элементарно: в нем не нужен критерий Вейля и, таким образом, не привлекается теория тригонометрических сумм.

В рамках исследования вопросов распределения дробных долей Н.М. Коробовым:

было введено понятие вполне равно

In t

researc

the conception of quite even distribution was introduced

§ 1. ТЕОРЕМА 1. *Пусть функция $f(x)$ определена всюду сходящимся рядом:*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k, \qquad |a_k| = e^{-\omega(k)}. \tag{1}$$

Если существуют константы $G > g > 2$ такие, что для всех достаточно больших целых k будет

$$g \cdot \omega(k) < \omega(k+1) < G \cdot \omega(k), \tag{2}$$

то функция $f(x)$ вполне равномерно распределена.

В заключение я хочу выразить глубокую благодарность А. О. Гельфонду за внимание, проявленное к моей работе.

Глава I

Функции с вполне равномерным распределением дробных долей

§ 1. ТЕОРЕМА 1. *Пусть функция $f(x)$ определена всюду сходящимся рядом:*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k, \qquad |a_k| = e^{-\omega(k)}. \tag{1}$$

достаточно

(2)

нии вполне

a_{k+k_1}. (3)

ся не более

чем $s-1$ подряд равных нулю. Действительно, иначе система s однородных уравнений

$$\sum_{\nu=1}^{s} m_\nu \nu^{k_1} = 0, \quad k_1 = l, l+1, \ldots, l+s-1 \quad (l \geqslant 0),$$

допускала бы только нулевое решение $m_1 = m_2 = \ldots = m_s = 0$, что противоречит определению величин $m_1, \ldots, m_s$.

Обозначим через t наименьшее k_1, для которого

$$\sum_{\nu=1}^{s} m_\nu \nu^{k_1} \neq 0 \quad (0 \leqslant t < s-1).$$

В рамках исследования вопросов распределения дробных долей Н.М. Коробовым:

было введено понятие вполне равномерного распределения

О НЕКОТОРЫХ ВОПРОСАХ РАВНОМЕРНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ 219

Покажем теперь, что

$$A_k(s) = c(s)\frac{(k+t)!}{k!}a_{k+t} + O(k^{t+1}a_{k+t+1}), \qquad (4)$$

где $c(s) = \frac{1}{t!}\sum_{\nu=1}^{s} m_\nu \nu^t$ и t не зависит от k.

Пусть при $k_1 = t_1$ и $k_1 = t_2$ $(t < t_1 < t_2 \leqslant t_1 + s)$ получаются два соседних, отличных от нуля члена суммы

$$\sum_{k_1=0}^{\infty}\left(\sum_{\nu=1}^{s} m_\nu \nu^{k_1}\right)\frac{(k+k_1)!}{k!k_1!}a_{k+k_1}.$$

Обозначим через N модуль отношения этих членов:

$$N = \left|\frac{\left(\sum_{\nu=1}^{s} m_\nu\cdot\nu^{t_2}\right)(k+t_2)!\,k!\,t_1!\,a_{k+t_2}}{\left(\sum_{\nu=1}^{s} m_\nu\cdot\nu^{t_1}\right)(k+t_1)!\,k!\,t_2!\,a_{k+t_1}}\right|.$$

Очевидно,

$$N < c_1(s)\,s^{t_1+s}(k+t_1+s)^s e^{-(\omega(k+t_1+1)-\omega(k+t_1))} <$$
$$< c_2(s)\,s^{t_1}(k+t_1)^s e^{-(g-1)\omega(k+t_1)} < c_2(s)\,s^{t_1}(k+t_1)^s e^{-c_1\cdot 2^{k+t_1}} \quad (c_1 > 0).$$

Отсюда следует, что при достаточно большом k будет $N < \frac{1}{2}$ и из (3) получим

$$\left|A_k(s) - \frac{1}{t!}\left(\sum_{\nu=1}^{s} m_\nu\cdot\nu^t\right)\frac{(k+t)!}{k!}a_{k+t}\right| < c_3(s)\,k^{t+1}\,|a_{k+t+1}|,$$

что и доказывает утверждение (4).

Обозначим

$$|A_k(s)| = e^{-\omega_1(k)}.$$

Из (4) следует:

$$\omega_1(k) = \omega(k+t) - \ln(k+1)\cdots(k+t) - \ln|c(s)| + o(1) =$$
$$= \omega(k+t) + O(\ln k).$$

Но t не зависит от k, следовательно,

$$\omega_1(k+1) = \omega(k+t+1) + O(\ln k)$$

и, в силу (2), получим, что существуют константы $G_1 > g_1 > 2$, для которых при всех достаточно больших k выполняется неравенство

$$g_1\omega_1(k) < \omega_1(k+1) < G_1\omega_1(k).$$

Из этого неравенства видно, что функция

$$F_s(x) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k(s)\,x^k$$

сама удовлетворяет условиям теоремы 1, чем доказательство вполне равномерной распределенности функции $f(x)$ сводится к доказательству

In the context of Korobov's research into fractional distribution

the conception of quite even distribution was introduced

В рамках исследования вопросов распределения дробных долей Н.М. Коробовым:

было введено понятие вполне равномерного распределения

In the context of Korobov's research into fractional distribution

the conception of quite even distribution was introduced

220 Н. М. КОРОБОВ

ее равномерной распределенности. (Действительно, если всякая функция, удовлетворяющая условиям теоремы 1, равномерно распределена, то равномерно распределена функция $F_s(x)$ и, согласно определению вполне равномерного распределения, функция $f(x)$ распределена вполне равномерно.)

b) Введем функцию $\psi(x)$, определив ее для $k \leqslant x < k+1$, $k = 1, 2, \ldots$, равенством

$$\psi(x) = \frac{\omega(k)}{k} + \left(\frac{\omega(k+1)}{k+1} - \frac{\omega(k)}{k}\right)(x-k).$$

Очевидно, $\psi(x)$ обладает следующими свойствами:

(*)
1. определена для всех $x \geqslant 1$ и при целых $x = k$ совпадает с $\frac{\omega(k)}{k}$;
2. непрерывна;
3. монотонно возрастает, так как
$$\frac{\omega(k+1)}{k+1} - \frac{\omega(k)}{k} > \omega(k)\left(\frac{g}{k+1} - \frac{1}{k}\right) > 0;$$
4. для всех достаточно больших x выполняется неравенство
$$g_2\psi(x) < \psi(x+1) < G\psi(x) \quad (g_2 > 2).$$

Действительно, проверим, например, левую часть этого неравенства. При $k \leqslant x < k+1$ будет

$$\frac{\psi(x+1)}{\psi(x)} = \frac{\frac{\omega(k+1)}{k+1} + \left(\frac{\omega(k+2)}{k+2} - \frac{\omega(k+1)}{k+1}\right)(x-k)}{\frac{\omega(k)}{k} + \left(\frac{\omega(k+1)}{k+1} - \frac{\omega(k)}{k}\right)(x-k)},$$

$$\min\frac{\psi(x+1)}{\psi(x)} \geqslant \min\left(\frac{\omega(k+1)\cdot k}{\omega(k)\cdot(k+1)}, \frac{\omega(k+2)\cdot(k+1)}{\omega(k+1)\cdot(k+2)}\right) > \frac{gk}{k+1} > g_2,$$

где $2 < g_2 < g$ и k достаточно большое.

Пусть $\varphi(x)$ — функция, обратная $\psi(x)$. Существование ее обеспечено условиями (*); из (*) следует также, что

$$\psi(x) > c_2 g_2^x \quad (c_2 > 0)$$

и, значит, для достаточно больших x

$$\varphi(x) < \delta \cdot \ln x, \text{ где } \frac{1}{\ln g_2} < \delta < \frac{1}{\ln 2}. \qquad (5)$$

Приступим к доказательству равномерности распределения функции $f(x)$. Согласно критерию Вейля (I), достаточно убедиться в выполнении предельного равенства

$$\lim_{P\to\infty} \frac{1}{P}\sum_{x=1}^{P} e^{2\pi i m f(x)} = 0.$$

Обозначим

$$S = \sum_{x=1}^{P} e^{2\pi i m f(x)}, \quad n = \left[\varphi\left(\frac{1}{2G}\ln P\right)\right] + 1,$$

$$\xi = \frac{3}{2}\frac{\omega(n)}{n \ln P}, \quad P_1 = [P^{\xi}]. \quad \tau = \frac{\omega(n)}{\ln P_1}.$$

В рамках исследования вопросов распределения дробных долей Н.М. Коробовым:

было введено понятие вполне равномерного распределения

О НЕКОТОРЫХ ВОПРОСАХ РАВНОМЕРНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ 221

Очевидно, при $P \to \infty$ будет $n \to \infty$, причем, в силу (5), будет

$$n < \delta \ln \ln P < 2 \ln \ln P. \tag{6}$$

Далее,

$$\frac{\omega(n)}{n} = \psi(n) \leqslant \psi\left(\varphi\left(\frac{1}{2G} \ln P\right) + 1\right) < G\psi\left(\varphi\left(\frac{1}{2G} \ln P\right)\right) = \frac{\ln P}{2}.$$

С другой стороны,

$$\frac{\omega(n)}{n} > \psi\left(\varphi\left(\frac{1}{2G} \ln P\right)\right) = \frac{\ln P}{2G}.$$

Следовательно, из определения ξ получаем

$$\frac{3}{4G} < \xi < \frac{3}{4}, \quad P_1 = [P^{\xi}] \to \infty \text{ при } P \to \infty. \tag{7}$$

Наконец,

$$\tau = \frac{\omega(n)}{\xi \ln P} + o(1) = \frac{2}{3} n + o(1). \tag{8}$$

Для оценки $|S|$ разобьем интервал суммирования, положив

$$P = T \cdot P_1 + r, \quad 0 \leqslant r < P_1,$$

$$|S| = \left| \sum_{x=1}^{P_1} e^{2\pi i m f(x)} + \sum_{\nu=1}^{T-1} \sum_{x=1}^{P_1} e^{2\pi i m f(\nu P_1 + x)} + \sum_{x=1}^{r} e^{2\pi i m f(T P_1 + x)} \right|,$$

$$|S| \leqslant 2P_1 + (T-1) \max_{0<\nu<T} \left| \sum_{x=1}^{P_1} e^{2\pi i m f(\nu P_1 + x)} \right|. \tag{9}$$

Пусть максимум правой части достигается при $\nu = \nu_0$. Преобразуем $f(\nu_0 P_1 + x) = f(P_2 + x)$, $P_1 \leqslant P_2 < P$:

$$f(P_2 + x) = \sum_{k=0}^{n} a_k (x + P_2)^k + \sum_{k=n+1}^{\infty} \dot{a}_k (x + P_2)^k.$$

Обозначим через $R(x)$ сумму

$$R(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{k+n} (x^{k+n} + c_{k+n}^1 x^{k+n-1} P_2 + \cdots + c_{k+n}^k x^n P_2^k).$$

Тогда

$$f(P_2 + x) = Q(x) + R(x),$$

где $Q(x)$ — полином степени n относительно x со старшим коэффициентом

$$\alpha = a_n. \tag{10}$$

Оценим сумму $\sum_{x=1}^{P_1} e^{2\pi i m f(P_2 + x)}$:

$$\left| \sum_{x=1}^{P_1} e^{2\pi i m f(P_2 + x)} \right| \leqslant \left| \sum_{x=1}^{P_1} e^{2\pi i m Q(x)} \right| + \left| \sum_{x=1}^{P_1} e^{2\pi i m f(P_2 + x)} - e^{2\pi i m Q(x)} \right| \leqslant$$

$$\leqslant \left| \sum_{x=1}^{P_1} e^{2\pi i m Q(x)} \right| + \sum_{x=1}^{P_1} \left| e^{2\pi i m R(x)} - 1 \right|,$$

In the context of Korobov’s research into fractional distribution

the conception of quite even distribution was introduced

В рамках исследования вопросов распределения дробных долей Н.М. Коробовым:

было введено понятие вполне равномерного распределения

In the context of Korobov's research into fractional distribution

the conception of quite even distribution was introduced

и так как

$$|e^{2\pi i m R(x)} - 1| = 2|\sin \pi m R(x)| \leqslant 2\pi m |R(x)|,$$

то получим

$$\left|\sum_{x=1}^{P_1} e^{2\pi i m f(P_2+x)}\right| \leqslant |S_1| + 2\pi m \sum_{x=1}^{P_1} |R(x)|,$$

где

$$S_1 = \sum_{x=1}^{P_1} e^{2\pi i m Q(x)}.$$

Теперь неравенство (9) можно записать в виде

$$\frac{1}{P}|S| \leqslant \frac{2P_1}{P} + \frac{1}{P_1}|S_1| + 2\pi m \max_{1 \leqslant x \leqslant P_1} |R(x)|. \tag{11}$$

Применим к S_1 оценку, полученную для сумм Вейля К. К. Марджанишвили и Б. И. Сегалом ([5]):

Если

$$S_1 = \sum_{x=1}^{P_1} e^{2\pi i m Q(x)}, \quad P_1 \geqslant 3,$$

где

$$Q(x) = \alpha x^n + \alpha_1 x^{n-1} + \cdots + \alpha_n, \quad n \geqslant 3,$$

то для $\alpha = \frac{a}{q} + \frac{\lambda}{q^2}$, где a и q — целые, $q > 0$, $(aq) = 1$, $|\lambda| \leqslant \Lambda \geqslant 1$, справедливо:

$$|S_1|^{2^{n-1}} < 8(4P_1)^{2^{n-1}} \mu^{\sigma} \left(\left(m\Lambda + \frac{q}{P_1}\right)\left(\frac{1}{q} + \frac{1}{P_1^{n-1}}\right)\right)^{1-\varepsilon}. \tag{12}$$

(Здесь $\mu = (n-1)\ln P_1 + (n-1)^l - 1$; $\sigma = \frac{(n-1)^l - 1}{l}$; $0 < \varepsilon \leqslant \frac{1}{2}$, l — наименьшее целое $\geqslant \frac{1}{\varepsilon}$.)

Из определения τ, в силу (10), получим

$$|\alpha| = e^{-\omega(n)} = e^{-\tau \ln P_1} = \frac{1}{P_1^{\tau}},$$

$$|\alpha| = \frac{1}{[P_1^{\tau}]} + \frac{\lambda}{[P_1^{\tau}]^2}, \text{ где } |\lambda| = \frac{[P_1^{\tau}]\{P_1^{\tau}\}}{P_1^{\tau}} < 1.$$

Отсюда следует, что в оценке (12) можно принять

$$q = [P_1^{\tau}], \quad \Lambda = 1.$$

Выберем $\varepsilon = \frac{1}{3}$. Тогда $l = 3$ и оценка (12) примет вид:

$$|S_1| < 8^{\frac{1}{2^{n-1}}} \cdot 4P_1 (2n^3 \ln P_1)^{\frac{n^3}{3 \cdot 2^{n-1}}} \left((m + P_1^{\tau-1})(2P_1^{-\tau} + P_1^{1-n})\right)^{\frac{2}{3}\frac{1}{2^{n-1}}}.$$

Но, в силу (6), при достаточно больших P_1

$$(2n^3 \ln P_1)^{\frac{n^3}{3 \cdot 2^{n-1}}} < e^{\frac{\varepsilon_1 \ln P_1}{2^n}} = P_1^{\frac{\varepsilon_1}{2^n}}$$

В рамках исследования вопросов распределения дробных долей Н.М. Коробовым:

было введено понятие вполне равномерного распределения

для всякого постоянного $\varepsilon_1 > 0$

$$(m + P_1^{\tau-1})(2P_1^{-\tau} + P_1^{1-n}) = 2mP_1^{-\tau} + mP_1^{1-n} + 2P_1^{-1} + P_1^{\tau-n} < 3P_1^{-1}$$

(так как, в силу (8), $\tau = \frac{2}{3}n + o(1)$).

Теперь для S_1 получим

$$|S_1| < (24)^{\frac{1}{2^{n-1}}} \cdot 4 \cdot P_1^{1 - \frac{\frac{4}{3} - \varepsilon_1}{2^n}}$$

и окончательно при достаточно больших n

$$|S_1| < P_1^{1 - \frac{1}{2^n}}. \qquad (13)$$

Перейдем к оценке $|R(x)|$ при $1 \leqslant x \leqslant P_1$:

$$|R(x)| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\omega(k+n)} (x^{k+n} + c_{k+n}^1 x^{k+n-1} P_2 + \cdots + c_{k+n}^k x^n P_2^k).$$

Но

$$x^{k+n} + c_{k+n}^1 x^{k+n-1} P_2 + \cdots + c_{k+n}^k x^n P_2^k < (k+n)^k (P_1^{k+n} + P_1^{k+n-1} P_2 + \cdots$$
$$\cdots + P_1^n P_2^k) \leqslant (k+n)^k (k+1) P_1^n P_2^k < (k+n)^{k+1} P_1^n P^k,$$

так как $P_1 \leqslant P_2 < P$.

Таким образом, получаем

$$|R(x)| < P_1^n \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\omega(k+n)} (k+n)^{k+1} P^k. \qquad (14)$$

Обозначим через N_1 отношение соседних членов суммы в правой части (14):

$$N_1 < P\left(1 + \frac{1}{k+n}\right)^{k+1} (k+n+1)\, e^{-(\omega(k+n+1) - \omega(k+n))} <$$
$$< 3P(k+n+1)\, e^{-(g-1)\omega(k+n)} < 3P(k+n+1)\, e^{-c_1 2^k \cdot \omega(n)} <$$
$$< 6Pnke^{-c_1(2^k + \omega(n))} \quad (\text{постоянная } c_1 > 0).$$

Пользуясь определением ξ и неравенством (7), получим

$$\omega(n) > c_2 n \ln P \quad \left(c_2 = \frac{1}{2G}\right).$$

Таким образом,

$$N_1 < 12ke^{-c_1 2^k} \cdot P^{1 - c_1 c_2 n} \ln\ln P < \frac{1}{2}$$

при достаточно большом n и любом $k \geqslant 1$. Но тогда из (14) следует

$$|R(x)| < 2P_1^n (n+1)^2 Pe^{-g\omega(n)}.$$

Пользуясь определением величин τ, P_1, n и ξ, получим

$$|R(x)| < 2P^{n\xi+1} (2\ln\ln P)^2 P^{-g\tau\xi} < P^{n\xi+1-2\tau\xi}. \qquad (15)$$

Теперь оценка основной суммы (11), в силу оценок (13) и (15) для $|S_1|$ и $|R(x)|$, справедливых при достаточно большом P, примет вид:

In the context of Korobov's research into fractional distribution

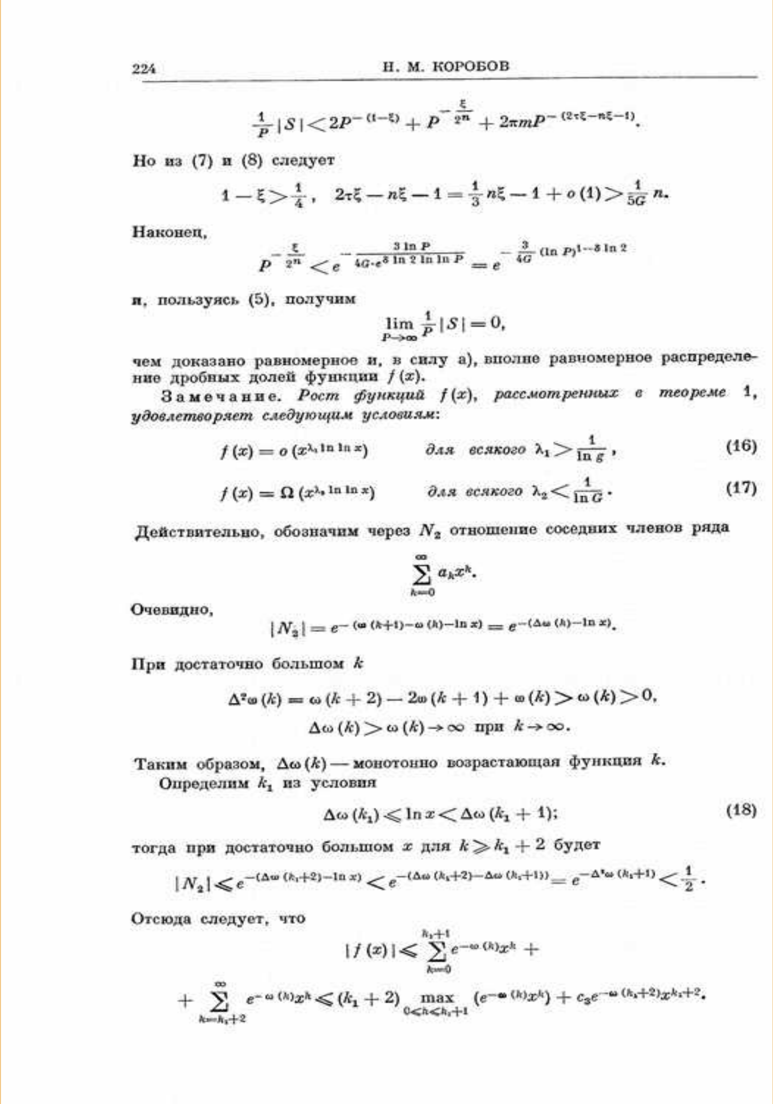
the conception of quite even distribution was introduced

В рамках исследования вопросов распределения дробных долей Н.М. Коробовым:

было введено понятие вполне равномерного распределения

In the context of Korobov’s research into fractional distribution

the conception of quite even distribution was introduced



224 Н. М. КОРОБОВ

$$\frac{1}{P}|S| < 2P^{-(1-\xi)} + P^{-\frac{\xi}{2^n}} + 2\pi m P^{-(2\tau\xi - n\xi - 1)}.$$

Но из (7) и (8) следует

$$1-\xi > \frac{1}{4}, \quad 2\tau\xi - n\xi - 1 = \frac{1}{3}n\xi - 1 + o(1) > \frac{1}{5G}n.$$

Наконец,

$$P^{-\frac{\xi}{2^n}} < e^{-\frac{3\ln P}{4G\cdot e^{\delta \ln 2 \ln\ln P}}} = e^{-\frac{3}{4G}(\ln P)^{1-\delta\ln 2}}$$

и, пользуясь (5), получим

$$\lim_{P\to\infty}\frac{1}{P}|S| = 0,$$

чем доказано равномерное и, в силу а), вполне равномерное распределение дробных долей функции $f(x)$.

Замечание. *Рост функций $f(x)$, рассмотренных в теореме 1, удовлетворяет следующим условиям:*

$$f(x) = o(x^{\lambda_1 \ln\ln x}) \qquad \text{для всякого } \lambda_1 > \frac{1}{\ln g}, \tag{16}$$

$$f(x) = \Omega(x^{\lambda_2 \ln\ln x}) \qquad \text{для всякого } \lambda_2 < \frac{1}{\ln G}. \tag{17}$$

Действительно, обозначим через N_2 отношение соседних членов ряда

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k.$$

Очевидно,

$$|N_2| = e^{-(\omega(k+1)-\omega(k)-\ln x)} = e^{-(\Delta\omega(k)-\ln x)}.$$

При достаточно большом k

$$\Delta^2\omega(k) = \omega(k+2) - 2\omega(k+1) + \omega(k) > \omega(k) > 0,$$
$$\Delta\omega(k) > \omega(k) \to \infty \text{ при } k\to\infty.$$

Таким образом, $\Delta\omega(k)$ — монотонно возрастающая функция k.

Определим k_1 из условия

$$\Delta\omega(k_1) \leqslant \ln x < \Delta\omega(k_1+1); \tag{18}$$

тогда при достаточно большом x для $k \geqslant k_1 + 2$ будет

$$|N_2| \leqslant e^{-(\Delta\omega(k_1+2)-\ln x)} < e^{-(\Delta\omega(k_1+2)-\Delta\omega(k_1+1))} = e^{-\Delta^2\omega(k_1+1)} < \frac{1}{2}.$$

Отсюда следует, что

$$|f(x)| \leqslant \sum_{k=0}^{k_1+1} e^{-\omega(k)}x^k +$$
$$+ \sum_{k=k_1+2}^{\infty} e^{-\omega(k)}x^k \leqslant (k_1+2)\max_{0\leqslant k\leqslant k_1+1}(e^{-\omega(k)}x^k) + c_3 e^{-\omega(k_1+2)}x^{k_1+2}.$$

В рамках исследования вопросов распределения дробных долей Н.М. Коробовым:

было введено понятие вполне равномерного распределения

In the context of Korobov’s research into fractional distribution

the conception of quite even distribution was introduced

О НЕКОТОРЫХ ВОПРОСАХ РАВНОМЕРНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ 225

Из (18) получим теперь

$$\ln x > \omega(k_1) > c_4 g^{k_1} \quad (c_4 > 0),$$

$$k_1 < \frac{1}{\ln g}(\ln\ln x - \ln c_4)$$

и, следовательно,

$$|f(x)| < (k_1+2)\,x^{k_1+1} + c_3 x^{k_1+2} < c_5 x^{\frac{1}{\ln g}\ln\ln x + 2},$$

чем доказано утверждение (16).

Для доказательства утверждения (17) достаточно показать, что существует последовательность $x_\nu \to \infty$ при $\nu \to \infty$ такая, что для всех достаточно больших ν будет

$$|f(x_\nu)| \geqslant x_\nu^{\frac{1}{\ln G}\ln\ln x_\nu + O(1)}$$

(величины x_ν могут не быть целыми; ν — целое).

Выберем

$$x_\nu = e^{\frac{\omega(\nu+1)-\omega(\nu-1)}{2}};$$

тогда для $k \geqslant \nu$ при $\nu \to \infty$ будет

$$|N_2| = e^{-\left(\omega(k+1)-\omega(k)-\frac{\omega(\nu+1)-\omega(\nu-1)}{2}\right)} < e^{-\frac{1}{2}\Delta^2\omega(\nu-1)} < e^{-\frac{1}{2}\omega(\nu-1)} \to 0.$$

Аналогично, при $k \leqslant \nu - 1$ для модуля отношения $\frac{a_k x^k}{a_{k+1}x^{k+1}} = \frac{1}{N_2}$ получим

$$\left|\frac{1}{N_2}\right| \leqslant e^{\omega(\nu)-\omega(\nu-1)-\frac{\omega(\nu+1)-\omega(\nu-1)}{2}} = e^{-\frac{1}{2}\Delta^2\omega(\nu-1)} \to 0.$$

Следовательно,

$$|f(x_\nu)| = \left|a_\nu x_\nu^\nu + \sum_{k=0}^{\nu-1} a_k x_\nu^k + \sum_{k=\nu+1}^{\infty} a_k x_\nu^k\right| \geqslant |a_\nu x_\nu^\nu| - 2|a_{\nu-1}x_\nu^{\nu-1}| - 2|a_{\nu+1}x_\nu^{\nu+1}|,$$

$$|f(x_\nu)| > \frac{1}{2}e^{-\omega(\nu)+\nu\ln x_\nu} > \frac{1}{2}x_\nu^{\nu-2}$$

(так как $2\ln x_\nu - \omega(\nu) = \omega(\nu+1) - \omega(\nu-1) - \omega(\nu) > 0$). Но для достаточно больших ν

$$\ln x_\nu = \frac{\omega(\nu+1)-\omega(\nu-1)}{2} < \frac{\omega(\nu+1)}{2} < c_6 G^\nu \quad (c_6 > 0),$$

$$\nu > \frac{1}{\ln G}(\ln\ln x_\nu - \ln c_6)$$

и для $|f(x_\nu)|$ получаем оценку

$$|f(x_\nu)| > \frac{1}{2}x_\nu^{\frac{1}{\ln G}\ln\ln x_\nu + c_7},$$

доказывающую утверждение (17).

3 Известия АН, серия математическая, № 3

В рамках исследования вопросов распределения дробных долей Н.М. Коробовым:

было введено понятие вполне равно

In t

researc

the conception of quite even distribution was introduced

§ 2. ТЕОРЕМА 2. *Пусть функция $f(x)$ определена рядом*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k, \qquad |a_k| = e^{-\omega(k)}.$$

Если для всех достаточно больших k выполняются условия

$$\left.\begin{aligned} &\omega(k) \geqslant k^{\lambda} \quad \text{при некотором постоянном } \lambda > 3, \\ &\left(1 + \frac{1}{k}\right)\omega(k) \leqslant \omega(k+1) \leqslant k\omega(k), \end{aligned}\right\} \qquad (19)$$

то функция $f(x)$ распределена равномерно.

(20)

(21)

$$N = e^{-(\omega(k+1)-\omega(k))} P \leqslant e^{-\frac{\omega(k)}{k}} P \leqslant e^{-\frac{\omega(n+1)}{n+1}} P,$$

так как, в силу (19), $\frac{\omega(k+1)}{k+1} \geqslant \frac{\omega(k)}{k}$ и $k \geqslant n+1$. Но

$$\frac{\omega(n+1)}{n+1} \geqslant (n+1)^{\lambda-1} > 2\ln P$$

и при $P > 2$

$$N < Pe^{-2\ln P} = \frac{1}{P} < \frac{1}{2}.$$

В рамках исследования вопросов распределения дробных долей Н.М. Коробовым:

было введено понятие вполне равномерного распределения

Таким образом, при неограниченном возрастании P получим

$$\max_{1 \leqslant x \leqslant P} |R(x)| < 2e^{-\omega(n+1)} P^{n+1} = 2e^{-(\omega(n+1)-(n+1)\ln P)} \to 0, \qquad (22)$$

так как $\omega(n+1) - (n+1)\ln P > (n+1)\ln P$.

Для S_1 применим оценку сумм Вейля, полученную И. М. Виноградовым [6]:

Если $Q(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ — полином степени $n \geqslant 11$, $a_r = \frac{a}{q} + \frac{\theta}{q^2}$, $(aq) = 1$, $|\theta| \leqslant 1$ и удовлетворяются условия

$$P^{\frac{1}{2}} \leqslant q \leqslant P^{r-1}, \quad 2 \leqslant r \leqslant n, \qquad (23)$$

то

$$\left| \sum_{x=1}^{P} e^{2\pi i m Q(x)} \right| < c(m) P^{1 - \frac{1}{6(n-1)^2 \ln 10n}}. \qquad (24)$$

(Здесь объединены часть случая 1 и случай 2 цитируемой теоремы с заменой в ней $n+1$ на n.) При достаточно больших n правую часть последнего неравенства можно, очевидно, заменить на

$$c(m) P^{1 - \frac{1}{n^{2+\varepsilon}}}$$

для любого постоянного $\varepsilon > 0$.

Пусть r — наименьшее целое, удовлетворяющее условию

$$\omega(r) \geqslant \ln P.$$

При достаточно большом P будет $r \geqslant 2$. Далее, так как

$$\frac{\omega(n+1)}{n+1} > \ln P, \quad \frac{\omega(r)}{r} < \frac{\omega(r)}{r-1} \leqslant \omega(r-1) < \ln P,$$

то

$$\frac{\omega(r)}{r} < \frac{\omega(n+1)}{n+1}$$

и, следовательно, $r \leqslant n$, чем удовлетворено второе из условий (23).

Положим $q = [e^{\omega(r)}]$. Очевидно,

$$|a_r| = \frac{1}{q} + \frac{\theta}{q^2}, \quad |\theta| < 1,$$

$$q \leqslant e^{\omega(r)} < e^{(r-1)\ln P} = P^{r-1},$$
$$q > e^{\omega(r)} - 1 \geqslant e^{\ln P} - 1 > P^{\frac{1}{2}}.$$

Таким образом, все условия применимости оценки (24) соблюдены и, выбирая $0 < \varepsilon < \lambda - 3$, получим для S_1

$$\frac{1}{P}|S_1| < c(m) P^{-\frac{1}{n^{2+\varepsilon}}} \leqslant c(m) e^{-\frac{\ln P}{(2\ln P)^{\frac{2+\varepsilon}{\lambda-1}}}} \to 0 \qquad (25)$$

при неограниченном возрастании P.

Из (20) получим

$$\frac{1}{P}|S| < \frac{1}{P}|S_1| + 2\pi m \max_{1 \leqslant x \leqslant P} |R(x)|$$

In the context of Korobov’s research into fractional distribution

the conception of quite even distribution was introduced

В рамках исследования вопросов распределения дробных долей Н.М. Коробовым:

было введено понятие вполне равномерного распределения

In the context of Korobov’s research into fractional distribution

the conception of quite even distribution was introduced

и, в силу (22) и (25),

$$\lim_{P\to\infty}\frac{1}{P}\sum_{x=1}^{P} e^{2\pi i m f(x)} = 0.$$

Следовательно, по критерию Вейля (I), функция $f(x)$ равномерно распределена.

Следствие. *Если существуют постоянные $\lambda > 3$, $\beta_1 > 1$ и $\beta_2 < 1$ такие, что для всех достаточно больших k будет*

$$\omega(k) \geqslant k^{\lambda}, \quad \left(1+\frac{\beta_1}{k}\right)\omega(k) \leqslant \omega(k+1) \leqslant \beta_2 k\omega(k),$$

то функция

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \quad |a_k| = e^{-\omega(k)}$$

распределена вполне равномерно.

Согласно определению вполне равномерного распределения, достаточно убедиться, что функция

$$F_s(x) = m_1 f(x+1) + \cdots + m_s f(x+s)$$

распределена равномерно. Для этого покажем, что $F_s(x)$ удовлетворяет условиям теоремы 2.

Действительно, как в теореме 1, получим

$$F_s(x) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k x^k, \quad |A_k| = e^{-\omega_1(k)},$$

где

$$A_k = c(s)\frac{(k+t)!}{k!}a_{k+t} + O(k^{t+1}a_{k+t+1}) \qquad (26)$$

(t не зависит от k, $0 \leqslant t < s-1$).

Единственным отличием доказательства (26) от доказательства аналогичного соотношения (4) будет иной метод оценки N:

$$N < c_1(s)s^{t_1+s}(k+t_1+s)^s e^{-(\omega(k+t_1+1)-\omega(k+t_1))} < \\ < c_2(s)s^{t_1}(k+t_1)^s e^{-\frac{\omega(k+t_1)}{k+t_1}}$$

и при достаточно большом k

$$N < c_2(s)s^{t_1}(k+t_1)^s e^{-(k+t_1)^s} < \frac{1}{2}.$$

Из (26) следует

$$\omega_1(k) = \omega(k+t) + O(\ln k).$$

При достаточно большом k получим

$$\omega_1(k) > (k+t)^{\lambda} + O(\ln k) > k^{\lambda_1}, \quad 3 < \lambda_1 < \lambda,$$

$$\omega_1(k+1) \leqslant \beta_2(k+t)\,\omega(k+t) + O(\ln k) < k\omega_1(k),$$

$$\omega_1(k+1) \geqslant \left(1+\frac{\beta_1}{k+t}\right)\omega(k+t) + O(\ln k) > \left(1+\frac{1}{k}\right)\omega_1(k).$$

В рамках исследования вопросов распределения дробных долей Н.М. Коробовым:

было введено понятие вполне равномерного распределения

In the context of Korobov’s research into fractional distribution

the conception of quite even distribution was introduced

О НЕКОТОРЫХ ВОПРОСАХ РАВНОМЕРНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ 229

Таким образом, условия (19) выполнены, функция $F_s(x)$ распределена равномерно и дробные доли функции $f(x)$ распределены вполне равномерно.

Замечание. *Среди функций теоремы 2 есть растущие скорее, чем $x^{(\ln x)^{\frac{1}{2}-\varepsilon}}$ для всякого $\varepsilon > 0$, однако все они удовлетворяют условию*

$$f(x) = o(x^{\ln^{\frac{1}{2}} x}).$$

Действительно,

$$|f(x)| \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\omega(k)} x^k.$$

Отношение соседних членов ряда в правой части этого неравенства

$$N = e^{-(\omega(k+1)-\omega(k))} x \leqslant e^{-\frac{\omega(k)}{k}+\ln x} < e^{-k^{\lambda-1}+\ln x} < \frac{1}{2}$$

при $k > k_1 = [\ln x)^{\frac{1}{\lambda-1}}]$. Таким образом,

$$|f(x)| < \sum_{k=0}^{k_1} e^{-k^\lambda} x^k + 2e^{-(k_1+1)^\lambda} x^{k_1+1} \leqslant (k_1+3) \max_k e^{-k^\lambda + k \ln x}$$

и при достаточно большом x

$$|f(x)| < e^{c(\lambda)(\ln x)^{1+\frac{1}{\lambda-1}}} = o(x^{\ln^{\frac{1}{2}} x}).$$

С другой стороны, выберем функцию

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-k^\lambda} x^k, \quad \lambda = 1 + \frac{2}{1-\varepsilon} \quad (0 < \varepsilon < 1).$$

Рассмотрим член суммы, получающийся при

$$k = k_2 = \left[\left(\frac{1}{\lambda} \ln x\right)^{\frac{1}{\lambda-1}}\right].$$

Очевидно,

$$f(x) > e^{-k_2^\lambda + k_2 \ln x} > e^{c_1(\lambda)(\ln x)^{1+\frac{1}{\lambda-1}}} > x^{(\ln x)^{\frac{1}{2}-\varepsilon}}.$$

Глава II

Равномерность распределения функций вида $\alpha q_1, \ldots, q_x$ и αq^x

§ 1. Пусть целые $q_1, q_2, \ldots, q_k, \ldots$ удовлетворяют условию

$$q_k \geqslant 2 \quad (k = 1, 2, \ldots).$$

Легко видеть, что каждое действительное число α можно представить разложением:

$$\alpha = \delta_0 + \frac{\delta_1}{q_1} + \frac{\delta_2}{q_1 q_2} + \cdots + \frac{\delta_k}{q_1 \cdots q_k} + \cdots, \qquad (1)$$

где δ_k $(k = 1, 2, \ldots)$ — целые, для которых

$$0 \leqslant \delta_k \leqslant q_k - 1, \quad \delta_0 = [\alpha].$$

В рамках исследования вопросов распределения дробных долей Н.М. Коробовым:

было введено понятие вполне равно

In t

researc

the conception of quite even distribution was introduced

Действительно, пусть α произвольно.

Обозначим

$$\alpha_1 = \{\alpha\}, \qquad \alpha_k = \{\alpha q_1 \ldots q_{k-1}\} = \{\alpha_{k-1} q_{k-1}\} \qquad (k = 2, 3, \ldots). \tag{2}$$

Выберем

$$\delta_k = [\alpha_k q_k] \qquad (k = 1, 2, \ldots); \tag{3}$$

тогда

$$\alpha = \delta_0 + \alpha_1,$$

$$\alpha_1 q_1 = \delta_1 + \alpha_2,$$

ТЕОРЕМА 3. *Если целые $q_k \geqslant 2\ (k = 1, 2, \ldots)$ и $q_k \to \infty$ при $k \to \infty$, то необходимым и достаточным условием равномерности распределения функции*

$$f(x) = \alpha q_1 \ldots q_x$$

является представимость α в виде

$$\alpha = \delta_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{[\theta_k q_k]}{q_1 \ldots q_k}, \tag{5}$$

где $\theta_k = \{\varphi(k)\}$, $k = 1, 2, \ldots$ — дробные доли какой-нибудь равномерно распределенной функции $\varphi(x)$.

(4)

...лучаем

(6)

где R_k — целое.

Обозначим

$$\xi_k = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{[\theta_{k+\nu} q_{k+\nu}]}{q_{k+1} \cdots q_{k+\nu}},$$

$$\xi_k < \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{q_{k+\nu} - 1}{q_{k+1} \cdots q_{k+\nu}} = 1.$$

Таким образом, $0 < \xi_k < 1$. Из (6) получим

$$\alpha q_1 \cdots q_{k-1} = R_k + \theta_k + \frac{\xi_k - \{\theta_k q_k\}}{q_k}. \tag{7}$$

В рамках исследования вопросов распределения дробных долей Н.М. Коробовым:

было введено понятие вполне равномерного распределения

In the context of Korobov’s research into fractional distribution

the conception of quite even distribution was introduced

Оценим сумму

$$S = \sum_{x=1}^{P} e^{2\pi i m f(x)}.$$

Пользуясь определением функции $f(x)$, в силу (7), получим

$$\frac{1}{P}|S| = \frac{1}{P}\left|\sum_{x=1}^{P} e^{2\pi i m\left(R_{x+1} + \{\varphi(x+1)\} + \frac{\xi(x)}{q_{x+1}}\right)}\right|,$$

где

$$|\xi(x)| = |\xi_{x+1} - \{\theta_{x+1} q_{x+1}\}| < 1$$

и, следовательно,

$$\frac{1}{P}|S| = \frac{1}{P}\left|\sum_{x=1}^{P} e^{2\pi i m\left(\varphi(x+1) + \frac{\xi(x)}{q_{x+1}}\right)}\right| \leqslant \frac{1}{P}\left|\sum_{x=1}^{P} e^{2\pi i m \varphi(x+1)}\right| +$$

$$+ \frac{1}{P}\sum_{x=1}^{P}\left|e^{2\pi i m \frac{\xi(x)}{q_{x+1}}} - 1\right| \leqslant \frac{1}{P}\left|\sum_{x=1}^{P} e^{2\pi i m \varphi(x+1)}\right| + \frac{2\pi m}{P}\sum_{x=1}^{P}\frac{1}{q_{x+1}}.$$

Пользуясь условиями теоремы при любом $\varepsilon > 0$ для всех достаточно больших P, получим

$$\frac{1}{P}|S| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{2\pi m}{P}\left(\sum_{x=1}^{x_0}\frac{1}{q_{x+1}} + \sum_{x=x_0+1}^{P}\frac{1}{q_{x+1}}\right) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon \qquad (8)$$

$\left(x_0 = x_0(\varepsilon)\right.$ выбираем так, чтобы при $x > x_0$ было $\left.\frac{1}{q_{x+1}} < \frac{\varepsilon}{8\pi m}\right)$.

Из (8) следует

$$\lim_{P\to\infty}\frac{1}{P}\left|\sum_{x=1}^{P} e^{2\pi i m f(x)}\right| = 0,$$

чем доказана достаточность условия (5).

Покажем необходимость этого условия. Пусть функция $f(x) = \alpha q_1 \ldots q_x$ распределена равномерно. Согласно (1),

$$\alpha = \delta_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\delta_k}{q_1 \ldots q_k},$$

где, в силу (2) и (3),

$$\delta_k = [\alpha_k q_k], \qquad \alpha_k = \{\alpha q_1 \ldots q_{k-1}\}.$$

Таким образом,

$$\alpha = \delta_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{[\alpha_k q_k]}{q_1 \ldots q_k}. \qquad (9)$$

В этом разложении $\alpha_k = \{f(k-1)\}$. Но функция $f(x-1)$ распределена равномерно; следовательно, разложение (9) является разложением типа (5) чем теорема 3 доказана полностью.

Замечание. *При построении чисел α, для которых функция $\alpha q_1 \ldots q_x$ равномерно распределена, величины θ_k в разложении (5) можно заменять на $\theta_k + n_k$, где n_k — целые, удовлетворяющие условию*

$$\lim_{k\to\infty}\frac{n_k + 1}{q_k} = 0.$$

В рамках исследования вопросов распределения дробных долей Н.М. Коробовым:

было введено понятие вполне равномерного распределения

ТЕОРЕМА 4. *Если целое* $q \geqslant 2$ *и*

$$\alpha = \delta_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{[\theta_k q]}{q^k},$$

где $\theta_k = \{\varphi(k)\}$ $(k = 1, 2, \ldots)$ — *дробные доли произвольной вполне равномерно распределенной функции* $\varphi(x)$, *то функция*

$$f(x) = \alpha q^x$$

распределена равномерно.

In t...

researc...

the conception of quite even distribution was introduced

Действительно, при таких α попрежнему получим соотношение типа (7):

$$\alpha q_1 \cdots q_{k-1} = R_k' + \theta_k + \frac{r_k}{q_k},$$

где R_k' — целое, $\lim_{k\to\infty} \frac{r_k}{q_k} = 0.$

Далее доказательство равномерности распределения $\alpha q_1 \ldots q_x$ пройдет как в теореме.

Пример 1. Пусть $0 < \lambda < 1$. Из результатов Ван дер Корпута [4] следует, что функция $\varphi(x) = x^\lambda$ распределена равномерно. Выберем $q_k = k + 1$ и, согласно замечанию, заменим $\theta_k = \{k^\lambda\}$ на $\theta_k + [k^\lambda] = k^\lambda$. Тогда для каждого

... всюду

(10)

... следует ... равно-

... реме 3, ... о возра- ... ения θ_k более сильным требованием вполне равномерной распределенности. Тогда имеет место следующая

ТЕОРЕМА 4. Если целое $q \geqslant 2$ и

$$\alpha = \delta_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{[\theta_k q]}{q^k},$$

где $\theta_k = \{\varphi(k)\}$ $(k = 1, 2, \ldots)$ — дробные доли произвольной вполне равномерно распределенной функции $\varphi(x)$, то функция

$$f(x) = \alpha q^x$$

распределена равномерно.

Доказательству предпошлем следующую лемму, получающуюся непосредственно из определения равномерного распределения.

В рамках исследования вопросов распределения дробных долей Н.М. Коробовым:

было введено понятие вполне равномерного распределения

О НЕКОТОРЫХ ВОПРОСАХ РАВНОМЕРНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ 233

ЛЕММА. *Пусть для всех целых* s *и* ν ($s \geqslant 1$; $0 \leqslant \nu \leqslant q^s - 1$) *при* $x = 1, 2, \ldots, P$ *число* N_ν *выполнений неравенства*

$$\frac{\nu}{q^s} \leqslant \{f(x)\} < \frac{\nu+1}{q^s}$$

асимптотически равно $\frac{1}{q^s} P$:

$$N_\nu = \frac{1}{q^s} P + o(P).$$

Тогда функция $f(x)$ *равномерно распределена.*

Действительно, пусть $0 \leqslant \beta_1 < \beta_2 < 1$. Выберем s настолько большим, чтобы для $\nu_1 = [\beta_1 q^s]$ и $\nu_2 = [\beta_2 q^s]$ выполнялось неравенство $\nu_2 > \nu_1 + 1$. Тогда

$$\frac{\nu_1}{p^s} \leqslant \beta_1 < \frac{\nu_1 + 1}{q^s} < \frac{\nu_2}{q^s} \leqslant \beta_2 < \frac{\nu_2 + 1}{q^s}.$$

Отсюда для числа N дробных долей $\{f(x)\}$ ($x = 1, 2, \ldots, P$), попавших на интервал $(\beta_1 \beta_2)$, получим

$$\sum_{\nu=\nu_1+1}^{\nu_2-1} N_\nu \leqslant N \leqslant \sum_{\nu=\nu_1}^{\nu_2} N_\nu. \qquad (11)$$

Обозначим

$$\lambda = \varliminf_{P \to \infty} \frac{N}{P}, \quad \Lambda = \varlimsup_{P \to \infty} \frac{N}{P}.$$

Пользуясь условием леммы, получим из (11)

$$\frac{\nu_2 - \nu_1 - 1}{q^s} \leqslant \lambda \leqslant \Lambda \leqslant \frac{\nu_2 - \nu_1 + 1}{q^s}.$$

Но

$$\lim_{s \to \infty} \frac{\nu_2 - \nu_1 - 1}{q^s} = \lim_{s \to \infty} \frac{\nu_2 - \nu_1 + 1}{q^s} = \beta_2 - \beta_1.$$

Таким образом,

$$\lim_{P \to \infty} \frac{N}{P} = \beta_2 - \beta_1,$$

чем утверждение леммы доказано.

Перейдем к доказательству теоремы. Из определения вполне равномерного распределения следует, что для любых целых $m_1, \ldots, m_s$, не равных одновременно нулю, функция

$$F_s(x) = m_1 \varphi(x+1) + \cdots + m_s \varphi(x+s)$$

равномерно распределена. Но тогда, по критерию Вейля для многомерного случая (II), система s функций $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_s(x)$, где $\varphi_i(x) = \varphi(x+i)$ ($i = 1, 2, \ldots, s$), равномерно распределена в s-мерном пространстве.

Рассмотрим s-мерный единичный куб. Разобьем его ребра на q равных частей и соответственно весь куб на q^s малых кубиков с объемом $\frac{1}{q^s}$. Перенумеруем полученные кубики, считая номером число

$$\nu = \delta_1(\nu) q^{s-1} + \delta_2(\nu) q^{s-2} + \cdots + \delta_s(\nu), \qquad (12)$$

In the context of Korobov's research into fractional distribution

the conception of quite even distribution was introduced

В рамках исследования вопросов распределения дробных долей Н.М. Коробовым:

было введено понятие вполне равномерного распределения

234 Н. М. КОРОБОВ

где

$$\frac{\delta_1(\nu)}{q},\ \frac{\delta_2(\nu)}{q},\ \dots,\ \frac{\delta_s(\nu)}{q}$$

— координаты ближайшей к началу координат вершины кубика. Очевидно, при этом ν примет каждое из целых значений от 0 до q^s-1, причем запись (12) будет записью числа ν по системе счисления с основанием q.

Из равномерности распределения системы функций $\varphi(x+1), \varphi(x+2), \dots, \varphi(x+s)$ следует, что для $x=1, 2, \dots, P$ число N_ν одновременного выполнения неравенств

$$\frac{\delta_i(\nu)}{q} \leqslant \{\varphi(x+i)\} < \frac{\delta_i(\nu)+1}{q} \quad (i=1, 2, \dots, s) \tag{13}$$

(равное числу точек $(x_1, x_2, \dots, x_s)$ $x_i=\{\varphi(x+i)\}$, попавших в кубик с номером ν) удовлетворяет соотношению

$$N_\nu = \frac{1}{q^s}P + o(P).$$

Так как $\{\varphi(x+i)\} = \theta_{x+i}$, то неравенства (13) выполняются для тех и только тех x, для которых

$$\delta_i(\nu) = [\theta_{x+i}q] \quad (i=1, 2, \dots, s). \tag{14}$$

В силу условия теоремы,

$$\{\alpha q^x\} = \frac{[\theta_{x+1}q]}{q} + \dots + \frac{[\theta_{x+s}q]}{q^s} + \frac{1}{q^s}\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{[\theta_{x+s+\nu}q]}{q^\nu},$$

$$\{\alpha q^x\} = \frac{[\theta_{x+1}q]\,q^{s-1} + [\theta_{x+2}q]\,q^{s-2} + \dots + [\theta_{x+s}q]}{q^s} + \frac{\theta}{q^s} \quad (0<\theta<1). \tag{15}$$

Из соотношения (15) видно, что для $x=1, 2, \dots, P$ число выполнений неравенства

$$\frac{\nu}{q^s} \leqslant \{\alpha q^x\} < \frac{\nu+1}{q^s} \quad (\nu = \delta_1(\nu)\,q^{s-1} + \dots + \delta_s(\nu))$$

совпадает с числом выполнений равенств (14) и, следовательно, совпадает с

$$N_\nu = \frac{1}{q^s}P + o(P).$$

Так как s и ν выбирались произвольно, то применима лемма. Согласно утверждению леммы, функция αq^x равномерно распределена.

§ 3. Теорема 4 дает аналитическое решение вопроса о построении чисел α, для которых функция αq^x распределена равномерно. Дадим элементарное решение того же вопроса.

Рассмотрим n-значные разложения чисел $0, 1, 2, \dots, q^n-1$ по системе счисления с основанием $q\geqslant 2$.

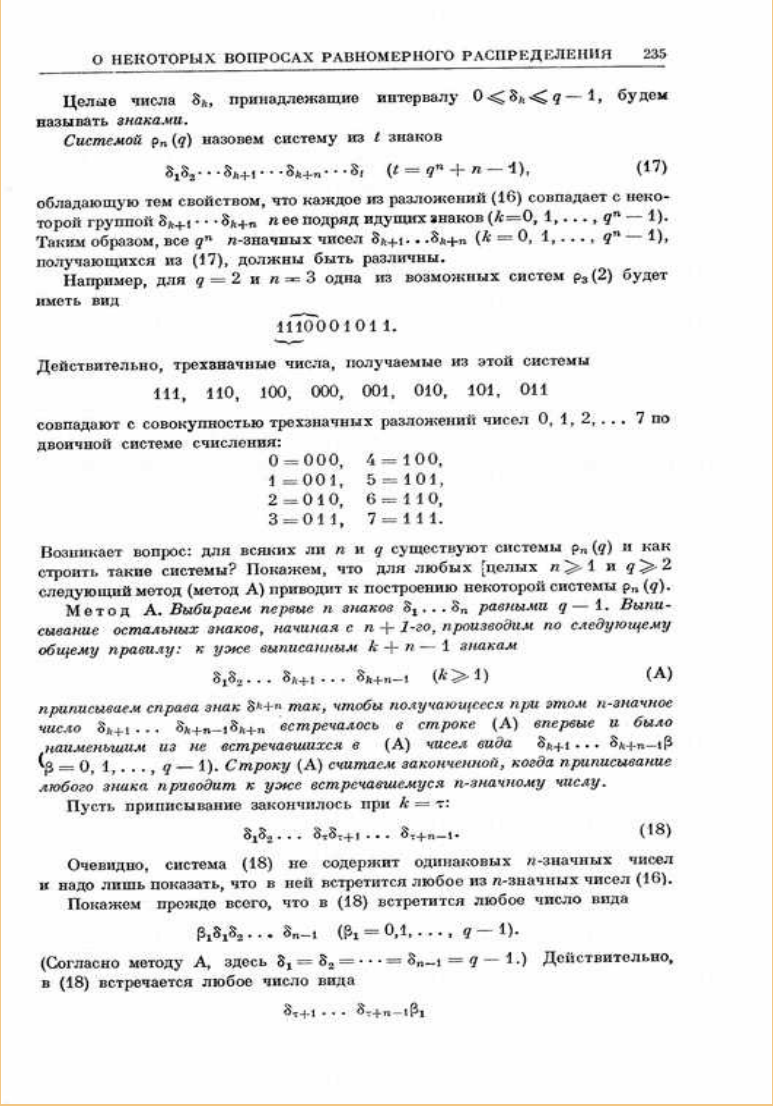
$$\begin{array}{lllll} 0 & =0 & 0 \;\dots & 0 & 0 \\ 1 & =0 & 0 \;\dots & 0 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ q & =0 & 0 \;\dots & 1 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ q^n-1 & =q-1 & q-1 \;\dots & q-1 & q-1 \end{array} \tag{16}$$

In the context of Korobov’s research into fractional distribution

the conception of quite even distribution was introduced

В рамках исследования вопросов распределения дробных долей Н.М. Коробовым:

было введено понятие вполне равномерного распределения



О НЕКОТОРЫХ ВОПРОСАХ РАВНОМЕРНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ 235

Целые числа δ_k, принадлежащие интервалу $0 \leqslant \delta_k \leqslant q-1$, будем называть *знаками*.

Системой $\rho_n(q)$ назовем систему из t знаков

$$\delta_1\delta_2\cdots\delta_{k+1}\cdots\delta_{k+n}\cdots\delta_t \quad (t = q^n + n - 1), \tag{17}$$

обладающую тем свойством, что каждое из разложений (16) совпадает с некоторой группой $\delta_{k+1}\cdots\delta_{k+n}$ n ее подряд идущих знаков ($k=0, 1, \ldots, q^n-1$). Таким образом, все q^n n-значных чисел $\delta_{k+1}\ldots\delta_{k+n}$ ($k=0, 1, \ldots, q^n-1$), получающихся из (17), должны быть различны.

Например, для $q=2$ и $n=3$ одна из возможных систем $\rho_3(2)$ будет иметь вид

$$1110001011.$$

Действительно, трехзначные числа, получаемые из этой системы

$$111,\quad 110,\quad 100,\quad 000,\quad 001,\quad 010,\quad 101,\quad 011$$

совпадают с совокупностью трехзначных разложений чисел 0, 1, 2, ... 7 по двоичной системе счисления:

$$\begin{aligned} 0&=000, & 4&=100,\\ 1&=001, & 5&=101,\\ 2&=010, & 6&=110,\\ 3&=011, & 7&=111. \end{aligned}$$

Возникает вопрос: для всяких ли n и q существуют системы $\rho_n(q)$ и как строить такие системы? Покажем, что для любых целых $n \geqslant 1$ и $q \geqslant 2$ следующий метод (метод А) приводит к построению некоторой системы $\rho_n(q)$.

Метод А. *Выбираем первые n знаков $\delta_1\ldots\delta_n$ равными $q-1$. Выписывание остальных знаков, начиная с $n+1$-го, производим по следующему общему правилу: к уже выписанным $k+n-1$ знакам*

$$\delta_1\delta_2\ldots\,\delta_{k+1}\ldots\,\delta_{k+n-1} \quad (k \geqslant 1) \tag{A}$$

приписываем справа знак δ_{k+n} так, чтобы получающееся при этом n-значное число $\delta_{k+1}\ldots\,\delta_{k+n-1}\delta_{k+n}$ встречалось в строке (А) *впервые и было наименьшим из не встречавшихся в* (А) *чисел вида $\delta_{k+1}\ldots\,\delta_{k+n-1}\beta$ ($\beta = 0, 1, \ldots, q-1$). Строку* (А) *считаем законченной, когда приписывание любого знака приводит к уже встречавшемуся n-значному числу.*

Пусть приписывание закончилось при $k=\tau$:

$$\delta_1\delta_2\ldots\,\delta_\tau\delta_{\tau+1}\ldots\,\delta_{\tau+n-1}. \tag{18}$$

Очевидно, система (18) не содержит одинаковых n-значных чисел и надо лишь показать, что в ней встретится любое из n-значных чисел (16).

Покажем прежде всего, что в (18) встретится любое число вида

$$\beta_1\delta_1\delta_2\ldots\,\delta_{n-1} \quad (\beta_1 = 0, 1, \ldots, q-1).$$

(Согласно методу А, здесь $\delta_1=\delta_2=\cdots=\delta_{n-1}=q-1$.) Действительно, в (18) встречается любое число вида

$$\delta_{\tau+1}\ldots\,\delta_{\tau+n-1}\beta_1$$

In the context of Korobov's research into fractional distribution

the conception of quite even distribution was introduced

В рамках исследования вопросов распределения дробных долей Н.М. Коробовым:

было введено понятие вполне равномерного распределения

In the context of Korobov’s research into fractional distribution

the conception of quite even distribution was introduced

236 Н. М. КОРОБОВ

(иначе процесс выписывания не был бы прекращен). Следовательно, $n-1$-значное число $\delta_{\tau+1}\ldots\delta_{\tau+n-1}$ встречается в строке (18) $q+1$ раз. При этом каждый раз слева к нему должны примыкать различные знаки, что возможно, лишь если один раз это число встречается в начале системы (18), т. е. совпадает с

$$\delta_1\delta_2\ldots\delta_{n-1}.$$

Итак, в (18) встречается любое число вида

$$\beta_1\delta_{\tau+1}\delta_{\tau+2}\ldots\delta_{\tau+n-1}=\beta_1\delta_1\delta_2\ldots\delta_{n-1}. \tag{19}$$

Применим индукцию. Допустим, что в (18) встречается любое число вида

$$\beta_k\beta_{k-1}\ldots\beta_1\delta_1\delta_2\ldots\delta_{n-k-1}\delta_{n-k}.$$

Из метода А (так как $\delta_{n-k}=q-1$) следует, что в (18) встречается также любое число вида

$$\beta_k\ldots\beta_1\delta_1\ldots\delta_{n-k-1}\beta_{k+1}\quad(\beta_{k+1}=0,1,\ldots,\ q-1).$$

Но тогда каждое $n-1$-значное число

$$\beta_k\ldots\beta_1\delta_1\ldots\delta_{n-k-1} \tag{20}$$

встречается в (18) q раз. Если при этом

$$\beta_k\ldots\beta_1\neq\delta_1\ldots\delta_k,$$

то (так как число (20) не может стоять в начале строки (18)) в (18) встретится любое число вида

$$\beta_{k+1}\,\beta_k\ldots\beta_1\delta_1\ldots\delta_{n-k-1}. \tag{21}$$

Если $\beta_k\ldots\beta_1=\delta_1\ldots\delta_k$, то все числа вида (21) попрежнему встретятся, так как в этом случае они совпадают с числами (19).

Таким образом, в строке (18) встречается любое n-значное число $\beta_n\beta_{n-1}\ldots\beta_1$ и, следовательно, эта строка совпадает с некоторой системой $\rho_n(q)$.

Применим теперь системы $\rho_n(q)$ к построению чисел α, для которых функция

$$f(x)=\alpha q^x$$

будет равномерно распределена.

Обозначим через $\rho_n'(q)$ системы, получающиеся из $\rho_n(q)$ отбрасыванием $n-1$ последних знаков.

Пусть, далее, $\varphi(\mu)>0$ — произвольная целочисленная функция, удовлетворяющая условию

$$\lim_{\mu\to\infty}\varphi(\mu)=\infty. \tag{22}$$

Определим α бесконечной дробью, записанной в системе счисления с основанием q:

$$\alpha=0,\ \underbrace{\rho_1'(q)\ldots\rho_1'(q)}_{\varphi(1)}\ \underbrace{\rho_2'(q)\ldots\rho_2'(q)}_{\varphi(2)}\ldots\underbrace{\rho_\mu'(q)\ldots\rho_\mu'(q)}_{\varphi(\mu)}\ \rho_{\mu+1}'(q)\ldots \tag{23}$$

(каждый знак каждого $\rho_\mu'(q)\,(\mu=1,2,\ldots)$ принимается здесь как очередной знак разложения α).

В рамках исследования вопросов распределения дробных долей Н.М. Коробовым:

было введено понятие вполне равномерного распределения

In t

research into fractional distribution

the conception of quite even distribution was introduced

Справедлива следующая

ТЕОРЕМА 5. *Для любого целого* $q \geqslant 2$ *и любого* α, *определенного согласно* (23), *функция*

$$f(x) = \alpha q^x$$

распределена равномерно.

Доказательство. Пусть x пробегает значения $1, 2, \ldots, P$. Подсчитаем число N_ν дробных долей функции αq^x, попадающих на интервал

$$\left(\frac{\nu}{q^s}, \quad \frac{\nu+1}{q^s}\right) \quad (0 \leqslant \nu \leqslant q^s - 1),$$

где $s \geqslant 1$ — произвольное фиксированное целое число.

На указанный интервал попадут, очевидно, те и только те дробные доли $\{\alpha q^x\}$, первые s знаков которых совпадают с s-значным разложением числа ν по системе счисления с основанием q. Для подсчета N_ν воспользуемся тем, что разложение $\{\alpha q^x\}$ в бесконечную q-ичную дробь полу-

...я на

$\underbrace{\qquad}_{\varphi(k)} \underbrace{\qquad}_{r}$

λ раз, где

$$\lambda = \varphi(s) + q\varphi(s+1) + \cdots + q^{k-s}\varphi(k) + rq^{k-s+1} + O(s).$$

Но тогда

$$N_\nu = \lambda + O(q^k) = \frac{1}{q^s}(S_k + rq^{k+1}) + O(q^k),$$

$$N_\nu = \frac{1}{q^s}P + O(q^k).$$

Из определения S_k следует

$$P \geqslant S_k > \varphi(k)\, q^k.$$

Отсюда при $P \to \infty$ получим

$$\frac{q^k}{P} < \frac{1}{\varphi(k)} \to 0.$$

$$\alpha = 0,\ \underbrace{\rho_1'(q) \ldots \rho_1'(q)}_{\varphi(1)}\ \underbrace{\rho_2'(q) \ldots \rho_2'(q)}_{\varphi(2)} \ldots \underbrace{\rho_\mu'(q) \ldots \rho_\mu'(q)}_{\varphi(\mu)}\ \rho_{\mu+1}'(q) \ldots \qquad (23)$$

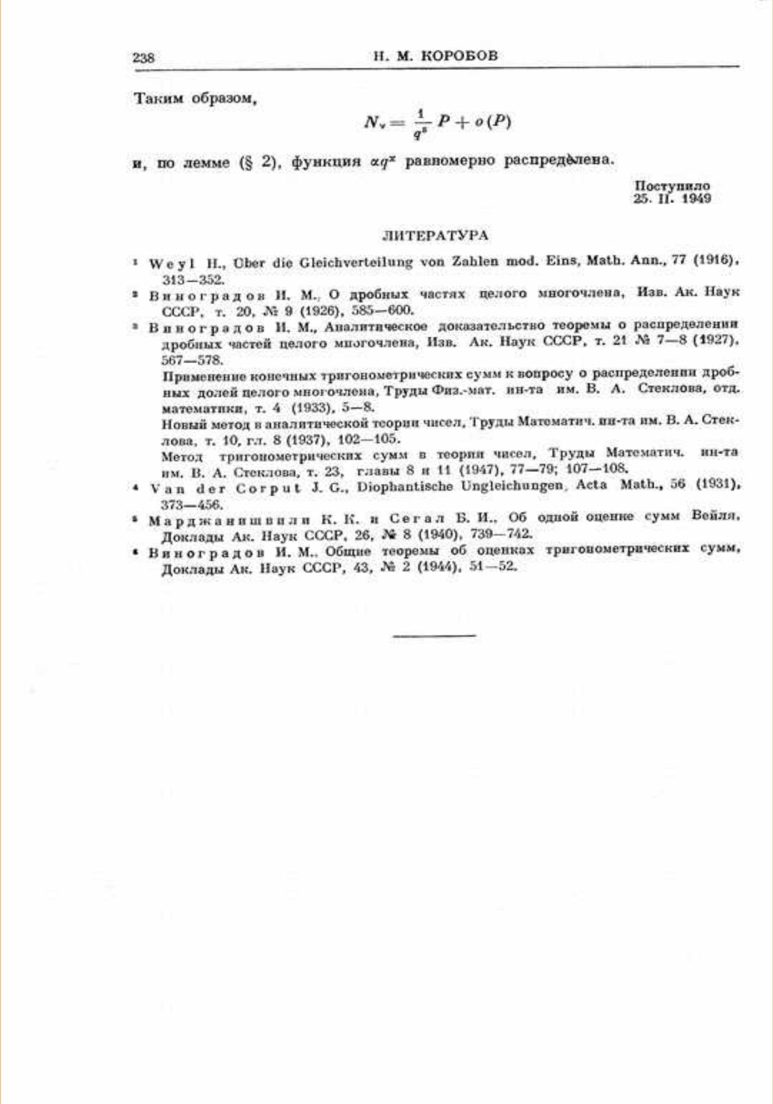
ТЕОРЕМА 5. *Для любого целого* $q \geqslant 2$ *и любого* α, *определенного согласно* (23), *функция*

$$f(x) = \alpha q^x$$

распределена равномерно.

В рамках исследования вопросов распределения дробных долей Н.М. Коробовым:

было введено понятие вполне равномерного распределения



Таким образом,

$$N_\nu = \frac{1}{q^s} P + o(P)$$

и, по лемме (§ 2), функция αq^x равномерно распределена.

Поступило 25. II. 1949

ЛИТЕРАТУРА

[1] Weyl H., Über die Gleichverteilung von Zahlen mod. Eins, Math. Ann., 77 (1916), 313—352.

[2] Виноградов И. М., О дробных частях целого многочлена, Изв. Ак. Наук СССР, т. 20, № 9 (1926), 585—600.

[3] Виноградов И. М., Аналитическое доказательство теоремы о распределении дробных частей целого многочлена, Изв. Ак. Наук СССР, т. 21 № 7—8 (1927), 567—578.

Применение конечных тригонометрических сумм к вопросу о распределении дробных долей целого многочлена, Труды Физ.-мат. ин-та им. В. А. Стеклова, отд. математики, т. 4 (1933), 5—8.

Новый метод в аналитической теории чисел, Труды Математич. ин-та им. В. А. Стеклова, т. 10, гл. 8 (1937), 102—105.

Метод тригонометрических сумм в теории чисел, Труды Математич. ин-та им. В. А. Стеклова, т. 23, главы 8 и 11 (1947), 77—79; 107—108.

[4] Van der Corput J. G., Diophantische Ungleichungen, Acta Math., 56 (1931), 373—456.

[5] Марджанишвили К. К. и Сегал Б. И., Об одной оценке сумм Вейля, Доклады Ак. Наук СССР, 26, № 8 (1940), 739—742.

[6] Виноградов И. М., Общие теоремы об оценках тригонометрических сумм, Доклады Ак. Наук СССР, 43, № 2 (1944), 51—52.

In the context of Korobov’s research into fractional distribution

the conception of quite even distribution was introduced

В рамках исследования вопросов распределения дробных долей Н.М. Коробовым:

были построены примеры вполне равномерно рас

In t

research into fractional distribution

the instances of quite evenly distributed functions were constructed

В МОСКОВСКОМ МАТЕМАТИЧЕСКОМ ОБЩЕСТВЕ

ЗАСЕДАНИЯ МОСКОВСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

Заседание 13 марта 1951 г.

1. И. М. Гельфанд и Б. М. Левитан. «Определение уравнения по

Теорема 1. *Пусть $\varphi(x)$ — произвольная вполне равномерно распределённая функция, для которой система функций $\varphi(x+1), \ldots, \varphi(x+s)$ сохраняет свойство равномерного распределения при любой линейной замене переменной $x = \lambda y$ $(\lambda \neq 0)$. Определим величины α_ν равенствами*

$$\alpha_\nu = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{[q_\nu \{\varphi(kn+\nu)\}]}{q_\nu^k} \qquad (q_\nu \geqslant 2 \text{—целые; } \nu = 1, 2, \ldots, n).$$

Тогда функция $F(x) = \alpha_1 q_1^x + \ldots + \alpha_n q_n^x$ будет распределена равномерно.

Тогда для всякой возрастающей последовательности простых $q_1, q_2, \ldots$ и достаточно быстро растущих целых $n_1, n_2, \ldots$ дробные доли функции $\alpha f(x) a^x$ распределены равномерно.

В теореме 3 содержится метод построения величин α, для которых функция $\alpha\beta^x$ ($\beta > 1$ — число Пизо) распределена равномерно.

Теорема 4. *Пусть α задано разложением в q-ичную дробь ($q \geqslant 2$ — целое):*

$$\alpha = 0, \underbrace{\rho_1' \ldots \rho_1'}_{q} \underbrace{\rho_2' \ldots \rho_2'}_{q^2} \ldots \underbrace{\rho_n' \ldots \rho_n'}_{q^n} \rho_{n+1}' \ldots,$$

где ρ_ν' — группы знаков, получающиеся из нормальных периодических систем $\rho_n(q)$ отбрасыванием $n-1$ последних знаков. Тогда при любом выборе систем $\rho_n(q)$ справедлива оценка

$$\left| \sum_{x=1}^{p} e^{2\pi i \alpha q^x} \right| < (4n+1) q \sqrt{p}.$$

В рамках исследования вопросов распределения дробных долей Н.М. Коробовым:

были построены примеры вполне равномерно рас

In t

research into fractional distribution

the instances of quite evenly distributed functions were constructed

В МОСКОВСКОМ МАТЕМАТИЧЕСКОМ ОБЩЕСТВЕ

ЗАСЕДАНИЯ МОСКОВСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

Заседание 13 марта 1951 г.

1. И. М. Гельфанд и Б. М. Левитан. «Определение уравнения по

Теорема 2. *Пусть $a \geqslant 2$—целое и $f(x)$—полином степени $n \geqslant 1$ с целыми коэффициентами. Определим α равенством*

$$\alpha = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{q_k^2 a^{n_k}}.$$

Тогда для всякой возрастающей последовательности простых $q_1, q_2, \ldots$ и достаточно быстро растущих целых $n_1, n_2, \ldots$ дробные доли функции $\alpha f(x) a^x$ распределены равномерно.

Тогда для всякой возрастающей последовательности простых $q_1, q_2, \ldots$ и достаточно быстро растущих целых $n_1, n_2, \ldots$ дробные доли функции $\alpha f(x) a^x$ распределены равномерно.

В теореме 3 содержится метод построения величин α, для которых функция $\alpha\beta^x$ ($\beta > 1$ — число Пизо) распределена равномерно.

Теорема 4. *Пусть α задано разложением в q-ичную дробь ($q \geqslant 2$—целое):*

$$\alpha = 0,\ \underbrace{\rho_1' \ldots \rho_1'}_{q}\ \underbrace{\rho_2' \ldots \rho_2'}_{q^2} \ldots \underbrace{\rho_n' \ldots \rho_n'}_{q^n}\ \rho_{n+1}' \ldots,$$

где ρ' — группы знаков, получающиеся из нормальных периодических систем $\rho_n(q)$ отбрасыванием $n-1$ последних знаков. Тогда при любом выборе систем $\rho_n(q)$ справедлива оценка

$$\left| \sum_{x=1}^{p} e^{2\pi i \alpha q^x} \right| < (4\pi + 1) q \sqrt{p}.$$

В рамках исследования вопросов распределения дробных долей Н.М. Коробовым:

были построены примеры вполне равномерно рас…

In t…
researc…

the instances of quite evenly distributed functions were constructed

В МОСКОВСКОМ МАТЕМАТИЧЕСКОМ ОБЩЕСТВЕ

ЗАСЕДАНИЯ МОСКОВСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

Заседание 13 марта 1951 г.

Теорема 4. *Пусть α задано разложением в q-ичную дробь ($q \geqslant 2$—целое):*

$$\alpha = 0,\ \underbrace{\rho_1' \ldots \rho_1'}_{q}\ \underbrace{\rho_2' \ldots \rho_2'}_{q^2} \ldots \underbrace{\rho_n' \ldots \rho_n'}_{q^n}\ \rho_{n+1}' \ldots,$$

где ρ' —группы знаков, получающиеся из нормальных периодических систем $\rho_n(q)$ отбрасыванием $n-1$ последних знаков. Тогда при любом выборе систем $\rho_n(q)$ справедлива оценка

$$\left| \sum_{x=1}^{p} e^{2\pi i \alpha q^x} \right| < (4\pi + 1)\, q \sqrt{p}.$$

…номерно.

В теореме 3 содержится метод построения величин α, для которых функция $\alpha\beta^x$ ($\beta > 1$ — число Пизо) распределена равномерно.

Теорема 4. *Пусть α задано разложением в q-ичную дробь ($q \geqslant 2$—целое):*

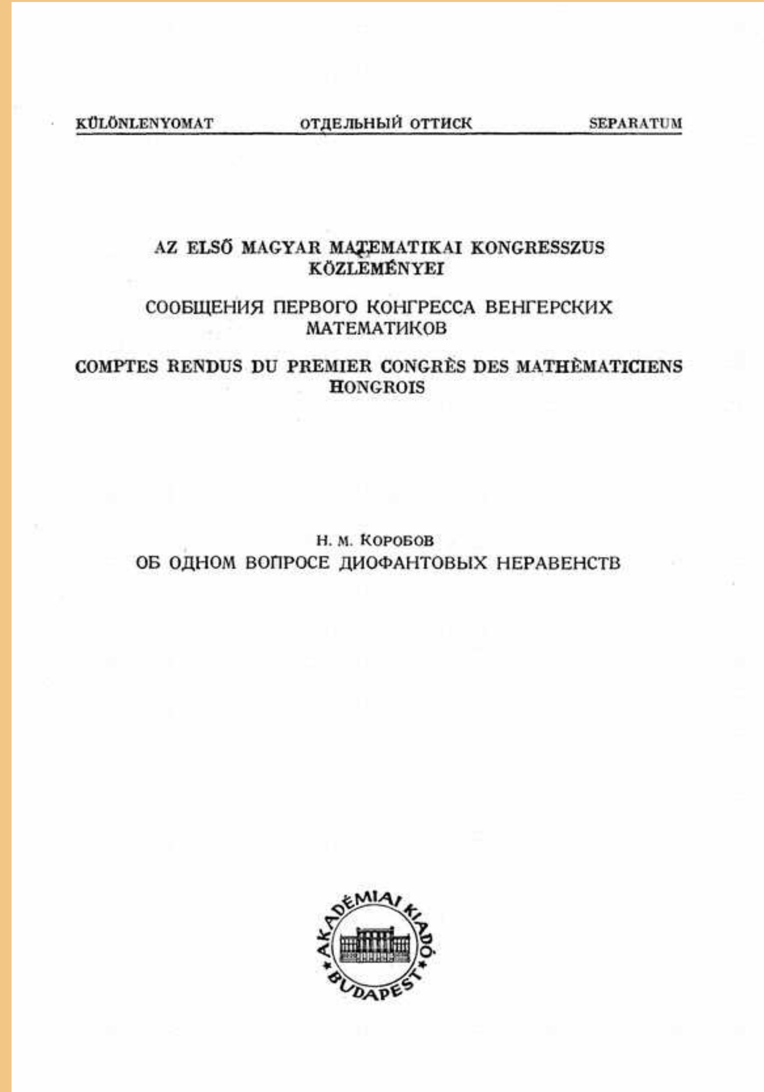
$$\alpha = 0,\ \underbrace{\rho_1' \ldots \rho_1'}_{q}\ \underbrace{\rho_2' \ldots \rho_2'}_{q^2} \ldots \underbrace{\rho_n' \ldots \rho_n'}_{q^n}\ \rho_{n+1}' \ldots,$$

где ρ' —группы знаков, получающиеся из нормальных периодических систем $\rho_n(q)$ отбрасыванием $n-1$ последних знаков. Тогда при любом выборе систем $\rho_n(q)$ справедлива оценка

$$\left| \sum_{x=1}^{p} e^{2\pi i \alpha q^x} \right| < (4\pi + 1)\, q \sqrt{p}.$$

В рамках исследования вопросов распределения дробных долей Н.М. Коробовым: ***были установлены связи между вполне равномерным распределением и свойствами чисел, нормальных по Борелю***

In the context of Korobov’s research into fractional distribution ***quite even distribution is allied to characteristics of borel normal numbers***


KÜLÖNLENYOMAT ОТДЕЛЬНЫЙ ОТТИСК SEPARATUM

AZ ELSŐ MAGYAR MATEMATIKAI KONGRESSZUS KÖZLEMÉNYEI

СООБЩЕНИЯ ПЕРВОГО КОНГРЕССА ВЕНГЕРСКИХ МАТЕМАТИКОВ

COMPTES RENDUS DU PREMIER CONGRÈS DES MATHÈMATICIENS HONGROIS

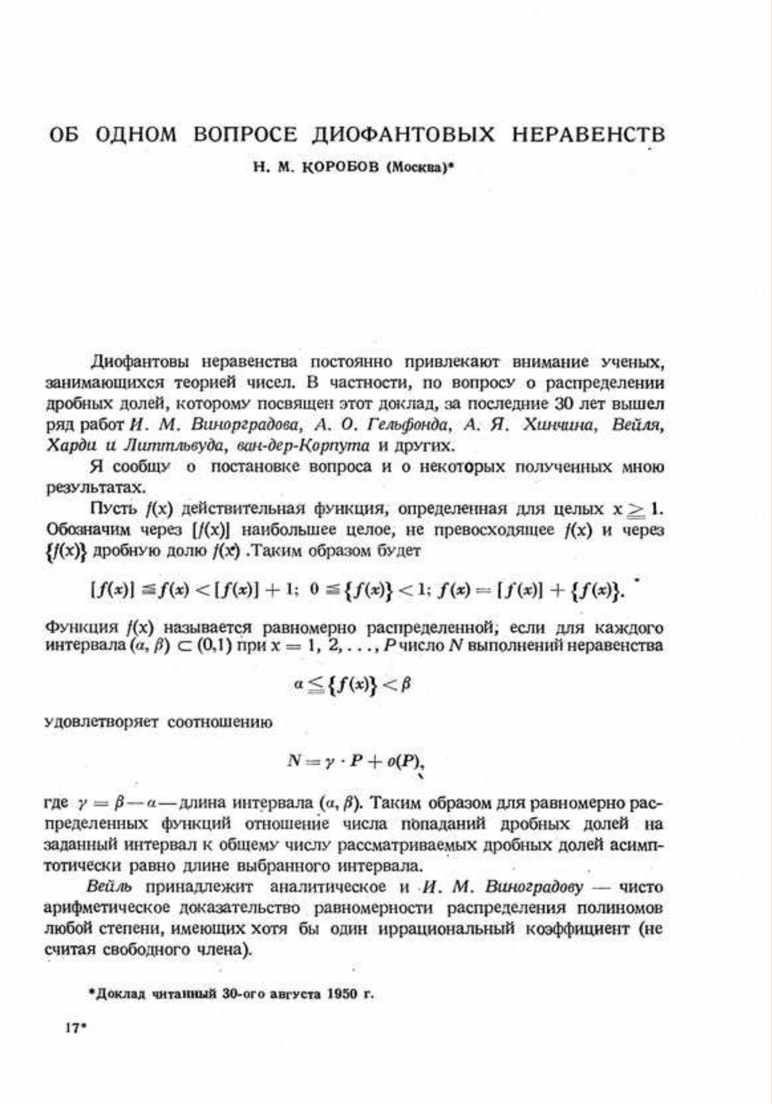
Н. М. КОРОБОВ

ОБ ОДНОМ ВОПРОСЕ ДИОФАНТОВЫХ НЕРАВЕНСТВ

AKADÉMIAI KIADÓ BUDAPEST

В рамках исследования вопросов распределения дробных долей Н.М. Коробовым: ***были установлены связи между вполне равномерным распределением и свойствами чисел, нормальных по Борелю***

In the context of Korobov’s research into fractional distribution ***quite even distribution is allied to characteristics of borel normal numbers***



ОБ ОДНОМ ВОПРОСЕ ДИОФАНТОВЫХ НЕРАВЕНСТВ

Н. М. КОРОБОВ (Москва)*

Диофантовы неравенства постоянно привлекают внимание ученых, занимающихся теорией чисел. В частности, по вопросу о распределении дробных долей, которому посвящен этот доклад, за последние 30 лет вышел ряд работ *И. М. Винорградова*, *А. О. Гельфонда*, *А. Я. Хинчина*, *Вейля*, *Харди и Литтльвуда*, *ван-дер-Корпута* и других.

Я сообщу о постановке вопроса и о некоторых полученных мною результатах.

Пусть $f(x)$ действительная функция, определенная для целых $x \geqq 1$. Обозначим через $[f(x)]$ наибольшее целое, не превосходящее $f(x)$ и через $\{f(x)\}$ дробную долю $f(x)$. Таким образом будет

$$[f(x)] \leqq f(x) < [f(x)] + 1; \quad 0 \leqq \{f(x)\} < 1; \quad f(x) = [f(x)] + \{f(x)\}.$$

Функция $f(x)$ называется равномерно распределенной, если для каждого интервала $(\alpha, \beta) \subset (0,1)$ при $x = 1, 2, \ldots, P$ число N выполнений неравенства

$$\alpha \leqq \{f(x)\} < \beta$$

удовлетворяет соотношению

$$N = \gamma \cdot P + o(P),$$

где $\gamma = \beta - \alpha$ — длина интервала (α, β). Таким образом для равномерно распределенных функций отношение числа попаданий дробных долей на заданный интервал к общему числу рассматриваемых дробных долей асимптотически равно длине выбранного интервала.

Вейлю принадлежит аналитическое и *И. М. Виноградову* — чисто арифметическое доказательство равномерности распределения полиномов любой степени, имеющих хотя бы один иррациональный коэффициент (не считая свободного члена).

*Доклад читанный 30-ого августа 1950 г.

17*

В рамках исследования вопросов распределения дробных долей Н.М. Коробовым:

были установлены связи между вполне равномерным

но

In t

research into fractional distribution

quite even distribution is allied to characteristics of borel normal numbers

Значительный интерес и, вместе с тем, значительные трудности представляют исследование дробных долей функций, растущих скорее, чем любой полином и, в частности, показательных функций. Так, несмотря на то, что уже 20 лет назад была доказана равномерность распределения показательных функций a^x почти для всех $a > 1$, до сих пор не известно ни одного значения a, при котором функция a^x была бы равномерно распределена. Более того, только в самое последнее время *А. О. Гельфондом* были указаны случаи всюду плотного распределения дробных долей показательных функций; про такую функцию как $\left(\frac{3}{2}\right)^x$ не известно даже, будут ли ее дробные доли распределены всюду плотно.

ТЕОРЕМА 1. *Если для любых целых $m_1, \ldots, m_s$, не равных одновременно нулю любая линейная комбинация $m_1\varphi(x+1) + \ldots + m_s\varphi(x+s)$, составленная для некоторой функции $\varphi(x)$, представляет собой равномерно распределенную функцию, то функция aq^x при*

$$a = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{[\{\varphi(k)\} \cdot q]}{q^k}$$

распределена равномерно.

и пусть $\varphi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$, где $|a_k| = e^{-\omega(k)}$. *Тогда линейная комбинация* $m_1\varphi(x+1) + \ldots + m_s\varphi(x+s)$ *равномерно распределена при любых целых* $m_1, \ldots, m_s$ *не равных одновременно нулю.*

Из приведенных теорем следует, например, что при

$$a = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{[2\{\varphi(k)\}]}{2^k} \quad \text{где} \quad \varphi(k) = \sum_{r=0}^{\infty} e^{-r^4} k^r$$

дробные доли функции $a \cdot 2^x$ распределены равномерно.

Доказательство теоремы 1. Из равномерности распределения функции $m_1\varphi(x+1) + \ldots + m_s\varphi(x+s)$ по критерию равномерного распределения, В рамках исследования вопросов распределения дробных долей Н.М. Коробовым: ***были установлены связи межд***

но

In t
researc

quite even distribution is allied to characteristics of borel normal numbers

Значительный интерес и, вместе с тем, значительные трудности представляют исследование дробных долей функций, растущих скорее, чем любой полином и, в частности, показательных функций. Так, несмотря на то, что уже 20 лет назад была доказана равномерность распределения показательных функций α^x почти для всех $\alpha > 1$, до сих пор не известно ни одного значения α, при котором функция α^x была бы равномерно распределена. Более того, только в самое последнее время *А. О. Гельфондом* были указаны случаи всюду плотного распределения дробных долей показатель-

ТЕОРЕМА 2. *Пусть функция* $\omega(k)$ *для всех достаточно больших* k *удовлетворяет неравенствам.*

$$1 + \frac{2}{k} < \frac{\omega(k+1)}{\omega(k)} \leq \frac{k}{2}; \qquad \omega(k) \geq k^4$$

и пусть $\varphi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$, где $|a_k| = e^{-\omega(k)}$. *Тогда линейная комбинация*

$m_1 \varphi(x+1) + \ldots + m_s \varphi(x+s)$ *равномерно распределена при любых целых* $m_1; \ldots, m_s$ *не равных одновременно нулю.*

Из приведенных теорем следует, например, что при

$$\alpha = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{[2\{\varphi(k)\}]}{2^k} \quad \text{где} \quad \varphi(k) = \sum_{r=0}^{\infty} e^{-r^4} k^r$$

дробные доли функции $\alpha \cdot 2^x$ распределены равномерно.

Доказательство теоремы 1. Из равномерности распределения функции $m_1\varphi(x+1) + \ldots + m_s\varphi(x+s)$ по критерию равномерного распределения,

В рамках исследования вопросов распределения дробных долей Н.М. Коробовым: ***были установлены связи между вполне равномерным распределением и свойствами чисел, нормальных по Борелю***

In the context of Korobov’s research into fractional distribution ***quite even distribution is allied to characteristics of borel normal numbers***

Об одном вопросе диофантовых неравенств 261

полученному *Бейлем*, следует, что система s функций $\varphi(x+1), \varphi(x+2), \ldots, \varphi(x+s)$ равномерно распределена в s-мерном пространстве, т. е. для $x = 1, 2, \ldots, P$ число точек $(x_1, x_2, \ldots, x_s)$, $x_i = \{\varphi(x+i)\}$, попадающих в произвольную часть единичного s-мерного куба, асимптотически равно $v \cdot P$, где v — объем указанной части куба.

Разобьем ребра единичного куба на q равных частей и соответственно весь куб на q^s малых кубиков с объемом $\frac{1}{q^s}$. Перенумеруем полученные кубики, считая номером кубика число

$$\nu = \delta_1(\nu) q^{s-1} + \delta_2(\nu) q^{s-2} + \ldots + \delta_s(\nu), \tag{1}$$

где $\frac{\delta_1(\nu)}{q}, \frac{\delta_2(\nu)}{q}, \ldots, \frac{\delta_s(\nu)}{q}$ координаты ближайшей к началу координат вершины кубика. Очевидно, при этом ν примет каждое из целых значений от 0 до $q^s - 1$, причем запись (1) будет записью числа ν по системе счисления с основанием q.

Из равномерности распределения системы функций $\varphi(x+1)$; $\varphi(x+2), \ldots, \varphi(x+s)$ следует, что для $x = 1, 2, \ldots, P$ число одновременного выполнения неравенств

$$\frac{\delta_i(\nu)}{q} \leq \{\varphi(x+i)\} \leq \frac{\delta_i(\nu)+1}{q} \qquad (i = 1, 2, \ldots, s) \tag{2}$$

(равное числу точек $(x_1, x_2, \ldots, x_s)$; $x_i = \{\varphi(x+i)\}$, попавших в кубик с номером ν), удовлетворяет соотношению

$$N_\nu = \frac{1}{q^s} P + o(P).$$

Неравенства (2) выполняются очевидно для тех, и только тех x, для которых

$$\delta_i(\nu) = [\{\varphi(x+i)\} \cdot q] \qquad (i = 1, 2, \ldots, s). \tag{3}$$

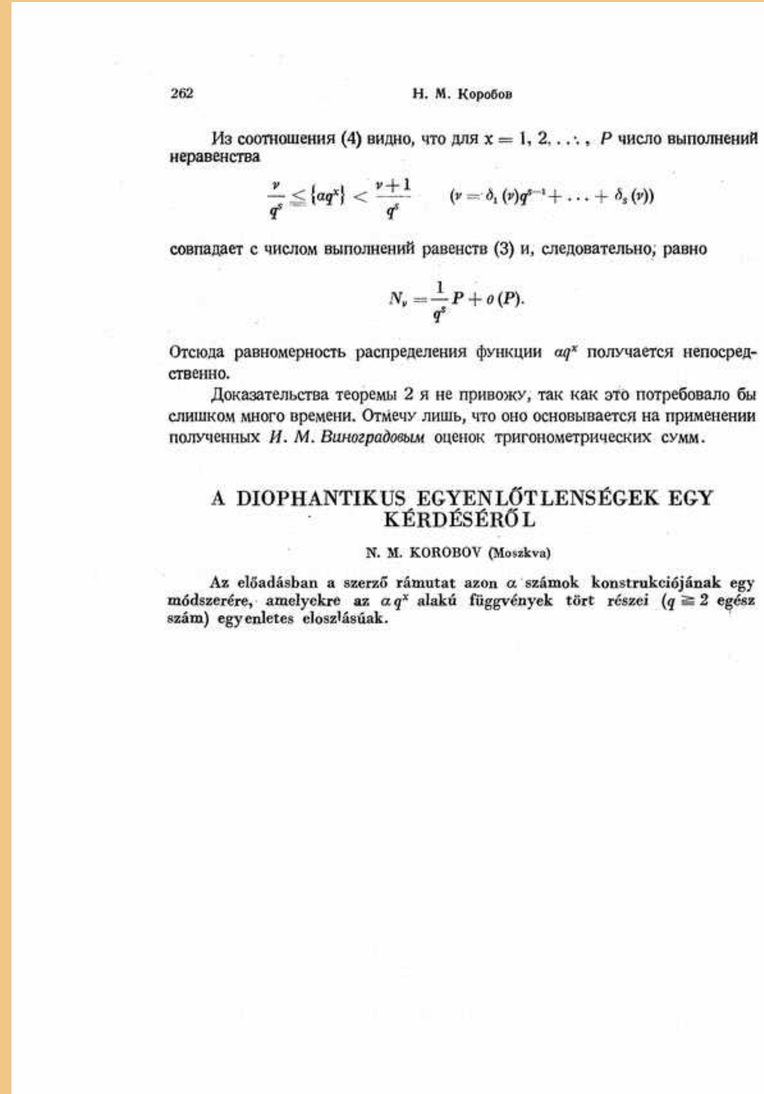
Из определения α следует, что

$$\{\alpha q^x\} = \frac{[\{\varphi(x+1)\} q]}{q} + \ldots + \frac{[\{\varphi(x+s)\} q]}{q^s} + \frac{1}{q_s} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{[\{\varphi(x+s+\nu)\} q]}{q^\nu};$$

$$\{\alpha q^x\} = \frac{[\{\varphi(x+1)\} q] q^{s-1} + \ldots + [\{\varphi(x+s)\} q]}{q^s} + \frac{\Theta}{q^s}, \ (0 < \Theta < 1). \tag{4}$$

В рамках исследования вопросов распределения дробных долей Н.М. Коробовым:

были установлены связи между вполне равномерным распределением и свойствами чисел, нормальных по Борелю



262 Н. М. Коробов

Из соотношения (4) видно, что для $x = 1, 2, \ldots, P$ число выполнений неравенства

$$\frac{\nu}{q^s} \leq \{\alpha q^x\} < \frac{\nu+1}{q^s} \qquad (\nu = \delta_1(\nu)q^{s-1} + \ldots + \delta_s(\nu))$$

совпадает с числом выполнений равенств (3) и, следовательно, равно

$$N_\nu = \frac{1}{q^s} P + o(P).$$

Отсюда равномерность распределения функции αq^x получается непосредственно.

Доказательства теоремы 2 я не привожу, так как это потребовало бы слишком много времени. Отмечу лишь, что оно основывается на применении полученных *И. М. Виноградовым* оценок тригонометрических сумм.

A DIOPHANTIKUS EGYENLŐTLENSÉGEK EGY KÉRDÉSÉRŐL

N. M. KOROBOV (Moszkva)

Az előadásban a szerző rámutat azon α számok konstrukciójának egy módszerére, amelyekre az αq^x alakú függvények tört részei ($q \geqq 2$ egész szám) egyenletes eloszlásúak.

In the context of Korobov's research into fractional distribution

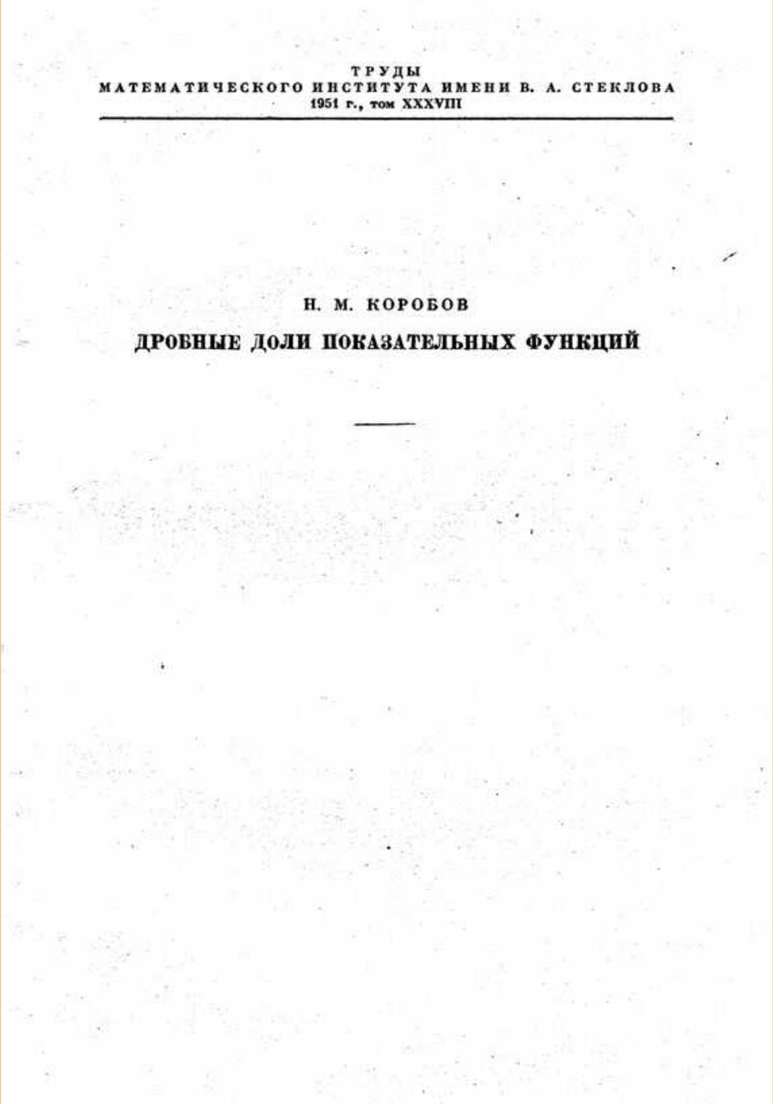
quite even distribution is allied to characteristics of borel normal numbers

В рамках исследования вопросов распределения дробных долей Н.М. Коробовым:

были установлены связи между вполне равномерным распределением и свойствами чисел, нормальных по Борелю

In the context of Korobov’s research into fractional distribution

quite even distribution is allied to characteristics of borel normal numbers



ТРУДЫ
МАТЕМАТИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА ИМЕНИ В. А. СТЕКЛОВА
1951 г., том XXXVIII

Н. М. КОРОБОВ

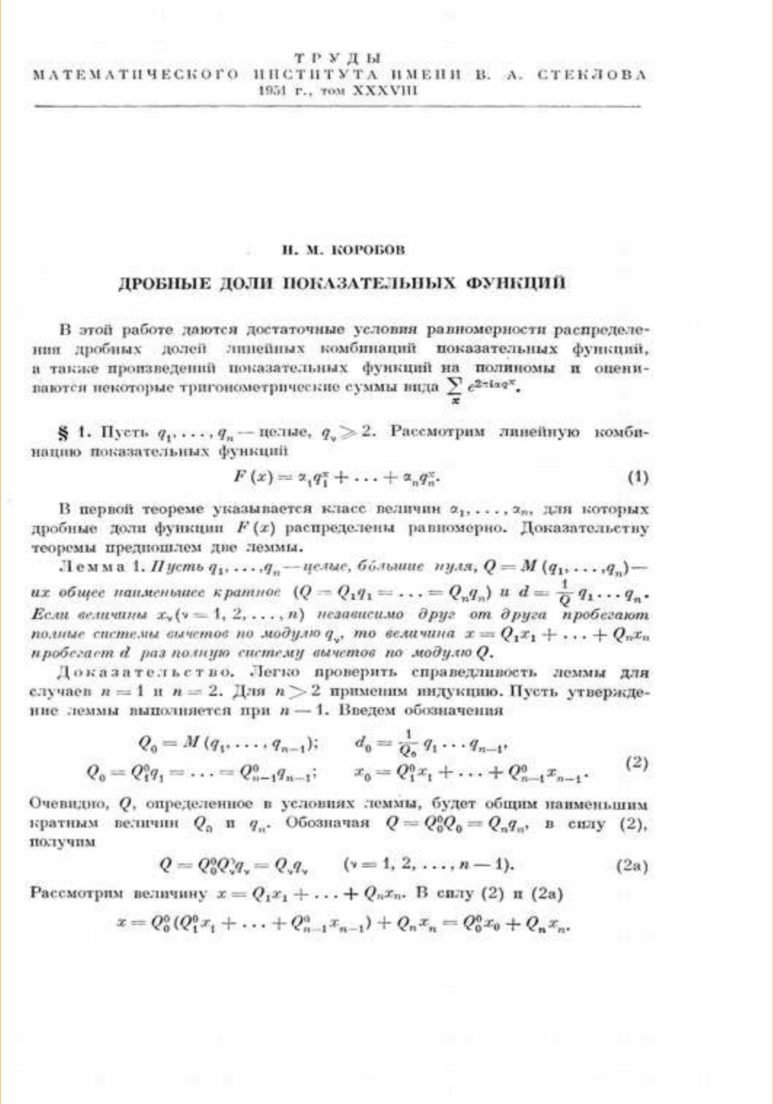
ДРОБНЫЕ ДОЛИ ПОКАЗАТЕЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

В рамках исследования вопросов распределения дробных долей Н.М. Коробовым:

были установлены связи между вполне равномерным распределением и свойствами чисел, нормальных по Борелю

In the context of Korobov's research into fractional distribution

quite even distribution is allied to characteristics of borel normal numbers



ТРУДЫ
МАТЕМАТИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА ИМЕНИ В. А. СТЕКЛОВА
1951 г., том XXXVIII

Н. М. КОРОБОВ

ДРОБНЫЕ ДОЛИ ПОКАЗАТЕЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

В этой работе даются достаточные условия равномерности распределения дробных долей линейных комбинаций показательных функций, а также произведений показательных функций на полиномы и оцениваются некоторые тригонометрические суммы вида $\sum_x e^{2\pi i \alpha q^x}$.

§ 1. Пусть $q_1, \ldots, q_n$ — целые, $q_\nu \geqslant 2$. Рассмотрим линейную комбинацию показательных функций

$$F(x) = \alpha_1 q_1^x + \ldots + \alpha_n q_n^x. \tag{1}$$

В первой теореме указывается класс величин $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, для которых дробные доли функции $F(x)$ распределены равномерно. Доказательству теоремы предпошлем две леммы.

Лемма 1. *Пусть $q_1, \ldots, q_n$ — целые, бóльшие нуля, $Q = M(q_1, \ldots, q_n)$ — их общее наименьшее кратное $(Q = Q_1 q_1 = \ldots = Q_n q_n)$ и $d = \frac{1}{Q} q_1 \ldots q_n$. Если величины x_ν $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$ независимо друг от друга пробегают полные системы вычетов по модулю q_ν, то величина $x = Q_1 x_1 + \ldots + Q_n x_n$ пробегает d раз полную систему вычетов по модулю Q.*

Доказательство. Легко проверить справедливость леммы для случаев $n = 1$ и $n = 2$. Для $n > 2$ применим индукцию. Пусть утверждение леммы выполняется при $n - 1$. Введем обозначения

$$\begin{aligned} Q_0 &= M(q_1, \ldots, q_{n-1}); \qquad d_0 = \frac{1}{Q_0} q_1 \ldots q_{n-1}, \\ Q_0 &= Q_1^0 q_1 = \ldots = Q_{n-1}^0 q_{n-1}; \qquad x_0 = Q_1^0 x_1 + \ldots + Q_{n-1}^0 x_{n-1}. \end{aligned} \tag{2}$$

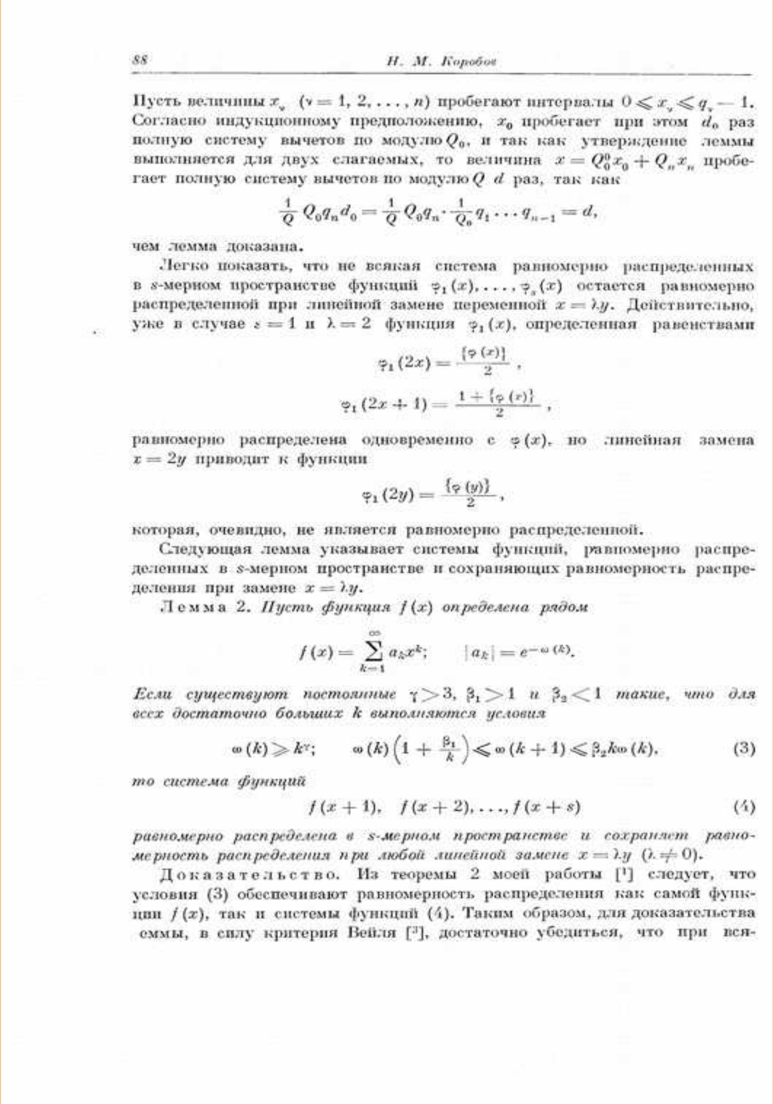
Очевидно, Q, определенное в условиях леммы, будет общим наименьшим кратным величин Q_0 и q_n. Обозначая $Q = Q_0^0 Q_0 = Q_n q_n$, в силу (2), получим

$$Q = Q_0^0 Q_\nu^0 q_\nu = Q_\nu q_\nu \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n - 1). \tag{2a}$$

Рассмотрим величину $x = Q_1 x_1 + \ldots + Q_n x_n$. В силу (2) и (2a)

$$x = Q_0^0 (Q_1^0 x_1 + \ldots + Q_{n-1}^0 x_{n-1}) + Q_n x_n = Q_0^0 x_0 + Q_n x_n.$$

В рамках исследования вопросов распределения дробных долей Н.М. Коробовым: ***были установлены связи между вполне равномерным распределением и свойствами чисел, нормальных по Борелю***



88 *Н. М. Коробов*

Пусть величины x_ν $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$ пробегают интервалы $0 \leqslant x_\nu \leqslant q_\nu - 1$. Согласно индукционному предположению, x_0 пробегает при этом d_0 раз полную систему вычетов по модулю Q_0, и так как утверждение леммы выполняется для двух слагаемых, то величина $x = Q_0^0 x_0 + Q_n x_n$ пробегает полную систему вычетов по модулю Q d раз, так как

$$\frac{1}{Q} Q_0 q_n d_0 = \frac{1}{Q} Q_0 q_n \cdot \frac{1}{Q_0} q_1 \ldots q_{n-1} = d,$$

чем лемма доказана.

Легко показать, что не всякая система равномерно распределенных в s-мерном пространстве функций $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_s(x)$ остается равномерно распределенной при линейной замене переменной $x = \lambda y$. Действительно, уже в случае $s = 1$ и $\lambda = 2$ функция $\varphi_1(x)$, определенная равенствами

$$\varphi_1(2x) = \frac{\{\varphi(x)\}}{2},$$

$$\varphi_1(2x+1) = \frac{1 + \{\varphi(x)\}}{2},$$

равномерно распределена одновременно с $\varphi(x)$, но линейная замена $x = 2y$ приводит к функции

$$\varphi_1(2y) = \frac{\{\varphi(y)\}}{2},$$

которая, очевидно, не является равномерно распределенной.

Следующая лемма указывает системы функций, равномерно распределенных в s-мерном пространстве и сохраняющих равномерность распределения при замене $x = \lambda y$.

Лемма 2. *Пусть функция $f(x)$ определена рядом*

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k; \qquad |a_k| = e^{-\omega(k)}.$$

Если существуют постоянные $\gamma > 3$, $\beta_1 > 1$ и $\beta_2 < 1$ такие, что для всех достаточно больших k выполняются условия

$$\omega(k) \geqslant k^\gamma; \qquad \omega(k)\left(1 + \frac{\beta_1}{k}\right) \leqslant \omega(k+1) \leqslant \beta_2 k \omega(k), \tag{3}$$

то система функций

$$f(x+1), \quad f(x+2), \ldots, f(x+s) \tag{4}$$

равномерно распределена в s-мерном пространстве и сохраняет равномерность распределения при любой линейной замене $x = \lambda y$ $(\lambda \neq 0)$.

Доказательство. Из теоремы 2 моей работы [1] следует, что условия (3) обеспечивают равномерность распределения как самой функции $f(x)$, так и системы функций (4). Таким образом, для доказательства емма, в силу критерия Вейля [2], достаточно убедиться, что при вся-

In the context of Korobov’s research into fractional distribution ***quite even distribution is allied to characteristics of borel normal numbers***

В рамках исследования вопросов распределения дробных долей Н.М. Коробовым:

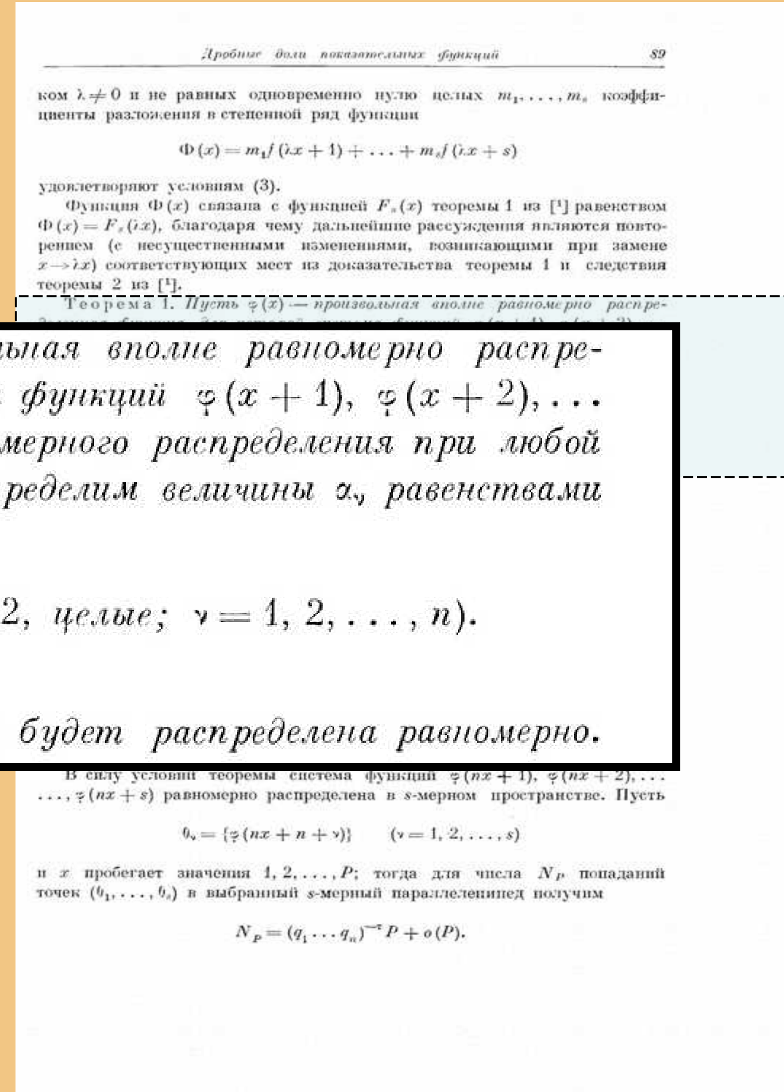
были установлены связи между вполне равномерным

но

In t

researc

quite even distribution is allied to characteristics of borel normal numbers



ком $\lambda \neq 0$ и не равных одновременно нулю целых $m_1, \ldots, m_s$ коэффициенты разложения в степенной ряд функции

$$\Phi(x) = m_1 f(\lambda x + 1) + \ldots + m_s f(\lambda x + s)$$

удовлетворяют условиям (3).

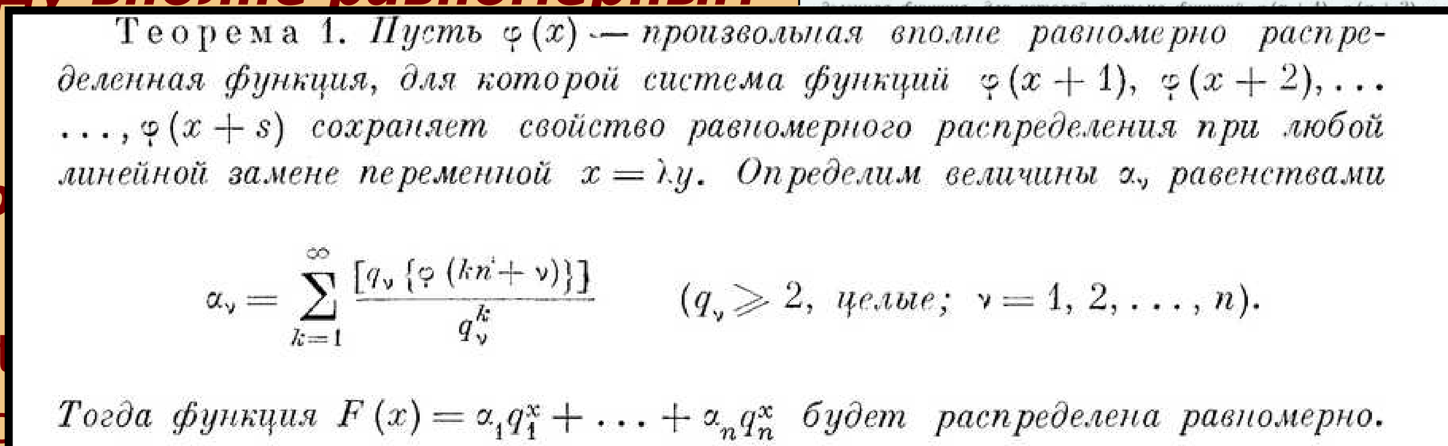
Функция $\Phi(x)$ связана с функцией $F_s(x)$ теоремы 1 из [1] равенством $\Phi(x) = F_s(\lambda x)$, благодаря чему дальнейшие рассуждения являются повторением (с несущественными изменениями, возникающими при замене $x \to \lambda x$) соответствующих мест из доказательства теоремы 1 и следствия теоремы 2 из [1].

В силу условий теоремы система функций $\varphi(nx+1), \varphi(nx+2), \ldots, \varphi(nx+s)$ равномерно распределена в s-мерном пространстве. Пусть

$$\theta_\nu = \{\varphi(nx + n + \nu)\} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, s)$$

и x пробегает значения $1, 2, \ldots, P$; тогда для числа N_P попаданий точек $(\theta_1, \ldots, \theta_s)$ в выбранный s-мерный параллелепипед получим

$$N_P = (q_1 \ldots q_n)^{-s} P + o(P).$$



Т е о р е м а 1. *Пусть $\varphi(x)$ — произвольная вполне равномерно распределенная функция, для которой система функций $\varphi(x+1), \varphi(x+2), \ldots, \varphi(x+s)$ сохраняет свойство равномерного распределения при любой линейной замене переменной $x = \lambda y$. Определим величины α_ν равенствами*

$$\alpha_\nu = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{[q_\nu \{\varphi(kn + \nu)\}]}{q_\nu^k} \qquad (q_\nu \geqslant 2, \text{ целые}; \ \nu = 1, 2, \ldots, n).$$

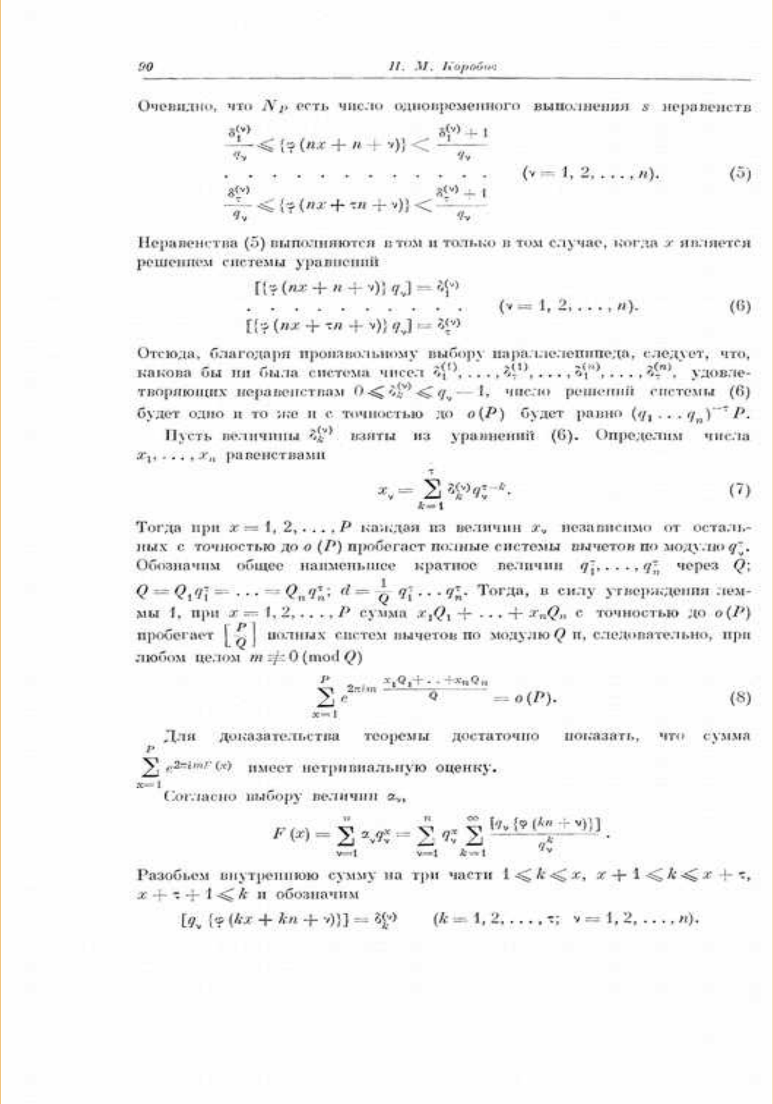
Тогда функция $F(x) = \alpha_1 q_1^x + \ldots + \alpha_n q_n^x$ будет распределена равномерно.

В рамках исследования вопросов распределения дробных долей Н.М. Коробовым:

были установлены связи между вполне равномерным распределением и свойствами чисел, нормальных по Борелю

In the context of Korobov's research into fractional distribution

quite even distribution is allied to characteristics of borel normal numbers



90 Н. М. Коробов

Очевидно, что N_P есть число одновременного выполнения s неравенств

$$\begin{array}{l} \frac{\delta_1^{(\nu)}}{q_\nu} \leqslant \{\varphi(nx+n+\nu)\} < \frac{\delta_1^{(\nu)}+1}{q_\nu} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{\delta_\tau^{(\nu)}}{q_\nu} \leqslant \{\varphi(nx+\tau n+\nu)\} < \frac{\delta_\tau^{(\nu)}+1}{q_\nu} \end{array} \quad (\nu = 1, 2, \ldots, n). \quad (5)$$

Неравенства (5) выполняются в том и только в том случае, когда x является решением системы уравнений

$$\begin{array}{l} [\{\varphi(nx+n+\nu)\} q_\nu] = \delta_1^{(\nu)} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ [\{\varphi(nx+\tau n+\nu)\} q_\nu] = \delta_\tau^{(\nu)} \end{array} \quad (\nu = 1, 2, \ldots, n). \quad (6)$$

Отсюда, благодаря произвольному выбору параллелепипеда, следует, что, какова бы ни была система чисел $\delta_1^{(1)}, \ldots, \delta_\tau^{(1)}, \ldots, \delta_1^{(n)}, \ldots, \delta_\tau^{(n)}$, удовлетворяющих неравенствам $0 \leqslant \delta_k^{(\nu)} \leqslant q_\nu - 1$, число решений системы (6) будет одно и то же и с точностью до $o(P)$ будет равно $(q_1 \ldots q_n)^{-\tau} P$.

Пусть величины $\delta_k^{(\nu)}$ взяты из уравнений (6). Определим числа $x_1, \ldots, x_n$ равенствами

$$x_\nu = \sum_{k=1}^{\tau} \delta_k^{(\nu)} q_\nu^{\tau-k}. \quad (7)$$

Тогда при $x = 1, 2, \ldots, P$ каждая из величин x_ν независимо от остальных с точностью до $o(P)$ пробегает полные системы вычетов по модулю q_ν^τ. Обозначим общее наименьшее кратное величин $q_1^\tau, \ldots, q_n^\tau$ через Q; $Q = Q_1 q_1^\tau = \ldots = Q_n q_n^\tau$; $d = \frac{1}{Q} q_1^\tau \ldots q_n^\tau$. Тогда, в силу утверждения леммы 1, при $x = 1, 2, \ldots, P$ сумма $x_1 Q_1 + \ldots + x_n Q_n$ с точностью до $o(P)$ пробегает $\left[\frac{P}{Q}\right]$ полных систем вычетов по модулю Q и, следовательно, при любом целом $m \not\equiv 0 \pmod{Q}$

$$\sum_{x=1}^{P} e^{2\pi i m \frac{x_1 Q_1 + \ldots + x_n Q_n}{Q}} = o(P). \quad (8)$$

Для доказательства теоремы достаточно показать, что сумма $\sum_{x=1}^{P} e^{2\pi i m F(x)}$ имеет нетривиальную оценку.

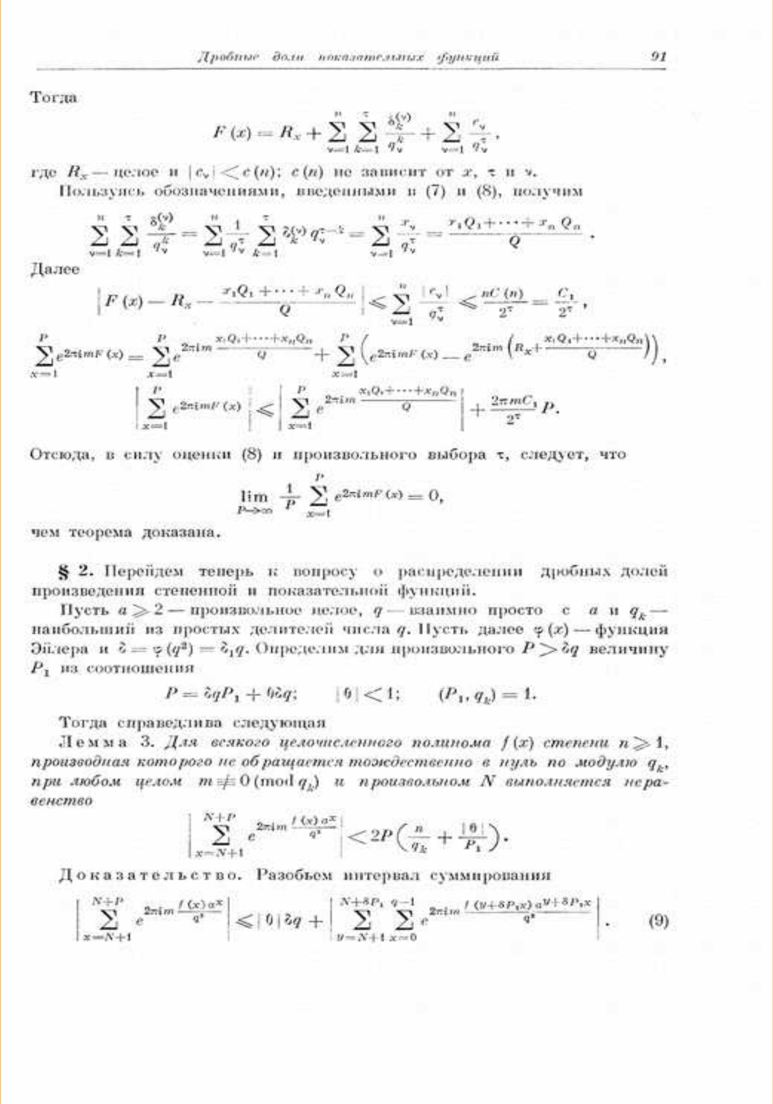
Согласно выбору величин α_ν,

$$F(x) = \sum_{\nu=1}^{n} \alpha_\nu q_\nu^x = \sum_{\nu=1}^{n} q_\nu^x \sum_{k=1}^{\infty} \frac{[q_\nu \{\varphi(kn+\nu)\}]}{q_\nu^k}.$$

Разобьем внутреннюю сумму на три части $1 \leqslant k \leqslant x$, $x+1 \leqslant k \leqslant x+\tau$, $x+\tau+1 \leqslant k$ и обозначим

$$[q_\nu \{\varphi(kx+kn+\nu)\}] = \delta_k^{(\nu)} \quad (k = 1, 2, \ldots, \tau;\ \nu = 1, 2, \ldots, n).$$

В рамках исследования вопросов распределения дробных долей Н.М. Коробовым: ***были установлены связи между вполне равномерным распределением и свойствами чисел, нормальных по Борелю***



Тогда

$$F(x) = R_x + \sum_{\nu=1}^{n} \sum_{k=1}^{\tau} \frac{\delta_k^{(\nu)}}{q_\nu^k} + \sum_{\nu=1}^{n} \frac{c_\nu}{q_\nu^\tau},$$

где R_x — целое и $|c_\nu| < c(n)$; $c(n)$ не зависит от x, τ и ν.

Пользуясь обозначениями, введенными в (7) и (8), получим

$$\sum_{\nu=1}^{n} \sum_{k=1}^{\tau} \frac{\delta_k^{(\nu)}}{q_\nu^k} = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{q_\nu^\tau} \sum_{k=1}^{\tau} \delta_k^{(\nu)} q_\nu^{\tau-k} = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{x_\nu}{q_\nu^\tau} = \frac{x_1 Q_1 + \cdots + x_n Q_n}{Q}.$$

Далее

$$\left| F(x) - R_x - \frac{x_1 Q_1 + \cdots + x_n Q_n}{Q} \right| \leqslant \sum_{\nu=1}^{n} \frac{|c_\nu|}{q_\nu^\tau} \leqslant \frac{nC(n)}{2^\tau} = \frac{C_1}{2^\tau},$$

$$\sum_{x=1}^{P} e^{2\pi i m F(x)} = \sum_{x=1}^{P} e^{2\pi i m \frac{x_1 Q_1 + \cdots + x_n Q_n}{Q}} + \sum_{x=1}^{P} \left(e^{2\pi i m F(x)} - e^{2\pi i m \left(R_x + \frac{x_1 Q_1 + \cdots + x_n Q_n}{Q} \right)} \right),$$

$$\left| \sum_{x=1}^{P} e^{2\pi i m F(x)} \right| \leqslant \left| \sum_{x=1}^{P} e^{2\pi i m \frac{x_1 Q_1 + \cdots + x_n Q_n}{Q}} \right| + \frac{2\pi m C_1}{2^\tau} P.$$

Отсюда, в силу оценки (8) и произвольного выбора τ, следует, что

$$\lim_{P \to \infty} \frac{1}{P} \sum_{x=1}^{P} e^{2\pi i m F(x)} = 0,$$

чем теорема доказана.

§ 2. Перейдем теперь к вопросу о распределении дробных долей произведения степенной и показательной функций.

Пусть $a \geqslant 2$ — произвольное целое, q — взаимно просто с a и q_k — наибольший из простых делителей числа q. Пусть далее $\varphi(x)$ — функция Эйлера и $\delta = \varphi(q^2) = \delta_1 q$. Определим для произвольного $P > \delta q$ величину P_1 из соотношения

$$P = \delta q P_1 + \theta \delta q; \qquad |\theta| < 1; \qquad (P_1, q_k) = 1.$$

Тогда справедлива следующая

Лемма 3. *Для всякого целочисленного полинома $f(x)$ степени $n \geqslant 1$, производная которого не обращается тождественно в нуль по модулю q_k, при любом целом $m \not\equiv 0 \pmod{q_k}$ и произвольном N выполняется неравенство*

$$\left| \sum_{x=N+1}^{N+P} e^{2\pi i m \frac{f(x) a^x}{q^2}} \right| < 2P \left(\frac{n}{q_k} + \frac{|\theta|}{P_1} \right).$$

Доказательство. Разобьем интервал суммирования

$$\left| \sum_{x=N+1}^{N+P} e^{2\pi i m \frac{f(x) a^x}{q^2}} \right| \leqslant |\theta| \delta q + \left| \sum_{y=N+1}^{N+\delta P_1} \sum_{x=0}^{q-1} e^{2\pi i m \frac{f(y+\delta P_1 x) a^{y+\delta P_1 x}}{q^2}} \right|. \qquad (9)$$

In the context of Korobov’s research into fractional distribution ***quite even distribution is allied to characteristics of borel normal numbers***

В рамках исследования вопросов распределения дробных долей Н.М. Коробовым:

были установлены связи между вполне равномерным

но

In t

research into fractional distribution

quite even distribution is allied to characteristics of borel normal numbers

Так как $\delta = \varphi(q^2) = \delta_1 q$, то выполняются сравнения

$$a^{y+\delta P_1 x} \equiv a^y \pmod{q^2}; \qquad f(y + \delta P_1 x) \equiv f(y) + f'(y)\,\delta_1 q\, P_1 x \pmod{q^2}.$$

Следовательно,

$$\left|\sum_{y=N+1}^{N+\delta P_1} \sum_{x=0}^{q-1} e^{2\pi i m \frac{f(y+\delta P_1 x)\, a^{y+\delta P_1 x}}{q^2}}\right| = \left|\sum_{y=N+1}^{N+\delta P_1} e^{2\pi i m \frac{f(y) a^y}{q^2}} \sum_{x=0}^{q-1} e^{2\pi i m \delta_1 P_1 \frac{a^y f'(y)\, x}{q}}\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{y=N+1}^{N+\delta P_1} \left|\sum_{x=0}^{q-1} e^{2\pi i m \delta_1 P_1 \frac{f'(y)\, x}{q}}\right| \leqslant (n-1)\frac{\delta P_1 q}{q_k} < \frac{2nP}{q_k}.$$

Подставляя эту оценку в (9), получим утверждение леммы

Теорема 2. *Пусть $a \geqslant 2$ — целое и $f(x)$ — полином степени $n \geqslant 1$ с целыми коэффициентами. Определим α следующим равенством:*

$$\alpha = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{q_k^2\, a^{n_k}}.$$

Тогда для всякой последовательности возрастающих простых $q_1, q_2, \ldots$ и всякой монотонной функции $\varphi(k)$ (определяющей достаточно быстрый рост чисел n_k) дробные доли функции $\alpha f(x)\, a^x$ распределены равномерно.

Определим k из условия $\tau_{k-1} \leqslant P < \tau_k$; положим $P = \tau_{k-1} + r\lambda_k + r_1$ $(0 \leqslant r < \varphi(k),\ 0 \leqslant r_1 < \lambda_k)$ и разобьем интервал суммирования на части

$$S = \sum_{x=1}^{\tau_{k-2}} + \sum_{x=\tau_{k-2}+1}^{\tau_{k-1}} + \sum_{x=\tau_{k-1}+1}^{\tau_{k-1}+r\lambda_k} + \sum_{x>\tau_{k-1}+r\lambda_k},$$

$$|S| \leqslant \tau_{k-2} + r_1 + \left|\sum_{\tau_{k-2}+1}^{\tau_{k-1}}\right| + \left|\sum_{\tau_{k-1}+1}^{\tau_{k-1}+r\lambda_k}\right|. \tag{10}$$

В рамках исследования вопросов распределения дробных долей Н.М. Коробовым: ***были установлены связи между вполне равномерным распределением и свойствами чисел, нормальных по Борелю***

In the context of Korobov's research into fractional distribution ***quite even distribution is allied to characteristics of borel normal numbers***

Для оценки $|S|$ достаточно найти оценку суммы

$$S_k(r) = \sum_{x=\tau_{k-1}+1}^{\tau_{k-1}+r\lambda_k} e^{2\pi i m\alpha f(x) a^x} \qquad (0 \leqslant r \leqslant \varphi(k)) \tag{11}$$

(так как суммы в правой части (10) имеют вид $S_k(r)$ и $S_{k-1}[\varphi(k-1)]$). Пользуясь определением α и n_{k+1}, получим для x из интервала суммирования $S_k(r)$

$$\alpha = \sum_{\nu=1}^{k} \frac{1}{q_\nu^2 a^{n_\nu}} + \sum_{\nu=k+1}^{\infty} \frac{1}{q_\nu^2 a^{n_\nu}} = \frac{m_k}{\mu_k^2 a^{n_k}} + \frac{\theta_1}{q_{k+1}^2 a^{n_{k+1}}}, \qquad 1 < \theta_1 < 2,$$

$$\left| m\alpha f(x) a^x - \frac{m m_k f(x) a^{x-n_k}}{\mu_k^2} \right| < C \frac{|f(\tau_k)|}{q_{k+1}^2} a^{\tau_k - n_{k+1}} < C_1 \frac{1}{q_{k+1}^2}. \tag{12}$$

Здесь и всюду дальше величины $C, C_1, \cdots$ — некоторые положительные постоянные; для m_k из очевидного соотношения

$$m_k = m_{k-1} a^{n_k - n_{k-1}} q_k^2 + (q_1 \cdots q_{k-1})^2$$

получаем $(m_k q_k) = 1$, причем q_k — наибольший из простых делителей μ_k.

Из (12) следует, что

$$|S_k(r)| = \left| \sum_{x=\tau_{k-1}+1}^{\tau_{k-1}+r\lambda_k} e^{2\pi i m m_k \frac{f(x) a^x}{\mu_k^2}} + \sum_{x=\tau_{k-1}+1}^{\tau_{k-1}+r\lambda_k} e^{2\pi i m\alpha f(x) a^x} - \right.$$

$$\left. - e^{2\pi i m m_k \frac{f(x) a^x}{\mu_k^2}} \right| \leqslant \left| \sum_{x=\tau_{k-1}+1}^{\tau_{k-1}+r\lambda_k} e^{2\pi i m m_k \frac{f(x) a^x}{\mu_k^2}} \right| + C_2 \frac{r\lambda_k}{q_{k+1}^2}. \tag{13}$$

Выберем t из условия

$$(t-1)\lambda_k \leqslant [\lg_a |f(\tau_{k-1})|] < t\lambda_k.$$

Если $r < t$, применим к $S_k(r)$ (11) тривиальную оценку

$$|S_k(r)| \leqslant r\lambda_k \leqslant [\lg_a |f(\tau_{k-1})|] < C_3 \ln \tau_{k-1}.$$

Если $r \geqslant t$, разобьем в правой части (13) интервал суммирования:

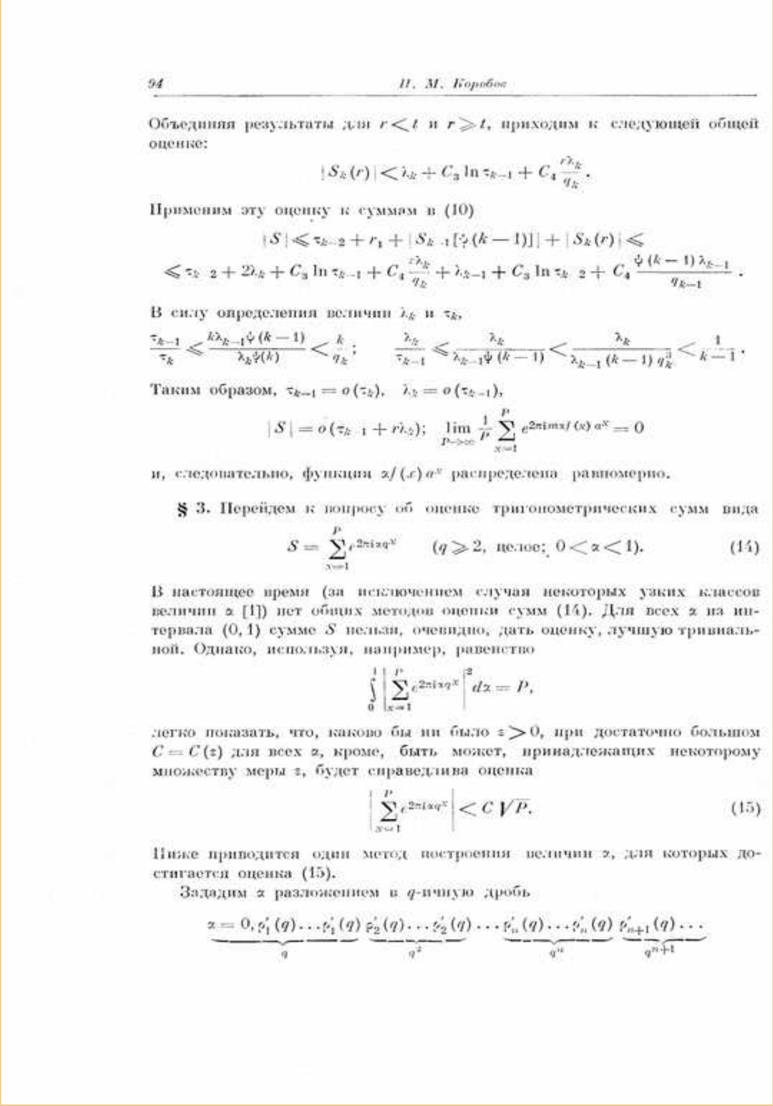
$$|S_k(r)| < \left| \sum_{\tau_{k-1}+1}^{\tau_{k-1}+t\lambda_k} \right| + \left| \sum_{\tau_{k-1}+t\lambda_k+1}^{\tau_{k-1}+r\lambda_k} \right| + C_2 \frac{r\lambda_k}{q_{k+1}^2}.$$

Оценивая первую из сумм справа числом слагаемых и применяя ко второй лемму 3 (что возможно при достаточно большом q_k) для всех k, бо́льших некоторого k_0, получим

$$|S_k(r)| < t\lambda_k + \frac{2n(r-t)\lambda_k}{q_k} + C_2 \frac{r\lambda_k}{q_{k+1}^2} \qquad (\theta = 0).$$

В рамках исследования вопросов распределения дробных долей Н.М. Коробовым: ***были установлены связи между вполне равномерным распределением и свойствами чисел, нормальных по Борелю***

In the context of Korobov’s research into fractional distribution ***quite even distribution is allied to characteristics of borel normal numbers***



94 Н. М. Коробов

Объединяя результаты для $r < t$ и $r \geqslant t$, приходим к следующей общей оценке:

$$|S_k(r)| < \lambda_k + C_3 \ln \tau_{k-1} + C_4 \frac{r\lambda_k}{q_k}.$$

Применим эту оценку к суммам в (10)

$$|S| \leqslant \tau_{k-2} + r_1 + |S_{k-1}[\psi(k-1)]| + |S_k(r)| \leqslant$$
$$\leqslant \tau_{k-2} + 2\lambda_k + C_3 \ln \tau_{k-1} + C_4 \frac{r\lambda_k}{q_k} + \lambda_{k-1} + C_3 \ln \tau_{k-2} + C_4 \frac{\psi(k-1)\lambda_{k-1}}{q_{k-1}}.$$

В силу определения величин λ_k и τ_k,

$$\frac{\tau_{k-1}}{\tau_k} \leqslant \frac{k\lambda_{k-1}\psi(k-1)}{\lambda_k\psi(k)} < \frac{k}{q_k}; \qquad \frac{\lambda_k}{\tau_{k-1}} \leqslant \frac{\lambda_k}{\lambda_{k-1}\psi(k-1)} < \frac{\lambda_k}{\lambda_{k-1}(k-1)q_k^3} < \frac{1}{k-1}.$$

Таким образом, $\tau_{k-1} = o(\tau_k)$, $\lambda_k = o(\tau_{k-1})$,

$$|S| = o(\tau_{k-1} + r\lambda_k); \quad \lim_{P\to\infty} \frac{1}{P} \sum_{x=1}^{P} e^{2\pi i m x f(x) a^x} = 0$$

и, следовательно, функция $\alpha f(x) a^x$ распределена равномерно.

§ 3. Перейдем к вопросу об оценке тригонометрических сумм вида

$$S = \sum_{x=1}^{P} e^{2\pi i \alpha q^x} \qquad (q \geqslant 2, \text{ целое}; \ 0 < \alpha < 1). \tag{14}$$

В настоящее время (за исключением случая некоторых узких классов величин α [1]) нет общих методов оценки сумм (14). Для всех α из интервала $(0, 1)$ сумме S нельзя, очевидно, дать оценку, лучшую тривиальной. Однако, используя, например, равенство

$$\int_0^1 \left| \sum_{x=1}^{P} e^{2\pi i \alpha q^x} \right|^2 d\alpha = P,$$

легко показать, что, каково бы ни было $\varepsilon > 0$, при достаточно большом $C = C(\varepsilon)$ для всех α, кроме, быть может, принадлежащих некоторому множеству меры ε, будет справедлива оценка

$$\left| \sum_{x=1}^{P} e^{2\pi i \alpha q^x} \right| < C\sqrt{P}. \tag{15}$$

Ниже приводится один метод построения величин α, для которых достигается оценка (15).

Зададим α разложением в q-ичную дробь

$$\alpha = 0, \underbrace{\varphi_1'(q)\ldots\varphi_1'(q)}_{q} \underbrace{\varphi_2'(q)\ldots\varphi_2'(q)}_{q^2} \ldots \underbrace{\varphi_n'(q)\ldots\varphi_n'(q)}_{q^n} \underbrace{\varphi_{n+1}'(q)\ldots}_{q^{n+1}}$$

В рамках исследования вопросов распределения дробных долей Н.М. Коробовым: ***были установлены связи между вполне равномерным распределением и***

но

Теорема 3. *При любом выборе систем $\varrho'_n(q)$ для всякого α, определенного согласно* (16), *справедлива оценка тригонометрической суммы*

$$\left|\sum_{x=1}^{P} e^{2\pi i\alpha q^x}\right| < (4\pi+1)\, q\sqrt{P}.$$

In the context of Korobov's research into fractional distribution ***quite even distribution is allied to characteristics of borel normal numbers***

Здесь $\varrho'_n(q)$ — группы знаков, получающиеся из нормальных периодических систем $\varrho_n(q)$ отбрасыванием $n-1$ последних знаков [1] и [2]. Системы $\varrho'_n(q)$ состоят из q^n знаков, каждый из которых в записи (16) понимается как очередной знак q-ичного разложения α.

Теорема 3. *При любом выборе систем $\varrho'_n(q)$ для всякого α, определенного согласно* (16), *справедлива оценка тригонометрической суммы*

$$\left|\sum_{x=1}^{P} e^{2\pi i\alpha q^x}\right| < (4\pi+1)\, q\sqrt{P}.$$

Доказательство. Обозначим через T_n число знаков в разложении (16) до первого из $\varrho'_{n+1}(q)$. Очевидно

$$T_n = \sum_{\nu=1}^{n} q^\nu q^\nu = \frac{q^2}{q^2-1}\,(q^{2n}-1).$$

$$|S| \leqslant \sum_{\nu=1} \left|\sum_{x=T_{\nu-1}} e^{2\pi i\alpha q^x}\right| + \left|\sum_{x=T_k} e^{2\pi i\alpha q^x}\right| + q^{k+1}.$$

Выпишем в (16) каждый знак q-ичного разложения

$$\alpha = 0,\delta_1\delta_2\ldots\delta_x\delta_{x+1}\ldots\delta_{x+\nu}\delta_{x+\nu+1}\ldots \qquad 0 \leqslant \delta_x \leqslant q-1,$$

$$\{\alpha q^x\} = 0,\delta_{x+1}\ldots\delta_{x+\nu} + \frac{0,\delta_{x+\nu+1}\ldots}{q^\nu}\ldots, \quad |\{\alpha q^x\} - 0,\delta_{x+1}\ldots\delta_{x+\nu}| < \frac{1}{q^\nu}.$$

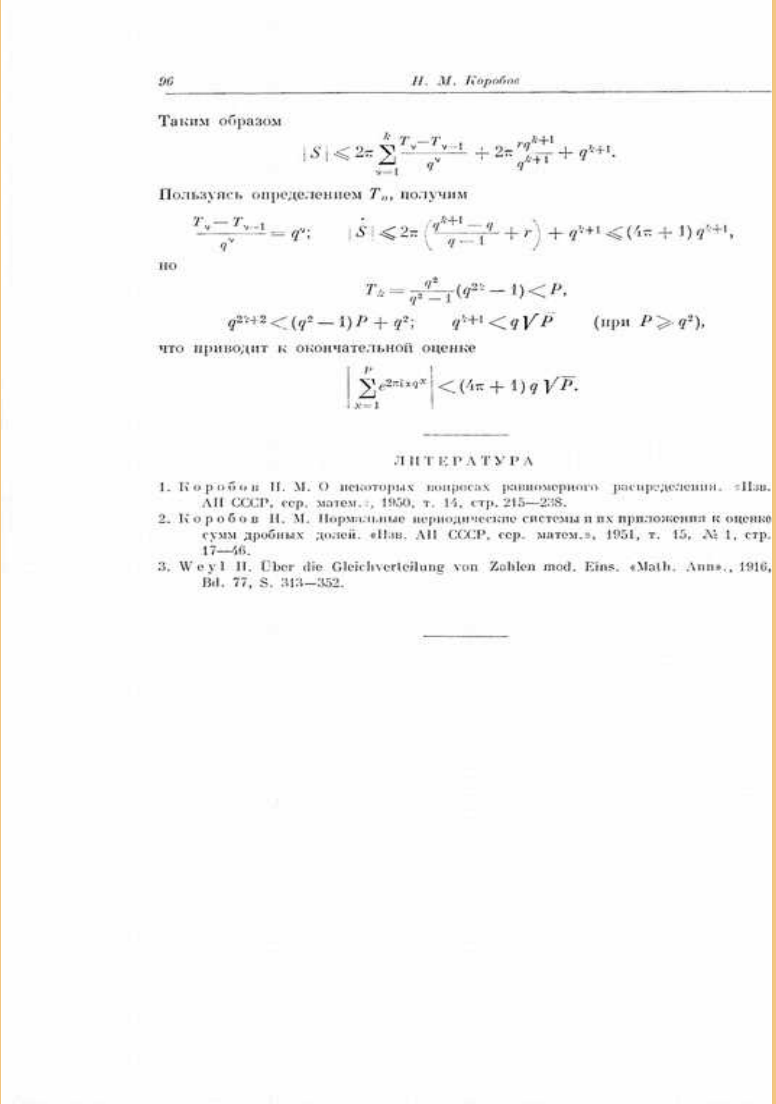
Отсюда следует, что

$$\left|\sum_{x=T_{\nu-1}}^{T_\nu-1} e^{2\pi i\alpha q^x}\right| \leqslant \left|\sum_{x=T_{\nu-1}}^{T_\nu-1} e^{2\pi i\cdot 0,\delta_{x+1}\ldots\delta_{x+\nu}}\right| + 2\pi\frac{T_\nu - T_{\nu-1}}{q^\nu}.$$

В силу основного свойства нормальных периодических систем сумма в правой части неравенства обращается в нуль для всех $\nu \geqslant 1$.

В рамках исследования вопросов распределения дробных долей Н.М. Коробовым: ***были установлены связи между вполне равномерным распределением и свойствами чисел, нормальных по Борелю***

In the context of Korobov's research into fractional distribution ***quite even distribution is allied to characteristics of borel normal numbers***



Таким образом

$$|S| \leqslant 2\pi \sum_{\nu=1}^{k} \frac{T_\nu - T_{\nu-1}}{q^\nu} + 2\pi \frac{rq^{k+1}}{q^{k+1}} + q^{k+1}.$$

Пользуясь определением T_n, получим

$$\frac{T_\nu - T_{\nu-1}}{q^\nu} = q^\nu; \qquad |S| \leqslant 2\pi \left(\frac{q^{k+1}-q}{q-1} + r\right) + q^{k+1} \leqslant (4\pi+1)\, q^{k+1},$$

но

$$T_k = \frac{q^2}{q^2-1}(q^{2k}-1) < P,$$

$$q^{2k+2} < (q^2-1)P + q^2; \qquad q^{k+1} < q\sqrt{P} \qquad (\text{при } P \geqslant q^2),$$

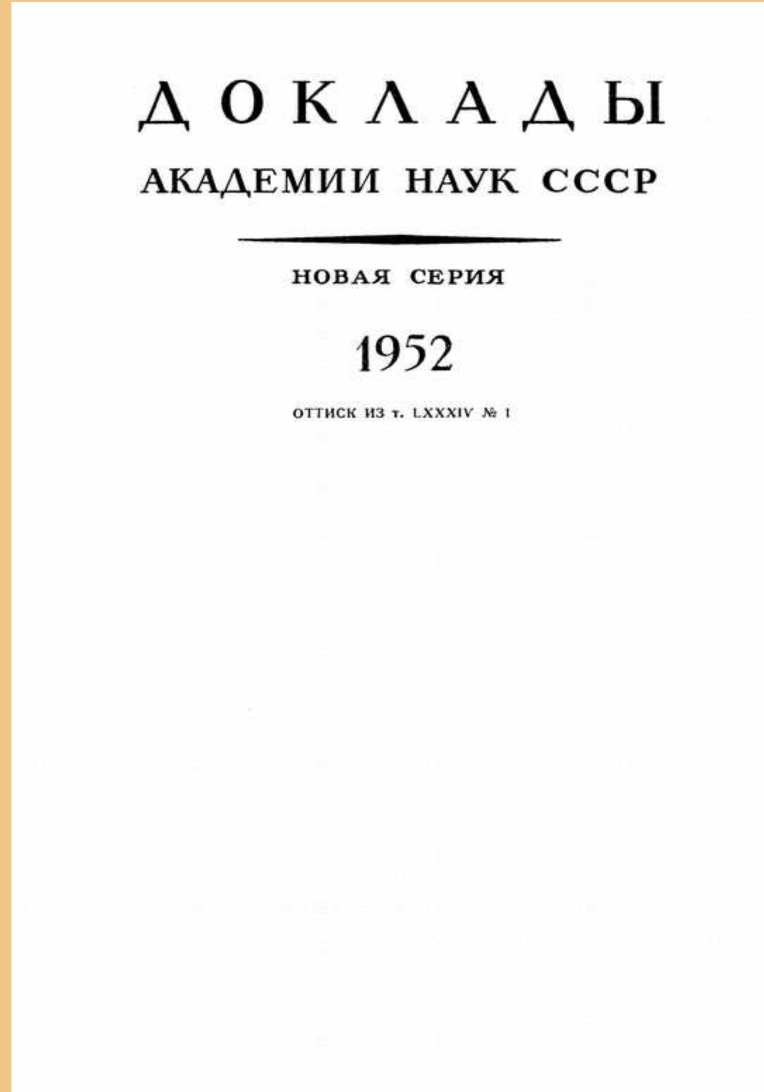
что приводит к окончательной оценке

$$\left|\sum_{x=1}^{P} e^{2\pi i \alpha q^x}\right| < (4\pi+1)\, q\sqrt{P}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Коробов Н. М. О некоторых вопросах равномерного распределения. «Изв. АН СССР, сер. матем.», 1950, т. 14, стр. 215—238.
2. Коробов Н. М. Нормальные периодические системы и их приложения к оценке сумм дробных долей. «Изв. АН СССР, сер. матем.», 1951, т. 15, № 1, стр. 17—46.
3. Weyl H. Über die Gleichverteilung von Zahlen mod. Eins. «Math. Ann.», 1916, Bd. 77, S. 313—352.

В рамках исследования вопросов распределения дробных долей Н.М. Коробовым: ***были установлены связи между вполне равномерным распределением и свойствами чисел, нормальных по Борелю***



ДОКЛАДЫ

АКАДЕМИИ НАУК СССР

НОВАЯ СЕРИЯ

1952

ОТТИСК ИЗ т. LXXXIV № 1

In the context of Korobov's research into fractional distribution ***quite even distribution is allied to characteristics of borel normal numbers***

В рамках исследования вопросов распределения дробных долей Н.М. Коробовым:

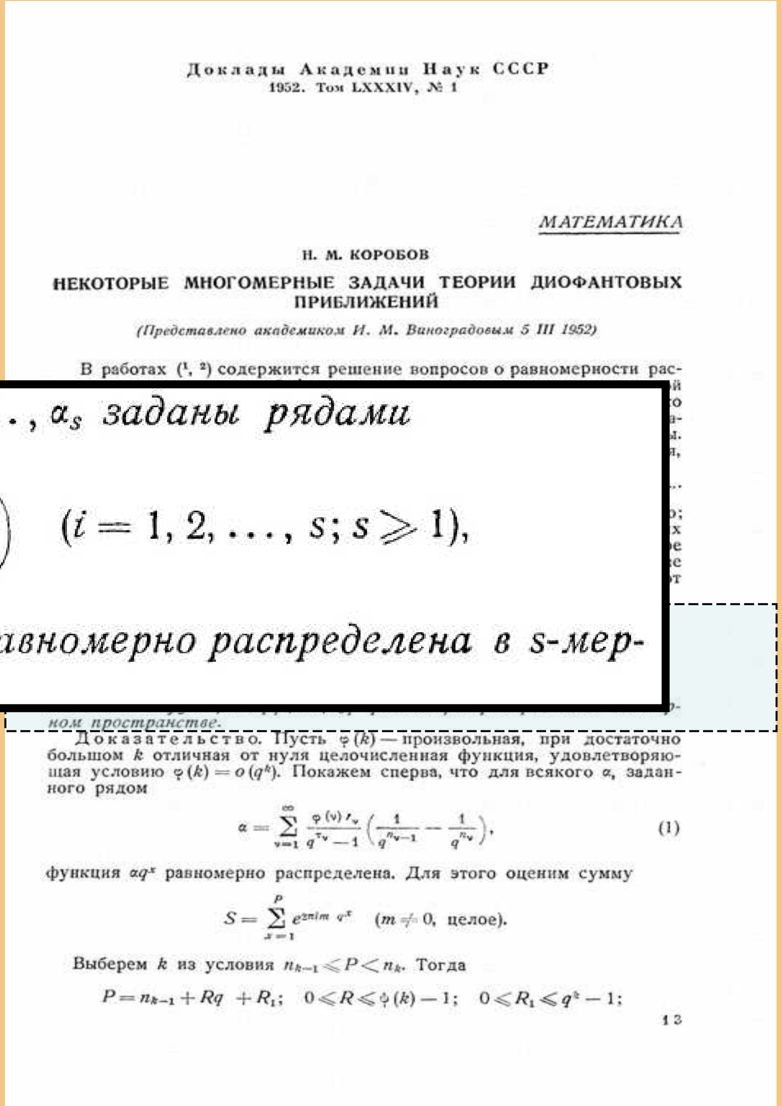
были установлены связи между вполне равномерным распределением и

но

In t

research into fractional distribution

quite even distribution is allied to characteristics of borel normal numbers



Доклады Академии Наук СССР
1952. Том LXXXIV, № 1

МАТЕМАТИКА

Н. М. КОРОБОВ

НЕКОТОРЫЕ МНОГОМЕРНЫЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ ДИОФАНТОВЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ

(Представлено академиком И. М. Виноградовым 5 III 1952)

В работах ([1], [2]) содержится решение вопросов о равномерности рас-

ном пространстве.

Доказательство. Пусть $\varphi(k)$ — произвольная, при достаточно большом k отличная от нуля целочисленная функция, удовлетворяющая условию $\varphi(k) = o(q^k)$. Покажем сперва, что для всякого α, заданного рядом

$$\alpha = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\varphi(\nu) r_\nu}{q^{\tau_\nu} - 1} \left(\frac{1}{q^{n_{\nu-1}}} - \frac{1}{q^{n_\nu}} \right), \qquad (1)$$

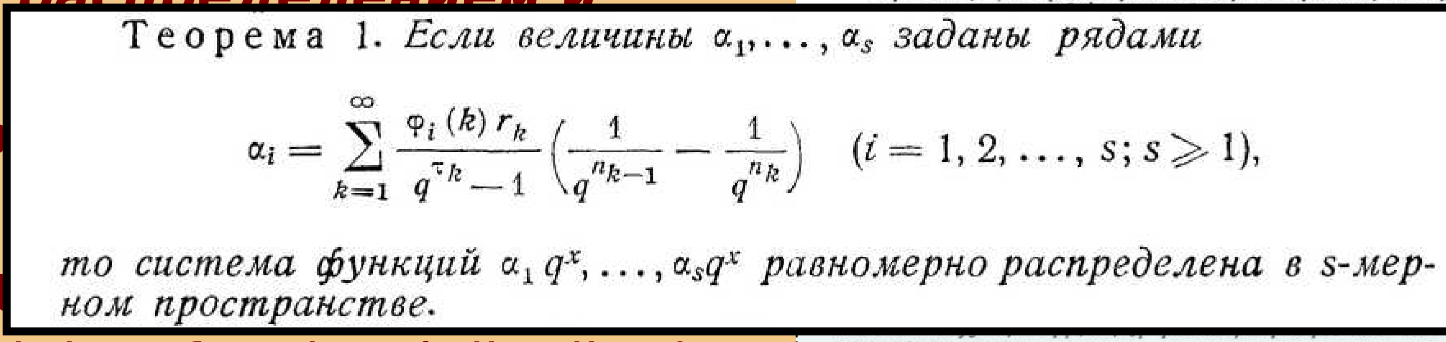
функция αq^x равномерно распределена. Для этого оценим сумму

$$S = \sum_{x=1}^{P} e^{2\pi i m q^x} \quad (m \neq 0, \text{ целое}).$$

Выберем k из условия $n_{k-1} \leqslant P < n_k$. Тогда

$$P = n_{k-1} + Rq + R_1; \quad 0 \leqslant R \leqslant \psi(k) - 1; \quad 0 \leqslant R_1 \leqslant q^k - 1;$$

13



Теорема 1. *Если величины $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ заданы рядами*

$$\alpha_i = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi_i(k) r_k}{q^{\tau_k} - 1} \left(\frac{1}{q^{n_{k-1}}} - \frac{1}{q^{n_k}} \right) \quad (i = 1, 2, \ldots, s; s \geqslant 1),$$

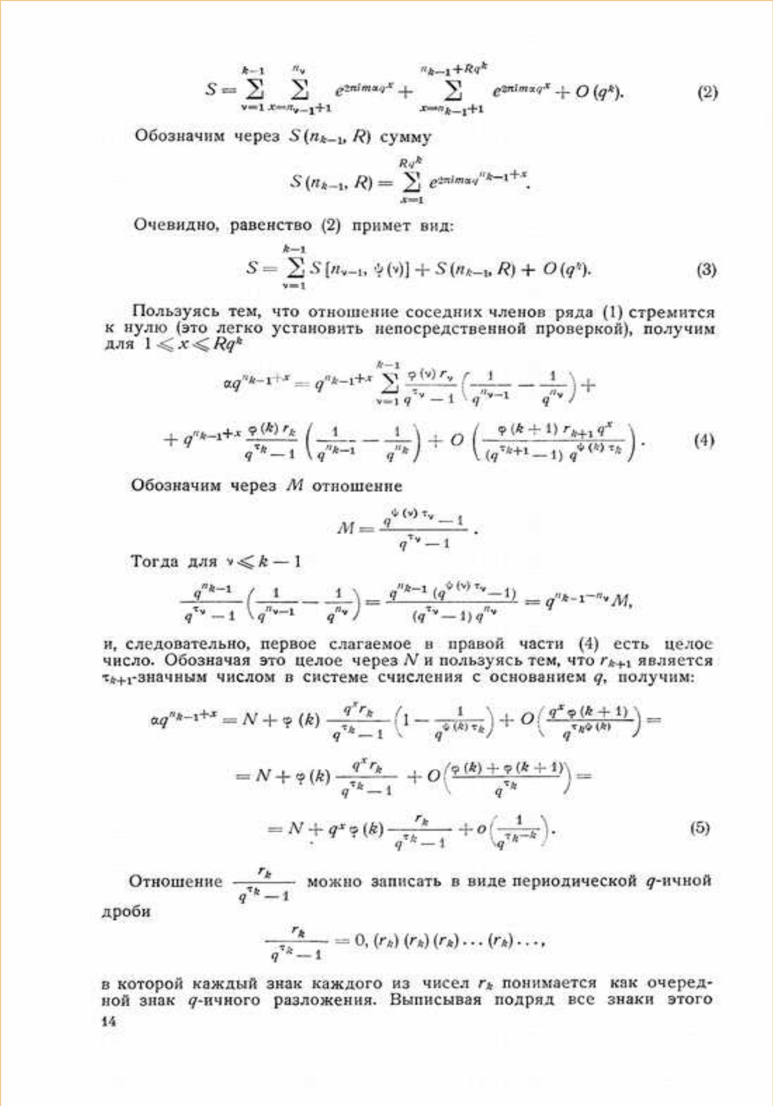
то система функций $\alpha_1 q^x, \ldots, \alpha_s q^x$ равномерно распределена в s-мерном пространстве.

В рамках исследования вопросов распределения дробных долей Н.М. Коробовым:

были установлены связи между вполне равномерным распределением и свойствами чисел, нормальных по Борелю

In the context of Korobov’s research into fractional distribution

quite even distribution is allied to characteristics of borel normal numbers



$$S=\sum_{\nu=1}^{k-1}\sum_{x=n_{\nu-1}+1}^{n_\nu} e^{2\pi i m\alpha q^x}+\sum_{x=n_{k-1}+1}^{n_{k-1}+Rq^k} e^{2\pi i m\alpha q^x}+O(q^k). \qquad (2)$$

Обозначим через $S(n_{k-1}, R)$ сумму

$$S(n_{k-1}, R)=\sum_{x=1}^{Rq^k} e^{2\pi i m\alpha q^{n_{k-1}+x}}.$$

Очевидно, равенство (2) примет вид:

$$S=\sum_{\nu=1}^{k-1} S[n_{\nu-1}, \psi(\nu)]+S(n_{k-1}, R)+O(q^k). \qquad (3)$$

Пользуясь тем, что отношение соседних членов ряда (1) стремится к нулю (это легко установить непосредственной проверкой), получим для $1\leqslant x\leqslant Rq^k$

$$\alpha q^{n_{k-1}+x}=q^{n_{k-1}+x}\sum_{\nu=1}^{k-1}\frac{\varphi(\nu)\, r_\nu}{q^{\tau_\nu}-1}\left(\frac{1}{q^{n_{\nu-1}}}-\frac{1}{q^{n_\nu}}\right)+$$

$$+q^{n_{k-1}+x}\frac{\varphi(k)\, r_k}{q^{\tau_k}-1}\left(\frac{1}{q^{n_{k-1}}}-\frac{1}{q^{n_k}}\right)+O\left(\frac{\varphi(k+1)\, r_{k+1}\, q^x}{(q^{\tau_{k+1}}-1)\, q^{\psi(k)\tau_k}}\right). \qquad (4)$$

Обозначим через M отношение

$$M=\frac{q^{\psi(\nu)\tau_\nu}-1}{q^{\tau_\nu}-1}.$$

Тогда для $\nu\leqslant k-1$

$$\frac{q^{n_{k-1}}}{q^{\tau_\nu}-1}\left(\frac{1}{q^{n_{\nu-1}}}-\frac{1}{q^{n_\nu}}\right)=\frac{q^{n_{k-1}}(q^{\psi(\nu)\tau_\nu}-1)}{(q^{\tau_\nu}-1)\, q^{n_\nu}}=q^{n_{k-1}-n_\nu}M,$$

и, следовательно, первое слагаемое в правой части (4) есть целое число. Обозначая это целое через N и пользуясь тем, что r_{k+1} является τ_{k+1}-значным числом в системе счисления с основанием q, получим:

$$\alpha q^{n_{k-1}+x}=N+\varphi(k)\frac{q^x r_k}{q^{\tau_k}-1}\left(1-\frac{1}{q^{\psi(k)\tau_k}}\right)+O\left(\frac{q^x\varphi(k+1)}{q^{\tau_k\psi(k)}}\right)=$$

$$=N+\varphi(k)\frac{q^x r_k}{q^{\tau_k}-1}+O\left(\frac{\varphi(k)+\varphi(k+1)}{q^{\tau_k}}\right)=$$

$$=N+q^x\varphi(k)\frac{r_k}{q^{\tau_k}-1}+o\left(\frac{1}{q^{\tau_k-k}}\right). \qquad (5)$$

Отношение $\frac{r_k}{q^{\tau_k}-1}$ можно записать в виде периодической q-ичной дроби

$$\frac{r_k}{q^{\tau_k}-1}=0,(r_k)(r_k)(r_k)\ldots(r_k)\ldots,$$

в которой каждый знак каждого из чисел r_k понимается как очередной знак q-ичного разложения. Выписывая подряд все знаки этого

14

В рамках исследования вопросов распределения дробных долей Н.М. Коробовым: ***были установлены связи между вполне равномерным распределением и свойствами чисел, нормальных по Борелю***

In the context of Korobov’s research into fractional distribution ***quite even distribution is allied to characteristics of borel normal numbers***

разложения, получим

$$\frac{r_k}{q^{\tau_k}-1}=0,\underbrace{\delta_1\delta_2\ldots\delta_{\tau_k}}_{r_k}\underbrace{\delta_{\tau_k+1}\ldots}_{r_k}\qquad(\delta_{\tau_k+\nu}=\delta_\nu),$$

$$\left\{q^x\frac{r_k}{q^{\tau_k}-1}\right\}=0,\delta_{x+1}\ldots\delta_{x+k}\delta_{x+k+1}\ldots=0,\delta_{x+1}\ldots\delta_{x+k}+O\left(\frac{1}{q^k}\right).$$

Отсюда, в силу (5), следует, что

$$\alpha q^{n_{k-1}+x}\equiv\varphi(k)\cdot 0,\delta_{x+1}\ldots\delta_{x+k}+O\left(\frac{\varphi(k)}{q^k}\right)\pmod 1,$$

$$S(n_{k-1},R)=\sum_{x=1}^{Rq^k}e^{2\pi im\alpha q^{n_{k-1}+x}}=\sum_{x=1}^{Rq^k}e^{2\pi im\varphi(k)\cdot 0,\delta_{x+1}\ldots\delta_{x+k}}+O(R\varphi(k)).$$

Но, согласно основному свойству систем $\rho_k'(q)$, сумма в правой части последнего равенства обращается в нуль, так что

$$S(n_{k-1},R)=O(R\varphi(k))\quad(0\leqslant R\leqslant\psi(k)-1).\tag{6}$$

Аналогично для $S[n_{\nu-1},\psi(\nu)]$ будет:

$$S[n_{\nu-1},\psi(\nu)]=S[n_{\nu-1},\psi(\nu)-1]+O(q^\nu)=O(\varphi(\nu)\psi(\nu)+q^\nu).\tag{7}$$

Подставляя оценки (6) и (7) в (3), получим

$$S=O\left(\sum_{\nu=1}^{k-1}\varphi(\nu)\psi(\nu)+R\varphi(k)\right)+O(q^k)=o\left(\sum_{\nu=1}^{k-1}q^\nu\psi(\nu)+q^kR\right)+O(q^k).\tag{8}$$

Пользуясь тем, что

$$\sum_{\nu=1}^{k-1}\psi(\nu)q^\nu+q^kR=n_{k-1}+Rq^k=P+O(q^k),\quad q^k=o(P),$$

получим из (8) нетривиальную оценку суммы S

$$S=\sum_{x=1}^{P}e^{2\pi im\alpha q^x}=o(P),$$

чем доказана равномерность распределения функции αq^x.

Пусть теперь величины $\alpha_1,\ldots,\alpha_s$ определены согласно условию теоремы. Обозначим через α сумму $\alpha=m_1\alpha_1+\ldots+m_s\alpha_s$ и положим $\varphi(k)=m_1\varphi_1(k)+\ldots+m_s\varphi_s(k)$. Тогда

$$\alpha=\sum_{\nu=1}^{s}m_\nu\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\varphi_\nu(k)r_k}{q^{\tau_k}-1}\left(\frac{1}{q^{n_{k-1}}}-\frac{1}{q^{n_k}}\right)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\varphi(k)r_k}{q^{\tau_k}-1}\left(\frac{1}{q^{n_{k-1}}}-\frac{1}{q^{n_k}}\right).$$

В силу условий, которым должны удовлетворять функции $\varphi_\nu(k)$ $(\nu=1,2,\ldots,s)$, для достаточно больших k будет

$$\varphi(k)\neq 0;\quad\varphi(k)=o(q^k).$$

Таким образом, α есть величина типа (1). Но тогда, по доказанному выше, функция $\alpha q^x=m_1\alpha_1q^x+\ldots+m_s\alpha_sq^x$ равномерно распределена, и по многомерному критерию равномерного распределения система функций $\alpha_1q^x,\ldots,\alpha_sq^x$ равномерно распределена в s-мерном пространстве.

15

В рамках исследования вопросов распределения дробных долей Н.М. Коробовым: ***были установлены связи между вполне равномерным***

но

In t

research into fractional distribution ***quite even distribution is allied to characteristics of borel normal numbers***

Следует отметить, что более общую задачу о равномерности распределения в s-мерном пространстве системы функций $\alpha_1 q_1^x, \ldots, \alpha_s q_s^x$ для произвольных целых $q_\nu \geqslant 2$ $(\nu = 1, 2, \ldots, s)$ решить с помощью элементарного метода теоремы 1 пока не удается. Эта общая задача имеет более сложное решение, основанное на использовании вполне равномерно распределенных функций (о вполне равномерном распределении см. (1)).

Теорема 2. *Пусть $\varphi(k)$ — произвольная вполне равномерно распределенная функция и величины $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ заданы рядами*

$$\alpha_\nu = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{[\{\varphi(sk+\nu)\} q_\nu]}{q_\nu^k} \quad (\nu = 1, 2, \ldots, s).$$

Тогда система функций $\alpha_1 q_1^x, \ldots, \alpha_s q_s^x$ равномерно распределена в s-мерном пространстве.

Следующая теорема содержит достаточные условия равномерности распределения в многомерном пространстве для произведений цело-

...ющих систем функций в заданные части единичного s-мерного куба. При этом оценки, получающиеся с помощью элементарного метода теоремы 1, значительно лучше оценок, получающихся в случае теоремы 2.

Математический институт
им. В. А. Стеклова
Академии наук СССР

Поступило
25 II 1952

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Н. М. Коробов, Изв. АН СССР, сер. матем., **14**, 215 (1950). [2] Н. М. Коробов, Тр. Матем. ин-та им. В. А. Стеклова, **38**, 87 (1951).

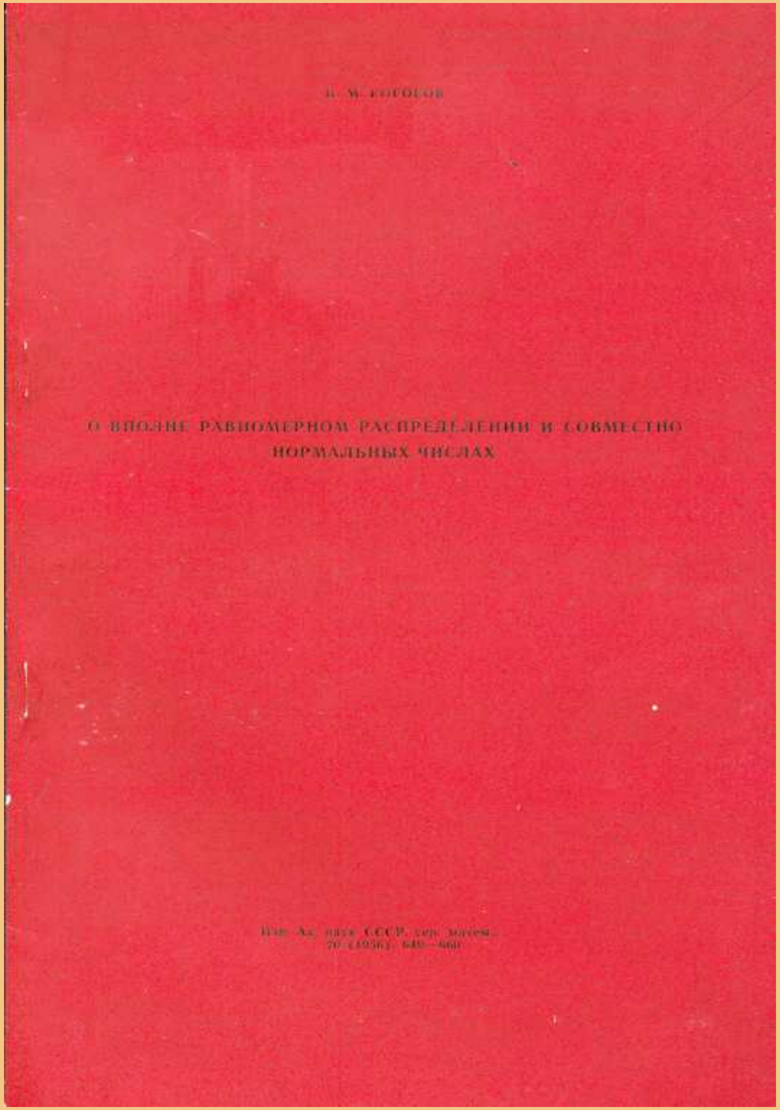
Теорема 2. *Пусть $\varphi(k)$ — произвольная вполне равномерно распределенная функция и величины $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ заданы рядами*

$$\alpha_\nu = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{[\{\varphi(sk+\nu)\} q_\nu]}{q_\nu^k} \quad (\nu = 1, 2, \ldots, s).$$

Тогда система функций $\alpha_1 q_1^x, \ldots, \alpha_s q_s^x$ равномерно распределена в s-мерном пространстве.

Николаем Михайловичем было также введено понятие ***совместно нормальных чисел***, построены примеры таких чисел и указаны связи между вполне равномерным распределением и теорией совместно нормальных чисел.

The conception of ***jointly normal numbers*** was also introduced by Nikolay Mikhailovich. He consructed the instances of such numbers and discovered the correlation between quite even distribution and jointly normal numbers theory.



Николаем Михайловичем было также введено понятие ***совместно нормальных чисел***, построены примеры таких чисел и указаны связи между вполне равномерным распределением и теорией совместно нормальных чисел.

The conception of ***jointly normal numbers*** was also introduced by Nikolay Mikhailovich. He consructed the instances of such numbers and discovered the correlation between quite even distribution and jointly normal numbers theory.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
20 (1956), 649—660

Н. М. КОРОБОВ

О ВПОЛНЕ РАВНОМЕРНОМ РАСПРЕДЕЛЕНИИ И СОВМЕСТНО НОРМАЛЬНЫХ ЧИСЛАХ

(*Представлено академиком* И. М. Виноградовым)

В работе излагается новый метод построения функций, дробные доли которых распределены вполне равномерно, выводятся оценки соответствующих тригонометрических сумм и строятся системы совместно нормальных чисел.

Функция $\varphi(x)$ называется вполне равномерно распределенной, если дробные доли функции $F_s(x)$, определенной равенством

$$F_s(x) = m_1\varphi(x+1) + \cdots + m_s\varphi(x+s),$$

распределены равномерно при любом $s \geqslant 1$ и любом выборе целых $m_1, \ldots, m_s$, не равных одновременно нулю. В работе ([1]) мною был указан класс функций, дробные доли которых распределены вполне равномерно. Приведенные там функции были построены при помощи метода, основанного на использовании оценок тригонометрических сумм для полиномов возрастающей степени. Легко показать, что для полученных в работе ([1]) вполне равномерно распределенных функций $\varphi(x)$ справедливы оценки:

$$\sum_{x=1}^{P} e^{2\pi i\varphi(x)} = O(P^{1-\rho}), \quad \sum_{x=1}^{P} e^{2\pi i F_s(x)} = O(P^{1-\rho}), \tag{1}$$

где величина ρ зависит от P, положительна и стремится к нулю при неограниченном возрастании P.

В первом параграфе настоящей работы (теорема 1) дается новый, сравнительно простой метод построения вполне равномерно распределенных функций. Этот метод основан на возможности получения хороших оценок тригонометрических сумм вида

$$\sum_{x=1}^{p^2(p-1)} e^{2\pi i \frac{f(x)q^x}{p^2}},$$

где p — простое, q — целое, $(q, p) = 1$ и $f(x)$ — целочисленный многочлен (лемма 1). Далее (теорема 2) показано, что при соответствующем выборе параметров можно получить вполне равномерно распределенные функции $\varphi(x)$, для которых выполняются оценки:

$$\sum_{x=1}^{P} e^{2\pi i\varphi(x)} = O(P^{\frac{3}{4}}\ln P), \quad \sum_{x=1}^{P} e^{2\pi i F_s(x)} = O(P^{\frac{3}{4}}\ln P).$$

Эти оценки, очевидно, существенно лучше оценок (1).

Николаем Михайловичем было также введено понятие ***совместно нормальных чисел***, построены примеры таких чисел и указаны связи между вполне равномерным распределением и теорией совместно нормальных чисел.

The conception of ***jointly normal numbers*** was also introduced by Nikolay Mikhailovich. He consructed the instances of such numbers and discovered the correlation between quite even distribution and jointly normal numbers theory.

В работе (¹) было показано, что при произвольном выборе вполне равномерно распределенной функции $\varphi(x)$ для всякого α, определенного рядом

$$\alpha = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{[\{\varphi(k)\}\, q]}{q^k}, \qquad (2)$$

дробные доли функции αq^x будут равномерно распределены*. Иначе говоря, всякое число α вида (2) является нормальным числом в q-ичной системе счисления.

Во втором параграфе настоящей работы доказывается, что для любых целых $q_\nu > 1$ $(\nu = 1, 2, \ldots, s)$ система функций

$$\alpha_1 q_1^x, \ldots, \alpha_s q_s^x \qquad (3)$$

равномерно распределена в s-мерном пространстве, если числа α_ν определены рядами:

$$\alpha_\nu = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{[\{\varphi(sk+\nu)\}\, q_\nu]}{q_\nu^k} \quad (\nu = 1, 2, \ldots, s), \qquad (4)$$

где $\varphi(x)$ — произвольная вполне равномерно распределенная функция **.

Введем обозначения:

$$\delta_k^{(\nu)} = [\{\varphi(sk+\nu)\}\, q_\nu] \quad (\nu = 1, 2, \ldots, s, \quad k = 1, 2, \ldots).$$

Очевидно, $\delta_k^{(\nu)}$ — целые числа из интервала $0 \leqslant \delta_k^{(\nu)} \leqslant q_\nu - 1$, поэтому равенства (4) можно рассматривать как запись чисел $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ в системах счисления соответственно с основаниями $q_1, \ldots, q_s$:

$$\alpha_1 = 0,\ \delta_1^{(1)} \delta_2^{(1)} \ldots \delta_k^{(1)} \ldots,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\alpha_s = 0,\ \delta_1^{(s)} \delta_2^{(s)} \ldots \delta_k^{(s)} \ldots.$$

Из равномерности распределения системы функций (3) следует, что при любых заданных целых $n_1, \ldots, n_s$ среди групп знаков

$$\left.\begin{array}{l} \delta_{k+1}^{(1)} \ldots \delta_{k+n_1}^{(1)} \\ \ldots\ldots \\ \delta_{k+1}^{(s)} \ldots \delta_{k+n_s}^{(s)} \end{array}\right\} \quad (k = 0, 1, \ldots)$$

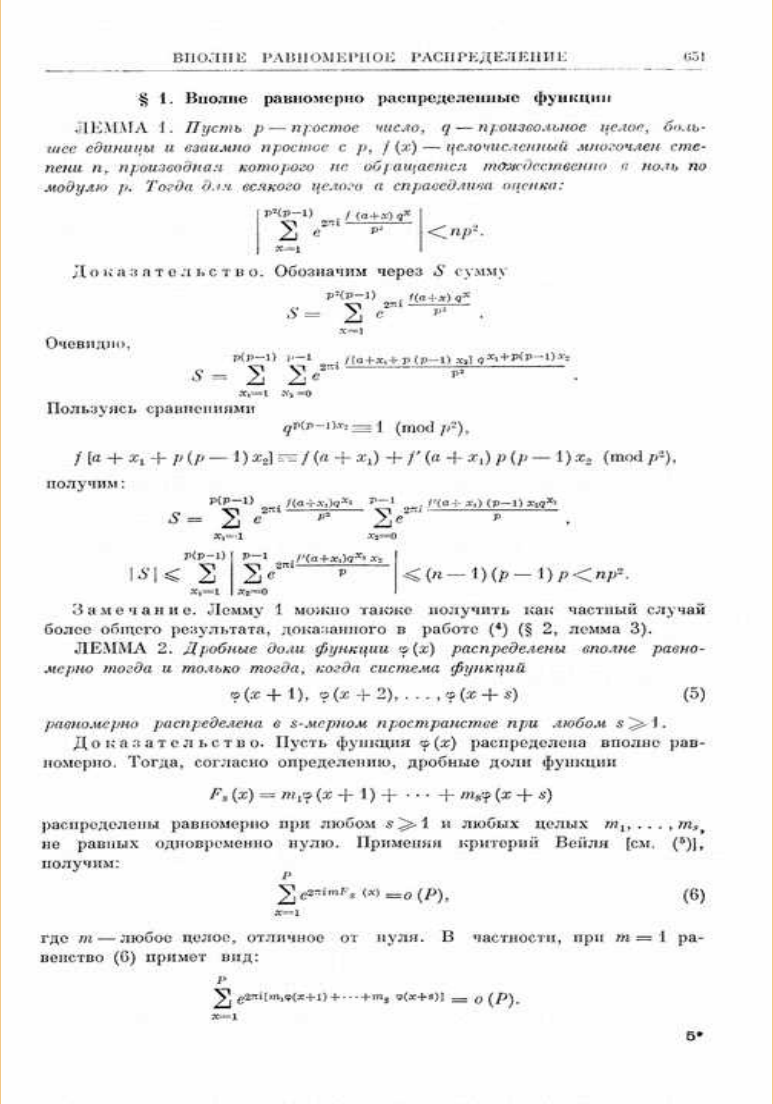
каждая из возможных различных $q_1^{n_1} q_2^{n_2} \ldots q_s^{n_s}$ групп встречается с асимптотически равной частотой. Числа $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$, q_ν-ичные разложения которых обладают указанным свойством [см. также (³)], называются совместно нормальными. Таким образом, числа $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ вида (4) являются совместно нормальными числами.

* Здесь знаки $[a]$ и $\{a\}$ означают соответственно целую часть и дробную долю числа a, так что $a = [a] + \{a\}$.

** Формулировка этой теоремы была дана мною в работе (²).

Николаем Михайловичем было также введено понятие ***совместно нормальных чисел***, построены примеры таких чисел и указаны связи между вполне равномерным распределением и теорией совместно нормальных чисел.

The conception of ***jointly normal numbers*** was also introduced by Nikolay Mikhailovich. He consructed the instances of such numbers and discovered the correlation between quite even distribution and jointly normal numbers theory.



ВПОЛНЕ РАВНОМЕРНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ 651

§ 1. Вполне равномерно распределенные функции

ЛЕММА 1. *Пусть p — простое число, q — произвольное целое, большее единицы и взаимно простое с p, $f(x)$ — целочисленный многочлен степени n, производная которого не обращается тождественно в нуль по модулю p. Тогда для всякого целого a справедлива оценка:*

$$\left|\sum_{x=1}^{p^2(p-1)} e^{2\pi i \frac{f(a+x)q^x}{p^2}}\right| < np^2.$$

Доказательство. Обозначим через S сумму

$$S = \sum_{x=1}^{p^2(p-1)} e^{2\pi i \frac{f(a+x)q^x}{p^2}}.$$

Очевидно,

$$S = \sum_{x_1=1}^{p(p-1)} \sum_{x_2=0}^{p-1} e^{2\pi i \frac{f[a+x_1+p(p-1)x_2]\, q^{x_1+p(p-1)x_2}}{p^2}}.$$

Пользуясь сравнениями

$$q^{p(p-1)x_2} \equiv 1 \pmod{p^2},$$

$$f[a+x_1+p(p-1)x_2] \equiv f(a+x_1) + f'(a+x_1)\, p(p-1)x_2 \pmod{p^2},$$

получим:

$$S = \sum_{x_1=1}^{p(p-1)} e^{2\pi i \frac{f(a+x_1)q^{x_1}}{p^2}} \sum_{x_2=0}^{p-1} e^{2\pi i \frac{f'(a+x_1)(p-1)x_2 q^{x_1}}{p}},$$

$$|S| \leqslant \sum_{x_1=1}^{p(p-1)} \left|\sum_{x_2=0}^{p-1} e^{2\pi i \frac{f'(a+x_1)q^{x_1}x_2}{p}}\right| \leqslant (n-1)(p-1)p < np^2.$$

Замечание. Лемму 1 можно также получить как частный случай более общего результата, доказанного в работе ([4]) (§ 2, лемма 3).

ЛЕММА 2. *Дробные доли функции $\varphi(x)$ распределены вполне равномерно тогда и только тогда, когда система функций*

$$\varphi(x+1),\ \varphi(x+2),\ \ldots,\ \varphi(x+s) \qquad (5)$$

равномерно распределена в s-мерном пространстве при любом $s \geqslant 1$.

Доказательство. Пусть функция $\varphi(x)$ распределена вполне равномерно. Тогда, согласно определению, дробные доли функции

$$F_s(x) = m_1\varphi(x+1) + \cdots + m_s\varphi(x+s)$$

распределены равномерно при любом $s \geqslant 1$ и любых целых $m_1, \ldots, m_s$, не равных одновременно нулю. Применяя критерий Вейля [см. ([5])], получим:

$$\sum_{x=1}^{P} e^{2\pi i m F_s(x)} = o(P), \qquad (6)$$

где m — любое целое, отличное от нуля. В частности, при $m = 1$ равенство (6) примет вид:

$$\sum_{x=1}^{P} e^{2\pi i [m_1\varphi(x+1) + \cdots + m_s\varphi(x+s)]} = o(P).$$

5*

Николаем Михайловичем было также введено понятие ***совместно нормальных чисел***, построены примеры таких чисел и указаны связи между вполне равномерным распределением и теорие[й] … чисел.

The … *norma*… introduced by Nikolay Mikhailovich. He consructed the instances of such numbers and discovered the correlation between quite even distribution and jointly normal numbers theory.

Отсюда, в силу многомерного критерия Вейля, следует, что система функций (5) равномерно распределена в s-мерном пространстве.

Достаточность условий леммы также непосредственно следует из критерия равномерного распределения. Действительно, пусть система функций (5) при любом $s \geqslant 1$ равномерно распределена в s-мерном пространстве. Для всякого целого $m \neq 0$, так как целые $mm_1, \ldots, mm_s$ не обращаются одновременно в ноль, когда среди чисел $m_1, \ldots, m_s$ есть хотя бы одно, отличное от нуля, получим:

$$\sum_{x=1}^{P} e^{2\pi i m F_s(x)} = \sum_{x=1}^{P} e^{2\pi i (mm_1\varphi(x+1)+\ldots+mm_s\varphi(x+s))} = o(P).$$

В силу этого равенства, функция $F_s(x)$ равномерно распределена и, следовательно, дробные доли функции $\varphi(x)$ распределены вполне равномерно.

Введем обозначения: $p_1 < p_2 < \ldots$ — произвольные простые числа, рост которых ограничен условием:

ТЕОРЕМА 1. *Для всякой функции $\alpha(x)$, определенной степенным рядом*

$$\alpha(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \left(\frac{1}{q^{n_\nu}} - \frac{1}{q^{n_{\nu+1}}} \right) \frac{x^\nu}{p_\nu^2},$$

дробные доли функции $\varphi(x) = \alpha(x) q^x$ распределены вполне равномерно.

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$F_s(x) = m_1\varphi(x+1) + \ldots + m_s\varphi(x+s),$$

где $m_1, \ldots, m_s$ — произвольные целые, не равные одновременно нулю. Определим целочисленные многочлены $f_\nu(x)$ при помощи равенств

$$f_\nu(x) = m_1 q (x+1)^\nu + \ldots + m_s q^s (x+s)^\nu \quad (\nu = 1, 2, \ldots). \qquad (7)$$

Обозначим через γ_ν степень многочлена $f_\nu(x)$. Легко проверить, что для $\nu \geqslant s$ выполняется неравенство $\gamma_\nu > \nu - s$ и что для всех $\nu > \nu_0$, где ν_0 зависит только от выбора чисел $q, s, m_1, \ldots, m_s$, функции $f_\nu(x)$ не обращаются тождественно в ноль по модулю p_ν.

Действительно, располагая $f_\nu(x)$ по степеням x, получим:

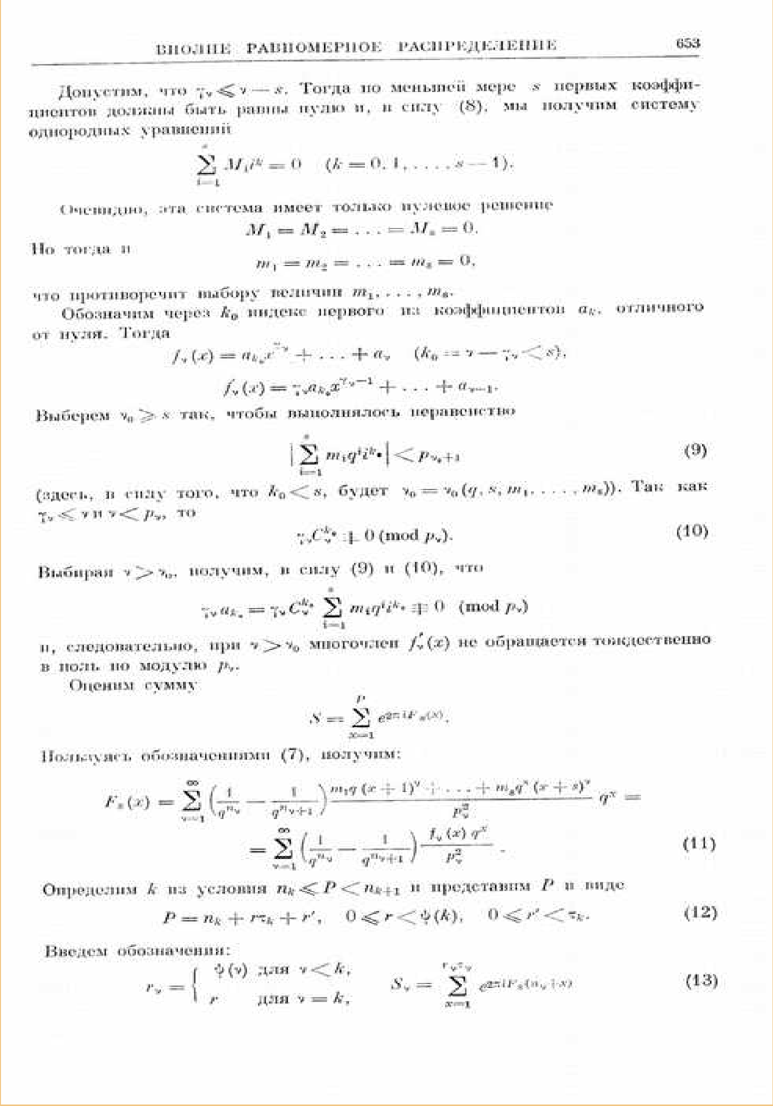
$$f_\nu(x) = a_0 x^\nu + a_1 x^{\nu-1} + \ldots + a_\nu,$$

где коэффициенты a_k для $k = 0, 1, \ldots, \nu$ определяются равенствами

$$a_k = \sum_{i=1}^{s} m_i q^i C_\nu^k i^k = C_\nu^k \sum_{i=1}^{s} M_i i^k, \quad M_i = m_i q^i. \qquad (8)$$

Николаем Михайловичем было также введено понятие ***совместно нормальных чисел***, построены примеры таких чисел и указаны связи между вполне равномерным распределением и теорией совместно нормальных чисел.

The conception of ***jointly normal numbers*** was also introduced by Nikolay Mikhailovich. He consructed the instances of such numbers and discovered the correlation between quite even distribution and jointly normal numbers theory.



ВПОЛНЕ РАВНОМЕРНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ 653

Допустим, что $\gamma_\nu \leqslant \nu - s$. Тогда по меньшей мере s первых коэффициентов должны быть равны нулю и, в силу (8), мы получим систему однородных уравнений

$$\sum_{i=1}^{s} M_i i^k = 0 \quad (k = 0, 1, \ldots, s-1).$$

Очевидно, эта система имеет только нулевое решение

$$M_1 = M_2 = \ldots = M_s = 0.$$

Но тогда и

$$m_1 = m_2 = \ldots = m_s = 0,$$

что противоречит выбору величин $m_1, \ldots, m_s$.

Обозначим через k_0 индекс первого из коэффициентов a_k, отличного от нуля. Тогда

$$f_\nu(x) = a_{k_0} x^{\gamma_\nu} + \ldots + a_\nu \quad (k_0 = \nu - \gamma_\nu < s),$$

$$f'_\nu(x) = \gamma_\nu a_{k_0} x^{\gamma_\nu - 1} + \ldots + a_{\nu-1}.$$

Выберем $\nu_0 \geqslant s$ так, чтобы выполнялось неравенство

$$\left| \sum_{i=1}^{s} m_i q^i i^{k_0} \right| < p_{\nu_0+1} \tag{9}$$

(здесь, в силу того, что $k_0 < s$, будет $\nu_0 = \nu_0(q, s, m_1, \ldots, m_s)$). Так как $\gamma_\nu \leqslant \nu$ и $\nu < p_\nu$, то

$$\gamma_\nu C_\nu^{k_0} \not\equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ p_\nu). \tag{10}$$

Выбирая $\nu > \nu_0$, получим, в силу (9) и (10), что

$$\gamma_\nu a_{k_0} = \gamma_\nu C_\nu^{k_0} \sum_{i=1}^{s} m_i q^i i^{k_0} \not\equiv 0 \quad (\mathrm{mod}\ p_\nu)$$

и, следовательно, при $\nu > \nu_0$ многочлен $f'_\nu(x)$ не обращается тождественно в нуль по модулю p_ν.

Оценим сумму

$$S = \sum_{x=1}^{P} e^{2\pi i F_s(x)}.$$

Пользуясь обозначениями (7), получим:

$$F_s(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \left(\frac{1}{q^{n_\nu}} - \frac{1}{q^{n_{\nu+1}}} \right) \frac{m_1 q (x+1)^\nu + \ldots + m_s q^s (x+s)^\nu}{p_\nu^2} q^x =$$

$$= \sum_{\nu=1}^{\infty} \left(\frac{1}{q^{n_\nu}} - \frac{1}{q^{n_{\nu+1}}} \right) \frac{f_\nu(x) q^x}{p_\nu^2}. \tag{11}$$

Определим k из условия $n_k \leqslant P < n_{k+1}$ и представим P в виде

$$P = n_k + r\tau_k + r', \quad 0 \leqslant r < \psi(k), \quad 0 \leqslant r' < \tau_k. \tag{12}$$

Введем обозначения:

$$r_\nu = \begin{cases} \psi(\nu) & \text{для } \nu < k, \\ r & \text{для } \nu = k, \end{cases} \qquad S_\nu = \sum_{x=1}^{r_\nu \tau_\nu} e^{2\pi i F_s(n_\nu + x)} \tag{13}$$

Николаем Михайловичем было также введено понятие ***совместно нормальных чисел***, построены примеры таких чисел и указаны связи между вполне равномерным распределением и теорией совместно нормальных чисел.

The conception of ***jointly normal numbers*** was also introduced by Nikolay Mikhailovich. He consructed the instances of such numbers and discovered the correlation between quite even distribution and jointly normal numbers theory.

654 Н. М. КОРОБОВ

и разобьем на части интервал суммирования суммы S:

$$S = \sum_{x=1}^{n_{\nu_0}} e^{2\pi i F_s(x)} + \sum_{\nu=\nu_0+1}^{k-1} \sum_{x=n_\nu+1}^{n_\nu+\tau_\nu} e^{2\pi i F_s(x)} + \sum_{x=n_k+1}^{n_k+\tau_k} e^{2\pi i F_s(x)} + \sum_{x>n_k+\tau_k} e^{2\pi i F_s(x)}.$$

Пользуясь обозначениями (13), получим отсюда:

$$S = O\Big(\sum_{\nu=\nu_0+1}^{k} |S_\nu| + \tau_k\Big). \qquad (14)$$

Оценим суммы S_ν для $\nu > \nu_0$. В силу (11),

$$F_s(n_\nu + x) = \sum_{i=1}^{\nu-1}\Big(\frac{1}{q^{n_i}} - \frac{1}{q^{n_{i+1}}}\Big)\frac{f_i(n_\nu + x)\,q^{n_\nu+x}}{p_i^2} + \frac{f_\nu(n_\nu + x)\,q^x}{p_\nu^2} - \frac{f_\nu(n_\nu + x)\,q^{n_\nu+x}}{p_\nu^2 q^{n_{\nu+1}}} + \sum_{i=\nu+1}^{\infty}\Big(\frac{1}{q^{n_i}} - \frac{1}{q^{n_{i+1}}}\Big)\frac{f_i(n_\nu + x)\,q^{n_\nu+x}}{p_i^2}.$$

Введем обозначения:

$$N_\nu(x) = \sum_{i=1}^{\nu-1}\Big(\frac{1}{q^{n_i}} - \frac{1}{q^{n_{i+1}}}\Big)\frac{f_i(n_\nu + x)\,q^{n_\nu+x}}{p_i^2}, \qquad (15)$$

$$R_\nu(x) = -\frac{f_\nu(n_\nu + x)\,q^{n_\nu+x}}{p_\nu^2 q^{n_{\nu+1}}} + \sum_{i=\nu+1}^{\infty}\Big(\frac{1}{q^{n_i}} - \frac{1}{q^{n_{i+1}}}\Big)\frac{f_i(n_\nu + x)\,q^{n_\nu+x}}{p_i^2}. \qquad (16)$$

Очевидно,

$$F_s(n_\nu + x) = N_\nu(x) + \frac{f_\nu(n_\nu + x)\,q^x}{p_\nu^2} + R_\nu(x). \qquad (17)$$

Покажем прежде всего, что $N_\nu(x)$ при любом $x \geqslant 1$ принимает целые значения. Действительно, так как в (15) $\nu \geqslant i+1$, то в равенстве

$$\Big(\frac{1}{q^{n_i}} - \frac{1}{q^{n_{i+1}}}\Big)q^{n_\nu} = q^{n_\nu - n_{i+1}}(q^{\psi(i)\tau_i} - 1)$$

первый сомножитель правой части будет целым числом; второй сомножитель, в силу выбора τ_i, делится на p_i^2. Следовательно, каждое слагаемое суммы (15)

$$\Big(\frac{1}{q^{n_i}} - \frac{1}{q^{n_{i+1}}}\Big)\frac{f_i(n_\nu + x)\,q^{n_\nu+x}}{p_i^2} = q^{n_\nu - n_{i+1}} f_i(n_\nu + x)\,q^x\,\frac{q^{\psi(i)\tau_i} - 1}{p_i^2}$$

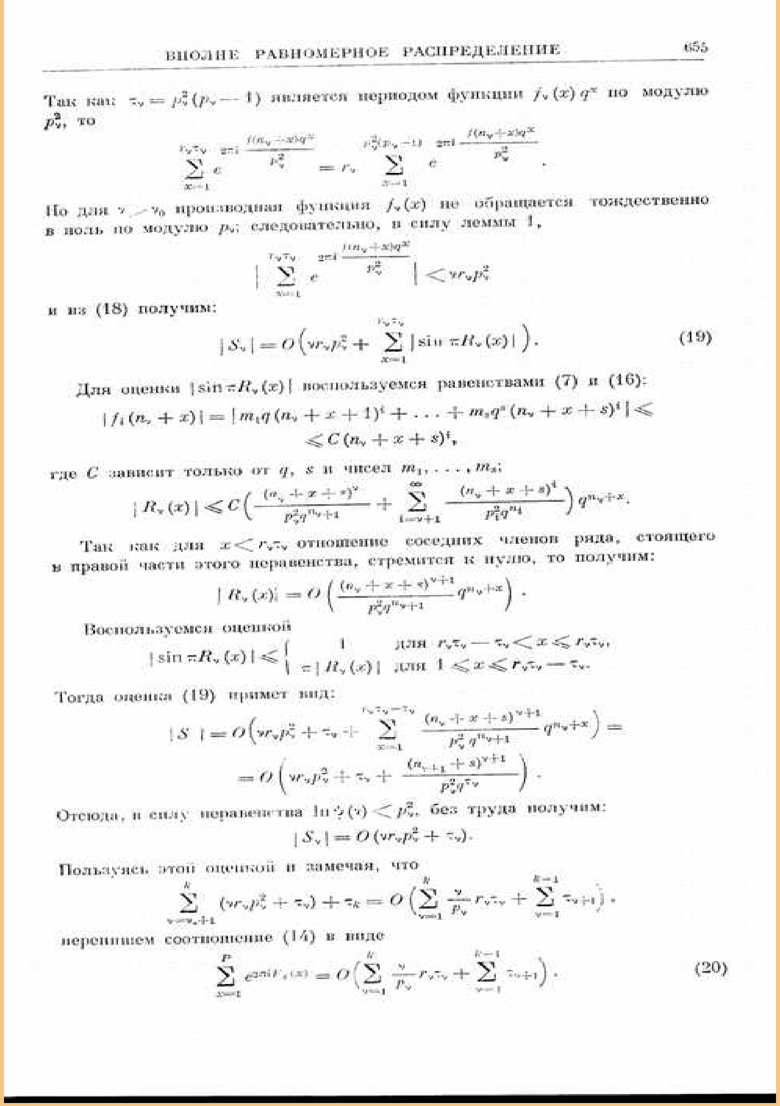
будет целым числом.

Теперь, пользуясь равенством (17), получим:

$$S_\nu = \sum_{x=1}^{r_\nu\tau_\nu} e^{2\pi i F_s(n_\nu+x)} = \sum_{x=1}^{r_\nu\tau_\nu} e^{2\pi i\left[\frac{f_\nu(n_\nu+x)q^x}{p_\nu^2} + R_\nu(x)\right]} = \sum_{x=1}^{r_\nu\tau_\nu} e^{2\pi i \frac{f_\nu(n_\nu+x)q^x}{p_\nu^2}} + O\Big(\sum_{x=1}^{r_\nu\tau_\nu} |\sin \pi R_\nu(x)|\Big). \qquad (18)$$

Николаем Михайловичем было также введено понятие ***совместно нормальных чисел***, построены примеры таких чисел и указаны связи между вполне равномерным распределением и теорией совместно нормальных чисел.

The conception of ***jointly normal numbers*** was also introduced by Nikolay Mikhailovich. He consructed the instances of such numbers and discovered the correlation between quite even distribution and jointly normal numbers theory.



ВПОЛНЕ РАВНОМЕРНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ 655

Так как $\tau_\nu = p_\nu^2(p_\nu - 1)$ является периодом функции $f_\nu(x)\,q^x$ по модулю p_ν^2, то

$$\sum_{x=1}^{r_\nu \tau_\nu} e^{2\pi i \frac{f(n_\nu + x)q^x}{p_\nu^2}} = r_\nu \sum_{x=1}^{p_\nu^2(p_\nu - 1)} e^{2\pi i \frac{f(n_\nu + x)q^x}{p_\nu^2}}.$$

Но для $\nu > \nu_0$ производная функция $f_\nu(x)$ не обращается тождественно в ноль по модулю p_ν; следовательно, в силу леммы 1,

$$\Big|\sum_{x=1}^{r_\nu \tau_\nu} e^{2\pi i \frac{f(n_\nu + x)q^x}{p_\nu^2}}\Big| < \nu r_\nu p_\nu^2$$

и из (18) получим:

$$|S_\nu| = O\Big(\nu r_\nu p_\nu^2 + \sum_{x=1}^{r_\nu \tau_\nu} |\sin \pi R_\nu(x)|\Big). \qquad (19)$$

Для оценки $|\sin \pi R_\nu(x)|$ воспользуемся равенствами (7) и (16):

$$|f_1(n_\nu + x)| = |m_1 q (n_\nu + x + 1)^t + \ldots + m_s q^s (n_\nu + x + s)^t| \leqslant$$
$$\leqslant C(n_\nu + x + s)^t,$$

где C зависит только от q, s и чисел $m_1, \ldots, m_s$;

$$|R_\nu(x)| \leqslant C\Big(\frac{(n_\nu + x + s)^\nu}{p_\nu^2 q^{n_{\nu+1}}} + \sum_{i=\nu+1}^{\infty} \frac{(n_\nu + x + s)^i}{p_i^2 q^{n_i}}\Big) q^{n_\nu + x}.$$

Так как для $x < r_\nu \tau_\nu$ отношение соседних членов ряда, стоящего в правой части этого неравенства, стремится к нулю, то получим:

$$|R_\nu(x)| = O\Big(\frac{(n_\nu + x + s)^{\nu+1}}{p_\nu^2 q^{n_{\nu+1}}} q^{n_\nu + x}\Big).$$

Воспользуемся оценкой

$$|\sin \pi R_\nu(x)| \leqslant \begin{cases} 1 & \text{для } r_\nu\tau_\nu - \tau_\nu < x \leqslant r_\nu\tau_\nu, \\ \pi|R_\nu(x)| & \text{для } 1 \leqslant x \leqslant r_\nu\tau_\nu - \tau_\nu. \end{cases}$$

Тогда оценка (19) примет вид:

$$|S_\nu| = O\Big(\nu r_\nu p_\nu^2 + \tau_\nu + \sum_{x=1}^{r_\nu\tau_\nu - \tau_\nu} \frac{(n_\nu + x + s)^{\nu+1}}{p_\nu^2 q^{n_{\nu+1}}} q^{n_\nu + x}\Big) =$$
$$= O\Big(\nu r_\nu p_\nu^2 + \tau_\nu + \frac{(n_{\nu+1} + s)^{\nu+1}}{p_\nu^2 q^{\tau_\nu}}\Big).$$

Отсюда, в силу неравенства $\ln \varphi(\nu) < p_\nu^2$, без труда получим:

$$|S_\nu| = O(\nu r_\nu p_\nu^2 + \tau_\nu).$$

Пользуясь этой оценкой и замечая, что

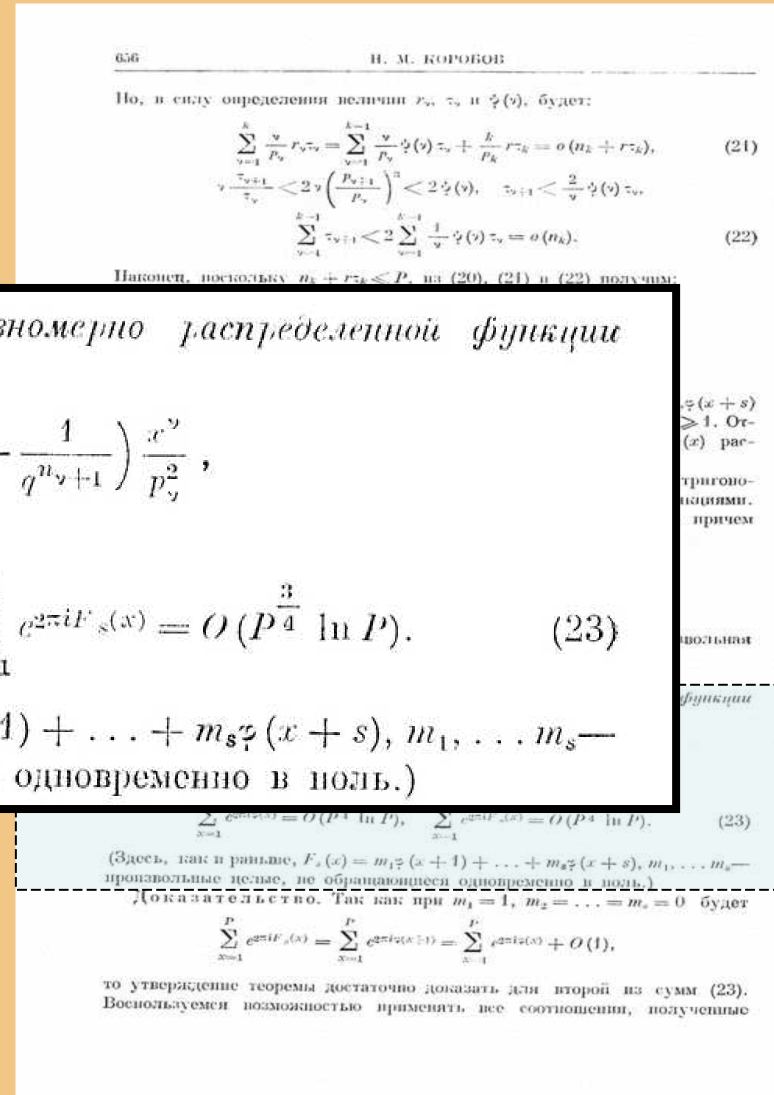
$$\sum_{\nu=\nu_0+1}^{k} (\nu r_\nu p_\nu^2 + \tau_\nu) + \tau_k = O\Big(\sum_{\nu=1}^{k} \frac{\nu}{p_\nu} r_\nu \tau_\nu + \sum_{\nu=1}^{k-1} \tau_{\nu+1}\Big),$$

перепишем соотношение (14) в виде

$$\sum_{x=1}^{P} e^{2\pi i F_s(x)} = O\Big(\sum_{\nu=1}^{k} \frac{\nu}{p_\nu} r_\nu \tau_\nu + \sum_{\nu=1}^{k-1} \tau_{\nu+1}\Big). \qquad (20)$$

Николаем Михайловичем было также введено понятие ***совместно нормальных чисел***, построены примеры таких чисел и указаны связи между вполне равном… теорие… чисел.

The… ***norma…*** introdu… He consructed the instances of such numbers and discovered the correlation between quite even distribution and jointly normal numbers theory.



Но, в силу определения величин r_ν, τ_ν и $\varphi(\nu)$, будет:

$$\sum_{\nu=1}^{k}\frac{\nu}{p_\nu}r_\nu\tau_\nu=\sum_{\nu=1}^{k-1}\frac{\nu}{p_\nu}\varphi(\nu)\tau_\nu+\frac{k}{p_k}r\tau_k=o(n_k+r\tau_k), \qquad (21)$$

$$\nu\frac{\tau_{\nu+1}}{\tau_\nu}<2\nu\left(\frac{p_{\nu+1}}{p_\nu}\right)^2<2\varphi(\nu), \quad \tau_{\nu+1}<\frac{2}{\nu}\varphi(\nu)\tau_\nu,$$

$$\sum_{\nu=1}^{k-1}\tau_{\nu+1}<2\sum_{\nu=1}^{k-1}\frac{1}{\nu}\varphi(\nu)\tau_\nu=o(n_k). \qquad (22)$$

Наконец, поскольку $n_k+r\tau_k\le P$, из (20), (21) и (22) получим:

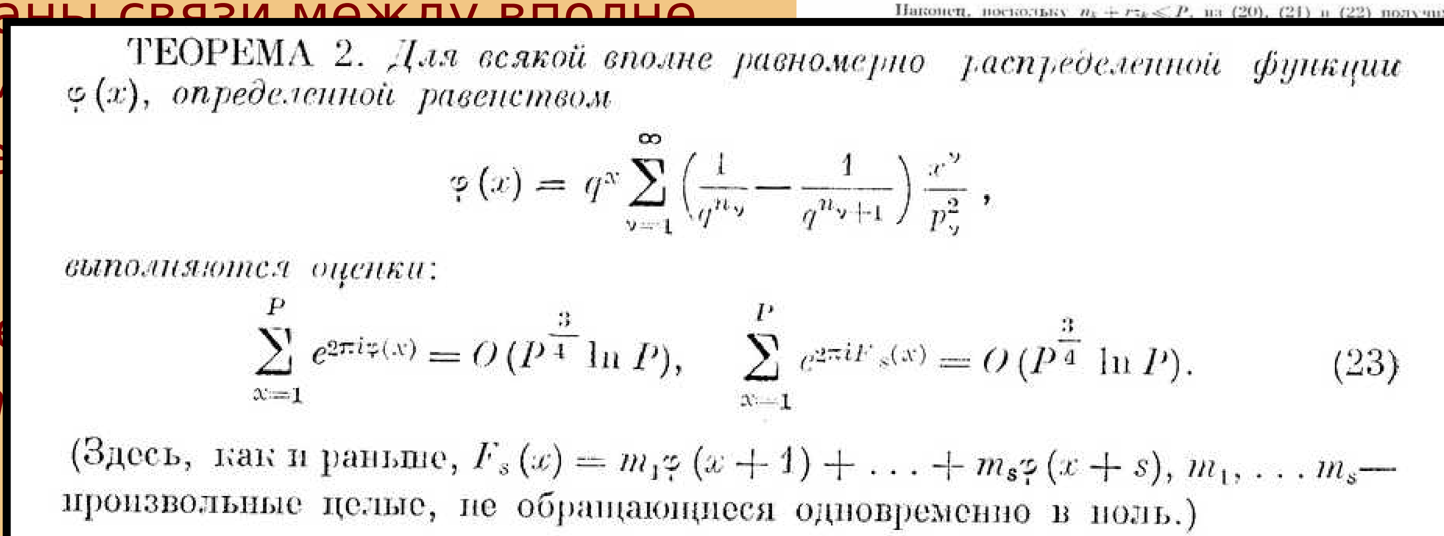
$$\sum_{x=1}^{P} e^{2\pi i\varphi(x)}=O(P^{\frac34}\ln P), \quad \sum_{x=1}^{P} e^{2\pi iF_s(x)}=O(P^{\frac34}\ln P). \qquad (23)$$

(Здесь, как и раньше, $F_s(x)=m_1\varphi(x+1)+\dots+m_s\varphi(x+s)$, $m_1,\dots m_s$— произвольные целые, не обращающиеся одновременно в ноль.)

Доказательство. Так как при $m_1=1$, $m_2=\dots=m_s=0$ будет

$$\sum_{x=1}^{P} e^{2\pi iF_s(x)}=\sum_{x=1}^{P} e^{2\pi i\varphi(x+1)}=\sum_{x=1}^{P} e^{2\pi i\varphi(x)}+O(1),$$

то утверждение теоремы достаточно доказать для второй из сумм (23). Воспользуемся возможностью применять все соотношения, полученные



ТЕОРЕМА 2. *Для всякой вполне равномерно распределенной функции* $\varphi(x)$, *определенной равенством*

$$\varphi(x)=q^x\sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\frac{1}{q^{n_\nu}}-\frac{1}{q^{n_{\nu+1}}}\right)\frac{x^\nu}{p_\nu^2},$$

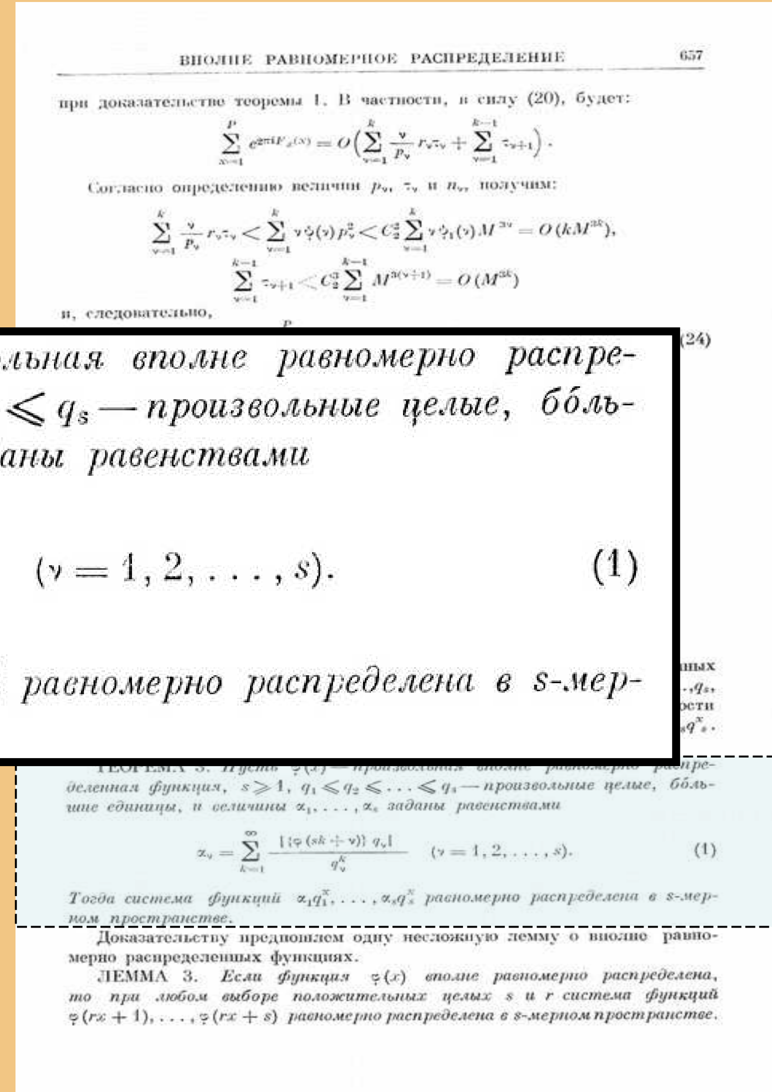
выполняются оценки:

$$\sum_{x=1}^{P} e^{2\pi i\varphi(x)}=O(P^{\frac34}\ln P), \quad \sum_{x=1}^{P} e^{2\pi iF_s(x)}=O(P^{\frac34}\ln P). \qquad (23)$$

(Здесь, как и раньше, $F_s(x)=m_1\varphi(x+1)+\dots+m_s\varphi(x+s)$, $m_1,\dots m_s$— произвольные целые, не обращающиеся одновременно в ноль.)

Николаем Михайловичем было также введено понятие ***совместно нормальных чисел***, построены примеры таких чисел и указаны связи между вполне равном… теорие… чисел.

The… ***norma…*** introdu… He consructed the instances of such numbers and discovered the correlation between quite even distribution and jointly normal numbers theory.



при доказательстве теоремы 1. В частности, в силу (20), будет:

$$\sum_{x=1}^{P} e^{2\pi i F_s(x)} = O\Big(\sum_{\nu=1}^{k} \frac{\nu}{p_\nu} r_\nu \tau_\nu + \sum_{\nu=1}^{k-1} \tau_{\nu+1}\Big).$$

Согласно определению величин p_ν, τ_ν и n_ν, получим:

$$\sum_{\nu=1}^{k} \frac{\nu}{p_\nu} r_\nu \tau_\nu < \sum_{\nu=1}^{k} \nu \psi(\nu) p_\nu^2 < C_2^2 \sum_{\nu=1}^{k} \nu \psi_1(\nu) M^{3\nu} = O(kM^{3k}),$$

$$\sum_{\nu=1}^{k-1} \tau_{\nu+1} < C_2^3 \sum_{\nu=1}^{k-1} M^{3(\nu+1)} = O(M^{3k})$$

и, следовательно,

(24)

…ных …, q_s, …сти … q_s^x.

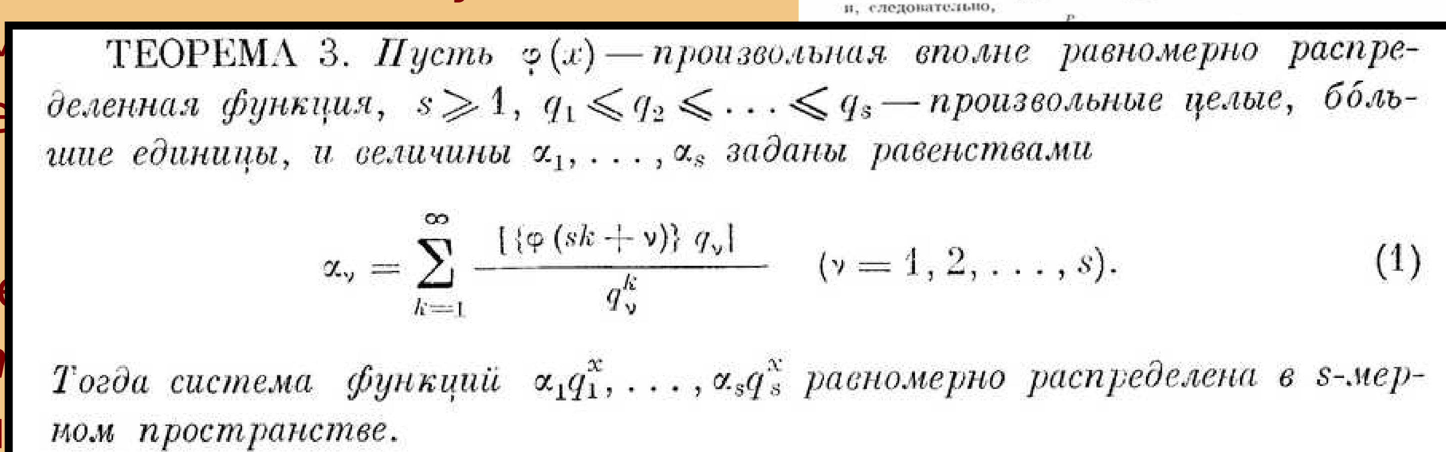
ТЕОРЕМА 3. *Пусть $\varphi(x)$ — произвольная вполне равномерно распределенная функция, $s \geqslant 1$, $q_1 \leqslant q_2 \leqslant \ldots \leqslant q_s$ — произвольные целые, бóльшие единицы, и величины $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ заданы равенствами*

$$\alpha_\nu = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{[\{\varphi(sk+\nu)\} q_\nu]}{q_\nu^k} \quad (\nu = 1, 2, \ldots, s). \quad (1)$$

Тогда система функций $\alpha_1 q_1^x, \ldots, \alpha_s q_s^x$ равномерно распределена в s-мерном пространстве.

Доказательству предпошлем одну несложную лемму о вполне равномерно распределенных функциях.

ЛЕММА 3. *Если функция $\varphi(x)$ вполне равномерно распределена, то при любом выборе положительных целых s и r система функций $\varphi(rx+1), \ldots, \varphi(rx+s)$ равномерно распределена в s-мерном пространстве.*



ТЕОРЕМА 3. *Пусть $\varphi(x)$ — произвольная вполне равномерно распределенная функция, $s \geqslant 1$, $q_1 \leqslant q_2 \leqslant \ldots \leqslant q_s$ — произвольные целые, бóльшие единицы, и величины $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ заданы равенствами*

$$\alpha_\nu = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{[\{\varphi(sk+\nu)\} q_\nu]}{q_\nu^k} \quad (\nu = 1, 2, \ldots, s). \quad (1)$$

Тогда система функций $\alpha_1 q_1^x, \ldots, \alpha_s q_s^x$ равномерно распределена в s-мерном пространстве.

Николаем Михайловичем было также введено понятие ***совместно нормальных чисел***, построены примеры таких чисел и указаны связи между вполне равномерным распределением и теорией совместно нормальных чисел.

The conception of ***jointly normal numbers*** was also introduced by Nikolay Mikhailovich. He consructed the instances of such numbers and discovered the correlation between quite even distribution and jointly normal numbers theory.

658 Н. М. КОРОБОВ

Доказательство. При $r=1$ утверждение леммы следует в силу многомерного критерия Вейля из определения вполне равномерного распределения. Пусть $r>1$ и $m_1, \ldots, m_s$ — произвольные целые, не равные одновременно нулю. Согласно критерию Вейля, достаточно показать, что сумма

$$S=\sum_{x=1}^{P} e^{2\pi i F_s(rx)},$$

где

$$F_s(rx)=m_1\varphi(rx+1)+\ldots+m_s\varphi(rx+s),$$

имеет нетривиальную оценку $S=o(P)$.

Пользуясь свойствами рациональной суммы первой степени, представим S в виде

$$S=\frac{1}{r}\sum_{y=1}^{r}\sum_{x=1}^{rP} e^{2\pi i\left[F_s(x)+\frac{xy}{r}\right]}, \quad |S|\leqslant \max_{1\leqslant y\leqslant r}\left|\sum_{x=1}^{rP} e^{2\pi i\left[F_s(x)+\frac{xy}{r}\right]}\right|. \qquad (2)$$

Если для любого целого $h\geqslant 1$ функция $\Delta_h f(x)=f(x+h)-f(x)$ равномерно распределена, то, как известно [см. ([6])], функция $f(x)$ также равномерно распределена. Выберем

$$f(x)=F_s(x)+\frac{xy}{r};$$

тогда

$$\Delta_h f(x)=F_s(x+h)-F_s(x)+\frac{yh}{r}.$$

Очевидно, разность $F_s(x+h)-F_s(x)$ является линейной комбинацией соседних значений функции $\varphi(x)$ и, по определению вполне равномерного распределения, представляет собой равномерно распределенную функцию; $\Delta_h f(x)$ отличается от этой равномерно распределенной функции на константу и, следовательно, также равномерно распределена. Но тогда и функция

$$f(x)=F_s(x)+\frac{xy}{r}$$

равномерно распределена, так что для любого y из интервала $1\leqslant y\leqslant r$ будет:

$$\left|\sum_{x=1}^{rP} e^{2\pi i\left[F_s(x)+\frac{xy}{r}\right]}\right|=o(P),$$

чем, в силу (2), лемма доказана.

Перейдем к доказательству теоремы. Пусть

$$\delta_k^{(\nu)}=[\{\varphi(sk+\nu)\}q_\nu].$$

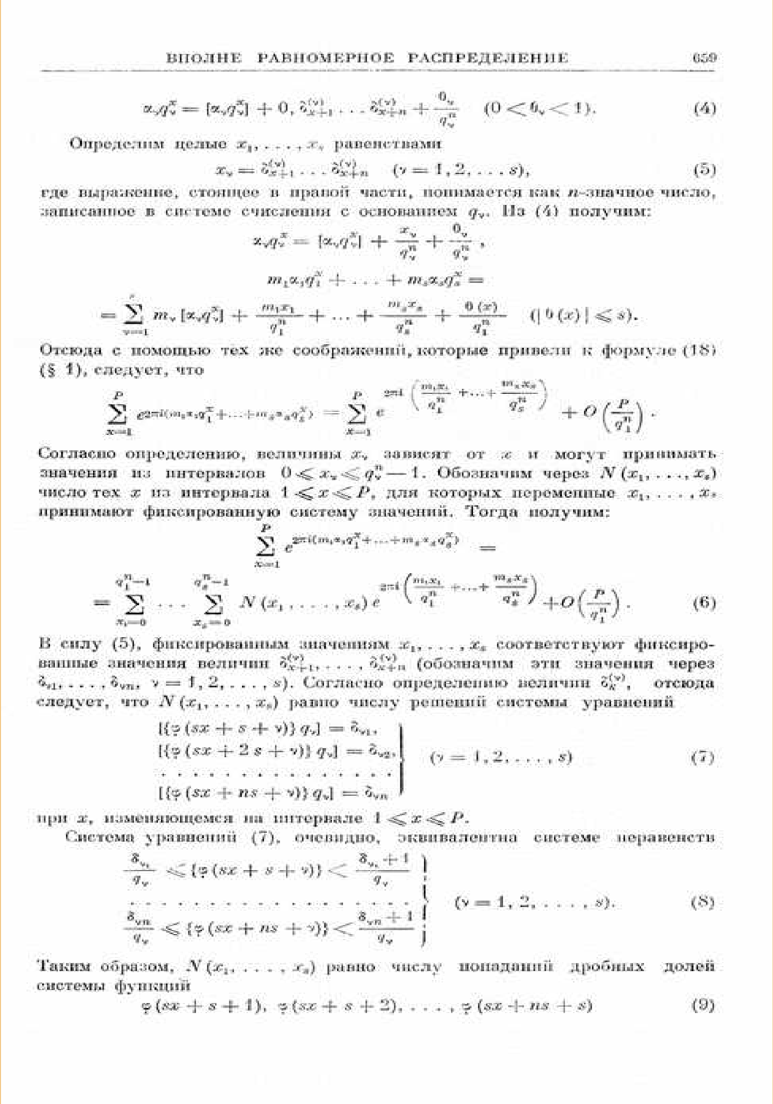
Очевидно, $0\leqslant\delta_k^{(\nu)}\leqslant q_\nu-1$, так что ряд (1) можно рассматривать как запись α_ν в системе счисления с основанием q_ν и вместо (1) писать:

$$\alpha_\nu=0,\delta_1^{(\nu)}\delta_2^{(\nu)}\ldots \quad (\nu=1,2,\ldots,s). \qquad (3)$$

Обозначим через $m_1,\ldots,m_s$ произвольные целые, не равные одновременно нулю, и выберем целое n настолько большим, чтобы выполнялись неравенства $q_\nu^n>|m_\nu|$ $(\nu=1,2,\ldots,s)$. Из (3) следует, что

Николаем Михайловичем было также введено понятие ***совместно нормальных чисел***, построены примеры таких чисел и указаны связи между вполне равномерным распределением и теорией совместно нормальных чисел.

The conception of ***jointly normal numbers*** was also introduced by Nikolay Mikhailovich. He consructed the instances of such numbers and discovered the correlation between quite even distribution and jointly normal numbers theory.



ВПОЛНЕ РАВНОМЕРНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ 659

$$\alpha_\nu q_\nu^x = [\alpha_\nu q_\nu^x] + 0, \delta_{x+1}^{(\nu)} \ldots \delta_{x+n}^{(\nu)} + \frac{\theta_\nu}{q_\nu^n} \quad (0 < \theta_\nu < 1). \tag{4}$$

Определим целые $x_1, \ldots, x_s$ равенствами

$$x_\nu = \delta_{x+1}^{(\nu)} \ldots \delta_{x+n}^{(\nu)} \quad (\nu = 1, 2, \ldots s), \tag{5}$$

где выражение, стоящее в правой части, понимается как n-значное число, записанное в системе счисления с основанием q_ν. Из (4) получим:

$$\alpha_\nu q_\nu^x = [\alpha_\nu q_\nu^x] + \frac{x_\nu}{q_\nu^n} + \frac{\theta_\nu}{q_\nu^n},$$

$$m_1\alpha_1 q_1^x + \ldots + m_s\alpha_s q_s^x =$$

$$= \sum_{\nu=1}^{s} m_\nu [\alpha_\nu q_\nu^x] + \frac{m_1 x_1}{q_1^n} + \ldots + \frac{m_s x_s}{q_s^n} + \frac{\theta(x)}{q_1^n} \quad (|\theta(x)| \leqslant s).$$

Отсюда с помощью тех же соображений, которые привели к формуле (18) (§ 1), следует, что

$$\sum_{x=1}^{P} e^{2\pi i(m_1\alpha_1 q_1^x + \ldots + m_s\alpha_s q_s^x)} = \sum_{x=1}^{P} e^{2\pi i\left(\frac{m_1 x_1}{q_1^n} + \ldots + \frac{m_s x_s}{q_s^n}\right)} + O\left(\frac{P}{q_1^n}\right).$$

Согласно определению, величины x_ν зависят от x и могут принимать значения из интервалов $0 \leqslant x_\nu \leqslant q_\nu^n - 1$. Обозначим через $N(x_1, \ldots, x_s)$ число тех x из интервала $1 \leqslant x \leqslant P$, для которых переменные $x_1, \ldots, x_s$ принимают фиксированную систему значений. Тогда получим:

$$\sum_{x=1}^{P} e^{2\pi i(m_1\alpha_1 q_1^x + \ldots + m_s\alpha_s q_s^x)} =$$

$$= \sum_{x_1=0}^{q_1^n-1} \ldots \sum_{x_s=0}^{q_s^n-1} N(x_1, \ldots, x_s) e^{2\pi i\left(\frac{m_1 x_1}{q_1^n} + \ldots + \frac{m_s x_s}{q_s^n}\right)} + O\left(\frac{P}{q_1^n}\right). \tag{6}$$

В силу (5), фиксированным значениям $x_1, \ldots, x_s$ соответствуют фиксированные значения величин $\delta_{x+1}^{(\nu)}, \ldots, \delta_{x+n}^{(\nu)}$ (обозначим эти значения через $\delta_{\nu 1}, \ldots, \delta_{\nu n}$, $\nu = 1, 2, \ldots, s$). Согласно определению величин $\delta_k^{(\nu)}$, отсюда следует, что $N(x_1, \ldots, x_s)$ равно числу решений системы уравнений

$$\left.\begin{array}{l} [\{\varphi(sx + s + \nu)\} q_\nu] = \delta_{\nu 1}, \\ [\{\varphi(sx + 2s + \nu)\} q_\nu] = \delta_{\nu 2}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ [\{\varphi(sx + ns + \nu)\} q_\nu] = \delta_{\nu n} \end{array}\right\} \quad (\nu = 1, 2, \ldots, s) \tag{7}$$

при x, изменяющемся на интервале $1 \leqslant x \leqslant P$.

Система уравнений (7), очевидно, эквивалентна системе неравенств

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\delta_{\nu 1}}{q_\nu} \leqslant \{\varphi(sx + s + \nu)\} < \frac{\delta_{\nu 1} + 1}{q_\nu} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{\delta_{\nu n}}{q_\nu} \leqslant \{\varphi(sx + ns + \nu)\} < \frac{\delta_{\nu n} + 1}{q_\nu} \end{array}\right\} \quad (\nu = 1, 2, \ldots, s). \tag{8}$$

Таким образом, $N(x_1, \ldots, x_s)$ равно числу попаданий дробных долей системы функций

$$\varphi(sx + s + 1),\ \varphi(sx + s + 2), \ldots, \varphi(sx + ns + s) \tag{9}$$

Николаем Михайловичем было также введено понятие ***совместно нормальных чисел***, построены примеры таких чисел и указаны связи между вполне равномерным распределением и теорией совместно нормальных чисел.

The conception of ***jointly normal numbers*** was also introduced by Nikolay Mikhailovich. He consructed the instances of such numbers and discovered the correlation between quite even distribution and jointly normal numbers theory.

в ns-мерный параллелепипед, определяемый неравенствами (8). Указанный параллелепипед лежит внутри единичного ns-мерного куба; его объем не зависит от выбора величин $\delta_{\nu 1}, \ldots, \delta_{\nu n}$ и равен $(q_1 q_2 \ldots q_s)^{-n}$.

В силу леммы 3, система функций (9) равномерно распределена в ns-мерном пространстве; следовательно,

$$N(x_1, \ldots, x_\nu) = (q_1 q_2 \ldots q_s)^{-n} P + o(P).$$

Пользуясь этим соотношением, получим из (6):

$$\sum_{x=1}^{P} e^{2\pi i (m_1 x_1 q_1^x + \cdots + m_s x_s q_s^x)} =$$

$$= (q_1 \ldots q_s)^{-n} P \sum_{x_1=0}^{q_1^n - 1} \cdots \sum_{x_s=0}^{q_s^n - 1} e^{2\pi i \left(\frac{m_1 x_1}{q_1^n} + \cdots + \frac{m_s x_s}{q_s^n}\right)} + o(P) + O\left(\frac{P}{q_1^n}\right).$$

Согласно определению n, выполняются неравенства $q_\nu^n > |m_\nu|$; следовательно, кратная сумма в правой части последнего равенства обращается в ноль. Таким образом,

$$\sum_{x=1}^{P} e^{2\pi i (m_1 x_1 q_1^x + \cdots + m_s x_s q_s^x)} = o(P) + O\left(\frac{P}{q_1^n}\right),$$

$$\lim_{P\to\infty} \frac{1}{P} \left| \sum_{x=1}^{P} e^{2\pi i (m_1 x_1 q_1^x + \cdots + m_s x_s q_s^x)} \right| = O\left(\frac{1}{q_1^n}\right).$$

Отсюда, благодаря тому, что n можно выбрать произвольно большим, получим:

$$\lim_{P\to\infty} \frac{1}{P} \left| \sum_{x=1}^{P} e^{2\pi i (m_1 x_1 q_1^x + \cdots + m_s x_s q_s^x)} \right| = 0,$$

чем, в силу критерия Вейля, теорема доказана.

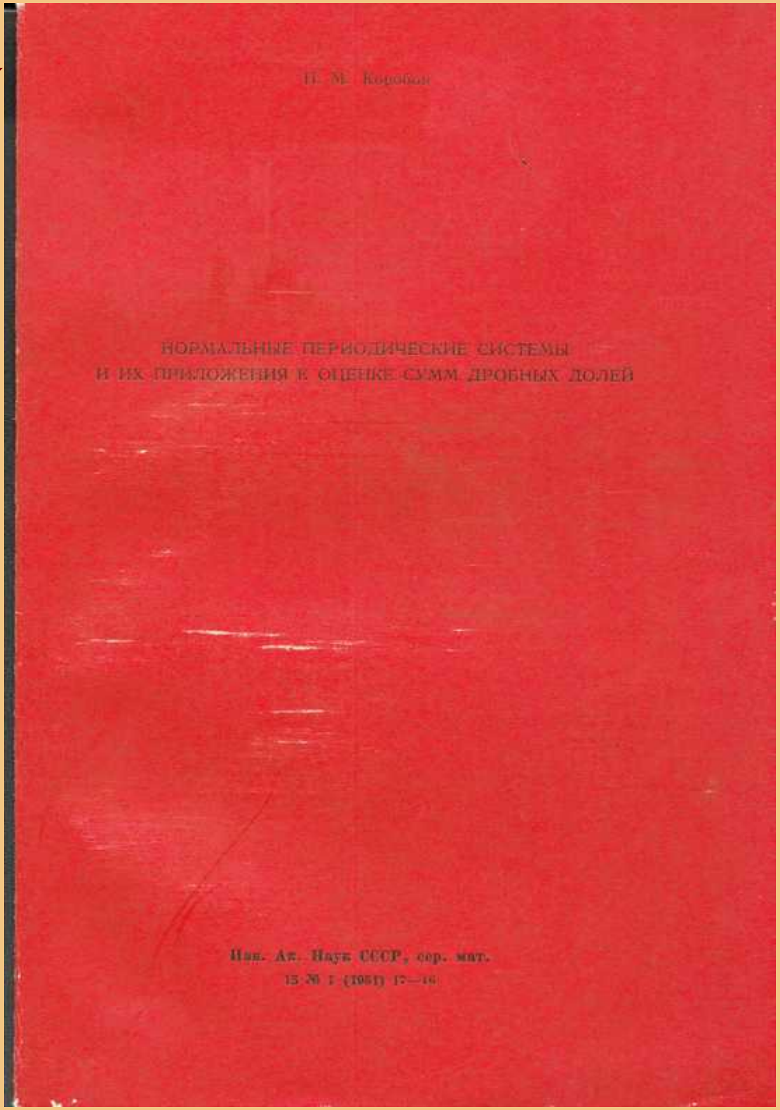
Поступило
15.XII.1955

ЛИТЕРАТУРА

[1] Коробов Н. М., О некоторых вопросах равномерного распределения, Известия Ак. наук СССР, сер. матем., 14 (1950), 215—238.
[2] Коробов Н. М., Некоторые многомерные задачи теории диофантовых приближений, Доклады Ак. наук СССР, 84, № 1 (1952), 13—17.
[3] Коробов Н. М., Числа с ограниченным отношением и их приложения к вопросам диофантовых приближений, Известия Ак. наук СССР, сер. матем., 19 (1955), 361—380.
[4] Коробов Н. М., Дробные доли показательных функций, Труды Матем. инст. им. В. А. Стеклова Ак. наук СССР, т. 38 (1951), 87—96.
[5] Weyl H., Über die Gleichverteilung von Zahlen mod. Eins, Math. Ann., 77 (1916), 313—352.
[6] Van der Corput J. G., Diophantische Ungleichungen, Acta math., 56 (1931), 373—456.

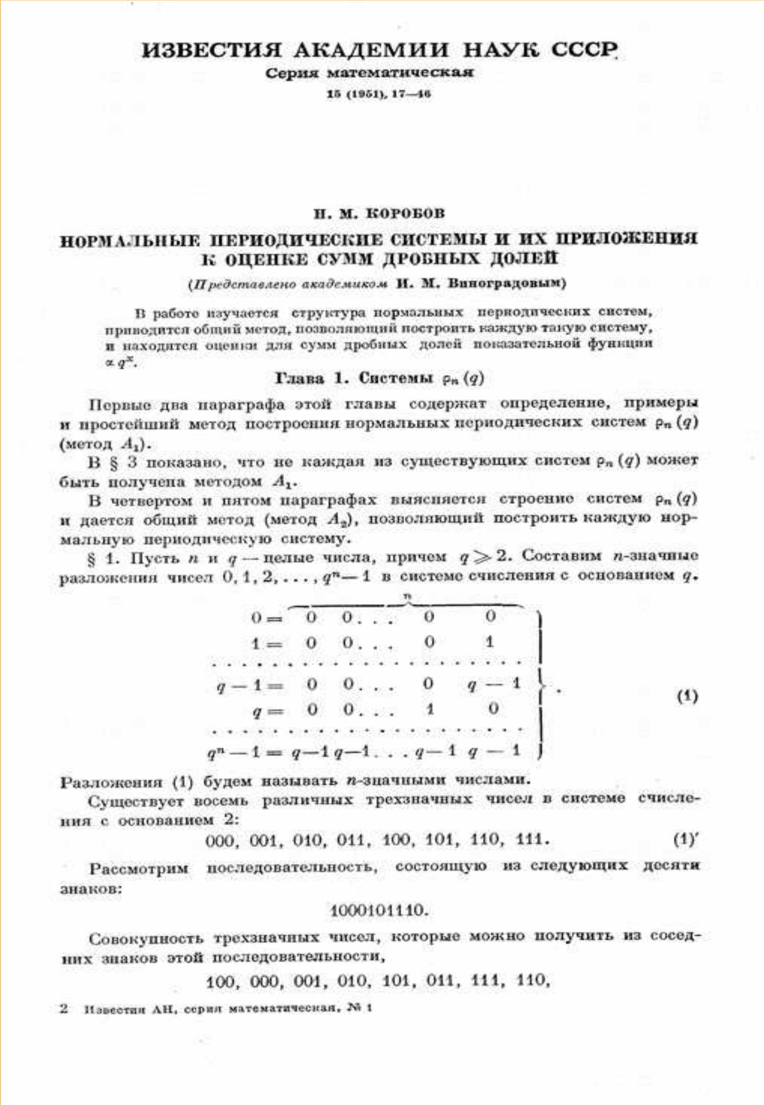
Н. М. Коробов провел детальное изучение ***нормальных периодических систем*** и с их помощью получил неулучшаемые оценки в вопросе о суммах дробных долей показательных функций.

N. M. Korobov studied ***normal periodical systems*** in detail. Using these systems he got the unimprovable estimates solving problems with sums of fractional units of exponential functions.



Н. М. Коробов провел детальное изучение ***нормальных периодических систем*** и с их помощью получил неулучшаемые оценки в вопросе о суммах дробных долей показательных функций.

N. M. Korobov studied ***normal periodical systems*** in detail. Using these systems he got the unimprovable estimates solving problems with sums of fractional units of exponential functions.



ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
15 (1951), 17—46

Н. М. КОРОБОВ

НОРМАЛЬНЫЕ ПЕРИОДИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ К ОЦЕНКЕ СУММ ДРОБНЫХ ДОЛЕЙ

(*Представлено академиком* **И. М. Виноградовым**)

В работе изучается структура нормальных периодических систем, приводится общий метод, позволяющий построить каждую такую систему, и находится оценки для сумм дробных долей показательной функции αq^x.

Глава 1. Системы $\rho_n(q)$

Первые два параграфа этой главы содержат определение, примеры и простейший метод построения нормальных периодических систем $\rho_n(q)$ (метод A_1).

В § 3 показано, что не каждая из существующих систем $\rho_n(q)$ может быть получена методом A_1.

В четвертом и пятом параграфах выясняется строение систем $\rho_n(q)$ и дается общий метод (метод A_2), позволяющий построить каждую нормальную периодическую систему.

§ 1. Пусть n и q — целые числа, причем $q \geqslant 2$. Составим n-значные разложения чисел $0, 1, 2, \ldots, q^n - 1$ в системе счисления с основанием q.

$$\left.\begin{array}{rl} 0 = & \overbrace{0 \quad 0 \ldots \quad 0 \quad 0}^{n} \\ 1 = & 0 \quad 0 \ldots \quad 0 \quad 1 \\ \multicolumn{2}{c}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots} \\ q-1 = & 0 \quad 0 \ldots \quad 0 \quad q-1 \\ q = & 0 \quad 0 \ldots \quad 1 \quad 0 \\ \multicolumn{2}{c}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots} \\ q^n - 1 = & q-1 \; q-1 \ldots q-1 \; q-1 \end{array}\right\} . \qquad (1)$$

Разложения (1) будем называть n-значными числами.

Существует восемь различных трехзначных чисел в системе счисления с основанием 2:

$$000,\ 001,\ 010,\ 011,\ 100,\ 101,\ 110,\ 111. \qquad (1)'$$

Рассмотрим последовательность, состоящую из следующих десяти знаков:

$$1000101110.$$

Совокупность трехзначных чисел, которые можно получить из соседних знаков этой последовательности,

$$100,\ 000,\ 001,\ 010,\ 101,\ 011,\ 111,\ 110,$$

Н.
деталь
перио
помощ
оценки
дробн
функц

N.
period
Using t
unimpr
problem
units of

§ 1. Пусть n и q — целые числа, причем $q \geqslant 2$. Составим n-значные разложения чисел $0, 1, 2, \ldots, q^n - 1$ в системе счисления с основанием q.

$$\left.\begin{array}{rcccc}
 & \multicolumn{4}{c}{\overbrace{\hphantom{q-1\quad q-1 \ldots q-1\quad q-1}}^{n}} \\
0 = & 0 & 0 \ldots & 0 & 0 \\
1 = & 0 & 0 \ldots & 0 & 1 \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
q-1 = & 0 & 0 \ldots & 0 & q-1 \\
q = & 0 & 0 \ldots & 1 & 0 \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
q^n - 1 = & q-1 & q-1 \ldots & q-1 & q-1
\end{array}\right\} . \qquad (1)$$

Разложения (1) будем называть n-значными числами.

Нормальной периодической системой или *системой* $\rho_n(q)$ назовем последовательность из t знаков

$$\delta_1 \delta_2 \ldots \delta_{k+1} \ldots \delta_{k+n} \ldots \delta_t \qquad (4)$$

($t = q^n + n - 1$; δ_ν — целые из интервала $0 \leqslant \delta_\nu \leqslant q - 1$), обладающую тем свойством, что совокупность n-значных чисел

$$\delta_{k+1} \ldots \delta_{k+n} \qquad (k = 0, 1, \ldots, q^n - 1),$$

получающихся из соседних знаков последовательности (4), совпадает с совокупностью всех возможных n-значных чисел (1) в системе счисления с основанием q.

Н. М. Коробов провел детальное изучение ***нормальных периодических систем*** и с их помощью получил неулучшаемые оценки в вопросе о суммах дробных долей показательных функций.

N. M. Korobov studied ***normal periodical systems*** in detail. Using these systems he got the unimprovable estimates solving problems with sums of fractional units of exponential functions.

ки образуют систему $\rho_n(2)$, было проведено в ([3]). Здесь мы получим это доказательство как следствие из более общего метода построения систем $\rho_n(q)$ — метода A_1.

С помощью метода A без труда строятся системы $\rho_5(2)$, $\rho_6(2)$ и т. д.

$$\rho_5(2) = 111110000010001100101001110101101111,$$

$$\rho_6(2) = 11111100000010000110001010001110010$$
$$0101100110100111101010110111011111,$$

$$\rho_7(2) = 1111111000000010000001100001010000$$
$$1110001001000101100011010001111001$$
$$0011001010100101110011011001110100$$
$$111110101011010111101101110111111.$$

§ 2. **Метод** A_1. *Выберем первые n знаков $\delta_1, \ldots, \delta_n$ произвольно. Знаки $\delta_{n+1}, \delta_{n+2}$ и т. д. будем приписывать по следующему общему правилу: пусть уже выписан $k+n-1$ знак*

$$\delta_1 \ldots \delta_n \ldots \delta_{k+1} \ldots \delta_{k+n-1} \qquad (k \geqslant 1). \tag{6}$$

Рассмотрим $n-1$-значное число $\delta_{k+1} \ldots \delta_{k+n-1}$, стоящее на конце последовательности (6). Пусть последние μ знаков этого числа $(0 \leqslant \mu \leqslant n-1)$ образуют наибольшую группу, совпадающую с группой начальных знаков $\delta_1 \delta_2 \ldots \delta_\mu$. Выберем теперь знак δ_{k+n} или любым, отличным от $\delta_{\mu+1}$, но так, чтобы получающееся при этом новое n-значное число $\delta_{k+1} \ldots \delta_{k+n-1} \delta_{k+n}$ не совпадало ни с одним из уже выписанных в (6) n-значных чисел $\delta_{\nu+1} \ldots \delta_{\nu+n}$ $(\nu = 0, 1, \ldots, k-1)$, или равным $\delta_{\mu+1}$, если приписывание любого знака, отличного от $\delta_{\mu+1}$, приводит к уже встречавшемуся в (6) n-значному числу. Процесс приписывания прекращаем, когда приписывание любого знака приводит к уже встречавшемуся n-значному числу.

Пусть невозможность дальнейшего приписывания знаков в последовательности (6) наступила при $k = \tau$ $(\tau \geqslant 1)$. Очевидно, что все n-значные числа, которые встретятся в получившейся при этом последовательности

$$\delta_1 \ldots \delta_n \ldots \delta_\tau \delta_{\tau+1} \ldots \delta_{\tau+n-1}, \tag{7}$$

будут различны. Однако остается неясным, не могло ли приписывание новых знаков закончиться раньше, чем в (7) будет выписано каждое из существующих n-значных чисел.

Таким образом, чтобы доказать совпадение последовательности (7), построенной методом A_1, с некоторой системой $\rho_n(q)$, достаточно проверить, что среди n-значных чисел

$$\delta_{\nu+1} \ldots \delta_{\nu+n} \qquad (\nu = 0, 1, \ldots, \tau-1), \tag{8}$$

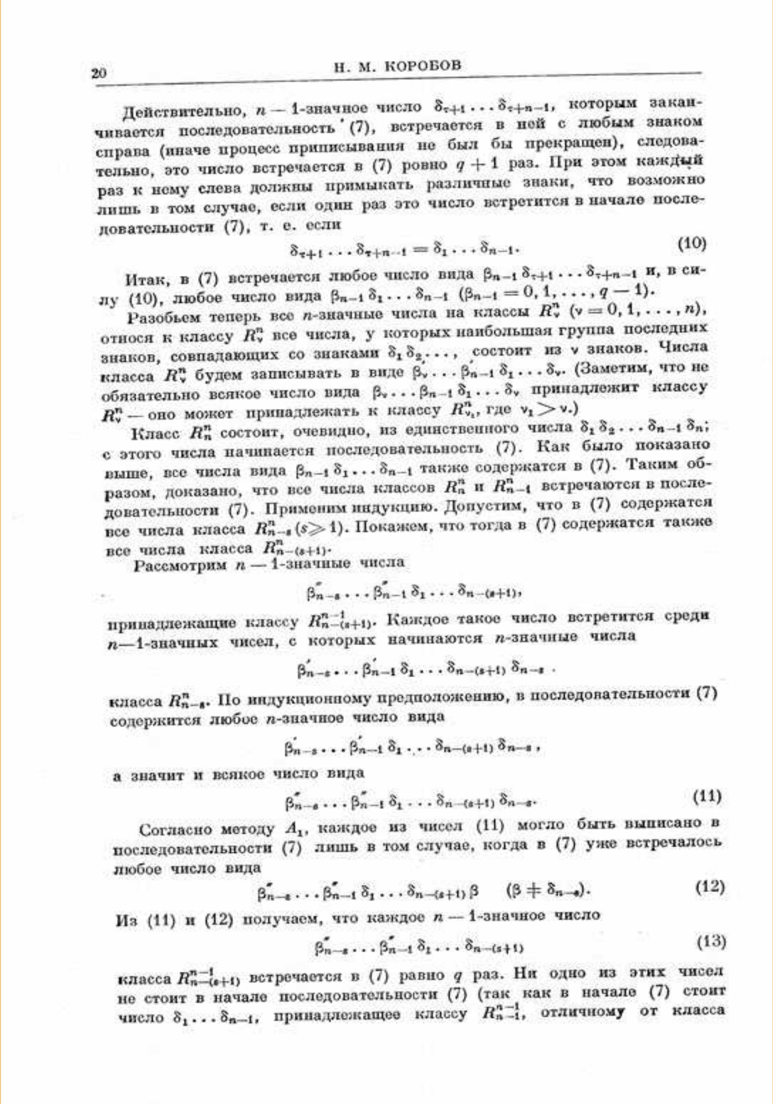
содержащихся в последовательности (7), встретится каждое из существующих n-значных чисел (1).

Обозначим через β и $\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_{n-1}$ величины, каждая из которых, независимо от остальных, может принимать любое из q значений $0, 1, \ldots, q-1$. Покажем сперва, что в последовательности (7) встретится любое число вида

$$\beta_{n-1} \delta_1 \delta_2 \ldots \delta_{n-1} \qquad (\beta_{n-1} = 0, 1, \ldots, q-1). \tag{9}$$

Н. М. Коробов провел детальное изучение ***нормальных периодических систем*** и с их помощью получил неулучшаемые оценки в вопросе о суммах дробных долей показательных функций.

N. M. Korobov studied ***normal periodical systems*** in detail. Using these systems he got the unimprovable estimates solving problems with sums of fractional units of exponential functions.



20 Н. М. КОРОБОВ

Действительно, $n-1$-значное число $\delta_{\tau+1}\ldots\delta_{\tau+n-1}$, которым заканчивается последовательность (7), встречается в ней с любым знаком справа (иначе процесс приписывания не был бы прекращен), следовательно, это число встречается в (7) ровно $q+1$ раз. При этом каждый раз к нему слева должны примыкать различные знаки, что возможно лишь в том случае, если один раз это число встретится в начале последовательности (7), т. е. если

$$\delta_{\tau+1}\ldots\delta_{\tau+n-1}=\delta_1\ldots\delta_{n-1}. \tag{10}$$

Итак, в (7) встречается любое число вида $\beta_{n-1}\delta_{\tau+1}\ldots\delta_{\tau+n-1}$ и, в силу (10), любое число вида $\beta_{n-1}\delta_1\ldots\delta_{n-1}$ ($\beta_{n-1}=0,1,\ldots,q-1$).

Разобьем теперь все n-значные числа на классы R_ν^n ($\nu=0,1,\ldots,n$), относя к классу R_ν^n все числа, у которых наибольшая группа последних знаков, совпадающих со знаками $\delta_1\delta_2\ldots$, состоит из ν знаков. Числа класса R_ν^n будем записывать в виде $\beta_\nu\ldots\beta_{n-1}\delta_1\ldots\delta_\nu$. (Заметим, что не обязательно всякое число вида $\beta_\nu\ldots\beta_{n-1}\delta_1\ldots\delta_\nu$ принадлежит классу R_ν^n — оно может принадлежать к классу $R_{\nu_1}^n$, где $\nu_1>\nu$.)

Класс R_n^n состоит, очевидно, из единственного числа $\delta_1\delta_2\ldots\delta_{n-1}\delta_n$; с этого числа начинается последовательность (7). Как было показано выше, все числа вида $\beta_{n-1}\delta_1\ldots\delta_{n-1}$ также содержатся в (7). Таким образом, доказано, что все числа классов R_n^n и R_{n-1}^n встречаются в последовательности (7). Применим индукцию. Допустим, что в (7) содержатся все числа класса R_{n-s}^n ($s\geqslant 1$). Покажем, что тогда в (7) содержатся также все числа класса $R_{n-(s+1)}^n$.

Рассмотрим $n-1$-значные числа

$$\beta''_{n-s}\ldots\beta''_{n-1}\delta_1\ldots\delta_{n-(s+1)},$$

принадлежащие классу $R_{n-(s+1)}^{n-1}$. Каждое такое число встретится среди $n-1$-значных чисел, с которых начинаются n-значные числа

$$\beta'_{n-s}\ldots\beta'_{n-1}\delta_1\ldots\delta_{n-(s+1)}\delta_{n-s}$$

класса R_{n-s}^n. По индукционному предположению, в последовательности (7) содержится любое n-значное число вида

$$\beta'_{n-s}\ldots\beta'_{n-1}\delta_1\ldots\delta_{n-(s+1)}\delta_{n-s},$$

а значит и всякое число вида

$$\beta''_{n-s}\ldots\beta''_{n-1}\delta_1\ldots\delta_{n-(s+1)}\delta_{n-s}. \tag{11}$$

Согласно методу A_1, каждое из чисел (11) могло быть выписано в последовательности (7) лишь в том случае, когда в (7) уже встречалось любое число вида

$$\beta''_{n-s}\ldots\beta''_{n-1}\delta_1\ldots\delta_{n-(s+1)}\beta \quad (\beta\neq\delta_{n-s}). \tag{12}$$

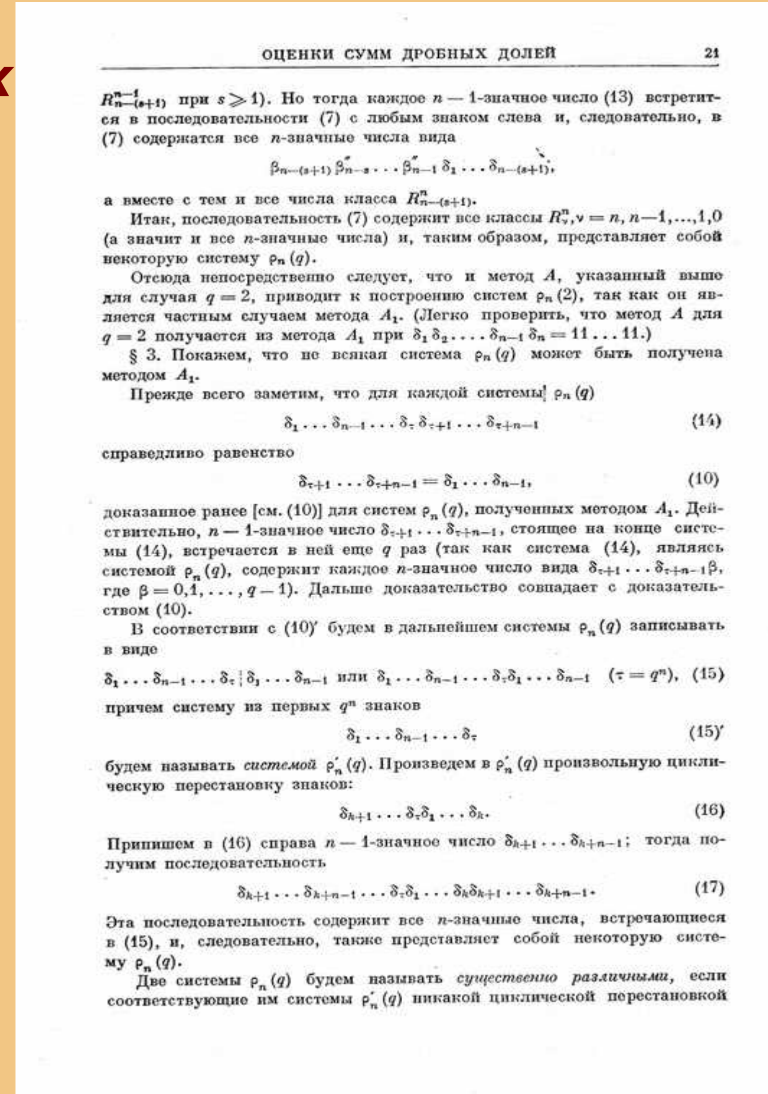
Из (11) и (12) получаем, что каждое $n-1$-значное число

$$\beta''_{n-s}\ldots\beta''_{n-1}\delta_1\ldots\delta_{n-(s+1)} \tag{13}$$

класса $R_{n-(s+1)}^{n-1}$ встречается в (7) равно q раз. Ни одно из этих чисел не стоит в начале последовательности (7) (так как в начале (7) стоит число $\delta_1\ldots\delta_{n-1}$, принадлежащее классу R_{n-1}^{n-1}, отличному от класса

Н. М. Коробов провел детальное изучение ***нормальных периодических систем*** и с их помощью получил неулучшаемые оценки в вопросе о суммах дробных долей показательных функций.

N. M. Korobov studied ***normal periodical systems*** in detail. Using these systems he got the unimprovable estimates solving problems with sums of fractional units of exponential functions.



ОЦЕНКИ СУММ ДРОБНЫХ ДОЛЕЙ 21

$R^{n-1}_{n-(s+1)}$ при $s \geqslant 1$). Но тогда каждое $n-1$-значное число (13) встретится в последовательности (7) с любым знаком слева и, следовательно, в (7) содержатся все n-значные числа вида

$$\beta_{n-(s+1)}\,\beta''_{n-s}\ldots\beta''_{n-1}\,\delta_1\ldots\delta_{n-(s+1)},$$

а вместе с тем и все числа класса $R^n_{n-(s+1)}$.

Итак, последовательность (7) содержит все классы $R^n_\nu, \nu = n, n-1, \ldots, 1, 0$ (а значит и все n-значные числа) и, таким образом, представляет собой некоторую систему $\rho_n(q)$.

Отсюда непосредственно следует, что и метод A, указанный выше для случая $q=2$, приводит к построению систем $\rho_n(2)$, так как он является частным случаем метода A_1. (Легко проверить, что метод A для $q=2$ получается из метода A_1 при $\delta_1\delta_2\ldots\delta_{n-1}\delta_n = 11\ldots11$.)

§ 3. Покажем, что не всякая система $\rho_n(q)$ может быть получена методом A_1.

Прежде всего заметим, что для каждой системы $\rho_n(q)$

$$\delta_1\ldots\delta_{n-1}\ldots\delta_\tau\,\delta_{\tau+1}\ldots\delta_{\tau+n-1} \qquad (14)$$

справедливо равенство

$$\delta_{\tau+1}\ldots\delta_{\tau+n-1} = \delta_1\ldots\delta_{n-1}, \qquad (10)$$

доказанное ранее [см. (10)] для систем $\rho_n(q)$, полученных методом A_1. Действительно, $n-1$-значное число $\delta_{\tau+1}\ldots\delta_{\tau+n-1}$, стоящее на конце системы (14), встречается в ней еще q раз (так как система (14), являясь системой $\rho_n(q)$, содержит каждое n-значное число вида $\delta_{\tau+1}\ldots\delta_{\tau+n-1}\beta$, где $\beta = 0, 1, \ldots, q-1$). Дальше доказательство совпадает с доказательством (10).

В соответствии с (10)' будем в дальнейшем системы $\rho_n(q)$ записывать в виде

$$\delta_1\ldots\delta_{n-1}\ldots\delta_\tau \mid \delta_1\ldots\delta_{n-1} \text{ или } \delta_1\ldots\delta_{n-1}\ldots\delta_\tau\delta_1\ldots\delta_{n-1} \quad (\tau = q^n), \qquad (15)$$

причем систему из первых q^n знаков

$$\delta_1\ldots\delta_{n-1}\ldots\delta_\tau \qquad (15)'$$

будем называть *системой* $\rho'_n(q)$. Произведем в $\rho'_n(q)$ произвольную циклическую перестановку знаков:

$$\delta_{k+1}\ldots\delta_\tau\delta_1\ldots\delta_k. \qquad (16)$$

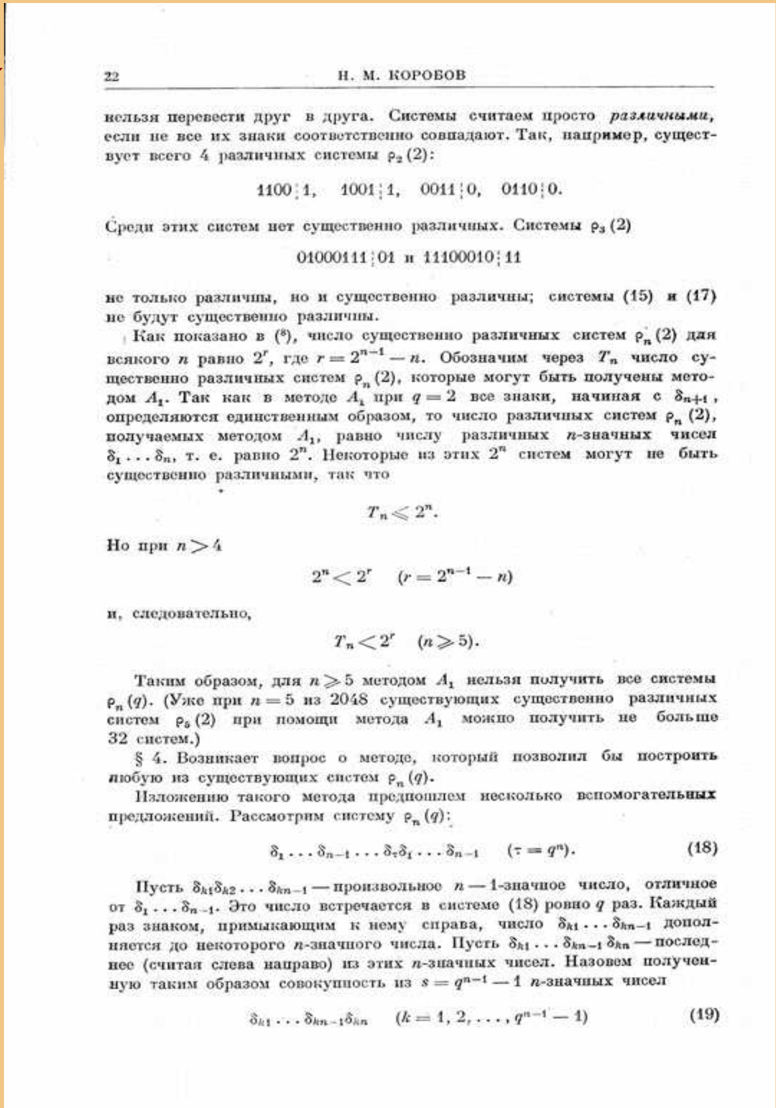
Припишем в (16) справа $n-1$-значное число $\delta_{k+1}\ldots\delta_{k+n-1}$; тогда получим последовательность

$$\delta_{k+1}\ldots\delta_{k+n-1}\ldots\delta_\tau\delta_1\ldots\delta_k\delta_{k+1}\ldots\delta_{k+n-1}. \qquad (17)$$

Эта последовательность содержит все n-значные числа, встречающиеся в (15), и, следовательно, также представляет собой некоторую систему $\rho_n(q)$.

Две системы $\rho_n(q)$ будем называть *существенно различными*, если соответствующие им системы $\rho'_n(q)$ никакой циклической перестановкой

Н. М. Коробов провел детальное изучение ***нормальных периодических систем*** и с их помощью получил неулучшаемые оценки в вопросе о суммах дробных долей показательных функций.



22 Н. М. КОРОБОВ

нельзя перевести друг в друга. Системы считаем просто *различными*, если не все их знаки соответственно совпадают. Так, например, существует всего 4 различных системы $\rho_2(2)$:

$$1100 \vdots 1, \quad 1001 \vdots 1, \quad 0011 \vdots 0, \quad 0110 \vdots 0.$$

Среди этих систем нет существенно различных. Системы $\rho_3(2)$

$$01000111 \vdots 01 \text{ и } 11100010 \vdots 11$$

не только различны, но и существенно различны; системы (15) и (17) не будут существенно различны.

Как показано в ([8]), число существенно различных систем $\rho_n(2)$ для всякого n равно 2^r, где $r = 2^{n-1} - n$. Обозначим через T_n число существенно различных систем $\rho_n(2)$, которые могут быть получены методом A_1. Так как в методе A_1 при $q = 2$ все знаки, начиная с δ_{n+1}, определяются единственным образом, то число различных систем $\rho_n(2)$, получаемых методом A_1, равно числу различных n-значных чисел $\delta_1 \dots \delta_n$, т. е. равно 2^n. Некоторые из этих 2^n систем могут не быть существенно различными, так что

$$T_n \leqslant 2^n.$$

Но при $n > 4$

$$2^n < 2^r \quad (r = 2^{n-1} - n)$$

и, следовательно,

$$T_n < 2^r \quad (n \geqslant 5).$$

Таким образом, для $n \geqslant 5$ методом A_1 нельзя получить все системы $\rho_n(q)$. (Уже при $n = 5$ из 2048 существующих существенно различных систем $\rho_5(2)$ при помощи метода A_1 можно получить не больше 32 систем.)

§ 4. Возникает вопрос о методе, который позволил бы построить любую из существующих систем $\rho_n(q)$.

Изложению такого метода предпошлем несколько вспомогательных предложений. Рассмотрим систему $\rho_n(q)$:

$$\delta_1 \dots \delta_{n-1} \dots \delta_\tau \delta_1 \dots \delta_{n-1} \quad (\tau = q^n). \tag{18}$$

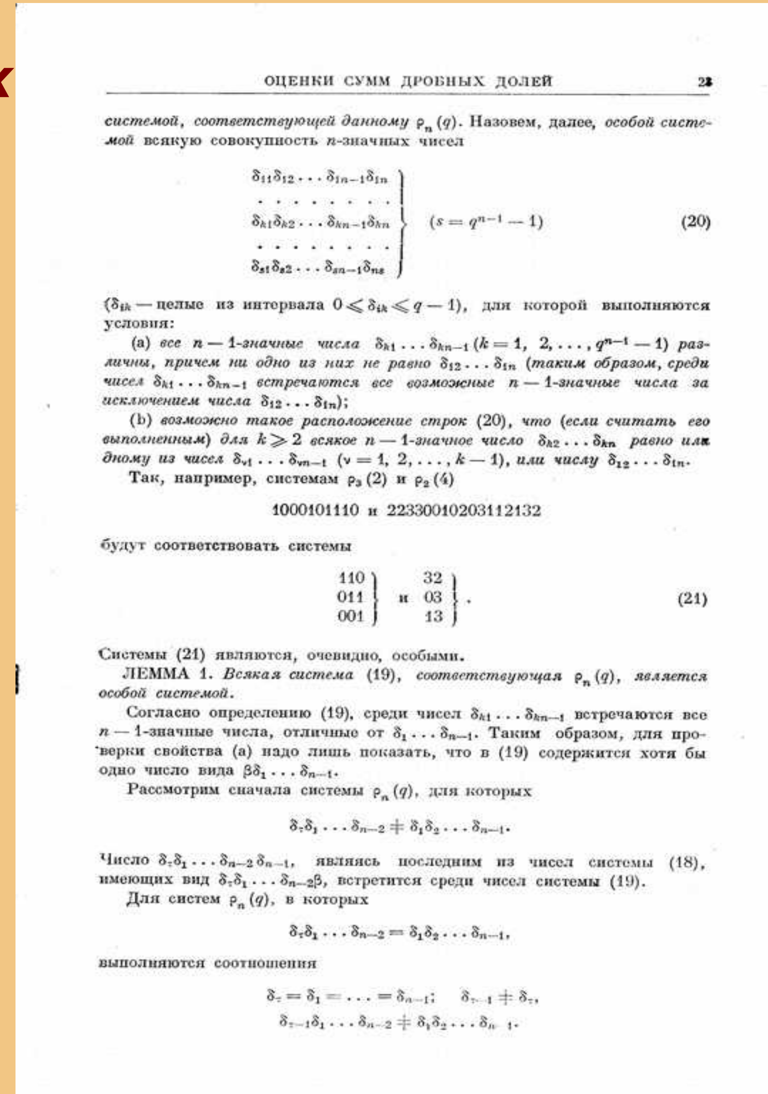
Пусть $\delta_{k1}\delta_{k2} \dots \delta_{kn-1}$ — произвольное $n-1$-значное число, отличное от $\delta_1 \dots \delta_{n-1}$. Это число встречается в системе (18) ровно q раз. Каждый раз знаком, примыкающим к нему справа, число $\delta_{k1} \dots \delta_{kn-1}$ дополняется до некоторого n-значного числа. Пусть $\delta_{k1} \dots \delta_{kn-1}\delta_{kn}$ — последнее (считая слева направо) из этих n-значных чисел. Назовем полученную таким образом совокупность из $s = q^{n-1} - 1$ n-значных чисел

$$\delta_{k1} \dots \delta_{kn-1}\delta_{kn} \quad (k = 1, 2, \dots, q^{n-1} - 1) \tag{19}$$

N. M. Korobov studied ***normal periodical systems*** in detail. Using these systems he got the unimprovable estimates solving problems with sums of fractional units of exponential functions.

Н. М. Коробов провел детальное изучение ***нормальных периодических систем*** и с их помощью получил неулучшаемые оценки в вопросе о суммах дробных долей показательных функций.

N. M. Korobov studied ***normal periodical systems*** in detail. Using these systems he got the unimprovable estimates solving problems with sums of fractional units of exponential functions.



системой, соответствующей данному $\rho_n(q)$. Назовем, далее, *особой системой* всякую совокупность n-значных чисел

$$\left.\begin{array}{c} \delta_{11}\delta_{12}\ldots\delta_{1n-1}\delta_{1n} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \delta_{k1}\delta_{k2}\ldots\delta_{kn-1}\delta_{kn} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \delta_{s1}\delta_{s2}\ldots\delta_{sn-1}\delta_{ns} \end{array}\right\} \quad (s = q^{n-1} - 1) \qquad (20)$$

(δ_{ik} — целые из интервала $0 \leqslant \delta_{ik} \leqslant q-1$), для которой выполняются условия:

(a) *все* $n-1$*-значные числа* $\delta_{k1}\ldots\delta_{kn-1}$ $(k = 1, 2, \ldots, q^{n-1}-1)$ *различны, причем ни одно из них не равно* $\delta_{12}\ldots\delta_{1n}$ *(таким образом, среди чисел* $\delta_{k1}\ldots\delta_{kn-1}$ *встречаются все возможные* $n-1$*-значные числа за исключением числа* $\delta_{12}\ldots\delta_{1n}$*)*;

(b) *возможно такое расположение строк* (20), *что (если считать его выполненным) для* $k \geqslant 2$ *всякое* $n-1$*-значное число* $\delta_{k2}\ldots\delta_{kn}$ *равно одному из чисел* $\delta_{\nu1}\ldots\delta_{\nu n-1}$ $(\nu = 1, 2, \ldots, k-1)$, *или числу* $\delta_{12}\ldots\delta_{1n}$.

Так, например, системам $\rho_3(2)$ и $\rho_2(4)$

1000101110 и 22330010203112132

будут соответствовать системы

$$\left.\begin{array}{c} 110 \\ 011 \\ 001 \end{array}\right\} \text{ и } \left.\begin{array}{c} 32 \\ 03 \\ 13 \end{array}\right\}. \qquad (21)$$

Системы (21) являются, очевидно, особыми.

ЛЕММА 1. *Всякая система* (19), *соответствующая* $\rho_n(q)$, *является особой системой.*

Согласно определению (19), среди чисел $\delta_{k1}\ldots\delta_{kn-1}$ встречаются все $n-1$-значные числа, отличные от $\delta_1\ldots\delta_{n-1}$. Таким образом, для проверки свойства (a) надо лишь показать, что в (19) содержится хотя бы одно число вида $\beta\delta_1\ldots\delta_{n-1}$.

Рассмотрим сначала системы $\rho_n(q)$, для которых

$$\delta_\tau\delta_1\ldots\delta_{n-2} \neq \delta_1\delta_2\ldots\delta_{n-1}.$$

Число $\delta_\tau\delta_1\ldots\delta_{n-2}\delta_{n-1}$, являясь последним из чисел системы (18), имеющих вид $\delta_\tau\delta_1\ldots\delta_{n-2}\beta$, встретится среди чисел системы (19).

Для систем $\rho_n(q)$, в которых

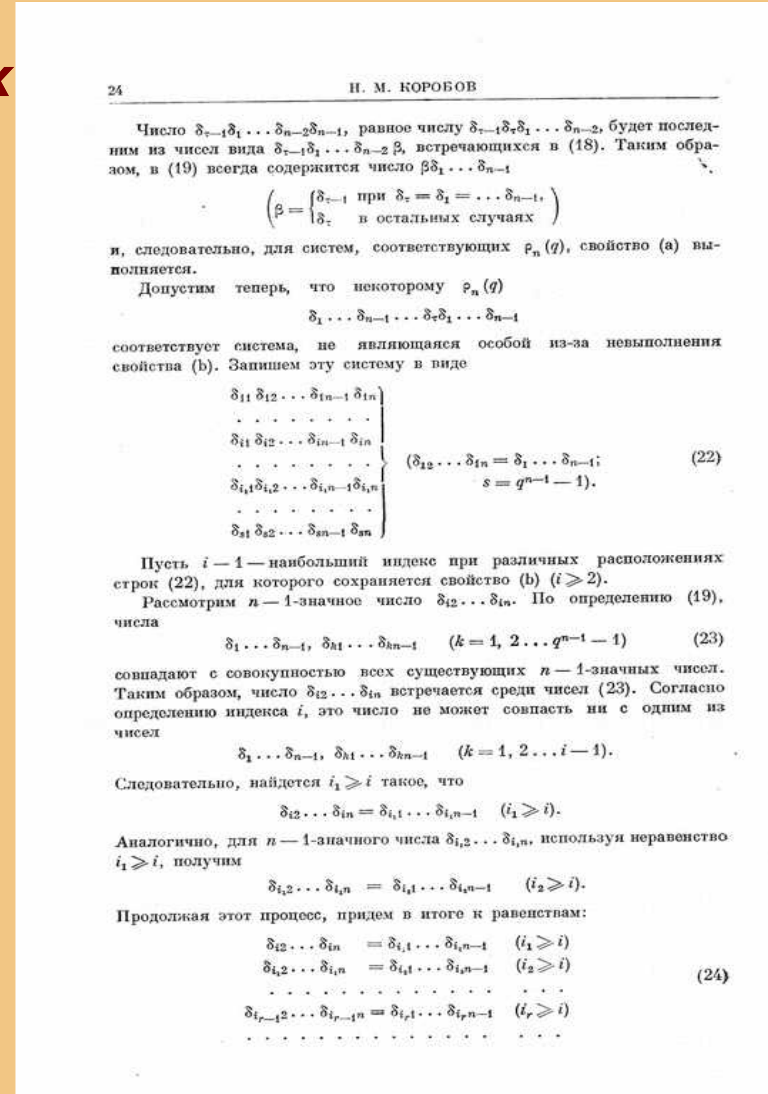
$$\delta_\tau\delta_1\ldots\delta_{n-2} = \delta_1\delta_2\ldots\delta_{n-1},$$

выполняются соотношения

$$\delta_\tau = \delta_1 = \ldots = \delta_{n-1}; \quad \delta_{\tau-1} \neq \delta_\tau,$$
$$\delta_{\tau-1}\delta_1\ldots\delta_{n-2} \neq \delta_1\delta_2\ldots\delta_{n-1}.$$

Н. М. Коробов провел детальное изучение ***нормальных периодических систем*** и с их помощью получил неулучшаемые оценки в вопросе о суммах дробных долей показательных функций.

N. M. Korobov studied ***normal periodical systems*** in detail. Using these systems he got the unimprovable estimates solving problems with sums of fractional units of exponential functions.



Число $\delta_{\tau-1}\delta_1 \ldots \delta_{n-2}\delta_{n-1}$, равное числу $\delta_{\tau-1}\delta_\tau\delta_1 \ldots \delta_{n-2}$, будет последним из чисел вида $\delta_{\tau-1}\delta_1 \ldots \delta_{n-2}\,\beta$, встречающихся в (18). Таким образом, в (19) всегда содержится число $\beta\delta_1 \ldots \delta_{n-1}$

$$\left(\beta = \begin{cases} \delta_{\tau-1} & \text{при } \delta_\tau = \delta_1 = \ldots \delta_{n-1}, \\ \delta_\tau & \text{в остальных случаях} \end{cases}\right)$$

и, следовательно, для систем, соответствующих $\rho_n(q)$, свойство (a) выполняется.

Допустим теперь, что некоторому $\rho_n(q)$

$$\delta_1 \ldots \delta_{n-1} \ldots \delta_\tau\delta_1 \ldots \delta_{n-1}$$

соответствует система, не являющаяся особой из-за невыполнения свойства (b). Запишем эту систему в виде

$$\left.\begin{matrix} \delta_{11}\,\delta_{12} \ldots \delta_{1n-1}\,\delta_{1n} \\ \ldots\ldots\ldots \\ \delta_{i1}\,\delta_{i2} \ldots \delta_{in-1}\,\delta_{in} \\ \ldots\ldots\ldots \\ \delta_{i_1 1}\delta_{i_1 2} \ldots \delta_{i_1 n-1}\delta_{i_1 n} \\ \ldots\ldots\ldots \\ \delta_{s1}\,\delta_{s2} \ldots \delta_{sn-1}\,\delta_{sn} \end{matrix}\right\} \quad \begin{matrix} (\delta_{12} \ldots \delta_{1n} = \delta_1 \ldots \delta_{n-1}; \\ s = q^{n-1} - 1). \end{matrix} \qquad (22)$$

Пусть $i-1$ — наибольший индекс при различных расположениях строк (22), для которого сохраняется свойство (b) $(i \geqslant 2)$.

Рассмотрим $n-1$-значное число $\delta_{i2} \ldots \delta_{in}$. По определению (19), числа

$$\delta_1 \ldots \delta_{n-1}, \ \delta_{k1} \ldots \delta_{kn-1} \quad (k = 1, 2 \ldots q^{n-1} - 1) \qquad (23)$$

совпадают с совокупностью всех существующих $n-1$-значных чисел. Таким образом, число $\delta_{i2} \ldots \delta_{in}$ встречается среди чисел (23). Согласно определению индекса i, это число не может совпасть ни с одним из чисел

$$\delta_1 \ldots \delta_{n-1}, \ \delta_{k1} \ldots \delta_{kn-1} \quad (k = 1, 2 \ldots i-1).$$

Следовательно, найдется $i_1 \geqslant i$ такое, что

$$\delta_{i2} \ldots \delta_{in} = \delta_{i_1 1} \ldots \delta_{i_1 n-1} \quad (i_1 \geqslant i).$$

Аналогично, для $n-1$-значного числа $\delta_{i_1 2} \ldots \delta_{i_1 n}$, используя неравенство $i_1 \geqslant i$, получим

$$\delta_{i_1 2} \ldots \delta_{i_1 n} = \delta_{i_2 1} \ldots \delta_{i_2 n-1} \quad (i_2 \geqslant i).$$

Продолжая этот процесс, придем в итоге к равенствам:

$$\begin{matrix} \delta_{i2} \ldots \delta_{in} = \delta_{i_1 1} \ldots \delta_{i_1 n-1} & (i_1 \geqslant i) \\ \delta_{i_1 2} \ldots \delta_{i_1 n} = \delta_{i_2 1} \ldots \delta_{i_2 n-1} & (i_2 \geqslant i) \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots \\ \delta_{i_{r-1} 2} \ldots \delta_{i_{r-1} n} = \delta_{i_r 1} \ldots \delta_{i_r n-1} & (i_r \geqslant i) \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots \end{matrix} \qquad (24)$$

Н. М. Коробов провел детальное изучение ***нормальных периодических систем*** и с их помощью получил неулучшаемые оценки в вопросе о суммах дробных долей показательных функций.

N. M. Korobov studied ***normal periodical systems*** in detail. Using these systems he got the unimprovable estimates solving problems with sums of fractional units of exponential functions.

Очевидно, наступит момент, когда очередное $n-1$-значное число $\delta_{i_r 2}\ldots\delta_{i_r n}$ совпадет с одним из чисел

$$\delta_{i_\nu 1}\ldots\delta_{i_\nu n-1}\quad(\nu=0,1,\ldots,r;\ i_0=i).$$

Пусть такое совпадение наступило для $\nu=p$:

$$\delta_{i_r 2}\ldots\delta_{i_r n}=\delta_{i_p 1}\ldots\delta_{i_p n-1}\quad(0\leqslant p\leqslant r).$$

Положим $\delta_{i_\nu 1}=\lambda_\nu$ и рассмотрим последовательность

$$\lambda_p\lambda_{p+1}\ldots\lambda_r\lambda_{r+1}\ldots\lambda_{r+n-1}. \tag{25}$$

В силу (24) получим

$$\lambda_p\lambda_{p+1}\ldots\lambda_{p+n-1}=\delta_{i_p 1}\delta_{i_{p+1}1}\ldots\delta_{i_{p+n-1}1}=\delta_{i_p 1}\delta_{i_p 2}\ldots\delta_{i_p n}.$$

Аналогично,

$$\lambda_{p+1}\lambda_{p+2}\ldots\lambda_{p+n}=\delta_{i_{p+1}1}\delta_{i_{p+1}2}\ldots\delta_{i_{p+1}n},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\lambda_r\lambda_{r+1}\ldots\lambda_{r+n-1}=\delta_{i_r 1}\delta_{i_r 2}\ldots\delta_{i_r n}.$$

Таким образом, n-значные числа

$$\lambda_\nu\ldots\lambda_{\nu+n-1}\quad(\nu=p,\ p+1,\ldots,r),$$

содержащиеся в последовательности (25), принадлежат системе (22); все $n-1$-значные числа

$$\lambda_\nu\ldots\lambda_{\nu+n-2}\quad(\nu=p,\ p+1,\ldots,r+1)$$

встречаются среди чисел (24) и, следовательно, отличны от $\delta_1\ldots\delta_{n-1}$. Наконец,

$$\lambda_{r+1}\ldots\lambda_{r+n-1}=\delta_{i_r 2}\ldots\delta_{i_r n}=\delta_{i_p 1}\ldots\delta_{i_p n-1}=\lambda_p\ldots\lambda_{p+n-2},$$

так что

$$\lambda_r\lambda_{r+1}\ldots\lambda_{r+n-1}=\lambda_r\lambda_p\ldots\lambda_{p+n-2}. \tag{26}$$

Пусть $p<r$. Легко показать, что каждое n-значное число $\lambda_\nu\ldots\lambda_{\nu+n-1}$ $(\nu=p,\ldots,r-1)$ встретится в $\rho_n(q)$ левее числа $\lambda_{\nu+1}\ldots\lambda_{\nu+n}$.

Действительно, согласно определению (22), число $\lambda_{\nu+1}\ldots\lambda_{\nu+n-1}\lambda_{\nu+n}$ является в $\rho_n(q)$ последним из n-значных чисел, начинающихся с $\lambda_{\nu+1}\ldots\lambda_{\nu+n-1}$. Таким образом, $\lambda_\nu\lambda_{\nu+1}\ldots\lambda_{\nu+n-1}$ могло бы встретиться правее числа $\lambda_{\nu+1}\ldots\lambda_{\nu+n-1}\lambda_{\nu+n}$ лишь в случае, если бы оно стояло на конце $\rho_n(q)$, что невозможно, так как $\lambda_\nu\ldots\lambda_{\nu+n-1}\neq\delta_1\ldots\delta_{n-1}$.

Отсюда следует, что при $\nu<\nu_1$ каждое n-значное число $\lambda_\nu\ldots\lambda_{\nu+n-1}$ встретится в $\rho_n(q)$ раньше, чем любое из чисел $\lambda_{\nu_1}\ldots\lambda_{\nu_1+n-1}$. В частности, $\lambda_p\ldots\lambda_{p+n-1}$ встретится левее числа $\lambda_r\ldots\lambda_{r+n-1}$, что невозможно, так как, согласно (26),

$$\lambda_r\lambda_{r+1}\ldots\lambda_{r+n-1}=\lambda_r\lambda_p\ldots\lambda_{p+n-2}$$

и

$$\lambda_p\ldots\lambda_{p+n-2}\neq\delta_1\ldots\delta_{n-1}.$$

Н. М. Коробов провел детальное изучение ***нормальных периодических систем*** и с их помощью получил неулучшаемые оценки в вопросе о суммах дробных долей показательных функций.

N. M. Korobov studied ***normal periodical systems*** in detail. Using these systems he got the unimprovable estimates solving problems with sums of fractional units of exponential functions.

В случае $p = r$, пользуясь (26), получим

$$\lambda_r \lambda_{r+1} \ldots \lambda_{r+n-1} = \lambda_r \lambda_r \ldots \lambda_r,$$

что снова невозможно, так как система, соответствующая ρ_n, не может содержать чисел, состоящих из одинаковых знаков.

Полученное противоречие доказывает лемму.

ЛЕММА 2. *Каждая из существующих особых систем может быть получена следующим методом:*

Метод *B*. *В первой строке выписываем любое n-значное число $\delta_{11} \delta_{12} \ldots \delta_{1n-1} \delta_{1n}$, не все знаки которого одинаковы. (Таким образом, $\delta_{11} \ldots \delta_{1n-1} \neq \delta_{12} \ldots \delta_{1n}$.) Все остальные строки, начиная со второй, троим по следующему общему правилу: пусть уже выписано k строк* $(k \geqslant 1)$

$$\begin{array}{c} \delta_{11} \delta_{12} \delta_{13} \ldots \delta_{1n-1} \delta_{1n}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \delta_{k1} \delta_{k2} \delta_{k3} \ldots \delta_{kn-1} \delta_{kn}. \end{array}$$

Рассмотрим $n-1$-значные числа

$$\delta_{12} \ldots \delta_{1n},\ \delta_{\nu 1} \ldots \delta_{\nu n-1} \quad (\nu = 1, 2, \ldots, k). \tag{27}$$

Назовем допустимыми числами те числа $\mu_1 \ldots \mu_{n-1}$ из совокупности (27), *для которых $\mu_1 \ldots \mu_{n-2} = \delta_{13} \ldots \delta_{1n}$, если $\delta_{13} \ldots \delta_{1n}$ встречалось среди чисел $\delta_{\nu 2} \ldots \delta_{\nu n-1}$ $(\nu = 1, 2, \ldots, k)$ меньше $q-1$ раза, а также те, для которых $\mu_1 \ldots \mu_{n-2} \neq \delta_{13} \ldots \delta_{1n}$, если $\mu_1 \ldots \mu_{n-2}$ встречалось среди чисел $\delta_{\nu 2} \ldots \delta_{\nu n-1}$ $(\nu = 1, 2, \ldots, k)$ меньше q раз.*

Для построения $k+1$-й строки выберем $\delta_{k+1\,2} \ldots \delta_{k+1\,n}$ равным любому из допустимых чисел; знак $\delta_{k+1\,1}$ выберем так, чтобы число $\delta_{k+1\,1} \ldots \delta_{k+1\,n-1}$ отличалось от любого из чисел (27).

Таким образом, $k+1$-я строка построена. Построение методом B считаем законченным, когда построение очередной строки окажется невозможным.

Докажем сперва, что метод B всегда приводит к некоторой особой системе.

Действительно, процесс построения строк не может закончиться из-за невозможности выбрать $\delta_{k+1\,1}$ (это следует из выбора допустимых чисел). Таким образом, построение заканчивается из-за невозможности выбрать $\delta_{k+1\,2} \ldots \delta_{k+1\,n}$, т. е. из-за того, что для некоторого $k = s$ группа допустимых чисел не будет содержать ни одного числа.

Выпишем строки, которые удается построить методом B:

$$\left.\begin{array}{llll} \delta_{11} & \delta_{12} & \ldots \delta_{1\,n-1} & \delta_{1\,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \delta_{k1} & \delta_{k2} & \ldots \delta_{k\,n-1} & \delta_{k\,n} \\ \delta_{k+1\,1} & \delta_{k+1\,2} & \ldots \delta_{k+1\,n-1} & \delta_{k+1\,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \delta_{s1} & \delta_{s2} & \ldots \delta_{s\,n-1} & \delta_{s\,n} \end{array}\right\}. \tag{28}$$

Так как каждое из чисел $\delta_{k+1\,2} \ldots \delta_{k+1\,n}$ содержится среди чисел (27) $(k = 1, 2, \ldots, s-1)$, то можно утверждать, что для системы (28)

Н. М. Коробов провел детальное изучение ***нормальных периодических систем*** и с их помощью получил неулучшаемые оценки в вопросе о суммах дробных долей показательных функций.

N. M. Korobov studied ***normal periodical systems*** in detail. Using these systems he got the unimprovable estimates solving problems with sums of fractional units of exponential functions.

выполняется свойство (b). Далее, из метода выбора знаков $\delta_{k+1\,1}$ следует, что все $n-1$-значные числа

$$\left.\begin{array}{c} \delta_{11}\ldots\delta_{1\,n-1} \\ \cdots\cdots\cdots \\ \delta_{s\,1}\ldots\delta_{s\,n-1} \end{array}\right\} \qquad (29)$$

различны и не равны $\delta_{12}\ldots\delta_{1\,n}$. Таким образом, остается показать, что $s=q^{n-1}-1$, т. е. что среди чисел (29) содержатся все $n-1$-значные числа, кроме $\delta_{12}\ldots\delta_{1\,n}$.

Рассмотрим числа (27) для $k=s$:

$$\delta_{12}\ldots\delta_{1\,n} \text{ и } \delta_{\nu\,1}\ldots\delta_{\nu\,n-1} \qquad (\nu=1,\ 2,\ \ldots,\ s). \qquad (30)$$

Число $\delta_{12}\ldots\delta_{1\,n-1}$ встречается среди чисел $\delta_{\nu\,2}\ldots\delta_{\nu\,n-1}(\nu=1,2,\ldots s)$ $q-1$ или q раз, смотря по тому, совпадает оно с числом $\delta_{13}\ldots\delta_{1\,n}$ или нет (иначе группа допустимых чисел для $k=s$ содержала бы число $\delta_{12}\ldots\delta_{1\,n}$ и не была бы пустой). Но тогда среди чисел (30) встречается любое число вида

$$\beta_1\delta_{12}\ldots\delta_{1\,n-1} \qquad (\beta_1=0,1,\ldots,q-1).$$

Допустим, что среди чисел (30) встречается любое число вида

$$\beta_i\beta_{i-1}\ldots\beta_1\delta_{12}\ldots\delta_{1\,n-i} \qquad (0\leqslant\beta_j\leqslant q-1;\ j=1,2,\ldots,i).$$

Тогда число $\beta_i\ldots\beta_1\delta_{12}\ldots\delta_{1\,n-i-1}$ встречается среди чисел $\delta_{\nu\,2}\ldots\delta_{\nu n-1}$ $(\nu=1,2\ldots s)$ $q-1$ или q раз, смотря по тому, совпадает оно с $\delta_{13}\ldots\delta_{1\,n}$ или нет. Следовательно, любое число вида

$$\beta_{i+1}\beta_i\ldots\beta_1\delta_{12}\ldots\delta_{1\,n-(i+1)}$$

также встречается среди чисел (30).

Таким образом, индукцией получаем, что среди чисел (30) встречается каждое число вида $\beta_{n-1}\beta_{n-2}\ldots\beta_1$, т. е. каждое $n-1$-значное число.

Следовательно,

$$s+1=q^{n-1},$$

и система (28) является особой.

Покажем теперь, что методом B можно получить любую из существующих особых систем. Допустим, что особая система

$$\left.\begin{array}{lllll} \delta_{11} & \delta_{12} & \ldots & \delta_{1\,n-1} & \delta_{1\,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \delta_{i\,1} & \delta_{i\,2} & \ldots & \delta_{i\,n-1} & \delta_{i\,n} \\ \delta_{i+1\,1} & \delta_{i+1\,2} & \ldots & \delta_{i+1\,n-1} & \delta_{i+1\,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \delta_{s\,1} & \delta_{s\,2} & \ldots & \delta_{s\,n-1} & \delta_{s\,n} \end{array}\right\} \quad (s=q^{n-1}-1) \qquad (31)$$

не может быть получена методом B.

Обозначим через i наибольшее число строк этой системы, построение которых методом B возможно. Так как первая строка системы (31) должна удовлетворить единственному требованию $\delta_{11}\ldots\delta_{1\,n-1}\neq\delta_{12}\ldots\delta_{1\,n}$ — тому же, как и первая строка в методе B, то получим, что $i\geqslant 1$.

Н. М. Коробов провел детальное изучение ***нормальных периодических систем*** и с их помощью получил неулучшаемые оценки в вопросе о суммах дробных долей показательных функций.

ТЕОРЕМА. *Последовательности, построенные методом* A_2, *представляют собой системы* $\rho_n(q)$; *каждая из существующих систем* $\rho_n(q)$ *может быть получена методом* A_2.

N. ... ***periodical systems*** in detail. Using these systems he got the unimprovable estimates solving problems with sums of fractional units of exponential functions.

28 Н. М. КОРОБОВ

Рассмотрим $(i+1)$-ю строку системы (31). Число $\delta_{i+11} \ldots \delta_{i+1\,n-1}$, по свойству (a), отлично от чисел

$$\delta_{12} \ldots \delta_{1n} \text{ и } \delta_{\nu 1} \ldots \delta_{\nu n-1} \quad (\nu = 1, 2 \ldots i). \tag{31}$$

Следовательно, $n-2$-значное число $\delta_{i+12} \ldots \delta_{i+1\,n-1}$ встречается среди чисел $\delta_{\nu 2} \ldots \delta_{\nu n-1}$ $(\nu = 1, 2 \ldots i)$ меньше чем $q-1$ или чем q раз, в зависимости от выполнения или невыполнения равенства

$$\delta_{\nu 2} \ldots \delta_{\nu n-1} = \delta_{13} \ldots \delta_{1n}.$$

Так как, кроме того, из свойства (b) следует, что число $\delta_{i+12} \ldots \delta_{i+1n}$ совпадает с одним из чисел (31)′, то $\delta_{i+12} \ldots \delta_{i+1n}$ является одним из допустимых чисел. Отсюда следует возможность построения методом B $i+1$-й строки системы (31), что противоречит выбору индекса i.

Итак, особая система (31) может быть построена методом B, и, таким образом, лемма 2 доказана полностью.

§ 5. Перейдем к формулировке общего метода построения систем $\rho_n(q)$.

Метод A_2. *Первые n знаков $\delta_1\delta_2 \ldots \delta_n$ выписываем произвольно.* ...

... заканчиваем, когда приписывание ... встречавшемуся n-значному числу.

ТЕОРЕМА. *Последовательности, построенные методом A_2, представляют собой системы $\rho_n(q)$; каждая из существующих систем $\rho_n(q)$ может быть получена методом A_2.*

Доказательство. Пусть приписывание знаков в последовательности (32) закончилось при $k = \tau$ $(\tau \geqslant 1)$:

$$\delta_1 \ldots \delta_{n-1} \ldots \delta_\tau \delta_{\tau+1} \ldots \delta_{\tau+n-1}. \tag{33}$$

Из выбора знаков δ_{k+n} $(k = 1, 2, \ldots, \tau-1)$ следует, что все n-значные числа, входящие в последовательность (33), различны. Таким образом, (33) будет системой $\rho_n(q)$, если среди чисел

$$\delta_{\nu+1} \ldots \delta_{\nu+n} \quad (\nu = 0, 1, \ldots, \tau-1)$$

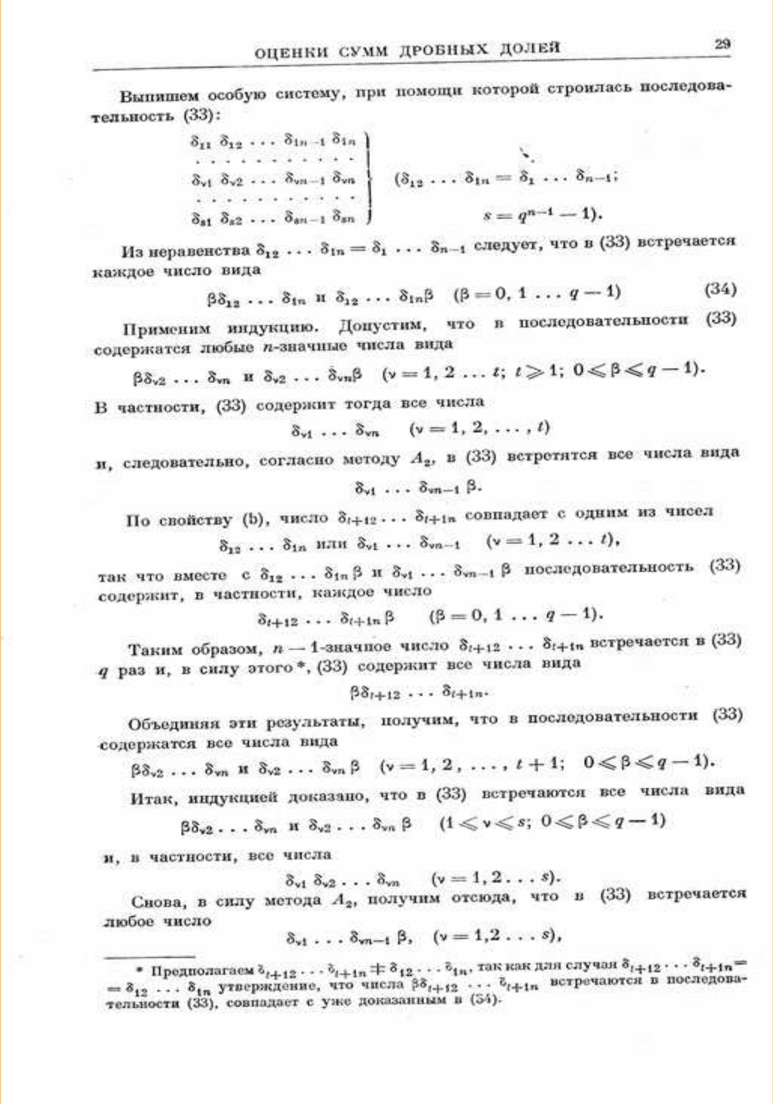
встретится каждое существующее n-значное число.

Дословным повторением рассуждений, приведенных при рассмотрении метода A_1 (вывод равенства (10)), получим, что в последовательности (33) встречаются все числа вида

$$\beta\delta_2 \ldots \delta_{n-1} \text{ и } \delta_1 \ldots \delta_{n-1}\beta \quad (0 \leqslant \beta \leqslant q-1).$$

Н. М. Коробов провел детальное изучение ***нормальных периодических систем*** и с их помощью получил неулучшаемые оценки в вопросе о суммах дробных долей показательных функций.

N. M. Korobov studied ***normal periodical systems*** in detail. Using these systems he got the unimprovable estimates solving problems with sums of fractional units of exponential functions.



Выпишем особую систему, при помощи которой строилась последовательность (33):

$$\left.\begin{matrix} \delta_{11}\ \delta_{12}\ \ldots\ \delta_{1n-1}\ \delta_{1n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \delta_{\nu 1}\ \delta_{\nu 2}\ \ldots\ \delta_{\nu n-1}\ \delta_{\nu n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \delta_{s1}\ \delta_{s2}\ \ldots\ \delta_{sn-1}\ \delta_{sn} \end{matrix}\right\} \quad \begin{matrix}(\delta_{12}\ \ldots\ \delta_{1n} = \delta_1\ \ldots\ \delta_{n-1}; \\ s = q^{n-1} - 1).\end{matrix}$$

Из неравенства $\delta_{12}\ \ldots\ \delta_{1n} = \delta_1\ \ldots\ \delta_{n-1}$ следует, что в (33) встречается каждое число вида

$$\beta\delta_{12}\ \ldots\ \delta_{1n} \text{ и } \delta_{12}\ \ldots\ \delta_{1n}\beta \quad (\beta = 0, 1\ \ldots\ q-1) \tag{34}$$

Применим индукцию. Допустим, что в последовательности (33) содержатся любые n-значные числа вида

$$\beta\delta_{\nu 2}\ \ldots\ \delta_{\nu n} \text{ и } \delta_{\nu 2}\ \ldots\ \delta_{\nu n}\beta \quad (\nu = 1, 2\ \ldots\ t;\ t \geqslant 1;\ 0 \leqslant \beta \leqslant q-1).$$

В частности, (33) содержит тогда все числа

$$\delta_{\nu 1}\ \ldots\ \delta_{\nu n} \quad (\nu = 1, 2, \ldots, t)$$

и, следовательно, согласно методу A_2, в (33) встретятся все числа вида

$$\delta_{\nu 1}\ \ldots\ \delta_{\nu n-1}\,\beta.$$

По свойству (b), число $\delta_{t+12}\ \ldots\ \delta_{t+1n}$ совпадает с одним из чисел

$$\delta_{12}\ \ldots\ \delta_{1n} \text{ или } \delta_{\nu 1}\ \ldots\ \delta_{\nu n-1} \quad (\nu = 1, 2\ \ldots\ t),$$

так что вместе с $\delta_{12}\ \ldots\ \delta_{1n}\,\beta$ и $\delta_{\nu 1}\ \ldots\ \delta_{\nu n-1}\,\beta$ последовательность (33) содержит, в частности, каждое число

$$\delta_{t+12}\ \ldots\ \delta_{t+1n}\,\beta \quad (\beta = 0, 1\ \ldots\ q-1).$$

Таким образом, $n-1$-значное число $\delta_{t+12}\ \ldots\ \delta_{t+1n}$ встречается в (33) q раз и, в силу этого*, (33) содержит все числа вида

$$\beta\delta_{t+12}\ \ldots\ \delta_{t+1n}.$$

Объединяя эти результаты, получим, что в последовательности (33) содержатся все числа вида

$$\beta\delta_{\nu 2}\ \ldots\ \delta_{\nu n} \text{ и } \delta_{\nu 2}\ \ldots\ \delta_{\nu n}\,\beta \quad (\nu = 1, 2, \ldots, t+1;\ \ 0 \leqslant \beta \leqslant q-1).$$

Итак, индукцией доказано, что в (33) встречаются все числа вида

$$\beta\delta_{\nu 2}\ \ldots\ \delta_{\nu n} \text{ и } \delta_{\nu 2}\ \ldots\ \delta_{\nu n}\,\beta \quad (1 \leqslant \nu \leqslant s;\ 0 \leqslant \beta \leqslant q-1)$$

и, в частности, все числа

$$\delta_{\nu 1}\ \delta_{\nu 2}\ \ldots\ \delta_{\nu n} \quad (\nu = 1, 2\ \ldots\ s).$$

Снова, в силу метода A_2, получим отсюда, что в (33) встречается любое число

$$\delta_{\nu 1}\ \ldots\ \delta_{\nu n-1}\,\beta, \quad (\nu = 1, 2\ \ldots\ s),$$

* Предполагаем $\delta_{t+12}\ \ldots\ \delta_{t+1n} \neq \delta_{12}\ \ldots\ \delta_{1n}$, так как для случая $\delta_{t+12}\ \ldots\ \delta_{t+1n} = \delta_{12}\ \ldots\ \delta_{1n}$ утверждение, что числа $\beta\delta_{t+12}\ \ldots\ \delta_{t+1n}$ встречаются в последовательности (33), совпадает с уже доказанным в (34).

Н. М. Коробов провел детальное изучение ***нормальных периодических систем*** и с их помощью получил неулучшаемые оценки в вопросе о суммах дробных долей показательных функций.

N. M. Korobov studied ***normal periodical systems*** in detail. Using these systems he got the unimprovable estimates solving problems with sums of fractional units of exponential functions.

а эти числа, вместе с числами $\delta_{12}, \ldots, \delta_{1n}\beta$, образуют совокупность всех n-значных чисел, чем доказано совпадение последовательности (33) с некоторым $\rho_n(q)$.

Согласно лемме 1, каждому $\rho_n(q)$ соответствует некоторая особая система. Очевидно, что построение $\rho_n(q)$ методом A_2 не накладывает на выбор знаков δ_k никаких ограничений, кроме тех, в силу которых участвующая в построении особая система становится системой, соответствующей полученному $\rho_n(q)$. Следовательно, метод A_2 позволяет получить все системы $\rho_n(q)$, которым соответствует фиксированная особая система. Но любая особая система, согласно лемме 2, может быть построена методом B. Таким образом, методом A_2 можно получить любую из существующих систем $\rho_n(q)$.

С помощью систем $\rho_n(q)$ в [3] было получено элементарное доказательство равномерности распределения функций αq^x для специальным образом построенных иррациональностей α. Во второй главе настоящей работы системы $\rho_n(q)$ существенно используются при доказательстве теорем о суммах дробных долей функций αq^x.

Глава II. О суммах дробных долей

Для случая линейной функции αx вопрос о суммах дробных долей подробно исследован в работах А. Я. Хинчина [1], Островского [5], Харди и Литтльвуда.

Доказано, что при иррациональном α

$$\sum_{x=1}^{P} \{\alpha x\} - \frac{P}{2} = o(P), \tag{1}$$

причем для всех иррациональных чисел α эту оценку нельзя улучшить.

Далее известны иррациональные α, для которых

$$\sum_{x=1}^{P} \{\alpha x\} - \frac{P}{2} = O(\ln P), \tag{2}$$

и доказано, что дальнейшее улучшение этой оценки невозможно ни для какого α.

Наконец, почти для всех α справедлива оценка

$$\sum_{x=1}^{P} \{\alpha x\} - \frac{P}{2} = \Omega(\ln P), \tag{3}$$

но при всяком $\varepsilon > 0$

$$\sum_{x=1}^{P} \{\alpha x\} - \frac{P}{2} = o(\ln^{1+\varepsilon} P). \tag{4}$$

В этой главе рассматриваются аналогичные вопросы для сумм дробных долей показательной функции αq^x, где q — целое ($q \geqslant 2$). При изучении сумм $\sum\{\alpha x\}$, очевидно, достаточно было ограничиться иррациональными числами α из интервала $(0,1)$; множество иррациональных чисел

Н. М. Коробов провел детальное изучение ***нормальных периодических систем*** и с их помощью получил неулучшаемые оценки в вопросе о суммах дробных долей показательных функций.

N. M. Korobov studied ***normal periodical systems*** in detail. Using these systems he got the unimprovable estimates solving problems with sums of fractional units of exponential functions.

совпадает с множеством чисел, для которых функция αx равномерно распределена.

Естественно и в случае сумм $\sum\{\alpha q^x\}$ рассматривать множество L чисел α $(0<\alpha<1)$, для которых дробные доли функции αq^x распределены равномерно *.

Доказательства основываются на применении систем $\rho_n(q)$ и на двух леммах, первая из которых сводит вопрос о суммах дробных долей к исследованию сумм знаков q-ичного разложения α. Вторая лемма позволяет, не нарушая равномерности распределения функции αq^x, так менять знаки разложения α, что их сумма, а следовательно, и сумма дробных долей, существенно меняется.

§ 1. ЛЕММА 1. *Пусть α задано в системе счисления с основанием $q \geqslant 2$: $\alpha = 0, \delta_1 \ldots \delta_k \ldots$; пусть, далее, $\mu \geqslant 1$ — произвольное целое. Тогда справедливо соотношение:*

$$\sum_{x=1}^{P}\{\alpha q^{\mu x}\} = \frac{1}{q^\mu - 1}\sum_{\nu=1}^{\mu} q^{\mu-\nu}\sum_{x=1}^{P}\delta_{\mu x+\nu} + \frac{\theta}{q^\mu - 1} \quad (|\theta| \leqslant 1). \tag{5}$$

Доказательство. Для всякого целого $x \geqslant 1$

$$\{\alpha q^{\mu x}\} = 0, \delta_{\mu x+1} \ldots \delta_{\mu x+k} \ldots = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\delta_{\mu x+k}}{q^k}.$$

Суммирование по x дает

$$S_\mu = \sum_{x=1}^{P}\{\alpha q^{\mu x}\} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{q^k}\sum_{x=1}^{P}\delta_{\mu x+k}.$$

Разобьем внешнюю сумму на группы по μ слагаемых:

$$S_\mu = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{\nu=1}^{\mu}\frac{1}{q^{\mu k+\nu}}\sum_{x=1}^{P}\delta_{\mu(x+k)+\nu}. \tag{6}$$

Преобразуем теперь внутреннюю сумму:

$$\sum_{x=1}^{P}\delta_{\mu(x+k)+\nu} = \sum_{x=1}^{P}\delta_{\mu x+\nu} + \left(\sum_{x=P+1}^{P+k}\delta_{\mu x+\nu} - \sum_{x=1}^{k}\delta_{\mu x+\nu}\right);$$

в силу того, что $0 \leqslant \delta_k \leqslant q-1$,

$$\left|\sum_{x=P+1}^{P+k}\delta_{\mu x+\nu} - \sum_{x=1}^{k}\delta_{\mu x+\nu}\right| \leqslant k(q-1)$$

и, следовательно,

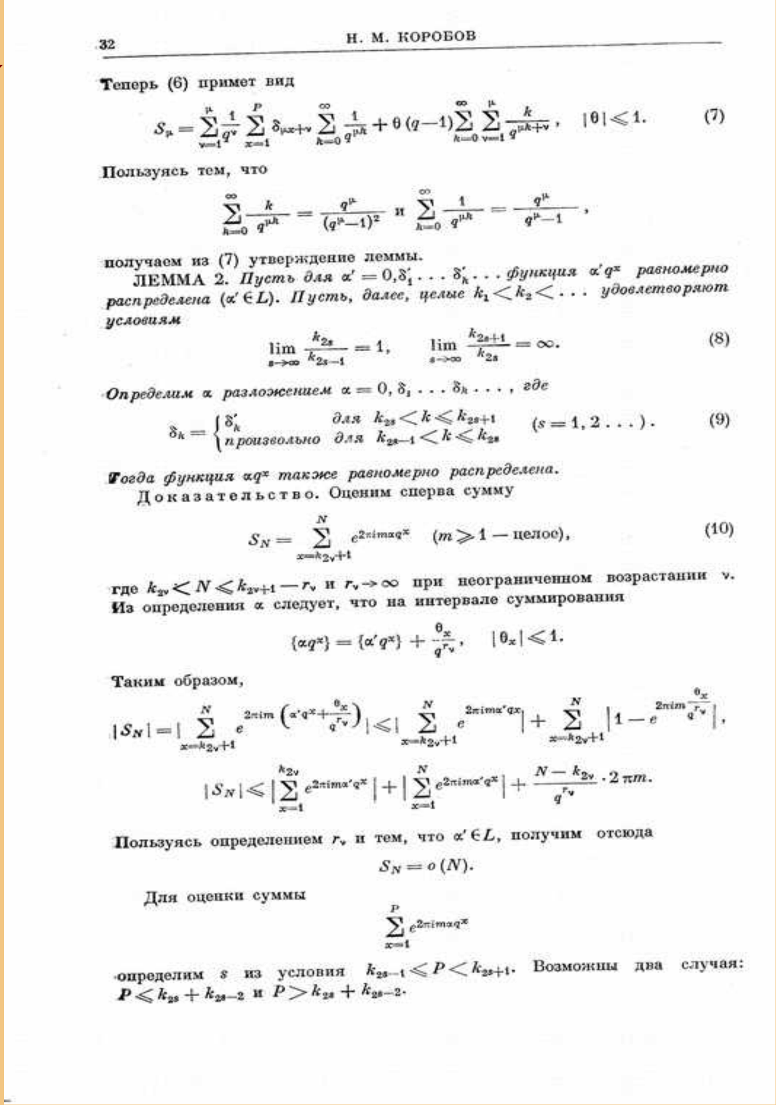
$$\sum_{x=1}^{P}\delta_{\mu(x+k)+\nu} = \sum_{x=1}^{P}\delta_{\mu x+\nu} + \theta_k(q-1)k, \quad |\theta_k| \leqslant 1.$$

---

* Известно (7), что мера множества L равна 1; известны также (8) методы построения величин $\alpha \in L$.

Н. М. Коробов провел детальное изучение ***нормальных периодических систем*** и с их помощью получил неулучшаемые оценки в вопросе о суммах дробных долей показательных функций.

N. M. Korobov studied ***normal periodical systems*** in detail. Using these systems he got the unimprovable estimates solving problems with sums of fractional units of exponential functions.


32 Н. М. КОРОБОВ

Теперь (6) примет вид

$$S_\mu = \sum_{\nu=1}^{\mu} \frac{1}{q^\nu} \sum_{x=1}^{P} \delta_{\mu x+\nu} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{q^{\mu k}} + \theta(q-1) \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\nu=1}^{\mu} \frac{k}{q^{\mu k+\nu}}, \quad |\theta| \leqslant 1. \qquad (7)$$

Пользуясь тем, что

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{q^{\mu k}} = \frac{q^\mu}{(q^\mu-1)^2} \text{ и } \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{q^{\mu k}} = \frac{q^\mu}{q^\mu-1},$$

получаем из (7) утверждение леммы.

ЛЕММА 2. *Пусть для* $\alpha' = 0, \delta_1' \ldots \delta_k' \ldots$ *функция* $\alpha' q^x$ *равномерно распределена* ($\alpha' \in L$). *Пусть, далее, целые* $k_1 < k_2 < \ldots$ *удовлетворяют условиям*

$$\lim_{s\to\infty} \frac{k_{2s}}{k_{2s-1}} = 1, \qquad \lim_{s\to\infty} \frac{k_{2s+1}}{k_{2s}} = \infty. \qquad (8)$$

Определим α *разложением* $\alpha = 0, \delta_1 \ldots \delta_k \ldots$, *где*

$$\delta_k = \begin{cases} \delta_k' & \text{для } k_{2s} < k \leqslant k_{2s+1} \\ \text{произвольно} & \text{для } k_{2s-1} < k \leqslant k_{2s} \end{cases} \quad (s = 1, 2 \ldots). \qquad (9)$$

Тогда функция αq^x *также равномерно распределена.*

Доказательство. Оценим сперва сумму

$$S_N = \sum_{x=k_{2\nu}+1}^{N} e^{2\pi i m \alpha q^x} \quad (m \geqslant 1 \text{ — целое}), \qquad (10)$$

где $k_{2\nu} < N \leqslant k_{2\nu+1} - r_\nu$ и $r_\nu \to \infty$ при неограниченном возрастании ν. Из определения α следует, что на интервале суммирования

$$\{\alpha q^x\} = \{\alpha' q^x\} + \frac{\theta_x}{q^{r_\nu}}, \quad |\theta_x| \leqslant 1.$$

Таким образом,

$$|S_N| = \Big|\sum_{x=k_{2\nu}+1}^{N} e^{2\pi i m\left(\alpha' q^x + \frac{\theta_x}{q^{r_\nu}}\right)}\Big| \leqslant \Big|\sum_{x=k_{2\nu}+1}^{N} e^{2\pi i m \alpha' q x}\Big| + \sum_{x=k_{2\nu}+1}^{N} \Big|1 - e^{2\pi i m \frac{\theta_x}{q^{r_\nu}}}\Big|,$$

$$|S_N| \leqslant \Big|\sum_{x=1}^{k_{2\nu}} e^{2\pi i m \alpha' q^x}\Big| + \Big|\sum_{x=1}^{N} e^{2\pi i m \alpha' q^x}\Big| + \frac{N - k_{2\nu}}{q^{r_\nu}} \cdot 2\pi m.$$

Пользуясь определением r_ν и тем, что $\alpha' \in L$, получим отсюда

$$S_N = o(N).$$

Для оценки суммы

$$\sum_{x=1}^{P} e^{2\pi i m \alpha q^x}$$

определим s из условия $k_{2s-1} \leqslant P < k_{2s+1}$. Возможны два случая: $P \leqslant k_{2s} + k_{2s-2}$ и $P > k_{2s} + k_{2s-2}$.

Н. М. Коробов провел детальное изучение ***нормальных периодических систем*** и с их помощью получил неулучшаемые оценки в вопросе о суммах дробных долей показательных функц…

N. …

period …

Using these systems he got the unimprovable estimates solving problems with sums of fractional units of exponential functions.

ТЕОРЕМА 1. *Какова бы ни была положительная функция* $\varepsilon(P)$, *для которой* $\lim\limits_{P\to\infty}\varepsilon(P)=0$, *найдется* $\alpha\in L$ *такое, что*

$$\sum_{x=1}^{P}\{\alpha q^x\}-\frac{P}{2}=\Omega(P\cdot\varepsilon(P)).$$

В первом случае

$$\left|\sum_{x=1}^{P}\right|=\left|\sum^{k_{2s-2}}+\sum_{k_{2s-2}+1}^{k_{2s-1}-k_{2s-2}}+\sum_{k_{2s-1}-k_{2s-2}+1}^{P}\right|\leqslant$$

$$\leqslant k_{2s-2}+\left|\sum_{k_{2s-2}+1}^{k_{2s-1}-k_{2s-2}}\right|+P-k_{2s-1}+k_{2s-2}.$$

и, так как $P\leqslant k_{2s}+k_{2s-2}$, получим

$$\left|\sum_{x=1}^{P}e^{2\pi i m\alpha q^x}\right|\leqslant 3k_{2s-2}+(k_{2s}-k_{2s-1})+\left|\sum_{x=k_{2s-2}+1}^{k_{2s-1}-k_{2s-2}}e^{2\pi i m\alpha q^x}\right|.$$

Применим оценку суммы (10) при $N=k_{2s-1}-k_{2s-2}$ для $\nu=s-1$ и используем условия (8). Тогда

(11)

…) при

…терию

§ 2. Для всякого α, принадлежащего множеству L, в силу равномерности распределения дробных долей $\{\alpha q^x\}$, будет

$$\sum_{x=1}^{P}\{\alpha q^x\}-\frac{P}{2}=o(P). \qquad (12)$$

Покажем, что, как и в случае линейной функции, для всех $\alpha\in L$ оценку (12) нельзя улучшить.

ТЕОРЕМА 1. *Какова бы ни была положительная функция* $\varepsilon(P)$, *для которой* $\lim\limits_{P\to\infty}\varepsilon(P)=0$, *найдется* $\alpha\in L$ *такое, что*

$$\sum_{x=1}^{P}\{\alpha q^x\}-\frac{P}{2}=\Omega(P\cdot\varepsilon(P)).$$

Доказательство. Пусть $\alpha'=0,\delta'\ldots\delta'_k\ldots$ — какое-нибудь из чисел множества L. Определим числа k_ν рекуррентными соотношениями

$$k_{2s}=k_{2s-1}+[k_{2s-1}\sqrt{\varepsilon(k_{2s-1})}],\quad k_{2s+1}=k_{2s}^2,\quad k_1=2. \qquad (13)$$

Н. М. Коробов провел детальное изучение ***нормальных периодических систем*** и с их помощью получил неулучшаемые оценки в вопросе о суммах дробных долей показательных функций.

N. M. Korobov studied ***normal periodical systems*** in detail. Using these systems he got the unimprovable estimates solving problems with sums of fractional units of exponential functions.

34 Н. М. КОРОБОВ

Выберем, наконец, $\alpha = 0,\delta_1 \ldots \delta_k \ldots$, где

$$\delta_k = \begin{cases} \delta_k' & \text{при } k_{2s} < k \leqslant k_{2s+1}, \\ q-1 & \text{при } k_{2s-1} < k \leqslant k_{2s}. \end{cases} \tag{14}$$

Число α удовлетворяет условиям леммы 2 и, следовательно, принадлежит множеству L.

Допустим, что для всякого $\alpha \in L$ будет

$$\sum_{x=1}^{P} \{\alpha q^x\} - \frac{P}{2} = O(P \cdot \varepsilon(P)). \tag{15}$$

Применим лемму 1 для случая $\mu = 1$:

$$\sum_{x=1}^{P} \{\alpha q^x\} = \frac{1}{q-1} \sum_{x=1}^{P} \delta_{x+1} + \frac{0}{q-1} = \frac{1}{q-1} \sum_{x=1}^{P} \delta_x + O(1). \tag{16}$$

Подсчитаем сумму дробных долей αq^x для α, построенного, согласно (14), при $P = k_{2s}$:

$$\sum_{x=1}^{k_{2s}} \{\alpha q^x\} = \sum_{x=1}^{k_{2s-1}} \{\alpha q^x\} + \frac{1}{q-1} \sum_{x=k_{2s-1}+1}^{k_{2s}} \delta_x + O(1).$$

Согласно допущению (так как $\alpha \in L$), получим

$$\sum_{x=1}^{k_{2s-1}} \{\alpha q^x\} = \frac{k_{2s-1}}{2} + O(k_{2s-1}\, \varepsilon(k_{2s-1})).$$

Далее, в силу (14),

$$\frac{1}{q-1} \sum_{x=k_{2s-1}+1}^{k_{2s}} \delta_x = \frac{1}{q-1} \sum_{x=k_{2s-1}+1}^{k_{2s}} (q-1) = k_{2s} - k_{2s-1}.$$

Таким образом*,

$$\sum_{x=1}^{k_{2s}} \{\alpha q^x\} = \frac{k_{2s}}{2} + \frac{1}{2}(k_{2s} - k_{2s-1}) + O(k_{2s-1} \cdot \varepsilon(k_{2s-1})).$$

В силу (13), $k_{2s} - k_{2s-1} > k_{2s-1} \sqrt{\varepsilon(k_{2s-1})} - 1$ и при достаточно большом s будет

$$\sum_{x=1}^{k_{2s}} \{\alpha q^x\} - \frac{k_{2s}}{2} > \frac{1}{3} k_{2s-1} \sqrt{\varepsilon(k_{2s-1})} > \frac{1}{4} k_{2s} \sqrt{\varepsilon(k_{2s})} = \Omega(k_{2s} \cdot \varepsilon(k_{2s})).$$

Полученное противоречие доказывает теорему.

Рассмотрим теперь вопрос о величинах $\alpha \in L$, для которых сумма дробных долей функции αq^x наиболее близка к своему среднему значению $\frac{P}{2}$.

* Здесь и далее, без ограничения общности, можно считать $P \cdot \varepsilon(P) \to \infty$, притом монотонно; стремление $\varepsilon(P)$ к нулю также будем считать монотонным.

Н. М. Коробов провел детальное изучение ***нормальных периодических систем*** и с их помощью получил неулучшаемые оценки в вопросе о суммах дробны... функци...

N. ...

period...

Using these systems he got the unimprovable estimates solving problems with sums of fractional units of exponential functions.

ТЕОРЕМА 2. *Для всякой функции $\varphi(P)$, как угодно медленно стремящейся к бесконечности при неограниченном возрастании P, найдется $\alpha \in L$ такое, что*

$$\sum_{x=1}^{P} \{\alpha q^x\} - \frac{P}{2} = O(\varphi(P)); \tag{17}$$

ни для какого $\alpha \in L$ оценка (17) не может быть улучшена до $O(1)$.

ТЕОРЕМА 2. *Для всякой функции $\varphi(P)$, как угодно медленно стремящейся к бесконечности при неограниченном возрастании P, найдется $\alpha \in L$ такое, что*

$$\sum_{x=1}^{P} \{\alpha q^x\} - \frac{P}{2} = O(\varphi(P)); \tag{17}$$

ни для какого $\alpha \in L$ оценка (17) не может быть улучшена до $O(1)$.

Доказательство. Для построения величины α, удовлетворяющей условию теоремы, используем системы $\rho'_n(q)$, введеные в главе 1 [см. (15)']. Выберем

$$\alpha = 0, \underbrace{\rho'_1(q)\ldots\rho'_1(q)}_{\psi(1)}\underbrace{\rho'_2(q)\ldots\rho'_2(q)}_{\psi(2)}\ldots\underbrace{\rho'_n(q)\ldots\rho'_n(q)}_{\psi(n)}\rho'_{n+1}(q)\ldots \tag{18}$$

...

$$P = T_k + rq^{k+1} + r_1, \quad 0 \leqslant r < \psi(k+1), \quad 0 \leqslant r_1 < q^{k+1}.$$

Обозначая знаки в (18) через $\delta_1, \delta_2, \ldots$, получим

$$\sum_{x=1}^{P} \delta_x = \sum_{1}^{T_k} + \sum_{T_k+1}^{T_k+rq^{k+1}} + \sum_{T_k+rq^{k+1}+1}^{P} = \sum_{\mu=1}^{k} \frac{q-1}{2} q^{\mu}\psi(\mu) + r\frac{q-1}{2}q^{k+1} + O(q^k);$$

$$\sum_{x=1}^{P} \delta_x = \frac{q-1}{2}(T_k + rq^{k+1}) + O(q^k) = \frac{q-1}{2}P + O(q^k).$$

В силу (16), теперь будет

$$\sum_{x=1}^{P} \{\alpha q^x\} = \frac{1}{q-1}\sum_{x=1}^{P}\delta_x + O(1) = \frac{P}{2} + O(q^k). \tag{20}$$

Н. М. Коробов провел детальное изучение ***нормальных периодических систем*** и с их помощью получил неулучшаемые оценки в вопросе о суммах дробных долей показательных функций.

N. M. Korobov studied ***normal periodical systems*** in detail. Using these systems he got the unimprovable estimates solving problems with sums of fractional units of exponential functions.

Выберем функцию $\psi(k)$ растущей настолько быстро, чтобы выполнялось условие $\psi(\sqrt{\ln\varphi(k)}) > k$. Тогда

$$\psi(\sqrt{\ln\varphi(P)}) > P \geqslant T_k \geqslant \psi(k), \quad \ln\sqrt{\varphi(P)} > k, \quad e^{k2} < \varphi(P).$$

Но $q^k = o(e^{k2})$, так что соотношение (20) примет вид

$$\sum_{x=1}^{P}\{\alpha q^x\} - \frac{P}{2} = o(\varphi(P))$$

и так как, в силу (18), $\alpha \in L$, получаем первое утверждение теоремы.

Докажем теперь невозможность улучшения оценки (17). Действительно, допустим, что для некоторого $\alpha \in L$ будет

$$\sum_{x=1}^{P}\{\alpha q^x\} - \frac{P}{2} = O(1).$$

Пусть это α задано разложением

$$\alpha = 0, \delta_1 \delta_2 \ldots \delta_k \ldots . \tag{21}$$

Тогда, в силу (16), получим

$$\frac{1}{q-1}\sum_{x=1}^{P}\delta_x - \frac{P}{2} = O(1),$$

т. е. существует M такое, что для всех P

$$\left|\frac{1}{q-1}\sum_{x=1}^{P}\delta_x - \frac{P}{2}\right| < M. \tag{22}$$

Но из $\alpha \in L$ следует, что дробные доли функции αq^x расположены на (0,1) всюду плотно, так что в разложении (21) для любого целого N встретится группа из N подряд идущих знаков, равных $q-1$. Пусть такая группа начинается с $k = P_0 + 1$. Выберем $N = 4M$ и положим $P = P_0 + N$. Тогда

$$\frac{1}{q-1}\sum_{x=1}^{P}\delta_x - \frac{P}{2} = \frac{1}{q-1}\sum_{x=1}^{P_0}\delta_x + 4M - \frac{P_0 + 4M}{2} =$$
$$= \left(\frac{1}{q-1}\sum_{x=1}^{P_0}\delta_x - \frac{P_0}{2}\right) + 2M > M,$$

что противоречит (22).

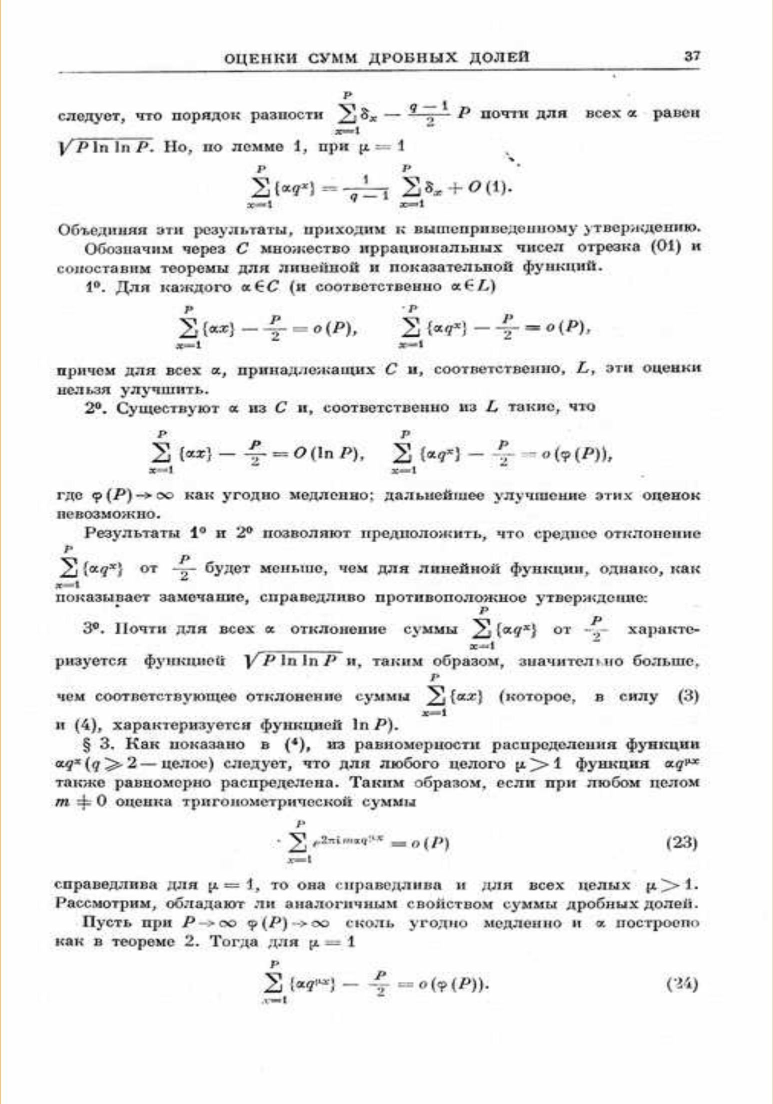
Таким образом, оценка (17) не может быть улучшена, чем теорема 2 доказана полностью.

Замечание. Почти для всех α порядок разности $\sum_{x=1}^{P}\{\alpha q^x\} - \frac{P}{2}$ равен $\sqrt{P \ln\ln P}$.

Действительно, из результатов А. Я Хинчина (²) непосредственни о

Н. М. Коробов провел детальное изучение ***нормальных периодических систем*** и с их помощью получил неулучшаемые оценки в вопросе о суммах дробных долей показательных функций.

N. M. Korobov studied ***normal periodical systems*** in detail. Using these systems he got the unimprovable estimates solving problems with sums of fractional units of exponential functions.



ОЦЕНКИ СУММ ДРОБНЫХ ДОЛЕЙ 37

следует, что порядок разности $\sum_{x=1}^{P}\delta_x - \frac{q-1}{2}P$ почти для всех α равен $\sqrt{P\ln\ln P}$. Но, по лемме 1, при $\mu=1$

$$\sum_{x=1}^{P}\{\alpha q^x\} = \frac{1}{q-1}\sum_{x=1}^{P}\delta_x + O(1).$$

Объединяя эти результаты, приходим к вышеприведенному утверждению.

Обозначим через C множество иррациональных чисел отрезка (01) и сопоставим теоремы для линейной и показательной функций.

1°. Для каждого $\alpha \in C$ (и соответственно $\alpha \in L$)

$$\sum_{x=1}^{P}\{\alpha x\} - \frac{P}{2} = o(P), \qquad \sum_{x=1}^{P}\{\alpha q^x\} - \frac{P}{2} = o(P),$$

причем для всех α, принадлежащих C и, соответственно, L, эти оценки нельзя улучшить.

2°. Существуют α из C и, соответственно из L такие, что

$$\sum_{x=1}^{P}\{\alpha x\} - \frac{P}{2} = O(\ln P), \qquad \sum_{x=1}^{P}\{\alpha q^x\} - \frac{P}{2} = o(\varphi(P)),$$

где $\varphi(P)\to\infty$ как угодно медленно; дальнейшее улучшение этих оценок невозможно.

Результаты 1° и 2° позволяют предположить, что среднее отклонение $\sum_{x=1}^{P}\{\alpha q^x\}$ от $\frac{P}{2}$ будет меньше, чем для линейной функции, однако, как показывает замечание, справедливо противоположное утверждение:

3°. Почти для всех α отклонение суммы $\sum_{x=1}^{P}\{\alpha q^x\}$ от $\frac{P}{2}$ характеризуется функцией $\sqrt{P\ln\ln P}$ и, таким образом, значительно больше, чем соответствующее отклонение суммы $\sum_{x=1}^{P}\{\alpha x\}$ (которое, в силу (3) и (4), характеризуется функцией $\ln P$).

§ 3. Как показано в ([4]), из равномерности распределения функции αq^x ($q \geqslant 2$ — целое) следует, что для любого целого $\mu > 1$ функция $\alpha q^{\mu x}$ также равномерно распределена. Таким образом, если при любом целом $m \neq 0$ оценка тригонометрической суммы

$$\sum_{x=1}^{P} e^{2\pi i m\alpha q^{\mu x}} = o(P) \tag{23}$$

справедлива для $\mu = 1$, то она справедлива и для всех целых $\mu > 1$. Рассмотрим, обладают ли аналогичным свойством суммы дробных долей.

Пусть при $P\to\infty$ $\varphi(P)\to\infty$ сколь угодно медленно и α построено как в теореме 2. Тогда для $\mu = 1$

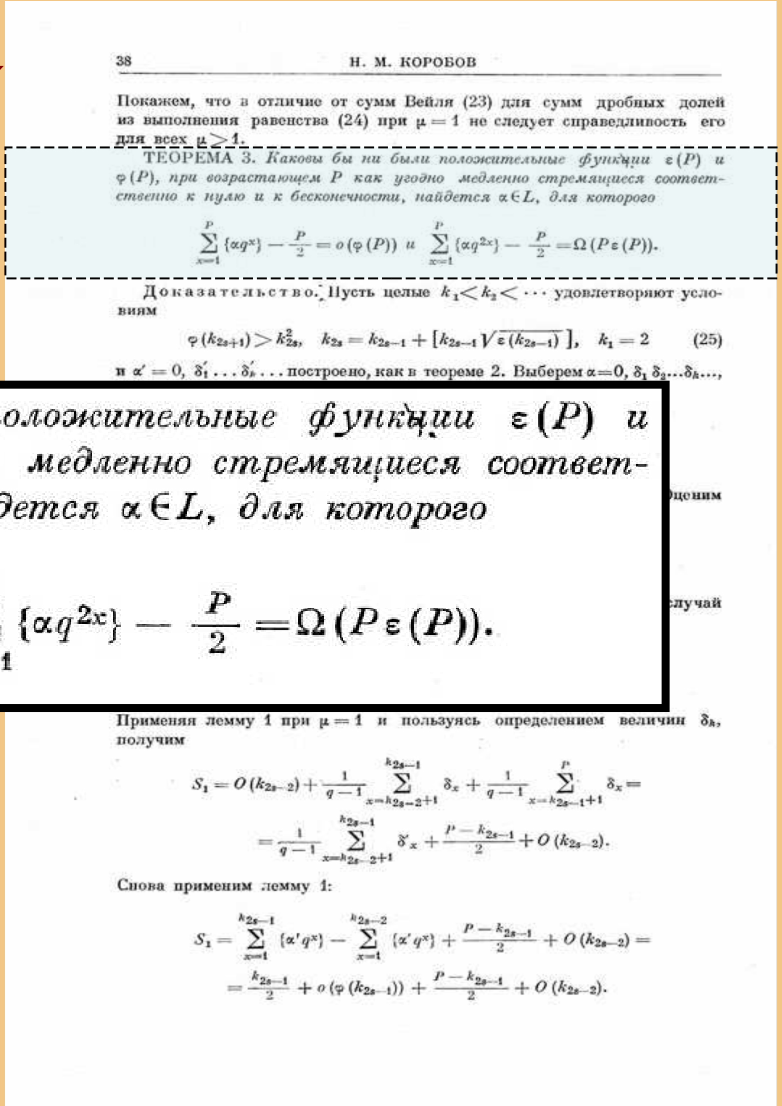
$$\sum_{x=1}^{P}\{\alpha q^{\mu x}\} - \frac{P}{2} = o(\varphi(P)). \tag{24}$$

Н. М. Коробов провел детальное изучение ***нормальных периодических систем*** и с их помощью получил неулучшаемые оценки в вопросе о суммах дробных долей показательных функц

N.

period

Using these systems he got the unimprovable estimates solving problems with sums of fractional units of exponential functions.



38 Н. М. КОРОБОВ

Покажем, что в отличие от сумм Вейля (23) для сумм дробных долей из выполнения равенства (24) при $\mu = 1$ не следует справедливость его для всех $\mu > 1$.

ТЕОРЕМА 3. *Каковы бы ни были положительные функции $\varepsilon(P)$ и $\varphi(P)$, при возрастающем P как угодно медленно стремящиеся соответственно к нулю и к бесконечности, найдется $\alpha \in L$, для которого*

$$\sum_{x=1}^{P} \{\alpha q^x\} - \frac{P}{2} = o(\varphi(P)) \ \text{и} \ \sum_{x=1}^{P} \{\alpha q^{2x}\} - \frac{P}{2} = \Omega(P\varepsilon(P)).$$

Доказательство. Пусть целые $k_1 < k_2 < \cdots$ удовлетворяют условиям

$$\varphi(k_{2s+1}) > k_{2s}^2, \quad k_{2s} = k_{2s-1} + [k_{2s-1}\sqrt{\varepsilon(k_{2s-1})}], \quad k_1 = 2 \qquad (25)$$

и $\alpha' = 0, \delta_1' \ldots \delta_k' \ldots$ построено, как в теореме 2. Выберем $\alpha = 0, \delta_1 \delta_2 \ldots \delta_k \ldots$,

Применяя лемму 1 при $\mu = 1$ и пользуясь определением величин δ_k, получим

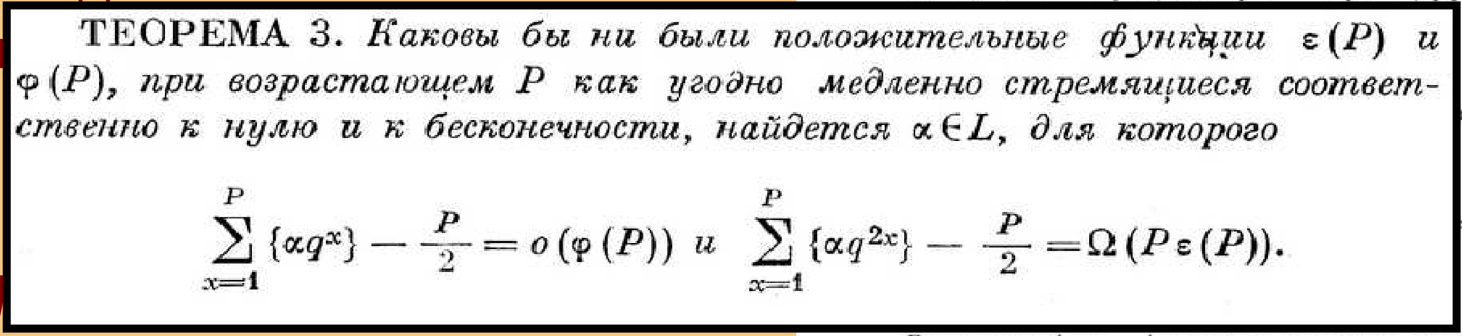
$$S_1 = O(k_{2s-2}) + \frac{1}{q-1} \sum_{x=k_{2s-2}+1}^{k_{2s-1}} \delta_x + \frac{1}{q-1} \sum_{x=k_{2s-1}+1}^{P} \delta_x =$$

$$= \frac{1}{q-1} \sum_{x=k_{2s-2}+1}^{k_{2s-1}} \delta'_x + \frac{P-k_{2s-1}}{2} + O(k_{2s-2}).$$

Снова применим лемму 1:

$$S_1 = \sum_{x=1}^{k_{2s-1}} \{\alpha' q^x\} - \sum_{x=1}^{k_{2s-2}} \{\alpha' q^x\} + \frac{P-k_{2s-1}}{2} + O(k_{2s-2}) =$$

$$= \frac{k_{2s-1}}{2} + o(\varphi(k_{2s-1})) + \frac{P-k_{2s-1}}{2} + O(k_{2s-2}).$$



ТЕОРЕМА 3. *Каковы бы ни были положительные функции $\varepsilon(P)$ и $\varphi(P)$, при возрастающем P как угодно медленно стремящиеся соответственно к нулю и к бесконечности, найдется $\alpha \in L$, для которого*

$$\sum_{x=1}^{P} \{\alpha q^x\} - \frac{P}{2} = o(\varphi(P)) \ \text{и} \ \sum_{x=1}^{P} \{\alpha q^{2x}\} - \frac{P}{2} = \Omega(P\varepsilon(P)).$$

Н. М. Коробов провел детальное изучение ***нормальных периодических систем*** и с их помощью получил неулучшаемые оценки в вопросе о суммах дробных долей показательных функций.

N. M. Korobov studied ***normal periodical systems*** in detail. Using these systems he got the unimprovable estimates solving problems with sums of fractional units of exponential functions.

Но, в силу (25), $k_{2s-2} = o(\varphi(k_{2s-1}))$, так что

$$S_1 = \frac{P}{2} + o(\varphi(k_{2s-1})) = \frac{P}{2} + o(\varphi(P))^{*} \quad (k_{2s-1} \leqslant P \leqslant k_{2s}). \tag{26}$$

Пусть теперь $P > k_{2s}$.

$$S_1 = \sum_{x=1}^{k_{2s}} \{\alpha q^x\} + \sum_{x=k_{2s}+1}^{P} \{\alpha q^x\}.$$

Применим к первой сумме справа оценку (26):

$$S_1 = \frac{k_{2s}}{2} + o(\varphi(k_{2s})) + \frac{1}{q-1} \sum_{x=k_{2s}+1}^{P} \delta_x = \frac{k_{2s}}{2} + \frac{1}{q-1} \sum_{x=k_{2s}+1}^{P} \delta'_x + o(\varphi(k_{2s})) =$$

$$= \frac{k_{2s}}{2} + \sum_{x=1}^{P} \{\alpha' q^x\} - \sum_{x=1}^{k_{2s}} \{\alpha' q^x\} + o(\varphi(k_{2s})) = \frac{P}{2} + o(\varphi(P)).$$

Объединяя этот результат с (26), получим для всех P

$$\sum_{x=1}^{P} \{\alpha q^x\} - \frac{P}{2} = o(\varphi(P)).$$

Для доказательства второго утверждения теоремы выберем $P_1 = \left[\frac{k_{2s-1}}{2}\right]$, $P_2 = \left[\frac{k_{2s}}{2}\right] - 1$ и оценим сумму

$$S_2 = \sum_{x=1}^{P_2} \{\alpha q^{2x}\}.$$

Допустим, что для всякого P будет

$$\sum_{x=1}^{P} \{\alpha q^{2x}\} - \frac{P}{2} = O(P.\ \varepsilon(P)). \tag{27}$$

Применим лемму 1 с $\mu = 2$:

$$S_2 = \sum_{x=1}^{P_1} \{\alpha q^{2x}\} + \sum_{x=P_1+1}^{P_2} \{\alpha q^{2x}\} =$$

$$= \frac{P_1}{2} + \frac{1}{q^2-1}\left(q \sum_{x=P_1+1}^{P_2} \delta_{2x+1} + \sum_{x=P_1+1}^{P_2} \delta_{2x+2} \right) + O(P_1 \varepsilon(P_1)).$$

Из определения величин δ_h и выбора P_1 и P_2 следует

$$\sum_{x=P_1+1}^{P_2} \delta_{2x+1} = (P_2 - P_1)(q-1), \qquad \sum_{x=P_1+1}^{P_2} \delta_{2x+2} = 0.$$

Таким образом,

$$S_2 = \frac{P_1}{2} + \frac{q}{q+1}(P_2 - P_1) + O(P_1 \varepsilon(P_1)) =$$

$$= \frac{P_2}{2} + \frac{q-1}{q+1}(P_2 - P_1) + O(k_{2s-1} \varepsilon(k_{2s-1})).$$

* Функцию $\varphi(P)$ всюду можно считать монотонной.

Н. М. Коробов провел детальное изучение ***нормальных периодических систем*** и с их помощью получил неулучшаемые оценки в вопросе о суммах дробных долей показательных функц

N.

period

Using these systems he got the unimprovable estimates solving problems with sums of fractional units of exponential functions.

Пользуясь определением величин k_ν, получим для достаточно больших s

$$S_2 - \frac{P_2}{2} \geqslant \frac{1}{3}\,\frac{k_{2s}-k_{2s-1}}{2} + O\left(k_{2s-1}\,\varepsilon(k_{2s-1})\right) >$$
$$> \frac{1}{7} k_{2s-1}\sqrt{\varepsilon(k_{2s-1})} = \Omega\left(P_2\,\varepsilon(P_2)\right),$$

что противоречит допущению (27).

Пусть попрежнему при $P \to \infty$ функция $\varphi(P)$ стремится к бесконечности как угодно медленно. Возникает вопрос: существуют ли вообще величины $\alpha \in L$ такие, что при всех целых $\mu \geqslant 1$ будет

$$\sum_{x=1}^{P} \{\alpha q^{\mu x}\} - \frac{P}{2} = o(\varphi(P))?$$

Ответ дается следующей теоремой.

ТЕОРЕМА 4. *Какова бы ни была функция $\varphi(P)$, при неограниченном возрастании P как угодно медленно стремящаяся к бесконечности, найдется $\alpha \in L$ такое, что для всех целых $\mu \geqslant 1$ будет*

$$\sum_{x=1}^{P} \{\alpha q^{\mu x}\} - \frac{P}{2} = o(\varphi(P)). \tag{28}$$

$\varphi(k) > k$,

и $\bar{\rho}_n$ обозначает ρ_n без первого знака. Легко проверить, например, дословным повторением рассуждений теоремы 5 из ([3]), что $\alpha \in L$.

Для оценки суммы (28) применим лемму 1.

$$S_\mu = \sum_{x=1}^{P} \{\alpha q^{\mu x}\} = \frac{1}{q^\mu - 1}\sum_{\nu=1}^{\mu} q^{\mu-\nu} \sum_{x=1}^{P} \delta_{\mu x+\nu} + O(1). \tag{29}$$

Обозначим через t_n число знаков в r_n. Очевидно,

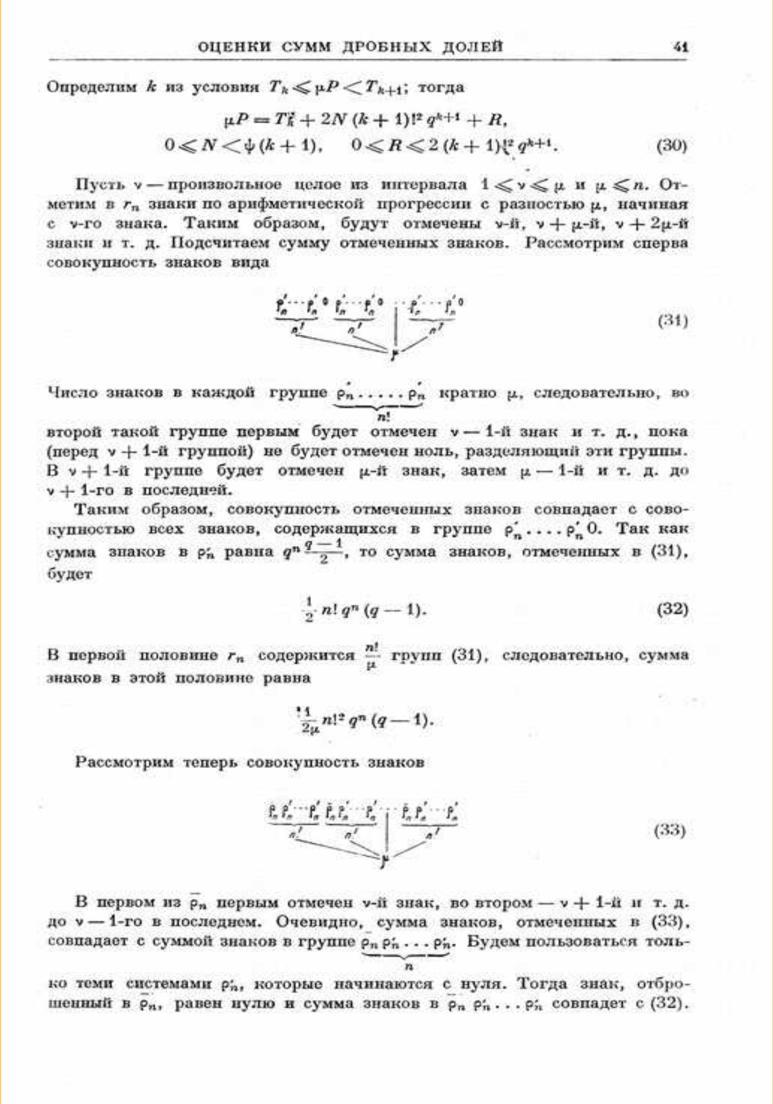
$$t_n = (n!\,q^n + 1)\,n! + (n!\,q^n - 1)\,n! = 2\,(n!)^2 q^n.$$

Пусть, далее, T_k — число знаков в разложении α до первого из r_{k+1}:

$$T_k = \sum_{n=1}^{k} 2\,(n!)^2 q^n \cdot \psi(n).$$

Н. М. Коробов провел детальное изучение ***нормальных периодических систем*** и с их помощью получил неулучшаемые оценки в вопросе о суммах дробных долей показательных функций.

N. M. Korobov studied ***normal periodical systems*** in detail. Using these systems he got the unimprovable estimates solving problems with sums of fractional units of exponential functions.



Определим k из условия $T_k \leqslant \mu P < T_{k+1}$; тогда

$$\mu P = T_k^{\mu} + 2N\,(k+1)!^2\,q^{k+1} + R,$$
$$0 \leqslant N < \psi\,(k+1), \qquad 0 \leqslant R \leqslant 2\,(k+1)!^2\,q^{k+1}. \qquad (30)$$

Пусть ν — произвольное целое из интервала $1 \leqslant \nu \leqslant \mu$ и $\mu \leqslant n$. Отметим в r_n знаки по арифметической прогрессии с разностью μ, начиная с ν-го знака. Таким образом, будут отмечены ν-й, $\nu+\mu$-й, $\nu+2\mu$-й знаки и т. д. Подсчитаем сумму отмеченных знаков. Рассмотрим сперва совокупность знаков вида

$$\underbrace{\underbrace{\rho'_n \cdots \rho'_n}_{n!}0\;\underbrace{\rho'_n \cdots \rho'_n}_{n!}0\;\cdots\;\underbrace{\rho'_n \cdots \rho'_n}_{n!}0}_{\mu} \qquad (31)$$

Число знаков в каждой группе $\underbrace{\rho'_n \ldots\ldots \rho'_n}_{n!}$ кратно μ, следовательно, во второй такой группе первым будет отмечен $\nu-1$-й знак и т. д., пока (перед $\nu+1$-й группой) не будет отмечен ноль, разделяющий эти группы. В $\nu+1$-й группе будет отмечен μ-й знак, затем $\mu-1$-й и т. д. до $\nu+1$-го в последней.

Таким образом, совокупность отмеченных знаков совпадает с совокупностью всех знаков, содержащихся в группе $\rho'_n \ldots \rho'_n 0$. Так как сумма знаков в ρ'_n равна $q^n \frac{q-1}{2}$, то сумма знаков, отмеченных в (31), будет

$$\frac{1}{2}\, n!\, q^n\,(q-1). \qquad (32)$$

В первой половине r_n содержится $\frac{n!}{\mu}$ групп (31), следовательно, сумма знаков в этой половине равна

$$\frac{1}{2\mu}\, n!^2\, q^n\,(q-1).$$

Рассмотрим теперь совокупность знаков

$$\underbrace{\underbrace{\bar\rho_n \rho'_n \cdots \rho'_n}_{n!}\;\underbrace{\bar\rho_n \rho'_n \cdots \rho'_n}_{n!}\;\cdots\;\underbrace{\bar\rho_n \rho'_n \cdots \rho'_n}_{n!}}_{\mu} \qquad (33)$$

В первом из $\bar\rho_n$ первым отмечен ν-й знак, во втором — $\nu+1$-й и т. д. до $\nu-1$-го в последнем. Очевидно, сумма знаков, отмеченных в (33), совпадает с суммой знаков в группе $\underbrace{\bar\rho_n \rho'_n \ldots \rho'_n}_{n}$. Будем пользоваться только теми системами ρ'_n, которые начинаются с нуля. Тогда знак, отброшенный в $\bar\rho_n$, равен нулю и сумма знаков в $\bar\rho_n \rho'_n \ldots \rho'_n$ совпадет с (32).

Н. М. Коробов провел детальное изучение ***нормальных периодических систем*** и с их помощью получил неулучшаемые оценки в вопросе о суммах дробных долей показательных функц

N.

period

Using these systems he got the unimprovable estimates solving problems with sums of fractional units of exponential functions.

Таким образом, суммы отмеченных знаков в первой и второй половине r_n одинаковы и сумма всех знаков, отмеченных в r_n, будет равна

$$\frac{1}{\mu} n!^2 q^n (q-1).$$

Перейдем к оценке внутренней суммы в (29).

$$\sum_{x=1}^{P} \delta_{\mu x+\nu} = \frac{q-1}{\mu} (\mu!^2 q^\mu \psi(\mu) + \cdots + k!^2 q^k \psi(k) + (k+1)!^2 q^{k+1} N) + O(R).$$

Используя (30), получим

$$\sum_{x=1}^{P} \delta \ldots = \frac{q-1}{\ldots} P + O(R).$$

(34)

ТЕОРЕМА 5. *Как бы медленно ни стремились функции* $\varphi(P) \to \infty$ *и* $\varepsilon(P) \to 0$ *при* $P \to \infty$, *найдется* $\alpha \in L$ *такое, что*

$$\sum_{x=1}^{P} \{\alpha q^x\} - \frac{P}{2} = \Omega(P \cdot \varepsilon(P)) \quad и \quad \sum_{x=1}^{P} \{\alpha q^{2x}\} - \frac{P}{2} = o(\varphi(P)).$$

(35)

...ных долей $\{\alpha q^x\}$ далека от среднего значения $\frac{P}{2}$. Согласно теореме 1, какова бы ни была положительная функция $\varepsilon(P)$, как угодно медленно стремящаяся к нулю при $P \to \infty$, найдется $\alpha \in L$ такое, что для $\mu = 1$ будет

$$\sum_{x=1}^{P} \{\alpha q^{\mu x}\} - \frac{P}{2} = \Omega(P \cdot \varepsilon(P)).$$

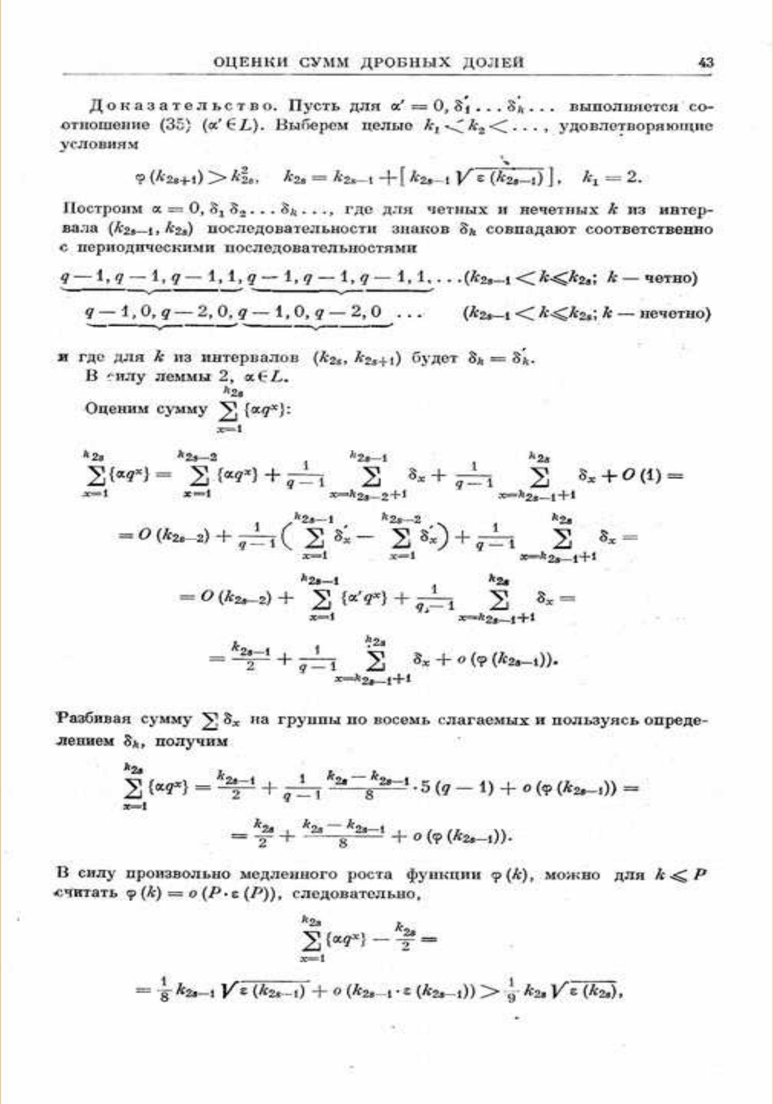
Сохранится ли это равенство для всех $\mu > 1$, если оно выполняется при $\mu = 1$? Отрицательный ответ дает следующая

ТЕОРЕМА 5. *Как бы медленно ни стремились функции* $\varphi(P) \to \infty$ *и* $\varepsilon(P) \to 0$ *при* $P \to \infty$, *найдется* $\alpha \in L$ *такое, что*

$$\sum_{x=1}^{P} \{\alpha q^x\} - \frac{P}{2} = \Omega(P \cdot \varepsilon(P)) \quad и \quad \sum_{x=1}^{P} \{\alpha q^{2x}\} - \frac{P}{2} = o(\varphi(P)).$$

Н. М. Коробов провел детальное изучение ***нормальных периодических систем*** и с их помощью получил неулучшаемые оценки в вопросе о суммах дробных долей показательных функций.

N. M. Korobov studied ***normal periodical systems*** in detail. Using these systems he got the unimprovable estimates solving problems with sums of fractional units of exponential functions.



ОЦЕНКИ СУММ ДРОБНЫХ ДОЛЕЙ 43

Доказательство. Пусть для $\alpha' = 0, \delta_1' \dots \delta_k' \dots$ выполняется соотношение (35) ($\alpha' \in L$). Выберем целые $k_1 < k_2 < \dots$, удовлетворяющие условиям

$$\varphi(k_{2s+1}) > k_{2s}^2, \quad k_{2s} = k_{2s-1} + \left[k_{2s-1} \sqrt{\varepsilon(k_{2s-1})} \right], \quad k_1 = 2.$$

Построим $\alpha = 0, \delta_1 \delta_2 \dots \delta_k \dots$, где для четных и нечетных k из интервала (k_{2s-1}, k_{2s}) последовательности знаков δ_k совпадают соответственно с периодическими последовательностями

$$\underbrace{q-1, q-1, q-1, 1}, \underbrace{q-1, q-1, q-1, 1}, \dots \quad (k_{2s-1} < k \leqslant k_{2s};\ k \text{ — четно})$$

$$\underbrace{q-1, 0, q-2, 0}, \underbrace{q-1, 0, q-2, 0} \dots \quad (k_{2s-1} < k \leqslant k_{2s};\ k \text{ — нечетно})$$

и где для k из интервалов (k_{2s}, k_{2s+1}) будет $\delta_k = \delta_k'$.

В силу леммы 2, $\alpha \in L$.

Оценим сумму $\sum_{x=1}^{k_{2s}} \{\alpha q^x\}$:

$$\sum_{x=1}^{k_{2s}} \{\alpha q^x\} = \sum_{x=1}^{k_{2s-2}} \{\alpha q^x\} + \frac{1}{q-1} \sum_{x=k_{2s-2}+1}^{k_{2s-1}} \delta_x + \frac{1}{q-1} \sum_{x=k_{2s-1}+1}^{k_{2s}} \delta_x + O(1) =$$

$$= O(k_{2s-2}) + \frac{1}{q-1}\left(\sum_{x=1}^{k_{2s-1}} \delta_x' - \sum_{x=1}^{k_{2s-2}} \delta_x' \right) + \frac{1}{q-1} \sum_{x=k_{2s-1}+1}^{k_{2s}} \delta_x =$$

$$= O(k_{2s-2}) + \sum_{x=1}^{k_{2s-1}} \{\alpha' q^x\} + \frac{1}{q-1} \sum_{x=k_{2s-1}+1}^{k_{2s}} \delta_x =$$

$$= \frac{k_{2s-1}}{2} + \frac{1}{q-1} \sum_{x=k_{2s-1}+1}^{k_{2s}} \delta_x + o(\varphi(k_{2s-1})).$$

Разбивая сумму $\sum \delta_x$ на группы по восемь слагаемых и пользуясь определением δ_k, получим

$$\sum_{x=1}^{k_{2s}} \{\alpha q^x\} = \frac{k_{2s-1}}{2} + \frac{1}{q-1} \frac{k_{2s} - k_{2s-1}}{8} \cdot 5(q-1) + o(\varphi(k_{2s-1})) =$$

$$= \frac{k_{2s}}{2} + \frac{k_{2s} - k_{2s-1}}{8} + o(\varphi(k_{2s-1})).$$

В силу произвольно медленного роста функции $\varphi(k)$, можно для $k \leqslant P$ считать $\varphi(k) = o(P \cdot \varepsilon(P))$, следовательно,

$$\sum_{x=1}^{k_{2s}} \{\alpha q^x\} - \frac{k_{2s}}{2} =$$

$$= \frac{1}{8} k_{2s-1} \sqrt{\varepsilon(k_{2s-1})} + o(k_{2s-1} \cdot \varepsilon(k_{2s-1})) > \frac{1}{9} k_{2s} \sqrt{\varepsilon(k_{2s})},$$

Н. М. Коробов провел детальное изучение ***нормальных периодических систем*** и с их помощью получил неулучшаемые оценки в вопросе о суммах дробных долей показательных функций.

N. M. Korobov studied ***normal periodical systems*** in detail. Using these systems he got the unimprovable estimates solving problems with sums of fractional units of exponential functions.

и мы получаем первое утверждение теоремы:

$$\sum_{x=1}^{k_{2s}} \{\alpha q^x\} - \frac{k_{2s}}{2} = \Omega\left(k_{2s}\,\varepsilon(k_{2s})\right) \qquad (P = k_{2s}).$$

Оценим теперь сумму

$$S_2 = \sum_{x=1}^{P} \{\alpha q^{2x}\}. \tag{36}$$

Пусть s определяется условием $k_{2s+1} \leqslant 2P < k_{2s+1}$.

Рассмотрим сперва случай $2P \leqslant k_{2s}$. Пусть $P_1 = \left[\frac{k_{2s-2}}{2}\right]$ и $P_2 = \left[\frac{k_{2s-1}}{2}\right] - 1$. Разбивая в (36) интервал суммирования и применяя лемму 1 с $\mu = 2$, получим

$$S_2 = \sum_{x=1}^{P_1} \{\alpha q^{2x}\} + \frac{1}{q^2-1}\Big(q \sum_{x=P_1+1}^{P_2} \delta'_{2x+1} + \sum_{x=P_1+1}^{P_2} \delta'_{2x+2}\Big) +$$
$$+ \frac{1}{q^2-1}\Big(q \sum_{x=P_2+1}^{P} \delta_{2x+1} + \sum_{x=P_2+1}^{P} \delta_{2x+2}\Big) + O(1).$$

Разобьем две последние суммы на группы по четыре слагаемых, тогда

$$S_2 = O(P_1) + \sum_{x=P_1+1}^{P_2} \{\alpha' q^{2x}\} + \frac{1}{q^2-1}\big(q(2q-3) + 3q - 2\big)\frac{P-P_2}{4} =$$
$$= \sum_{x=1}^{P_2} \{\alpha' q^{2x}\} + \frac{P-P_2}{2} + O(P_1) = \frac{P_2}{2} + o(\varphi(P_2)) + \frac{P-P_2}{2} + O(P_1).$$

Таким образом, при $k_{2s-1} \leqslant 2P \leqslant k_{2s}$

$$\sum_{x=1}^{P} \{\alpha q^{2x}\} = \frac{P}{2} + O(P_1) + o(\varphi(P_2)) = \frac{P}{2} + o(\varphi(P)). \tag{37}$$

Пусть теперь $2P > k_{2s}$; обозначим $P_3 = \left[\frac{k_{2s}}{2}\right] - 1$.

$$\sum_{x=1}^{P} \{\alpha q^{2x}\} = \sum_{x=1}^{P_3} \{\alpha q^{2x}\} + \frac{1}{q^2-1}\Big(q \sum_{x=P_3+1}^{P} \delta_{2x+1} + \sum_{x=P_3+1}^{P} \delta_{2x+2}\Big) + O(1).$$

Пользуясь (37), получим

$$\sum_{x=1}^{P} \{\alpha q^{2x}\} = \frac{P_3}{2} + o(\varphi(P_3)) + \sum_{x=1}^{P} \{\alpha' q^{2x}\} - \sum_{x=1}^{P_3} \{\alpha' q^{2x}\} =$$
$$= \frac{P_3}{2} + o(\varphi(P_3)) + \frac{P}{2} + o(\varphi(P)) - \frac{P_3}{2} = \frac{P}{2} + o\left(\varphi\left(\frac{P}{2}\right)\right).$$

Итак, всегда

$$\sum_{x=1}^{P} \{\alpha q^{2x}\} - \frac{P}{2} = o(\varphi(P)),$$

чем теорема доказана полностью.

Н. М. Коробов провел детальное изучение ***нормальных периодических систем*** и с их помощью получил неулучшаемые оценки в вопросе о суммах дробных долей показательных функц

N.

periodical systems in detail. Using these systems he got the unimprovable estimates solving problems with sums of fractional units of exponential functions.

Как и раньше, возникает вопрос, существуют ли вообще величины $\alpha \in L$, для которых при всех целых $\mu \geqslant 1$ будет

$$\sum_{x=1}^{P}\{\alpha q^{\mu x}\} - \frac{P}{2} = \Omega(P\cdot\varepsilon(P)),$$

где $\varepsilon(P)$ произвольно медленно стремится к нулю, когда P неограниченно возрастает? Легко показать, что величины α, построенные в теореме 1, обладают указанным свойством.

ТЕОРЕМА 6. *Какова бы ни была положительная функция $\varepsilon(P)\to 0$ при $P\to\infty$, найдется $\alpha \in L$ такое, что для всех целых $\mu \geqslant 1$ будет*

$$\sum_{x=1}^{P}\{\alpha q^{\mu x}\} - \frac{P}{2} = \Omega(P\cdot\varepsilon(P)).$$

Доказательство. Выберем α как в теореме 1.

ТЕОРЕМА 6. *Какова бы ни была положительная функция $\varepsilon(P)\to 0$ при $P\to\infty$, найдется $\alpha \in L$ такое, что для всех целых $\mu \geqslant 1$ будет*

$$\sum_{x=1}^{P}\{\alpha q^{\mu x}\} - \frac{P}{2} = \Omega(P\cdot\varepsilon(P)).$$

$$\sum_{x=1}^{P_2}\{\alpha q^{\mu x}\} - \frac{P_2}{2} = \frac{P_2-P_1}{2} + O(P_1\cdot\varepsilon(P_1)) =$$

$$= \frac{k_{2s-1}\sqrt{\varepsilon(k_{2s-1})}}{2\mu} + O(k_{2s-1}\cdot\varepsilon(k_{2s-1})) > \frac{1}{3\mu}k_{2s}\sqrt{\varepsilon(k_{2s})} = \Omega(P_2\,\varepsilon(P_2)). \quad (38)$$

Но (38) противоречит допущению, чем теорема доказана.

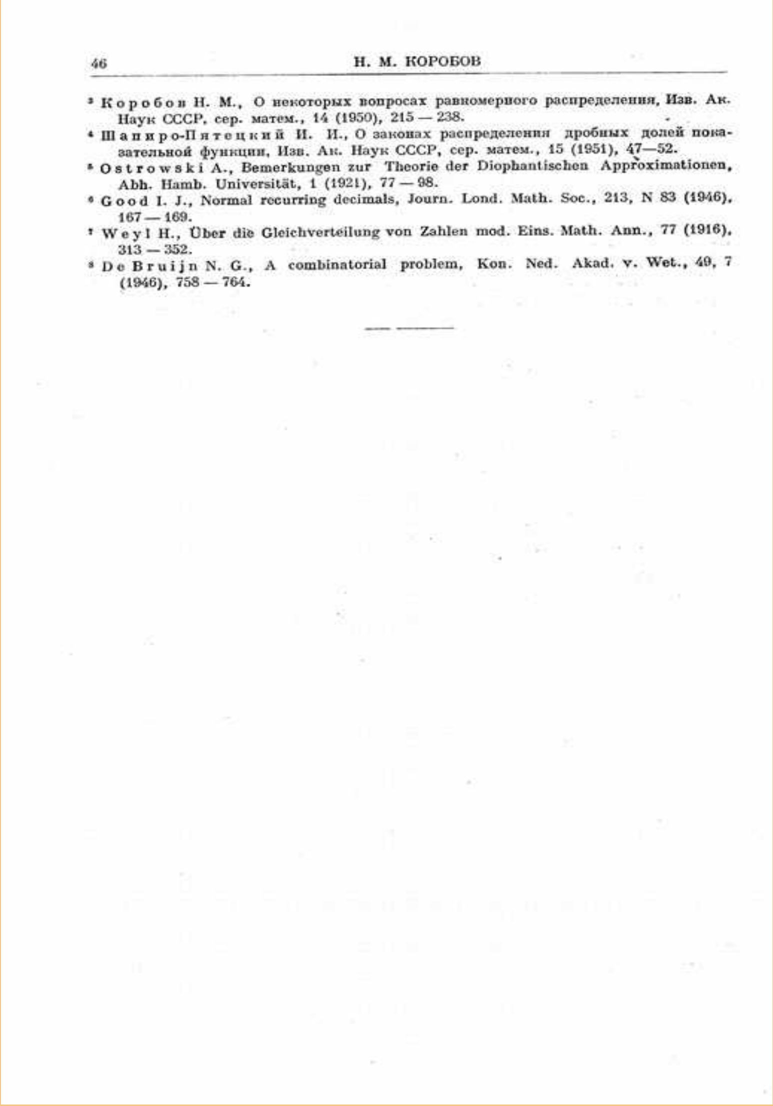
Поступило
13. IV. 1950

ЛИТЕРАТУРА

[1] Хинчин А. Я., Ein Satz über Kettenbrüche, mit arithmetischen Anwendungen, Math. Zeit., 18 (1923), 289 — 306.

[2] Хинчин А. Я., Über dyadische Brüche, Math. Zeit., 18 (1923), 109 — 116; Über einen Satz der Warscheinlichkeitsrechnung, Fund. Math. 6 (1924), 9 — 20; Асимптотические законы теории вероятностей, гл. V, М. — Л., 1936.

Н. М. Коробов провел детальное изучение ***нормальных периодических систем*** и с их помощью получил неулучшаемые оценки в вопросе о суммах дробных долей показательных функций.



[3] Коробов Н. М., О некоторых вопросах равномерного распределения, Изв. Ак. Наук СССР, сер. матем., 14 (1950), 215 — 238.

[4] Шапиро-Пятецкий И. И., О законах распределения дробных долей показательной функции, Изв. Ак. Наук СССР, сер. матем., 15 (1951), 47—52.

[5] Ostrowski A., Bemerkungen zur Theorie der Diophantischen Approximationen, Abh. Hamb. Universität, 1 (1921), 77 — 98.

[6] Good I. J., Normal recurring decimals, Journ. Lond. Math. Soc., 213, N 83 (1946), 167 — 169.

[7] Weyl H., Über die Gleichverteilung von Zahlen mod. Eins. Math. Ann., 77 (1916), 313 — 352.

[8] De Bruijn N. G., A combinatorial problem, Kon. Ned. Akad. v. Wet., 49, 7 (1946), 758 — 764.

N. M. Korobov studied ***normal periodical systems*** in detail. Using these systems he got the unimprovable estimates solving problems with sums of fractional units of exponential functions.

Н. М. Коробов провел детальное изучение ***нормальных периодических систем*** и с их помощью получил неулучшаемые оценки в вопросе о суммах дробных долей показательных функций.

N. M. Korobov studied ***normal periodical systems*** in detail. Using these systems he got the unimprovable estimates solving problems with sums of fractional units of exponential functions.

AMERICAN MATHEMATICAL SOCIETY

TRANSLATIONS

Series 2

Volume 4

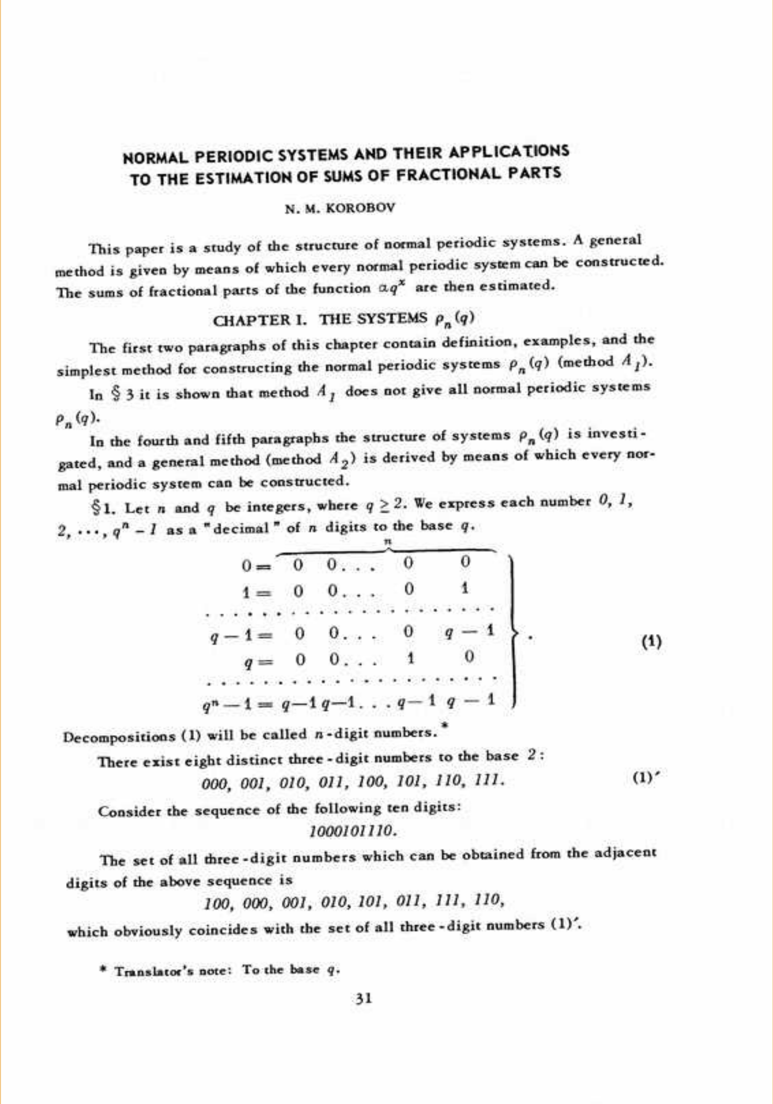
Normal periodic systems and their applications
to the estimation of sums of fractional parts

N. M. Korobov

Published by the
American Mathematical Society
190 Hope Street, Providence 6, R. I.
under a grant from the
National Science Foundation
1956

H. M. Коробов провел детальное изучение ***нормальных периодических систем*** и с их помощью получил неулучшаемые оценки в вопросе о суммах дробных долей показательных функций.

N. M. Korobov studied ***normal periodical systems*** in detail. Using these systems he got the unimprovable estimates solving problems with sums of fractional units of exponential functions.



NORMAL PERIODIC SYSTEMS AND THEIR APPLICATIONS TO THE ESTIMATION OF SUMS OF FRACTIONAL PARTS

N. M. KOROBOV

This paper is a study of the structure of normal periodic systems. A general method is given by means of which every normal periodic system can be constructed. The sums of fractional parts of the function αq^x are then estimated.

CHAPTER I. THE SYSTEMS $\rho_n(q)$

The first two paragraphs of this chapter contain definition, examples, and the simplest method for constructing the normal periodic systems $\rho_n(q)$ (method A_1).

In § 3 it is shown that method A_1 does not give all normal periodic systems $\rho_n(q)$.

In the fourth and fifth paragraphs the structure of systems $\rho_n(q)$ is investigated, and a general method (method A_2) is derived by means of which every normal periodic system can be constructed.

§1. Let n and q be integers, where $q \geq 2$. We express each number $0, 1, 2, \ldots, q^n - 1$ as a "decimal" of n digits to the base q.

$$\left.\begin{array}{rl} 0 = & \overbrace{0 \quad 0 \ldots \quad 0 \quad 0}^{n} \\ 1 = & 0 \quad 0 \ldots \quad 0 \quad 1 \\ \cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ q-1 = & 0 \quad 0 \ldots \quad 0 \quad q-1 \\ q = & 0 \quad 0 \ldots \quad 1 \quad 0 \\ \cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ q^n - 1 = & q-1 \; q-1 \ldots q-1 \; q-1 \end{array}\right\}. \qquad (1)$$

Decompositions (1) will be called n-digit numbers.*

There exist eight distinct three-digit numbers to the base 2:

$$000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111. \qquad (1)'$$

Consider the sequence of the following ten digits:

$$1000101110.$$

The set of all three-digit numbers which can be obtained from the adjacent digits of the above sequence is

$$100, 000, 001, 010, 101, 011, 111, 110,$$

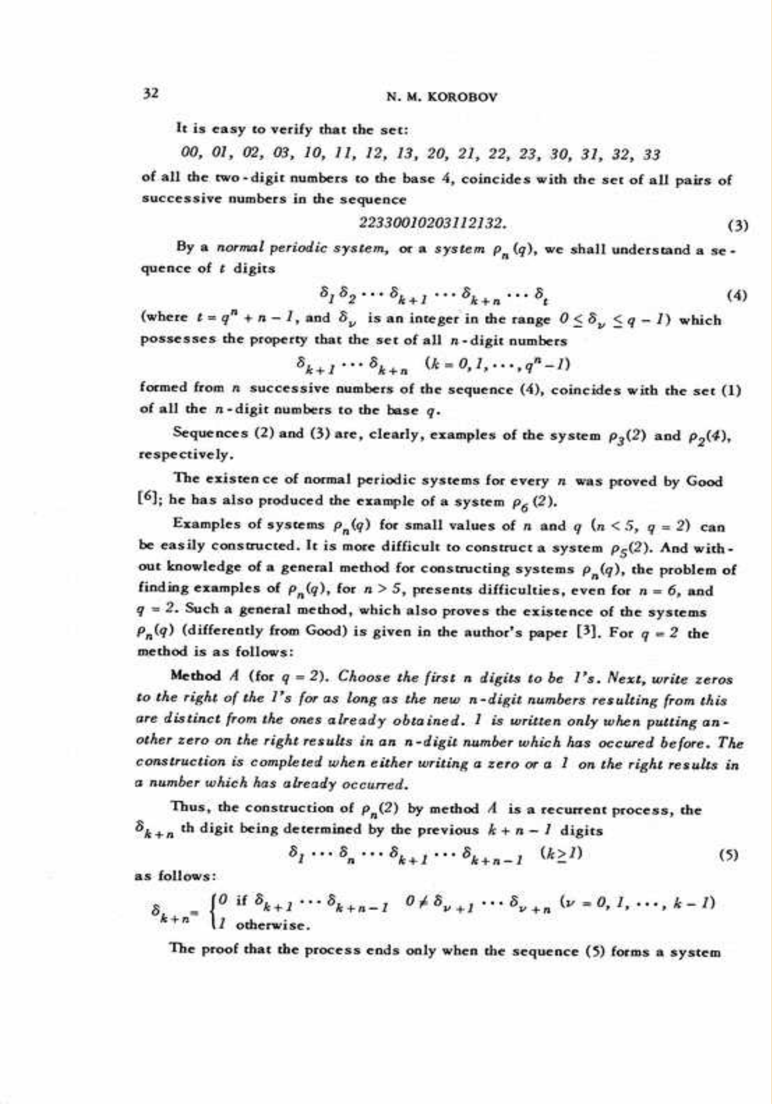
which obviously coincides with the set of all three-digit numbers (1)'.

* Translator's note: To the base q.

31

Н. М. Коробов провел детальное изучение ***нормальных периодических систем*** и с их помощью получил неулучшаемые оценки в вопросе о суммах дробных долей показательных функций.

N. M. Korobov studied ***normal periodical systems*** in detail. Using these systems he got the unimprovable estimates solving problems with sums of fractional units of exponential functions.



32 N. M. KOROBOV

It is easy to verify that the set:

$$00,\ 01,\ 02,\ 03,\ 10,\ 11,\ 12,\ 13,\ 20,\ 21,\ 22,\ 23,\ 30,\ 31,\ 32,\ 33$$

of all the two-digit numbers to the base 4, coincides with the set of all pairs of successive numbers in the sequence

$$2233001020311213 2. \tag{3}$$

By a *normal periodic system*, or a *system* $\rho_n(q)$, we shall understand a sequence of t digits

$$\delta_1\delta_2\cdots\delta_{k+1}\cdots\delta_{k+n}\cdots\delta_t \tag{4}$$

(where $t = q^n + n - 1$, and δ_ν is an integer in the range $0 \le \delta_\nu \le q - 1$) which possesses the property that the set of all n-digit numbers

$$\delta_{k+1}\cdots\delta_{k+n} \quad (k = 0, 1, \cdots, q^n - 1)$$

formed from n successive numbers of the sequence (4), coincides with the set (1) of all the n-digit numbers to the base q.

Sequences (2) and (3) are, clearly, examples of the system $\rho_3(2)$ and $\rho_2(4)$, respectively.

The existence of normal periodic systems for every n was proved by Good [6]; he has also produced the example of a system $\rho_6(2)$.

Examples of systems $\rho_n(q)$ for small values of n and q $(n < 5,\ q = 2)$ can be easily constructed. It is more difficult to construct a system $\rho_5(2)$. And without knowledge of a general method for constructing systems $\rho_n(q)$, the problem of finding examples of $\rho_n(q)$, for $n > 5$, presents difficulties, even for $n = 6$, and $q = 2$. Such a general method, which also proves the existence of the systems $\rho_n(q)$ (differently from Good) is given in the author's paper [3]. For $q = 2$ the method is as follows:

Method A (for $q = 2$). *Choose the first n digits to be 1's. Next, write zeros to the right of the 1's for as long as the new n-digit numbers resulting from this are distinct from the ones already obtained. 1 is written only when putting another zero on the right results in an n-digit number which has occured before. The construction is completed when either writing a zero or a 1 on the right results in a number which has already occurred.*

Thus, the construction of $\rho_n(2)$ by method A is a recurrent process, the δ_{k+n} th digit being determined by the previous $k + n - 1$ digits

$$\delta_1\cdots\delta_n\cdots\delta_{k+1}\cdots\delta_{k+n-1} \quad (k \ge 1) \tag{5}$$

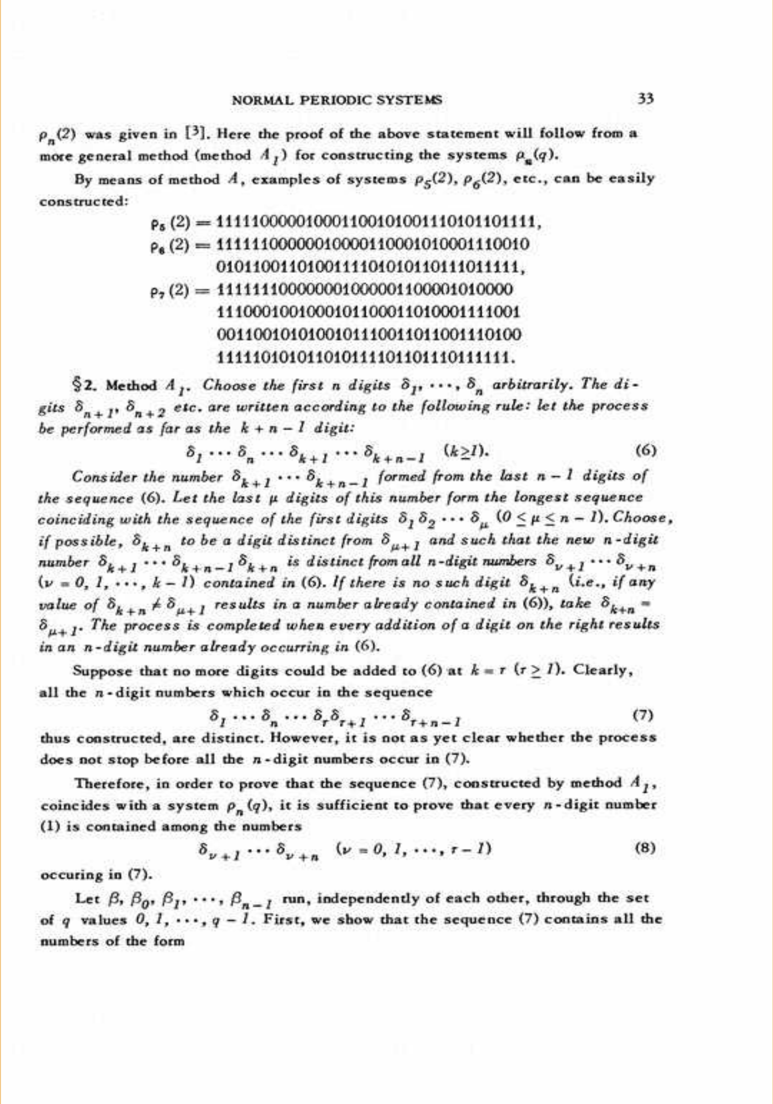
as follows:

$$\delta_{k+n} = \begin{cases} 0 & \text{if } \delta_{k+1}\cdots\delta_{k+n-1}\,0 \ne \delta_{\nu+1}\cdots\delta_{\nu+n} \ (\nu = 0, 1, \cdots, k-1) \\ 1 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

The proof that the process ends only when the sequence (5) forms a system

Н. М. Коробов провел детальное изучение ***нормальных периодических систем*** и с их помощью получил неулучшаемые оценки в вопросе о суммах дробных долей показательных функций.

N. M. Korobov studied ***normal periodical systems*** in detail. Using these systems he got the unimprovable estimates solving problems with sums of fractional units of exponential functions.



$\rho_n(2)$ was given in [3]. Here the proof of the above statement will follow from a more general method (method A_1) for constructing the systems $\rho_n(q)$.

By means of method A, examples of systems $\rho_5(2)$, $\rho_6(2)$, etc., can be easily constructed:

$$\rho_5(2) = 11111000001000110010100111010110111 1,$$

$$\rho_6(2) = 1111110000001000011000101000111001001011001101001111010101101110111111,$$

$$\rho_7(2) = 1111111000000010000001100000101000011100010010001011000110100011110010011001010100101110011011001110100111110101011010111101101110111111.$$

§2. Method A_1. *Choose the first n digits $\delta_1, \cdots, \delta_n$ arbitrarily. The digits $\delta_{n+1}, \delta_{n+2}$ etc. are written according to the following rule: let the process be performed as far as the $k+n-1$ digit:*

$$\delta_1 \cdots \delta_n \cdots \delta_{k+1} \cdots \delta_{k+n-1} \quad (k \geq 1). \tag{6}$$

Consider the number $\delta_{k+1} \cdots \delta_{k+n-1}$ formed from the last $n-1$ digits of the sequence (6). Let the last μ digits of this number form the longest sequence coinciding with the sequence of the first digits $\delta_1 \delta_2 \cdots \delta_\mu$ $(0 \leq \mu \leq n-1)$. Choose, if possible, δ_{k+n} to be a digit distinct from $\delta_{\mu+1}$ and such that the new n-digit number $\delta_{k+1} \cdots \delta_{k+n-1} \delta_{k+n}$ is distinct from all n-digit numbers $\delta_{\nu+1} \cdots \delta_{\nu+n}$ $(\nu = 0, 1, \cdots, k-1)$ contained in (6). If there is no such digit δ_{k+n} (i.e., if any value of $\delta_{k+n} \neq \delta_{\mu+1}$ results in a number already contained in (6)), take $\delta_{k+n} = \delta_{\mu+1}$. The process is completed when every addition of a digit on the right results in an n-digit number already occurring in (6).

Suppose that no more digits could be added to (6) at $k = r$ $(r \geq 1)$. Clearly, all the n-digit numbers which occur in the sequence

$$\delta_1 \cdots \delta_n \cdots \delta_r \delta_{r+1} \cdots \delta_{r+n-1} \tag{7}$$

thus constructed, are distinct. However, it is not as yet clear whether the process does not stop before all the n-digit numbers occur in (7).

Therefore, in order to prove that the sequence (7), constructed by method A_1, coincides with a system $\rho_n(q)$, it is sufficient to prove that every n-digit number (1) is contained among the numbers

$$\delta_{\nu+1} \cdots \delta_{\nu+n} \quad (\nu = 0, 1, \cdots, r-1) \tag{8}$$

occuring in (7).

Let $\beta, \beta_0, \beta_1, \cdots, \beta_{n-1}$ run, independently of each other, through the set of q values $0, 1, \cdots, q-1$. First, we show that the sequence (7) contains all the numbers of the form

Н. М. Коробов провел детальное изучение ***нормальных периодических систем*** и с их помощью получил неулучшаемые оценки в вопросе о суммах дробных долей показательных функций.

N. M. Korobov studied ***normal periodical systems*** in detail. Using these systems he got the unimprovable estimates solving problems with sums of fractional units of exponential functions.

$$\beta_{n-1}\delta_1\delta_2\cdots\delta_{n-1} \quad (\beta_{n-1}=0,1,\cdots,q-1). \tag{9}$$

In fact, consider the $n-1$-digit number $\delta_{r+1}\cdots\delta_{r+n-1}$ which ends the sequence (7). Since the process of adding more digits on the right cannot be continued, it follows that every digit $0, 1, \cdots, q$ did occur once in sequence (7) on the right of the number $\delta_{r+1}\cdots\delta_{r+n-1}$. Consequently, this number occurs in (7) exactly $q+1$ times. Moreover, the digits on the left of the number $\delta_{r+1}\cdots\delta_{r+n-1}$ must also be all distinct, which is possible only if these final $n-1$ digits are the same as the first $n-1$ digits, i.e., if

$$\delta_{r+1}\cdots\delta_{r+n-1}=\delta_1\cdots\delta_{n-1}. \tag{10}$$

Hence, (7) contains all the numbers of the form $\beta_{n-1}\delta_{r+1}\cdots\delta_{r+n-1}$, and by (10), all the numbers of the form $\beta_{n-1}\delta_1\cdots\delta_{n-1}$ $(\beta_{n-1}=0,1,\cdots,q-1)$.

Let us split the set of all n-digit numbers into classes R_ν^n $(\nu=0,1,\cdots,n)$ where the class R_ν^n is composed of all such numbers of the set for which the longest sequence of last digits coinciding with $\delta_1\delta_2\cdots$ consists of ν terms. The numbers belonging to the class R_ν^n will be written as $\beta'_\nu\cdots\beta'_{n-1}\delta_1\cdots\delta_\nu$. (Note that not every number of the form $\beta_\nu\cdots\beta_{n-1}\delta_1\cdots\delta_\nu$ belongs to R_ν^n; it may belong to the class $R_{\nu_1}^n$ where $\nu_1>\nu$.)

The class R_n^n, clearly, consists of a single number $\delta_1\delta_2\cdots\delta_{n-1}\delta_n$. This number starts sequence (7). Moreover, it has been shown above that (7) contains all the numbers of the form $\beta_{n-1}\delta_1\cdots\delta_{n-1}$. Thus, all the numbers of the classes R_n^n and R_{n-1}^n occur in (7). Let us apply the method of induction. Suppose that all the numbers of the class R_{n-s}^n $(s\geq 1)$ occur in (7). Then (7) also contains all the numbers of the class $R_{n-(s+1)}^n$.

Consider the $n-1$-digit numbers

$$\beta''_{n-s}\cdots\beta''_{n-1}\delta_1\cdots\delta_{n-(s+1)}$$

which belong to the class $R_{n-(s+1)}^{n-1}$. Each of these numbers occurs as the first $n-1$ digits of an n-digit number

$$\beta'_{n-s}\cdots\beta'_{n-1}\delta_1\cdots\delta_{n-(s+1)}\delta_{n-s}$$

which belongs to the class R_{n-s}^n. By hypothesis, sequence (7) contains all the n-digit numbers of the form

$$\beta'_{n-s}\cdots\beta'_{n-1}\delta_1\cdots\delta_{n-(s+1)}\delta_{n-s}$$

and, consequently, every number of the form

$$\beta''_{n-s}\cdots\beta''_{n-1}\delta_1\cdots\delta_{n-(s+1)}\delta_{n-s}. \tag{11}$$

According to method A_1, the number (11) can only be written in sequence (7), if (7) contains all the numbers of the form

$$\beta''_{n-s}\cdots\beta''_{n-1}\delta_1\cdots\delta_{n-(s+1)}\beta \ (\beta\neq\delta_{n-s}). \tag{12}$$

Thus, it follows from (11) and (12) that every $n-1$-digit number

Н. М. Коробов провел детальное изучение ***нормальных периодических систем*** и с их помощью получил неулучшаемые оценки в вопросе о суммах дробных долей показательных функций.

N. M. Korobov studied ***normal periodical systems*** in detail. Using these systems he got the unimprovable estimates solving problems with sums of fractional units of exponential functions.

$$\beta''_{n-s} \cdots \beta''_{n-1}\delta_1 \cdots \delta_{n-(s+1)} \tag{13}$$

of the class $R^{n-1}_{n-(s+1)}$ occurs in (7) exactly q times. Moreover, none of the numbers (13) begin sequence (7) (since the number $\delta_1 \cdots \delta_{n-1}$ at the beginning of (7) belongs to the class R^{n-1}_{n-1} which is distinct from $R^{n-1}_{n-(s+1)}$ for $s \geq 1$). But then each of the $n-1$-digit numbers (13) occurs in (7) with every possible digit on its left. Consequently (7) contains all the n-digit numbers of the form

$$\beta_{n-(s+1)}\beta''_{n-s} \cdots \beta''_{n-1}\delta_1 \cdots \delta_{n-(s+1)}$$

and thus, it contains all the numbers of the class $R^n_{n-(s+1)}$.

Therefore, sequence (7) contains all the classes R^n_ν, $\nu = n, n-1, \cdots, 1, 0$ (and consequently, all the n-digit numbers) and hence it is a system $\rho_n(q)$.

It follows at once that the sequence constructed above by method A for $q=2$ is a sequence $\rho_n(2)$, since method A is a particular case of method A_1. (It can easily be verified that method A for $q=2$ can be obtained from method A_1 by taking $\delta_1\delta_2 \cdots \delta_{n-1}\delta_n = 11 \cdots 11$.)

§3. Let us show that method A_1 does not give all systems $\rho_n(q)$.

First of all, let us note that the property (10), proved above for the systems $\rho_n(q)$ constructed by method A_1, can be extended to all systems $\rho_n(q)$, i.e., every system $\rho_n(q)$

$$\delta_1 \cdots \delta_{n-1} \cdots \delta_\tau\delta_{\tau+1} \cdots \delta_{\tau+n-1} \tag{14}$$

has the property

$$\delta_{\tau+1} \cdots \delta_{\tau+n-1} = \delta_1 \cdots \delta_{n-1}. \tag*{(10)$'$}$$

In fact, $n-1$-digit number $\delta_{\tau+1} \cdots \delta_{\tau+n-1}$ which is at the end of system (14), occurs in it q more times (since (14), being an $\rho_n(q)$ system, contains all the n-digit numbers of the form $\delta_{\tau+1} \cdots \delta_{\tau+n-1}\beta$, where $\beta = 0, 1, \cdots, q-1$). After this the proof coincides with the proof of (10).

According to (10)′ the system $\rho_n(q)$ will be written from now on as

$$\delta_1 \cdots \delta_{n-1} \cdots \delta_\tau \,\vdots\, \delta_1 \cdots \delta_{n-1} \text{ or } \delta_1 \cdots \delta_{n-1} \cdots \delta_\tau\delta_1 \cdots \delta_{n-1} \; (\tau = q^n) \tag{15}$$

whilst the system of the first q^n digits

$$\delta_1 \cdots \delta_{n-1} \cdots \delta_\tau \tag*{(15)$'$}$$

will be called a *system* $\rho'_n(q)$. If we perform in $\rho'_n(q)$ an arbitrary cyclic permutation of digits

$$\delta_{k+1} \cdots \delta_\tau\delta_1 \cdots \delta_k \tag{16}$$

and write on the right of (16) the $n-1$-digit number $\delta_{k+1} \cdots \delta_{k+n-1}$ we obtain a sequence

$$\delta_{k+1} \cdots \delta_{k+n-1} \cdots \delta_\tau\delta_1 \cdots \delta_k\delta_{k+1} \cdots \delta_{k+n-1}. \tag{17}$$

This sequence contains all the n-digit numbers occuring in (15), and, consequently, it is a system $\rho_n(q)$.

Н. М. Коробов провел детальное изучение ***нормальных периодических систем*** и с их помощью получил неулучшаемые оценки в вопросе о суммах дробных долей показательных функций.

N. M. Korobov studied ***normal periodical systems*** in detail. Using these systems he got the unimprovable estimates solving problems with sums of fractional units of exponential functions.

Two systems $\rho_n(q)$ will be called *essentially distinct*, if their corresponding systems $\rho_n'(q)$ cannot be transformed into one another by means of a cyclic permutation. The systems will be called *distinct* if not all of their corresponding digits are the same. Thus, for example, there exist 4 distinct systems $\rho_2(2)$

$$1100 \vdots 1, \quad 1001 \vdots 1, \quad 0011 \vdots 0, \quad 0110 \vdots 0,$$

but no two of these systems are essentially distinct. The systems $\rho_3(2)$

$$01000111 \vdots 01 \quad \text{and} \quad 11100010 \vdots 11$$

are not only distinct, but they are essentially distinct. The systems (15) and (17) are not essentially distinct.

De Bruijn has shown [8],that, for every n, the total number of essentially distinct systems $\rho_n(2)$ is 2^r, where $r = 2^{n-1} - n$. Let T_n denote the number of essentially distinct systems $\rho_n(2)$, which can be constructed by method A_1. Since in method A_1 with $q = 2$, all the digits, starting from δ_{n+1}, are uniquely defined, the number of distinct systems $\rho_n(2)$ obtained by method A_1 is equal to the number of distinct n-digit numbers $\delta_1 \cdots \delta_n$, i.e., it is equal to 2^n. Some of these 2^n systems may not be essentially distinct, so that

$$T_n \leq 2^n.$$

But for $n > 4$

$$2^n < 2^r \quad (r = 2^{n-1} - n)$$

and, consequently

$$T_n < 2^r \quad (n \geq 5).$$

Hence, for $n \geq 5$ method A_1 does not give all normal periodic systems $\rho_n(q)$. (Already for $n = 5$, no more than 32 out of the existing 2048 systems $\rho_5(2)$ can be constructed by method A_1.)

§4. The question arises: is there a method by means of which every system $\rho_n(q)$ can be constructed?

To develop such a method we start with some preliminary remarks. Consider a system $\rho_n(q)$:

$$\delta_1 \cdots \delta_{n-1} \cdots \delta_r \delta_1 \cdots \delta_{n-1} \quad (r = q^n). \tag{18}$$

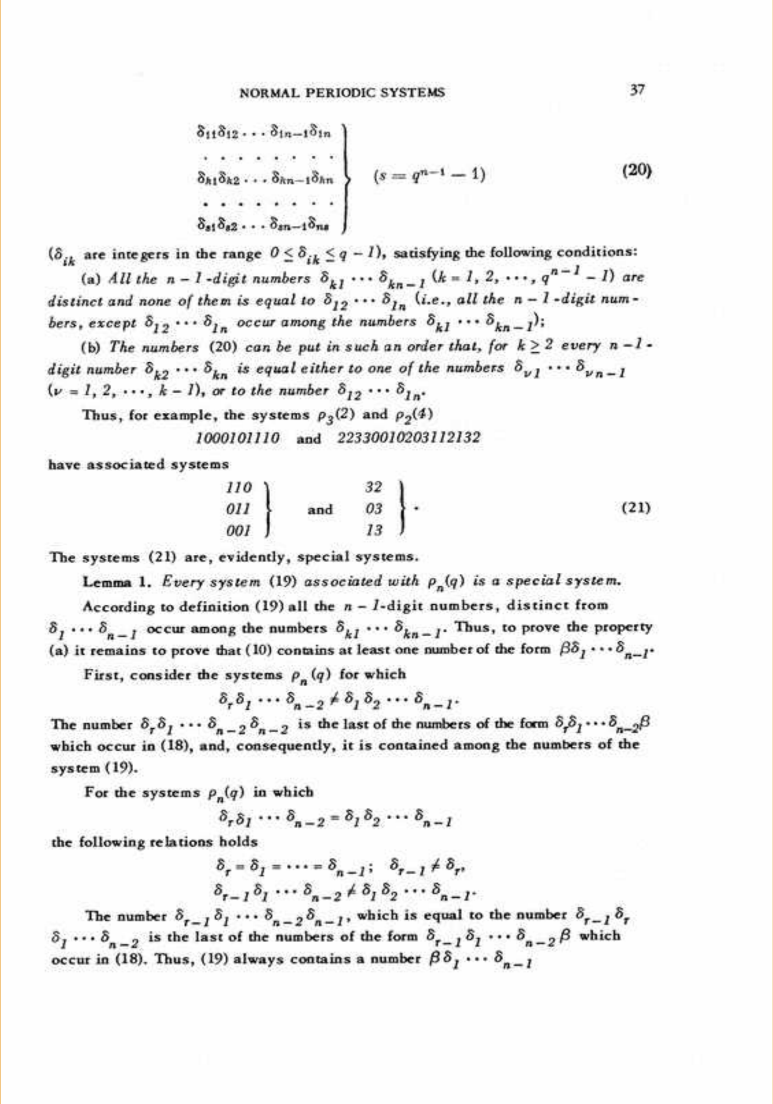
Let $\delta_{k1}\delta_{k2} \cdots \delta_{kn-1}$ be an arbitrary $n-1$-digit number, distinct from $\delta_1 \cdots \delta_{n-1}$. This number occurs in system (18) exactly q times. Each time, by adding a digit on the right it is completed to an n-digit number. Let $\delta_{k1} \cdots \delta_{kn-1}\delta_{kn}$ be the last (counting from left to right) of these n-digit numbers. We shall call the set of thus obtained $s = q^{n-1} - 1$ n-digit numbers

$$\delta_{k1} \cdots \delta_{kn-1}\delta_{kn} \quad (k = 1, 2, \cdots, q^{n-1} - 1) \tag{19}$$

a *system associated with a given* $\rho_n(q)$. By a *special system* we mean any set of n-digit numbers

Н. М. Коробов провел детальное изучение ***нормальных периодических систем*** и с их помощью получил неулучшаемые оценки в вопросе о суммах дробных долей показательных функций.

N. M. Korobov studied ***normal periodical systems*** in detail. Using these systems he got the unimprovable estimates solving problems with sums of fractional units of exponential functions.



NORMAL PERIODIC SYSTEMS 37

$$\left.\begin{array}{l}\delta_{11}\delta_{12}\cdots\delta_{1n-1}\delta_{1n}\\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\\ \delta_{k1}\delta_{k2}\cdots\delta_{kn-1}\delta_{kn}\\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\\ \delta_{s1}\delta_{s2}\cdots\delta_{sn-1}\delta_{ns}\end{array}\right\}\quad (s=q^{n-1}-1) \tag{20}$$

(δ_{ik} are integers in the range $0 \le \delta_{ik} \le q-1$), satisfying the following conditions:

(a) *All the* $n-1$*-digit numbers* $\delta_{k1}\cdots\delta_{kn-1}$ $(k = 1, 2, \cdots, q^{n-1}-1)$ *are distinct and none of them is equal to* $\delta_{12}\cdots\delta_{1n}$ (*i.e., all the* $n-1$*-digit numbers, except* $\delta_{12}\cdots\delta_{1n}$ *occur among the numbers* $\delta_{k1}\cdots\delta_{kn-1}$);

(b) *The numbers* (20) *can be put in such an order that, for* $k \ge 2$ *every* $n-1$*-digit number* $\delta_{k2}\cdots\delta_{kn}$ *is equal either to one of the numbers* $\delta_{\nu 1}\cdots\delta_{\nu n-1}$ $(\nu = 1, 2, \cdots, k-1)$, *or to the number* $\delta_{12}\cdots\delta_{1n}$.

Thus, for example, the systems $\rho_3(2)$ and $\rho_2(4)$

1000101110 and *22330010203112132*

have associated systems

$$\left.\begin{array}{c}110\\011\\001\end{array}\right\}\quad\text{and}\quad\left.\begin{array}{c}32\\03\\13\end{array}\right\}. \tag{21}$$

The systems (21) are, evidently, special systems.

Lemma 1. *Every system* (19) *associated with* $\rho_n(q)$ *is a special system.*

According to definition (19) all the $n-1$-digit numbers, distinct from $\delta_1\cdots\delta_{n-1}$ occur among the numbers $\delta_{k1}\cdots\delta_{kn-1}$. Thus, to prove the property (a) it remains to prove that (10) contains at least one number of the form $\beta\delta_1\cdots\delta_{n-1}$.

First, consider the systems $\rho_n(q)$ for which

$$\delta_r\delta_1\cdots\delta_{n-2} \ne \delta_1\delta_2\cdots\delta_{n-1}.$$

The number $\delta_r\delta_1\cdots\delta_{n-2}\delta_{n-2}$ is the last of the numbers of the form $\delta_r\delta_1\cdots\delta_{n-2}\beta$ which occur in (18), and, consequently, it is contained among the numbers of the system (19).

For the systems $\rho_n(q)$ in which

$$\delta_r\delta_1\cdots\delta_{n-2} = \delta_1\delta_2\cdots\delta_{n-1}$$

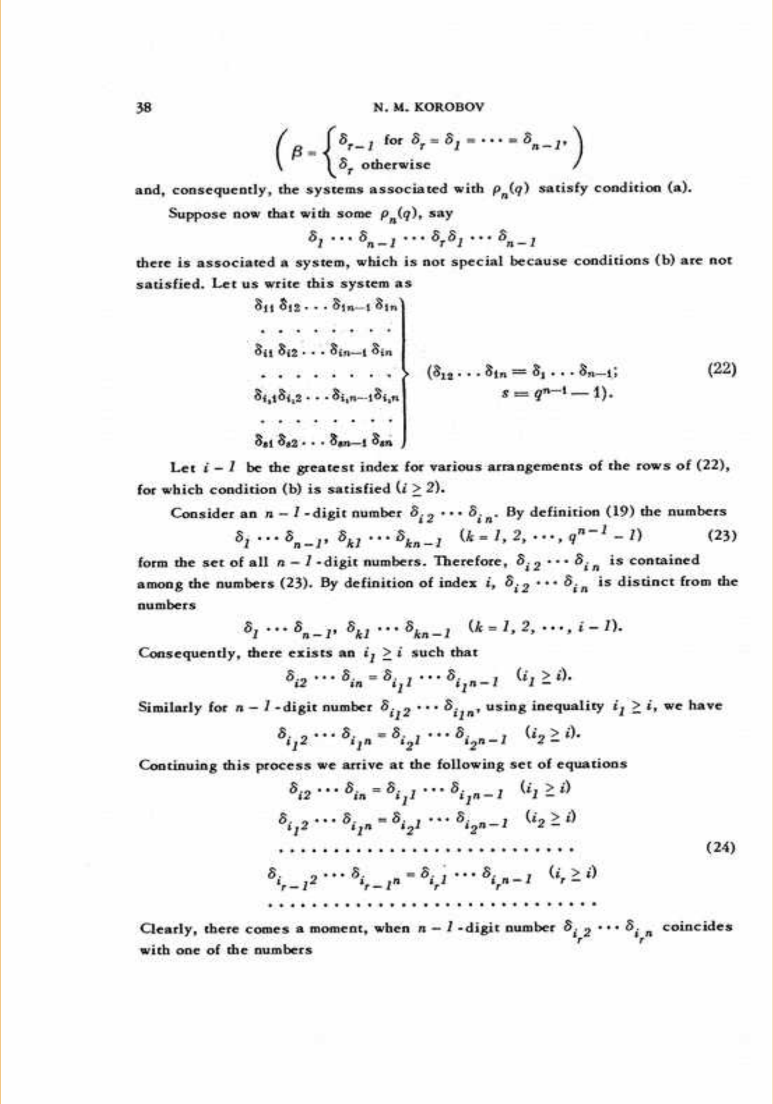
the following relations holds

$$\delta_r = \delta_1 = \cdots = \delta_{n-1};\quad \delta_{r-1} \ne \delta_r,$$
$$\delta_{r-1}\delta_1\cdots\delta_{n-2} \ne \delta_1\delta_2\cdots\delta_{n-1}.$$

The number $\delta_{r-1}\delta_1\cdots\delta_{n-2}\delta_{n-1}$, which is equal to the number $\delta_{r-1}\delta_r\delta_1\cdots\delta_{n-2}$ is the last of the numbers of the form $\delta_{r-1}\delta_1\cdots\delta_{n-2}\beta$ which occur in (18). Thus, (19) always contains a number $\beta\delta_1\cdots\delta_{n-1}$

Н. М. Коробов провел детальное изучение ***нормальных периодических систем*** и с их помощью получил неулучшаемые оценки в вопросе о суммах дробных долей показательных функций.

N. M. Korobov studied ***normal periodical systems*** in detail. Using these systems he got the unimprovable estimates solving problems with sums of fractional units of exponential functions.



$$\left(\beta = \begin{cases} \delta_{r-1} & \text{for } \delta_r = \delta_1 = \cdots = \delta_{n-1}, \\ \delta_r & \text{otherwise} \end{cases}\right)$$

and, consequently, the systems associated with $\rho_n(q)$ satisfy condition (a).

Suppose now that with some $\rho_n(q)$, say

$$\delta_1 \cdots \delta_{n-1} \cdots \delta_r \delta_1 \cdots \delta_{n-1}$$

there is associated a system, which is not special because conditions (b) are not satisfied. Let us write this system as

$$\left.\begin{matrix} \delta_{11}\,\delta_{12}\ldots\delta_{1n-1}\,\delta_{1n} \\ \cdots\cdots\cdots \\ \delta_{i1}\,\delta_{i2}\ldots\delta_{in-1}\,\delta_{in} \\ \cdots\cdots\cdots \\ \delta_{i_11}\delta_{i_12}\ldots\delta_{i_1n-1}\delta_{i_1n} \\ \cdots\cdots\cdots \\ \delta_{s1}\,\delta_{s2}\ldots\delta_{sn-1}\,\delta_{sn} \end{matrix}\right\} \quad \begin{matrix}(\delta_{12}\ldots\delta_{1n} = \delta_1\ldots\delta_{n-1}; \\ s = q^{n-1} - 1).\end{matrix} \tag{22}$$

Let $i - 1$ be the greatest index for various arrangements of the rows of (22), for which condition (b) is satisfied $(i \geq 2)$.

Consider an $n - 1$-digit number $\delta_{i2} \cdots \delta_{in}$. By definition (19) the numbers

$$\delta_1 \cdots \delta_{n-1},\ \delta_{k1} \cdots \delta_{kn-1} \quad (k = 1, 2, \cdots, q^{n-1} - 1) \tag{23}$$

form the set of all $n - 1$-digit numbers. Therefore, $\delta_{i2} \cdots \delta_{in}$ is contained among the numbers (23). By definition of index i, $\delta_{i2} \cdots \delta_{in}$ is distinct from the numbers

$$\delta_1 \cdots \delta_{n-1},\ \delta_{k1} \cdots \delta_{kn-1} \quad (k = 1, 2, \cdots, i - 1).$$

Consequently, there exists an $i_1 \geq i$ such that

$$\delta_{i2} \cdots \delta_{in} = \delta_{i_11} \cdots \delta_{i_1n-1} \quad (i_1 \geq i).$$

Similarly for $n - 1$-digit number $\delta_{i_12} \cdots \delta_{i_1n}$, using inequality $i_1 \geq i$, we have

$$\delta_{i_12} \cdots \delta_{i_1n} = \delta_{i_21} \cdots \delta_{i_2n-1} \quad (i_2 \geq i).$$

Continuing this process we arrive at the following set of equations

$$\begin{matrix} \delta_{i2} \cdots \delta_{in} = \delta_{i_11} \cdots \delta_{i_1n-1} \quad (i_1 \geq i) \\ \delta_{i_12} \cdots \delta_{i_1n} = \delta_{i_21} \cdots \delta_{i_2n-1} \quad (i_2 \geq i) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \delta_{i_{r-1}2} \cdots \delta_{i_{r-1}n} = \delta_{i_r1} \cdots \delta_{i_rn-1} \quad (i_r \geq i) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{matrix} \tag{24}$$

Clearly, there comes a moment, when $n - 1$-digit number $\delta_{i_r2} \cdots \delta_{i_rn}$ coincides with one of the numbers

Н. М. Коробов провел детальное изучение ***нормальных периодических систем*** и с их помощью получил неулучшаемые оценки в вопросе о суммах дробных долей показательных функций.

N. M. Korobov studied ***normal periodical systems*** in detail. Using these systems he got the unimprovable estimates solving problems with sums of fractional units of exponential functions.

$$\delta_{i_\nu 1} \cdots \delta_{i_\nu n-1} \quad (\nu = 0, 1, \cdots, r;\ i_0 = i).$$

Suppose this happens at $\nu = p$:

$$\delta_{i_r 2} \cdots \delta_{i_r n} = \delta_{i_p 1} \cdots \delta_{i_p n-1} \quad (0 \le p \le r).$$

Take $\delta_{i_\nu 1} = \lambda_\nu$ and consider the sequence

$$\lambda_p \lambda_{p+1} \cdots \lambda_r \lambda_{r+1} \cdots \lambda_{r+n-1}. \tag{25}$$

From (24) we obtain

$$\lambda_p \lambda_{p+1} \ldots \lambda_{p+n-1} = \delta_{i_p 1} \delta_{i_{p+1} 1} \ldots \delta_{i_{p+n-1} 1} = \delta_{i_p 1} \delta_{i_p 2} \ldots \delta_{i_p n}.$$

Similarly,

$$\lambda_{p+1} \lambda_{p+2} \ldots \lambda_{p+n} = \delta_{i_{p+1} 1} \delta_{i_{p+1} 2} \ldots \delta_{i_{p+1} n},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\lambda_r \lambda_{r+1} \ldots \lambda_{r+n-1} = \delta_{i_r 1} \delta_{i_r 2} \ldots \delta_{i_r n}.$$

Therefore, the n-digit numbers

$$\lambda_\nu \cdots \lambda_{\nu+n-1} \quad (\nu = p,\ p+1, \cdots, r)$$

which occur in sequence (25) belong to system (22); all the $n-1$-digit numbers of the form

$$\lambda_\nu \cdots \lambda_{\nu+n-2} \quad (\nu = p, p+1, \cdots, r+1)$$

occur in (24) and, consequently, are different from $\delta_1 \cdots \delta_{n-1}$. Finally,

$$\lambda_{r+1} \ldots \lambda_{r+n-1} = \delta_{i_r 2} \ldots \delta_{i_r n} = \delta_{i_p 1} \ldots \delta_{i_p n-1} = \lambda_p \ldots \lambda_{p+n-2},$$

so that

$$\lambda_r \lambda_{r+1} \cdots \lambda_{r+n-1} = \lambda_r \lambda_p \cdots \lambda_{p+n-2}. \tag{26}$$

Let $p < r$. It is not difficult to show that every n-digit number $\lambda_\nu \cdots \lambda_{\nu+n-1}$ ($\nu = p, \cdots, r-1$) occurs in $\rho_n(q)$ on the left of the number $\lambda_{\nu+1} \cdots \lambda_{\nu+n}$.

In fact, by definition (22), the number $\lambda_{\nu+1} \cdots \lambda_{\nu+n-1} \lambda_{\nu+n}$ is the last n-digit number in $\rho_n(q)$ which begins with the sequence of digits $\lambda_{\nu+1} \cdots \lambda_{\nu+n-1}$. Thus, $\lambda_\nu \lambda_{\nu+1} \cdots \lambda_{\nu+n-1}$ can be on the right of $\lambda_{\nu+1} \cdots \lambda_{\nu+n-1} \lambda_{\nu+n}$ only if it occurs at the end of $\rho_n(q)$, which is impossible since $\lambda_\nu \cdots \lambda_{\nu+n-1} \ne \delta_1 \cdots \delta_{n-1}$.

It follows that for $\nu < \nu_1$, every n-digit number $\lambda_\nu \cdots \lambda_{\nu+n-1}$ occurs in $\rho_n(q)$ before any of the numbers $\lambda_{\nu_1} \cdots \lambda_{\nu_1+n-1}$. In particular, $\lambda_p \cdots \lambda_{p+n-1}$ occurs on the left of $\lambda_r \cdots \lambda_{r+n-1}$ which is impossible, since, by (26)

$$\lambda_r \lambda_{r+1} \cdots \lambda_{r+n-1} = \lambda_r \lambda_p \cdots \lambda_{p+n-2}$$

and

$$\lambda_p \cdots \lambda_{p+n-2} \ne \delta_1 \cdots \delta_{n-1}.$$

In the case when $p = r$, we obtain from (26)

$$\lambda_r \lambda_{r+1} \cdots \lambda_{r+n-1} = \lambda_r \lambda_r \cdots \lambda_r$$

Н. М. Коробов провел детальное изучение ***нормальных периодических систем*** и с их помощью получил неулучшаемые оценки в вопросе о суммах дробных долей показательных функций.

N. M. Korobov studied ***normal periodical systems*** in detail. Using these systems he got the unimprovable estimates solving problems with sums of fractional units of exponential functions.

which, again, is impossible, since a system associated with $\rho_n(q)$ does not contain a sequence of n equal successive digits.

This contradiction completes the proof of Lemma 1.

Lemma 2. *Every special system can be constructed by means of the following method:*

Method *B. Write in the first row an n-digit number* $\delta_{11}\delta_{12}\cdots\delta_{1n-1}\delta_{1n}$, *not all digits of which are the same. (Thus,* $\delta_{11}\cdots\delta_{1n-1}\neq\delta_{12}\cdots\delta_{1n}$.) *The second and all the remaining rows are constructed according to the following rule: Let k first rows* $(k\geq 1)$ *be*

$$\delta_{11}\delta_{12}\delta_{13}\cdots\delta_{1n-1}\delta_{1n},$$
$$\delta_{k1}\delta_{k2}\delta_{k3}\cdots\delta_{kn-1}\delta_{kn}.$$

Consider $n-1$*-digit numbers*

$$\delta_{12}\cdots\delta_{1n},\ \delta_{\nu 1}\cdots\delta_{\nu n-1}\quad(\nu=1,2,\cdots,k). \tag{27}$$

By acceptable numbers we understand those numbers $\mu_1\cdots\mu_{n-1}$ *of the set* (27) *for which* $\mu_1\cdots\mu_{n-2}=\delta_{13}\cdots\delta_{1n}$, *if* $\delta_{13}\cdots\delta_{1n}$ *occurs among* $\delta_{\nu 2}\cdots\delta_{\nu n-1}$ $(\nu=1,2,\cdots,k)$ *less than* $q-1$ *times; and also those for which* $\mu_1\cdots\mu_{n-2}\neq\delta_{13}\cdots\delta_{1n}$, *if* $\mu_1\cdots\mu_{n-2}$ *occurs among* $\delta_{\nu 2}\cdots\delta_{\nu n-1}$ $(\nu=1,2,\cdots,k)$ *less than* q *times.*

To construct the $(k+1)$*st row we choose* $\delta_{k+1\,2}\cdots\delta_{k+1\,n}$ *to be equal to an acceptable number, then choose* $\delta_{k+1\,1}$, *so that the number* $\delta_{k+1\,1}\cdots\delta_{k+1\,n-1}$ *is distinct from all the numbers* (27).

The $(k+1)$*st row is thus constructed. The construction by method B is completed when it is impossible to construct the next row.*

We begin by proving that method B always results in a special system.

In fact, when the process stops it is not because $\delta_{k+1\,1}$ cannot be chosen (this follows from the choice of the acceptable numbers). Consequently, the process stops when it becomes impossible to choose $\delta_{k+1\,2}\cdots\delta_{k+1\,n}$, i.e., when, for some $k=s$, the set of acceptable numbers is empty.

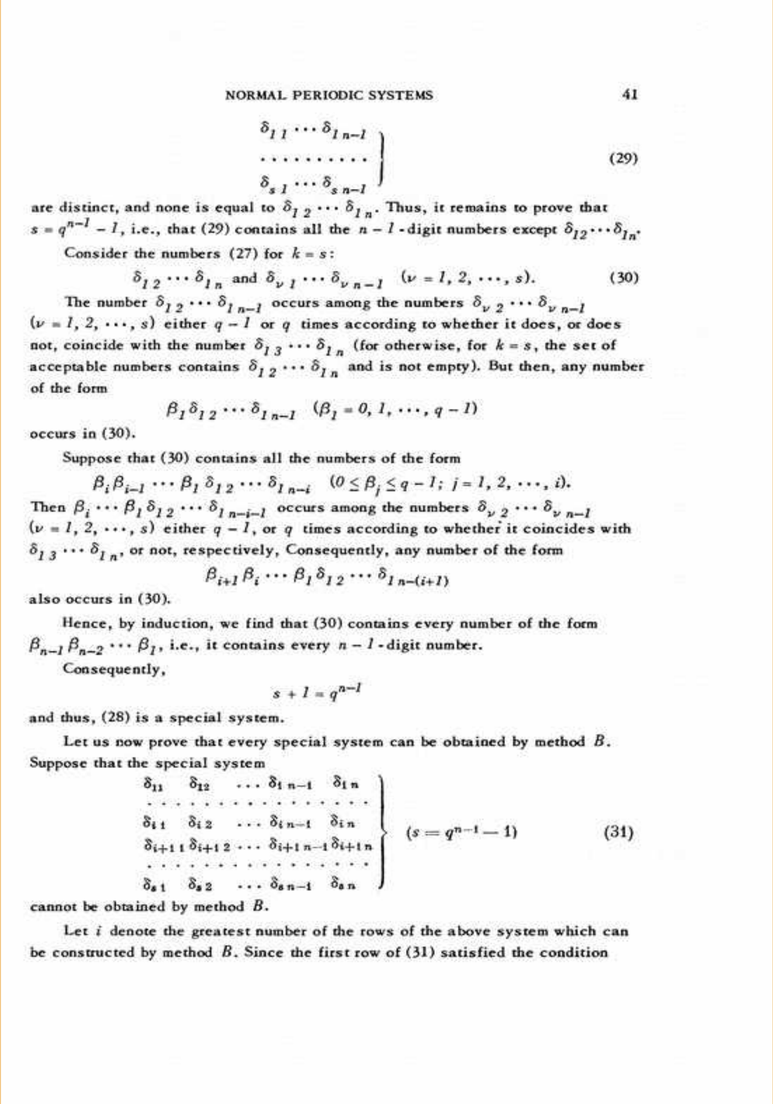
Let the rows which can be constructed by method B be:

$$\left.\begin{array}{llll}\delta_{11} & \delta_{12} & \ldots\delta_{1\,n-1} & \delta_{1\,n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \delta_{k1} & \delta_{k2} & \ldots\delta_{k\,n-1} & \delta_{k\,n}\\ \delta_{k+1\,1} & \delta_{k+1\,2} & \ldots\delta_{k+1\,n-1} & \delta_{k+1\,n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \delta_{s1} & \delta_{s2} & \ldots\delta_{s\,n-1} & \delta_{s\,n}\end{array}\right\}. \tag{28}$$

Since every number $\delta_{k+1\,2}\cdots\delta_{k+1\,n}$ $(k=1,2,\cdots,s-1)$ is contained among the numbers (27), the system (28) has the property (b). Further, it follows from the choice of the digits $\delta_{k+1\,1}$, that all the $n-1$-digit numbers

Н. М. Коробов провел детальное изучение ***нормальных периодических систем*** и с их помощью получил неулучшаемые оценки в вопросе о суммах дробных долей показательных функций.

N. M. Korobov studied ***normal periodical systems*** in detail. Using these systems he got the unimprovable estimates solving problems with sums of fractional units of exponential functions.



NORMAL PERIODIC SYSTEMS 41

$$\left.\begin{array}{c} \delta_{1\,1} \cdots \delta_{1\,n-1} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \delta_{s\,1} \cdots \delta_{s\,n-1} \end{array}\right\} \qquad (29)$$

are distinct, and none is equal to $\delta_{1\,2} \cdots \delta_{1\,n}$. Thus, it remains to prove that $s = q^{n-1} - 1$, i.e., that (29) contains all the $n-1$-digit numbers except $\delta_{12} \cdots \delta_{1n}$.

Consider the numbers (27) for $k = s$:

$$\delta_{1\,2} \cdots \delta_{1\,n} \text{ and } \delta_{\nu\,1} \cdots \delta_{\nu\,n-1} \quad (\nu = 1, 2, \cdots, s). \qquad (30)$$

The number $\delta_{1\,2} \cdots \delta_{1\,n-1}$ occurs among the numbers $\delta_{\nu\,2} \cdots \delta_{\nu\,n-1}$ $(\nu = 1, 2, \cdots, s)$ either $q-1$ or q times according to whether it does, or does not, coincide with the number $\delta_{1\,3} \cdots \delta_{1\,n}$ (for otherwise, for $k = s$, the set of acceptable numbers contains $\delta_{1\,2} \cdots \delta_{1\,n}$ and is not empty). But then, any number of the form

$$\beta_1 \delta_{1\,2} \cdots \delta_{1\,n-1} \quad (\beta_1 = 0, 1, \cdots, q-1)$$

occurs in (30).

Suppose that (30) contains all the numbers of the form

$$\beta_i \beta_{i-1} \cdots \beta_1 \delta_{1\,2} \cdots \delta_{1\,n-i} \quad (0 \le \beta_j \le q-1;\ j = 1, 2, \cdots, i).$$

Then $\beta_i \cdots \beta_1 \delta_{1\,2} \cdots \delta_{1\,n-i-1}$ occurs among the numbers $\delta_{\nu\,2} \cdots \delta_{\nu\,n-1}$ $(\nu = 1, 2, \cdots, s)$ either $q-1$, or q times according to whether it coincides with $\delta_{1\,3} \cdots \delta_{1\,n}$, or not, respectively, Consequently, any number of the form

$$\beta_{i+1} \beta_i \cdots \beta_1 \delta_{1\,2} \cdots \delta_{1\,n-(i+1)}$$

also occurs in (30).

Hence, by induction, we find that (30) contains every number of the form $\beta_{n-1} \beta_{n-2} \cdots \beta_1$, i.e., it contains every $n-1$-digit number.

Consequently,

$$s + 1 = q^{n-1}$$

and thus, (28) is a special system.

Let us now prove that every special system can be obtained by method B. Suppose that the special system

$$\left.\begin{array}{ccccc} \delta_{11} & \delta_{12} & \cdots & \delta_{1\,n-1} & \delta_{1\,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \delta_{i\,1} & \delta_{i\,2} & \cdots & \delta_{i\,n-1} & \delta_{i\,n} \\ \delta_{i+1\,1} & \delta_{i+1\,2} & \cdots & \delta_{i+1\,n-1} & \delta_{i+1\,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \delta_{s\,1} & \delta_{s\,2} & \cdots & \delta_{s\,n-1} & \delta_{s\,n} \end{array}\right\} \quad (s = q^{n-1} - 1) \qquad (31)$$

cannot be obtained by method B.

Let i denote the greatest number of the rows of the above system which can be constructed by method B. Since the first row of (31) satisfied the condition

Н. М. Коробов провел детальное изучение ***нормальных периодических систем*** и с их помощью получил неулучшаемые оценки в вопросе о суммах дробных долей показательных функций.

N. M. Korobov studied ***normal periodical systems*** in detail. Using these systems he got the unimprovable estimates solving problems with sums of fractional units of exponential functions.

42 N. M. KOROBOV

$\delta_{1\,1} \cdots \delta_{1\,n-1} \neq \delta_{1\,2} \cdots \delta_{1\,n}$, which is also the only condition imposed on the first row in method B, it follows that $i \geq 1$.

Consider the $(i+1)$st row of system (31). It follows from (a) that $\delta_{i+1\,1} \cdots \delta_{i+1\,n-1}$ is distinct from the numbers

$$\delta_{i\,2} \cdots \delta_{i\,n} \text{ and } \delta_{\nu\,1} \cdots \delta_{\nu\,n-1} \quad (\nu = 1, 2, \cdots, i). \tag{31'}$$

Consequently, the $n-2$-digit number $\delta_{i+1\,2} \cdots \delta_{i+1\,n-1}$ occurs among the numbers $\delta_{\nu\,2} \cdots \delta_{\nu\,n-1}$ $(\nu = 1, 2, \cdots, i)$ either less than $q-1$ or less than q times, depending whether equation

$$\delta_{\nu\,2} \cdots \delta_{\nu\,n-1} = \delta_{1\,3} \cdots \delta_{1\,n}$$

is, or is not, satisfied.

Moreover, by (b), $\delta_{i+1\,2} \cdots \delta_{i+1\,n}$ coincides with one of the numbers (31)′, and therefore $\delta_{i+1\,2} \cdots \delta_{i+1\,n}$ is an acceptable number. Consequently, the $i+1$ st row of system (31) can be constructed by method B, which contradicts our choice of index i.

It follows that the special system (31) can be constructed by method B which completes the proof of Lemma 2.

§5. We now proceed to formulate a general method by means of which every system $\rho_n(q)$ can be constructed.

Method A_2. *Write at random first n digits $\delta_1 \delta_2 \cdots \delta_n$. Choose a special system with $\delta_{1\,2} \cdots \delta_{1\,n} = \delta_1 \cdots \delta_{n-1}$. The remaining digits, starting with the $n+1$ st, will be found according to the following general rule: Let the first $n+k-1$ digits be*

$$\delta_1 \delta_2 \cdots \delta_{k+1} \cdots \delta_{k+n-1} \quad (k \geq 1). \tag{32}$$

Choose the next digit δ_{k+n} to be such that the n-digit number $\delta_{k+1} \cdots \delta_{k+n-1}\delta_{k+n}$ occurs in sequence (32) for the first time, and coincides with one of the numbers of the above chosen special system only in the case where all the remaining numbers of the form $\delta_{k+1} \cdots \delta_{k+n-1}\beta$ $(\beta \neq \delta_{k+n})$ have already occurred in (32). Construction of the sequence is completed when addition of any digit on the right results in an n-digit number obtained before.

Theorem. *The sequences constructed by method A_2 are systems $\rho_n(q)$. Every system $\rho_n(q)$ can be constructed by method A_2.*

Proof. Let the process of constructing (32) stop at $k = r$ $(r \geq 1)$:

$$\delta_1 \cdots \delta_{n-1} \cdots \delta_r \delta_{r+1} \cdots \delta_{r+n-1}. \tag{33}$$

It follows from the choice of the digits δ_{k+n} $(k = 1, 2, \cdots, r-1)$ that all the n-digit numbers occurring in (33) are distinct. Therefore, (33) is a system $\rho_n(q)$ if every n-digit number occurs in

$$\delta_{\nu+1} \cdots \delta_{\nu+n} \quad (\nu = 0, 1, \cdots, r-1).$$

Н. М. Коробов провел детальное изучение ***нормальных периодических систем*** и с их помощью получил неулучшаемые оценки в вопросе о суммах дробных долей показательных функций.

N. M. Korobov studied ***normal periodical systems*** in detail. Using these systems he got the unimprovable estimates solving problems with sums of fractional units of exponential functions.

By repeating the reasoning, used in method A_1 (proof of the equality (10)) we find that sequence (33) contains all the numbers of either of the forms

$$\beta\delta_1 \cdots \delta_{n-1} \text{ and } \delta_1 \cdots \delta_{n-1}\beta \quad (0 \le \beta \le q-1).$$

Let the special system used for constructing sequence (33) be

$$\left.\begin{array}{l} \delta_{11}\ \delta_{12} \ \cdots\ \delta_{1n-1}\ \delta_{1n} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \delta_{\nu 1}\ \delta_{\nu 2} \ \cdots\ \delta_{\nu n-1}\ \delta_{\nu n} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \delta_{s1}\ \delta_{s2} \ \cdots\ \delta_{sn-1}\ \delta_{sn} \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} (\delta_{12} \cdots \delta_{1n} = \delta_1 \cdots \delta_{n-1}; \\ \\ \qquad s = q^{n-1} - 1). \end{array}$$

It follows from the equality $\delta_{1\,2} \cdots \delta_{1\,n} = \delta_1 \cdots \delta_{n-1}$ that (33) contains every number of either of the forms

$$\beta\delta_{1\,2} \cdots \delta_{1\,n} \text{ or } \delta_{1\,2} \cdots \delta_{1\,n}\beta \quad (\beta = 0, 1, \cdots, q-1). \tag{34}$$

Applying the method of induction, suppose that sequence (33) contains all the n-digit numbers of the form

$$\beta\delta_{\nu\,2} \cdots \delta_{\nu\,n} \text{ and } \delta_{\nu\,2} \cdots \delta_{\nu\,n}\beta \quad (\nu = 1, 2, \cdots, t;\ t \ge 1;\ 0 \le \beta \le q-1).$$

Then, in particular, (33) contains every number of the form

$$\delta_{\nu\,1} \cdots \delta_{\nu\,n} \quad (\nu = 1, 2, \cdots, t)$$

and, consequently, according to method A_2, (33) contains all the numbers of the form

$$\delta_{\nu\,1} \cdots \delta_{\nu\,n-1}\beta.$$

By property (b), the number $\delta_{t+1\,2} \cdots \delta_{t+1\,n}$ coincides with one of the numbers

$$\delta_{1\,2} \cdots \delta_{1\,n},\ \delta_{\nu\,1} \cdots \delta_{\nu\,n-1} \quad (\nu = 1, 2, \cdots, t),$$

and thus, together with $\delta_{1\,2} \cdots \delta_{1\,n}\beta$ and $\delta_{\nu\,1} \cdots \delta_{\nu\,n-1}\beta$, sequence (33) contains, in particular, all the numbers of the form

$$\delta_{t+1\,2} \cdots \delta_{t+1\,n}\beta \quad (\beta = 0, 1, \cdots, q-1).$$

Therefore, the $n-1$-digit number $\delta_{t+1\,2} \cdots \delta_{t+1\,n}$ occurs in (33) q times and consequently* (33) contains all the numbers of the form

$$\beta\delta_{t+1\,2} \cdots \delta_{t+1\,n}.$$

Combining these results, we find that sequence (33) contains all the numbers of the form

$$\beta\delta_{\nu\,2} \cdots \delta_{\nu\,n} \text{ and } \delta_{\nu\,2} \cdots \delta_{\nu\,n}\beta \quad (\nu = 1, 2, \cdots, t+1;\ 0 \le \beta \le q-1).$$

Hence, by induction, (33) contains all the numbers of the form

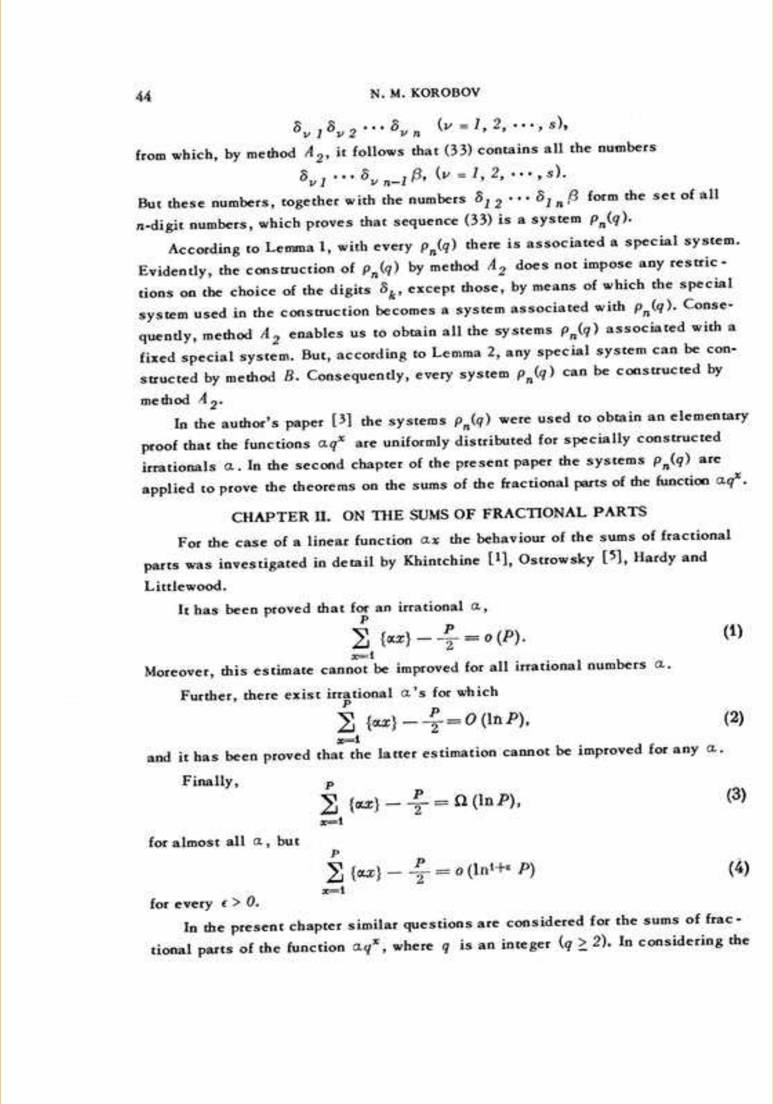
$$\beta\delta_{\nu\,2} \cdots \delta_{\nu\,n} \text{ and } \delta_{\nu\,2} \cdots \delta_{\nu\,n}\beta \quad (1 \le \nu \le s;\ 0 \le \beta \le q-1)$$

and, in particular, all the numbers

* We assume $\delta_{t+12} \cdots \delta_{t+1n} \ne \delta_{12} \cdots \delta_{1n}$; since in the case $\delta_{t+12} \cdots \delta_{t+1n} = \delta_{12} \cdots \delta_{1n}$ the statement that all the numbers $\beta\delta_{t+12} \cdots \delta_{t+1n}$ occur in (33) coincides with the one already proved in (34).

Н. М. Коробов провел детальное изучение ***нормальных периодических систем*** и с их помощью получил неулучшаемые оценки в вопросе о суммах дробных долей показательных функций.

N. M. Korobov studied ***normal periodical systems*** in detail. Using these systems he got the unimprovable estimates solving problems with sums of fractional units of exponential functions.



44 N. M. KOROBOV

$$\delta_{\nu 1}\delta_{\nu 2}\cdots\delta_{\nu n} \quad (\nu = 1, 2, \cdots, s),$$

from which, by method A_2, it follows that (33) contains all the numbers

$$\delta_{\nu 1}\cdots\delta_{\nu\, n-1}\beta, \ (\nu = 1, 2, \cdots, s).$$

But these numbers, together with the numbers $\delta_{1 2}\cdots\delta_{1 n}\beta$ form the set of all n-digit numbers, which proves that sequence (33) is a system $\rho_n(q)$.

According to Lemma 1, with every $\rho_n(q)$ there is associated a special system. Evidently, the construction of $\rho_n(q)$ by method A_2 does not impose any restrictions on the choice of the digits δ_k, except those, by means of which the special system used in the construction becomes a system associated with $\rho_n(q)$. Consequently, method A_2 enables us to obtain all the systems $\rho_n(q)$ associated with a fixed special system. But, according to Lemma 2, any special system can be constructed by method B. Consequently, every system $\rho_n(q)$ can be constructed by method A_2.

In the author's paper [3] the systems $\rho_n(q)$ were used to obtain an elementary proof that the functions αq^x are uniformly distributed for specially constructed irrationals α. In the second chapter of the present paper the systems $\rho_n(q)$ are applied to prove the theorems on the sums of the fractional parts of the function αq^x.

CHAPTER II. ON THE SUMS OF FRACTIONAL PARTS

For the case of a linear function αx the behaviour of the sums of fractional parts was investigated in detail by Khintchine [1], Ostrowsky [5], Hardy and Littlewood.

It has been proved that for an irrational α,

$$\sum_{x=1}^{P}\{\alpha x\} - \frac{P}{2} = o(P). \tag{1}$$

Moreover, this estimate cannot be improved for all irrational numbers α.

Further, there exist irrational α's for which

$$\sum_{x=1}^{P}\{\alpha x\} - \frac{P}{2} = O(\ln P), \tag{2}$$

and it has been proved that the latter estimation cannot be improved for any α.

Finally,

$$\sum_{x=1}^{P}\{\alpha x\} - \frac{P}{2} = \Omega(\ln P), \tag{3}$$

for almost all α, but

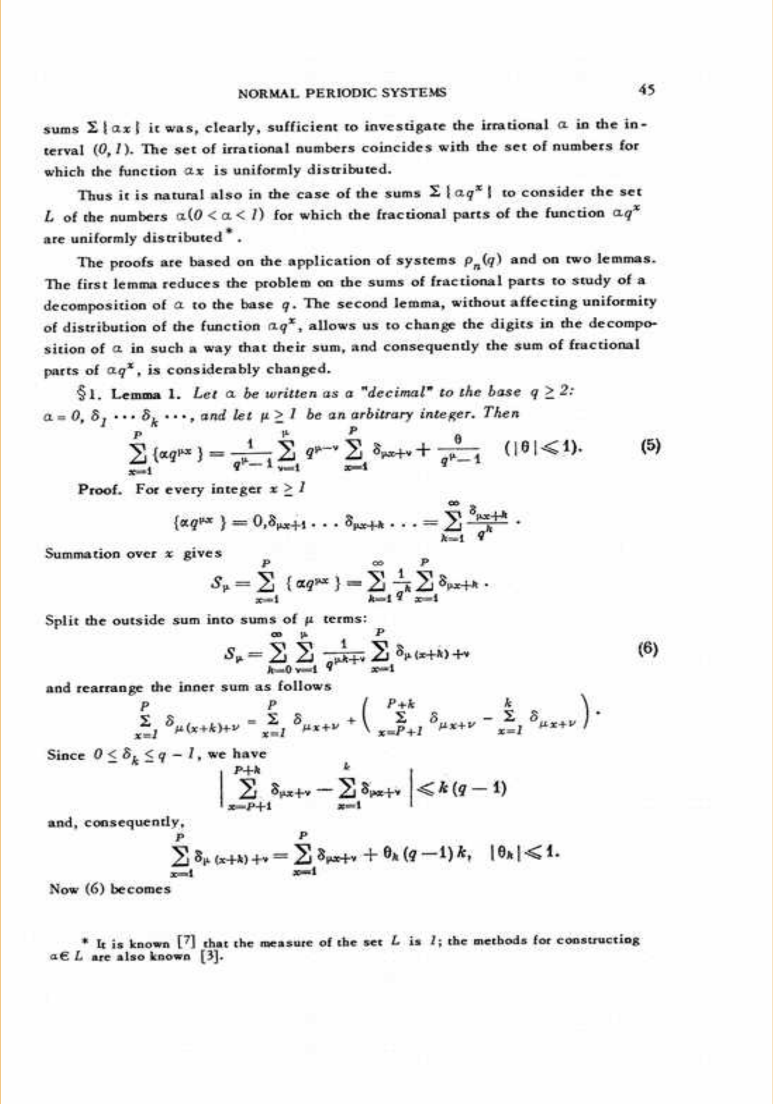
$$\sum_{x=1}^{P}\{\alpha x\} - \frac{P}{2} = o(\ln^{1+\epsilon} P) \tag{4}$$

for every $\epsilon > 0$.

In the present chapter similar questions are considered for the sums of fractional parts of the function αq^x, where q is an integer $(q \geq 2)$. In considering the

Н. М. Коробов провел детальное изучение ***нормальных периодических систем*** и с их помощью получил неулучшаемые оценки в вопросе о суммах дробных долей показательных функций.

N. M. Korobov studied ***normal periodical systems*** in detail. Using these systems he got the unimprovable estimates solving problems with sums of fractional units of exponential functions.



NORMAL PERIODIC SYSTEMS 45

sums $\Sigma\{\alpha x\}$ it was, clearly, sufficient to investigate the irrational α in the interval $(0, 1)$. The set of irrational numbers coincides with the set of numbers for which the function αx is uniformly distributed.

Thus it is natural also in the case of the sums $\Sigma\{\alpha q^x\}$ to consider the set L of the numbers $\alpha (0 < \alpha < 1)$ for which the fractional parts of the function αq^x are uniformly distributed*.

The proofs are based on the application of systems $\rho_n(q)$ and on two lemmas. The first lemma reduces the problem on the sums of fractional parts to study of a decomposition of α to the base q. The second lemma, without affecting uniformity of distribution of the function αq^x, allows us to change the digits in the decomposition of α in such a way that their sum, and consequently the sum of fractional parts of αq^x, is considerably changed.

§1. **Lemma 1.** *Let α be written as a "decimal" to the base $q \geq 2$: $\alpha = 0, \delta_1 \cdots \delta_k \cdots$, and let $\mu \geq 1$ be an arbitrary integer. Then*

$$\sum_{x=1}^{P} \{\alpha q^{\mu x}\} = \frac{1}{q^\mu - 1} \sum_{\nu=1}^{\mu} q^{\mu-\nu} \sum_{x=1}^{P} \delta_{\mu x+\nu} + \frac{\theta}{q^\mu - 1} \quad (|\theta| \leqslant 1). \tag{5}$$

Proof. For every integer $x \geq 1$

$$\{\alpha q^{\mu x}\} = 0, \delta_{\mu x+1} \ldots \delta_{\mu x+k} \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\delta_{\mu x+k}}{q^k}.$$

Summation over x gives

$$S_\mu = \sum_{x=1}^{P} \{\alpha q^{\mu x}\} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{q^k} \sum_{x=1}^{P} \delta_{\mu x+k}.$$

Split the outside sum into sums of μ terms:

$$S_\mu = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\nu=1}^{\mu} \frac{1}{q^{\mu k+\nu}} \sum_{x=1}^{P} \delta_{\mu(x+k)+\nu} \tag{6}$$

and rearrange the inner sum as follows

$$\sum_{x=1}^{P} \delta_{\mu(x+k)+\nu} = \sum_{x=1}^{P} \delta_{\mu x+\nu} + \left(\sum_{x=P+1}^{P+k} \delta_{\mu x+\nu} - \sum_{x=1}^{k} \delta_{\mu x+\nu} \right).$$

Since $0 \leq \delta_k \leq q - 1$, we have

$$\left| \sum_{x=P+1}^{P+k} \delta_{\mu x+\nu} - \sum_{x=1}^{k} \delta_{\mu x+\nu} \right| \leqslant k(q-1)$$

and, consequently,

$$\sum_{x=1}^{P} \delta_{\mu(x+k)+\nu} = \sum_{x=1}^{P} \delta_{\mu x+\nu} + \theta_k (q-1) k, \quad |\theta_k| \leqslant 1.$$

Now (6) becomes

* It is known [7] that the measure of the set L is 1; the methods for constructing $\alpha \in L$ are also known [3].

Н. М. Коробов провел детальное изучение ***нормальных периодических систем*** и с их помощью получил неулучшаемые оценки в вопросе о суммах дробных долей показательных функций.

N. M. Korobov studied ***normal periodical systems*** in detail. Using these systems he got the unimprovable estimates solving problems with sums of fractional units of exponential functions.

$$S_\mu = \sum_{\nu=1}^{\mu} \frac{1}{q^\nu} \sum_{x=1}^{P} \delta_{\mu x+\nu} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{q^{\mu k}} + \theta (q-1) \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\nu=1}^{\mu} \frac{k}{q^{\mu k+\nu}}, \quad |\theta| \leqslant 1. \tag{7}$$

Using the fact that

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{q^{\mu k}} = \frac{q^\mu}{(q^\mu-1)^2} \text{ and } \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{q^{\mu k}} = \frac{q^\mu}{q^\mu - 1},$$

we obtain the statement of the lemma from (7).

Lemma 2. *Let the function $\alpha' q^x$ be uniformly distributed for $\alpha' = 0, \delta_1' \cdots \delta_k' \cdots$ $(\alpha' \in L)$, and let the integers $k_1 < k_2 < \cdots$ satisfy the conditions*

$$\lim_{s\to\infty} \frac{k_{2s}}{k_{2s-1}} = 1, \quad \lim_{s\to\infty} \frac{k_{2s+1}}{k_{2s}} = \infty. \tag{8}$$

Define α by decomposition $\alpha = 0, \delta_1 \cdots \delta_k \cdots$, where

$$\delta_k = \begin{cases} \delta_k' & \text{for } k_{2s} < k \leq k_{2s+1} \\ \text{arbitrary} & \text{for } k_{2s-1} < k \leq k_{2s} \end{cases} \quad (s = 1, 2, \cdots). \tag{9}$$

Then the function αq^x is also uniformly distributed.

Proof. Consider, first, the sum

$$S_N = \sum_{x=k_{2\nu}+1}^{N} e^{2\pi i m \alpha q^x} \quad (m \geq 1 \text{ is an integer}) \tag{10}$$

where $k_{2\nu} < N \leq k_{2\nu+1} - r_\nu$ and $r_\nu \to \infty$ as ν infinitely increases. It follows from the definition of α that, in the interval of summation,

$$\{\alpha q^x\} = \{\alpha' q^x\} + \frac{\theta_x}{q^{r_\nu}}, \quad |\theta_x| \leq 1.$$

Therefore,

$$|S_N| = \Big|\sum_{x=k_{2\nu}+1}^{N} e^{2\pi i m\left(\alpha' q^x + \frac{\theta_x}{q^{r_\nu}}\right)}\Big| \leqslant \Big|\sum_{x=k_{2\nu}+1}^{N} e^{2\pi i m \alpha' q x}\Big| + \sum_{x=k_{2\nu}+1}^{N} \Big|1 - e^{2\pi i m \frac{\theta_x}{q^{r_\nu}}}\Big|,$$

$$|S_N| \leqslant \Big|\sum_{x=1}^{k_{2\nu}} e^{2\pi i m \alpha' q^x}\Big| + \Big|\sum_{x=1}^{N} e^{2\pi i m \alpha' q^x}\Big| + \frac{N - k_{2\nu}}{q^{r_\nu}} \cdot 2\pi m,$$

which, on using the definition of r_ν and the fact that $\alpha' \in L$, gives

$$S_N = o(N).$$

To estimate the sum

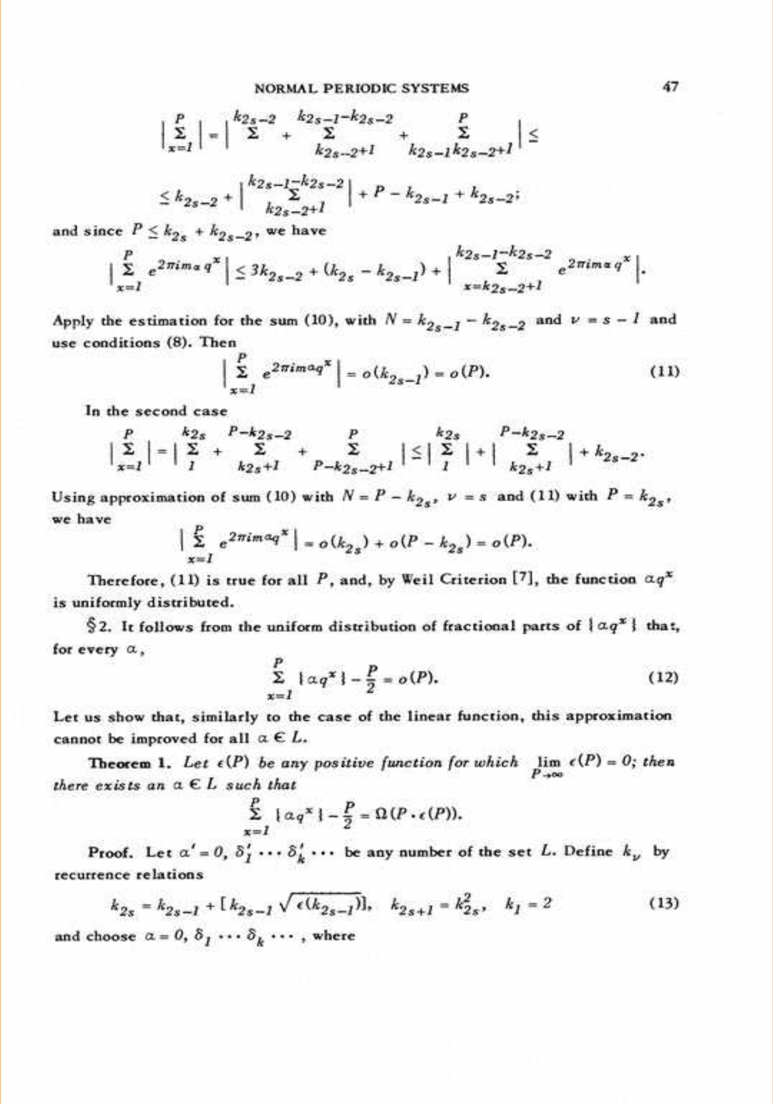
$$\sum_{x=1}^{P} e^{2\pi i m \alpha q^x}$$

we define s by condition $k_{2s-1} \leq P < k_{2s+1}$. There are two possibilities: $P \leq k_{2s} + k_{2s-2}$ and $P > k_{2s} + k_{2s-2}$.

In the first case

Н. М. Коробов провел детальное изучение ***нормальных периодических систем*** и с их помощью получил неулучшаемые оценки в вопросе о суммах дробных долей показательных функций.

N. M. Korobov studied ***normal periodical systems*** in detail. Using these systems he got the unimprovable estimates solving problems with sums of fractional units of exponential functions.



NORMAL PERIODIC SYSTEMS 47

$$\Big|\sum_{x=1}^{P}\Big| = \Big|\sum^{k_{2s-2}} + \sum_{k_{2s-2}+1}^{k_{2s-1}-k_{2s-2}} + \sum_{k_{2s-1}k_{2s-2}+1}^{P}\Big| \le$$

$$\le k_{2s-2} + \Big|\sum_{k_{2s-2}+1}^{k_{2s-1}-k_{2s-2}}\Big| + P - k_{2s-1} + k_{2s-2};$$

and since $P \le k_{2s} + k_{2s-2}$, we have

$$\Big|\sum_{x=1}^{P} e^{2\pi i m\alpha q^x}\Big| \le 3k_{2s-2} + (k_{2s} - k_{2s-1}) + \Big|\sum_{x=k_{2s-2}+1}^{k_{2s-1}-k_{2s-2}} e^{2\pi i m\alpha q^x}\Big|.$$

Apply the estimation for the sum (10), with $N = k_{2s-1} - k_{2s-2}$ and $\nu = s - 1$ and use conditions (8). Then

$$\Big|\sum_{x=1}^{P} e^{2\pi i m\alpha q^x}\Big| = o(k_{2s-1}) = o(P). \qquad (11)$$

In the second case

$$\Big|\sum_{x=1}^{P}\Big| = \Big|\sum_{1}^{k_{2s}} + \sum_{k_{2s}+1}^{P-k_{2s-2}} + \sum_{P-k_{2s-2}+1}^{P}\Big| \le \Big|\sum_{1}^{k_{2s}}\Big| + \Big|\sum_{k_{2s}+1}^{P-k_{2s-2}}\Big| + k_{2s-2}.$$

Using approximation of sum (10) with $N = P - k_{2s}$, $\nu = s$ and (11) with $P = k_{2s}$, we have

$$\Big|\sum_{x=1}^{P} e^{2\pi i m\alpha q^x}\Big| = o(k_{2s}) + o(P - k_{2s}) = o(P).$$

Therefore, (11) is true for all P, and, by Weil Criterion [7], the function αq^x is uniformly distributed.

§2. It follows from the uniform distribution of fractional parts of $\{\alpha q^x\}$ that, for every α,

$$\sum_{x=1}^{P} \{\alpha q^x\} - \frac{P}{2} = o(P). \qquad (12)$$

Let us show that, similarly to the case of the linear function, this approximation cannot be improved for all $\alpha \in L$.

Theorem 1. *Let $\epsilon(P)$ be any positive function for which $\lim_{P\to\infty} \epsilon(P) = 0$; then there exists an $\alpha \in L$ such that*

$$\sum_{x=1}^{P} \{\alpha q^x\} - \frac{P}{2} = \Omega(P \cdot \epsilon(P)).$$

Proof. Let $\alpha' = 0, \delta_1' \cdots \delta_k' \cdots$ be any number of the set L. Define k_ν by recurrence relations

$$k_{2s} = k_{2s-1} + [k_{2s-1}\sqrt{\epsilon(k_{2s-1})}], \quad k_{2s+1} = k_{2s}^2, \quad k_1 = 2 \qquad (13)$$

and choose $\alpha = 0, \delta_1 \cdots \delta_k \cdots$, where

Н. М. Коробов провел детальное изучение ***нормальных периодических систем*** и с их помощью получил неулучшаемые оценки в вопросе о суммах дробных долей показательных функций.

N. M. Korobov studied ***normal periodical systems*** in detail. Using these systems he got the unimprovable estimates solving problems with sums of fractional units of exponential functions.

$$\delta_k = \begin{cases} \delta'_k & \text{for } k_{2s} < k \le k_{2s+1} \\ q-1 & \text{for } k_{2s-1} < k \le k_{2s}. \end{cases} \tag{14}$$

The number α satisfies the conditions of Lemma 2 and, consequently, it belongs to the set L.

Suppose that for every $\alpha \in L$ we have

$$\sum_{x=1}^{P} \{\alpha q^x\} - \frac{P}{2} = O(P \cdot \epsilon(P)). \tag{15}$$

Apply Lemma 1, with $\mu = 1$,

$$\sum_{x=1}^{P} \{\alpha q^x\} = \frac{1}{q-1} \sum_{x=1}^{P} \delta_{x+1} + \frac{\theta}{q-1} = \frac{1}{q-1} \sum_{x=1}^{P} \delta_x + O(1). \tag{16}$$

Evaluate the sum of fractional parts of αq^x for α constructed according to (14) with $P = k_{2s}$:

$$\sum_{x=1}^{k_{2s}} \{\alpha q^x\} = \sum_{x=1}^{k_{2s-1}} \{\alpha q^x\} + \frac{1}{q-1} \sum_{x=k_{2s-1}+1}^{k_{2s}} \delta_x + O(1).$$

By hypothesis (since $\alpha \in L$) we have

$$\sum_{x=1}^{k_{2s-1}} \{\alpha q^x\} = \frac{k_{2s-1}}{2} + O(k_{2s-1}\, \epsilon(k_{2s-1})).$$

Further, from (14)

$$\frac{1}{q-1} \sum_{x=k_{2s-1}+1}^{k_{2s}} \delta_x = \frac{1}{q-1} \sum_{x=k_{2s-1}+1}^{k_{2s}} (q-1) = k_{2s} - k_{2s-1}.$$

Therefore*

$$\sum_{x=1}^{k_{2s}} \{\alpha q^x\} = \frac{k_{2s}}{2} + \frac{1}{2}(k_{2s} - k_{2s-1}) + O(k_{2s-1} \cdot \epsilon(k_{2s-1})).$$

By (13) $k_{2s} - k_{2s-1} > k_{2s-1} \sqrt{\epsilon(k_{2s-1})} - 1$ and, for sufficiently large s,

$$\sum_{x=1}^{k_{2s}} \{\alpha q^x\} - \frac{k_{2s}}{2} > \frac{1}{3} k_{2s-1} \sqrt{\epsilon(k_{2s-1})} > \frac{1}{4} k_{2s} \sqrt{\epsilon(k_{2s})} = \Omega(k_{2s} \cdot \epsilon(k_{2s})).$$

The contradiction thus obtained proves the theorem.

Consider now such $\alpha \in L$ for which the sum of fractional parts αq^x is nearer to the mean value $\frac{P}{2}$.

Theorem 2. *Let $\phi(P)$ be any positive function which tends to infinity arbitrarily slowly when $P \to \infty$. Then there exists an $\alpha \in L$ such that*

$$\sum_{x=1}^{P} \{\alpha q^x\} - \frac{P}{2} = O(\phi(P)); \tag{17}$$

* Here, and from now on, we can assume without loss of generality that $P \cdot \epsilon(P) \to \infty$ monotonically, the tendency of $\epsilon(P)$ to zero will also be assumed monotonic.

Н. М. Коробов провел детальное изучение ***нормальных периодических систем*** и с их помощью получил неулучшаемые оценки в вопросе о суммах дробных долей показательных функций.

N. M. Korobov studied ***normal periodical systems*** in detail. Using these systems he got the unimprovable estimates solving problems with sums of fractional units of exponential functions.

and for every $\alpha \in L$ it is impossible to replace this estimate by $O(1)$.

Proof. To construct α satisfying the conditions of the theorem, we use the systems $\rho_n'(q)$ introduced in Chapter I (see (15)′). Choose

$$\alpha = \underbrace{0, \rho_1'(q) \ldots \rho_1'(q)}_{\psi(1)} \underbrace{\rho_2'(q) \ldots \rho_2'(q)}_{\psi(2)} \ldots \underbrace{\rho_n'(q) \ldots \rho_n'(q)}_{\psi(n)} \underbrace{\rho_{n+1}'(q) \ldots}. \quad (18)$$

The digits of $\rho_n'(q)$ are understood here to be the corresponding digits in the decomposition of α to the base q. The adjacent $\rho_n'(q)$ are the same, and the first n digits in $\rho_{n+1}'(q)$ are chosen to coincide with the first n digits of $\rho_n'(q)$, $(n = 1, 2, \cdots)$. Finally, $\psi(n) > 0$ is an arbitrary monotonic integral function for which $\lim_{n\to\infty} \psi(n) = \infty$. Then (cf [3], Theorem 5) the function αq^x is uniformly distributed and, consequently, $\alpha \in L$.

Evaluate the sum of the first P digits in the decomposition (18). Denote by T_n the number of all digits in (18) which occur on the left of the first digit of $\rho_{n+1}'(q)$. Since every $\rho_n'(q)$ consists of q^n digits, we have

$$T_n = \sum_{\nu=1}^{n} \psi(\nu) q^\nu. \quad (19)$$

Each of the digits $0, 1, \cdots, q-1$ occurs q^{n-1} times in the system $\rho_n'(q)$. Consequently, the sum of digits for one such system $\rho_n'(q)$ is equal to

$$q^{n-1} \frac{q(q-1)}{2} = \frac{q-1}{2} \cdot q^n.$$

Define k from the condition $T_k \le P < T_{k+1}$. Then

$$P = T_k + rq^{k+1} + r_1, \quad 0 \le r < \psi(k+1), \quad 0 \le r_1 < q^{k+1}.$$

Denoting the digits in (18) by $\delta_1, \delta_2, \cdots$ we obtain

$$\sum_{x=1}^{P} \delta_x = \sum_{1}^{T_k} + \sum_{T_k+1}^{T_k+rq^{k+1}} + \sum_{T_k+rq^{k+1}+1}^{P} = \sum_{\mu=1}^{k} \frac{q-1}{2} q^\mu \psi(\mu) + r \frac{q-1}{2} q^{k+1} + O(q^k);$$

$$\sum_{x=1}^{P} \delta_x = \frac{q-1}{2} (T_k + rq^{k+1}) + O(q^k) = \frac{q-1}{2} P + O(q^k).$$

Then, by (16)

$$\sum_{x=1}^{P} \{\alpha q^x\} = \frac{1}{q-1} \sum_{x=1}^{P} \delta_x + O(1) = \frac{P}{2} + O(q^k). \quad (20)$$

Choose $\psi(k)$ to be a sufficiently rapidly increasing function for condition $\psi(\sqrt{\ln \phi(k)}) > k$ to be satisfied. Then

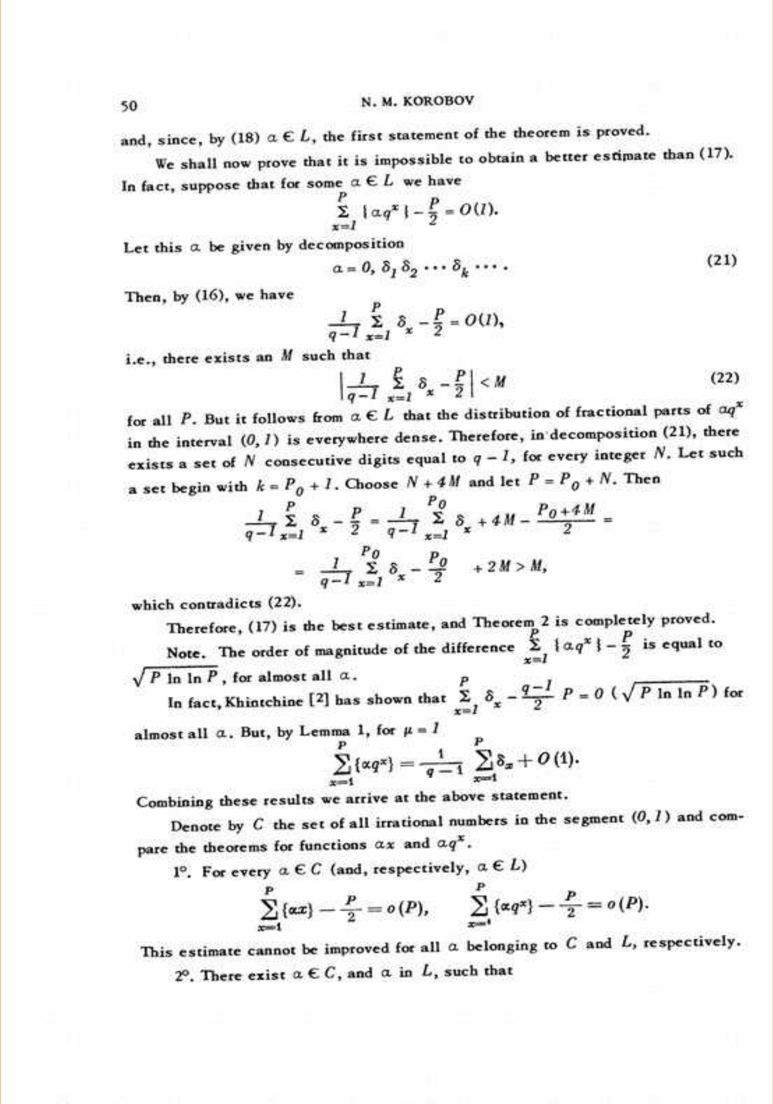
$$\psi(\sqrt{\ln \varphi(P)}) > P \geqslant T_k \geqslant \psi(k), \quad \ln \sqrt{\varphi(P)} > k, \quad e^{k^2} < \varphi(P).$$

But $q^k = o(e^{k^2})$, so that (20) becomes

$$\sum_{x=1}^{P} \{\alpha q^x\} - \frac{P}{2} = o(\phi(P))$$

Н. М. Коробов провел детальное изучение ***нормальных периодических систем*** и с их помощью получил неулучшаемые оценки в вопросе о суммах дробных долей показательных функций.

N. M. Korobov studied ***normal periodical systems*** in detail. Using these systems he got the unimprovable estimates solving problems with sums of fractional units of exponential functions.



and, since, by (18) $\alpha \in L$, the first statement of the theorem is proved.

We shall now prove that it is impossible to obtain a better estimate than (17). In fact, suppose that for some $\alpha \in L$ we have

$$\sum_{x=1}^{P} \{\alpha q^x\} - \frac{P}{2} = O(1).$$

Let this α be given by decomposition

$$\alpha = 0, \delta_1 \delta_2 \cdots \delta_k \cdots . \tag{21}$$

Then, by (16), we have

$$\frac{1}{q-1} \sum_{x=1}^{P} \delta_x - \frac{P}{2} = O(1),$$

i.e., there exists an M such that

$$\left| \frac{1}{q-1} \sum_{x=1}^{P} \delta_x - \frac{P}{2} \right| < M \tag{22}$$

for all P. But it follows from $\alpha \in L$ that the distribution of fractional parts of αq^x in the interval $(0, 1)$ is everywhere dense. Therefore, in decomposition (21), there exists a set of N consecutive digits equal to $q-1$, for every integer N. Let such a set begin with $k = P_0 + 1$. Choose $N + 4M$ and let $P = P_0 + N$. Then

$$\frac{1}{q-1} \sum_{x=1}^{P} \delta_x - \frac{P}{2} = \frac{1}{q-1} \sum_{x=1}^{P_0} \delta_x + 4M - \frac{P_0 + 4M}{2} =$$

$$= \frac{1}{q-1} \sum_{x=1}^{P_0} \delta_x - \frac{P_0}{2} + 2M > M,$$

which contradicts (22).

Therefore, (17) is the best estimate, and Theorem 2 is completely proved.

Note. The order of magnitude of the difference $\sum_{x=1}^{P} \{\alpha q^x\} - \frac{P}{2}$ is equal to $\sqrt{P \ln \ln P}$, for almost all α.

In fact, Khintchine [2] has shown that $\sum_{x=1}^{P} \delta_x - \frac{q-1}{2} P = 0(\sqrt{P \ln \ln P})$ for almost all α. But, by Lemma 1, for $\mu = 1$

$$\sum_{x=1}^{P} \{\alpha q^x\} = \frac{1}{q-1} \sum_{x=1}^{P} \delta_x + O(1).$$

Combining these results we arrive at the above statement.

Denote by C the set of all irrational numbers in the segment $(0, 1)$ and compare the theorems for functions αx and αq^x.

1°. For every $\alpha \in C$ (and, respectively, $\alpha \in L$)

$$\sum_{x=1}^{P} \{\alpha x\} - \frac{P}{2} = o(P), \qquad \sum_{x=1}^{P} \{\alpha q^x\} - \frac{P}{2} = o(P).$$

This estimate cannot be improved for all α belonging to C and L, respectively.

2°. There exist $\alpha \in C$, and α in L, such that

Н. М. Коробов провел детальное изучение ***нормальных периодических систем*** и с их помощью получил неулучшаемые оценки в вопросе о суммах дробных долей показательных функций.

N. M. Korobov studied ***normal periodical systems*** in detail. Using these systems he got the unimprovable estimates solving problems with sums of fractional units of exponential functions.

NORMAL PERIODIC SYSTEMS 51

$$\sum_{x=1}^{P}\{\alpha x\} - \frac{P}{2} = O(\ln P), \quad \sum_{x=1}^{P}\{\alpha q^x\} - \frac{P}{2} = o(\varphi(P)),$$

respectively, where $\phi(P) \to \infty$ arbitrarily slowly; further improvement of these estimates is impossible.

The results 1° and 2° allow us to suppose that the main deviation of $\Sigma_{x=1}^{P}\{\alpha q^x\}$ from $\frac{P}{2}$ is less than that of $\Sigma_{x=1}^{P}\{\alpha x\}$. However, as follows from the above note, the contrary statement is true:

3°. For almost all α deviation of the sum $\Sigma_{x=1}^{P}\{\alpha q^x\}$ from $\frac{P}{2}$ is characterised by the function $\sqrt{P \ln\ln P}$ and, thus, is much greater than that of the sum $\Sigma_{x=1}^{P}\{\alpha x\}$ (which, by (3) and (4) is characterised by the function $\ln P$).

§3. The author has shown in [4] that if the function αq^x ($q \geq 2$ is an integer) is uniformly distributed, then so the function $\alpha q^{\mu x}$ for every integer $\mu > 1$. Thus, if for every integer $m \neq 0$,

$$\sum_{x=1}^{P} e^{2\pi i m \alpha q^{\mu x}} = o(P) \tag{23}$$

is true for $\mu = 1$, then (23) is true for all integers $\mu > 1$. Let us see whether the sums of fractional parts possess a similar property.

Let $\phi(P) \to \infty$ arbitrarily slowly when $P \to \infty$, and let α be constructed according to Theorem 2. Then for $\mu = 1$ we have

$$\sum_{x=1}^{P}\{\alpha q^{\mu x}\} - \frac{P}{2} = o(\phi(P)). \tag{24}$$

Let us show that, differently from Weil's sums (23), in the case of the sums of fractional parts the fact that (24) is true for $\mu = 1$ does not necessarily imply that it is true for all $\mu > 1$.

Theorem 3. *Let $\epsilon(P)$ and $\phi(P)$ be any positive functions tending, respectively, to zero or to infinity as $P \to \infty$, then there exists an $\alpha \in L$ such that*

$$\sum_{x=1}^{P}\{\alpha q^x\} - \frac{P}{2} = o(\varphi(P)) \ u \ \sum_{x=1}^{P}\{\alpha q^{2x}\} - \frac{P}{2} = \Omega(P\varepsilon(P)).$$

Proof. Let integers $k_1 < k_2 < \cdots$ satisfy the conditions

$$\phi(k_{2s+1}) > k_{2s}^2, \quad k_{2s} = k_{2s-1} + [k_{2s-1}\sqrt{\epsilon(k_{2s-1})}], \quad k_1 = 2 \tag{25}$$

and let $\alpha' = 0, \delta_1' \cdots \delta_k' \cdots$ be constructed according to Theorem 2. Choose $\alpha' = 0, \delta_1 \delta_2 \cdots \delta_k \cdots$ where

$$\delta_k = \begin{cases} \delta_k & \text{for } k_{2s} < k \leq k_{2s-1} \\ 0 & \text{for even } k \text{ in the interval } (k_{2s-1}, k_{2s}) \\ q-1 & \text{for odd } k \text{ in the interval } (k_{2s-1}, k_{2s}). \end{cases}$$

It follows from Lemma 2 that the function αq^x is uniformly distributed. Consider

Н. М. Коробов провел детальное изучение ***нормальных периодических систем*** и с их помощью получил неулучшаемые оценки в вопросе о суммах дробных долей показательных функций.

N. M. Korobov studied ***normal periodical systems*** in detail. Using these systems he got the unimprovable estimates solving problems with sums of fractional units of exponential functions.

the sum of fractional parts

$$S_1 = \sum_{x=1}^{P} \{\alpha q^x\}.$$

Choose s to satisfy condition $k_{2s-1} \leq P < k_{2s+1}$ and consider first the case $P \leq k_{2s}$:

$$S_1 = \sum_{x=1}^{k_{2s-2}} \{\alpha q^x\} + \sum_{x=k_{2s-2}+1}^{k_{2s-1}} \{\alpha q^x\} + \sum_{x=k_{2s-1}+1}^{P} \{\alpha q^x\}.$$

On applying Lemma 1 with $\mu = 1$, and on using definition of δ_k, we obtain

$$S_1 = O(k_{2s-2}) + \frac{1}{q-1} \sum_{x=k_{2s-2}+1}^{k_{2s-1}} \delta_x + \frac{1}{q-1} \sum_{x=k_{2s-1}+1}^{P} \delta_x =$$

$$= \frac{1}{q-1} \sum_{x=k_{2s-2}+1}^{k_{2s-1}} \delta'_x + \frac{P-k_{2s-1}}{2} + O(k_{2s-2}).$$

Again, by Lemma 1

$$S_1 = \sum_{x=1}^{k_{2s-1}} \{\alpha' q^x\} - \sum_{x=1}^{k_{2s-2}} \{\alpha' q^x\} + \frac{P-k_{2s-1}}{2} + O(k_{2s-2}) =$$

$$= \frac{k_{2s-1}}{2} + o(\varphi(k_{2s-1})) + \frac{P-k_{2s-1}}{2} + O(k_{2s-2}).$$

But, by (25), $k_{2s-2} = o(\phi(k_{2s-1}))$, so that

$$S_1 = \frac{P}{2} + o(\phi(k_{2s-1})) = \frac{P}{2} + p(\phi(P))^{*} \qquad (k_{2s-1} \leq P \leq k_{2s}). \tag{26}$$

Next, let $P > k_{2s}$.

$$S_1 = \sum_{x=1}^{k_{2s}} \{\alpha q^x\} + \sum_{x=k_{2s}+1}^{P} \{\alpha q^x\}.$$

Apply (26) to the first sum on the right hand side:

$$S_1 = \frac{k_{2s}}{2} + o(\varphi(k_{2s})) + \frac{1}{q-1} \sum_{x=k_{2s}+1}^{P} \delta_x = \frac{k_{2s}}{2} + \frac{1}{q-1} \sum_{x=k_{2s}+1}^{P} \delta'_x + o(\varphi(k_{2s})) =$$

$$= \frac{k_{2s}}{2} + \sum_{x=1}^{P} \{\alpha' q^x\} - \sum_{x=1}^{k_{2s}} \{\alpha' q^x\} + o(\varphi(k_{2s})) = \frac{P}{2} + o(\varphi(P)).$$

Combining this result with (26) we obtain

$$\sum_{x=1}^{P} \{\alpha q^x\} - \frac{P}{2} = o(\phi(P))$$

for all P.

To prove the second proposition of the theorem, take $P_1 = \left[\frac{k_{2s-1}}{2}\right]$, $P_2 =$ $P_2 = \left[\frac{k_{2s}}{2}\right] - 1$ and estimate the sum

* The function $\phi(P)$ can always be considered monotonic.

Н. М. Коробов провел детальное изучение ***нормальных периодических систем*** и с их помощью получил неулучшаемые оценки в вопросе о суммах дробных долей показательных функций.

N. M. Korobov studied ***normal periodical systems*** in detail. Using these systems he got the unimprovable estimates solving problems with sums of fractional units of exponential functions.

$$S_2 = \sum_{x=1}^{P_2} \{\alpha q^{2x}\}.$$

Suppose that for every P

$$\sum_{x=1}^{P} \{\alpha q^{2x}\} - \frac{P}{2} = O(P \cdot \epsilon(P)). \qquad (27)$$

Apply Lemma 1 with $\mu = 2$

$$S_2 = \sum_{x=1}^{P_1}\{\alpha q^{2x}\} + \sum_{x=P_1+1}^{P_2}\{\alpha q^{2x}\} =$$
$$= \frac{P_1}{2} + \frac{1}{q^2-1}\left(q \sum_{x=P_1+1}^{P_2} \delta_{2x+1} + \sum_{x=P_1+1}^{P_2} \delta_{2x+2}\right) + O(P_1 \varepsilon(P_1)).$$

From the definition of δ_k and from the choice of P_1 and P_2 it follows that

$$\sum_{x=P_1+1}^{P_2} \delta_{2x+1} = (P_2 - P_1)(q-1), \qquad \sum_{x=P_1+1}^{P_2} \delta_{2x+2} = 0.$$

Therefore,

$$S_2 = \frac{P_1}{2} + \frac{q}{q+1}(P_2 - P_1) + O(P_1 \varepsilon(P_1)) =$$
$$= \frac{P_2}{2} + \frac{q-1}{q+1}(P_2 - P_1) + O(k_{2s-1}\varepsilon(k_{2s-1})).$$

Using the definition of k_ν, we obtain, for sufficiently large s,

$$S_2 - \frac{P_2}{2} \geqslant \frac{1}{3}\,\frac{k_{2s} - k_{2s-1}}{2} + O(k_{2s-1}\varepsilon(k_{2s-1})) >$$
$$> \frac{1}{7} k_{2s-1}\sqrt{\varepsilon(k_{2s-1})} = \Omega(P_2 \varepsilon(P_2)),$$

which contradicts the hypothesis (27).

Again, let $\phi(P)$ tend to infinity arbitrarily slowly, as $P \to \infty$. The question arises: do such $\alpha \in L$ exist that, for all integers $\mu \geq 1$

$$\sum_{x=1}^{P} \{\alpha q^{\mu x}\} - \frac{P}{2} = o(\phi(P))?$$

The answer is given in the following theorem.

Theorem 4. *Let $\phi(P)$ be any function, which tends to infinity arbitrarily slowly as $P \to \infty$. Then there exists an $\alpha \in L$ such that, for all $\mu \geq 1$*

$$\sum_{x=1}^{P} \{\alpha q^{\mu x}\} - \frac{P}{2} = o(\phi(P)). \qquad (28)$$

Proof. Take

$$\alpha = 0, \underbrace{r_1 \ldots r_1}_{\psi(1)}\ \underbrace{r_2 \ldots r_2}_{\psi(2)} \ldots \underbrace{r_n \ldots r_n}_{\psi(n)}\ \underbrace{r_{n+1}}\ \ldots,$$

where $\psi(k)$ is a monotonic function satisfying $\psi(\sqrt{\ln \phi(k)}) > k$, r_n are the sets of digits of the form

$$\underbrace{\underbrace{p_n' p_n' \cdots p_n'}_{n!}\,0\,\underbrace{p_n' p_n' \cdots p_n'}_{n!}\,0 \cdots}_{n!}\ \Big|\ \underbrace{\underbrace{p_n' p_n' \cdots p_n'}_{n!}\,0\,\underbrace{\bar{p}_n p_n' \cdots p_n'}_{n!}\ \underbrace{p_n p_n' \cdots p_n'}_{n!} \cdots}_{n!}\ \Big|\ \underbrace{p_n p_n' \cdots p_n'}_{n!}$$

Н. М. Коробов провел детальное изучение ***нормальных периодических систем*** и с их помощью получил неулучшаемые оценки в вопросе о суммах дробных долей показательных функций.

N. M. Korobov studied ***normal periodical systems*** in detail. Using these systems he got the unimprovable estimates solving problems with sums of fractional units of exponential functions.

and $\bar{\rho}_n$ denotes ρ_n' without the first digit. By repeating the reasoning of Theorem 5 from [3] it can be easily proved that $\alpha \in L$.

To estimate the sum (28) we apply Lemma 1:

$$S_\mu = \sum_{x=1}^{P} \{\alpha q^{\mu x}\} = \frac{1}{q^\mu - 1} \sum_{\nu=1}^{\mu} q^{\mu-\nu} \sum_{x=1}^{P} \delta_{\mu x+\nu} + O(1). \tag{29}$$

Denote by t_n the number of digits in r_n. Clearly,

$$t_n = (n!q^n + 1)\,n! + (n!q^n - 1)\,n! = 2(n!)^2 q^n.$$

Further, let T_k denote the number of digits in the decomposition of α which are on the left from the first digit of r_{k+1}, then

$$T_k = \sum_{n=1}^{k} 2(n!)^2 q^n \cdot \psi(n).$$

Take k satisfying $T_k \le \mu P < T_{k+1}$ then

$$\begin{gathered} \mu P = T_k + 2N(k+1)!^2 q^{k+1} + R \\ 0 \le N < \psi(k+1), \quad 0 \le R \le 2(k+1)!^2 q^{k+1}. \end{gathered} \tag{30}$$

Let ν be any integer from the interval $1 \le \nu \le \mu$, and let $\mu \le n$. Underline in r_n the ν th, $\nu + \mu$ th, $\nu + 2\mu$ th, $\cdots$, etc. digits (following in arithmetical progression with difference μ). Consider the sum of underlined digits. First, consider the set of digits

$$\underbrace{\rho_n' \cdots \rho_n'}_{n!}\,0\;\underbrace{\rho_n' \cdots \rho_n'}_{n!}\,0 \;\Big|\; \cdots \underbrace{\rho_n' \cdots \rho_n'}_{n!}\,0\;\;\mu . \tag{31}$$

The number of digits in every set $\underbrace{\rho_n' \cdots\cdots \rho_n'}_{n!}$ is a multiple of μ, and consequently, in the second set the first underlined digit is $\nu + 1$ st, etc. until (before $\nu + 1$ st set) the zero, dividing the sets, is underlined. In the $\nu + 1$ st set the μ th digit is underlined, then $\mu - 1$ st, etc., until the $\nu + 1$ st in the last set.

Therefore, the set of all underlined digits coincides with the set of all digits contained in $\rho_n' \cdots \rho_n'\, 0$. Since the sum of the digits in ρ_n' is $q^n \frac{q-1}{2}$, it follows that the sum of the underlined digits in (31) is equal to

$$\frac{1}{2}\, n!\, q^n (q-1). \tag{32}$$

The first half of r_n contains $\frac{n!}{\mu}$ sets (31) and, consequently, the sum of digits in the first half is equal to

$$\frac{1}{2\mu}\, n!^2\, q^n (q-1).$$

Next, consider the set of digits

$$\underbrace{\bar{\rho}_n \rho_n' \cdots \rho_n'}_{n!}\;\underbrace{\bar{\rho}_n \rho_n' \cdots \rho_n'}_{n!} \;\Big|\; \cdots \underbrace{\bar{\rho}_n \rho_n' \cdots \rho_n'}_{n!}\;\;\mu . \tag{33}$$

Н. М. Коробов провел детальное изучение ***нормальных периодических систем*** и с их помощью получил неулучшаемые оценки в вопросе о суммах дробных долей показательных функций.

N. M. Korobov studied ***normal periodical systems*** in detail. Using these systems he got the unimprovable estimates solving problems with sums of fractional units of exponential functions.

NORMAL PERIODIC SYSTEMS 55

In the first $\bar{\rho}_n$ the first underlined digit is the νth, in the second it is $\nu+1$ st, etc., until the $\nu-1$ st in the last. Clearly, the sum of the underlined digits coincides with the sum of digits of the set $\underbrace{\bar{\rho}_n \rho_n' \cdots \rho_n'}_{n}$. We shall use only those systems ρ_n' which begin with zero. Then the digit omitted in $\bar{\rho}_n$ is zero, and thus the sum of the digits in $\bar{\rho}_n \rho_n' \cdots \rho_n'$ coincides with (32). Therefore, the sums of the underlined digits in the first and in the second halves of r_n are equal, and the total sum of underlined digits is equal to

$$\frac{1}{\mu} n!^2 q^n (q-1).$$

Consider the inner sum of (29)

$$\sum_{x=1}^{P} \delta_{\mu x+\nu} = \frac{q-1}{\mu} (\mu!^2 q^\mu \psi(\mu) + \cdots + k!^2 q^k \psi(k) + (k+1)!^2 q^{k+1} N) + O(R).$$

On applying (30) we obtain

$$\sum_{x=1}^{P} \delta_{\mu x+\nu} = \frac{q-1}{2} P + O(R),$$

$$S_\mu = \frac{1}{q^\mu - 1} \cdot \frac{q-1}{2} P \sum_{\nu=1}^{\mu} q^{\mu-\nu} + O(R) = \frac{P}{2} + O(R). \tag{34}$$

But $\mu P \geq T_k \geq 2k!^2 q^k \psi(k)$ and $\psi(k) < P$ for sufficiently large k.

Also, similarly to Theorem 2, we have $e^{k^2} < \phi(P)$.

Therefore,

$$R < 2(k+1)!^2 q^{k+1} = o(e^{k^2}) = o(\phi(P))$$

and, by (34) we have

$$\sum_{x=1}^{P} \{\alpha q^{\mu x}\} - \frac{P}{2} = o(\phi(P) \quad (\mu = 1, 2, \cdots). \tag{35}$$

Consider now such $\alpha \in L$ for which the sum of fractional parts $\{\alpha q^x\}$ is distant from the mean value $\frac{P}{2}$. By Theorem 1, if $\epsilon(P)$ is any positive function which tends arbitrarily slowly to zero when $P \to \infty$, then there exists an $\alpha \in L$ such that, for $\mu = 1$

$$\sum_{x=1}^{P} \{\alpha q^{\mu x}\} - \frac{P}{2} = \Omega(P \cdot \epsilon(P)).$$

If this equality is true for $\mu = 1$, does it still hold for all $\mu > 1$? A negative answer is given in the following

Theorem 5. *Let $\phi(P) \to \infty$ arbitrarily slowly, and let $\epsilon(P) \to 0$ when $P \to \infty$. Then there exists $\alpha \in L$ such that*

$$\sum_{x=1}^{P} \{\alpha q^x\} - \frac{P}{2} = \Omega(P \cdot \varepsilon(P)) \text{ и } \sum_{x=1}^{P} \{\alpha q^{2x}\} - \frac{P}{2} = o(\varphi(P)).$$

Proof. Let (35) be true for $\alpha' = 0, \delta_1' \cdots \delta_k'$ $(\alpha' \in L)$. Take integers $k_1 < k_2 < \cdots$ satisfying

Н. М. Коробов провел детальное изучение ***нормальных периодических систем*** и с их помощью получил неулучшаемые оценки в вопросе о суммах дробных долей показательных функций.

N. M. Korobov studied ***normal periodical systems*** in detail. Using these systems he got the unimprovable estimates solving problems with sums of fractional units of exponential functions.

$$\phi(k_{2s+1}) > k_{2s}^2, \quad k_{2s} = k_{2s-1} + [k_{2s-1}\sqrt{\epsilon(k_{2s-1})}], \quad k_1 = 2.$$

Construct $\alpha = 0, \delta_1 \delta_2 \cdots \delta_k \cdots$ where for even and odd k from the interval (k_{2s-1}, k_{2s}) the sequences of digits δ_k coincide, respectively, with periodic sequences

$$\underbrace{q-1, q-1, q-1, 1,}\underbrace{q-1, q-1, q-1, 1,} \ldots (k_{2s-1} < k \leqslant k_{2s};\ k \text{ even})$$

$$\underbrace{q-1, 0, q-2, 0,}\underbrace{q-1, 0, q-2, 0} \ldots \qquad (k_{2s-1} < k \leqslant k_{2s};\ k \text{ odd})$$

and where, for k in the interval (k_{2s}, k_{2s+1}), $\delta_k = \delta'_k$.

By Lemma 2, $\alpha \in L$.

Consider the sum $\sum_{x=1}^{k_{2s}} \{\alpha q^x\}$:

$$\sum_{x=1}^{k_{2s}} \{\alpha q^x\} = \sum_{x=1}^{k_{2s-2}} \{\alpha q^x\} + \frac{1}{q-1} \sum_{x=k_{2s-2}+1}^{k_{2s-1}} \delta_x + \frac{1}{q-1} \sum_{x=k_{2s-1}+1}^{k_{2s}} \delta_x + O(1) =$$

$$= O(k_{2s-2}) + \frac{1}{q-1}\left(\sum_{x=1}^{k_{2s-1}} \delta'_x - \sum_{x=1}^{k_{2s-2}} \delta'_x\right) + \frac{1}{q-1} \sum_{x=k_{2s-1}+1}^{k_{2s}} \delta_x =$$

$$= O(k_{2s-2}) + \sum_{x=1}^{k_{2s-1}} \{\alpha' q^x\} + \frac{1}{q-1} \sum_{x=k_{2s-1}+1}^{k_{2s}} \delta_x =$$

$$= \frac{k_{2s-1}}{2} + \frac{1}{q-1} \sum_{x=k_{2s-1}+1}^{k_{2s}} \delta_x + o(\varphi(k_{2s-1})).$$

On splitting the sum $\Sigma\, \delta_x$ into sums of eight terms, and using the definition of δ_k, we get

$$\sum_{x=1}^{k_{2s}} \{\alpha q^x\} = \frac{k_{2s-1}}{2} + \frac{1}{q-1} \frac{k_{2s} - k_{2s-1}}{8} \cdot 5(q-1) + o(\phi(k_{2s-1})) =$$

$$= \frac{k_{2s}}{2} + \frac{k_{2s} - k_{2s-1}}{8} + o(\phi(k_{2s-1})).$$

Since $\phi(k)$ increases arbitrarily slowly, we can assume $\phi(k) = o(P \cdot \epsilon(P))$ for $k \leq P$. Consequently,

$$\sum_{x=1}^{k_{2s}} \{\alpha q^x\} - \frac{k_{2s}}{2} =$$

$$= \frac{1}{8} k_{2s-1} \sqrt{\varepsilon(k_{2s-1})} + o(k_{2s-1} \cdot \varepsilon(k_{2s-1})) > \frac{1}{9} k_{2s} \sqrt{\varepsilon(k_{2s})},$$

which gives the first proposition of the theorem:

$$\sum_{x=1}^{k_{2s}} \{\alpha q^x\} - \frac{k_{2s}}{2} = \Omega(k_{2s}\, \varepsilon(k_{2s})) \qquad (P = k_{2s}).$$

Н. М. Коробов провел детальное изучение ***нормальных периодических систем*** и с их помощью получил неулучшаемые оценки в вопросе о суммах дробных долей показательных функций.

N. M. Korobov studied ***normal periodical systems*** in detail. Using these systems he got the unimprovable estimates solving problems with sums of fractional units of exponential functions.

Next, consider the sum

$$S_2 = \sum_{x=1}^{P} \{\alpha q^{2x}\}. \tag{36}$$

Let s satisfy $k_{2s+1} \leq 2P < k_{2s+1}$.

First, consider the case $2P \leq k_{2s}$. Let $P_1 = \left[\frac{k_{2s-2}}{2}\right]$ and $P_2 = \left[\frac{k_{2s-1}}{2}\right] - 1$. Partitioning in (36) the interval of summation, and applying Lemma 1 with $\mu = 2$, we obtain

$$S_2 = \sum_{x=1}^{P_1} \{\alpha q^{2x}\} + \frac{1}{q^2-1}\Big(q \sum_{x=P_1+1}^{P_2} \delta'_{2x+1} + \sum_{x=P_1+1}^{P_2} \delta'_{2x+2}\Big) + $$
$$+ \frac{1}{q^2-1}\Big(q \sum_{x=P_2+1}^{P} \delta_{2x+1} + \sum_{x=P_2+1}^{P} \delta_{2x+2}\Big) + O(1).$$

Split each of the two last sums into a sum of four terms, then

$$S_2 = O(P_1) + \sum_{x=P_1+1}^{P_2} \{\alpha' q^{2x}\} + \frac{1}{q^2-1}\,(q(2q-3)+3q-2)\,\frac{P-P_2}{4} =$$
$$= \sum_{x=1}^{P_2} \{\alpha' q^{2x}\} + \frac{P-P_2}{2} + O(P_1) = \frac{P_2}{2} + o(\phi(P_2)) + \frac{P-P_2}{2} + O(P_1).$$

Therefore, for $k_{2s-1} \leq 2P \leq k_{2s}$

$$\sum_{x=1}^{P} \{\alpha q^{2x}\} = \frac{P}{2} + O(P_1) + o(\phi(P_2)) = \frac{P}{2} + o(\phi(P)). \tag{37}$$

Next, let $2P > k_{2s}$; denote $P_3 = \left[\frac{k_{2s}}{2}\right] - 1$.

$$\sum_{x=1}^{P}\{\alpha q^{2x}\} = \sum_{x=1}^{P_3}\{\alpha q^{2x}\} + \frac{1}{q^2-1}\Big(q \sum_{x=P_3+1}^{P} \delta_{2x+1} + \sum_{x=P_3+1}^{P} \delta_{2x+2}\Big) + O(1).$$

Applying (37) we have

$$\sum_{x=1}^{P}\{\alpha q^{2x}\} = \frac{P_3}{2} + o(\varphi(P_3)) + \sum_{x=1}^{P}\{\alpha' q^{2x}\} - \sum_{x=1}^{P_3}\{\alpha' q^{2x}\} =$$
$$= \frac{P_3}{2} + o(\varphi(P_3)) + \frac{P}{2} + o(\varphi(P)) - \frac{P_3}{2} = \frac{P}{2} + o\Big(\varphi\Big(\frac{P}{2}\Big)\Big).$$

Hence, always

$$\sum_{x=1}^{P} \{\alpha q^{2x}\} - \frac{P}{2} = o(\phi(P),$$

which completes the proof of the theorem.

As before the question arises: Does such an $\alpha \in L$ exist for which

$$\sum_{x=1}^{P} \{\alpha q^{\mu x}\} - \frac{P}{2} = \Omega(P \cdot \epsilon(P)),$$

for all integers $\mu \geq 1$, where $\epsilon(P)$ tends, arbitrarily slowly, to zero when P increases indefinitely? It is not difficult to prove that α, constructed in Theorem 1, possesses such a property.

Н. М. Коробов провел детальное изучение ***нормальных периодических систем*** и с их помощью получил неулучшаемые оценки в вопросе о суммах дробных долей показательных функций.

N. M. Korobov studied ***normal periodical systems*** in detail. Using these systems he got the unimprovable estimates solving problems with sums of fractional units of exponential functions.

Theorem 6. *Let $\epsilon(P)$ be any positive function such that $\epsilon(P) \to 0$ as $P \to \infty$ then there exists an $\alpha \in L$ such that for all integers $\mu \geq 1$*

$$\sum_{x=1}^{P} \{\alpha q^{\mu x}\} - \frac{P}{2} = \Omega(P \cdot \epsilon(P)).$$

Proof. Choose α according to Theorem 1.

Suppose that for some $\mu \geq 1$ we have

$$\sum_{x=1}^{P} \{\alpha q^{\mu x}\} - \frac{P}{2} = O(P \cdot \epsilon(P)).$$

Denote $P_1 = \left[\frac{k_{2s-1}}{\mu}\right]$ and $P_2 = \left[\frac{k_{2s}}{\mu}\right] - 1$. By Lemma 1,

$$\sum_{x=1}^{P_2} \{\alpha q^{\mu x}\} = \sum_{x=1}^{P_1} \{\alpha q^{\mu x}\} + \frac{1}{q^{\mu}-1} \sum_{\nu=1}^{\mu} q^{\mu-\nu} \sum_{x=P_1+1}^{P_2} \delta_{\mu x+\nu} + O(1) =$$

$$= \frac{P_1}{2} + O(P_1 \cdot \varepsilon(P_1)) + \frac{q-1}{q^{\mu}-1}(P_2 - P_1) \sum_{\nu=1}^{\mu} q^{\mu-\nu}$$

from which

$$\sum_{x=1}^{P_2} \{\alpha q^{\mu x}\} - \frac{P_2}{2} = \frac{P_2 - P_1}{2} + O(P_1 \cdot \varepsilon(P_1)) =$$

$$= \frac{k_{2s-1}\sqrt{\varepsilon(k_{2s-1})}}{2\mu} + O(k_{2s-1} \cdot \varepsilon(k_{2s-1})) > \frac{1}{3\mu} k_{2s} \sqrt{\varepsilon(k_{2s})} = \Omega(P_2 \varepsilon(P_2)). \quad (38)$$

But (38) contradicts the hypothesis. The theorem is proved.

REFERENCES

[1] A. Khintchine, *Ein Satz über Kettenbrüche, mit arithmetischen Anwendungen*, Math. Z. 18 (1923), 289-306.
[2] A. Khintchine, *Über dyadische Brüche*, Math. Z. 18 (1923), 109-116; *Über einen Satz der Warscheinlichkeitsrechnung*, Fund. Math. 6 (1924), 9-20; *Asymptotische Gesetze der Wahrscheinlichkeitsrechnung*, Springer, Berlin, 1933.
[3] N. M. Korobov, *Concerning some questions of uniform distribution*, Izv. Akad. Nauk SSSR. Ser. Mat. 14 (1950), 215-238. (Russian)
[4] I. I. Šapiro-Pyateckiĭ, *Concerning laws of distribution of fractional parts of an exponential function*, Izv. Akad. Nauk SSSR. Ser. Mat. 15 (1951), 47-52. (Russian)
[5] A. Ostrowski, *Bemerkungen zur Theorie der Diophantischen Approximationen*, Abh. Math. Sem. Hamburg. Univ. 1 (1921), 77-98.
[6] I. J. Good, *Normal recurring decimals*, J. London Math. Soc. 21 (1946), 167-169.
[7] H. Weyl, *Über die Gleichverteilung von Zahlen mod. Eins*, Math. Ann. 77 (1916), 313-352.
[8] N. G. de Bruijn, *A combinatorial problem*, Nederl. Akad. Wetensch. Proc. 49 (1946), 758-764.

Translated by:

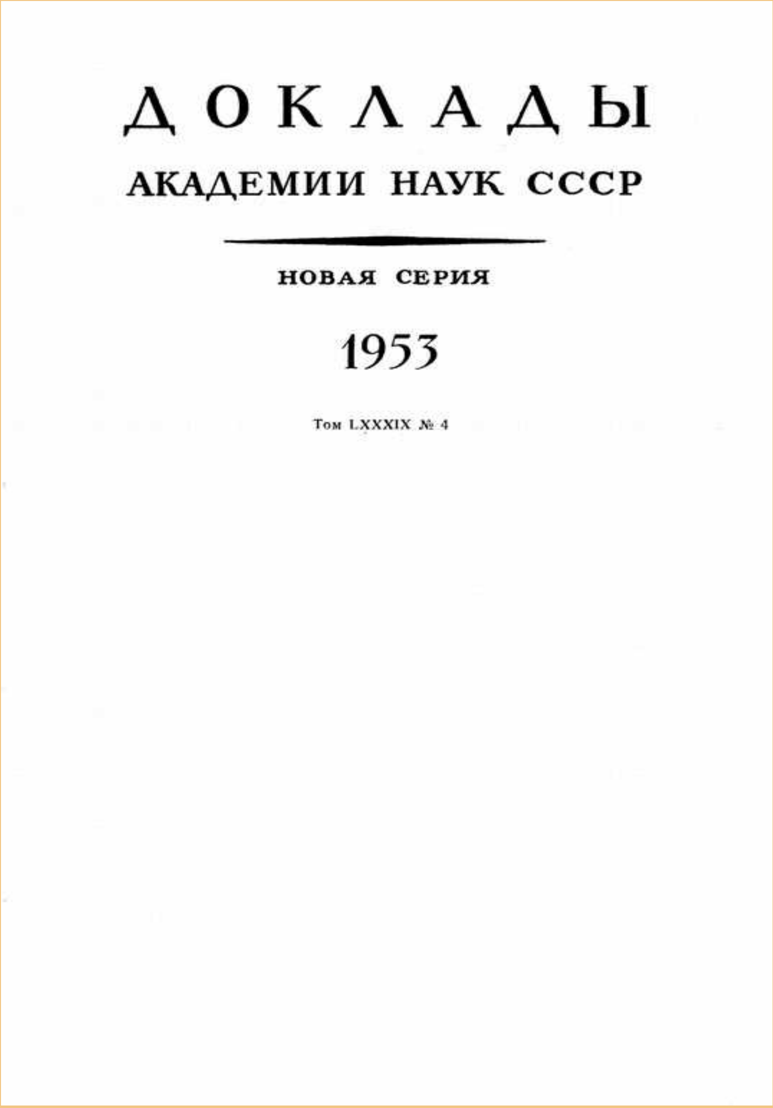
Helen Popova, Alderson

При исследовании тригонометрических сумм Коробовым впервые были рассмотрены тригонометрические суммы с так называемыми ***рекуррентными функциями***. Для таких сумм он получил неулучшаемые оценки и применил их к исследованию распределения невычетов и первообразных корней в рекуррентных последовательностях.

Korobov pioneered the research into trigonometric sums with ***recurrent functions***. He got the unimprovable estimates for such sums and used these estimates for research into distribution of non-residues and primitive roots in recurrent sequences.

Коробов впервые рассмотрел ***тригонометрические суммы с показательными функциями*** и получил полное описание сумм такого вида.

Korobov pioneered the research into ***trigonometric sums with exponential functions*** and got the description of such sums.



ДОКЛАДЫ

АКАДЕМИИ НАУК СССР

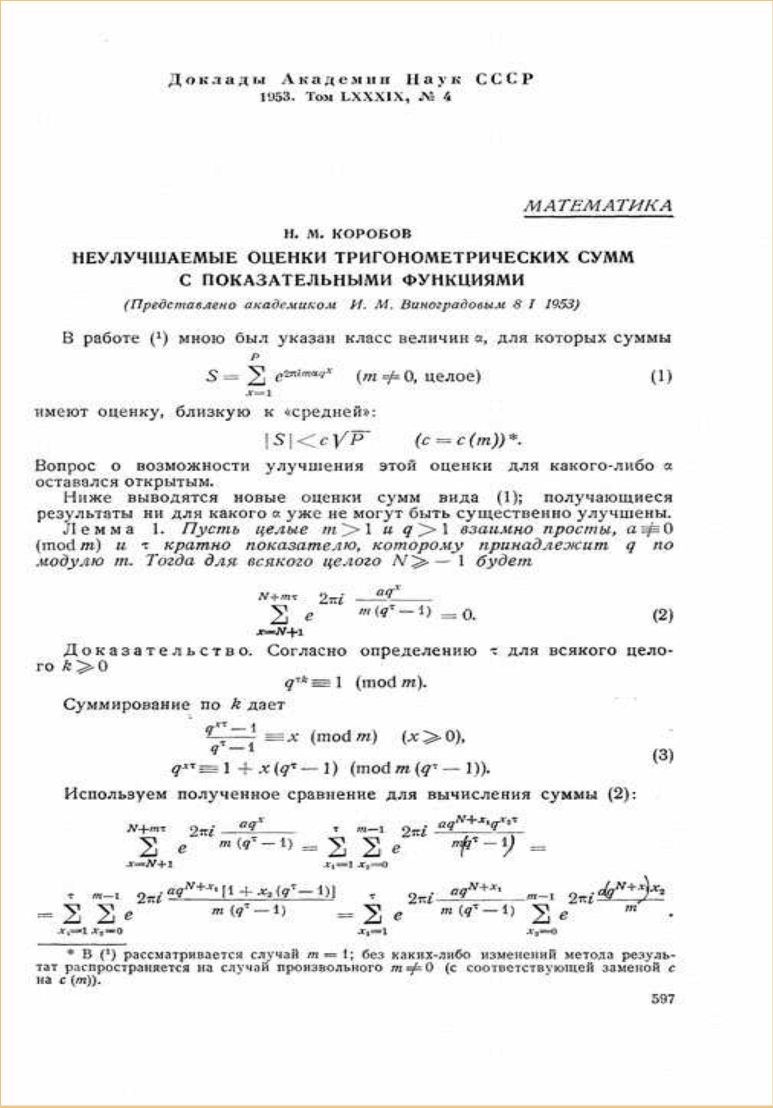
НОВАЯ СЕРИЯ

1953

Том LXXXIX № 4

Коробов впервые рассмотрел ***тригонометрические суммы с показательными функциями*** и получил полное описание сумм такого вида.

Korobov pioneered the research into ***trigonometric sums with exponential functions*** and got the description of such sums.



Доклады Академии Наук СССР
1953. Том LXXXIX, № 4

МАТЕМАТИКА

Н. М. КОРОБОВ

НЕУЛУЧШАЕМЫЕ ОЦЕНКИ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ СУММ С ПОКАЗАТЕЛЬНЫМИ ФУНКЦИЯМИ

(Представлено академиком И. М. Виноградовым 8 I 1953)

В работе ([1]) мною был указан класс величин α, для которых суммы

$$S = \sum_{x=1}^{P} e^{2\pi i m \alpha q^x} \quad (m \neq 0, \text{ целое}) \tag{1}$$

имеют оценку, близкую к «средней»:

$$|S| < c\sqrt{P} \qquad (c = c(m))^*.$$

Вопрос о возможности улучшения этой оценки для какого-либо α оставался открытым.

Ниже выводятся новые оценки сумм вида (1); получающиеся результаты ни для какого α уже не могут быть существенно улучшены.

Лемма 1. *Пусть целые $m > 1$ и $q > 1$ взаимно просты, $a \not\equiv 0 \pmod m$ и τ кратно показателю, которому принадлежит q по модулю m. Тогда для всякого целого $N \geqslant -1$ будет*

$$\sum_{x=N+1}^{N+m\tau} e^{2\pi i \frac{aq^x}{m(q^\tau - 1)}} = 0. \tag{2}$$

Доказательство. Согласно определению τ для всякого целого $k \geqslant 0$

$$q^{\tau k} \equiv 1 \pmod m.$$

Суммирование по k дает

$$\frac{q^{x\tau} - 1}{q^\tau - 1} \equiv x \pmod m \quad (x \geqslant 0),$$
$$q^{x\tau} \equiv 1 + x(q^\tau - 1) \pmod{m(q^\tau - 1)}. \tag{3}$$

Используем полученное сравнение для вычисления суммы (2):

$$\sum_{x=N+1}^{N+m\tau} e^{2\pi i \frac{aq^x}{m(q^\tau - 1)}} = \sum_{x_1=1}^{\tau} \sum_{x_2=0}^{m-1} e^{2\pi i \frac{aq^{N+x_1} q^{x_2 \tau}}{m(q^\tau - 1)}} =$$

$$= \sum_{x_1=1}^{\tau} \sum_{x_2=0}^{m-1} e^{2\pi i \frac{aq^{N+x_1}[1 + x_2(q^\tau - 1)]}{m(q^\tau - 1)}} = \sum_{x_1=1}^{\tau} e^{2\pi i \frac{aq^{N+x_1}}{m(q^\tau - 1)}} \sum_{x_2=0}^{m-1} e^{2\pi i \frac{aq^{N+x_1} x_2}{m}}.$$

* В ([1]) рассматривается случай $m = 1$; без каких-либо изменений метода результат распространяется на случай произвольного $m \neq 0$ (с соответствующей заменой c на $c(m)$).

Коробов впервые рассмотрел ***тригонометрические суммы с показательными функциями*** и получил полное описание сумм такого вида.

Korobov pioneered the research into ***trigonometric sums with exponential functions*** and got the description of such sums.

Внутренняя сумма в последнем равенстве обращается в нуль для всех значений x_1, чем лемма доказана.

Пусть $m_1 > 1$ и $q > 1$ взаимно просты. Определим величины m_ν рекуррентным соотношением

$$m_{\nu+1} = m_\nu (q^{\tau_\nu} - 1) \quad (\nu = 1, 2, \ldots),$$

где $\tau_1 < \tau_2 < \ldots$ — произвольные числа, кратные показателям, которым q принадлежит, соответственно, по модулям $m_1, m_2, \ldots$ Пусть, далее, числа $n_1, n_2, \ldots$ определены соотношением $n_{\nu+1} = n_\nu + m_\nu \tau_\nu \psi(\nu)$, $n_0 = 0$, где $\psi(\nu) > 0$ — произвольная возрастающая целочисленная функция. Тогда справедлива следующая лемма:

Лемма 2. *Для всякого α, заданного рядом*

$$\alpha = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{m_{\nu+1} q^{n_\nu}}, \tag{4}$$

и всякого P из интервала $n_k \leqslant P < n_{k+1}$ выполняется оценка

$$\sum_{x=1}^{P} e^{2\pi i m \alpha q^x} = O(m_k \tau_k) \quad (m \neq 0, \text{ целое}). \tag{5}$$

Доказательство. Представим P в виде

$$P = n_k + r m_k \tau_k + r'; \quad 0 \leqslant r < \psi(k); \quad 0 \leqslant r_1 < m_k \tau_k.$$

Разобьем сумму (5) на части:

$$\sum_{x=1}^{P} e^{2\pi i m \alpha q^x} = \sum_{l=1}^{k-1} \sum_{x=n_l+1}^{n_{l+1}} e^{2\pi i m \alpha q^x} + \sum_{x=n_k+1}^{n_k + r m_k \tau_k} e^{2\pi i m \alpha q^x} + O(m_k \tau_k). \tag{6}$$

Введем обозначения:

$$r_l = \begin{cases} \psi(i) & \text{для } 1 \leqslant i \leqslant k-1, \\ r & \text{для } \quad i = k; \end{cases} \qquad S_l = \sum_{x=1}^{r_i m_i \tau_i} e^{2\pi i m \alpha q^{n_i + x}}.$$

Тогда равенство (6) примет вид:

$$S = \sum_{l=1}^{k} S_l + O(m_k \tau_k). \tag{7}$$

Оценим суммы S_l. Согласно определению, $n_{\nu+1} > n_\nu$ и $m_{\nu+1} = m_\nu (q^{\tau_\nu} - 1) \equiv 0 \pmod{m_\nu}$, следовательно,

$$\alpha = \sum_{\nu=0}^{l} \frac{1}{m_{\nu+1} q^{n_\nu}} + O\left(\frac{1}{m_{l+2} q^{n_{l+1}}}\right) = \frac{a_l}{m_{l+1} q^{n_l}} + O\left(\frac{1}{m_{l+2} q^{n_{l+1}}}\right).$$

Легко видеть, что $(a_l, m_l) = 1$. Действительно,

$$\frac{a_l}{m_{l+1} q^{n_l}} = \frac{a_{l-1}}{m_l q^{n_{l-1}}} + \frac{1}{m_{l+1} q^{n_l}} = \frac{a_{l-1} (q^{\tau_l} - 1) q^{n_l - n_{l-1}} + 1}{m_{l+1} q^{n_l}};$$

$$a_l = a_{l-1} (q^{\tau_l} - 1) q^{n_l - n_{l-1}} + 1 \equiv 1 \pmod{m_l}.$$

Коробов впервые рассмотрел ***тригонометрические суммы с показательными функциями*** и получил полное описание сумм такого вида.

Kor

researc

with e

got the

Теорема. *Какова бы ни была функция $\varphi(P)$, как угодно медленно стремящаяся к бесконечности, при достаточно быстром росте величин n_ν (определяемом неравенством (8)) для всякого α, заданного рядом $\alpha = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{m_{\nu+1} q^{n_\nu}}$ будет справедлива оценка*

$$\sum_{x=1}^{P} e^{2\pi i m\alpha q^x} = o(\varphi(P)) \quad (m \neq 0, \text{ целое}).$$

Ни для какого α эту оценку нельзя улучшить до $O(1)$.

Таким образом,

$$\alpha = \frac{a_i}{m_i (q^{\tau_i} - 1) q^{n_i}} + O\left(\frac{1}{m_{i+2} q^{n_{i+1}}}\right),$$

$$m\alpha q^{n_i + x} = \frac{m a_i q^x}{m_i (q^{\tau_i} - 1)} + O\left(\frac{q^x}{m_{i+2} q^{r_i m_i \tau_i}}\right).$$

Отсюда следует, что

$$S_i = \sum_{x=1}^{r_i m_i \tau_i} e^{2\pi i \frac{m a_i q^x}{m_i (q^{\tau_i} - 1)}} + O\left(\frac{1}{m_{i+2}}\right).$$

Начиная с некоторого i, будет $m_i > m$. Так как $(a_i, m_i) = 1$, то $a_i m \not\equiv 0 \pmod{m_i}$, и, в силу леммы 1, получим для $i > i_0(m)$:

$$\sum_{x=1}^{P} e^{2\pi i m\alpha q^x} = O(m_k \tau_k).$$

В силу условия (8) $m_k \tau_k < \frac{1}{k} \varphi(n_k) = o(\varphi(P))$, чем доказано первое утверждение теоремы. Допустим, что второе утверждение теоремы неверно. Тогда найдется α такое, что для всех $P > P_0$ при некотором $M(m)$ будет

$$\left| \sum_{x=1}^{P} e^{2\pi i m\alpha q^x} \right| < M(m). \quad (9)$$

Коробов впервые рассмотрел ***тригонометрические суммы с показательными функциями*** и получил полное описание сумм такого вида.

Korobov pioneered the research into ***trigonometric sums with exponential functions*** and got the description of such sums.

Из неравенства (9) следует, что функция αq^x равномерно распределена. Но тогда для всякого целого $n>0$ в q-ичном разложении $\alpha=0,\delta_1\delta_2\ldots$ найдется $2n$ рядом стоящих знаков, равных нулю. Пусть эти знаки будут $\delta_{N+1},\ldots,\delta_{N+2n}$. Очевидно, $N=N(n)\to\infty$ при $n\to\infty$.

Выберем $n>2M(1)$ и притом настолько большим, чтобы выполнялись неравенства $N>P_0$ и $q^n>2\pi(n+1)$. Тогда в силу (9)

$$\left|\sum_{x=N}^{N+n} e^{2\pi i\alpha q^x}\right| \leqslant \left|\sum_{x=1}^{N+n} e^{2\pi i\alpha q^x}\right| + \left|\sum_{x=1}^{N-1} e^{2\pi i\alpha q^x}\right| < 2M(1).$$

С другой стороны, так как $\delta_{N+x}=0$ $(x=1,2,\ldots,2n)$, получим

$$\left|\sum_{x=N}^{N+n} e^{2\pi i\alpha q^x}\right| = \left|\sum_{x=1}^{n+1} e^{2\pi i 0,\,\delta_{N+x}\delta_{N+x+1}\cdots}\right| \geqslant n+1-2\pi\frac{n+1}{q^n} \geqslant n.$$

Отсюда следует неравенство $n<2M(1)$, противоречащее выбору n, чем теорема доказана полностью.

Замечание. Из леммы 2, между прочим, следует, что всякое α, заданное рядом (4), при условии $m_\nu\tau_\nu=o(n_\nu)$ является нормальным числом в смысле Бореля.

Действительно, указанное условие обеспечивает равномерность распределения функции αq^x, что, очевидно, эквивалентно нормальности числа α (эта эквивалентность следует, например, из леммы, помещенной во 2-й главе моей работы ([2])).

Математический институт
им. В. А. Стеклова
Академии наук СССР

Поступило
5 I 1953

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Н. М. Коробов, Тр. Матем. ин-та им. В. А. Стеклова, **38**, 87 (1951).
[2] Н. М. Коробов, Изв. АН СССР, сер. матем., **14**, № 3, 215 (1950).

Им была получена также оценка суммы характеров, расширяющая область нетривиальности оценок Хассе-Вейля. Эта оценка показывает, что имеется интерференция для нулей локальной дзета-функции Римана кривой

$$y^2 \equiv f(x) \pmod p,$$

где *p* – простое, а *f(x)* – полином нечётной степени.

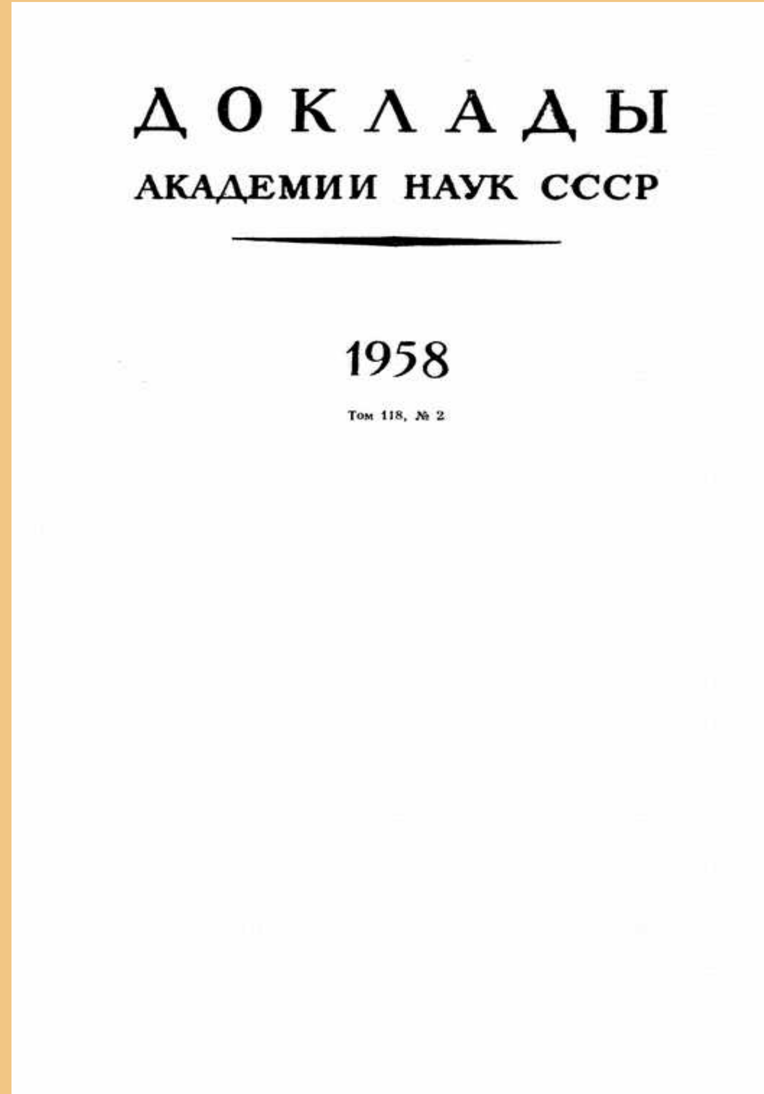
He got the estimate of sum of characters, which extended the field of specificity of Hasse-Weyl estimates. This estimate shows the interference for zeros of local riemannian zeta function of curve

$$y^2 \equiv f(x) \pmod p,$$

p is prime number, *f(x)* is uneven degree polynomial.

Николаем Михайловичем был предложен новый подход для усиления оценок ***классических сумм Вейля***.

The new approach for improving of estimates of ***classical Weyl sums*** was offered by Nikolay Mikhailovich.



ДОКЛАДЫ

АКАДЕМИИ НАУК СССР

1958

Том 118, № 2

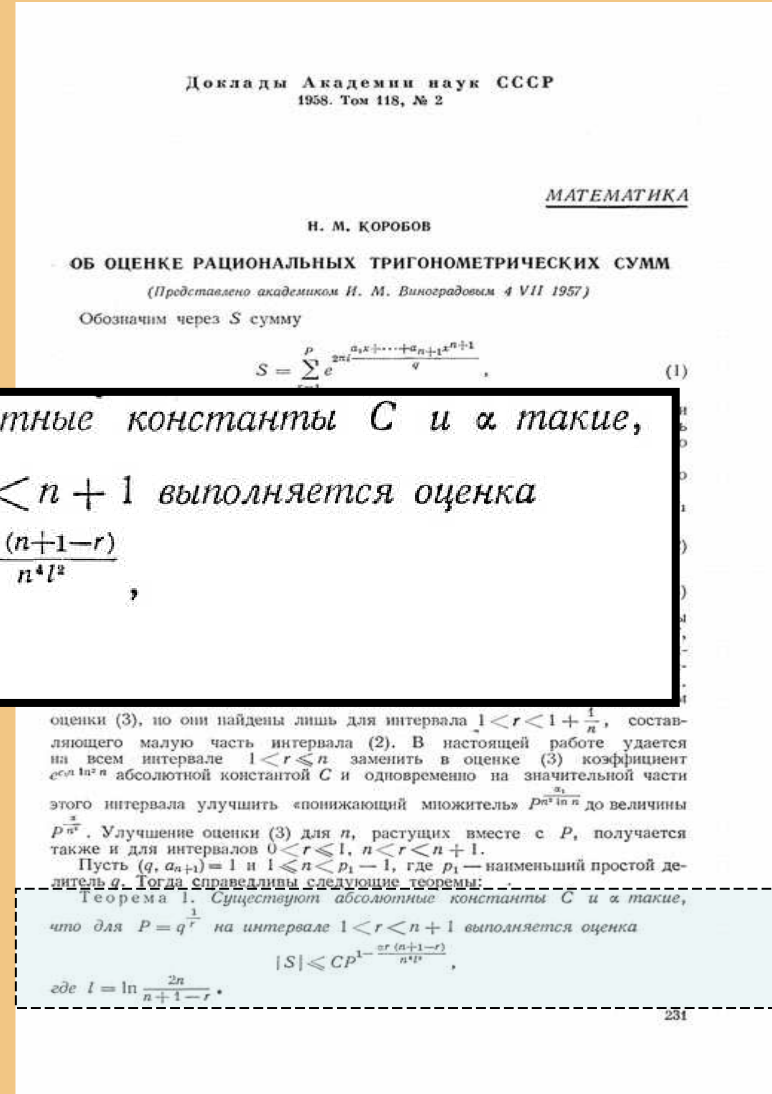
Николаем Михайловичем был предложен новый подход для усиления оценок ***классических сумм Вейля***.

Th

improv

Weyl s

Mikhailovich.



Доклады Академии наук СССР
1958. Том 118, № 2

МАТЕМАТИКА

Н. М. КОРОБОВ

ОБ ОЦЕНКЕ РАЦИОНАЛЬНЫХ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ СУММ

(Представлено академиком И. М. Виноградовым 4 VII 1957)

Обозначим через S сумму

$$S = \sum^{P} e^{2\pi i \frac{a_1 x + \cdots + a_{n+1} x^{n+1}}{q}}, \qquad (1)$$

оценки (3), но они найдены лишь для интервала $1 < r < 1 + \frac{1}{n}$, составляющего малую часть интервала (2). В настоящей работе удается на всем интервале $1 < r \leqslant n$ заменить в оценке (3) коэффициент $e^{c_0 n \ln^2 n}$ абсолютной константой C и одновременно на значительной части этого интервала улучшить «понижающий множитель» $P^{\frac{\alpha_1}{n^2 \ln n}}$ до величины $P^{\frac{\alpha}{n^2}}$. Улучшение оценки (3) для n, растущих вместе с P, получается также и для интервалов $0 < r \leqslant 1$, $n < r < n + 1$.

Пусть $(q, a_{n+1}) = 1$ и $1 \leqslant n < p_1 - 1$, где p_1 — наименьший простой делитель q. Тогда справедливы следующие теоремы:

Теорема 1. *Существуют абсолютные константы C и α такие, что для $P = q^{\frac{1}{r}}$ на интервале $1 < r < n + 1$ выполняется оценка*

$$|S| \leqslant CP^{1 - \frac{\alpha r (n+1-r)}{n^4 l^2}},$$

где $l = \ln \frac{2n}{n+1-r}$.

Теорема 1. *Существуют абсолютные константы C и α такие, что для $P = q^{\frac{1}{r}}$ на интервале $1 < r < n + 1$ выполняется оценка*

$$|S| \leqslant CP^{1 - \frac{\alpha r (n+1-r)}{n^4 l^2}},$$

где $l = \ln \frac{2n}{n+1-r}$.

Николаем Михайловичем был предложен новый подход для усиления оценок ***классических сумм Вейля***.

Th… improv… ***Weyl s…*** Mikhailovich.

Теорема 2. *Каково бы ни было фиксированное $\varepsilon > 0$, существуют константа $\alpha = \alpha(\varepsilon)$ и абсолютная константа C такие, что для $P = q^{\frac{1}{r}}$ на интервале $\varepsilon n < r < n - \varepsilon n$ выполняется оценка*

$$|S| \leqslant CP^{1-\frac{\alpha}{n^2}}.$$

Теорема 2. *Каково бы ни было фиксированное $\varepsilon > 0$, существуют константа $\alpha = \alpha(\varepsilon)$ и абсолютная константа C такие, что для $P = q^{\frac{1}{r}}$ на интервале $\varepsilon n < r < n - \varepsilon n$ выполняется оценка*

$$|S| \leqslant CP^{1-\frac{\alpha}{n^2}}.$$

Теорема 2, очевидно, следует из теоремы 1. При доказательстве теоремы 1 применяется новый подход к оценкам тригонометрических сумм, при котором используется рациональность рассматриваемых сумм. Кроме того, существенно используется следующая теорема.

Теорема 3. *Пусть n, r, k, τ, q и P — целые, удовлетворяющие условиям*

$$1 \leqslant r \leqslant n; \quad \tau \geqslant 1; \quad k > n^2 + n\tau; \quad q > 2k; \quad \left(\frac{q}{2k}\right)^{\frac{1}{r+1}} < P \leqslant \left(\frac{q}{2k}\right)^{\frac{1}{r}}.$$

Тогда существует абсолютная константа c такая, что для числа $N_k(P)$ решений системы сравнений

(4)

(5)

…ова.

…вед-

…т k.

…очно больших значениях τ утверждение теоремы 3 уже нельзя существенно усилить.

Математический институт им. В. А. Стеклова Академии наук СССР

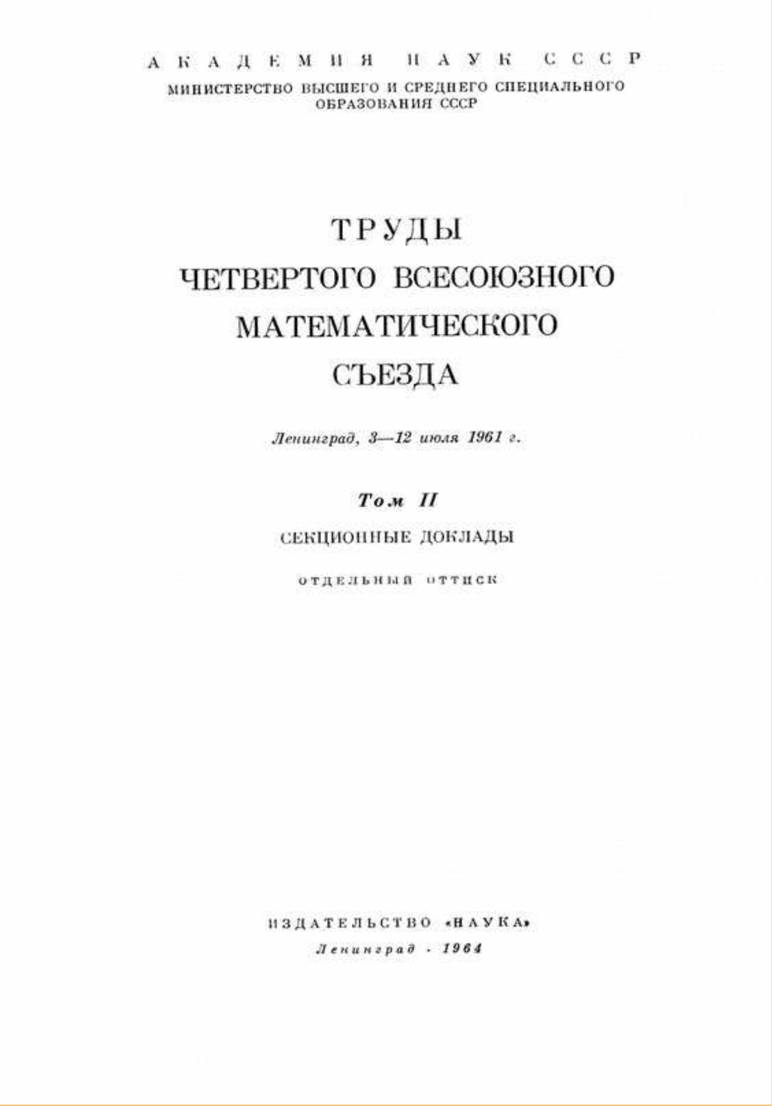
Поступило 27 VI 1957

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] И. М. Виноградов. Изв. АН СССР, сер. матем., 14, 199 (1950). [2] Хуа Ло-ген, Тр. Матем. инст. им. В. А. Стеклова АН СССР, 22, 16 (1947).

Николаем Михайловичем был предложен новый подход для усиления оценок ***классических сумм Вейля***.

The new approach for improving of estimates of ***classical Weyl sums*** was offered by Nikolay Mikhailovich.



АКАДЕМИЯ НАУК СССР

МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ СССР

ТРУДЫ ЧЕТВЕРТОГО ВСЕСОЮЗНОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО СЪЕЗДА

Ленинград, 3—12 июля 1961 г.

Том II

СЕКЦИОННЫЕ ДОКЛАДЫ

ОТДЕЛЬНЫЙ ОТТИСК

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»

Ленинград · 1964

Николаем Михайловичем был предложен новый подход для усиления оценок ***классических сумм Вейля***.

Th

improv

Weyl s

Mikhailovich.

Н. М. Коробов (*Москва*)

ОЦЕНКИ СУММ ВЕЙЛЯ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

В этом докладе дается краткий обзор результатов, полученных за последние четыре года в области оценок сумм Вейля, неполных рациональных и частично рациональных тригонометрических сумм. Рассматриваются также приложения этих оценок и указываются некоторые новые задачи.

ЛИТЕРАТУРА

1. N. C. Ankeny, E. Artin, S. Chowla, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 37 (1951), 524—525; 2. N. C. Ankeny, E. Artin, S. Chowla, Ann. of Math., 56 (1952), 479—493; 3. N. C. Ankeny, S. Chowla, Acta Arithm., 6 (1960), 145—147; 4. P. M. Bateman, Trans. Amer. Math. Soc., 71 (1951), 70—101; 5. H. Bergström, J. für Math., 186 (1944), 91—115; 6. A. Berger, Acta Math., 14 (1890—91), 249—304; 7. H. S. Vandiker, Bull. Amer. Math. Soc., 25 (1919), 458—461; 8. Б. А. Венков, ИАН СССР, сер. 7, отд. физ.-мат. наук, № 4—7 (1928), 375—392, 455—490; 9. Г. Ф. Вороной, Собр. соч., т. 1, Киев (1952); 10. O. Grün, Über Deutsch. Math. Verein., 51 (1940), 111—112; 11. A. Hurwitz, Acta Math., 19 (1895), 351—384; 12. K. L. Jencen, Nyt. Tidsskr. for Math., 26 (1915) 73—83; 13. K. Inkerei, Suomalais. tiedeakat. toimituks. Ser. AI, N 199 (1955); 14. L. Carlitz, Comm. Math. Helv., 27 (1953), 338—345; 15. L. Carlitz, Canad. J. Math., 6 (1954), 23—26; 16. A. A. Киселев, ДАН СССР, 61 (1948), 777—779; 17. A. A. Киселев, Научн. сессия Лен. гос. унив., Тезисы докл. по секции матем. наук (1948), 37—39; 18. A. A. Киселев, Уч. зап. Лен. гос. унив., сер. матем. наук, вып. 16 (1949), 20—31; 19. A. A. Киселев, И. Ш. Славутский, ДАН СССР, 126 (1959), 1191—1194; 20. A. L. Cauchy, Oeuvres, 1, 3 (1911), 163—
... Math.-Phys. ... Hamburg, ... nar Univ. ... Palermo, ... entés par ... 33, N 2 ... 948), 231— ... 281—314; ... ordell, ... 170 (1933), ... Славут- ... Ш. Сла- ... 173—177; ... ет. (1960), ... 961), 179— ... 1, vol. I, ... New York ... Number ... 4 (1918), ... 255—284; ... Klassen- ... 166 (1932), 201—203.

Н. М. Коробов (*Москва*)

ОЦЕНКИ СУММ ВЕЙЛЯ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

В этом докладе дается краткий обзор результатов, полученных за последние четыре года в области оценок сумм Вейля, неполных рациональных и частично рациональных тригонометрических сумм. Рассматриваются также приложения этих оценок и указываются некоторые новые задачи.

Остановимся сначала на некоторых основных результатах, предшествовавших работам, рассматриваемым в этом докладе.

Пусть $f(x) = a_1 x + \ldots + a_{n+1} x^{n+1}$ и

$$S(f) = \sum_{x=1}^{P} e^{2\pi i f(x)}.$$

Николаем Михайловичем был предложен новый подход для усиления оценок ***классических сумм Вейля***.

The new approach for improving of estimates of ***classical Weyl sums*** was offered by Nikolay Mikhailovich.

В 1916 г. Г. Вейль [1] показал, что при $\alpha_{n+1} = \frac{a}{q} + \frac{\theta}{q^2}$ где $(a, q) = 1$, $|\theta| \leqslant 1$ и $q = P^r$ справедлива оценка

$$|S(f)| \ll P^{1-\frac{1-\varepsilon}{2^n}} \qquad (1 \leqslant r \leqslant n). \tag{1}$$

Доказательство Вейля было основано на сведении оценки $|S(f)|^2$ к оценке $|S(\Delta f)|$, где Δf — конечная разность функции f.

Так как степень полинома Δf на единицу ниже степени f, то после n-кратного повторения процесса получаются тригонометрические суммы первой степени, оценка которых уже не представляет труда.

Значительно более точный результат для многочленов специального вида был получен в 1932 г. Морделлом [2]

$$\left| \sum_{x=1}^{P} e^{2\pi i \frac{a_1 x + \ldots + a_n x^n}{q}} \right| \ll P^{1-\frac{1}{n}} \qquad (r = 1). \tag{1'}$$

Здесь $q > n$ — простое и $a_1, \ldots, a_n$ — целые, общий наибольший делитель которых не кратен q. Доказательство Морделла было основано на возможности при $k = n$ получить точную оценку сверху для числа решений системы сравнений

$$\left.\begin{matrix} x_1 + \ldots + x_k \equiv y_1 + \ldots + y_k \\ \vdots \\ x_1^n + \ldots + x_k^n \equiv y_1^n + \ldots + y_k^n \end{matrix}\right\} \pmod q.$$

Несколько менее точный, чем (1′), но зато, как и в случае (1), предельно общий результат был получен в 1935 г. И. М. Виноградовым [3]. Приведем здесь этот результат в форме, которую он принял к 1950 г. после усовершенствований, полученных Н. Г. Чудаковым, Ю. В. Линником, Хуа Ло Геном и самим И. М. Виноградовым [4],

$$|S(f)| \leqslant e^{c_0 n \ln^2 n} P^{1-\frac{\gamma_0}{n^2 \ln n}} \qquad (1 \leqslant r \leqslant n). \tag{2}$$

Здесь c_0 и γ_0 — некоторые абсолютные положительные константы.

Метод Виноградова основан на установленной им теореме о среднем, позволяющей получать асимптотически точные оценки сверху для числа $N_{k,n}^{(P)}$ решений системы уравнений

$$\left.\begin{matrix} x_1 + \ldots + x_k = y_1 + \ldots + y_k \\ \vdots \\ x_1^n + \ldots + x_k^n = y_1^n + \ldots + y_k^n \end{matrix}\right\} \quad (1 \leqslant x,\ y \leqslant P).$$

Приведенный выше результат (2) получается при надлежащем выборе P_1 из соотношения

$$|S(f)|^{2k} \ll P^{\frac{n(n+3)}{2}} P_1^{-(n+1)} N_{k,n}^{(P)} + P_1^{2k} \tag{3}$$

в силу оценки

$$N_{k,n}^{(P)} \leqslant e^{c_1 n^3 \ln^2 n} P^{2k - \frac{n(n+1)}{2} + \frac{1}{2}}, \tag{4}$$

справедливой при $k > c_2 n^2 \ln n$, где c_1 и c_2 — абсолютные положительные константы.

Перейдем теперь к изложению некоторых результатов, полученных начиная с 1957 г. К этому времени было ясно, что оценка (2) представляет собой естественную границу результатов, которые можно получить, используя схему Вино-

Николаем Михайловичем был предложен новый подход для усиления оценок ***классических сумм Вейля***.

The new approach for improving of estimates of ***classical Weyl sums*** was offered by Nikolay Mikhailovich.

градова (3) и теорему о среднем (4). Для уточнения оценки (2) были необходимы те или иные отклонения от этой схемы.

В 1957 г. Н. М. Коробов ([5]—[8]) вместо соотношения (3) стал применять более сложное соотношение

$$|S(f)|^{4kk_1} \leqslant P^{2k(2k_1-1)} P_1^{-2k_1} V_{k,k_1} + P_1^{4kk_1}, \qquad (5)$$

$$V_{k,k_1} = \sum_{\lambda_1, \ldots, \mu_n} N_{k,n}^{(P)}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) N_{k_1,n}^{(P)}(\mu_1, \ldots, \mu_n) e^{2\pi i(\beta_1\mu_1 + \ldots + \beta_n\mu_n)},$$

$$|\lambda_\nu| < kP^\nu, \quad |\mu_\nu| < k_1 P_1^\nu \quad (\nu = 1, 2, \ldots, n),$$

где β_j — некоторые линейные комбинации величин λ_ν и $N_{k,n}^{(P)}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ — число решений системы уравнений

$$\left.\begin{array}{l} x_1 + \ldots + x_k = y_1 + \ldots + y_k + \lambda_1 \\ \vdots \\ x_1^n + \ldots + x_k^n = y_1^n + \ldots + y_k^n + \lambda_n \end{array}\right\} \quad (1 \leqslant x,\ y \leqslant P).$$

Соотношение (5) получается путем обычного дополнительного суммирования

$$\left|\sum_{x=1}^{P} e^{2\pi i f(x)}\right| \leqslant P_1^{-1} \sum_{y} \left|\sum_{x=1}^{P} e^{2\pi i f(x+y)}\right| + P_1$$

с дальнейшим применением неравенства Гельдера и использованием несложных свойств величин $N_{k,n}^{(P)}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. Пользуясь соотношением (5) и применяя теорему о среднем, удается в конечном счете [9] получить оценки

$$|S(f)| \leqslant \begin{cases} CP^{r - \frac{\gamma}{n^2 \ln n}} & (\sqrt{n} \ln n < r < n - \sqrt{n} \ln n), \\ CP^{1 - \frac{\gamma}{n^2}} & (\varepsilon n < r < n - \varepsilon n), \end{cases}$$

где C и γ — абсолютные положительные константы. Таким образом, при оценке сумм Вейля оказалось возможным для сравнительно широкого класса сумм заменить в оценке (2) коэффициент $e^{c_0 n \ln^2 n}$ на абсолютную константу C, а для более узкого класса улучшить еще и понижающий множитель до величины $P^{\frac{\gamma}{n^2}}$.

Пользуясь соотношением (5), удается также ([6]—[8]) уточнить результаты в ряде задач, связанных с оценкой сумм Вейля. Сюда относятся вопрос об оценке $\zeta(1+it)$ и $\pi(x) - li\,x$, асимптотика сумм

$$\sum_{n \leqslant x} \sigma(n), \quad \sum_{n \leqslant x} \varphi(n)$$

и некоторые другие вопросы.

В дальнейшем различные варианты соотношения (5) были использованы в работах И. М. Виноградова, А. З. Вальфиша и А. А. Карацубы. В частности, И. М. Виноградов [10], [11], используя соотношение вида (5), возникающее при двойном дополнительном суммировании

$$\left|\sum_{x=1}^{P} e^{2\pi i f(x)}\right| \leqslant P_1^{-1} \sum_{y,z} \left|\sum_{x=1}^{P} e^{2\pi i f(x+yz)}\right| + P_1,$$

продвинулся в оценке $\zeta(1+it)$ несколько дальше, чем это было сделано Н. М. Коробовым [6], [8]. Независимо, но несколько позже такие же оценки $\zeta(1+it)$ с помощью первоначального варианта неравенства (5) были получены и Н. М. Коробовым [12]: $\zeta(1+it) = O(\ln^{2/3}|t|)$.

Перейдем к вопросу о частично рациональных тригонометрических суммах

$$S_1 = \sum_{x=1}^{P} e^{2\pi i\left(\alpha_1 x + \ldots + \alpha_s x^s + \frac{a_{s+1}x^{s+1} + \ldots + a_n x^n}{q}\right)},$$

Николаем Михайловичем был предложен новый подход для усиления оценок ***классических сумм Вейля***.

The new approach for improving of estimates of ***classical Weyl sums*** was offered by Nikolay Mikhailovich.

где $a_1, \dots, a_s$ — произвольные действительные числа, $a_{s+1}, \dots, a_n$ и q — целые, общий наибольший делитель чисел $a_{s+1}, \dots, a_n$ взаимно прост с q и $q = P^r$. Для таких сумм при простом $q > n$ и $r = 1$ Ю. В. Линник [13] путем сочетания метода Г. Вейля с результатами А. Вейля получил оценку

$$|S_1| \ll P^{1-\frac{\gamma_1}{2^s}},$$

где γ_1 — абсолютная положительная константа. Пользуясь свойствами величин $N_{k,n}^{(P)}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, теоремой о среднем и результатами А. Вейля, удается получить [14] более точный результат

$$|S_1| \ll P^{1-\frac{\gamma_2}{s^2 \ln(s+1)}}.$$

Тем же путем, применяя оценки Хуа Ло Гена, при произвольном $q > n$ можно получить оценку

$$|S_1| \ll P^{1-\frac{\gamma_2}{ns^2 \ln(s+1)}}.$$

Остановимся еще на одном подходе к оценкам сумм Вейля, основанном на использовании специфики коэффициентов многочлена $f(x)$. Рассмотрим сумму

$$S_2 = \sum_{x=1}^{P} e^{2\pi i \frac{a_1 x + \dots + a_n x^n}{q}},$$

где $q = p^\alpha$, $\alpha > 1$ — целое, $p > n$ — простое, и общий наибольший делитель целых $a_1, \dots, a_n$ не кратен p. С помощью линейной замены переменной можно свести оценку суммы S_2 к оценке новой суммы, степень которой будет меньше n. Н. М. Коробов, применяя метод Виноградова и оценки Хуа Ло Гена, при $q = P^r$ получил оценку

$$|S_2| \ll P^{1-\frac{\gamma_3}{n}} \qquad \left(1 \leqslant r < \sqrt{\frac{n}{\ln n}}\right), \tag{6}$$

где γ_3 — абсолютная положительная константа.

Оценка (6) нашла применение в различных вопросах. Пользуясь ею, можно, в частности, доказать равномерность распределения знаков в малой части периода g-ичного разложения дробей $\frac{a}{q}$ при любых a и g, взаимно простых с p. Дальнейшее продвижение на этом пути получено в работах А. А. Карацубы [15]—[17]. Им были установлены весьма точные оценки в вопросе о распределении дробных долей функции $\frac{ax^n}{p^\alpha}$, где $(a, p) = 1$, усилены результаты А. Г. Постникова [18] о нулях L-рядов и рассмотрен аналог проблемы Варинга для сравнений.

Изучение неполных рациональных тригонометрических сумм

$$S_3 = \sum_{x=1}^{P} e^{2\pi i \frac{a_1 x + \dots + a_{n+1} x^{n+1}}{q}},$$

где $q = P^r$ и $1 < r \leqslant n$, приводит к необходимости изучения системы сравнений

$$\left.\begin{array}{c} x_1 + \dots + x_k \equiv y_1 + \dots + y_k \\ \vdots \\ x_1^n + \dots + x_k^n \equiv y_1^n + \dots + y_k^n \end{array}\right\} \pmod q \qquad (1 \leqslant x,\ y \leqslant P). \tag{7}$$

Пусть $N_{k,n}^{(P)}$ — число решений этой системы. При $k > n^2 + n\tau$, пользуясь методом Виноградова, можно доказать [5] следующую теорему о среднем для сравнений:

$$N_{k,n}^{(P)} \ll P^{2k - \frac{r(2n+1-r)}{2} + \frac{r(n+1)}{2}\left(1-\frac{1}{n}\right)^\tau}. \tag{8}$$

Николаем Михайловичем был предложен новый подход для усиления оценок ***классических сумм Вейля***.

The new approach for improving of estimates of ***classical Weyl sums*** was offered by Nikolay Mikhailovich.

приводящую к асимптотически неулучшаемым результатам при $k > c_3 n^2 \ln n$, где c_3 — некоторая абсолютная константа. Следует отметить, что в этой задаче естественно ожидать асимптотически неулучшаемых оценок уже при $k > c_3 r n$. Если бы такие оценки были получены, то легко получалась бы следующая оценка суммы S_3:

$$|S_3| \ll P^{1-\frac{\gamma_1}{rn}} \qquad (1 \leqslant r \leqslant n).$$

Более тонким результатом, по сравнению с теоремой о среднем (8), является решение проблемы Терри для сравнений, т. е. нахождение асимптотической формулы для числа решений системы (7). Эта задача при $k > c_3 n^2 \ln n$ была решена А. А. Карацубой [19] с помощью соображений, близких к тем, которыми пользовался Хуа Ло Ген [20] при решении проблемы Терри для уравнений.

В заключение доклада отметим, что, по-видимому, представляют интерес следующие вопросы:

1. Отыскание новых соотношений типа (5).
2. Изучение и оценки величин $N_{k,n}^{(P)}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$.
3. Расширение класса тригонометрических сумм, допускающих оценки вида $|S| \ll P^{1-\frac{\gamma}{n}}$.
4. Уточнение границы действия теоремы о среднем для сравнений.

ЛИТЕРАТУРА

1. H. Weyl, Math. Ann., 77 (1916), 313—352; 2. L. J. Mordell, Quart. J. Math., Oxford, 3 (1932), 161—167; 3. И. М. Виноградов, Матем. сб., т. 42 (1935), 521—530; 4. И. М. Виноградов, ИАН СССР, сер. матем., 14 (1950), 199—214; 5. Н. М. Коробов, ДАН СССР, 118, № 2 (1958), 431—432; 6. Н. М. Коробов, ДАН СССР, 118, № 3 (1958), 231—232; 7. Н. М. Коробов, ДАН СССР, 119, № 3 (1958), 433—434; 8. Н. М. Коробов, Усп. матем. наук, 13, № 2 (80), (1958), 243—245; 9. Н. М. Коробов, ДАН СССР, 123, № 1 (1958), 28—31; 10. И. М. Виноградов, ДАН СССР, 118, № 4 (1958), 631; 11. И. М. Виноградов, ИАН СССР, сер. матем., 22 (1958), 161—162; 12. Н. М. Коробов, Усп. матем. наук, 13, № 4 (82), (1958), 185—192; 13. Ю. В. Линник, Усп. матем. наук, 14, № 3 (87), (1959), 153—160; 14. Н. М. Коробов, ДАН СССР, 125, № 6 (1959), 1193—1195; 15. А. А. Карацуба, ДАН СССР, 137, № 3 (1961), 513—514; 16. А. А. Карацуба, Вестн. МГУ, 1 (1962), 38—46; 17. А. А. Карацуба, Вестн. МГУ, 3 (1962), 34—39; 18. А. Г. Постников, ИАН СССР, сер. матем., 19 (1955), 11—16; 19. А. А. Карацуба, Матем. сб., 55 (97): 2 (1961); 209—220; 20. Hua Loo-keng, Acta sci. Sinica, vol. 1 (1952).

Ю. В. Линник, А. В. Малышев (*Ленинград*)

ЭЛЕМЕНТАРНОЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТЕО ТЕОРЕМЫ КЛОСТЕРМАНА—ТАРТАКОВСКОГО О ПРЕДСТАВЛЕНИИ ЧИСЕЛ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫМИ КВАТЕРНАРНЫМИ КВАДРАТИЧНЫМИ ФОРМАМИ

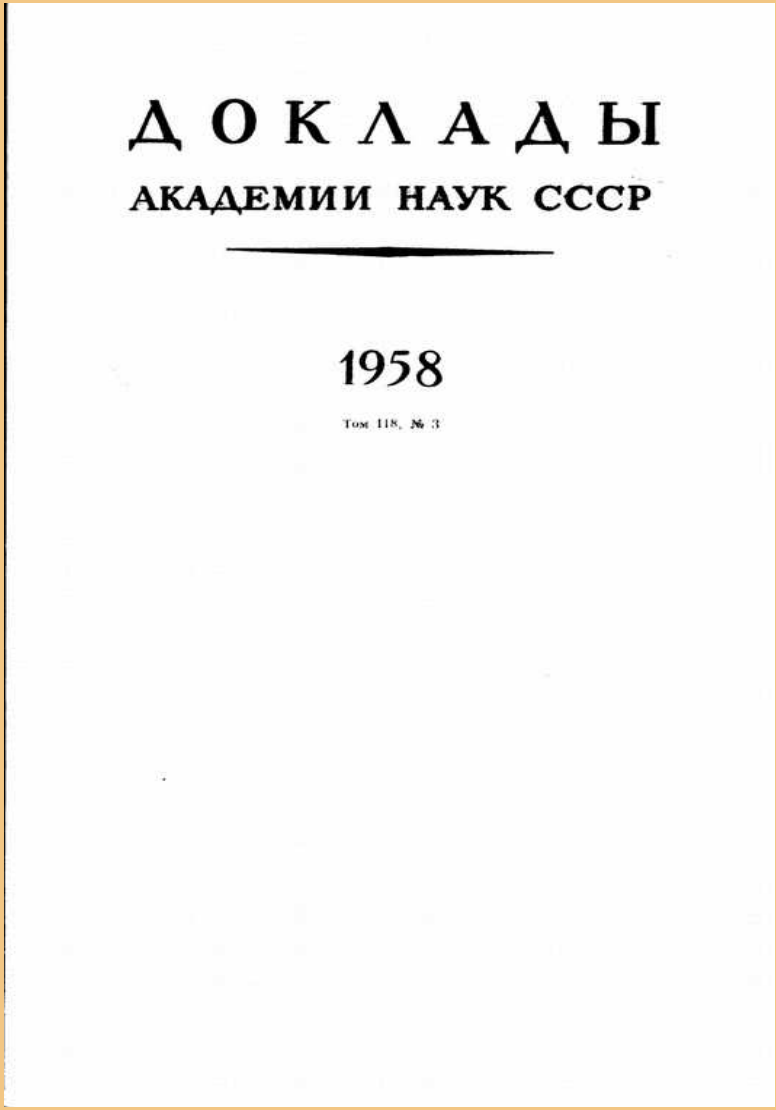
Предлагается элементарное доказательство следующей теоремы, обычно доказываемой аналитическим методом Гарди—Литтлвуда (Тартаковский [1]):

Теорема. Пусть $f = f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ — целочисленная положительная кватернарная квадратичная форма определителя $d > 0$; m — целое положительное число, для которого разрешимо сравнение

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) \equiv m \pmod{8dm}, \qquad (1)$$

Эти оценки позволили ему существенно уточнить границу ***нулей дзета-функции Римана*** и усилить оценку остаточного члена в законе распределения простых чисел.

Using these estimates he made more exact limits for zeros of riemannian zeta function and improved the estimate of remainder term in law of prime numbers distribution.



ДОКЛАДЫ

АКАДЕМИИ НАУК СССР

1958

Том 118, № 3

Эти оценки позволили ему существенно уточнить границу ***нулей дзета-функции Римана*** и усилить оценку остаточного члена в законе распределения простых чисел.

Usi… more e… riemannian zeta function and improved the estimate of remainder term in law of prime numbers distribution.

Доклады Академии наук СССР
1958. Том 118, № 3

МАТЕМАТИКА

Н. М. КОРОБОВ

О НУЛЯХ ФУНКЦИИ $\zeta(s)$

(Представлено академиком И. М. Виноградовым 27 VIII 1957)

Теорема 1. *Каково бы ни было фиксированное* $\varepsilon\,(0<\varepsilon\leqslant 0{,}5)$, *существуют абсолютная константа* C *и константа* $\alpha=\alpha(\varepsilon)$ *такие, что для* $P=q^{1/r}$ *на интервале* $n+\varepsilon\leqslant r\leqslant n+1-\varepsilon$ *выполняется оценка*

$$\left|\sum_{x=1}^{P} e^{2\pi i\frac{a_1x+\ldots+a_{n+1}x^{n+1}}{q}}\right| < CP^{1-\frac{\alpha}{(n\ln n)^{2,5}}}. \qquad (1)$$

…дова с новым подходом к оценкам тригонометрических сумм, при котором существенно используется рациональность рассматриваемых сумм.

Теорема 2. *При* $|t|\to\infty$ *для всякого фиксированного* $\varepsilon>0$ *справедлива оценка*

$$\zeta(1+it)=O\{(\ln|t|)^{2/3+\varepsilon}\}.$$

Доказательство теоремы основано на сведении вопроса об оценке сумм вида $\sum_{x=Q+1}^{Q+P} x^{it}$ к оценкам рациональных тригонометрических сумм, удовлетворяющих условиям теоремы 1.

Из теоремы 2 обычным путем (2,3) получаем следующие утверждения:

Теорема 3. *Для всякого фиксированного* $\varepsilon>0$ *существует положительная константа* $A=A(\varepsilon)$ *такая, что в области*

$$\sigma\geqslant 1-\frac{A}{(\ln|t|)^{2/3+\varepsilon}}$$

функция $\zeta(\sigma+it)$ *не имеет нулей.*

Теорема 4. *Для всякого фиксированного* $\varepsilon>0$ *существует положи-*

Эти оценки позволили ему существенно уточнить границу ***нулей дзета-функции Римана*** и усилить оценку остаточного члена в законе распределения простых чисел.

Теорема 2. *При* $|t| \to \infty$ *для всякого фиксированного* $\varepsilon > 0$ *справедлива оценка*

$$\zeta(1 + it) = O\{(\ln|t|)^{5/7+\varepsilon}\}.$$

Usi

more exact limits for zeros of riemannian zeta function and improved the estimate of remainder term in law of prime numbers distribution.

Доклады Академии наук СССР
1958. Том 118, № 3

МАТЕМАТИКА

Н. М. КОРОБОВ

О НУЛЯХ ФУНКЦИИ $\zeta(s)$

(Представлено академиком И. М. Виноградовым 27 VIII 1957)

В настоящей работе приводятся новые оценки рациональных тригонометрических сумм и даются приложения этих оценок к теории дзета-функции Римана и к вопросу о распределении простых чисел. Для дзета-функции получается уточнение оценки $|\zeta(s)|$ и улучшение границы дейст-

Оценка (1) на интервале $n + \varepsilon \leqslant r \leqslant n + 1 - \varepsilon$ представляет собой усиление результата, указанного в моей работе [1]. Доказательство теоремы, как и в работе [1], основано на сочетании метода И. М. Виноградова с новым подходом к оценкам тригонометрических сумм, при котором существенно используется рациональность рассматриваемых сумм.

Теорема 2. *При* $|t| \to \infty$ *для всякого фиксированного* $\varepsilon > 0$ *справедлива оценка*

$$\zeta(1 + it) = O\{(\ln|t|)^{5/7+\varepsilon}\}.$$

Доказательство теоремы основано на сведении вопроса об оценке сумм вида $\sum_{x=Q+1}^{Q+P} x^{it}$ к оценкам рациональных тригонометрических сумм, удовлетворяющих условиям теоремы 1.

Из теоремы 2 обычным путем [2,3] получаем следующие утверждения:

Теорема 3. *Для всякого фиксированного* $\varepsilon > 0$ *существует положительная константа* $A = A(\varepsilon)$ *такая, что в области*

$$\sigma \geqslant 1 - \frac{A}{(\ln|t|)^{5/7+\varepsilon}}$$

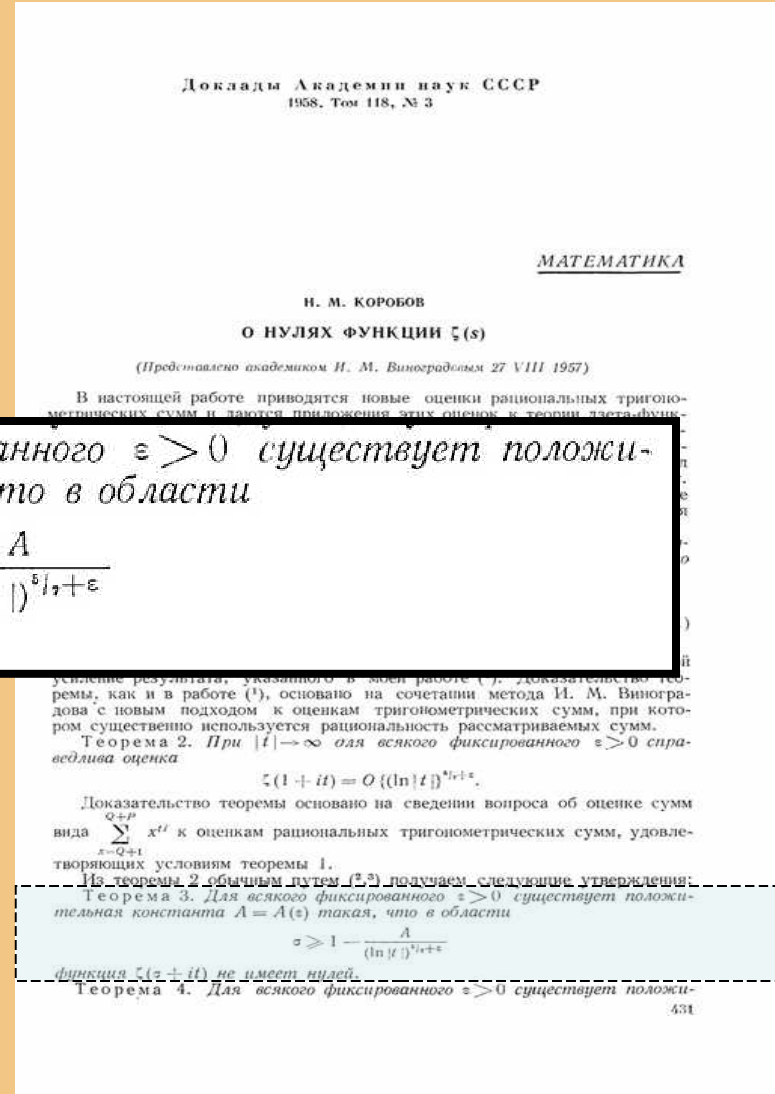
функция $\zeta(\sigma + it)$ *не имеет нулей.*

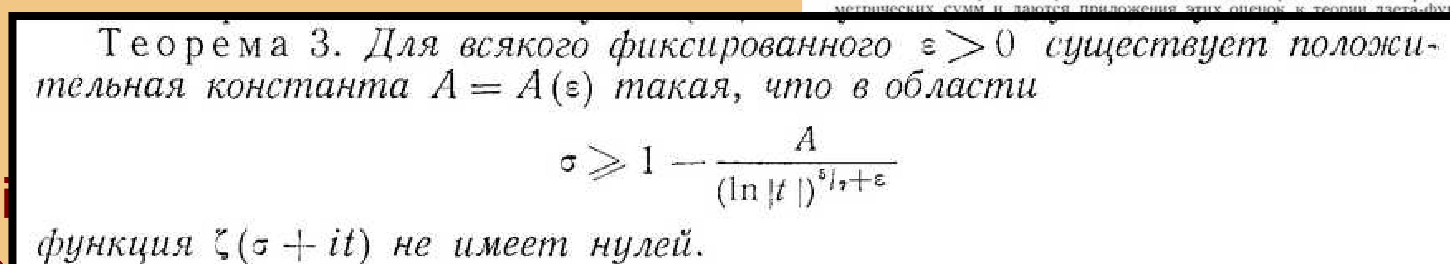
Теорема 4. *Для всякого фиксированного* $\varepsilon > 0$ *существует положи-*

Эти оценки позволили ему существенно уточнить границу ***нулей дзета-функции Римана*** и усилить оценку остаточного члена в законе распределения простых чисел.

Usi

more exact limits for zeros of riemannian zeta function and improved the estimate of remainder term in law of prime numbers distribution.





Эти оценки позволили ему существенно уточнить границу ***нулей дзета-функции Римана*** и усилить оценку остаточного члена в законе распределения простых чисел.

тельная константа $a = a(\varepsilon)$ *такая, что при* $x \to \infty$ *выполняется равенство*

$$\pi(x) = \mathrm{li}\, x + O\left(xe^{-a\{\ln x\}^{7/12-\varepsilon}}\right).$$

Замечание. Используя результаты теоремы 1, можно получить аналогичное уточнение оценок в ряде других вопросов, в частности, в вопросах о границе действительной части нулей L-функций Дирихле и об остаточном члене в формуле для числа простых чисел $p \leqslant x$, принадлежащих заданной арифметической прогрессии.

Математический институт им. В. А. Стеклова
Академии наук СССР

Поступило
26 VIII 1957

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

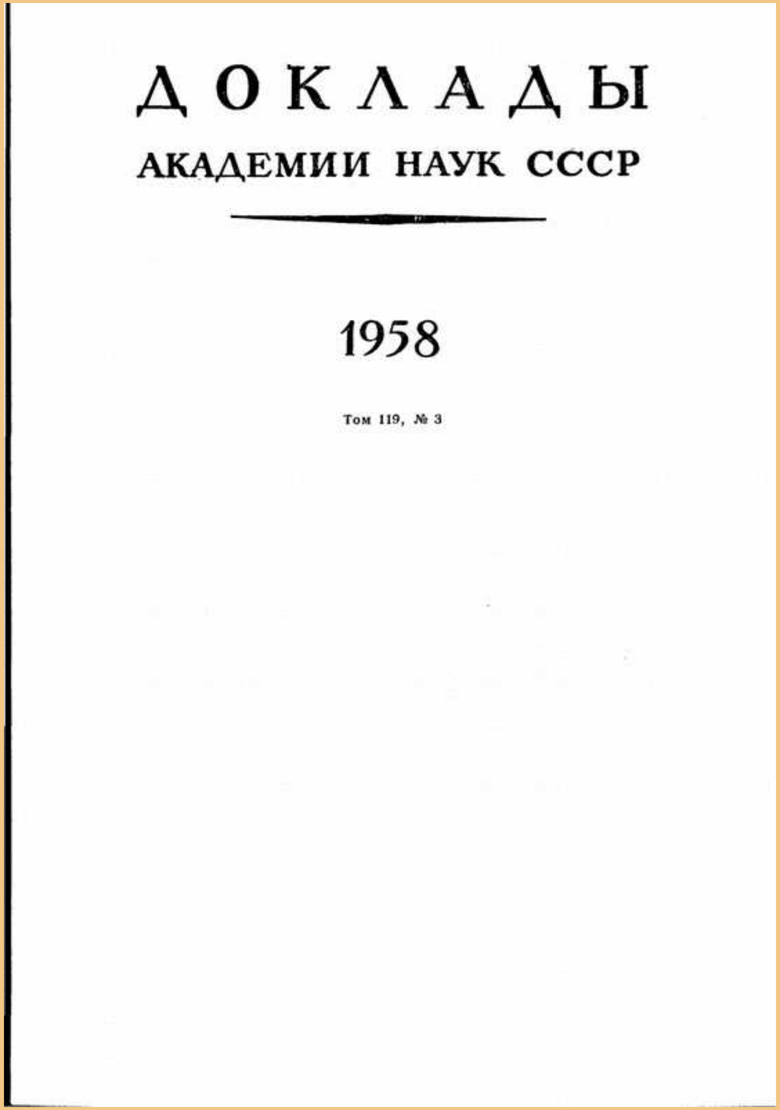
[1] Н. М. Коробов, ДАН, 118, № 2 (1958). [2] Е. К. Титчмарш, Теория дзета-функции Римана, ИЛ, 1953. [3] А. Е. Ингам, Распределение простых чисел, М.— Л., 1936.

Теорема 4. *Для всякого фиксированного* $\varepsilon > 0$ *существует положительная константа* $a = a(\varepsilon)$ *такая, что при* $x \to \infty$ *выполняется равенство*

$$\pi(x) = \mathrm{li}\, x + O\left(xe^{-a\{\ln x\}^{7/12-\varepsilon}}\right).$$

Usi… more exact limits for zeros of riemannian zeta function and improved the estimate of remainder term in law of prime numbers distribution.

Эти оценки позволили ему существенно уточнить границу ***нулей дзета-функции Римана*** и усилить оценку остаточного члена в законе распределения простых чисел.



ДОКЛАДЫ

АКАДЕМИИ НАУК СССР

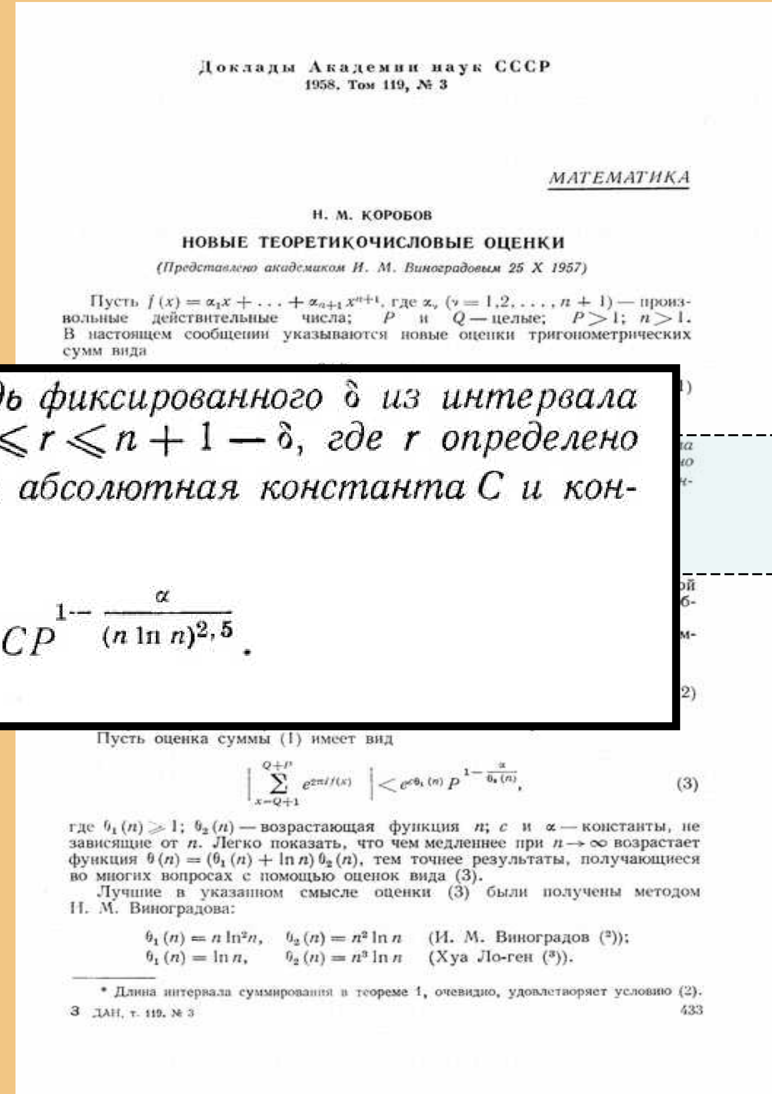
1958

Том 119, № 3

Using these estimates he made more exact limits for zeros of riemannian zeta function and improved the estimate of remainder term in law of prime numbers distribution.

Эти оценки позволили ему существенно уточнить границу ***нулей дзета-функции Римана*** и усилить оценку остаточного члена в законе распределения просты...

Usi...
more e...
riemannian zeta function and improved the estimate of remainder term in law of prime numbers distribution.



Доклады Академии наук СССР
1958, Том 119, № 3

МАТЕМАТИКА

Н. М. КОРОБОВ

НОВЫЕ ТЕОРЕТИКОЧИСЛОВЫЕ ОЦЕНКИ

(Представлено академиком И. М. Виноградовым 25 X 1957)

Пусть $f(x) = \alpha_1 x + \ldots + \alpha_{n+1} x^{n+1}$, где α_ν $(\nu = 1, 2, \ldots, n+1)$ — произвольные действительные числа; P и Q — целые; $P > 1$; $n > 1$. В настоящем сообщении указываются новые оценки тригонометрических сумм вида

Пусть оценка суммы (1) имеет вид

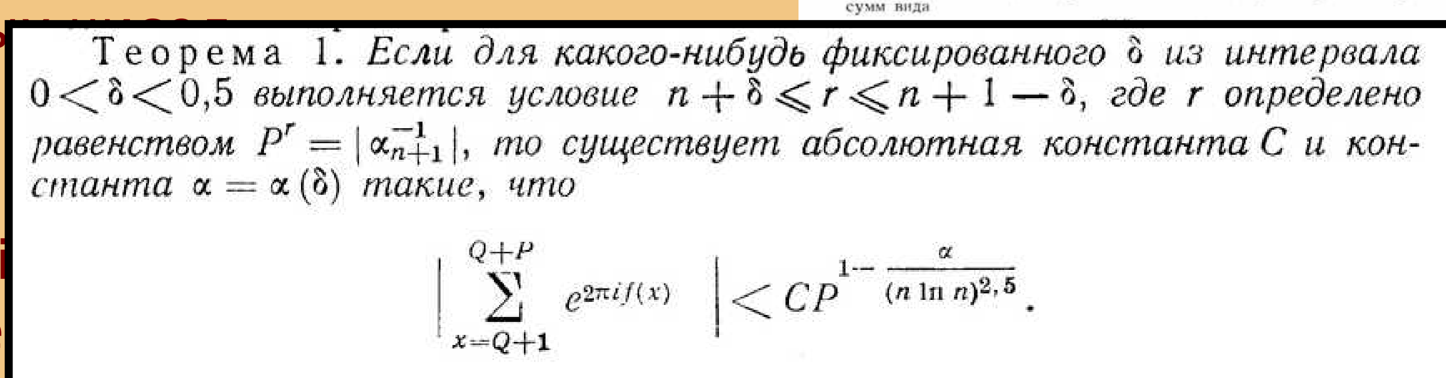
$$\left|\sum_{x=Q+1}^{Q+P} e^{2\pi i f(x)}\right| < e^{c\theta_1(n)} P^{1-\frac{\alpha}{\theta_2(n)}}, \qquad (3)$$

где $\theta_1(n) \geqslant 1$; $\theta_2(n)$ — возрастающая функция n; c и α — константы, не зависящие от n. Легко показать, что чем медленнее при $n \to \infty$ возрастает функция $\theta(n) = (\theta_1(n) + \ln n)\,\theta_2(n)$, тем точнее результаты, получающиеся во многих вопросах с помощью оценок вида (3).

Лучшие в указанном смысле оценки (3) были получены методом И. М. Виноградова:

$\theta_1(n) = n \ln^2 n$, $\theta_2(n) = n^2 \ln n$ (И. М. Виноградов (²));
$\theta_1(n) = \ln n$, $\theta_2(n) = n^3 \ln n$ (Хуа Ло-ген (³)).

* Длина интервала суммирования в теореме 1, очевидно, удовлетворяет условию (2).



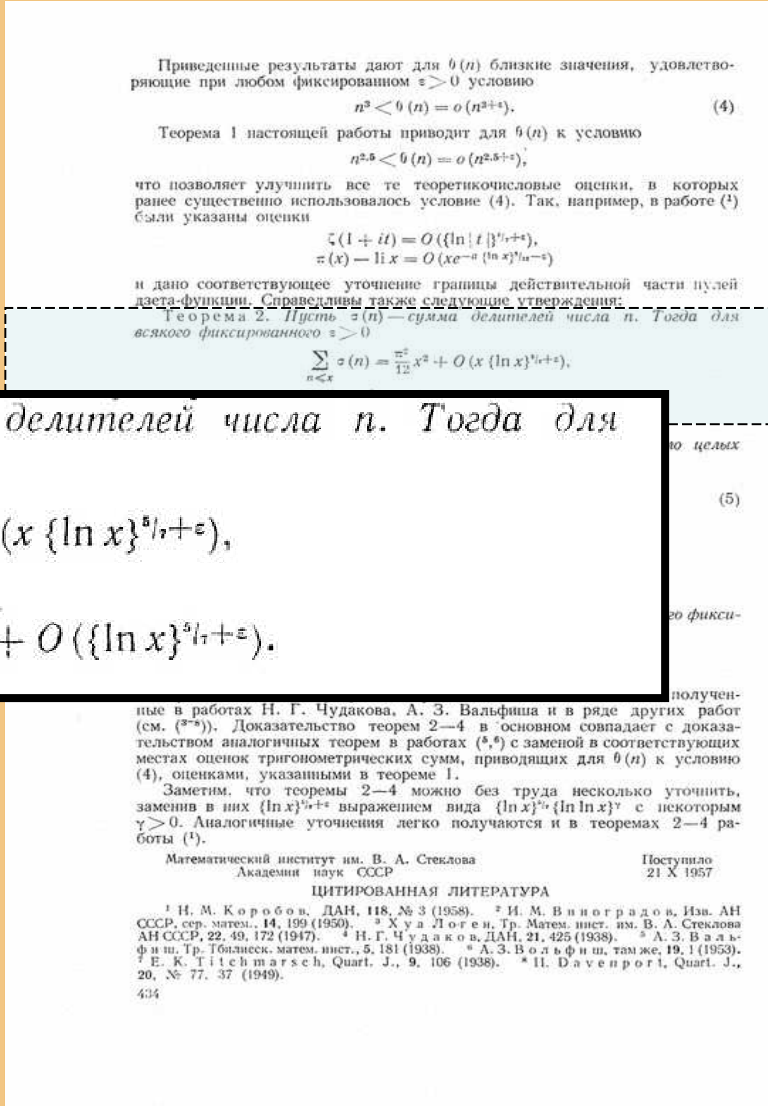
Теорема 1. *Если для какого-нибудь фиксированного δ из интервала $0 < \delta < 0{,}5$ выполняется условие $n + \delta \leqslant r \leqslant n + 1 - \delta$, где r определено равенством $P^r = |\alpha_{n+1}^{-1}|$, то существует абсолютная константа C и константа $\alpha = \alpha(\delta)$ такие, что*

$$\left|\sum_{x=Q+1}^{Q+P} e^{2\pi i f(x)}\right| < C P^{1-\frac{\alpha}{(n \ln n)^{2,5}}}.$$

Эти оценки позволили ему существенно уточнить границу ***нулей дзета-функции Римана*** и усилить оценку остаточного члена в законе распределения простых чисел.

Usi…

more e… riemannian zeta function and improved the estimate of remainder term in law of prime numbers distribution.



Приведенные результаты дают для $\theta(n)$ близкие значения, удовлетворяющие при любом фиксированном $\varepsilon > 0$ условию

$$n^3 < \theta(n) = o(n^{3+\varepsilon}). \qquad (4)$$

Теорема 1 настоящей работы приводит для $\theta(n)$ к условию

$$n^{2,5} < \theta(n) = o(n^{2,5+\varepsilon}),$$

что позволяет улучшить все те теоретикочисловые оценки, в которых ранее существенно использовалось условие (4). Так, например, в работе (1) были указаны оценки

$$\zeta(1+it) = O(\{\ln|t|\}^{5/7+\varepsilon}),$$
$$\pi(x) - \mathrm{li}\, x = O(xe^{-a\{\ln x\}^{7/12}-\varepsilon})$$

и дано соответствующее уточнение границы действительной части нулей дзета-функции. Справедливы также следующие утверждения:

Теорема 2. *Пусть $\sigma(n)$ — сумма делителей числа n. Тогда для всякого фиксированного $\varepsilon > 0$*

$$\sum_{n \leqslant x} \sigma(n) = \frac{\pi^2}{12}x^2 + O(x\{\ln x\}^{5/7+\varepsilon}),$$

… получен-ные в работах Н. Г. Чудакова, А. З. Вальфиша и в ряде других работ (см. (3-8)). Доказательство теорем 2—4 в основном совпадает с доказательством аналогичных теорем в работах (5,6) с заменой в соответствующих местах оценок тригонометрических сумм, приводящих для $\theta(n)$ к условию (4), оценками, указанными в теореме 1.

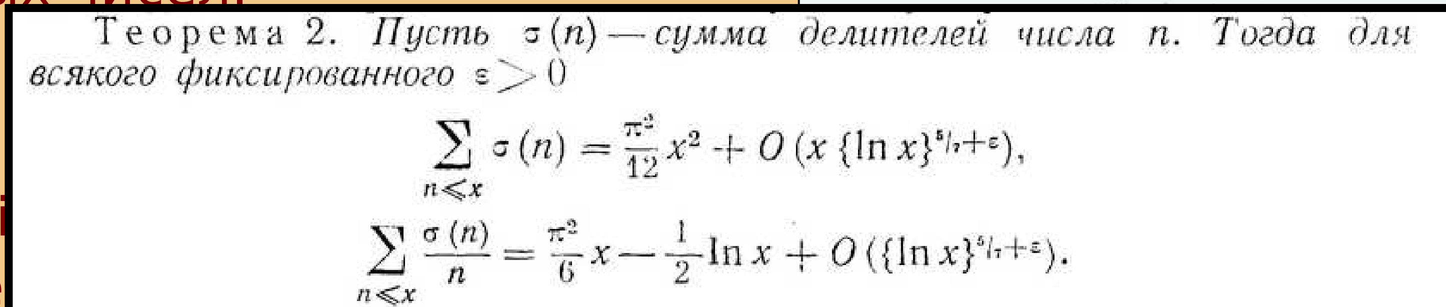
Заметим, что теоремы 2—4 можно без труда несколько уточнить, заменив в них $\{\ln x\}^{5/7+\varepsilon}$ выражением вида $\{\ln x\}^{5/7}\{\ln\ln x\}^{\gamma}$ с некоторым $\gamma > 0$. Аналогичные уточнения легко получаются и в теоремах 2—4 работы (1).

Математический институт им. В. А. Стеклова
Академии наук СССР

Поступило
21 X 1957

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Н. М. Коробов, ДАН, 118, № 3 (1958). [2] И. М. Виноградов, Изв. АН СССР, сер. матем., 14, 199 (1950). [3] Хуа Ло-ген, Тр. Матем. инст. им. В. А. Стеклова АН СССР, 22, 49, 172 (1947). [4] Н. Г. Чудаков, ДАН, 21, 425 (1938). [5] А. З. Вальфиш, Тр. Тбилисск. матем. инст., 5, 181 (1938). [6] А. З. Вольфиш, там же, 19, 1 (1953). [7] E. K. Titchmarsch, Quart. J., 9, 106 (1938). [8] H. Davenport, Quart. J., 20, № 77, 37 (1949).



Теорема 2. *Пусть $\sigma(n)$ — сумма делителей числа n. Тогда для всякого фиксированного $\varepsilon > 0$*

$$\sum_{n \leqslant x} \sigma(n) = \frac{\pi^2}{12}x^2 + O(x\{\ln x\}^{5/7+\varepsilon}),$$

$$\sum_{n \leqslant x} \frac{\sigma(n)}{n} = \frac{\pi^2}{6}x - \frac{1}{2}\ln x + O(\{\ln x\}^{5/7+\varepsilon}).$$

Эти оценки позволили ему существенно уточнить границу ***нулей дзета-функции Римана*** и усилить оценку остаточного члена в законе распределения прост

Usi

more e

rieman

improved the estimate of remainder term in law of prime numbers distribution.

Приведенные результаты дают для $\vartheta(n)$ близкие значения, удовлетворяющие при любом фиксированном $\varepsilon > 0$ условию

$$n^3 < \vartheta(n) = o(n^{3+\varepsilon}). \qquad (4)$$

Теорема 1 настоящей работы приводит для $\vartheta(n)$ к условию

$$n^{2.5} < \vartheta(n) = o(n^{2.5+\varepsilon}),$$

что позволяет улучшить все те теоретикочисловые оценки, в которых ранее существенно использовалось условие (4). Так, например, в работе (1) были указаны оценки

$$\zeta(1+it) = O(\{\ln|t|\}^{2/3+\varepsilon}),$$
$$\pi(x) - \mathrm{li}\, x = O(xe^{-a\{\ln x\}^{3/5}-\varepsilon})$$

и дано соответствующее уточнение границы действительной части нулей дзета-функции. Справедливы также следующие утверждения:

Теорема 3. *Пусть $a_{ij} = a_{ji}$ — целые числа и $A(x)$ — число целых точек, лежащих внутри эллипсоида*

$$\sum_{i,j=1}^{4} a_{ij}x_i x_j \leqslant x. \qquad (5)$$

Тогда для всякого фиксированного $\varepsilon > 0$

$$A(x) = \frac{\pi^2}{2\sqrt{D}}x^2 + O(x\{\ln x\}^{5/7+\varepsilon}),$$

где D — детерминант положительной квадратичной формы (5).

Заметим, что теоремы 2—4 можно без труда несколько уточнить, заменив в них $\{\ln x\}^{5/7+\varepsilon}$ выражением вида $\{\ln x\}^{5/7}\{\ln\ln x\}^{\gamma}$ с некоторым $\gamma > 0$. Аналогичные уточнения легко получаются и в теоремах 2—4 работы (1).

Математический институт им. В. А. Стеклова
Академии наук СССР

Поступило
21 X 1957

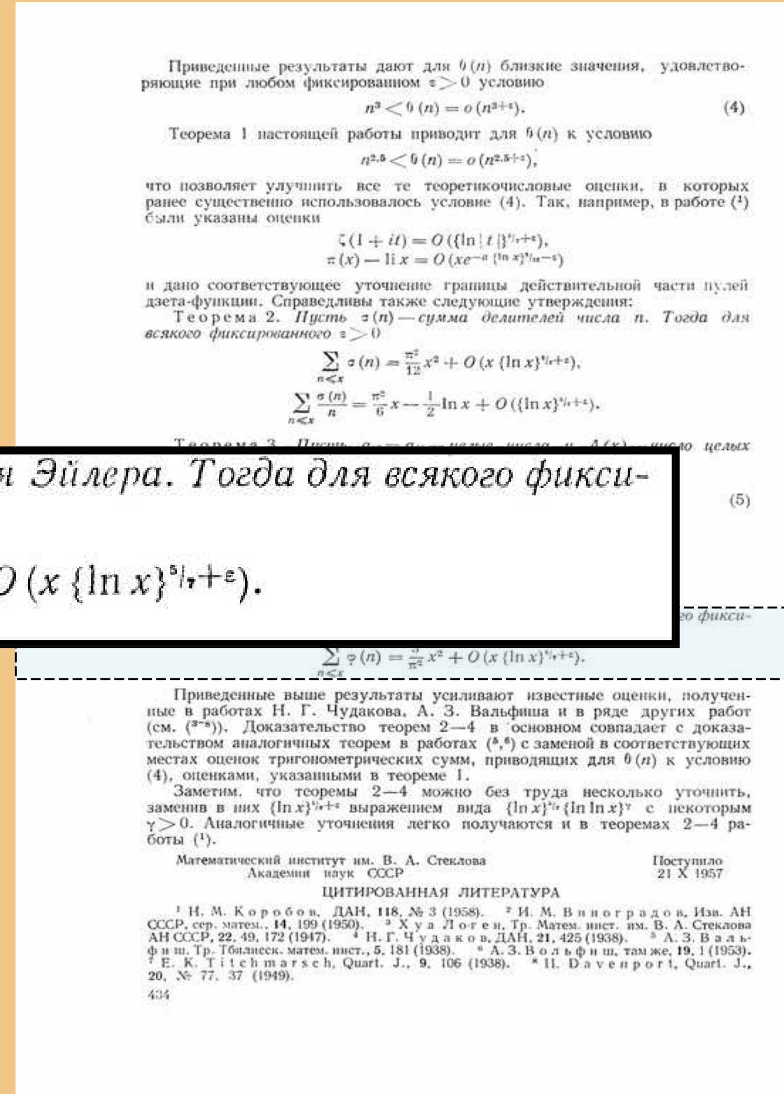
ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Н. М. Коробов, ДАН, 118, № 3 (1958). [2] И. М. Виноградов, Изв. АН СССР, сер. матем., 14, 199 (1950). [3] Хуа Ло-ген, Тр. Матем. инст. им. В. А. Стеклова АН СССР, 22, 49, 172 (1947). [4] Н. Г. Чудаков, ДАН, 21, 425 (1938). [5] А. З. Вальфиш, Тр. Тбилисск. матем. инст., 5, 181 (1938). [6] А. З. Вольфиш, там же, 19, 1 (1953). [7] E. K. Titchmarsch, Quart. J., 9, 106 (1938). [8] H. Davenport, Quart. J., 20, № 77, 37 (1949).

Эти оценки позволили ему существенно уточнить границу ***нулей дзета-функции Римана*** и усилить оценку остаточного члена в законе распределения простых чисел.

Usi

more exact limits for zeros of riemannian zeta function and improved the estimate of remainder term in law of prime numbers distribution.



Приведенные результаты дают для $\theta(n)$ близкие значения, удовлетворяющие при любом фиксированном $\varepsilon > 0$ условию

$$n^3 < \theta(n) = o(n^{3+\varepsilon}). \quad (4)$$

Теорема 1 настоящей работы приводит для $\theta(n)$ к условию

$$n^{2,5} < \theta(n) = o(n^{2,5+\varepsilon}),$$

что позволяет улучшить все те теоретикочисловые оценки, в которых ранее существенно использовалось условие (4). Так, например, в работе (1) были указаны оценки

$$\zeta(1+it) = O(\{\ln|t|\}^{5/7+\varepsilon}),$$
$$\pi(x) - \mathrm{li}\, x = O(xe^{-a\{\ln x\}^{7/12-\varepsilon}})$$

и дано соответствующее уточнение границы действительной части нулей дзета-функции. Справедливы также следующие утверждения:

Теорема 2. *Пусть $\sigma(n)$ — сумма делителей числа n. Тогда для всякого фиксированного $\varepsilon > 0$*

$$\sum_{n \leqslant x} \sigma(n) = \frac{\pi^2}{12}x^2 + O(x\{\ln x\}^{5/7+\varepsilon}),$$

$$\sum_{n \leqslant x} \frac{\sigma(n)}{n} = \frac{\pi^2}{6}x - \frac{1}{2}\ln x + O(\{\ln x\}^{5/7+\varepsilon}).$$

(5)

$$\sum_{n \leqslant x} \varphi(n) = \frac{3}{\pi^2}x^2 + O(x\{\ln x\}^{5/7+\varepsilon}).$$

Приведенные выше результаты усиливают известные оценки, полученные в работах Н. Г. Чудакова, А. З. Вальфиша и в ряде других работ (см. (3-8)). Доказательство теорем 2—4 в основном совпадает с доказательством аналогичных теорем в работах (5,6) с заменой в соответствующих местах оценок тригонометрических сумм, приводящих для $\theta(n)$ к условию (4), оценками, указанными в теореме 1.

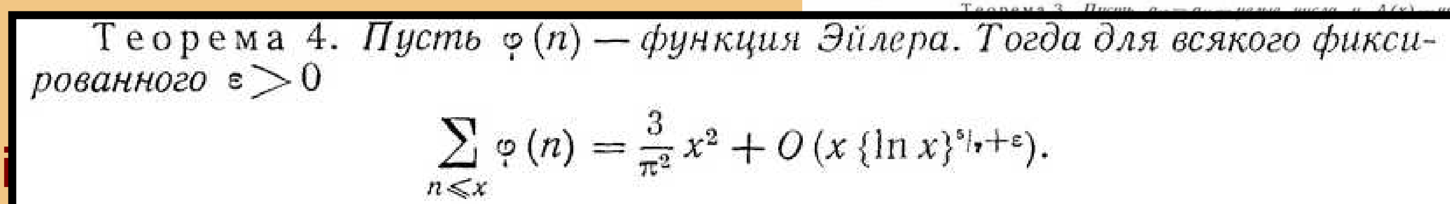
Заметим, что теоремы 2—4 можно без труда несколько уточнить, заменив в них $\{\ln x\}^{5/7+\varepsilon}$ выражением вида $\{\ln x\}^{5/7}\{\ln\ln x\}^{\gamma}$ с некоторым $\gamma > 0$. Аналогичные уточнения легко получаются и в теоремах 2—4 работы (1).

Математический институт им. В. А. Стеклова
Академии наук СССР

Поступило
21 X 1957

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1 Н. М. Коробов, ДАН, 118, № 3 (1958). 2 И. М. Виноградов, Изв. АН СССР, сер. матем., 14, 199 (1950). 3 Хуа Ло-ген, Тр. Матем. инст. им. В. А. Стеклова АН СССР, 22, 49, 172 (1947). 4 Н. Г. Чудаков, ДАН, 21, 425 (1938). 5 А. З. Вальфиш, Тр. Тбилисск. матем. инст., 5, 181 (1938). 6 А. З. Вольфиш, там же, 19, 1 (1953). 7 E. K. Titchmarsch, Quart. J., 9, 106 (1938). 8 H. Davenport, Quart. J., 20, № 77, 37 (1949).



Теорема 4. *Пусть $\varphi(n)$ — функция Эйлера. Тогда для всякого фиксированного $\varepsilon > 0$*

$$\sum_{n \leqslant x} \varphi(n) = \frac{3}{\pi^2}x^2 + O(x\{\ln x\}^{5/7+\varepsilon}).$$

Эти оценки позволили ему существенно уточнить границу ***нулей дзета-функции Римана*** и усилить оценку остаточного члена в законе распределения простых чисел.

Using these estimates he made more exact limits for zeros of riemannian zeta function and improved the estimate of remainder term in law of prime numbers distribution.

Отдельный оттиск

УСПЕХИ
МАТЕМАТИЧЕСКИХ
НАУК

ТОМ
XIII
ВЫПУСК
2 (80)

1958

Эти оценки позволили ему существенно уточнить границу ***нулей дзета-функции Римана*** и усилить оценку остаточного члена в законе распределения простых чисел.

Using these estimates he made more exact limits for zeros of riemannian zeta function and improved the estimate of remainder term in law of prime numbers distribution.

2. Н. М. Коробов «О границе нулей функции Римана $\zeta(s)$».

Летом 1957 г. автором были получены новые результаты о границе нулей функции $\zeta(s)$ и об оценке разности

$$\pi(x)-\int_2^x \frac{du}{\ln u}, \tag{1}$$

где $\pi(x)$ — число простых чисел, не превосходящих x. Сообщение о полученных теоремах в августе 1957 г. было представлено в Доклады АН СССР (см. [1]). Настоящий доклад содержит краткое доказательство указанных теорем.

Обычно оценки разности (1) имеют вид

$$\pi(x)-\int_2^x \frac{du}{\ln u}=O\left(xe^{-a\ln^\beta x\,(\ln\ln x)^\gamma}\right), \tag{2}$$

где $\beta>0$ и $a>0$.

Известно, что вопросы о распределении простых чисел тесно связаны с вопросом о границе нулей дзета-функции Римана. В частности, если можно указать $\delta>0$ и δ_1 такие, что функция $\zeta(\sigma+it)$ не равна нулю в области

$$\sigma>1-\frac{A}{\ln^\delta|t|\,(\ln\ln|t|)^{\delta_1}}, \tag{3}$$

где $A>0$ — некоторая константа, то оценка (2) выполняется с $\beta=\frac{1}{1+\delta}$.

В свою очередь вопрос о границе нулей дзета-функции сводится к оценке полиномиальных тригонометрических сумм. Известные оценки тригонометрических сумм имеют вид

$$\left|\sum_{x=1}^{P} e^{2\pi i(\alpha_1 x+\ldots+\alpha_{n+1}x^{n+1})}\right| \leqslant e^{c_1\theta_1(n)}\,P^{1-\frac{1}{c_2\theta_2(n)}},$$

где $\theta_1(n)>0$ и $\theta_2(n)>0$ — некоторые функции, монотонно возрастающие при $n\to\infty$, и где c_1 и c_2 — абсолютные константы.

Нетрудно показать, что если для $P^{n-0,9}<|\alpha_{n+1}|^{-1}<P^{n+0,9}$ при некоторых $B>0$ и $\tau>0$ для всех $n>1$ справедливо неравенство

$$[\theta_1(n)+\ln n]\,\theta_2(n)<Bn^\tau\ln^{\tau_1}n,$$

то $\zeta(\sigma+it)\neq 0$ в области вида (3) с

$$\delta=\frac{\tau}{1+\tau}. \tag{4}$$

Отсюда, пользуясь соотношением между β и δ, получим

$$\beta=\frac{1+\tau}{1+2\tau}. \tag{5}$$

Таким образом, как вопрос о границе нулей дзета-функции, так и вопрос об оценке разности (1) сводится к оценкам тригонометрических сумм.

Очевидно, оценка (2) будет тем лучше, чем быстрее возрастает функция $a\ln^\beta x\,(\ln\ln x)^\gamma$ при $x\to\infty$. Так как рост этой функции больше всего зависит от константы β, то из двух оценок вида (2), получающихся соответственно при β, γ, a и β_1, γ_1, a_1, вторую считают существенно лучше первой, если $\beta_1>\beta$.

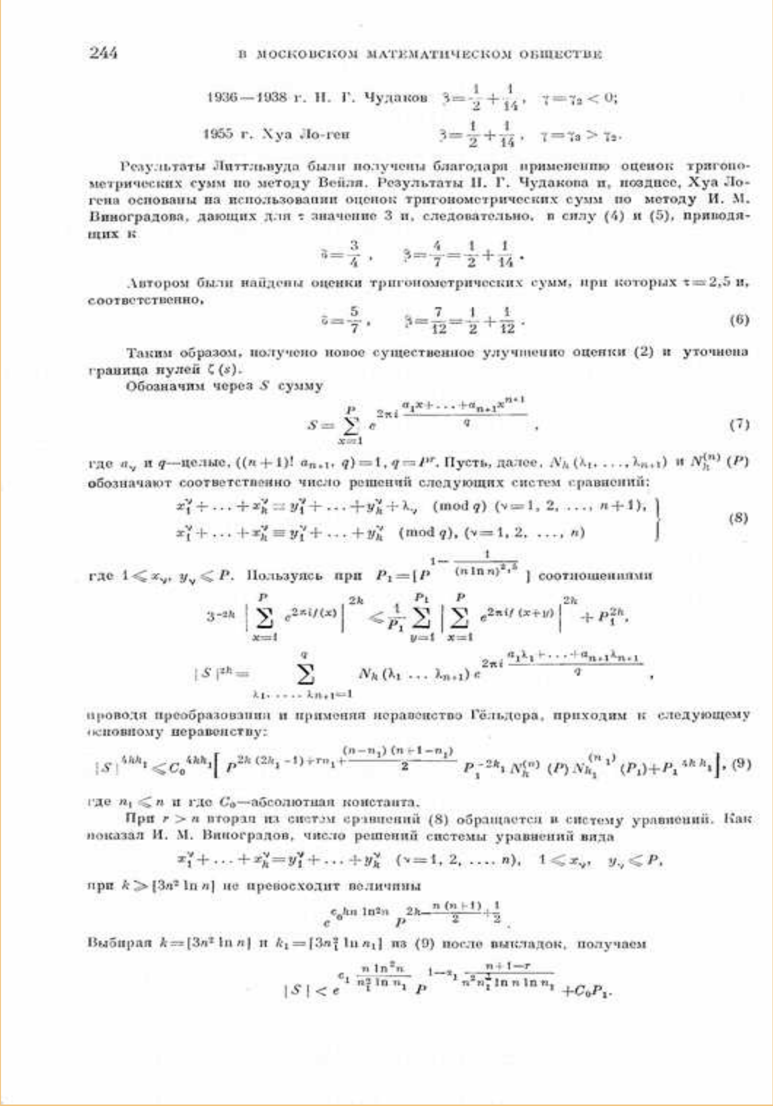
Оценка разности (1) была получена впервые Валле-Пуссеном в 1898 г. Дальнейшее уточнение оценки происходило медленно и до последнего времени только один раз (Н. Г. Чудаковым) было получено существенное усиление результата Валле-Пуссена:

1898 г. Валле-Пуссен $\beta=\frac{1}{2}$, $\gamma=0$;

1924 г. Литтльвуд $\beta=\frac{1}{2}$, $\gamma=\gamma_1>0$;

Эти оценки позволили ему существенно уточнить границу ***нулей дзета-функции Римана*** и усилить оценку остаточного члена в законе распределения простых чисел.

Using these estimates he made more exact limits for zeros of riemannian zeta function and improved the estimate of remainder term in law of prime numbers distribution.



1936—1938 г. Н. Г. Чудаков $\beta=\frac{1}{2}+\frac{1}{14}$, $\gamma=\gamma_2<0$;

1955 г. Хуа Ло-ген $\beta=\frac{1}{2}+\frac{1}{14}$, $\gamma=\gamma_3>\gamma_2$.

Результаты Литтльвуда были получены благодаря применению оценок тригонометрических сумм по методу Вейля. Результаты Н. Г. Чудакова и, позднее, Хуа Ло-гена основаны на использовании оценок тригонометрических сумм по методу И. М. Виноградова, дающих для τ значение 3 и, следовательно, в силу (4) и (5), приводящих к

$$\delta=\frac{3}{4}, \quad \beta=\frac{4}{7}=\frac{1}{2}+\frac{1}{14}.$$

Автором были найдены оценки тригонометрических сумм, при которых $\tau=2,5$ и, соответственно,

$$\delta=\frac{5}{7}, \quad \beta=\frac{7}{12}=\frac{1}{2}+\frac{1}{12}. \tag{6}$$

Таким образом, получено новое существенное улучшение оценки (2) и уточнена граница нулей $\zeta(s)$.

Обозначим через S сумму

$$S=\sum_{x=1}^{P} e^{2\pi i\frac{a_1x+\ldots+a_{n+1}x^{n+1}}{q}}, \tag{7}$$

где a_ν и q—целые, $((n+1)!\,a_{n+1}, q)=1$, $q=P^r$. Пусть, далее, $N_k(\lambda_1, \ldots, \lambda_{n+1})$ и $N_k^{(n)}(P)$ обозначают соответственно число решений следующих систем сравнений:

$$\left.\begin{array}{l} x_1^\nu+\ldots+x_k^\nu\equiv y_1^\nu+\ldots+y_k^\nu+\lambda_\nu \pmod q \ (\nu=1, 2, \ldots, n+1), \\ x_1^\nu+\ldots+x_k^\nu\equiv y_1^\nu+\ldots+y_k^\nu \pmod q, \ (\nu=1, 2, \ldots, n) \end{array}\right\} \tag{8}$$

где $1\leqslant x_\nu, y_\nu\leqslant P$. Пользуясь при $P_1=[P^{1-\frac{1}{(n\ln n)^{2,5}}}]$ соотношениями

$$3^{-2k}\left|\sum_{x=1}^{P} e^{2\pi i f(x)}\right|^{2k}\leqslant\frac{1}{P_1}\sum_{y=1}^{P_1}\left|\sum_{x=1}^{P} e^{2\pi i f(x+y)}\right|^{2k}+P_1^{2k},$$

$$|S|^{2k}=\sum_{\lambda_1, \ldots, \lambda_{n+1}=1}^{q} N_k(\lambda_1 \ldots \lambda_{n+1})\, e^{2\pi i\frac{a_1\lambda_1+\ldots+a_{n+1}\lambda_{n+1}}{q}},$$

проводя преобразования и применяя неравенство Гёльдера, приходим к следующему основному неравенству:

$$|S|^{4kk_1}\leqslant C_0^{4kk_1}\left[P^{2k(2k_1-1)+rn_1+\frac{(n-n_1)(n+1-n_1)}{2}}P_1^{-2k_1}N_k^{(n)}(P)\,N_{k_1}^{(n_1)}(P_1)+P_1^{4kk_1}\right], \tag{9}$$

где $n_1\leqslant n$ и где C_0—абсолютная константа.

При $r>n$ вторая из систем сравнений (8) обращается в систему уравнений. Как показал И. М. Виноградов, число решений системы уравнений вида

$$x_1^\nu+\ldots+x_k^\nu=y_1^\nu+\ldots+y_k^\nu \quad (\nu=1, 2, \ldots, n), \quad 1\leqslant x_\nu, \quad y_\nu\leqslant P,$$

при $k\geqslant[3n^2\ln n]$ не превосходит величины

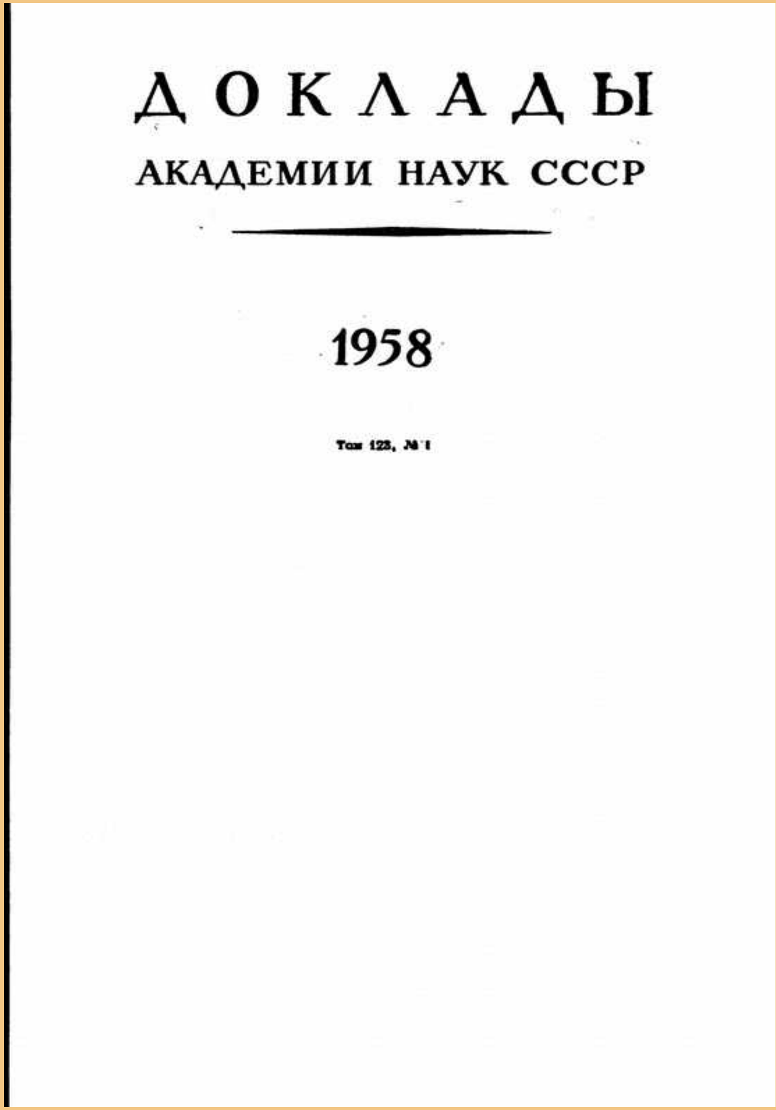
$$e^{c_0kn\ln^2 n}\,P^{2k-\frac{n(n+1)}{2}+\frac{1}{2}}.$$

Выбирая $k=[3n^2\ln n]$ и $k_1=[3n_1^2\ln n_1]$ из (9) после выкладок, получаем

$$|S|<e^{c_1\frac{n\ln^2 n}{n_1^2\ln n_1}}\,P^{1-x_1\frac{n+1-r}{n^2n_1^2\ln n\ln n_1}}+C_0P_1.$$

Эти оценки позволили ему существенно уточнить границу ***нулей дзета-функции Римана*** и усилить оценку остаточного члена в законе распределения простых чисел.

Using these estimates he made more exact limits for zeros of riemannian zeta function and improved the estimate of remainder term in law of prime numbers distribution.


ДОКЛАДЫ

АКАДЕМИИ НАУК СССР

1958

Том 123, № 1

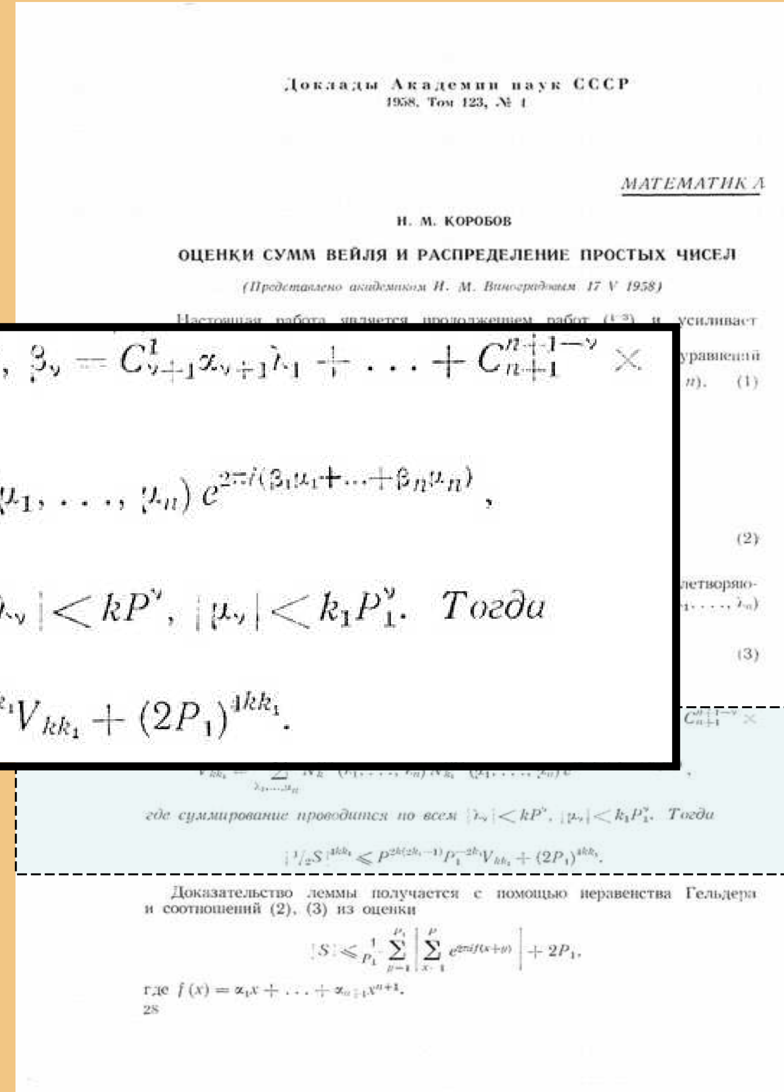
Эти оценки позволили ему существенно уточнить границу ***нулей дзета-функции Римана*** и усилить оценку остаточного члена в законе распределения прост

Usi

more e

rieman

improved the estimate of remainder term in law of prime numbers distribution.



Доклады Академии наук СССР
1958. Том 123, № 1

МАТЕМАТИКА

Н. М. КОРОБОВ

ОЦЕНКИ СУММ ВЕЙЛЯ И РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ПРОСТЫХ ЧИСЕЛ

(Представлено академиком И. М. Виноградовым 17 V 1958)

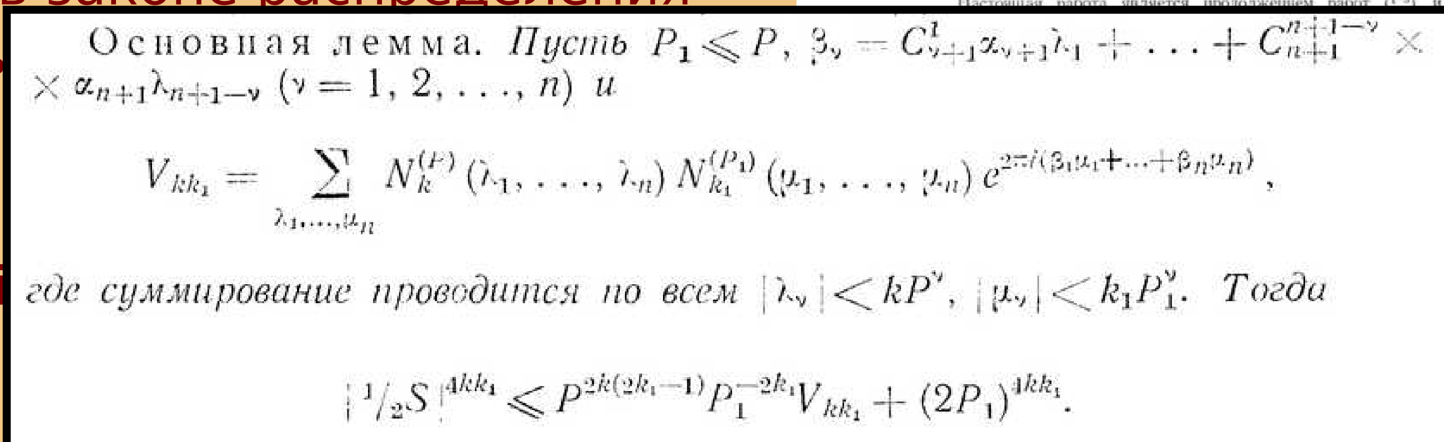
Настоящая работа является продолжением работ (1, 2) и усиливает

Доказательство леммы получается с помощью неравенства Гельдера и соотношений (2), (3) из оценки

$$|S| \leqslant \frac{1}{P_1}\sum_{y=1}^{P_1}\left|\sum_{x=1}^{P} e^{2\pi i f(x+y)}\right| + 2P_1,$$

где $f(x) = \alpha_1 x + \ldots + \alpha_{n+1}x^{n+1}$.

28



Основная лемма. *Пусть* $P_1 \leqslant P$, $\beta_\nu = C^1_{\nu+1}\alpha_{\nu+1}\lambda_1 + \ldots + C^{n+1-\nu}_{n+1} \times \alpha_{n+1}\lambda_{n+1-\nu}$ $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$ *и*

$$V_{kk_1} = \sum_{\lambda_1,\ldots,\mu_n} N_k^{(P)}(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)\, N_{k_1}^{(P_1)}(\mu_1,\ldots,\mu_n)\, e^{2\pi i(\beta_1\mu_1+\ldots+\beta_n\mu_n)},$$

где суммирование проводится по всем $|\lambda_\nu| < kP^\nu$, $|\mu_\nu| < k_1P_1^\nu$. *Тогда*

$$|{}^1/_2 S|^{4kk_1} \leqslant P^{2k(2k_1-1)}P_1^{-2k_1}V_{kk_1} + (2P_1)^{4kk_1}.$$

Эти оценки позволили ему существенно уточнить границу ***нулей дзета-функции Римана*** и усилить оценку остаточного члена в законе распределения прост…

Usi… more e… riemannian zeta function and improved the estimate of remainder term in law of prime numbers distribution.

Теорема 1. *Пусть* $\alpha_{n+1} = \frac{a}{q} + \frac{\theta}{q^2}$, $(a, q) = 1$, $|\theta| < 1$, $q = P^r$; *r принадлежит интервалу* $\sqrt{n}\ln n < r < n - \sqrt{n}\ln n$. *Тогда существуют абсолютные константы* C *и* $\gamma > 0$ *такие, что*

$$\left|\sum_{x=1}^{P} e^{2\pi i(\alpha_1 x + \ldots + \alpha_{n+1}x^{n+1})}\right| \leqslant CP^{1-\frac{\gamma}{n^2\ln n}}.$$

Доказательство. Запишем V_{kk_1} в виде

$$V_{kk_1} = \sum_{\mu_1,\ldots,\mu_n} N_{k_1}^{(P_1)}(\mu_1,\ldots,\mu_n) \sum_{\lambda_1,\ldots,\lambda_n} N_k^{(P)}(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)\, e^{2\pi i(\beta_1\mu_1+\ldots+\beta_n\mu_n)}. \quad (4)$$

Согласно определению величин β_ν выражение $\beta_1\mu_1 + \ldots + \beta_n\mu_n$ является линейной однородной функцией величин $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ и, следовательно, в силу (2) внутренняя сумма в (4) неотрицательна. Но тогда, полагая $N_{k,n}^{(P)} = \max_{\lambda_1,\ldots,\lambda_n} N_k^{(P)}(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$, получим *

где $\alpha = \frac{a}{q} + \frac{\theta}{q^2}$, $(a, q) = 1$, $|\theta| < 1$ и C_0 — абсолютная константа, получим,

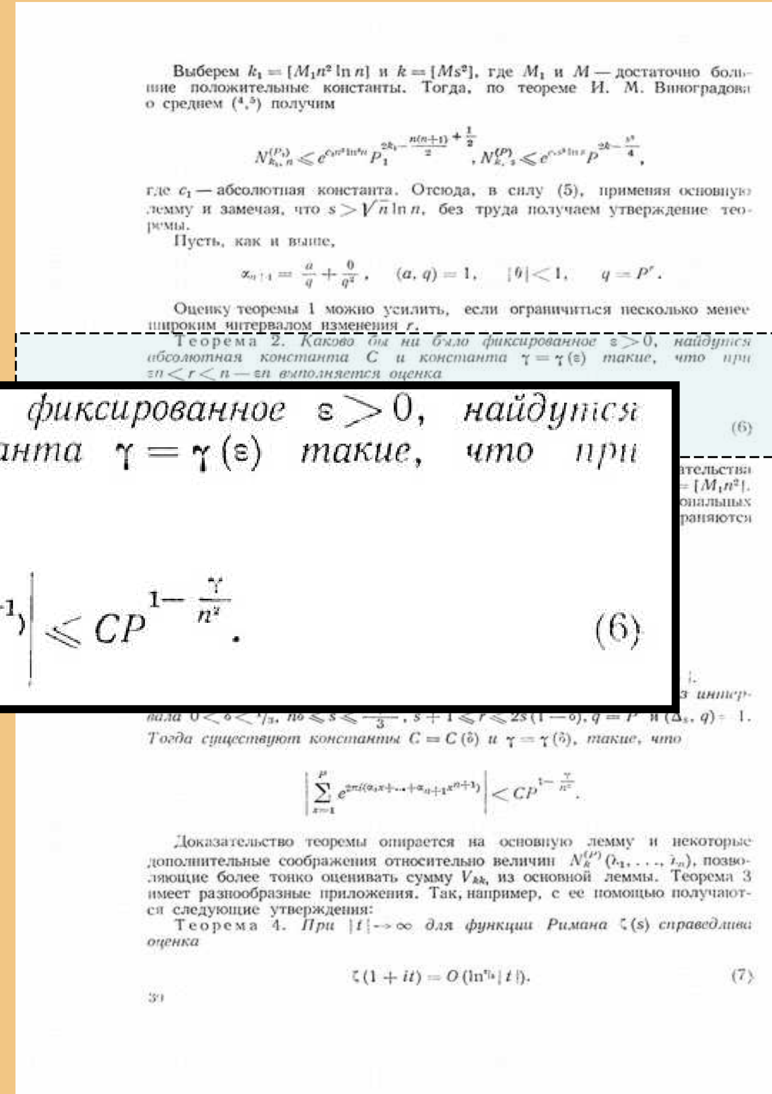
$$V_k' \leqslant N_{k,s}^{(P)} \sum_{\lambda_1,\ldots,\lambda_s} \min\left(2k_1P_1^n, \frac{1}{(\beta_n)}\right)\ldots\min\left(2k_1P_1^{n-s+1}, \frac{1}{(\beta_{n-s+1})}\right) \leqslant$$

$$\leqslant (2k_1C_0)^s 2^{sn} P_1^{\frac{n(n+1)}{2} - \frac{(n-s)(n-s+1)}{2}} N_{k,s}^{(P)};$$

$$V_{kk_1} \leqslant (2k_1C_0)^n 2^{sn} P_1^{\frac{n(n+1)}{2}} N_{k_1,n}^{(P_1)} N_{k,s}^{(P)}. \quad (5)$$

* Через (β) обозначено расстояние от β до ближайшего целого числа.

Эти оценки позволили ему существенно уточнить границу ***нулей дзета-функции Римана*** и усилить оценку остаточного члена в законе распределения простых чисел.



Выберем $k_1 = [M_1 n^2 \ln n]$ и $k = [Ms^2]$, где M_1 и M — достаточно большие положительные константы. Тогда, по теореме И. М. Виноградова о среднем ([4],[5]) получим

$$N_{k_1, n}^{(P_1)} \leqslant e^{c_1 n^2 \ln^2 n} P_1^{2k_1 - \frac{n(n+1)}{2} + \frac{1}{2}}, \; N_{k, s}^{(P)} \leqslant e^{c_1 s^2 \ln s} P^{2k - \frac{s^2}{4}},$$

где c_1 — абсолютная константа. Отсюда, в силу (5), применяя основную лемму и замечая, что $s > \sqrt{n} \ln n$, без труда получаем утверждение теоремы.

Пусть, как и выше,

$$\alpha_{n+1} = \frac{a}{q} + \frac{\theta}{q^2}, \quad (a, q) = 1, \quad |\theta| < 1, \quad q = P^r.$$

Оценку теоремы 1 можно усилить, если ограничиться несколько менее широким интервалом изменения r.

Теорема 2. *Каково бы ни было фиксированное $\varepsilon > 0$, найдутся абсолютная константа C и константа $\gamma = \gamma(\varepsilon)$ такие, что при $\varepsilon n < r < n - \varepsilon n$ выполняется оценка*

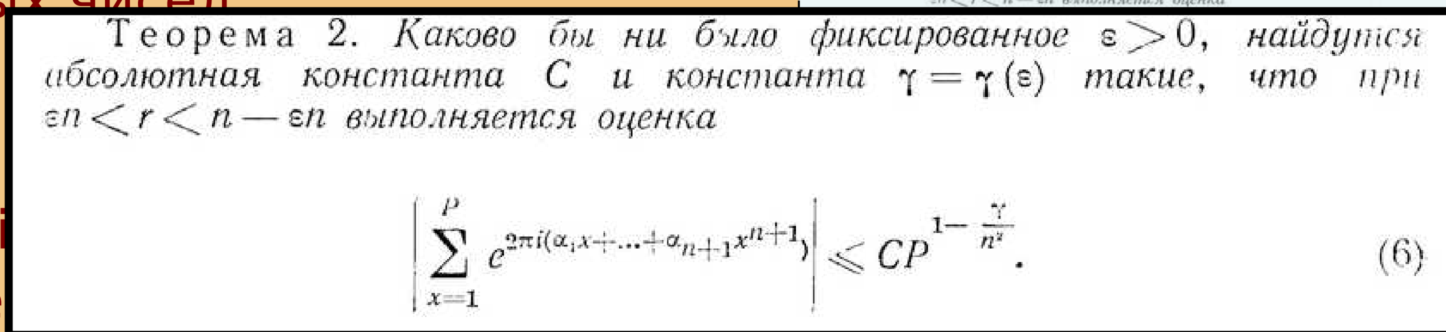
вала $0 < \delta < 1/3$, ... $s + 1 \leqslant r \leqslant 2s(1 - \delta)$, $q = P^r$ и $(\Delta_s, q) = 1$. Тогда существуют константы $C = C(\delta)$ и $\gamma = \gamma(\delta)$, такие, что

$$\left| \sum_{x=1}^{P} e^{2\pi i(\alpha_1 x + \ldots + \alpha_{n+1} x^{n+1})} \right| < CP^{1 - \frac{\gamma}{n^2}}.$$

Доказательство теоремы опирается на основную лемму и некоторые дополнительные соображения относительно величин $N_k^{(P)}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, позволяющие более тонко оценивать сумму V_{kk}, из основной леммы. Теорема 3 имеет разнообразные приложения. Так, например, с ее помощью получаются следующие утверждения:

Теорема 4. *При $|t| \to \infty$ для функции Римана $\zeta(s)$ справедлива оценка*

$$\zeta(1 + it) = O(\ln^{2/3} |t|). \tag{7}$$



Теорема 2. *Каково бы ни было фиксированное $\varepsilon > 0$, найдутся абсолютная константа C и константа $\gamma = \gamma(\varepsilon)$ такие, что при $\varepsilon n < r < n - \varepsilon n$ выполняется оценка*

$$\left| \sum_{x=1}^{P} e^{2\pi i(\alpha_1 x + \ldots + \alpha_{n+1} x^{n+1})} \right| \leqslant CP^{1 - \frac{\gamma}{n^2}}. \tag{6}$$

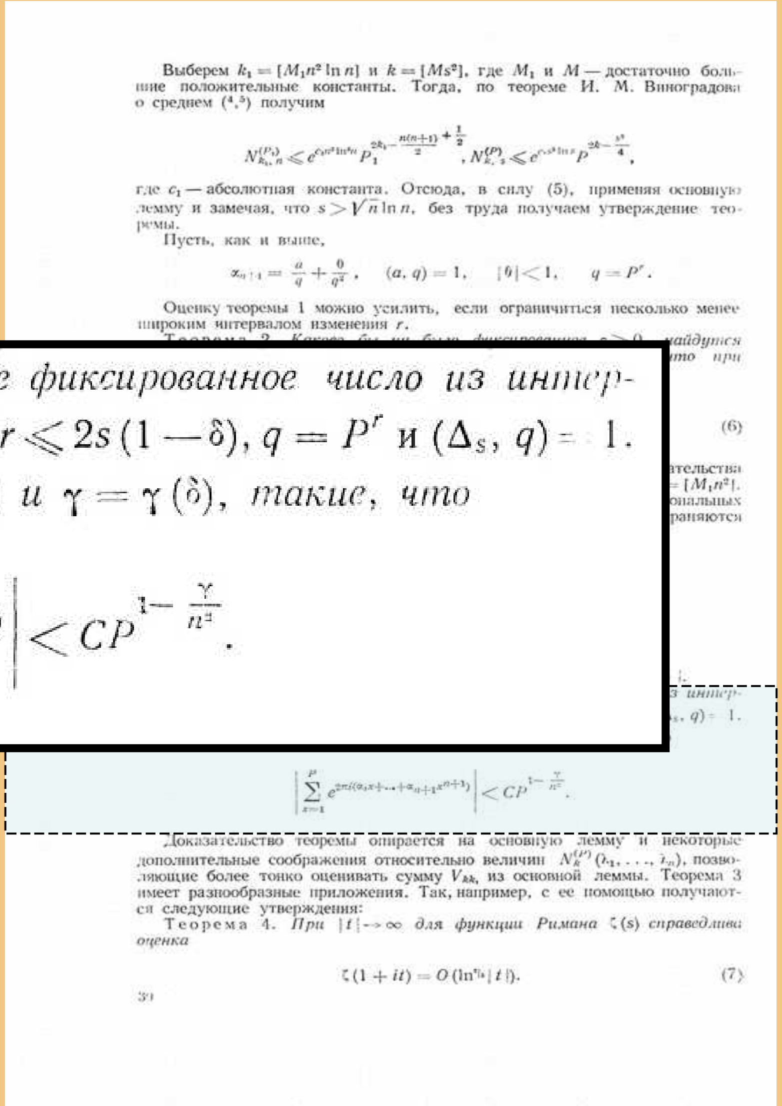
Usi

more e

riemannian zeta function and improved the estimate of remainder term in law of prime numbers distribution.

Эти оценки позволили ему существенно уточнить границу ***нулей дзета-функции Римана*** и усилить оценку остаточного члена в законе распределения просты

Usi
more e
riemannian zeta function and
improved the estimate of remainder term in law of prime numbers distribution.



Выберем $k_1 = [M_1 n^2 \ln n]$ и $k = [Ms^2]$, где M_1 и M — достаточно большие положительные константы. Тогда, по теореме И. М. Виноградова о среднем (4,5) получим

$$N_{k_1, n}^{(P_1)} \leqslant e^{c_1 n^2 \ln^2 n} P_1^{2k_1 - \frac{n(n+1)}{2} + \frac{1}{2}}, \quad N_{k, s}^{(P)} \leqslant e^{c_1 s^2 \ln s} P^{2k - \frac{s^2}{4}},$$

где c_1 — абсолютная константа. Отсюда, в силу (5), применяя основную лемму и замечая, что $s > \sqrt{n} \ln n$, без труда получаем утверждение теоремы.

Пусть, как и выше,

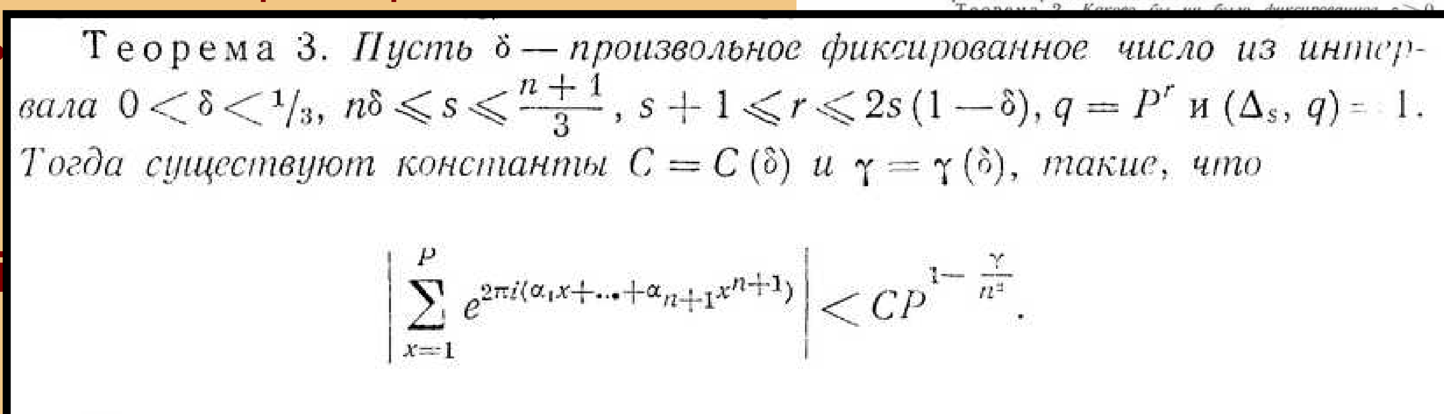
$$\alpha_{n+1} = \frac{a}{q} + \frac{\theta}{q^2}, \quad (a, q) = 1, \quad |\theta| < 1, \quad q = P^r.$$

Оценку теоремы 1 можно усилить, если ограничиться несколько менее широким интервалом изменения r.

Доказательство теоремы опирается на основную лемму и некоторые дополнительные соображения относительно величин $N_k^{(P)}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, позволяющие более тонко оценивать сумму V_{kk}, из основной леммы. Теорема 3 имеет разнообразные приложения. Так, например, с ее помощью получаются следующие утверждения:

Теорема 4. *При $|t| \to \infty$ для функции Римана $\zeta(s)$ справедлива оценка*

$$\zeta(1 + it) = O(\ln^{3/4} |t|). \quad (7)$$



Теорема 3. *Пусть δ — произвольное фиксированное число из интервала $0 < \delta < 1/3$, $n\delta \leqslant s \leqslant \frac{n+1}{3}$, $s + 1 \leqslant r \leqslant 2s(1 - \delta)$, $q = P^r$ и $(\Delta_s, q) = 1$. Тогда существуют константы $C = C(\delta)$ и $\gamma = \gamma(\delta)$, такие, что*

$$\left| \sum_{x=1}^{P} e^{2\pi i(\alpha_1 x + \ldots + \alpha_{n+1} x^{n+1})} \right| < C P^{1 - \frac{\gamma}{n^2}}.$$

Эти оценки позволили ему существенно уточнить границу ***нулей дзета-функции Римана*** и усилить оценку остаточного члена в законе распределения простых чисел.

Теорема 4. *При $|t| \to \infty$ для функции Римана $\zeta(s)$ справедлива оценка*

$$\zeta(1+it) = O(\ln^{2/3}|t|). \quad (7)$$

Usi

more exact limits for zeros of riemannian zeta function and improved the estimate of remainder term in law of prime numbers distribution.

Выберем $k_1 = [M_1 n^2 \ln n]$ и $k = [Ms^2]$, где M_1 и M — достаточно большие положительные константы. Тогда, по теореме И. М. Виноградова о среднем [4,5] получим

$$N_{k_1, n}^{(P_1)} \leqslant e^{c_1 n^2 \ln^2 n} P_1^{2k_1 - \frac{n(n+1)}{2} + \frac{1}{2}}, \quad N_{k, s}^{(P)} \leqslant e^{c_1 s^2 \ln s} P^{2k - \frac{s^2}{4}},$$

где c_1 — абсолютная константа. Отсюда, в силу (5), применяя основную лемму и замечая, что $s > \sqrt{n} \ln n$, без труда получаем утверждение теоремы.

Пусть, как и выше,

$$\alpha_{n+1} = \frac{a}{q} + \frac{\theta}{q^2}, \quad (a, q) = 1, \quad |\theta| < 1, \quad q = P^r.$$

Оценку теоремы 1 можно усилить, если ограничиться несколько менее широким интервалом изменения r.

Теорема 2. *Каково бы ни было фиксированное $\varepsilon > 0$, найдутся абсолютная константа C и константа $\gamma = \gamma(\varepsilon)$ такие, что при $\varepsilon n < r < n - \varepsilon n$ выполняется оценка*

$$\left| \sum_{x=1}^{P} e^{2\pi i(\alpha_1 x + \ldots + \alpha_{n+1} x^{n+1})} \right| \leqslant CP^{1 - \frac{\gamma}{n^2}}. \quad (6)$$

...ательства ... $= [M_1 n^2]$. ...ональных ...раняются

Обозначим через Δ_s определитель s-го порядка $\Delta_s = |C_{s+i+j}^{i} a_{s+i+j}|$.

Теорема 3. *Пусть δ — произвольное фиксированное число из интервала $0 < \delta < 1/3$, $n\delta \leqslant s \leqslant \frac{n+1}{3}$, $s + 1 \leqslant r \leqslant 2s(1-\delta)$, $q = P^r$ и $(\Delta_s, q) = 1$. Тогда существуют константы $C = C(\delta)$ и $\gamma = \gamma(\delta)$, такие, что*

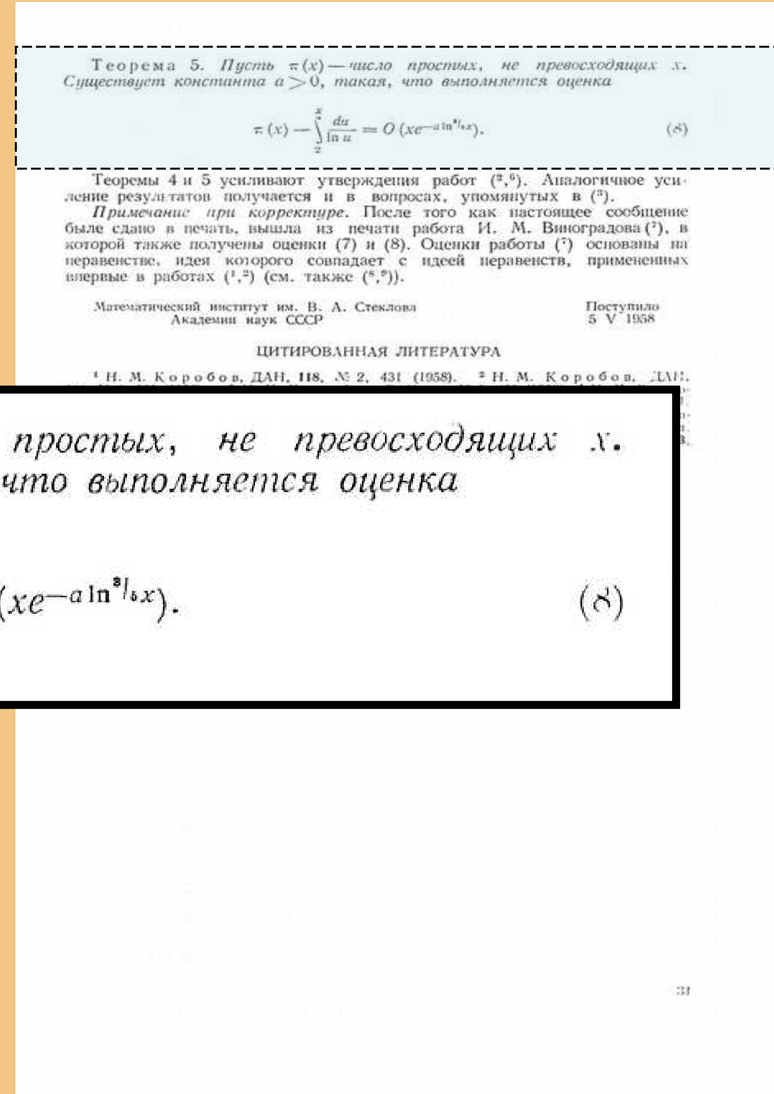
$$\left| \sum_{x=1}^{P} e^{2\pi i(\alpha_1 x + \ldots + \alpha_{n+1} x^{n+1})} \right| < CP^{1 - \frac{\gamma}{n^2}}.$$

Доказательство теоремы опирается на основную лемму и некоторые дополнительные соображения относительно величин $N_k^{(P)}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, позволяющие более тонко оценивать сумму V_{kk} из основной леммы. Теорема 3 имеет разнообразные приложения. Так, например, с ее помощью получаются следующие утверждения:

Теорема 4. *При $|t| \to \infty$ для функции Римана $\zeta(s)$ справедлива оценка*

$$\zeta(1+it) = O(\ln^{2/3}|t|). \quad (7)$$

Эти оценки позволили ему существенно уточнить границу ***нулей дзета-функции Римана*** и усилить оценку остаточного члена в законе распределения простых чисел



Теорема 5. *Пусть* $\pi(x)$ — *число простых, не превосходящих* x. *Существует константа* $a > 0$, *такая, что выполняется оценка*

$$\pi(x) - \int_2^x \frac{du}{\ln u} = O\left(xe^{-a \ln^{3/5} x}\right). \qquad (8)$$

Теоремы 4 и 5 усиливают утверждения работ (2,6). Аналогичное усиление результатов получается и в вопросах, упомянутых в (3).

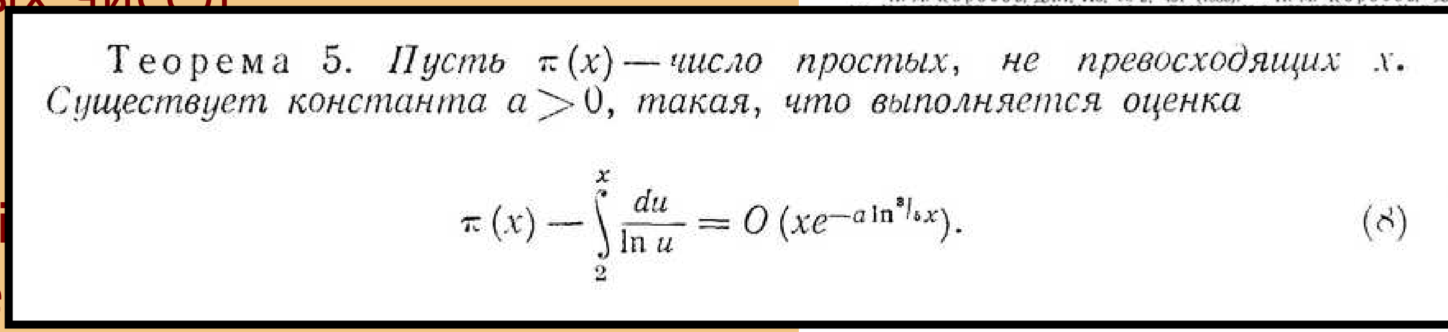
Примечание при корректуре. После того как настоящее сообщение было сдано в печать, вышла из печати работа И. М. Виноградова (7), в которой также получены оценки (7) и (8). Оценки работы (7) основаны на неравенстве, идея которого совпадает с идеей неравенств, примененных впервые в работах (1,2) (см. также (8,9)).

Математический институт им. В. А. Стеклова Академии наук СССР

Поступило 5 V 1958

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Н. М. Коробов, ДАН, 118, № 2, 431 (1958). [2] Н. М. Коробов, ДАН,



Теорема 5. *Пусть* $\pi(x)$ — *число простых, не превосходящих* x. *Существует константа* $a > 0$, *такая, что выполняется оценка*

$$\pi(x) - \int_2^x \frac{du}{\ln u} = O\left(xe^{-a \ln^{3/5} x}\right). \qquad (8)$$

Usi

more e

riemannian zeta function and improved the estimate of remainder term in law of prime numbers distribution.

Оценку

$$\varsigma(1+it)=O(\ln^{2/3}|t|), \qquad t\to\infty$$

опубликованную Н. М. Коробовым в работе 1958 года, не удалось усилить до сих пор. Эта работа оказала большое влияние на дальнейшее развитие метода тригонометрических сумм.

The estimate

$$\varsigma(1+it)=O(\ln^{2/3}|t|), \qquad t\to\infty$$

published by Korobov in 1958 is not improved until now. This publication influenced on further development of trigonomeric sums method.


Отдельный оттиск

УСПЕХИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

ТОМ XIII ВЫПУСК 4 (82)

1958

Оценку

$$\varsigma(1+it) = O(\ln^{2/3}|t|), \qquad t \to \infty$$

опубликованную Н. М. Коробовым в работе 1958 года, не удалось усилить до сих пор. Эта работа оказал

дальне

тригон

Лемма 1. *Пусть* $f(x) = \alpha_1 x + \ldots + \alpha_{n+1} x^{n+1}$, $S_P = \sum_{x=1}^{P} e^{2\pi i f(x)}$ *и* $P_1 \leqslant P$. *Тогда* $\left(\frac{1}{2}|S_P|\right)^{4kk_1} \leqslant P^{2k(2k_1-1)} P_1^{-2k_1} V_{kk_1} + (2P_1)^{4kk_1}$, *где*

$$V_{kk_1} = \sum_{\lambda_1, \ldots, \mu_n} N_k^{(P)}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) N_{k_1}^{(P_1)}(\mu_1, \ldots, \mu_n) e^{2\pi i(\beta_1\mu_1 + \ldots + \beta_n\mu_n)} \qquad (2)$$

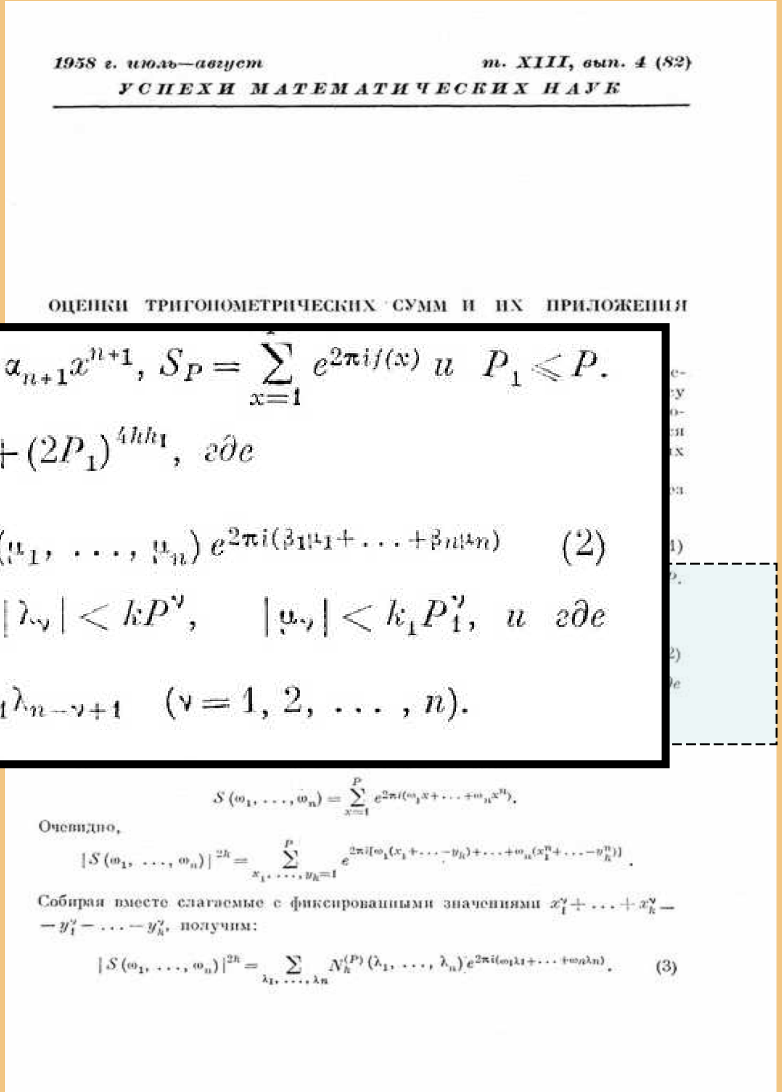
суммирование проводится по всем $|\lambda_\nu| < kP^\nu$, $|\mu_\nu| < k_1 P_1^\nu$, *и где*

$$\beta_\nu = C_{\nu+1}^{1}\alpha_{\nu+1}\lambda_1 + \ldots + C_{n+1}^{n-\nu+1}\alpha_{n+1}\lambda_{n-\nu+1} \quad (\nu = 1, 2, \ldots, n).$$

The

$\varsigma(1+$

published by Korobov in 1958 is not improved until now. This publication influenced on further development of trigonomeric sums method.


1958 г. июль—август *т. XIII, вып. 4 (82)*
УСПЕХИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

ОЦЕНКИ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ СУММ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

$$S(\omega_1, \ldots, \omega_n) = \sum_{x=1}^{P} e^{2\pi i(\omega_1 x + \ldots + \omega_n x^n)}.$$

Очевидно,

$$|S(\omega_1, \ldots, \omega_n)|^{2k} = \sum_{x_1, \ldots, y_k=1}^{P} e^{2\pi i[\omega_1(x_1+\ldots-y_k)+\ldots+\omega_n(x_1^n+\ldots-y_k^n)]}.$$

Собирая вместе слагаемые с фиксированными значениями $x_1^\nu + \ldots + x_k^\nu - y_1^\nu - \ldots - y_k^\nu$, получим:

$$|S(\omega_1, \ldots, \omega_n)|^{2k} = \sum_{\lambda_1, \ldots, \lambda_n} N_k^{(P)}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) e^{2\pi i(\omega_1\lambda_1 + \ldots + \omega_n\lambda_n)}. \qquad (3)$$

Оценку

$$\varsigma(1+it)=O(\ln^{2/3}|t|),\qquad t\to\infty$$

опубликованную Н. М. Коробовым в работе 1958 года, не удалось усилить до сих пор. Эта работа оказала большое влияние на дальне… тригон…

Лемма 2. *Пусть* $0\leqslant s\leqslant m\leqslant n$. *Тогда при любых целых* $\mu_1,\dots,\mu_s,\mu_{m+1},\dots,\mu_n$ *выполняется неравенство*

$$\left|\sum_{\lambda_{s+1},\dots,\lambda_m} N_k^{(P)}(\mu_1,\dots,\mu_s,\lambda_{s+1},\dots,\lambda_m,\mu_{m+1},\dots,\mu_n)\,e^{2\pi i(\alpha_{s+1}\lambda_{s+1}+\dots+\alpha_m\lambda_m)}\right|\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{\lambda_{s+1},\dots,\lambda_m} N_k^{(P)}(0,\dots,0,\lambda_{s+1},\dots,\lambda_m,0,\dots,0)\,e^{2\pi i(\alpha_{s+1}\lambda_{s+1}+\dots+\alpha_m\lambda_m)}.$$

The …

$$\varsigma(1+it)=O(\ln^{2/3}|t|),\qquad t\to\infty$$

published by Korobov in 1958 is not improved until now. This publication influenced on further development of trigonomeric sums method.

Легко видеть, что $S_P=\sum_{x=1}^{P}e^{2\pi i f(x+y)}+2\theta y$ $(|\theta|\leqslant 1)$. Но тогда

$$\left(\tfrac{1}{2}|S_P|\right)^{2k}\leqslant\frac{1}{2P_1}\sum_{y=1}^{P_1}\left|\sum_{x=1}^{P}e^{2\pi i f(x+y)}\right|^{2k}+\frac{1}{2}(2P_1)^{2k}.$$

Далее, полагая $\varphi_\nu(y)=\frac{1}{\nu!}f^{(\nu)}(y)$, в силу (3) получим:

$$f(x+y)=\varphi_0(y)+\dots+\varphi_{n+1}(y)x^{n+1},\ \left|\sum_{x=1}^{P}e^{2\pi i f(x+y)}\right|=|S[\varphi_1(y),\dots,\varphi_{n+1}(y)]|,$$

$$\left(\tfrac{1}{2}|S_P|\right)^{2k}\leqslant\frac{1}{2P_1}\sum_{y=1}^{P_1}\sum_{\lambda_1,\dots,\lambda_{n+1}}N_k^{(P)}(\lambda_1,\dots,\lambda_{n+1})\,e^{2\pi i[\lambda_1\varphi_1(y)+\dots+\lambda_{n+1}\varphi_{n+1}(y)]}+\frac{1}{2}(2P_1)^{2k}.$$

Согласно определению величин $N_k^{(P)}(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$ имеем:

… (4)

… , n). При-

$$=P^{2k(2k_1-1)}P_1^{-2k_1}V_{kk_1}+(2P_1)^{4kk_1}.$$

Лемма 2. *Пусть* $0\leqslant s\leqslant m\leqslant n$. *Тогда при любых целых* $\mu_1,\dots,\mu_s,\mu_{m+1},\dots,\mu_n$ *выполняется неравенство*

$$\left|\sum_{\lambda_{s+1},\dots,\lambda_m} N_k^{(P)}(\mu_1,\dots,\mu_s,\lambda_{s+1},\dots,\lambda_m,\mu_{m+1},\dots,\mu_n)\,e^{2\pi i(\alpha_{s+1}\lambda_{s+1}+\dots+\alpha_m\lambda_m)}\right|\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{\lambda_{s+1},\dots,\lambda_m} N_k^{(P)}(0,\dots,0,\lambda_{s+1},\dots,\lambda_m,0,\dots,0)\,e^{2\pi i(\alpha_{s+1}\lambda_{s+1}+\dots+\alpha_m\lambda_m)}.$$

Доказательство. Обозначим через $T_k^{(P)}(\mu_1,\dots,\mu_s,\alpha_{s+1},\dots,\alpha_m,\mu_{m+1},\dots,\mu_n)$ интеграл

$$\int_0^1\dots\int_0^1|S(\omega_1,\dots,\omega_s,\alpha_{s+1},\dots,\alpha_m,\omega_{m+1},\dots,\omega_n)|^{2k}\times$$

$$\times e^{-2\pi i(\omega_1\mu_1+\dots+\omega_s\mu_s+\omega_{m+1}\mu_{m+1}+\dots+\omega_n\mu_n)}d\omega_1\dots d\omega_s\,d\omega_{m+1}\dots d\omega_n.$$

Оценку

$$\varsigma(1+it) = O(\ln^{2/3}|t|), \qquad t \to \infty$$

опубликованную Н. М. Коробовым в работе 1958 года, не удалось усилить до сих пор. Эта работа оказала большое влияние на дальне…

тригон…

Л е м м а 3. *Каково бы ни было фиксированное $\varepsilon > 0$, найдутся константы $a = a(\varepsilon)$ и $c = c(\varepsilon)$ такие, что при $k = an^2$ для любых $\mu_1, \ldots, \mu_n$ выполняется оценка*

$$N_k^{(P)}(\mu_1, \ldots, \mu_n) \leqslant T_k^{(n)}(0, \ldots, 0) \leqslant e^{cn^3 \ln n} P^{2k - \frac{n(n+1)}{2} + \varepsilon n^2}.$$

The…

$$\varsigma(1+it) = O(\ln^{2/3}|t|), \qquad t \to \infty$$

published by Korobov in 1958 is not improved until now. This publication influenced on further development of trigonomeric sums method.

Очевидно, справедлива оценка

$$|T_k^{(n)}(\mu_1, \ldots, \mu_s, \alpha_{s+1}, \ldots, \alpha_m, \mu_{m+1}, \ldots, \mu_n)| \leqslant \leqslant T_k^{(n)}(0, \ldots, 0, \alpha_{s+1}, \ldots, \alpha_m, 0, \ldots, 0). \qquad (5)$$

Пользуясь равенством (3), получим:

$$T_k^{(n)}(\mu_1, \ldots, \mu_s, \alpha_{s+1}, \ldots, \alpha_m, \mu_{m+1}, \ldots, \mu_n) = \sum_{\lambda_{s+1}, \ldots, \lambda_m} N_k^{(P)}(\mu_1, \ldots, \mu_s, \lambda_{s+1}, \ldots, \lambda_m, \mu_{m+1}, \ldots, \mu_n) e^{2\pi i(\alpha_{s+1}\lambda_{s+1} + \ldots + \alpha_m \lambda_m)}. \qquad (6)$$

Отсюда в силу (5) следует утверждение леммы.

Л е м м а 3. Каково бы ни было фиксированное $\varepsilon > 0$, найдутся константы $a = a(\varepsilon)$ и $c = c(\varepsilon)$ такие, что при $k = an^2$ для любых $\mu_1, \ldots, \mu_n$ выполняется оценка

Рассмотрим многочлен

$$f(x) = \alpha_1 x + \ldots + \alpha_{n+1} x^{n+1},$$

у которого часть коэффициентов рациональна:

$$\alpha_\nu = \frac{a_\nu}{q}\left(\nu = s+2, s+3, \ldots, 3s; \quad 1 \leqslant s \leqslant \frac{n+1}{3}\right). \qquad (8)$$

Обозначим через Δ_s определитель s-го порядка $|C^i_{s+i+j} a_{s+i+j}|$.

Т е о р е м а 1. *Пусть δ — произвольное фиксированное число из интервала $0 < \delta < \frac{1}{3}$, $n\delta \leqslant s \leqslant \frac{n+1}{3}$, $s+1 \leqslant r \leqslant 2s(1-\delta)$, $q = P^r$, $(\Delta_s, q) = 1$. Тогда существуют константы $C = C(\delta)$ и $\gamma = \gamma(\delta)$ такие, что*

$$\left|\sum_{x=1}^{P} e^{2\pi i f(x)}\right| < CP^{1-\frac{\gamma}{n^2}}. \qquad (9)$$

Оценку

$$\varsigma(1+it) = O(\ln^{2/3}|t|), \qquad t \to \infty$$

опубликованную Н. М. Коробовым в работе 1958 года, не удалось усилить до сих пор. Эта работа оказал

дальн

тригон

Th

$$\varsigma(1+it) = O(\ln \quad |t|), \qquad t \to \infty$$

published by Korobov in 1958 is not improved until now. This publication influenced on further development of trigonomeric sums method.

Очевидно, справедлива оценка

$$|T_k^{(n)}(\mu_1, \ldots, \mu_s, \alpha_{s+1}, \ldots, \alpha_m, \mu_{m+1}, \ldots, \mu_n)| \leqslant \leqslant T_k^{(n)}(0, \ldots, 0, \alpha_{s+1}, \ldots, \alpha_m, 0, \ldots, 0). \quad (5)$$

Пользуясь равенством (3), получим:

$$T_k^{(n)}(\mu_1, \ldots, \mu_s, \alpha_{s+1}, \ldots, \alpha_m, \mu_{m+1}, \ldots, \mu_n) = \sum_{\lambda_{s+1}, \ldots, \lambda_m} N_k^{(P)}(\mu_1, \ldots, \mu_s, \lambda_{s+1}, \ldots, \lambda_m, \mu_{m+1}, \ldots, \mu_n)\, e^{2\pi i(\alpha_{s+1}\lambda_{s+1} + \ldots + \alpha_m\lambda_m)}. \quad (6)$$

Отсюда в силу (5) следует утверждение леммы.

Лемма 3. *Каково бы ни было фиксированное* $\varepsilon > 0$, *найдутся константы* $a = a(\varepsilon)$ *и* $c = c(\varepsilon)$ *такие, что при* $k = an^2$ *для любых* $\mu_1, \ldots, \mu_n$

Теорема 1. *Пусть* δ — *произвольное фиксированное число из интервала* $0 < \delta \leqslant \frac{1}{3}$, $n\delta \leqslant s \leqslant \frac{n+1}{3}$, $s+1 \leqslant r \leqslant 2s(1-\delta)$, $q = P^r$, $(\Delta_s, q) = 1$. *Тогда существуют константы* $C = C(\delta)$ *и* $\gamma = \gamma(\delta)$ *такие, что*

$$\left|\sum_{x=1}^{P} e^{2\pi i f(x)}\right| < CP^{1-\frac{\gamma}{n^2}}. \quad (9)$$

у которого часть коэффициентов рациональна:

$$\alpha_\nu = \frac{a_\nu}{q}\left(\nu = s+2, s+3, \ldots, 3s; \quad 1 \leqslant s \leqslant \frac{n+1}{3}\right). \quad (8)$$

Обозначим через Δ_s определитель s-го порядка $|C^{i}_{s+i+j}\, a_{s+i+j}|$.

Теорема 1. *Пусть* δ — *произвольное фиксированное число из интервала* $0 < \delta \leqslant \frac{1}{3}$, $n\delta \leqslant s \leqslant \frac{n+1}{3}$, $s+1 \leqslant r \leqslant 2s(1-\delta)$, $q = P^r$, $(\Delta_s, q) = 1$. *Тогда существуют константы* $C = C(\delta)$ *и* $\gamma = \gamma(\delta)$ *такие, что*

$$\left|\sum_{x=1}^{P} e^{2\pi i f(x)}\right| < CP^{1-\frac{\gamma}{n^2}}. \quad (9)$$

Оценку

$$\zeta(1+it)=O(\ln^{2/3}|t|), \qquad t\to\infty$$

опубликованную Н. М. Коробовым в работе 1958 года, не удалось усилить до сих пор. Эта работа оказала большое влияние на дальнейшее развитие метода тригонометрических сумм.

The estimate

$$\zeta(1+it)=O(\ln^{2/3}|t|), \qquad t\to\infty$$

published by Korobov in 1958 is not improved until now. This publication influenced on further development of trigonometric sums method.

Доказательство. Выделяя в V_{kk_1} суммирование по $\mu_{s+1},\ldots,\mu_{2s}$ (лемма 1) и применяя лемму 2 с $m=2s$, получим[1]:

$$V_{kk_1}=\sum_{\lambda,\mu} N_k^{(P)}(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)\,e^{2\pi i(\beta_1\mu_1+\ldots+\beta_s\mu_s+\beta_{2s+1}\mu_{2s+1}+\ldots+\beta_n\mu_n)}\times$$
$$\times\sum_{\mu_{s+1},\ldots,\mu_{2s}} N_{k_1}^{(P_1)}(\mu_1,\ldots,\mu_n)\,e^{2\pi i(\beta_{s+1}\mu_{s+1}+\ldots+\beta_{2s}\mu_{2s})}\leqslant$$
$$\leqslant\sum_{\lambda,\mu} N_k^{(P)}(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)\Big|\sum_{\mu_{s+1},\ldots,\mu_{2s}} N_{k_1}^{(P_1)}(\mu_1,\ldots,\mu_n)\times$$
$$\times e^{2\pi i(\beta_{s+1}\mu_{s+1}+\ldots+\beta_{2s}\mu_{2s})}\Big|\leqslant\sum_{\lambda_1,\ldots,\mu_n} N_k^{(P)}(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)\times$$
$$\times N_{k_1}^{(P_1)}(0,\ldots,0,\mu_{s+1},\ldots,\mu_{2s},0,\ldots,0)\,e^{2\pi i(\beta_{s+1}\mu_{s+1}+\ldots+\beta_{2s}\mu_{2s})}.$$

Выделяя теперь в правой части суммирование по $\lambda_1,\ldots,\lambda_s$ и определяя β'_ν из равенства

$$\beta_{s+1}\mu_{s+1}+\ldots+\beta_{2s}\mu_{2s}=\beta'_1\lambda_1+\ldots+\beta'_{n-2s+1}\lambda_{n-2s+1}, \tag{10}$$

получим аналогично предыдущему:

$$V_{kk_1}\leqslant\sum_{\lambda_1,\ldots,\lambda_n} N_k^{(P)}(\lambda_1,\ldots,\lambda_s,0,\ldots,0)\times$$
$$\times\sum_{\mu_1,\ldots,\mu_n} N_{k_1}^{(P_1)}(0,\ldots,0,\mu_{s+1},\ldots,\mu_{2s},0,\ldots,0)\,e^{2\pi i(\beta'_1\lambda_1+\ldots+\beta'_s\lambda_s)}, \tag{11}$$

где для $\nu=1,2,\ldots,s$ в силу (8) и (10) $\beta'_\nu=\frac{b_\nu}{q}$,

$$b_\nu=C_{s+1+\nu}^{\nu}a_{s+1+\nu}\mu_{s+1}+\ldots+C_{2s+\nu}^{\nu}a_{2s+\nu}\mu_{2s}.$$

Пусть $P\geqslant 2k$[2]). Тогда, очевидно, $q\geqslant 2kP^s$. Так как внутренняя сумма в (11) неотрицательна (это следует из леммы 2), то, распространяя суммирование по $\lambda_1,\ldots,\lambda_s$ до полных систем вычетов $(\mathrm{mod}\,q)$ и пользуясь леммой 3, получим при $k=k_1$:

$$V_{kk}\leqslant T_k^{(n)}(0,\ldots,0)\sum_{\lambda_{s+1},\ldots,\mu_n} N_k^{(P_1)}(0,\ldots,0,\mu_{s+1},\ldots,\mu_{2s},0,\ldots,0)\times$$
$$\times\sum_{\lambda_1,\ldots,\lambda_s=1}^{q} e^{2\pi i\frac{b_1\lambda_1+\ldots+b_s\lambda_s}{q}}\leqslant(2k)^{2(n-s)}P^{n(n+1)-s(2s+1-r)}\times$$
$$\times[T_k^{(n)}(0,\ldots,0)]^2\cdot H_s(P_1), \tag{12}$$

где $H_s(P_1)$ — число решений системы сравнений

$$C_{s+\nu+1}^{\nu}a_{s+\nu+1}\mu_{s+1}+\ldots+C_{2s+\nu}^{\nu}a_{2s+\nu}\mu_{2s}\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,q)\quad(\nu=1,2,\ldots,s).$$

Определитель этой системы равен Δ_s. Так как по условию $(\Delta_s,q)=1$, то $\mu_j\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,q)$ $(j=s+1,\ldots,2s)$. Отсюда после несложных выкладок получаем при $P_1\leqslant P$ оценку

$$H_s(P_1)\leqslant(2k)^s P^{(2s+1-r)s-\frac{r(2s-r)}{2}}. \tag{13}$$

По лемме 3 при $\varepsilon=\frac{1}{4}\delta^3$, $k=an^2$ и некотором $c_1=c_1(\delta)$ из (12) и (13)

---

[1]) В сумме $\sum\limits_{\lambda,\mu}$ суммирование по всем λ_ν, μ_ν, кроме $\mu_{s+1},\ldots,\mu_{2s}$.

[2]) Случай $P<2k$ тривиален.

Оценку

$$\varsigma(1+it) = \mathrm{O}(\ln^{2/3}|t|), \qquad t \to \infty$$

опубликованную Н. М. Коробовым в работе 1958 года, не удалось усилить до сих пор. Эта работа оказала большое влияние на дальнейшее развитие метода тригон

Теорема 2. *При* $|t| \to \infty$ *справедлива оценка*

$$\zeta(1+it) = O(\ln^{\frac{2}{3}}|t|).$$

The estimate

$$\varsigma(1+it) = \mathrm{O}(\ln^{2/3}|t|), \qquad t \to \infty$$

published by Korobov in 1958 is not improved until now. This publication influenced on further development of trigonomeric sums method.

получим:

$$V_{hk} \leqslant e^{c_1 n^3 \ln n} P^{4k-\frac{1}{2}\delta^3 n^2}.$$

Отсюда в силу леммы 1 при $P_1 = [P^{1-\frac{\delta^3}{8h^2+4h}}]$ следует утверждение теоремы.

Оценки тригонометрических сумм, аналогичные оценке теоремы 1 (с не зависящей от n константой C и «понижающим множителем» $P^{\frac{\gamma}{n^2}}$), были получены мною летом 1957 г. (см. [1]) для многочленов $f(x)$, все коэффициенты которых рациональны. При наличии определенных свойств коэффициентов $f(x)$ оценки вида

$$\left|\sum_{x=1}^{P} e^{2\pi i f(x)}\right| < e^{\theta_1(n)} P^{1-\frac{1}{\theta_2(n)}}$$

позволяют получить оценку $\zeta(1+it) = O(\ln^{\frac{\tau}{\tau+1}}|t|)$, где τ — наименьшее из чисел, удовлетворяющих соотношению $\theta_1(n)\theta_2(n) = O(n^\tau)$. Таким образом, результат работы [1] (где $\tau = 2$) позволял надеяться на получение оценки

$$\zeta(1+it) = O(\ln^{\frac{2}{3}}|t|). \qquad (14)$$

сообщил мне в ноябре 1957 г. В настоящий момент доказательство И. М. Виноградова еще не вышло из печати; метод этого доказательства мне не известен.

Теорема 2. *При* $|t| \to \infty$ *справедлива оценка*

$$\zeta(1+it) = O(\ln^{\frac{2}{3}}|t|).$$

Доказательству теоремы предпошлем три несложные леммы.

Лемма 4. *Пусть* $m > 0$ *и* $Q > 0$ — *целые*, $a = m!\,Q^m$, $0 < t_1 < a$. *На интервале* $at_1^{-1} < q \leqslant at_1^{-1} + m!\,Q$ *найдется* q *взаимно простое с* a *такое, что* $t_1 = \frac{a}{q} + \frac{\theta t_1^2}{Q^{m-1}}$, $|\theta| \leqslant 1$.

Доказательство. Пусть q — любое взаимно простое с $m!\,Q$ из интервала $at_1^{-1} < q < at_1^{-1} + m!\,Q$. Тогда, очевидно, $(a, q) = 1$ и $q = at_1^{-1} + \theta_1 m!\,Q$ $(0 < \theta_1 \leqslant 1)$. Отсюда утверждение леммы получаем с помощью очевидных оценок.

[1]) До работы [2] была известна оценка с показателем $\frac{3}{4} + \varepsilon$, найденная Н. Г. Чудаковым (см. [6]).

Оценку

$$\varsigma(1+it)=\mathrm{O}(\ln^{2/3}|t|), \qquad t\to\infty$$

опубликованную Н. М. Коробовым в работе 1958 года, не удалось усилить до сих пор. Эта работа оказала большое влияние на дальнейшее развитие метода тригон

Лемма 4. *Пусть* $m>0$ *и* $Q>0$ — *целые,* $a=m!\,Q^m$, $0<t_1<a$. *На интервале* $at_1^{-1}<q\leqslant at_1^{-1}+m!\,Q$ *найдется* q *взаимно простое с* a *такое, что* $t_1=\frac{a}{q}+\frac{\theta t_1^2}{Q^{m-1}}$, $|\theta|\leqslant 1$.

The estimate

$$\varsigma(1+it)=\mathrm{O}(\ln^{2/3}|t|), \qquad t\to\infty$$

published by Korobov in 1958 is not improved until now. This publication influenced on further development of trigonomeric sums method.

получим:

$$V_{hk}\leqslant e^{c_1 n^3\ln n}P^{4k-\frac{1}{2}\rho^3 n^2}.$$

Отсюда в силу леммы 1 при $P_1=[P^{1-\frac{\rho^3}{8k^2+4k}}]$ следует утверждение теоремы.

Оценки тригонометрических сумм, аналогичные оценке теоремы 1 (с не зависящей от n константой C и «понижающим множителем» $P^{\frac{\gamma}{n^2}}$), были получены мною летом 1957 г. (см. [1]) для многочленов $f(x)$, все коэффициенты которых рациональны. При наличии определенных свойств коэффициентов $f(x)$ оценки вида

$$\left|\sum_{x=1}^{P}e^{2\pi i f(x)}\right|<e^{\theta_1(n)}P^{1-\frac{1}{\theta_2(n)}}$$

позволяют получить оценку $\zeta(1+it)=O(\ln^{\frac{\tau}{\tau+1}}|t|)$, где τ — наименьшее из чисел, удовлетворяющих соотношению $\theta_1(n)\theta_2(n)=O(n^\tau)$. Таким образом, результат работы [1] (где $\tau=2$) позволял надеяться на получение оценки

...

П. М. Виноградова еще не вышло из печати; метод этого доказательства мне не известен.

Теорема 2. *При* $|t|\to\infty$ *справедлива оценка*

$$\zeta(1+it)=O(\ln^{\frac{2}{3}}|t|).$$

Доказательству теоремы предпошлем три несложные леммы.

Лемма 4. *Пусть* $m>0$ *и* $Q>0$ — *целые,* $a=m!\,Q^m$, $0<t_1<a$. *На интервале* $at_1^{-1}<q\leqslant at_1^{-1}+m!\,Q$ *найдется* q *взаимно простое с* a *такое, что* $t_1=\frac{a}{q}+\frac{\theta t_1^2}{Q^{m-1}}$, $|\theta|\leqslant 1$.

Доказательство. Пусть q — любое взаимно простое с $m!\,Q$ из интервала $at_1^{-1}<q<at_1^{-1}+m!\,Q$. Тогда, очевидно, $(a,q)=1$ и $q=at_1^{-1}+\theta_1 m!\,Q\ (0<\theta_1\leqslant 1)$. Отсюда утверждение леммы получаем с помощью очевидных оценок.

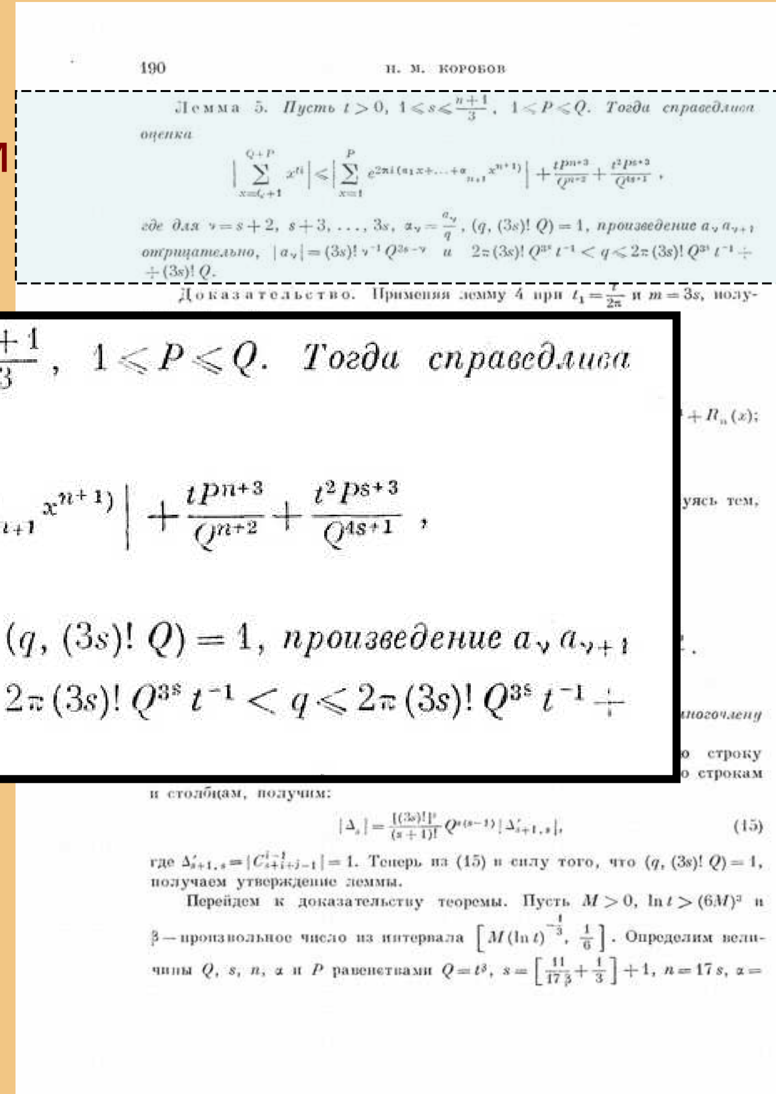
---

[1]) До работы [2] была известна оценка с показателем $\frac{3}{4}+\varepsilon$, найденная Н. Г. Чудаковым (см. [6]).

Оценку

$$\varsigma(1+it)=O(\ln^{2/3}|t|), \qquad t\to\infty$$

опубликованную Н. М. Коробовым в работе 1958 года, не удалось усилить до сих пор. Эта работа оказал... дальн... тригон...



190 Н. М. КОРОБОВ

Лемма 5. *Пусть* $t>0$, $1\leqslant s\leqslant\frac{n+1}{3}$, $1<P\leqslant Q$. *Тогда справедлива оценка*

$$\left|\sum_{x=Q+1}^{Q+P} x^{ti}\right| \leqslant \left|\sum_{x=1}^{P} e^{2\pi i(\alpha_1 x+\ldots+\alpha_{n+1}x^{n+1})}\right| + \frac{tP^{n+3}}{Q^{n+2}} + \frac{t^2P^{s+3}}{Q^{4s+1}},$$

где для $\nu=s+2,\ s+3,\ \ldots,\ 3s$, $\alpha_\nu=\frac{a_\nu}{q}$, $(q,(3s)!\,Q)=1$, *произведение* $a_\nu a_{\nu+1}$ *отрицательно*, $|a_\nu|=(3s)!\,\nu^{-1}Q^{3s-\nu}$ *и* $2\pi(3s)!\,Q^{3s}t^{-1}<q\leqslant 2\pi(3s)!\,Q^{3s}t^{-1}+(3s)!\,Q$.

Доказательство. Применяя лемму 4 при $t_1=\frac{t}{2\pi}$ и $m=3s$, полу-

... $+R_n(x)$;

... уясь тем,

... .

... многочлену

... о строку

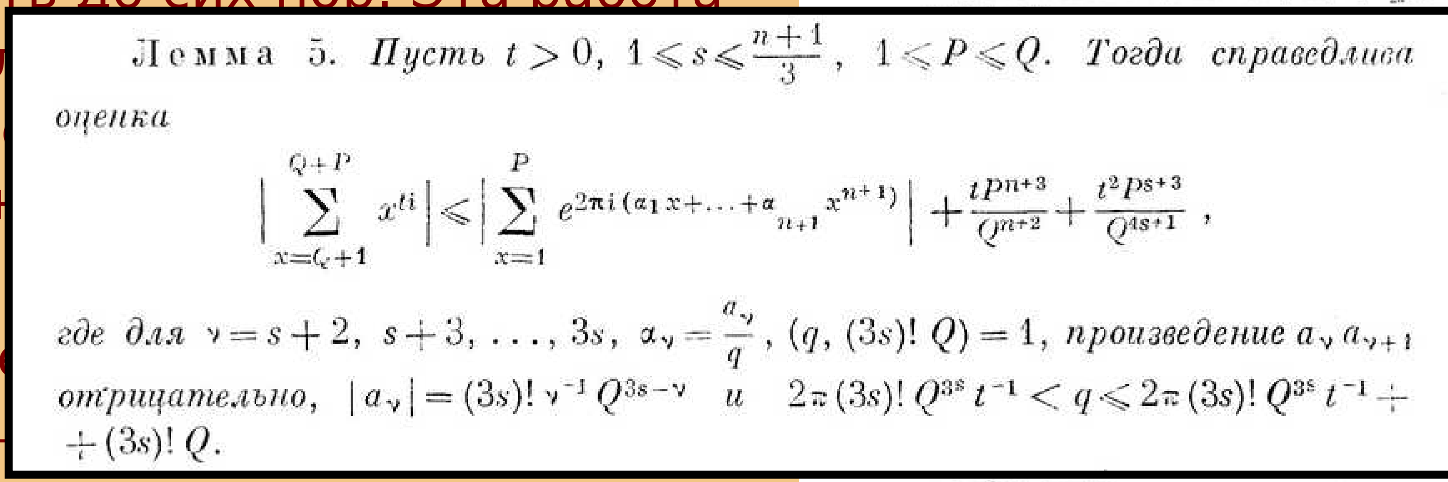
... о строкам

и столбцам, получим:

$$|\Delta_s|=\frac{[(3s)!]^s}{(s+1)!}Q^{s(s-1)}|\Delta'_{s+1,s}|, \tag{15}$$

где $\Delta'_{s+1,s}=|C^{i-1}_{s+i+j-1}|=1$. Теперь из (15) в силу того, что $(q,(3s)!\,Q)=1$, получаем утверждение леммы.

Перейдем к доказательству теоремы. Пусть $M>0$, $\ln t>(6M)^3$ и β — произвольное число из интервала $\left[M(\ln t)^{-\frac{1}{3}},\ \frac{1}{6}\right]$. Определим величины Q, s, n, α и P равенствами $Q=t^3$, $s=\left[\frac{11}{17\beta}+\frac{1}{3}\right]+1$, $n=17s$, $\alpha=$



Лемма 5. *Пусть* $t>0$, $1\leqslant s\leqslant\frac{n+1}{3}$, $1<P\leqslant Q$. *Тогда справедлива оценка*

$$\left|\sum_{x=Q+1}^{Q+P} x^{ti}\right| \leqslant \left|\sum_{x=1}^{P} e^{2\pi i(\alpha_1 x+\ldots+\alpha_{n+1}x^{n+1})}\right| + \frac{tP^{n+3}}{Q^{n+2}} + \frac{t^2P^{s+3}}{Q^{4s+1}},$$

где для $\nu=s+2,\ s+3,\ \ldots,\ 3s$, $\alpha_\nu=\frac{a_\nu}{q}$, $(q,(3s)!\,Q)=1$, *произведение* $a_\nu a_{\nu+1}$ *отрицательно*, $|a_\nu|=(3s)!\,\nu^{-1}Q^{3s-\nu}$ *и* $2\pi(3s)!\,Q^{3s}t^{-1}<q\leqslant 2\pi(3s)!\,Q^{3s}t^{-1}+(3s)!\,Q$.

The...

$\varsigma(1+$...

published by Korobov in 1958 is not improved until now. This publication influenced on further development of trigonomeric sums method.

Оценку

$$\varsigma(1+it)=\mathrm{O}(\ln^{2/3}|t|), \qquad t\to\infty$$

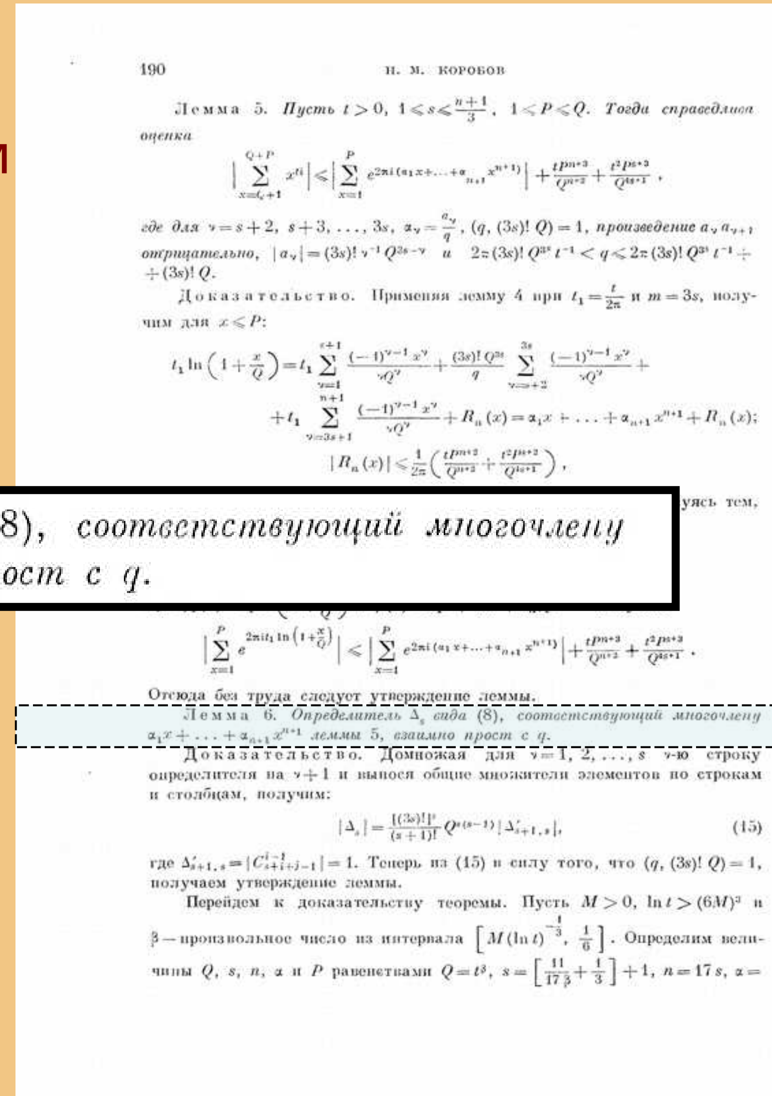
опубликованную Н. М. Коробовым в работе 1958 года, не удалось усилить до сих пор. Эта работа оказала большое влияние на дальнейшее развитие метода тригон

Лемма 6. *Определитель Δ_s вида (8), соответствующий многочлену $\alpha_1 x+\ldots+\alpha_{n+1}x^{n+1}$ леммы 5, взаимно прост с q.*

The estimate

$$\varsigma(1+it)=\mathrm{O}(\ln^{2/3}|t|), \qquad t\to\infty$$

published by Korobov in 1958 is not improved until now. This publication influenced on further development of trigonomeric sums method.



Лемма 5. *Пусть $t>0$, $1\leqslant s\leqslant \frac{n+1}{3}$, $1<P\leqslant Q$. Тогда справедлива оценка*

$$\left|\sum_{x=Q+1}^{Q+P} x^{it}\right|\leqslant\left|\sum_{x=1}^{P} e^{2\pi i(\alpha_1 x+\ldots+\alpha_{n+1}x^{n+1})}\right|+\frac{tP^{n+3}}{Q^{n+2}}+\frac{t^2P^{s+3}}{Q^{4s+1}},$$

где для $\nu=s+2,\ s+3,\ \ldots,\ 3s$, $\alpha_\nu=\frac{a_\nu}{q}$, $(q,(3s)!\,Q)=1$, произведение $a_\nu a_{\nu+1}$ отрицательно, $|a_\nu|=(3s)!\,\nu^{-1}Q^{3s-\nu}$ и $2\pi(3s)!\,Q^{3s}t^{-1}<q\leqslant 2\pi(3s)!\,Q^{3s}t^{-1}+(3s)!\,Q$.

Доказательство. Применяя лемму 4 при $t_1=\frac{t}{2\pi}$ и $m=3s$, получим для $x\leqslant P$:

$$t_1\ln\left(1+\frac{x}{Q}\right)=t_1\sum_{\nu=1}^{s+1}\frac{(-1)^{\nu-1}x^\nu}{\nu Q^\nu}+\frac{(3s)!\,Q^{3s}}{q}\sum_{\nu=s+2}^{3s}\frac{(-1)^{\nu-1}x^\nu}{\nu Q^\nu}+$$

$$+t_1\sum_{\nu=3s+1}^{n+1}\frac{(-1)^{\nu-1}x^\nu}{\nu Q^\nu}+R_n(x)=\alpha_1 x+\ldots+\alpha_{n+1}x^{n+1}+R_n(x);$$

$$|R_n(x)|\leqslant\frac{1}{2\pi}\left(\frac{tP^{n+2}}{Q^{n+2}}+\frac{t^2P^{s+2}}{Q^{4s+1}}\right),$$

...уясь тем,

$$\left|\sum_{x=1}^{P} e^{2\pi i t_1\ln\left(1+\frac{x}{Q}\right)}\right|\leqslant\left|\sum_{x=1}^{P} e^{2\pi i(\alpha_1 x+\ldots+\alpha_{n+1}x^{n+1})}\right|+\frac{tP^{n+3}}{Q^{n+2}}+\frac{t^2P^{s+3}}{Q^{4s+1}}.$$

Отсюда без труда следует утверждение леммы.

Лемма 6. *Определитель Δ_s вида (8), соответствующий многочлену $\alpha_1 x+\ldots+\alpha_{n+1}x^{n+1}$ леммы 5, взаимно прост с q.*

Доказательство. Домножая для $\nu=1,2,\ldots,s$ ν-ю строку определителя на $\nu+1$ и вынося общие множители элементов по строкам и столбцам, получим:

$$|\Delta_s|=\frac{[(3s)!]^s}{(s+1)!}Q^{s(s-1)}|\Delta'_{s+1,s}|, \tag{15}$$

где $\Delta'_{s+1,s}=|C^{i-1}_{s+i+j-1}|=1$. Теперь из (15) в силу того, что $(q,(3s)!\,Q)=1$, получаем утверждение леммы.

Перейдем к доказательству теоремы. Пусть $M>0$, $\ln t>(6M)^3$ и β — произвольное число из интервала $\left[M(\ln t)^{-\frac{1}{3}},\ \frac{1}{6}\right]$. Определим величины Q, s, n, α и P равенствами $Q=t^3$, $s=\left[\frac{11}{17\beta}+\frac{1}{3}\right]+1$, $n=17s$, $\alpha=$

Оценку

$$\zeta(1+it) = O(\ln^{2/3}|t|), \qquad t \to \infty$$

опубликованную Н. М. Коробовым в работе 1958 года, не удалось усилить до сих пор. Эта работа оказала большое влияние на дальнейшее развитие метода тригонометрических сумм.

The estimate

$$\zeta(1+it) = O(\ln^{2/3}|t|), \qquad t \to \infty$$

published by Korobov in 1958 is not improved until now. This publication influenced on further development of trigonomeric sums method.

$=\beta-\frac{1}{n}$, $P=[t^{\alpha}]$. Легко проверить, что выполняются соотношения

$$\left.\begin{aligned} &\beta(n+2)-\alpha(n+2)-1=\frac{2}{n}, \quad \beta(4s+1)-\alpha(s+2)-2>\frac{2}{n},\\ &0{,}8(2\alpha s)\leqslant 3\beta s-1\leqslant 0{,}992(2\alpha s), \quad t^{\frac{2}{n}}>P^{\frac{1}{7}}. \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

Пользуясь леммой 6 и соотношениями (16), убеждаемся, что тригонометрическая сумма в лемме 5 удовлетворяет условиям теоремы 1. После несложных выкладок для любого Q' из интервала $Q\leqslant Q'<2Q$, получаем:

$$\left|\sum_{x=Q'+1}^{Q'+P} x^{it}\right| \leqslant C_0 P^{1-\gamma_0\beta^2}, \tag{17}$$

где C_0 и γ_0 — абсолютные константы. Далее, применяя преобразование Абеля в силу (17), получим:

$$\left|\sum_{x=Q+1}^{2Q} x^{-(1+it)}\right| \leqslant C_1 Q^{-\gamma_1\beta^2}, \tag{18}$$

где $C_1>0$ и $\gamma_1>0$ — абсолютные константы, которые легко вычислить.

Пусть величины Q_ν и β_ν определены равенствами $Q_0=[e^{M(\ln t)^{\frac{2}{3}}}]+1$, $Q_\nu=2^\nu Q_0$, $t^{\beta_\nu}=Q_\nu$ $(\nu=0,1,\ldots)$. Тогда, определяя m из условия $\frac{1}{2}t^{\frac{1}{6}}\leqslant Q_m<t^{\frac{1}{6}}$, получим:

$$\left|\sum_{x=Q_0+1}^{Q_m} x^{-(1+it)}\right| \leqslant C_1\sum_{\nu=0}^{m-1} Q_\nu^{-\gamma_1\beta_\nu^2} = C_1\sum_{\nu=0}^{m-1} t^{-\gamma_1\beta_\nu^3} =$$

$$= O\Big(\sum_{\nu<M(\ln t)^{\frac{2}{3}}} + \sum_{\nu>M(\ln t)^{\frac{2}{3}}}\Big) = O(\ln^{\frac{2}{3}} t).$$

Отсюда в силу определения Q_0 и Q_m обычным путем (см., например, [7]) следует утверждение теоремы 2.

Без труда получаем также, что при некоторой константе $A>0$ в области $\sigma>1-\frac{A}{(\ln|t|)^{\frac{2}{3}}}$ функция $\zeta(\sigma+it)$ не обращается в нуль. Отсюда следует (см., например, [8]), что при некоторой константе $c>0$ выполняется оценка

$$\pi(x)-\int_2^x\frac{du}{\ln u}=O(xe^{-c\ln^{\frac{3}{5}}x}).$$

Пусть $\sigma(n)$ — сумма делителей числа n. Пользуясь теоремой 1 для любого фиксированного $\varepsilon>0$, можно получить равенство

$$\sum_{n\leqslant x}\sigma(n)=\frac{\pi^2}{12}x^2+O(x(\ln x)^{\frac{2}{3}+\varepsilon}).$$

Оценку

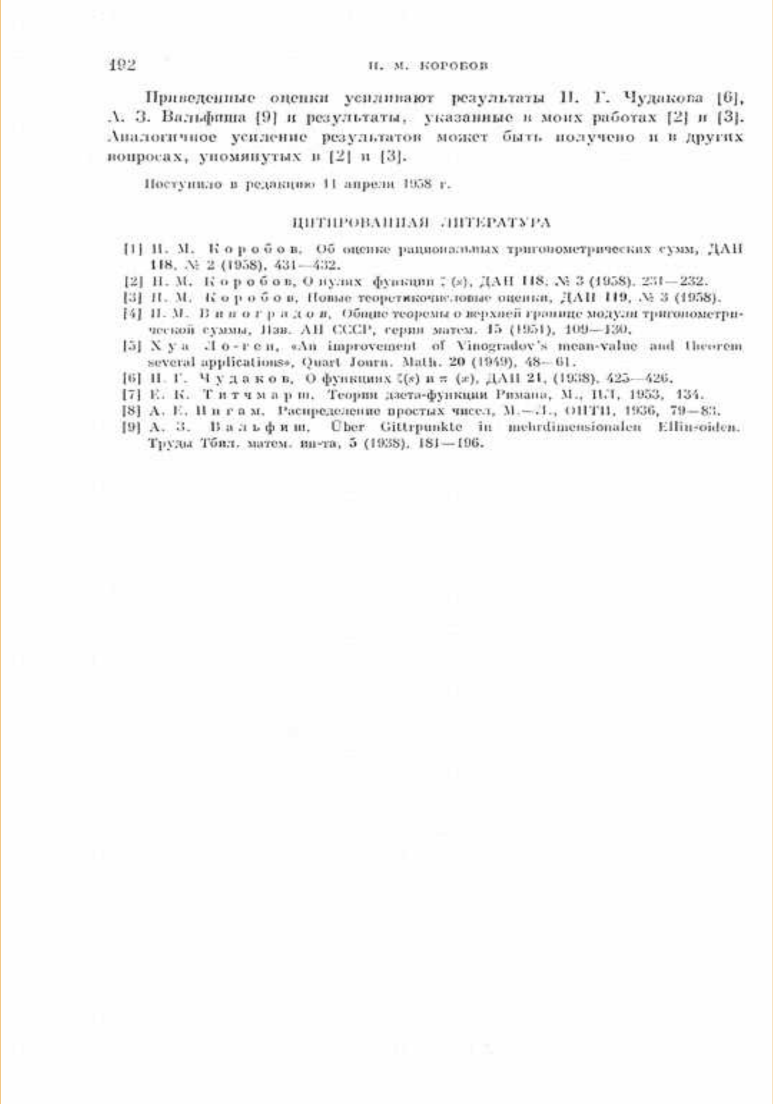
$$\varsigma(1+it)=O(\ln^{2/3}|t|), \qquad t\to\infty$$

опубликованную Н. М. Коробовым в работе 1958 года, не удалось усилить до сих пор. Эта работа оказала большое влияние на дальнейшее развитие метода тригонометрических сумм.

The estimate

$$\varsigma(1+it)=O(\ln^{2/3}|t|), \qquad t\to\infty$$

published by Korobov in 1958 is not improved until now. This publication influenced on further development of trigonomeric sums method.



192 Н. М. КОРОБОВ

Приведенные оценки усиливают результаты Н. Г. Чудакова [6], А. З. Вальфиша [9] и результаты, указанные в моих работах [2] и [3]. Аналогичное усиление результатов может быть получено и в других вопросах, упомянутых в [2] и [3].

Поступило в редакцию 11 апреля 1958 г.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

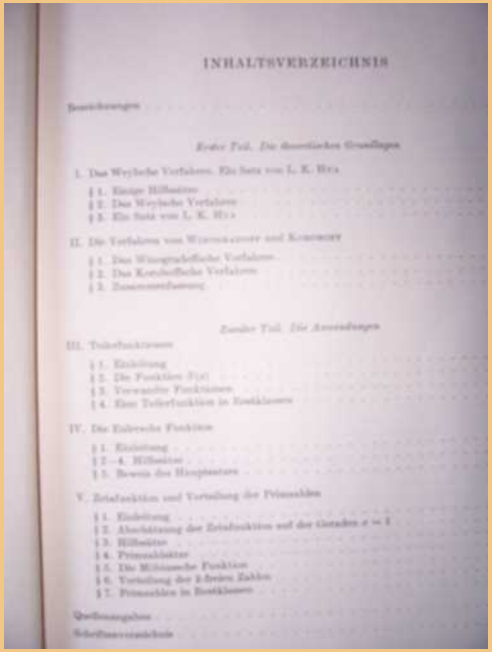
[1] Н. М. Коробов, Об оценке рациональных тригонометрических сумм, ДАН 118, № 2 (1958), 431—432.
[2] Н. М. Коробов, О нулях функции $\zeta(s)$, ДАН 118, № 3 (1958), 231—232.
[3] Н. М. Коробов, Новые теоретикочисловые оценки, ДАН 119, № 3 (1958).
[4] И. М. Виноградов, Общие теоремы о верхней границе модуля тригонометрической суммы, Изв. АН СССР, серия матем. 15 (1951), 109—130.
[5] Хуа Ло-ген, «An improvement of Vinogradov's mean-value and theorem several applications», Quart Journ. Math. 20 (1949), 48—61.
[6] Н. Г. Чудаков, О функциях $\zeta(s)$ и $\pi(x)$, ДАН 21, (1938), 425—426.
[7] Е. К. Титчмарш, Теория дзета-функции Римана, М., ИЛ, 1953, 134.
[8] А. Е. Ингам, Распределение простых чисел, М.—Л., ОНТИ, 1936, 79—83.
[9] А. З. Вальфиш, Über Gittrpunkte in mehrdimensionalen Ellipsoiden, Труды Тбил. матем. ин-та, 5 (1938), 181—196.

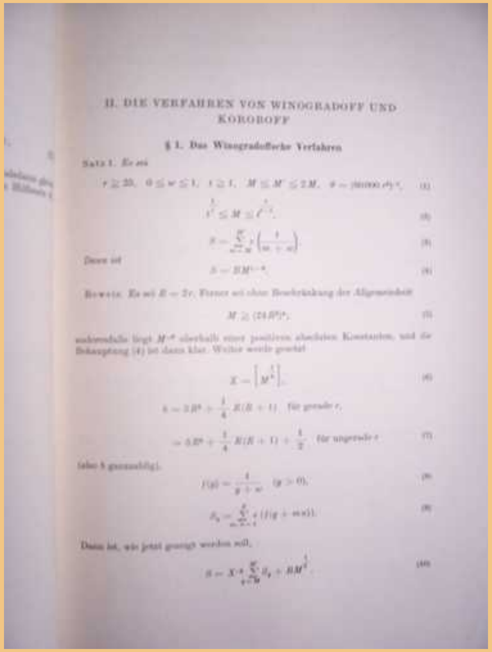
Одновременно с Николаем Михайловичем Коробовым подобные результаты в рамках проблемы оценок сумм Вейля были получены великим российским математиком ***Иваном Матвеевичем Виноградовым***, о чем говорится во второй главе монографии А. Вальфиша «Welsche Exponentialsummen in der neueren Zahlentheorie», опубликованной в Берлине в 1963 году.

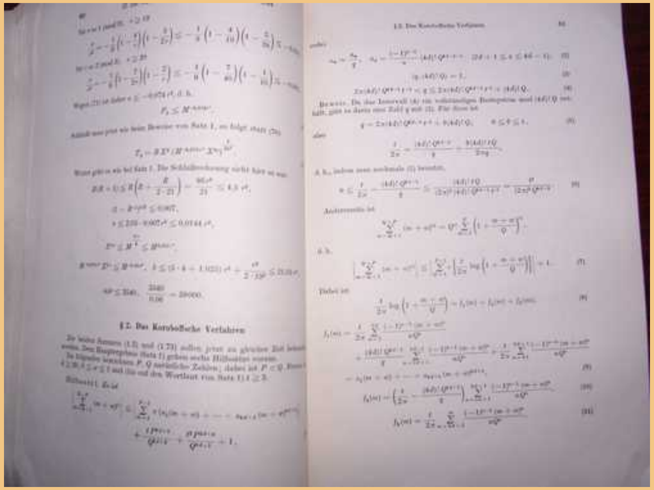
И. М. Виноградов
I. M. Vinogradov

At the same time great Russian mathematician ***Ivan Matveevich Vinogradov*** got the similar results in the context of estimation of Weyl sums as Korobov (see the second chapter of A. Walfish’s monograph «Welsche Exponentialsummen in der neueren Zahlentheorie» published in Berlin in 1963).

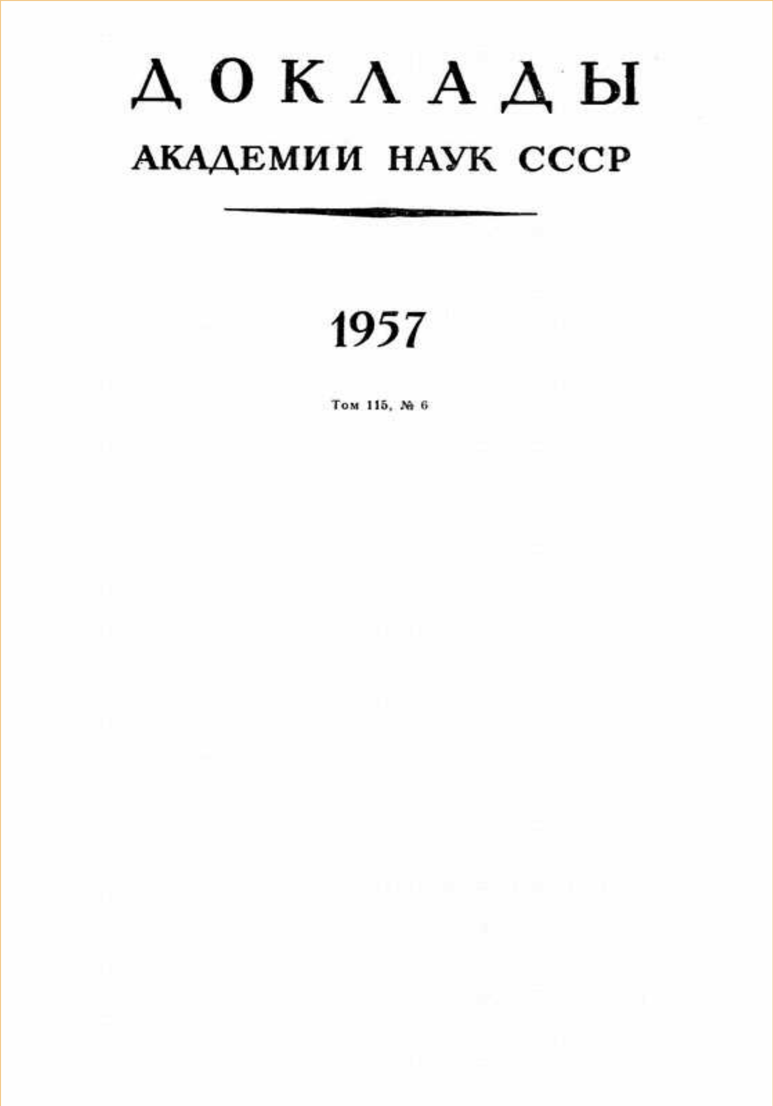

MATHEMATISCHE FORSCHUNGSBERICHTE
WEYLSCHE EXPONENTIALSUMMEN
IN DER
NEUEREN ZAHLENTHEORIE
VON
ARNOLD WALFISZ
VEB DEUTSCHER VERLAG DER WISSENSCHAFTEN


INHALTSVERZEICHNIS


II. DIE VERFAHREN VON WINOGRADOFF UND KOROBOFF
§ 1. Das Winogradoffsche Verfahren


§ 2. Das Koroboffsche Verfahren

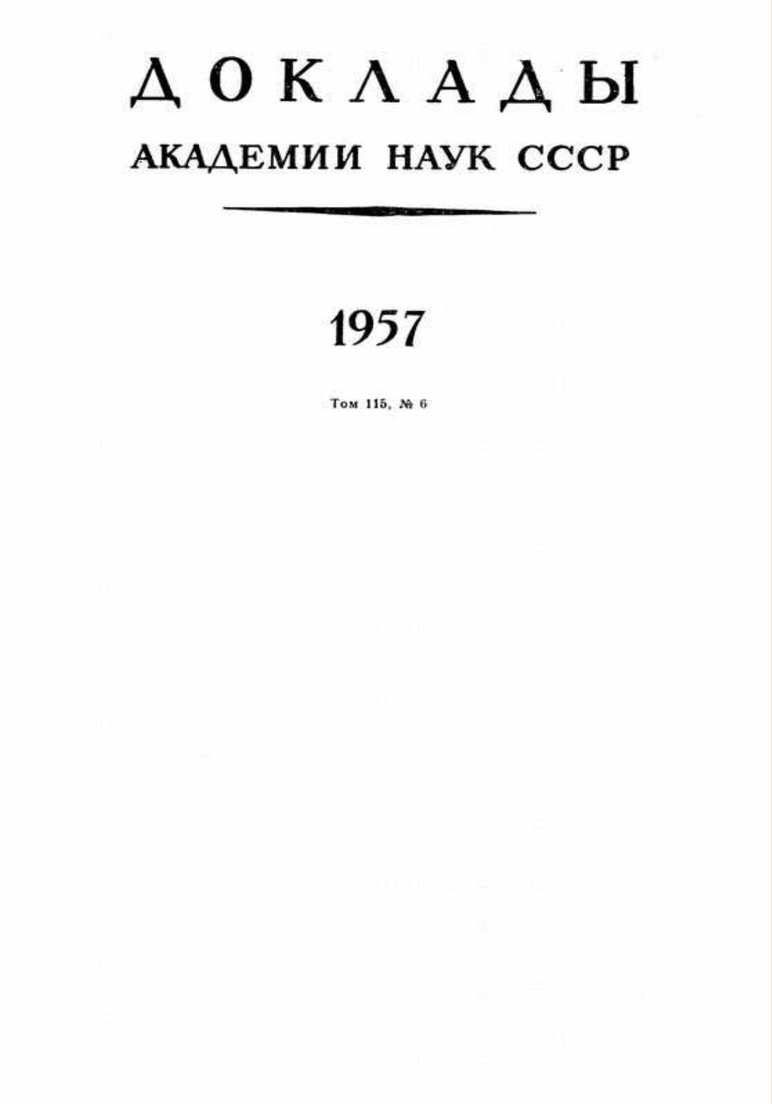
Третий цикл работ Николая Михайловича посвящен вопросам приближенного вычисления кратных интегралов. Введение неравномерных сеток для построения многомерных квадратурных формул позволило с помощью оценок полных рациональных тригонометрических сумм получить гарантированную оценку погрешности приближенного интегрирования, аналогичную оценке для метода Монте-Карло.


ДОКЛАДЫ
АКАДЕМИИ НАУК СССР

1957

Том 115, № 6

The third direction of Korobov's researches is devoted to approximate computation of multiple integrals. The introduction of nonuniform meshes for construction of many-dimensional quadrature formulas allowed to get the guaranteed estimate of fallibility of approximate integration similar to the estimate for Monte-Carlo method by means of the estimation of full rational trigonometric sums.


ДОКЛАДЫ
АКАДЕМИИ НАУК СССР

1957

Том 115, № 6

The third direction of Korobov's researches is devoted to approximate computation of multiple integrals. The introduction
of non
constr
quadra
the gu
fallibili
similar
Carlo r
estima
trigonometric sums.

Доклады Академии наук СССР
1957. Том 115, № 6

МАТЕМАТИКА

Н. М. КОРОБОВ

ПРИБЛИЖЕННОЕ ВЫЧИСЛЕНИЕ КРАТНЫХ ИНТЕГРАЛОВ С ПОМОЩЬЮ МЕТОДОВ ТЕОРИИ ЧИСЕЛ

Теорема 1. *Пусть $p > s$ простое и* $\xi_\nu(k) = \left\{\frac{k^\nu}{p^2}\right\}$ $(\nu = 1, 2, \ldots, s)$*.

Если в единичном s-мерном кубе производная $\frac{\partial^{2s} f(x_1, \ldots, x_s)}{\partial x_1^2 \ldots \partial x_s^2}$ *непрерывна и для любых целых* $j_1 < j_2 < \ldots < j_r$ $(1 \leqslant r \leqslant s,\ 1 \leqslant j_1,\ j_r \leqslant s)$ *производные* $\frac{\partial^{2r} f(x_1, \ldots, x_s)}{\partial x_{j_1}^2 \ldots \partial x_{j_r}^2}$ *ограничены по модулю общей константой C, то при* $N = p^2$ *справедлива оценка*

$$\left| \int_0^1 \ldots \int_0^1 f(x_1, \ldots, x_s)\, dx_1 \ldots dx_s - \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} f[\xi_1(k), \ldots, \xi_s(k)] \right| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{(s-1)\sigma}{\sqrt{N}} + \frac{sC}{10\,N}.$$

$$\left| \sum_{k=1}^{p^2} \exp\left[2\pi i\, \frac{m_1 k + \ldots + m_s k^s}{p^2}\right] \right| \leqslant (s-1)\,p.$$

Доказательство. Введем обозначения:

$$\varphi(k) = m_1 k + \ldots + m_s k^s; \quad S = \sum_{k=1}^{p^2} \exp\left[2\pi i\, \frac{\varphi(k)}{p^2}\right].$$

* Здесь $\{A\}$ означает дробную долю числа A.

The third direction of Korobov's researches is devoted to approximate computation of multiple integrals. The introduction of nonuniform meshes for construction of many-dimensional quadrature formulas allowed to get the guaranteed estimate of fallibility of approximate integration similar to the estimate for Monte-Carlo method by means of the estimation of full rational trigonometric sums.

Разбивая интервал суммирования суммы S на части длины p и пользуясь очевидным сравнением

$$\varphi(x+py) \equiv \varphi(x) + \varphi'(x)\,py \pmod{p^2},$$

получим

$$S = \sum_{x=1}^{p} \sum_{y=0}^{p-1} \exp\left[2\pi i\,\frac{\varphi(x+py)}{p^2}\right] = \sum_{x=1}^{p} \exp\left[2\pi i\,\frac{\varphi(x)}{p^2}\right] \sum_{y=0}^{p-1} \exp\left[2\pi i\,\frac{\varphi'(x)\,y}{p}\right].$$

Степень многочлена $\varphi'(x)$ меньше p; его коэффициенты, в силу условий леммы, не все кратны p. Таким образом, обозначая через T число решений сравнения $\varphi'(x) \equiv 0 \pmod{p}$, получим:

$$|S| \leqslant \sum_{x=1}^{p} \left| \sum_{y=0}^{p-1} \exp\left[2\pi i\,\frac{\varphi'(x)\,y}{p}\right] \right| = Tp \leqslant (s-1)\,p.$$

Перейдем теперь к доказательству теоремы. В силу (1) имеем:

$$\frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} f[\xi_1(k), \ldots, \xi_s(k)] = \tag{2}$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{m_1, \ldots, m_s=-\infty}^{\infty} C(m_1, \ldots, m_s) \sum_{k=1}^{N} \exp\{2\pi i\,[m_1\xi_1(k) + \ldots + m_s\xi_s(k)]\} =$$

$$= C(0, \ldots, 0) + \frac{1}{N} \sum_{m_1, \ldots, m_s=-\infty}^{\infty}{}' C(m_1, \ldots, m_s) \sum_{k=1}^{p^2} \exp\left[2\pi i\,\frac{m_1k + \ldots + m_sk^s}{p^2}\right]$$

(здесь $\sum'$ означает суммирование по всем системам $m_1, \ldots, m_s$, кроме системы $m_1 = \ldots = m_s = 0$). Замечая, что

$$C(0, \ldots, 0) = \int_0^1 \cdots \int_0^1 f(x_1, \ldots, x_s)\,dx_1 \ldots dx_s,$$

получим из (2):

$$\left| \int_0^1 \cdots \int_0^1 f(x_1, \ldots, x_s)\,dx_1 \ldots dx_s - \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} f[\xi_1(k), \ldots, \xi_s(k)] \right| =$$

$$= \frac{1}{N} \left| \sum_{m_1, \ldots, m_s=-\infty}^{\infty}{}' C(m_1, \ldots, m_s) \sum_{k=1}^{p^2} \exp\left[2\pi i\,\frac{m_1k + \ldots + m_sk^s}{p^2}\right] \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{N} \sum_{m_1, \ldots, m_s=-\infty}^{\infty}{}' |C(m_1, \ldots, m_s)| \left| \sum_{k=1}^{p^2} \exp\left[2\pi i\,\frac{m_1k + \ldots + m_sk^s}{p^2}\right] \right|. \tag{3}$$

Обозначим через d общий наибольший делитель величин $m_1, \ldots, m_s$ и разобьем системы $m_1, \ldots, m_s$ на два класса, относя к первому классу системы, для которых $d \equiv 0 \pmod{p}$, и ко второму классу — все остальные системы. Применяя в случае систем первого класса тривиальную оценку

$$\left| \sum_{k=1}^{p^2} \exp\left[2\pi i\,\frac{m_1k + \ldots + m_sk^s}{p^2}\right] \right| \leqslant N$$

The third direction of Korobov's researches is devoted to approximate computation of multiple integrals. The introduction of nonuniform meshes for construction of many-dimensional quadrature formulas allowed to get the guaranteed estimate of fallibility of approximate integration similar to the estimate for Monte-Carlo method by means of the estimation of full rational trigonometric sums.

и пользуясь для систем второго класса оценкой, указанной в лемме, получим:

$$\frac{1}{N}\sum_{m_1,\ldots,m_s=-\infty}^{\infty}{}' |C(m_1,\ldots,m_s)| \left|\sum_{k=1}^{p^s}\exp\left[2\pi i\frac{m_1k+\ldots+m_sk^s}{p^2}\right]\right| \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{d\equiv 0 \pmod p}{}' |C(m_1,\ldots,m_s)| + \frac{(s-1)p}{N}\sum_{d\not\equiv 0 \pmod p}|C(m_1,\ldots,m_s)| \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{m_1,\ldots,m_s=-\infty}^{\infty}{}' |C(m_1p,\ldots,m_sp)| + \frac{(s-1)\sigma}{\sqrt{N}}. \tag{4}$$

Пусть $m_1,\ldots,m_s$ — система целых чисел, не равных одновременно нулю. Предположим, что r из этих чисел отличны от нуля ($1\leqslant r\leqslant s$). Модули чисел, отличных от нуля, обозначим через $n_1,\ldots,n_r$. Пользуясь равенством

$$C(m_1,\ldots,m_s)=\int_0^1\cdots\int_0^1 f(x_1,\ldots,x_s)\exp\left[-2\pi i(m_1x_1+\ldots+m_sx_s)\right]dx_1\ldots dx_s,$$

в силу условий теоремы, после $2r$-кратного интегрирования по частям получим

$$|C(m_1,\ldots,m_s)|\leqslant\frac{C}{(2\pi)^{2r}(n_1\ldots n_r)^2}=\frac{C}{(2\pi)^{2s}}\frac{(2\pi)^{2(\delta_{m_1}+\cdots+\delta_{m_s})}}{[(|m_1|+\delta_{m_1})\ldots(|m_s|+\delta_{m_s})]^2}, \tag{5}$$

где величины δ_{m_ν} для $\nu=1,2,\ldots,s$ определены равенствами

$$\delta_{m_\nu}=\begin{cases}1 & \text{при} \quad m_\nu=0,\\ 0 & \text{при} \quad m_\nu\neq 0.\end{cases}$$

Но тогда

$$\sum_{m_1,\ldots,m_s=-\infty}^{\infty}{}' |C(m_1p,\ldots,m_sp)|\leqslant\frac{C}{(2\pi p)^{2s}}\sum_{m_1,\ldots,m_s=-\infty}^{\infty}{}'\frac{(2\pi p)^{2(\delta_{m_1}+\ldots+\delta_{m_s})}}{[(|m_1|+\delta_{m_1})\ldots(|m_s|+\delta_{m_s})]^2}=$$
$$=C\left[\left(\frac{1}{4\pi^2p^2}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\frac{(2\pi p)^{2\delta_m}}{(|m|+\delta_m)^2}\right)^s-1\right]=C\left[\left(1+\frac{1}{12p^2}\right)^s-1\right]\leqslant\frac{sC}{10p^2},$$

чем, в силу (3) и (4), теорема доказана.

Если частные производные функции $f(x_1,\ldots,x_s)$ удовлетворяют требованиям теоремы 1, то, в силу (5), выполняется оценка

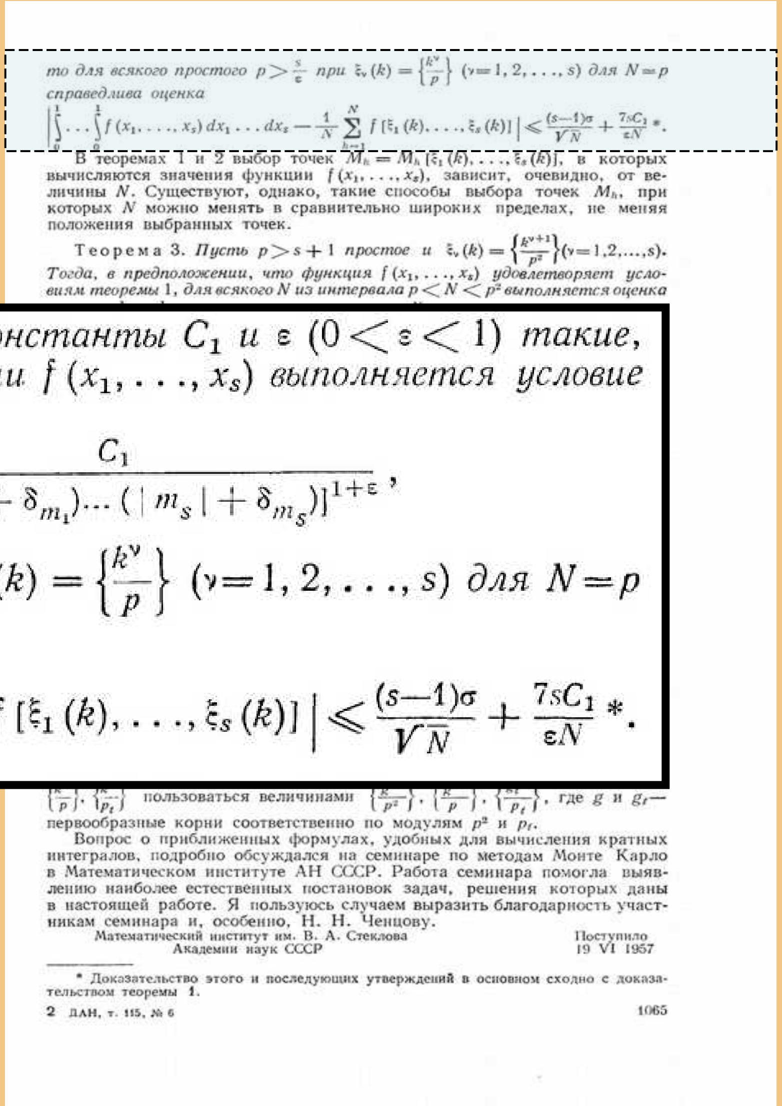
$$|C(m_1,\ldots,m_s)|\leqslant\frac{C_1}{[(|m_1|+\delta_{m_1})\ldots(|m_s|+\delta_{m_s})]^2},$$

где C_1 — некоторая константа. Используя более тонкие теоретикочисловые оценки, можно при значительно меньших требованиях к функции $f(x_1,\ldots,x_s)$ обеспечить тот же порядок точности приближения интеграла соответствующей суммой, как и в теореме 1:

Теорема 2. *Если существуют константы C_1 и ε ($0<\varepsilon<1$) такие, что для коэффициентов Фурье функции $f(x_1,\ldots,x_s)$ выполняется условие*

$$|C(m_1,\ldots,m_s)|\leqslant\frac{C_1}{[(|m_1|+\delta_{m_1})\ldots(|m_s|+\delta_{m_s})]^{1+\varepsilon}},$$

The third direction of Korobov's researches is devoted to approximate computation of multiple integrals. The introduction of nonuniform meshes for constru… quadra… the gu… fallibili… similar… Carlo r… estimation of full rational trigonometric sums.



то для всякого простого $p > \frac{s}{\varepsilon}$ при $\xi_\nu(k) = \left\{\frac{k^\nu}{p}\right\}$ $(\nu = 1, 2, \ldots, s)$ для $N = p$ справедлива оценка

$$\left|\int_0^1 \cdots \int_0^1 f(x_1, \ldots, x_s)\, dx_1 \ldots dx_s - \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} f[\xi_1(k), \ldots, \xi_s(k)]\right| \leqslant \frac{(s-1)\sigma}{\sqrt{N}} + \frac{7sC_1}{\varepsilon N}\,^*.$$

В теоремах 1 и 2 выбор точек $M_k = M_k[\xi_1(k), \ldots, \xi_s(k)]$, в которых вычисляются значения функции $f(x_1, \ldots, x_s)$, зависит, очевидно, от величины N. Существуют, однако, такие способы выбора точек M_k, при которых N можно менять в сравнительно широких пределах, не меняя положения выбранных точек.

Теорема 3. *Пусть $p > s + 1$ простое и $\xi_\nu(k) = \left\{\frac{k^{\nu+1}}{p^2}\right\}(\nu = 1, 2, \ldots, s)$. Тогда, в предположении, что функция $f(x_1, \ldots, x_s)$ удовлетворяет условиям теоремы 1, для всякого N из интервала $p < N < p^2$ выполняется оценка*

…

$\left\{\frac{k}{p}\right\}, \left\{\frac{k}{p_t}\right\}$ пользоваться величинами $\left\{\frac{g}{p^2}\right\}, \left\{\frac{g}{p}\right\}, \left\{\frac{g_t}{p_t}\right\}$, где g и g_t — первообразные корни соответственно по модулям p^2 и p_t.

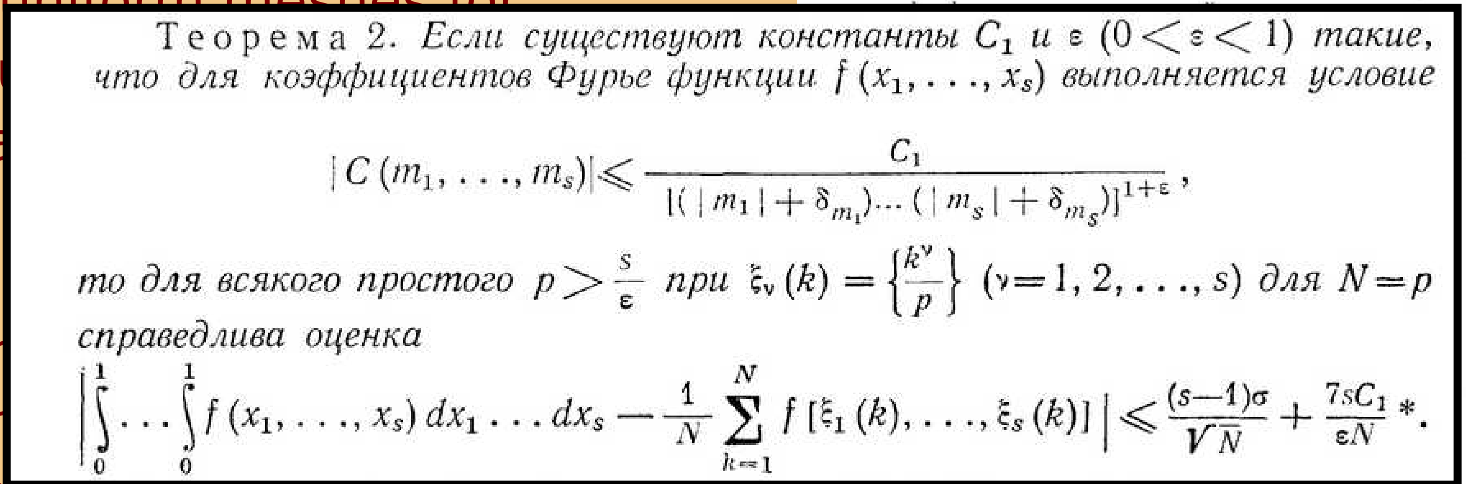
Вопрос о приближенных формулах, удобных для вычисления кратных интегралов, подробно обсуждался на семинаре по методам Монте Карло в Математическом институте АН СССР. Работа семинара помогла выявлению наиболее естественных постановок задач, решения которых даны в настоящей работе. Я пользуюсь случаем выразить благодарность участникам семинара и, особенно, Н. Н. Ченцову.

Математический институт им. В. А. Стеклова Академии наук СССР

Поступило 19 VI 1957

* Доказательство этого и последующих утверждений в основном сходно с доказательством теоремы 1.

2 ДАН, т. 115, № 6 1065



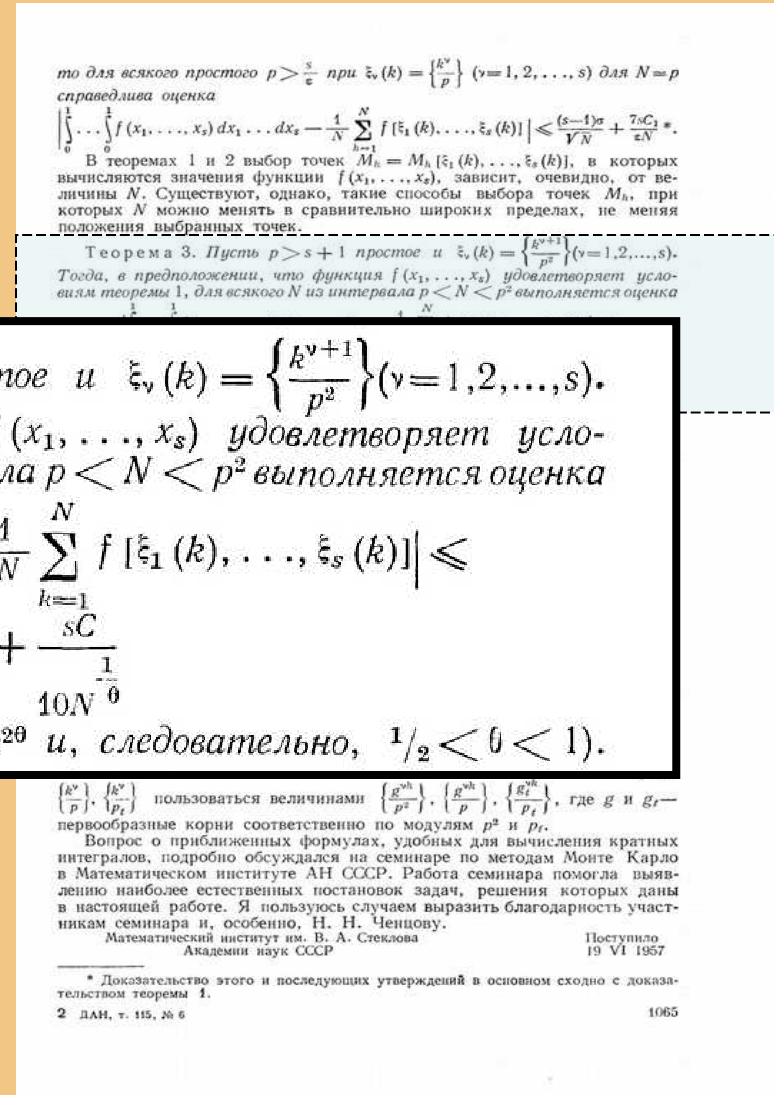
Теорема 2. *Если существуют константы C_1 и ε $(0 < \varepsilon < 1)$ такие, что для коэффициентов Фурье функции $f(x_1, \ldots, x_s)$ выполняется условие*

$$|C(m_1, \ldots, m_s)| \leqslant \frac{C_1}{[(|m_1| + \delta_{m_1}) \ldots (|m_s| + \delta_{m_s})]^{1+\varepsilon}},$$

то для всякого простого $p > \frac{s}{\varepsilon}$ при $\xi_\nu(k) = \left\{\frac{k^\nu}{p}\right\}$ $(\nu = 1, 2, \ldots, s)$ для $N = p$ справедлива оценка

$$\left|\int_0^1 \cdots \int_0^1 f(x_1, \ldots, x_s)\, dx_1 \ldots dx_s - \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} f[\xi_1(k), \ldots, \xi_s(k)]\right| \leqslant \frac{(s-1)\sigma}{\sqrt{N}} + \frac{7sC_1}{\varepsilon N}\,^*.$$

The third direction of Korobov's researches is devoted to approximate computation of multiple integrals. The introduction of nonuniform meshes for
constru
quadra
the gu
fallibili
similar
Carlo r
estimation of full rational trigonometric sums.



то для всякого простого $p > \frac{s}{\varepsilon}$ *при* $\xi_\nu(k) = \left\{\frac{k^\nu}{p}\right\}$ $(\nu = 1, 2, \ldots, s)$ *для* $N = p$ *справедлива оценка*

$$\left|\int_0^1 \ldots \int_0^1 f(x_1, \ldots, x_s)\, dx_1 \ldots dx_s - \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} f[\xi_1(k), \ldots, \xi_s(k)]\right| \leqslant \frac{(s-1)\sigma}{\sqrt{N}} + \frac{7sC_1}{\varepsilon N}\,*.$$

В теоремах 1 и 2 выбор точек $M_k = M_k[\xi_1(k), \ldots, \xi_s(k)]$, в которых вычисляются значения функции $f(x_1, \ldots, x_s)$, зависит, очевидно, от величины N. Существуют, однако, такие способы выбора точек M_k, при которых N можно менять в сравнительно широких пределах, не меняя положения выбранных точек.

Теорема 3. *Пусть* $p > s + 1$ *простое и* $\xi_\nu(k) = \left\{\frac{k^{\nu+1}}{p^2}\right\}(\nu = 1, 2, \ldots, s)$. *Тогда, в предположении, что функция* $f(x_1, \ldots, x_s)$ *удовлетворяет условиям теоремы* 1, *для всякого* N *из интервала* $p < N < p^2$ *выполняется оценка*

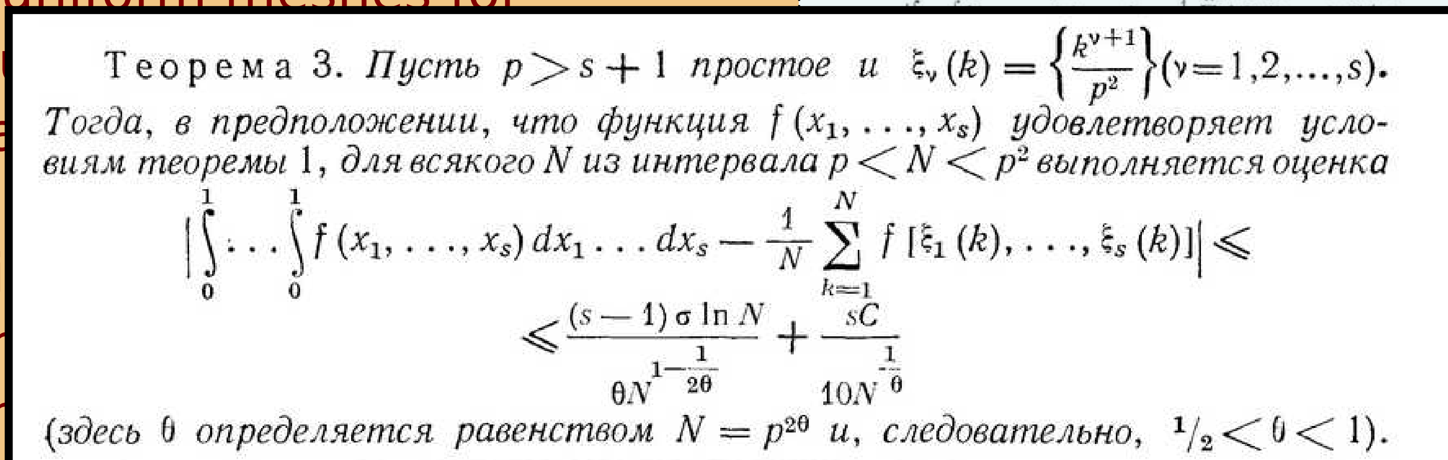
$\left\{\frac{k^\nu}{p}\right\}, \left\{\frac{k^\nu}{p_t}\right\}$ пользоваться величинами $\left\{\frac{g^{\nu k}}{p^2}\right\}, \left\{\frac{g^{\nu k}}{p}\right\}, \left\{\frac{g_t^{\nu k}}{p_t}\right\}$, где g и g_t — первообразные корни соответственно по модулям p^2 и p_t.

Вопрос о приближенных формулах, удобных для вычисления кратных интегралов, подробно обсуждался на семинаре по методам Монте Карло в Математическом институте АН СССР. Работа семинара помогла выявлению наиболее естественных постановок задач, решения которых даны в настоящей работе. Я пользуюсь случаем выразить благодарность участникам семинара и, особенно, Н. Н. Ченцову.

Математический институт им. В. А. Стеклова
Академии наук СССР

Поступило
19 VI 1957

* Доказательство этого и последующих утверждений в основном сходно с доказательством теоремы 1.



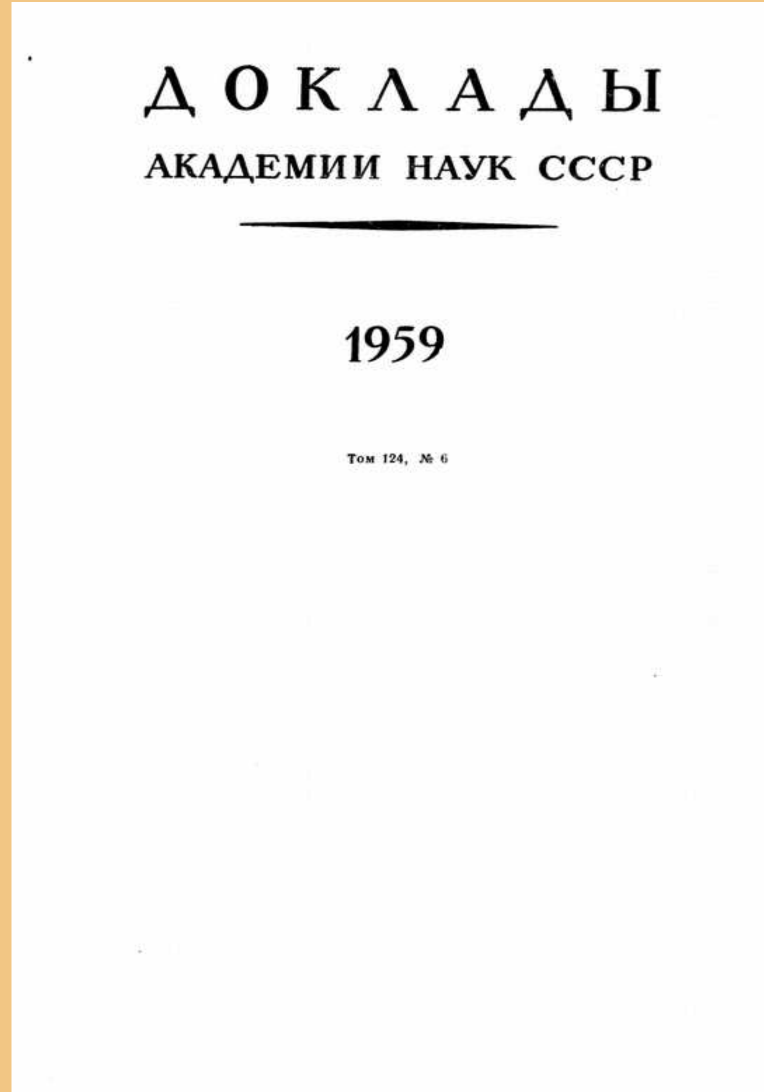
Теорема 3. *Пусть* $p > s + 1$ *простое и* $\xi_\nu(k) = \left\{\frac{k^{\nu+1}}{p^2}\right\}(\nu = 1, 2, \ldots, s)$. *Тогда, в предположении, что функция* $f(x_1, \ldots, x_s)$ *удовлетворяет условиям теоремы* 1, *для всякого* N *из интервала* $p < N < p^2$ *выполняется оценка*

$$\left|\int_0^1 \ldots \int_0^1 f(x_1, \ldots, x_s)\, dx_1 \ldots dx_s - \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} f[\xi_1(k), \ldots, \xi_s(k)]\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{(s-1)\sigma \ln N}{\theta N^{1-\frac{1}{2\theta}}} + \frac{sC}{10N^{\frac{1}{\theta}}}$$

(здесь θ *определяется равенством* $N = p^{2\theta}$ *и, следовательно,* $^1/_2 < \theta < 1$).

Соображения о сравнениях специального вида, не рассматривавшихся ранее, были им применены к построению ***многомерных квадратурных формул***. Эти формулы являются оптимальными по порядку остаточного члена как для функций малой гладкости, так и для гладких периодических функций.

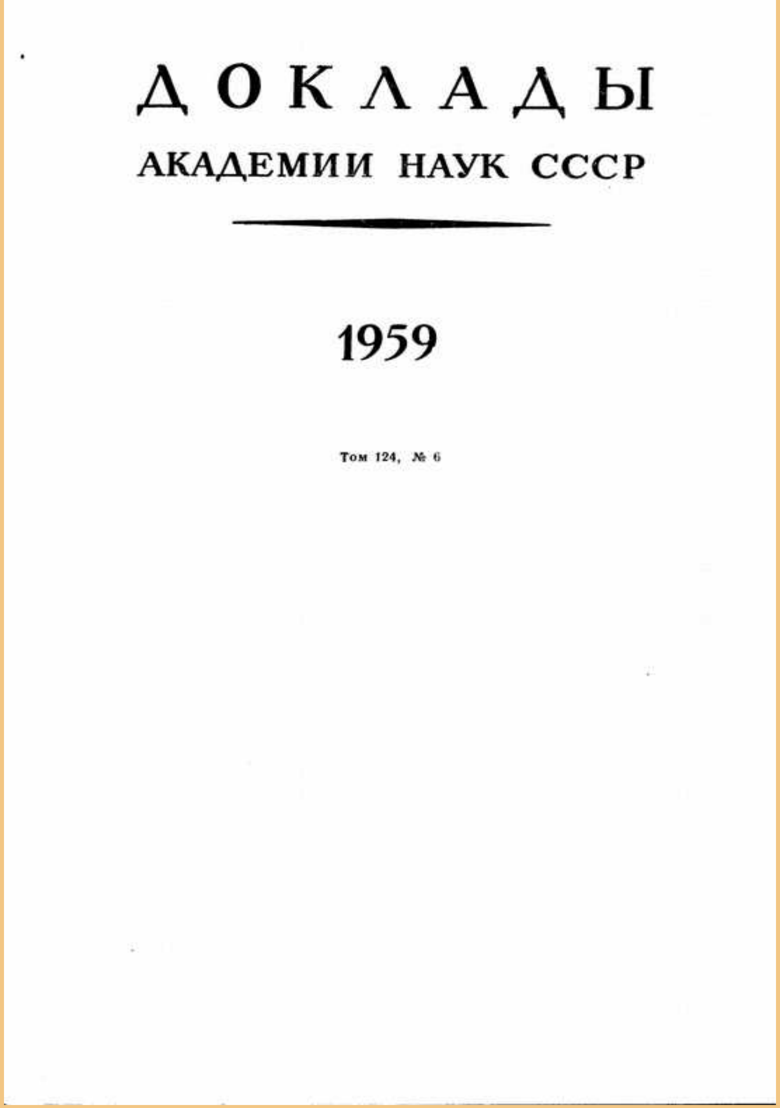

ДОКЛАДЫ

АКАДЕМИИ НАУК СССР

1959

Том 124, № 6

Korobov used the special comparisons to construct ***many-dimensional quadrature formulas***. Each of these formulas has optimal order of residual member for functions of low smoothness and smooth periodic functions.



ДОКЛАДЫ

АКАДЕМИИ НАУК СССР

1959

Том 124, № 6

Korobov used the special comparisons to construct ***many-dimensional quadrature formulas***. Each of these formulas has op

memb

smoot

functio

Доклады Академии наук СССР
1959. Том 124, № 6

МАТЕМАТИКА

Н. М. КОРОБОВ

Теорема 1. *Если существуют константы* $\alpha > 1$ *и* $C = C(s)$ *такие, что для коэффициентов Фурье функции* $f(x_1, \ldots, x_s)$ *выполняется условие*

$$|C(m_1, \ldots, m_s)| \leqslant \frac{C}{[(|m_1|+1)\ldots(|m_s|+1)]^{\alpha}},$$

то для всякого набора оптимальных коэффициентов $a_1, a_2, \ldots$ *при* $\xi_\nu(k) = \left\{\frac{k a_\nu}{p}\right\}$ $(\nu = 1, 2, \ldots, s)$ *для любого* $\varepsilon > 0$ справедлива оценка

$$\int_0^1 \ldots \int_0^1 f(x_1, \ldots, x_s)\, dx_1 \ldots dx_s - \frac{1}{p} \sum_{k=1}^{p} f[\xi_1(k), \ldots, \xi_s(k)] = O\left(\frac{1}{p^{\alpha-\varepsilon}}\right). \quad (2)$$

Легко проверить, что $H(a_1) = p - 1 - 2\ln p < p$. Применяя индукцию, получим

$$H(a_1, \ldots, a_{n+1}) = \min_{1 \leqslant z \leqslant p-1} H(a_1, \ldots, a_n, z) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{p-1} \sum_{z=1}^{p-1} H(a_1, \ldots, a_n, z) = \frac{p-1-2\ln p}{p-1} H(a_1, \ldots, a_n) < p.$$

Korobov used the special comparisons to construct ***many-dimensional quadrature formulas***. Each of these formulas has optimal order of residual member for functions of low smoothness and smooth periodic functions.

Таким образом, для всякого $s \geqslant 1$

$$H(a_1, \ldots, a_s) < p. \tag{3}$$

Пусть величины $\delta(a)$ и τ_m определены равенствами:

$$\delta(a) = \begin{cases} 1 & \text{при } a \equiv 0 \pmod p, \\ 0 & \text{при } a \not\equiv 0 \pmod p, \end{cases} \qquad \tau_m = \begin{cases} 1 & \text{при } m = 0, \\ 0 & \text{при } m \neq 0. \end{cases}$$

Для $\alpha \geqslant 1$ обозначим через $T_\alpha(a_1, \ldots, a_s)$ сумму

$$T_\alpha(a_1, \ldots, a_s) = \sum_{m_1, \ldots, m_s = -(p-1)}^{p-1}{}' \frac{\delta(a_1 m_1 + \ldots + a_s m_s)}{[(|m_1| + \tau_{m_1}) \ldots (|m_s| + \tau_{m_s})]^\alpha},$$

где Σ' означает, что при суммировании исключается система $m_1 = \ldots = m_s = 0$. Пользуясь для $0 < x < 1$ равенством

$$1 - 2\ln(2\sin \pi x) = \sum_{m=-(p-1)}^{p-1}{}' \frac{e^{2\pi i m x}}{|m| + \tau_m} + \frac{\theta}{p(x)},$$

где $\theta = \theta(p, x)$, $|\theta| \leqslant 1$ и (x) означает расстояние от x до ближайшего целого, получим соотношение, связывающее величины $H(a_1, \ldots, a_s)$ и $T_1(a_1, \ldots, a_s)$:

$$pT_1(a_1, \ldots, a_s) = H(a_1, \ldots, a_s) - p + 2\theta_1 s(3 + 2\ln p)^s, \quad |\theta_1| \leqslant 1.$$

Отсюда в силу (3) следует оценка

$$T_1(a_1, \ldots, a_s) \leqslant \frac{2s(3 + 2\ln p)^s}{p}.$$

Замечая, что

$$T_\alpha(a_1, \ldots, a_s) \leqslant \left[\sum_{m_1, \ldots, m_s = -(p-1)}^{p-1}{}' \frac{\delta(a_1 m_1 + \ldots + a_s m_s)}{(|m_1| + \tau_{m_1}) \ldots (|m_s| + \tau_{m_s})} \right]^\alpha = T_1^\alpha(a_1, \ldots, a_s),$$

для всякого действительного $\alpha \geqslant 1$ получим

$$T_\alpha(a_1, \ldots, a_s) \leqslant \frac{[2s(3 + 2\ln p)^s]^\alpha}{p^\alpha}. \tag{4}$$

Пусть теперь $\alpha > 1$. Обозначим через R разность между средним значением функции $f(x_1, \ldots, x_s)$ и ее интегралом:

$$R = \frac{1}{p} \sum_{k=1}^{p} f[\xi_1(k), \ldots, \xi_s(k)] - \int_0^1 \cdots \int_0^1 f(x_1, \ldots, x_s)\, dx_1 \ldots dx_s.$$

Пользуясь разложением (1), в силу определения величин $\xi_\nu(k)$ получим

$$R = \sum_{m_1, \ldots, m_s = -\infty}^{\infty}{}' C(m_1, \ldots, m_s)\, \delta(a_1 m_1 + \ldots + a_s m_s), \tag{5}$$

$$|R| \leqslant C \sum_{m_1, \ldots, m_s = -(p-1)}^{p-1}{}' \frac{\delta(a_1 m_1 + \ldots + a_s m_s)}{[(|m_1| + 1) \ldots (|m_s| + 1)]^\alpha} + C \sum\nolimits_1 \frac{\delta(a_1 m_1 + \ldots + a_s m_s)}{[(|m_1| + 1) \ldots (|m_s| + 1)]^\alpha}, \tag{6}$$

Korobov used the special comparisons to construct ***many-dimensional quadrature formulas***. Each of these formulas has op
memb
smoot
functio

Теорема 2. *Для всякого $\alpha > 1$ существует функция $f(x_1, \ldots, x_s)$, коэффициенты Фурье которой удовлетворяют условию*

$$|C(m_1, \ldots, m_s)| \leqslant \frac{C}{[(|m_1|+1)\ldots(|m_s|+1)]^{\alpha}}$$

такая, что, каковы бы ни были целые $a_1, a_2, \ldots,$ при $\xi_\nu(k) = \left\{\frac{ka_\nu}{p}\right\}$ $(\nu = 1, 2, \ldots, s)$ будет

$$\left|\int_0^1 \cdots \int_0^1 f(x_1, \ldots, x_s)\, dx_1 \ldots dx_s - \frac{1}{p}\sum_{k=1}^{p} f[\xi_1(k), \ldots, \xi_s(k)]\right| > \frac{1}{p^{\alpha}}.$$

где суммирование в Σ_1 распространено на системы $m_1, \ldots, m_s$, в которых хотя бы для одной из величин m_ν будет $|m_\nu| \geqslant p$.

Легко видеть, что из (4) для всякого $\varepsilon > 0$ следует оценка

$$\sum_{m_1, \ldots, m_s = -(p-1)}^{p-1}{}' \frac{\delta(a_1m_1 + \ldots + a_sm_s)}{[(|m_1|+1)\ldots(|m_s|+1)]^{\alpha}} \leqslant T_\alpha(a_1, \ldots, a_s) = o\left(\frac{1}{p^{\alpha-\varepsilon}}\right).$$

Оценим теперь сумму Σ_1: (7)

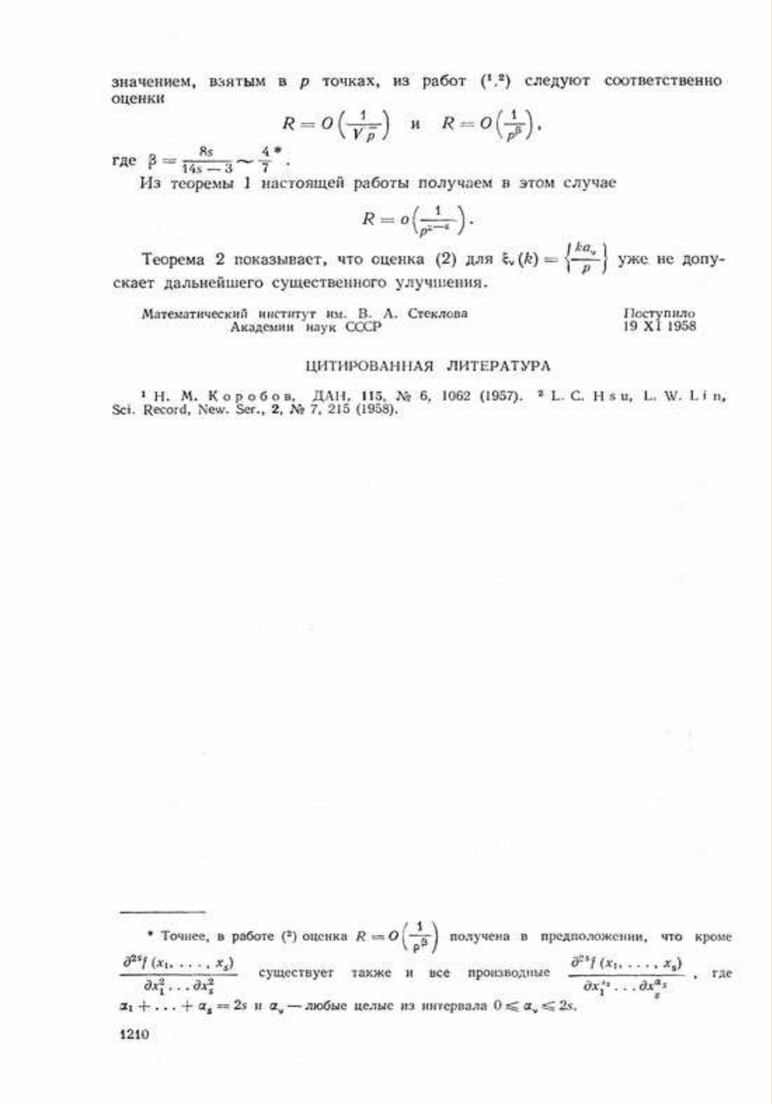
$$\sum{}_1 \frac{\delta(a_1m_1 + \ldots + a_sm_s)}{\ldots} \leqslant$$

$$f(x_1, \ldots, x_s) = \sum_{m_1, \ldots, m_s = -\infty} \frac{\ldots}{[{}^1/_2(|m_1|+1)\ldots(|m_s|+1)]^{\alpha}}$$

и в выражении (5) выделить слагаемое, получающееся при $m_1 = p$, $m_2 = \ldots = m_s = 0$.

Оценка, указанная в теореме I, сильнее оценок, найденных другими методами в работах [1,2]. Так например, пусть функция $f(x_1, \ldots, x_s)$ задана рядом (1) и имеет непрерывную производную $\frac{\partial^{2s} f(x_1, \ldots, x_s)}{\partial x_1^2 \ldots \partial x_s^2}$. Тогда для разности R между интегралом функции $f(x_1, \ldots, x_s)$ и ее средним

Korobov used the special comparisons to construct ***many-dimensional quadrature formulas***. Each of these formulas has optimal order of residual member for functions of low smoothness and smooth periodic functions.



значением, взятым в p точках, из работ ([1,2]) следуют соответственно оценки

$$R = O\left(\frac{1}{\sqrt{p}}\right) \quad \text{и} \quad R = O\left(\frac{1}{p^{\beta}}\right),$$

где $\beta = \frac{8s}{14s-3} \sim \frac{4}{7}$*.

Из теоремы 1 настоящей работы получаем в этом случае

$$R = o\left(\frac{1}{p^{2-\varepsilon}}\right).$$

Теорема 2 показывает, что оценка (2) для $\xi_\nu(k) = \left\{\frac{ka_\nu}{p}\right\}$ уже не допускает дальнейшего существенного улучшения.

Математический институт им. В. А. Стеклова Академии наук СССР

Поступило 19 XI 1958

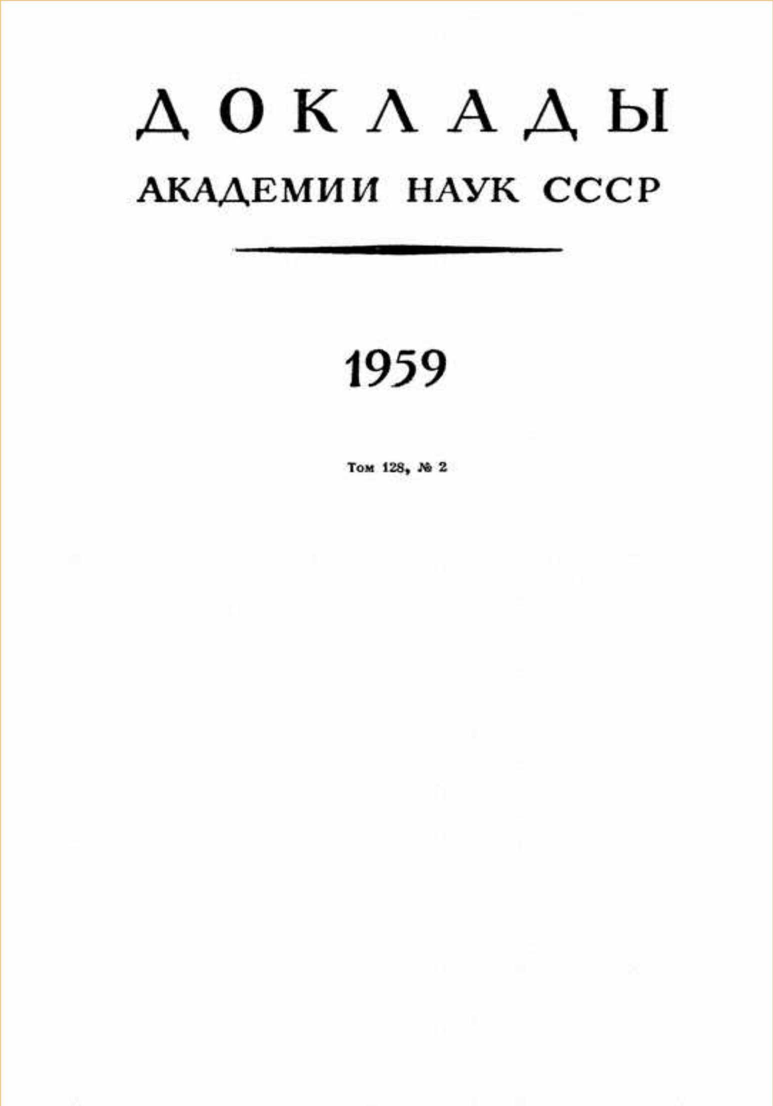
ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Н. М. Коробов, ДАН, 115, № 6, 1062 (1957). [2] L. C. Hsu, L. W. Lin, Sci. Record, New. Ser., 2, № 7, 215 (1958).

* Точнее, в работе ([2]) оценка $R = O\left(\frac{1}{p^{\beta}}\right)$ получена в предположении, что кроме $\frac{\partial^{2s} f(x_1, \ldots, x_s)}{\partial x_1^2 \ldots \partial x_s^2}$ существует также и все производные $\frac{\partial^{2s} f(x_1, \ldots, x_s)}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_s^{\alpha_s}}$, где $\alpha_1 + \ldots + \alpha_s = 2s$ и α_ν — любые целые из интервала $0 \leqslant \alpha_\nu \leqslant 2s$.

Теоретико-числовые квадратурные формулы он применил к вопросам интерполяции функций многих переменных и к приближённому решению интегральных уравнений.

He used number-theoretic quadrature formulas to interpolate multivariable functions and to solve integral equations approximately.



ДОКЛАДЫ

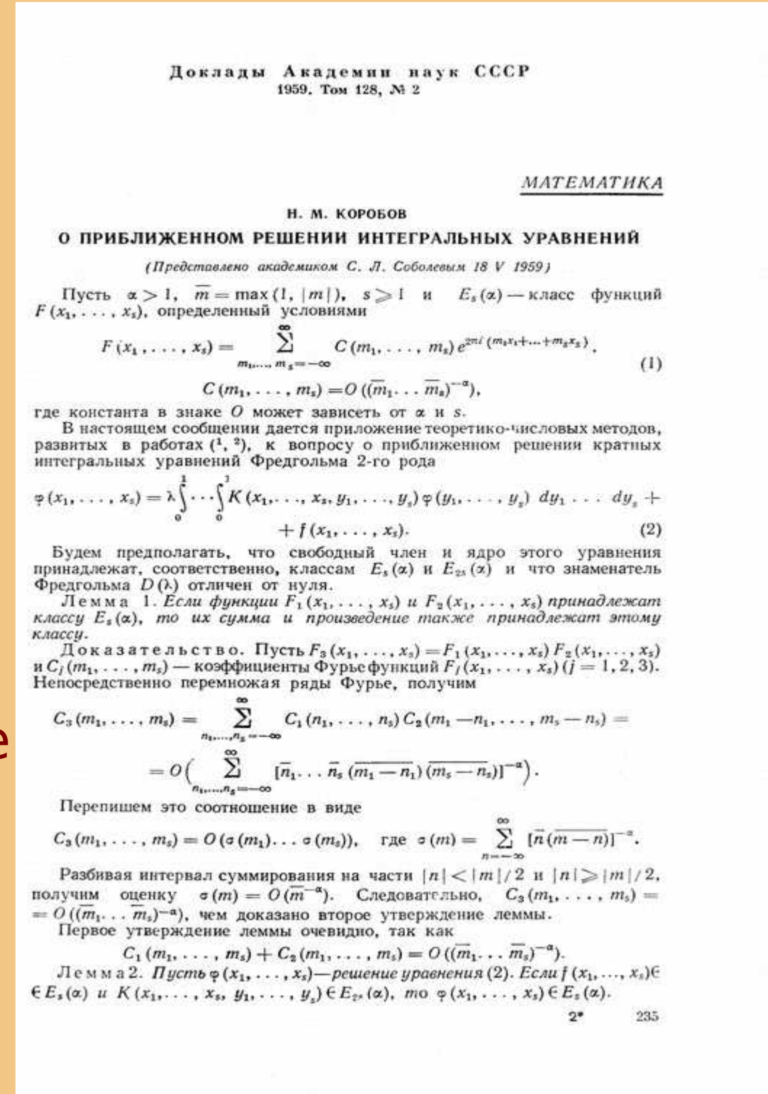
АКАДЕМИИ НАУК СССР

1959

Том 128, № 2

Теоретико-числовые квадратурные формулы он применил к вопросам интерполяции функций многих переменных и к приближённому решению интегральных уравнений.

He used number-theoretic quadrature formulas to interpolate multivariable functions and to solve integral equations approximately.



Доклады Академии наук СССР
1959. Том 128, № 2

МАТЕМАТИКА

Н. М. КОРОБОВ

О ПРИБЛИЖЕННОМ РЕШЕНИИ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 18 V 1959)

Пусть $\alpha > 1$, $\overline{m} = \max(1, |m|)$, $s \geqslant 1$ и $E_s(\alpha)$ — класс функций $F(x_1, \ldots, x_s)$, определенный условиями

$$F(x_1, \ldots, x_s) = \sum_{m_1, \ldots, m_s = -\infty}^{\infty} C(m_1, \ldots, m_s)\, e^{2\pi i (m_1 x_1 + \ldots + m_s x_s)}, \qquad (1)$$

$$C(m_1, \ldots, m_s) = O((\overline{m}_1 \ldots \overline{m}_s)^{-\alpha}),$$

где константа в знаке O может зависеть от α и s.

В настоящем сообщении дается приложение теоретико-числовых методов, развитых в работах ([1], [2]), к вопросу о приближенном решении кратных интегральных уравнений Фредгольма 2-го рода

$$\varphi(x_1, \ldots, x_s) = \lambda \int_0^1 \cdots \int_0^1 K(x_1, \ldots, x_s, y_1, \ldots, y_s)\, \varphi(y_1, \ldots, y_s)\, dy_1 \ldots dy_s + f(x_1, \ldots, x_s). \qquad (2)$$

Будем предполагать, что свободный член и ядро этого уравнения принадлежат, соответственно, классам $E_s(\alpha)$ и $E_{2s}(\alpha)$ и что знаменатель Фредгольма $D(\lambda)$ отличен от нуля.

Лемма 1. *Если функции $F_1(x_1, \ldots, x_s)$ и $F_2(x_1, \ldots, x_s)$ принадлежат классу $E_s(\alpha)$, то их сумма и произведение также принадлежат этому классу.*

Доказательство. Пусть $F_3(x_1, \ldots, x_s) = F_1(x_1, \ldots, x_s)\, F_2(x_1, \ldots, x_s)$ и $C_j(m_1, \ldots, m_s)$ — коэффициенты Фурье функций $F_j(x_1, \ldots, x_s)$ $(j = 1, 2, 3)$. Непосредственно перемножая ряды Фурье, получим

$$C_3(m_1, \ldots, m_s) = \sum_{n_1, \ldots, n_s = -\infty}^{\infty} C_1(n_1, \ldots, n_s)\, C_2(m_1 - n_1, \ldots, m_s - n_s) =$$

$$= O\Big(\sum_{n_1, \ldots, n_s = -\infty}^{\infty} [\overline{n}_1 \ldots \overline{n}_s\, (\overline{m_1 - n_1}) \ldots (\overline{m_s - n_s})]^{-\alpha}\Big).$$

Перепишем это соотношение в виде

$$C_3(m_1, \ldots, m_s) = O(\sigma(m_1) \ldots \sigma(m_s)), \quad \text{где } \sigma(m) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} [\overline{n}\,(\overline{m - n})]^{-\alpha}.$$

Разбивая интервал суммирования на части $|n| < |m|/2$ и $|n| \geqslant |m|/2$, получим оценку $\sigma(m) = O(\overline{m}^{-\alpha})$. Следовательно, $C_3(m_1, \ldots, m_s) = O((\overline{m}_1 \ldots \overline{m}_s)^{-\alpha})$, чем доказано второе утверждение леммы.

Первое утверждение леммы очевидно, так как

$$C_1(m_1, \ldots, m_s) + C_2(m_1, \ldots, m_s) = O((\overline{m}_1 \ldots \overline{m}_s)^{-\alpha}).$$

Лемма 2. *Пусть $\varphi(x_1, \ldots, x_s)$ — решение уравнения (2). Если $f(x_1, \ldots, x_s) \in E_s(\alpha)$ и $K(x_1, \ldots, x_s, y_1, \ldots, y_s) \in E_{2s}(\alpha)$, то $\varphi(x_1, \ldots, x_s) \in E_s(\alpha)$.*

Теоретико-числовые квадратурные формулы он применил к вопросам интерполяции функций многих перем… прибл… интег…

Не… quadra… multiv… integra…

Доказательство. Обозначим через $C_1(m_1, \dots, m_s)$ и $C_2(n_1, \dots, n_{2s})$ соответственно коэффициенты Фурье функций $\varphi(x_1, \dots, x_s) - f(x_1, \dots, x_s)$ и $K(x_1, \dots, x_s, y_1, \dots, y_s)$. Очевидно

$$C_1(m_1, \dots, m_s) = \lambda \int_0^1 \cdots \int_0^1 \varphi(y_1, \dots, y_s) \times$$

$$\times \left[\int_0^1 \cdots \int_0^1 K(x_1, \dots, y_s) e^{-2\pi i (m_1 x_1 + \dots + m_s x_s)} dx_1 \dots dx_s \right] dy_1 \dots dy_s =$$

$$\varphi(P) = \lambda \int_{G_s} K(P, Q) \varphi(Q)\, dQ + f(P). \qquad (2')$$

$$\tilde{\varphi}(M_j) = \frac{\lambda}{N} \sum_{i=1}^{N} K(M_j, M_i) \tilde{\varphi}(M_i) + f(M_j) \quad (j = 1, 2, \dots, N), \qquad (3)$$

Теорема 1. *Пусть $\varphi(P)$ — решение уравнения (2′). Зададим точки $M_i = M[\xi_1(i), \dots, \xi_s(i)]$ равенствами $\xi_1(i) = \left\{\frac{i}{p}\right\}$, $\xi_2(i) = \left\{\frac{i^2}{p}\right\}$, …, $\xi_s(i) = \left\{\frac{i^s}{p}\right\}$*. Тогда*

$$\varphi(M_i) = \tilde{\varphi}(M_i) + O\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right) \quad (i = 1, 2, \dots, N),$$

где величины $\tilde{\varphi}(M_i)$ удовлетворяют системе N линейных алгебраических уравнений вида (3).

Доказательство. Будем рассматривать ядро уравнения (2) как функцию переменных интегрирования: $K(x_1, \dots, y_s) = \psi(y_1, \dots, y_s)$. Непо-

* Здесь $\left\{\frac{i^\nu}{p}\right\}$ — дробная доля числа $\frac{i^\nu}{p}$.

Теоретико-числовые квадратурные формулы он применил к вопросам интерполяции функций многих перем… прибл… интег…

Не… quadra… multiv… integral equations approximately.

$$\varphi(P)=\lambda\int_{G_s}K(P,Q)\varphi(Q)\,dQ+f(P). \qquad (2')$$

$$\tilde{\varphi}(M_j)=\frac{\lambda}{N}\sum_{i=1}^{N}K(M_j,M_i)\tilde{\varphi}(M_i)+f(M_j) \quad (j=1,2,\dots,N), \qquad (3)$$

Теорема 2. *Пусть* $\varphi(P)$ — *решение уравнения* (2′). *Тогда при* $M_i=M\left(\left\{\frac{ia_1}{p}\right\},\dots,\left\{\frac{ia_s}{p}\right\}\right)$ *справедливо равенство*

$$\varphi(P)=\frac{\lambda}{N}\sum_{i=1}^{N}K(P,M_i)\tilde{\varphi}(M_i)+f(P)+O(N^{-\alpha}\ln^{\alpha s}N),$$

где величины $\tilde{\varphi}(M_i)$ *удовлетворяют системе уравнений* (3).

средственно оценивая коэффициенты Фурье, убедимся, что $\psi(y_1,\dots,y_s)\in E_s(\alpha)$. Но, по лемме 2, $\varphi(y_1,\dots,y_s)\in E_s(\alpha)$, следовательно, пользуясь леммой 1, для функции $F(y_1,\dots,y_s)=K(x_1,\dots,y_s)\varphi(y_1,\dots,y_s)$ получим

$$F(y_1,\dots,y_s)=\psi(y_1,\dots,y_s)\varphi(y_1,\dots,y_s)\in E_s(\alpha).$$

Согласно теореме 2 работы (1), для любой функции $F(Q)=F(y_1,\dots,y_s)$, принадлежащей классу $E_s(\alpha)$, при $M_i=M\left(\left\{\frac{i}{p}\right\},\dots,\left\{\frac{i^s}{p}\right\}\right)$ справедливо равенство

$$\int_{G_s}F(Q)\,dQ=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}F(M_i)+O\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right). \qquad (4)$$

…

величина a_{v+1} равна одному из значений z_{v+1}, при котором достигается минимум $H(a_1,\dots,a_v,z_{v+1})$.

Теорема 2. *Пусть* $\varphi(P)$ — *решение уравнения* (2′). *Тогда при* $M_i=M\left(\left\{\frac{ia_1}{p}\right\},\dots,\left\{\frac{ia_s}{p}\right\}\right)$ *справедливо равенство*

$$\varphi(P)=\frac{\lambda}{N}\sum_{i=1}^{N}K(P,M_i)\tilde{\varphi}(M_i)+f(P)+O(N^{-\alpha}\ln^{\alpha s}N),$$

где величины $\tilde{\varphi}(M_i)$ *удовлетворяют системе уравнений* (3).

Доказательство. Пусть функция $F(Q)$ принадлежит классу $E_s(\alpha)$. Тогда, пользуясь оценками работы (2), получим

Теоретико-числовые квадратурные формулы он применил к вопросам интерполяции функций многих переменных и к приближённому решению интег

Не

quadra

multivariable functions and to solve integral equations approximately.

$$\int_{G_s} F(Q)\,dQ = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} F(M_i) + O(N^{-\alpha}\ln^{\alpha s} N). \qquad (4')$$

Отсюда при $F(Q) = K(P, Q)\varphi(Q)$ следует, что в равенстве (3) можно положить $\varepsilon(N) = N^{-\alpha}\ln^{\alpha s} N$. Далее, повторяя рассуждения, приведенные в замечании, получаем утверждение теоремы.

Заметим, что в равенстве (4'), а следовательно, и в теореме 2 сохранится оценка вида $O(N^{-\alpha}\ln^{\beta} N)$, если вместо (6) выбрать

$$H(z_1, \ldots, z_\nu) = \sum_{k=1}^{p}\left(1 - 2\left\{\frac{kz_1}{p}\right\}\right)^2 \cdots \left(1 - 2\left\{\frac{kz_\nu}{p}\right\}\right)^2.$$

Пусть для коэффициентов Фурье ядра уравнения (2) выполняется оценка $|C(m_1, \ldots, m_{2s})| \leqslant C(\bar{m}_1 \ldots \bar{m}_{2s})^{-\alpha}$.

Определим β равенством $\beta = \ln C + 4s\left(\alpha + \ln\frac{3\alpha}{\alpha - 1}\right)$. Как показывает следующая теорема, при несущественном по сравнению с теоремой 1 изменении порядка оценок можно для малых значений λ вычислять $\varphi(P)$ без перехода к системе линейных уравнений.

Теорема 3. *Каково бы ни было $\varepsilon > 0$, при $|\lambda| < e^{-\beta\left(1 + \frac{1}{2\varepsilon}\right)}$ справедливо равенство*

$$\varphi(P) = f(P) + \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\sum_{\nu=1}^{n}\lambda^{\nu} K(P, M_{1,i}) \ldots K(M_{\nu-1,i}, M_{\nu,i}) f(M_{\nu,i}) + O(N^{-1/2+\varepsilon}),$$

где $M_{\nu,i} = M\left(\left\{\frac{i^{s(\nu-1)+1}}{p}\right\}, \ldots, \left\{\frac{i^{s\nu}}{p}\right\}\right)$, $\quad n = \left[\frac{\varepsilon - 2\varepsilon^2}{\beta}\ln N\right] - 1.$

справед-

$(N^{-1/2+\varepsilon})$,

показать,

и

(Q_n).

мая как

Выделяя

получим

$$\varphi(P) = f(P) + \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\sum_{\nu=1}^{n}\lambda^{\nu} K(P, M_{1,i}) \ldots K(M_{\nu-1,i}, M_{\nu,i}) f(M_{\nu,i}) + O\left(e^{\beta n}N^{-1/2} + e^{-\frac{\varepsilon\beta n}{2\varepsilon}}\right).$$

Отсюда, так как $(\varepsilon - 2\varepsilon^2)\ln N < \beta n < \varepsilon\ln N$, получим утверждение теоремы.

Несколько изменяя определение классов $E_s(\alpha)$ и выбор точек M (например так, как это сделано в работе ([4])), можно улучшить оценки теорем 2 и 3 соответственно до $O(N^{-\alpha})$ и $O(N^{-\alpha+\varepsilon})$.

Я благодарю А. В. Бицадзе, привлекшего мое внимание к вопросам приближенного решения интегральных уравнений.

Математический институт им. В. А. Стеклова
Академии наук СССР

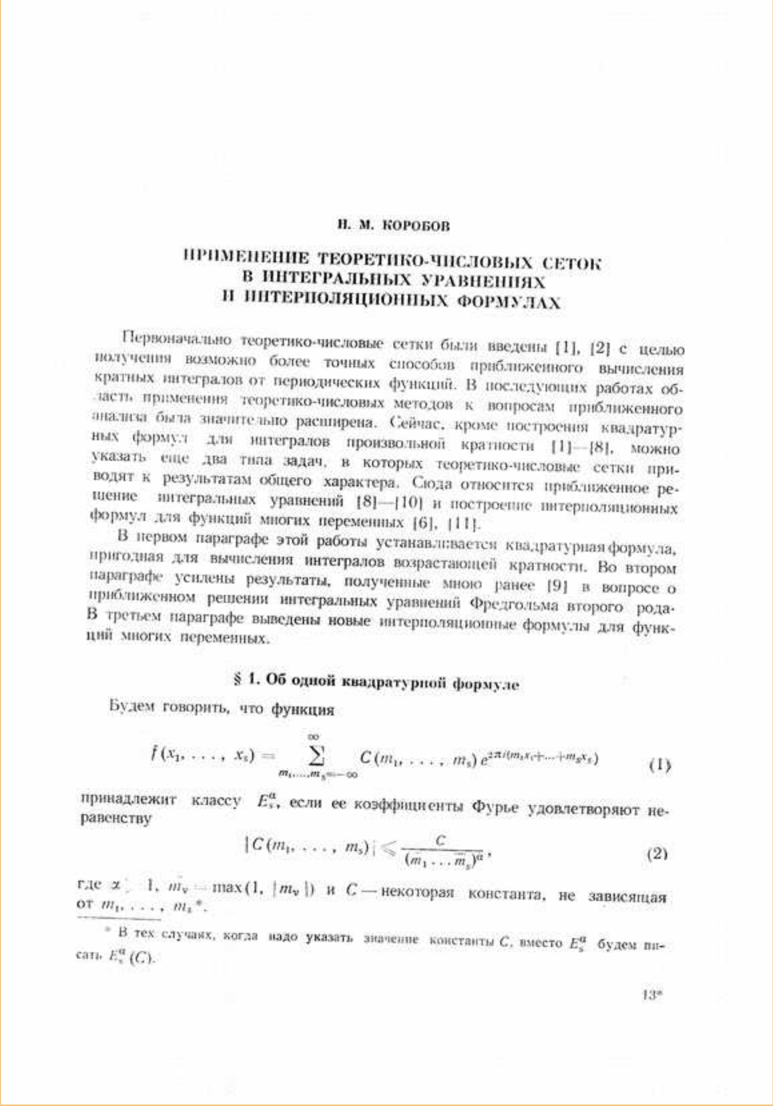
Поступило
11 V 1959

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Н. М. Коробов, ДАН, 115, № 6, 1062 (1957). [2] Н. М. Коробов, ДАН, 124, № 6 (1959). [3] Л. В. Канторович, В. И. Крылов, Приближенные методы высшего анализа, гл. II, § 3, 1949, стр. 117. [4] Н. М. Коробов, Вестн. МГУ, № 4 (1959).

Теоретико-числовые квадратурные формулы он применил к вопросам интерполяции функций многих переменных и к приближённому решению интегральных уравнений.

He used number-theoretic quadrature formulas to interpolate multivariable functions and to solve integral equations approximately.



Н. М. КОРОБОВ

ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРЕТИКО-ЧИСЛОВЫХ СЕТОК В ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЯХ И ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫХ ФОРМУЛАХ

Первоначально теоретико-числовые сетки были введены [1], [2] с целью получения возможно более точных способов приближенного вычисления кратных интегралов от периодических функций. В последующих работах область применения теоретико-числовых методов к вопросам приближенного анализа была значительно расширена. Сейчас, кроме построения квадратурных формул для интегралов произвольной кратности [1]—[8], можно указать еще два типа задач, в которых теоретико-числовые сетки приводят к результатам общего характера. Сюда относится приближенное решение интегральных уравнений [8]—[10] и построение интерполяционных формул для функций многих переменных [6], [11].

В первом параграфе этой работы устанавливается квадратурная формула, пригодная для вычисления интегралов возрастающей кратности. Во втором параграфе усилены результаты, полученные мною ранее [9] в вопросе о приближенном решении интегральных уравнений Фредгольма второго рода. В третьем параграфе выведены новые интерполяционные формулы для функций многих переменных.

§ 1. Об одной квадратурной формуле

Будем говорить, что функция

$$f(x_1, \ldots, x_s) = \sum_{m_1, \ldots, m_s = -\infty}^{\infty} C(m_1, \ldots, m_s) e^{2\pi i (m_1 x_1 + \ldots + m_s x_s)} \tag{1}$$

принадлежит классу E_s^α, если ее коэффициенты Фурье удовлетворяют неравенству

$$|C(m_1, \ldots, m_s)| \leqslant \frac{C}{(\bar{m}_1 \ldots \bar{m}_s)^\alpha}, \tag{2}$$

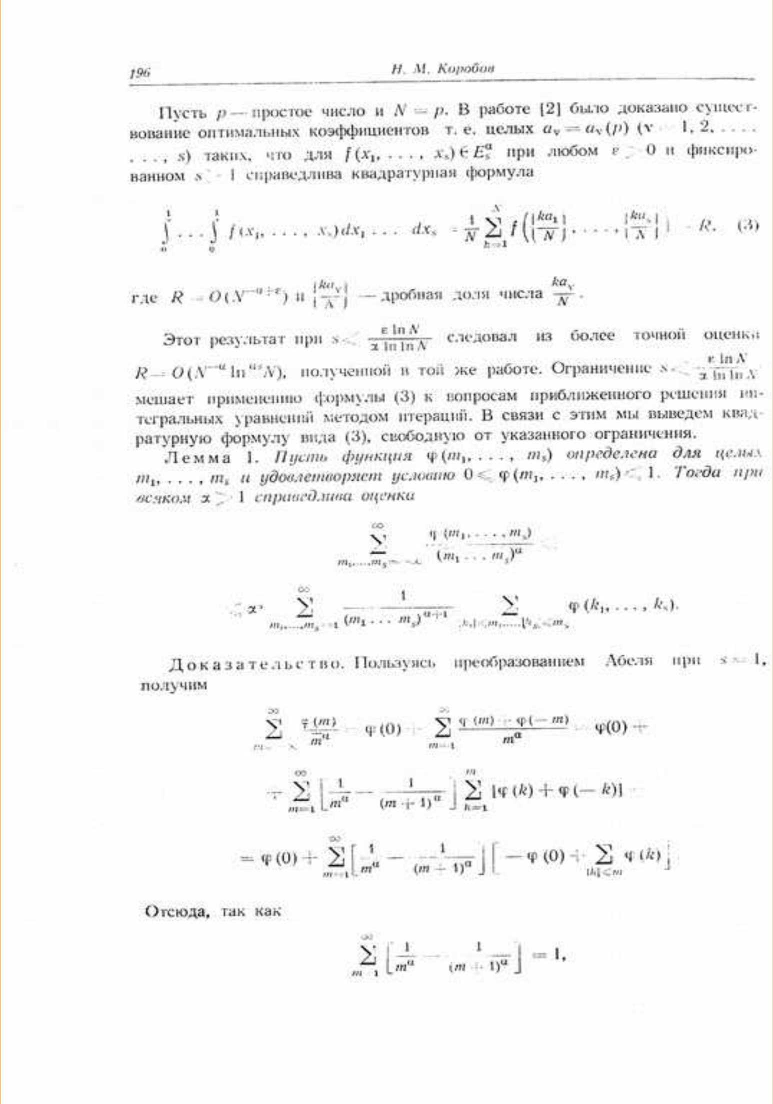
где $\alpha > 1$, $\bar{m}_\nu = \max(1, |m_\nu|)$ и C — некоторая константа, не зависящая от $m_1, \ldots, m_s$*.

* В тех случаях, когда надо указать значение константы C, вместо E_s^α будем писать $E_s^\alpha(C)$.

13*

Теоретико-числовые квадратурные формулы он применил к вопросам интерполяции функций многих переменных и к приближённому решению интегральных уравнений.

He used number-theoretic quadrature formulas to interpolate multivariable functions and to solve integral equations approximately.



Пусть p — простое число и $N = p$. В работе [2] было доказано существование оптимальных коэффициентов т. е. целых $a_\nu = a_\nu(p)$ ($\nu = 1, 2, \ldots, s$) таких, что для $f(x_1, \ldots, x_s) \in E_s^\alpha$ при любом $\varepsilon > 0$ и фиксированном $s \geq 1$ справедлива квадратурная формула

$$\int_0^1 \ldots \int_0^1 f(x_1, \ldots, x_s)\, dx_1 \ldots dx_s = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} f\left(\left\{\frac{ka_1}{N}\right\}, \ldots, \left\{\frac{ka_s}{N}\right\}\right) + R, \quad (3)$$

где $R = O(N^{-\alpha+\varepsilon})$ и $\left\{\frac{ka_\nu}{N}\right\}$ — дробная доля числа $\frac{ka_\nu}{N}$.

Этот результат при $s \leq \frac{\varepsilon \ln N}{\alpha \ln \ln N}$ следовал из более точной оценки $R = O(N^{-\alpha} \ln^{\alpha s} N)$, полученной в той же работе. Ограничение $s \leq \frac{\varepsilon \ln N}{\alpha \ln \ln N}$ мешает применению формулы (3) к вопросам приближенного решения интегральных уравнений методом итераций. В связи с этим мы выведем квадратурную формулу вида (3), свободную от указанного ограничения.

Лемма 1. *Пусть функция $\varphi(m_1, \ldots, m_s)$ определена для целых $m_1, \ldots, m_s$ и удовлетворяет условию $0 \leq \varphi(m_1, \ldots, m_s) \leq 1$. Тогда при всяком $\alpha > 1$ справедлива оценка*

$$\sum_{m_1, \ldots, m_s = -\infty}^{\infty}{}' \frac{\varphi(m_1, \ldots, m_s)}{(\overline{m}_1 \ldots \overline{m}_s)^\alpha} \leq$$

$$\leq \alpha^s \sum_{m_1, \ldots, m_s = 1}^{\infty}{}' \frac{1}{(m_1 \ldots m_s)^{\alpha+1}} \sum_{|k_1| \leq m_1, \ldots, |k_s| \leq m_s}{}' \varphi(k_1, \ldots, k_s).$$

Доказательство. Пользуясь преобразованием Абеля при $s = 1$, получим

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty}{}' \frac{\varphi(m)}{\overline{m}^\alpha} = \varphi(0) + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\varphi(m) + \varphi(-m)}{m^\alpha} = \varphi(0) +$$

$$+ \sum_{m=1}^{\infty} \left[\frac{1}{m^\alpha} - \frac{1}{(m+1)^\alpha}\right] \sum_{k=1}^{m} [\varphi(k) + \varphi(-k)] =$$

$$= \varphi(0) + \sum_{m=1}^{\infty} \left[\frac{1}{m^\alpha} - \frac{1}{(m+1)^\alpha}\right] \left[-\varphi(0) + \sum_{|k| \leq m} \varphi(k)\right].$$

Отсюда, так как

$$\sum_{m=1}^{\infty} \left[\frac{1}{m^\alpha} - \frac{1}{(m+1)^\alpha}\right] = 1,$$

Теоретико-числовые квадратурные формулы он применил к вопросам интерполяции функций многих переменных и к приближённому решению интегральных уравнений.

He used number-theoretic quadrature formulas to interpolate multivariable functions and to solve integral equations approximately.

следует, что

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(m)}{\overline{m}^{\alpha}} = \sum_{m=1}^{\infty} \left[\frac{1}{m^{\alpha}} - \frac{1}{(m+1)^{\alpha}}\right] \sum_{|k|<m} \varphi(k).$$

При $s>1$ после s-кратного применения этого равенства, замечая, что

$$\frac{1}{m^{\alpha}} - \frac{1}{(m+1)^{\alpha}} = \alpha \int_{m}^{m+1} \frac{dx}{x^{\alpha+1}} < \frac{\alpha}{m^{\alpha+1}}, \quad (m>0)$$

получим утверждение леммы:

$$\sum_{m_1,\ldots,m_s=-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(m_1,\ldots,m_s)}{(\overline{m}_1,\ldots,\overline{m}_s)^{\alpha}} = \sum_{m_1,\ldots,m_s=1}^{\infty} \left[\frac{1}{m_1^{\alpha}} - \frac{1}{(m+1)^{\alpha}}\right] \ldots$$

$$\ldots \left[\frac{1}{m_s^{\alpha}} - \frac{1}{(m_s+1)^{\alpha}}\right] \sum_{|k_1|<m_1,\ldots,|k_s|<m_s} \varphi(k_1,\ldots,k_s) \leqslant$$

$$\leqslant \alpha^{s} \sum_{m_1\ldots m_s=1}^{\infty} \frac{1}{(m_1,\ldots,m_s)^{\alpha+1}} \sum_{|k_1|<m_1,\ldots,|k_s|<m_s} \varphi(k_1,\ldots,k_s).$$

Рассмотрим решения сравнения:

$$a_1m_1 + \ldots + a_sm_s \equiv 0 \pmod{p}, \tag{4}$$

получающиеся при фиксированных a_ν, когда величины m_ν независимо друг от друга пробегают интервал $0 \leqslant m_\nu \leqslant p-1$ $(\nu = 1, 2, \ldots, s)$. Решение $m_1 = \ldots = m_s = 0$ будем называть тривиальным.

Лемма 2. *Пусть величина $\delta_p(m)$ равна единице или нулю, смотря по тому, делится m на p или нет. Если для всякого нетривиального решения сравнения* (4) *выполняется неравенство $\overline{m}_1 \ldots \overline{m}_s \geqslant q$, то при любых целых λ, λ_ν и $n_\nu \geqslant 1$ $(\nu = 1, 2, \ldots, s)$ справедлива оценка*

$$\sum_{k_1=\lambda_1+1}^{\lambda_1+n_1} \ldots \sum_{k_s=\lambda_s+1}^{\lambda_s+n_s} \delta_p(a_1k_1+\ldots+a_sk_s+\lambda) \leqslant \begin{cases} 1 & \text{при } n_1\ldots n_s \leqslant q, \\ \dfrac{4n_1\ldots n_s}{q} & \text{при } n_1\ldots n_s > q. \end{cases} \tag{5}$$

Доказательство. При $n_1 \ldots n_s = 1$ оценка (5) тривиальна. Пусть $n_1 \ldots n_s > 1$. Утверждение леммы достаточно проверить для суммы

$$S = \sum_{k_1=1}^{n_1} \ldots \sum_{k_s=1}^{n_s} \delta_p(a_1k_1 + \ldots + a_sk_s + \mu), \tag{6}$$

совпадающей с суммой (5) при $\mu = a_1\lambda_1 + \ldots + a_s\lambda_s + \lambda$.

Рассмотрим сперва случай $n_1 \ldots n_s \leqslant q$. Допустим, что в сумме (6) найдется два слагаемых, отличных от нуля: $\delta_p(a_1k_1 + \ldots + a_sk_s + \mu) = 1$ и $\delta_p(a_1k_1' + \ldots + a_sk_s' + \mu) = 1$. Тогда, согласно определению величины $\delta_p(m)$

Теоретико-числовые
квадр
приме
интер
перем
прибл
интег

Не
quadra
multiv
integra

Будем говорить, что функция

$$f(x_1, \ldots, x_s) = \sum_{m_1, \ldots, m_s = -\infty}^{\infty} C(m_1, \ldots, m_s)\, e^{2\pi i (m_1 x_1 + \ldots + m_s x_s)} \qquad (1)$$

принадлежит классу E_s^{α}, если ее коэффициенты Фурье удовлетворяют неравенству

$$|C(m_1, \ldots, m_s)| \leqslant \frac{C}{(\overline{m}_1 \ldots \overline{m}_s)^{\alpha}}, \qquad (2)$$

где $\alpha > 1$, $\overline{m}_\nu = \max(1, |m_\nu|)$ и C — некоторая константа, не зависящая от $m_1, \ldots, m_s$ *.

Теорема 1. *Пусть $\alpha > 1$, $s \geqslant 1$, p — произвольное простое, большее s, и $N = p$. Каково бы ни было положительное $\varepsilon < \alpha - 1$, можно указать целые $a_\nu = a_\nu(p)$ $(\nu = 1, 2, \ldots, s)$ такие, что при $f(x_1, \ldots, x_s) \in E_s^{\alpha}(C)$ справедливо равенство*

$$\int_0^1 \ldots \int_0^1 f(x_1, \ldots, x_s)\, dx_1 \ldots dx_s = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} f\left(\left\{\frac{k a_1}{N}\right\}, \ldots, \left\{\frac{k a_s}{N}\right\}\right) - R,$$

где

$$|R| \leqslant \frac{C B^s}{N^{\alpha - \varepsilon}} \text{ и } B < \left(6\alpha + \frac{12\alpha^2}{\varepsilon}\right)^{2\alpha}.$$

Теоретико-числовые квадратурные формулы он применил к вопросам интерполяции функций многих переменных и к приближённому решению интегральных уравнений.

He used number-theoretic quadrature formulas to interpolate multivariable functions and to solve integral equations approximately.

Применение теоретико-числовых сеток к интегральных уравнениях 199

на p или нет. Для целых z из интервала $1 \leqslant z \leqslant p-1$ определим функцию $T_s(z)$ равенством

$$T_s(z) = \sum_{\bar{m}_1 \ldots \bar{m}_s \leqslant p}{}' \frac{\delta_p(m_1 + \ldots + m_s z^{s-1})}{\bar{m}_1 \ldots \bar{m}_s}, \tag{8}$$

где Σ' означает, что при суммировании исключается система $m_1 = \ldots = m_s = 0$. Пусть при $z = a$ достигается минимум функции $T_s(z)$. Тогда

$$T_s(a) = \min_{1 \leqslant z \leqslant p-1} T_s(z) \leqslant \frac{1}{p-1} \sum_{z=1}^{p-1} \sum_{\bar{m}_1 \ldots \bar{m}_s \leqslant p}{}' \frac{\delta_p(m_1 + \ldots + m_s z^{s-1})}{\bar{m}_1 \ldots \bar{m}_s} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{p-1} \sum_{\bar{m}_1 \ldots \bar{m}_s \leqslant p}{}' \frac{1}{\bar{m}_1 \ldots \bar{m}_s} \sum_{z=1}^{p} \delta_p(m_1 + \ldots + m_s z^{s-1}).$$

Отсюда, так как сумма

$$\sum_{z=1}^{p} \delta_p(m_1 + \ldots + m_s z^{s-1})$$

равна числу решений сравнения

$$m_1 + \ldots + m_s z^{s-1} \equiv 0 \pmod{p},$$

при произвольном $\varepsilon_1 > 0$ следует, что

$$T_s(a) \leqslant \frac{s-1}{p-1} \sum_{\bar{m}_1 \ldots \bar{m}_s \leqslant p}{}' \frac{1}{\bar{m}_1 \ldots \bar{m}_s} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{s-1}{p-1} p^{\varepsilon_1} \sum_{\bar{m}_1 \ldots \bar{m}_s < p}{}' \frac{1}{(\bar{m}_1 \ldots \bar{m}_s)^{1+\varepsilon_1}} < \frac{s}{p^{1-\varepsilon_1}} \left(1 + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^{1+\varepsilon_1}}\right)^s < \frac{s\left(3 + \frac{2}{\varepsilon_1}\right)^s}{p^{1-\varepsilon_1}}. \tag{9}$$

Пользуясь разложением (1), получим

$$R = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} f\left(\left\{\frac{ka_1}{N}\right\}, \ldots, \left\{\frac{ka_s}{N}\right\}\right) - \int_0^1 \ldots \int_0^1 f(x_1, \ldots, x_s)\, dx_1 \ldots dx_s =$$

$$= \frac{1}{p} \sum_{m_1, \ldots, m_s = -\infty}^{\infty}{}' C(m_1, \ldots, m_s) \sum_{h=1}^{p} e^{2\pi i \frac{(a_1 m_1 + \ldots + a_s m_s)k}{p}}. \tag{10}$$

Так как, очевидно, для всякого целого m

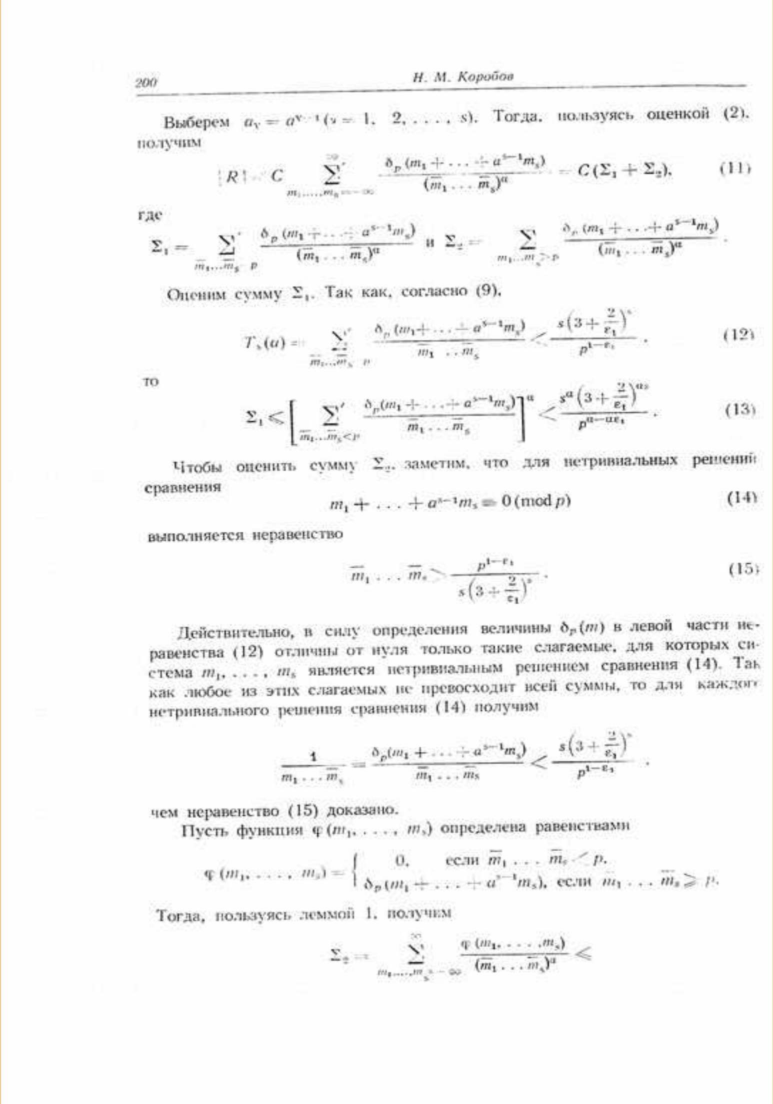
$$\frac{1}{p} \sum_{h=1}^{p} e^{2\pi i \frac{mh}{p}} = \delta_p(m),$$

то из (10) следует, что

$$R = \sum_{m_1, \ldots, m_s = -\infty}^{\infty}{}' C(m_1, \ldots, m_s)\, \delta_p(a_1 m_1 + \ldots + a_s m_s).$$

Теоретико-числовые квадратурные формулы он применил к вопросам интерполяции функций многих переменных и к приближённому решению интегральных уравнений.

He used number-theoretic quadrature formulas to interpolate multivariable functions and to solve integral equations approximately.



200 Н. М. Коробов

Выберем $a_\nu = a^{\nu-1}$ ($\nu = 1, 2, \ldots, s$). Тогда, пользуясь оценкой (2), получим

$$|R| \leqslant C \sum_{m_1,\ldots,m_s=-\infty}^{\infty}{}' \frac{\delta_p(m_1 + \ldots + a^{s-1}m_s)}{(\overline{m}_1 \ldots \overline{m}_s)^\alpha} = C(\Sigma_1 + \Sigma_2), \qquad (11)$$

где

$$\Sigma_1 = \sum_{\overline{m}_1\ldots\overline{m}_s < p}{}' \frac{\delta_p(m_1 + \ldots + a^{s-1}m_s)}{(\overline{m}_1 \ldots \overline{m}_s)^\alpha} \text{ и } \Sigma_2 = \sum_{\overline{m}_1\ldots\overline{m}_s \geqslant p} \frac{\delta_p(m_1 + \ldots + a^{s-1}m_s)}{(\overline{m}_1 \ldots \overline{m}_s)^\alpha}.$$

Оценим сумму Σ_1. Так как, согласно (9),

$$T_s(a) = \sum_{\overline{m}_1\ldots\overline{m}_s < p}{}' \frac{\delta_p(m_1 + \ldots + a^{s-1}m_s)}{\overline{m}_1 \ldots \overline{m}_s} < \frac{s\left(3 + \frac{2}{\varepsilon_1}\right)^s}{p^{1-\varepsilon_1}}, \qquad (12)$$

то

$$\Sigma_1 \leqslant \left[\sum_{\overline{m}_1\ldots\overline{m}_s < p}{}' \frac{\delta_p(m_1 + \ldots + a^{s-1}m_s)}{\overline{m}_1 \ldots \overline{m}_s}\right]^\alpha < \frac{s^\alpha\left(3 + \frac{2}{\varepsilon_1}\right)^{\alpha s}}{p^{\alpha-\alpha\varepsilon_1}}. \qquad (13)$$

Чтобы оценить сумму Σ_2, заметим, что для нетривиальных решений сравнения

$$m_1 + \ldots + a^{s-1}m_s \equiv 0 \pmod p \qquad (14)$$

выполняется неравенство

$$\overline{m}_1 \ldots \overline{m}_s > \frac{p^{1-\varepsilon_1}}{s\left(3 + \frac{2}{\varepsilon_1}\right)^s}. \qquad (15)$$

Действительно, в силу определения величины $\delta_p(m)$ в левой части неравенства (12) отличны от нуля только такие слагаемые, для которых система $m_1, \ldots, m_s$ является нетривиальным решением сравнения (14). Так как любое из этих слагаемых не превосходит всей суммы, то для каждого нетривиального решения сравнения (14) получим

$$\frac{1}{\overline{m}_1 \ldots \overline{m}_s} = \frac{\delta_p(m_1 + \ldots + a^{s-1}m_s)}{\overline{m}_1 \ldots \overline{m}_s} < \frac{s\left(3 + \frac{2}{\varepsilon_1}\right)^s}{p^{1-\varepsilon_1}},$$

чем неравенство (15) доказано.

Пусть функция $\varphi(m_1, \ldots, m_s)$ определена равенствами

$$\varphi(m_1, \ldots, m_s) = \begin{cases} 0, & \text{если } \overline{m}_1 \ldots \overline{m}_s < p, \\ \delta_p(m_1 + \ldots + a^{s-1}m_s), & \text{если } \overline{m}_1 \ldots \overline{m}_s \geqslant p. \end{cases}$$

Тогда, пользуясь леммой 1, получим

$$\Sigma_2 = \sum_{m_1,\ldots,m_s=-\infty}^{\infty}{}' \frac{\varphi(m_1, \ldots, m_s)}{(\overline{m}_1 \ldots \overline{m}_s)^\alpha} \leqslant$$

Теоретико-числовые квадратурные формулы он применил к вопросам интерполяции функций многих переменных и к приближённому решению интегральных уравнений.

He used number-theoretic quadrature formulas to interpolate multivariable functions and to solve integral equations approximately.

$$\leqslant \alpha^s \sum_{m_1,\ldots,m_s=1}^{\infty} \frac{1}{(m_1 \ldots m_s)^{\alpha+1}} \sum_{|k_1|\leqslant m_1,\ldots,|k_s|\leqslant m_s} \varphi(k_1,\ldots,k_s) \leqslant$$

$$\leqslant \alpha^s \sum_{m_1\ldots m_s \geqslant p} \frac{1}{(m_1 \ldots m_s)^{\alpha+1}} \sum_{|k_1|\leqslant m_1,\ldots,|k_s|\leqslant m_s} \delta_p(k_1 + \ldots + a^{s-1}k_s). \quad (16)$$

Далее, при $\lambda = 0$, $\lambda_\nu = -(m_\nu + 1)$ и $n_\nu = 2m_\nu + 1$ ($\nu = 1, 2, \ldots, s$) из леммы 2 следует, что для $m_1 \ldots m_s \geqslant p$ выполняется оценка

$$\sum_{|k_1|\leqslant m_1,\ldots,|k_s|\leqslant m_s} \delta_p(k_1 + \ldots + a^{s-1}k_s) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{4(2m_1+1)\ldots(2m_s+1)}{q} < 4\cdot 3^s \frac{m_1 \ldots m_s}{q}.$$

Пользуясь этой оценкой и замечая, что в силу (15)

$$q > \frac{p^{1-\varepsilon_1}}{s\left(3+\frac{2}{\varepsilon_1}\right)^s},$$

из (16), при любом положительном $\varepsilon_1 < \alpha - 1$, получим

$$\Sigma_2 \leqslant \frac{4(3\alpha)^s}{q} \sum_{m_1\ldots m_s \geqslant p} \frac{1}{(m_1 \ldots m_s)^\alpha} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{4(3\alpha)^s}{qp^{\alpha-1-\varepsilon_1}} \sum_{m_1\ldots m_s\geqslant p} \frac{1}{(m_1 \ldots m_s)^{1+\varepsilon_1}} < \frac{4s\left[3\alpha\left(3+\frac{2}{\varepsilon_1}\right)\left(1+\frac{1}{\varepsilon_1}\right)\right]^s}{p^{\alpha-2\varepsilon_1}}. \quad (17)$$

Теперь из (11) в силу (13) и (17) при $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{2\alpha}$ следует утверждение теоремы:

$$|R| \leqslant C\left[\frac{s^\alpha\left(3+\frac{2}{\varepsilon_1}\right)^{\alpha s}}{p^{\alpha-\alpha\varepsilon_1}} + \frac{4s\left(3+\frac{2}{\varepsilon_1}\right)^s\left(3\alpha+\frac{3\alpha}{\varepsilon_1}\right)^s}{p^{\alpha-2\varepsilon_1}}\right] < \frac{C\left(6\alpha+\frac{12\alpha^2}{\varepsilon}\right)^{2\alpha s}}{N^{\alpha-\varepsilon}}.$$

§ 2. О приближенном решении интегральных уравнений

Докажем прежде всего одну несложную лемму.

Лемма 3. *Пусть функции $f_1(x_1, \ldots, x_s)$ и $f_2(x_1, \ldots, x_s)$ принадлежат, соответственно, классам $E_s^\alpha(C_1)$ и $E_s^\alpha(C_2)$. Тогда при любых B_1 и B_2*

$$B_1f_1 + B_2f_2 \in E_s^\alpha(|B_1|C_1 + |B_2|C_2) \text{ и } f_1f_2 \in E_s^\alpha(AC_1C_2),$$

где $A \leqslant \left[2^{\alpha+1}\left(3+\frac{2}{\alpha-1}\right)\right]^s$.

Доказательство. Обозначим через $C_1(m_1, \ldots, m_s)$ и $C_2(m_1, \ldots, m_s)$ коэффициенты Фурье функций f_1 и f_2:

$$f_\nu(x_1,\ldots,x_s) = \sum_{m_1,\ldots,m_s=-\infty}^{\infty} C_\nu(x_1, \ldots, x_s)\, e^{2\pi i(m_1x_1+\ldots+m_sx_s)} \quad (\nu = 1, 2). \quad (18)$$

Теоретико-числовые квадратурные формулы он применил к вопросам интерполяции функций многих переменных и к приближённому решению интегральных уравнений.

He used number-theoretic quadrature formulas to interpolate multivariable functions and to solve integral equations approximately.

Согласно условию леммы,

$$|C_1(m_1, \ldots, m_s)| \leqslant \frac{C_1}{(\overline{m}_1 \ldots \overline{m}_s)^\alpha}, \quad |C_2(m_1, \ldots, m_s)| \leqslant \frac{C_2}{(\overline{m}_1 \ldots \overline{m}_s)^\alpha}$$

следовательно,

$$|B_1C_1(m_1, \ldots, m_s) + B_2C_2(m_1, \ldots, m_s)| \leqslant \frac{|B_1|C_1 + |B_2|C_2}{(\overline{m}_1 \ldots \overline{m}_s)^\alpha}.$$

Отсюда, так как

$$B_1f_1 + B_2f_2 + \sum_{m_1, \ldots, m_s=-\infty}^{\infty} [B_1C_1(m_1, \ldots, m_s) + B_2C_2(m_1, \ldots, m_s)]\, e^{2\pi i(m_1x_1 + \ldots + m_sx_s)},$$

получаем первое из утверждений леммы.

Пусть теперь $C(m_1, \ldots, m_s)$ — коэффициенты Фурье функции $f(x_1, \ldots, x_s) = f_1(x_1, \ldots, x_s) f_2(x_1, \ldots, x_s)$. Непосредственно перемножая ряды (18), получим

$$f = \sum_{n_1, \ldots, n_s=-\infty}^{\infty} \sum_{k_1, \ldots, k_s=-\infty}^{\infty} C_1(n_1, \ldots, n_s) C_2(k_1, \ldots, k_s)\, e^{2\pi i[(n_1+k_1)x_1 + \ldots + (n_s+k_s)x_s]} =$$

$$= \sum_{m_1, \ldots, m_s=-\infty}^{\infty} \Big[\sum_{n_1, \ldots, n_s=-\infty}^{\infty} C_1(n_1, \ldots, n_s) C_2(m_1 - n_1, \ldots, m_s - n_s) \Big]\, e^{2\pi i(m_1x_1 + \ldots + m_sx_s)}.$$

Следовательно,

$$|C(m_1, \ldots, m_s)| = \Big| \sum_{n_1, \ldots, n_s=-\infty}^{\infty} C_1(n_1, \ldots, n_s) C_2(m_1 - n_1, \ldots, m_s - n_s) \Big| \leqslant$$

$$\leqslant C_1C_2 \sum_{n_1, \ldots, n_s=-\infty}^{\infty} \frac{1}{[\overline{n}_1 \ldots \overline{n}_s (\overline{m_1 - n_1}) \ldots (\overline{m_s - n_s})]^\alpha} = C_1C_2\sigma(m_1) \ldots \sigma(m_s), \tag{19}$$

где через $\sigma(m)$ обозначена сумма

$$\sigma(m) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{[\overline{n}(\overline{m-n})]^\alpha}.$$

Нетрудно показать, что

$$\sigma(m) \leqslant \frac{2^{\alpha+1}\left(3 + \frac{2}{\alpha - 1}\right)}{\overline{m}^\alpha}. \tag{20}$$

Действительно, если $\overline{m} > 1$, то

$$\sigma(m) = \sum_{|n| \leqslant \frac{|m|}{2}} \frac{1}{[\overline{n}(\overline{m-n})]^\alpha} + \sum_{|n| > \frac{|m|}{2}} \frac{1}{[\overline{n}(\overline{m-n})]^\alpha} \leqslant$$

Те
квадр
приме
интер
перем
прибл
интег

Не
quadra
multiv
integra

Пусть $r \geqslant 1$ и G_r — единичный r-мерный куб. Рассмотрим кратное уравнение Фредгольма второго рода

$$\varphi(P) = \lambda \int\limits_{G_r} K(P, Q)\, \varphi(Q)\, dQ + f(P). \tag{21}$$

Будем предполагать, что свободный член и ядро уравнения принадлежат, соответственно, классам $E_r^\alpha(C)$ и $E_{2r}^\alpha(C)$.

Для произвольного ε из интервала $0 < \varepsilon < \alpha - 1$ определим величины β и γ с помощью равенств

$$\beta = 4\alpha(\alpha+1)\, r \ln\left(6\alpha + \frac{24\alpha^2}{\varepsilon}\right), \qquad \gamma = \ln C + \beta\left(1 + \frac{1}{\varepsilon}\right).$$

Пусть p — простое, удовлетворяющее условию $p > rn$, где $n = \left[\frac{\alpha\varepsilon \ln p}{\beta}\right] + 1$. Пусть, далее (см. (8)), функция $T_s(z)$ определена равенством

$$T_s(z) = \sum_{\overline{m}_1 \ldots \overline{m}_s < p}' \frac{\delta_p(m_1 + \ldots + m_s z^{s-1})}{\overline{m}_1 \ldots \overline{m}_s}$$

и при $z = a$ достигается минимум $T_{rn}(z)$. Тогда справедлива следующая.

Теорема 2. *Если $|\lambda| < e^{-\gamma}$, то при $N = p$ для решения уравнения (21) выполняется равенство*

$$\varphi(P) = f(P) + \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} \sum_{\nu=1}^{n} \lambda^\nu K(P, M_{1,k}) \ldots K(M_{\nu-1,k}, M_{\nu,k})\, f(M_{\nu,k}) + O\left(\frac{1}{N^{\alpha-\varepsilon}}\right),$$

где $M_{\nu,k} = \left(\left\{\frac{k a^{r(\nu-1)}}{N}\right\}, \ldots, \left\{\frac{k a^{r\nu-1}}{N}\right\}\right)$.

Теоретико-числовые квадратурные формулы он применил к вопросам интерполяции функций многих переменных и к приближённому решению интегральных уравнений.

He used number-theoretic quadrature formulas to interpolate multivariable functions and to solve integral equations approximately.

Доказательство. Известно, что при достаточно малом λ решение уравнения

$$\varphi(P) = \lambda \int_{G_r} K(P, Q)\,\varphi(Q)\,dQ + f(P) \quad (22)$$

можно представить в виде ряда

$$\varphi(P) = f(P) + \sum_{\nu=1}^{\infty} \lambda^{\nu} \int_{G_{r\nu}} K(P, Q_1) \ldots K(Q_{\nu-1}, Q_\nu) f(Q_\nu)\,dQ_1 \ldots dQ_\nu, \quad (23)$$

где $G_{r\nu}$ — единичный $r\nu$-мерный куб.

Обозначим через $C(m_1, \ldots, m_r)$ коэффициенты Фурье функции $f(P)$. Так как, по условию, $f(P) \in E_r^{\alpha}(C)$, то

$$|f(P)| = \left| \sum_{m_1, \ldots, m_r = -\infty}^{\infty}{}' C(m_1, \ldots, m_r)\, e^{2\pi i (m_1 x_1 + \ldots + m_r x_r)} \right| \leq$$

$$\leq C \sum_{m_1, \ldots, m_r = -\infty}^{\infty}{}' \frac{1}{(\overline{m}_1 \ldots \overline{m}_r)^{\alpha}} = C\left(1 + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^{\alpha}}\right)^r < C\left(3 + \frac{2}{\alpha - 1}\right)^r. \quad (24)$$

Аналогичная оценка справедлива, очевидно, и для ядра уравнения (22):

$$|K(P, Q)| \leq C\left(3 + \frac{2}{\alpha - 1}\right)^{2r}. \quad (25)$$

Из оценок (24) и (25) следует, что

$$|K(P, Q_1) \ldots K(Q_{\nu-1}, Q_\nu) f(Q_\nu)| \leq C\left(3 + \frac{2}{\alpha - 1}\right)^r \left| C\left(3 + \frac{2}{\alpha - 1}\right)^{2r} \right|^{\nu}.$$

Теперь из (23) получим

$$\varphi(P) = f(P) + \sum_{\nu=1}^{n} \lambda^{\nu} \int_{G_{r\nu}} K(P, Q_1) \ldots K(Q_{\nu-1}, Q_\nu) f(Q_\nu)\,dQ_1 \ldots dQ_\nu + R_1, \quad (26)$$

где в силу выбора величины λ

$$|R_1| = \left| \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \lambda^{\nu} \int_{G_{r\nu}} K(P, Q_1) \ldots K(Q_{\nu-1}, Q_\nu) f(Q_\nu)\,dQ_1 \ldots dQ_\nu \right| \leq$$

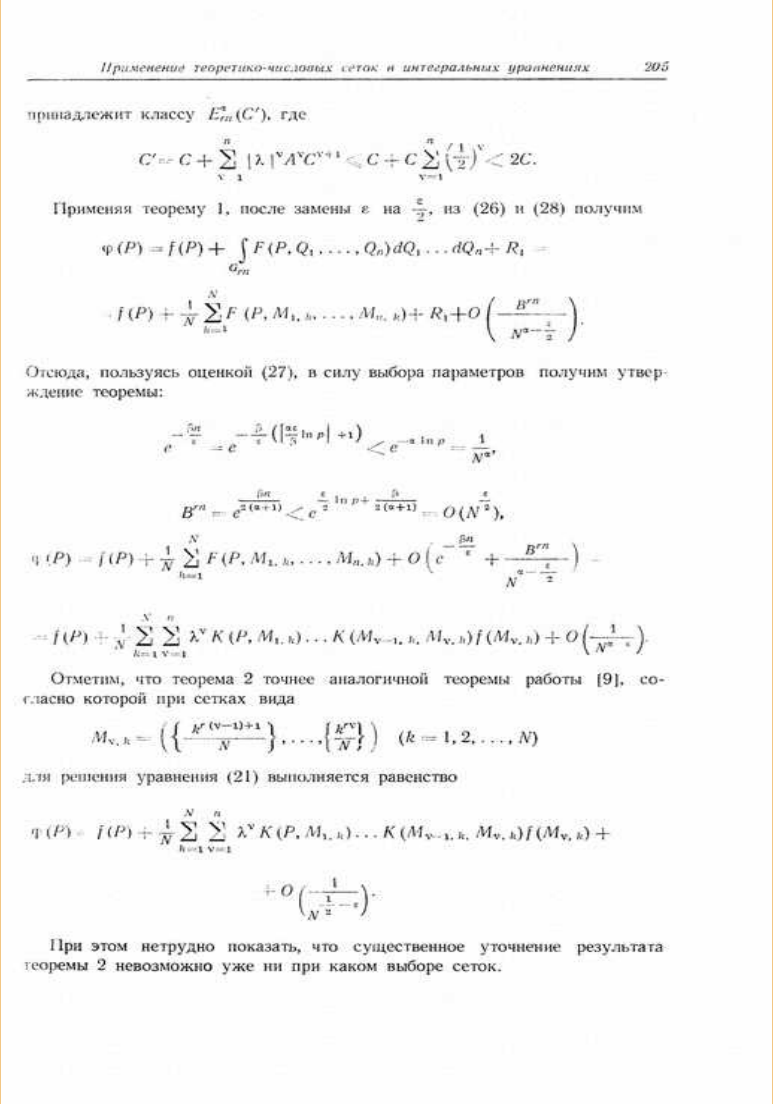
$$\leq C\left(3 + \frac{2}{\alpha - 1}\right)^r \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \left| \lambda C\left(3 + \frac{2}{\alpha - 1}\right)^{2r} \right|^{\nu} = O\left(e^{-\frac{\beta n}{r}}\right). \quad (27)$$

Согласно определению, можно считать, что каждая функция из класса $E_s^{\alpha}(C)$ принадлежит классу $E_{s_1}^{\alpha}(C)$, где $s_1 \geq s$. Поэтому, рассматривая функции $K(Q_{\nu-1}, Q_\nu)$ и $f(Q_\nu)$ ($\nu = 1, 2, \ldots, n$) как функции всех rn переменных, соответствующих величинам $Q_1, \ldots, Q_n$, в силу леммы 3 получим, что функция

$$F(P, Q_1, \ldots, Q_n) = f(P) + \sum_{1}^{n} \lambda^{\nu} K(P, Q_1) \ldots K(Q_{\nu-1}, Q_\nu) f(Q_\nu) \quad (28)$$

Теоретико-числовые квадратурные формулы он применил к вопросам интерполяции функций многих переменных и к приближённому решению интегральных уравнений.

He used number-theoretic quadrature formulas to interpolate multivariable functions and to solve integral equations approximately.



Применение теоретико-числовых сеток и интегральных уравнениях 205

принадлежит классу $E^{\alpha}_{rn}(C')$, где

$$C' = C + \sum_{\nu=1}^{n} |\lambda|^{\nu} A^{\nu} C^{\nu+1} \leqslant C + C \sum_{\nu=1}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^{\nu} < 2C.$$

Применяя теорему 1, после замены ε на $\frac{\varepsilon}{2}$, из (26) и (28) получим

$$\varphi(P) = f(P) + \int_{G_{rn}} F(P, Q_1, \ldots, Q_n)\, dQ_1 \ldots dQ_n + R_1 =$$

$$= f(P) + \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} F(P, M_{1,k}, \ldots, M_{n,k}) + R_1 + O\left(\frac{B^{rn}}{N^{\alpha - \frac{\varepsilon}{2}}}\right).$$

Отсюда, пользуясь оценкой (27), в силу выбора параметров получим утверждение теоремы:

$$e^{-\frac{\beta n}{\varepsilon}} = e^{-\frac{\beta}{\varepsilon}\left(\left[\frac{\alpha\varepsilon}{\beta} \ln p\right] + 1\right)} < e^{-\alpha \ln p} = \frac{1}{N^{\alpha}},$$

$$B^{rn} = e^{\frac{\beta n}{2(\alpha+1)}} < e^{\frac{\varepsilon}{2} \ln p + \frac{\beta}{2(\alpha+1)}} = O(N^{\frac{\varepsilon}{2}}),$$

$$\varphi(P) = f(P) + \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} F(P, M_{1,k}, \ldots, M_{n,k}) + O\left(e^{-\frac{\beta n}{\varepsilon}} + \frac{B^{rn}}{N^{\alpha - \frac{\varepsilon}{2}}}\right) =$$

$$= f(P) + \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} \sum_{\nu=1}^{n} \lambda^{\nu} K(P, M_{1,k}) \ldots K(M_{\nu-1,k}, M_{\nu,k}) f(M_{\nu,k}) + O\left(\frac{1}{N^{\alpha-\varepsilon}}\right).$$

Отметим, что теорема 2 точнее аналогичной теоремы работы [9], согласно которой при сетках вида

$$M_{\nu,k} = \left(\left\{\frac{k^{r(\nu-1)+1}}{N}\right\}, \ldots, \left\{\frac{k^{r\nu}}{N}\right\}\right) \quad (k = 1, 2, \ldots, N)$$

для решения уравнения (21) выполняется равенство

$$\varphi(P) = f(P) + \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} \sum_{\nu=1}^{n} \lambda^{\nu} K(P, M_{1,k}) \ldots K(M_{\nu-1,k}, M_{\nu,k}) f(M_{\nu,k}) +$$

$$+ O\left(\frac{1}{N^{\frac{1}{2}-\varepsilon}}\right).$$

При этом нетрудно показать, что существенное уточнение результата теоремы 2 невозможно уже ни при каком выборе сеток.

Теоретико-числовые квадратурные формулы он применил к вопросам интерполяции функций многих переменных и к приближённому решению интегральных уравнений.

He used number-theoretic quadrature formulas to interpolate multivariable functions and to solve integral equations approximately.

§ 3. Об интерполяции функций многих переменных

Первые результаты по интерполяции функций с помощью теоретико-числовых сеток

$$M_k = \left(\left\{\frac{ka_1}{N}\right\}, \dots, \left\{\frac{ka_s}{N}\right\}\right), \quad (k = 1, 2, \dots, N), \tag{29}$$

где $a_1, \dots, a_s$ — оптимальные коэффициенты, были получены в работах [6] и [11]. Применяя к коэффициентам Фурье функции $f \in E_s^\alpha$, как это сделано в работе [11], квадратурные формулы, построенные с помощью сеток (29), получаем интерполяционную формулу

$$f(x_1, \dots, x_s) = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} f\left(\frac{ka_1}{N}, \dots, \frac{ka_s}{N}\right)\psi_k(x_1, \dots, x_s) + O\left(N^{-\frac{\alpha-1}{2}} \ln^{\frac{s+1}{2}(\alpha-1)} N\right),$$

где функции $\psi_k(x_1, \dots, x_s)$ определены равенством

$$\psi_k(x_1, \dots, x_s) = \sum_{\overline{m}_1 \dots \overline{m}_s \leq \sqrt{N}\ln^{-\frac{s}{2}} N} e^{2\pi i\left[m_1\left(x_1 - \frac{ka_1}{N}\right) + \dots + m_s\left(x_s - \frac{ka_s}{N}\right)\right]}.$$

Покажем, что, используя значения производных функции $f(x_1, \dots, x_s)$, можно получить интерполяционные формулы, погрешность которых (для лучшего случая) будет равна $O(N^{-\frac{\alpha}{2}} \ln^{\frac{\alpha s}{2}} N)$.

Пусть $B_\nu(x)$ — ν-й полином Бернулли. Известно, что

$$B_1(x) = x - \frac{1}{2}, \; B_\nu(\{x\}) = -\nu! \sum_{m=-\infty}^{\infty}{}' \frac{e^{2\pi imx}}{(2\pi im)^\nu} \quad (\nu \geq 2). \tag{30}$$

$$B_\nu'(x) = \nu B_{\nu-1}(x) \text{ и } B_\nu(1) - B_\nu(0) = \begin{cases} 1, & \text{если } \nu = 1, \\ 0, & \text{если } \nu > 1. \end{cases} \tag{31}$$

Лемма 4. *Если функция $f(x)$ принадлежит классу E_1^α и имеет непрерывные производные $f^{(\nu)}(x)$ $(\nu = 1, 2, \dots, r)$, то*

$$f(x) = \int_0^1 f(y)\,dy + \frac{(-1)^{\nu-1}}{\nu!}\int_0^1 f^{(\nu)}(x+y) B_\nu(y)\,dy \quad (\nu \leq r).$$

Доказательство. Пользуясь тем, что $B_1(x) = x - \frac{1}{2}$, получим

$$\int_0^1 f'(x+y) B_1(y)\,dy = f(x+y) B_1(y)\Big|_0^1 - \int_0^1 f(x+y)\,dy = f(x) - \int_0^1 f(y)\,dy.$$

Теоретико-числовые квадратурные формулы он применил к вопросам интерполяции функций многих переменных и к приближённому решению интегральных уравнений.

He used number-theoretic quadrature formulas to interpolate multivariable functions and to solve integral equations approximately.

Отсюда следует равенство

$$f(x) = \int_0^1 f(y)\,dy + \int_0^1 f'(x+y) B_1(y)\,dy,$$

совпадающее с утверждением леммы при $\nu = 1$.

Применим индукцию. Пусть $\nu \geqslant 2$ и лемма верна при $\nu - 1$. Тогда, пользуясь равенствами (31), получим

$$\frac{(-1)^{\nu-1}}{\nu!}\int_0^1 f^{(\nu)}(x+y) B_\nu(y)\,dy = \frac{(-1)^{\nu-1}}{\nu!} f^{(\nu-1)}(x+y) B_\nu(y)\Big|_0^1 -$$

$$-\frac{(-1)^{\nu-1}}{\nu!}\int_0^1 f^{(\nu-1)}(x+y) B'_\nu(y)\,dy =$$

$$= \frac{(-1)^{\nu-2}}{(\nu-1)!}\int_0^1 f^{(\nu-1)}(x+y) B_{\nu-1}(y)\,dy = f(x) - \int_0^1 f(y)\,dy.$$

Следовательно,

$$f(x) = \int_0^1 f(y)\,dy + \frac{(-1)^{\nu-1}}{\nu!}\int_0^1 f^{(\nu)}(x+y) B_\nu(y)\,dy,$$

чем лемма доказана полностью.

Легко показать, что утверждение леммы 4 можно записать в виде

$$f(x) = \int_0^1 \sum_{\tau=0}^1 f^{(\tau\nu)}(y)\,\varphi_\nu^\tau(y-x)\,dy \quad (\nu \leqslant r), \tag{32}$$

где функция $\varphi_\nu(x)$ определена равенством

$$\varphi_\nu(x) = \frac{(-1)^{\nu-1}}{\nu!} B_\nu(\{x\}).$$

Действительно, это утверждение непосредственно следует из равенства

$$\int_0^1 \sum_{\tau=0}^1 f^{(\tau\nu)}(y)\,\varphi_\nu^\tau(y-x)\,dy = \int_0^1 f(y)\,dy + \frac{(-1)^{\nu-1}}{\nu!}\int_0^1 f^{(\nu)}(y) B_\nu(\{y-x\})\,dy =$$

$$= \int_0^1 f(y)\,dy + \frac{(-1)^{\nu-1}}{\nu!}\int_0^1 f^{(\nu)}(x+y) B_\nu(y)\,dy.$$

Ради краткости записи при $s \geqslant 2$ введем обозначение

$$f^{n_1,\ldots,n_s}(x_1,\ldots,x_s) = \frac{\partial^{n_1+\cdots+n_s}}{\partial x_1^{n_1}\cdots\partial x_s^{n_s}} f(x_1,\ldots,x_s). \tag{33}$$

(Если $s = 1$, то вместо (33) будем, как обычно, писать $f^{(n_1)}(x_1)$).

Теоретико-числовые квадратурные формулы он применил к вопросам интерполяции функций многих перем

прибл

интегр

Не

quadra

multiv

integra

Лемма 5. *Пусть функция $f(x_1, \ldots, x_s)$ принадлежит классу E_s^α и имеет непрерывные производные $f^{n_1, \ldots, n_s}(x_1, \ldots, x_s)$ $(0 \leqslant n_\nu \leqslant r)$. Тогда*

$$f(x_1, \ldots, x_s) = \int_0^1 \ldots \int_0^1 \sum_{\tau_1, \ldots, \tau_s = 0}^{1} f^{\tau_1\nu, \ldots, \tau_s\nu}(y_1, \ldots, y_s)\, \varphi_\nu^{\tau_1}(y_1 - x_1) \ldots$$

$$\ldots \varphi_\nu^{\tau_s}(y_s - x_s)\, dy_1 \ldots dy_s \qquad (\nu \leqslant r).$$

ведливо, так

Тогда для

$(y_1 - x_1) \ldots$

(34)

$y_s - x_s)\, dy \ldots$

в равенство

оптимальные

), принадле-

$- x_1) \ldots$

(35)

Теорема 3. *Пусть $\alpha > 3$, $r = \left[\frac{\alpha+1}{2}\right]$ и $a_1, \ldots, a_s$ — оптимальные коэффициенты по модулю p. Тогда для функций $f(x_1, \ldots, x_s)$, принадлежащих классу E_s^α, при $N = p$ справедливо равенство*

$$f(x_1, \ldots, x_s) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} \sum_{\tau_1, \ldots, \tau_s = 0}^{1} f^{\tau_1 r, \ldots, \tau_s r}\left(\frac{ka_1}{N}, \ldots, \frac{ka_s}{N}\right) \varphi_r^{\tau_1}\left(\frac{ka_1}{N} - x_1\right) \ldots$$

$$\ldots \varphi_r^{\tau_s}\left(\frac{ka_s}{N} - x_s\right) + O(N^{-\beta} \ln^{\beta s} N), \qquad (35)$$

где $\beta = \min(r, \alpha - r)$.

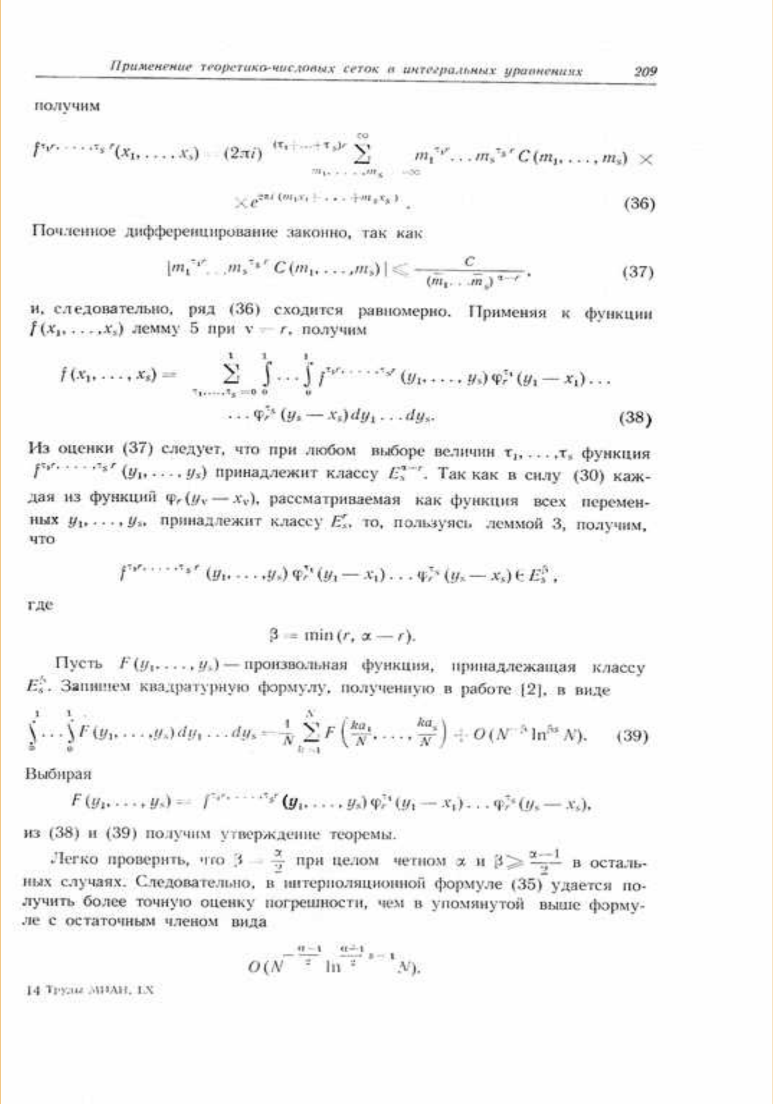
$\alpha - r = \alpha - \left[\ldots\right] \geqslant \alpha - \ldots$

Отсюда, так как $\alpha > 3$, следует, что $\alpha - r > 1$. Дифференцируя ряд

$$f(x_1, \ldots, x_s) = \sum_{m_1, \ldots, m_s = -\infty}^{\infty} C(m_1, \ldots, m_s)\, e^{2\pi i (m_1 x_1 + \ldots + m_s x_s)},$$

Теоретико-числовые квадратурные формулы он применил к вопросам интерполяции функций многих переменных и к приближённому решению интегральных уравнений.

He used number-theoretic quadrature formulas to interpolate multivariable functions and to solve integral equations approximately.



Применение теоретико-числовых сеток в интегральных уравнениях 209

получим

$$f^{\tau_1 r,\dots,\tau_s r}(x_1,\dots,x_s) = (2\pi i)^{(\tau_1+\dots+\tau_s)r} \sum_{m_1,\dots,m_s=-\infty}^{\infty} m_1^{\tau_1 r}\dots m_s^{\tau_s r}\, C(m_1,\dots,m_s) \times$$
$$\times e^{2\pi i(m_1x_1+\dots+m_sx_s)}. \qquad (36)$$

Почленное дифференцирование законно, так как

$$|m_1^{\tau_1 r}\dots m_s^{\tau_s r}\, C(m_1,\dots,m_s)| \leqslant \frac{C}{(\bar m_1\dots\bar m_s)^{\alpha-r}}, \qquad (37)$$

и, следовательно, ряд (36) сходится равномерно. Применяя к функции $f(x_1,\dots,x_s)$ лемму 5 при $\nu = r$, получим

$$f(x_1,\dots,x_s) = \sum_{\tau_1,\dots,\tau_s=0}^{1}\int_0^1\dots\int_0^1 f^{\tau_1 r,\dots,\tau_s r}(y_1,\dots,y_s)\,\varphi_r^{\tau_1}(y_1-x_1)\dots$$
$$\dots\varphi_r^{\tau_s}(y_s-x_s)\,dy_1\dots dy_s. \qquad (38)$$

Из оценки (37) следует, что при любом выборе величин $\tau_1,\dots,\tau_s$ функция $f^{\tau_1 r,\dots,\tau_s r}(y_1,\dots,y_s)$ принадлежит классу $E_s^{\alpha-r}$. Так как в силу (30) каждая из функций $\varphi_r(y_\nu-x_\nu)$, рассматриваемая как функция всех переменных $y_1,\dots,y_s$, принадлежит классу E_s^r, то, пользуясь леммой 3, получим, что

$$f^{\tau_1 r,\dots,\tau_s r}(y_1,\dots,y_s)\,\varphi_r^{\tau_1}(y_1-x_1)\dots\varphi_r^{\tau_s}(y_s-x_s)\in E_s^{\beta},$$

где

$$\beta = \min(r, \alpha-r).$$

Пусть $F(y_1,\dots,y_s)$ — произвольная функция, принадлежащая классу E_s^{β}. Запишем квадратурную формулу, полученную в работе [2], в виде

$$\int_0^1\dots\int_0^1 F(y_1,\dots,y_s)\,dy_1\dots dy_s = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} F\left(\frac{ka_1}{N},\dots,\frac{ka_s}{N}\right) + O(N^{-\beta}\ln^{\beta s}N). \qquad (39)$$

Выбирая

$$F(y_1,\dots,y_s) = f^{\tau_1 r,\dots,\tau_s r}(y_1,\dots,y_s)\,\varphi_r^{\tau_1}(y_1-x_1)\dots\varphi_r^{\tau_s}(y_s-x_s),$$

из (38) и (39) получим утверждение теоремы.

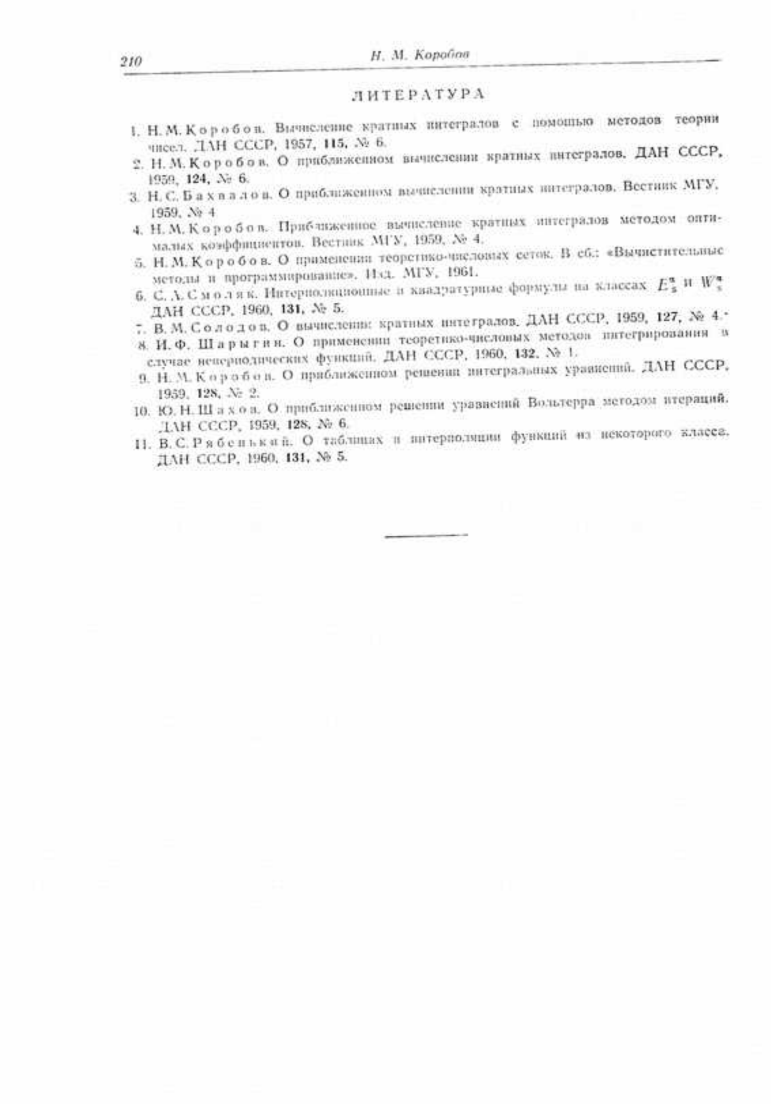
Легко проверить, что $\beta = \frac{\alpha}{2}$ при целом четном α и $\beta \geqslant \frac{\alpha-1}{2}$ в остальных случаях. Следовательно, в интерполяционной формуле (35) удается получить более точную оценку погрешности, чем в упомянутой выше формуле с остаточным членом вида

$$O(N^{-\frac{\alpha-1}{2}}\ln^{\frac{\alpha+1}{2}s-1}N).$$

14 Труды МИАН, LX

Теоретико-числовые квадратурные формулы он применил к вопросам интерполяции функций многих переменных и к приближённому решению интегральных уравнений.

He used number-theoretic quadrature formulas to interpolate multivariable functions and to solve integral equations approximately.

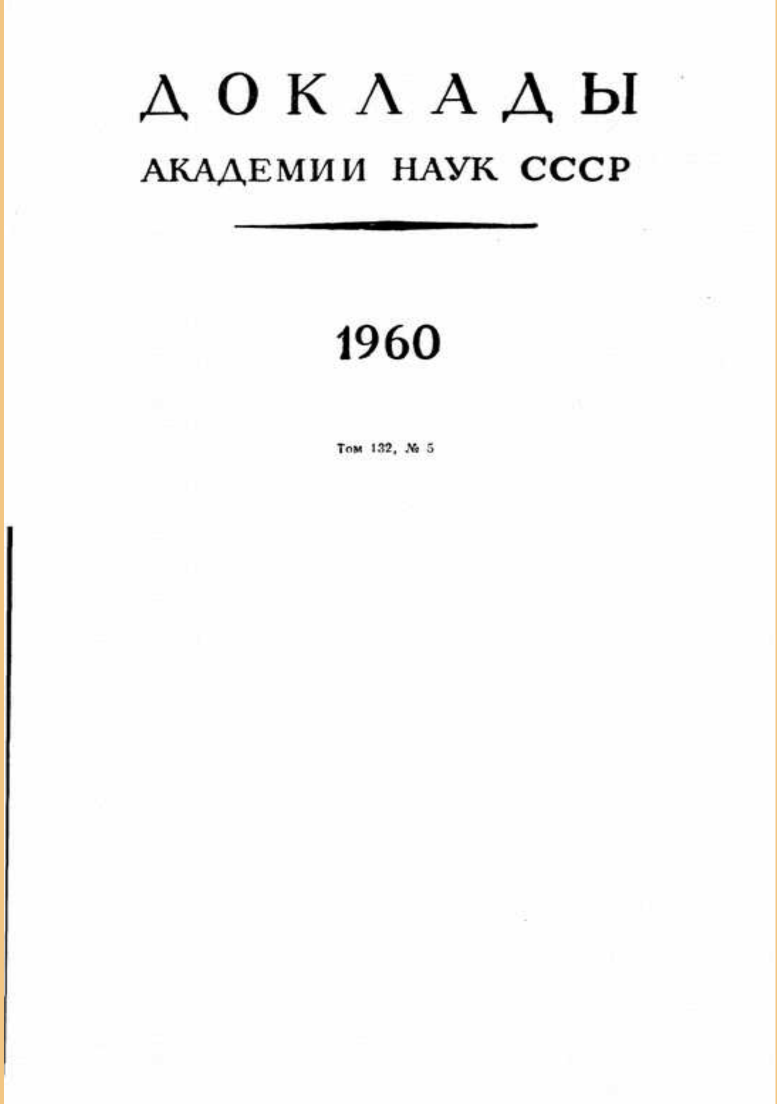


ЛИТЕРАТУРА

1. Н. М. Коробов. Вычисление кратных интегралов с помощью методов теории чисел. ДАН СССР, 1957, **115**, № 6.
2. Н. М. Коробов. О приближенном вычислении кратных интегралов. ДАН СССР, 1959, **124**, № 6.
3. Н. С. Бахвалов. О приближенном вычислении кратных интегралов. Вестник МГУ, 1959, № 4
4. Н. М. Коробов. Приближенное вычисление кратных интегралов методом оптимальных коэффициентов. Вестник МГУ, 1959, № 4.
5. Н. М. Коробов. О применении теоретико-числовых сеток. В сб.: «Вычислительные методы и программирование». Изд. МГУ, 1961.
6. С. А. Смоляк. Интерполяционные и квадратурные формулы на классах E_s^α и W_s^α ДАН СССР, 1960, **131**, № 5.
7. В. М. Солодов. О вычислении кратных интегралов. ДАН СССР, 1959, **127**, № 4.
8. И. Ф. Шарыгин. О применении теоретико-числовых методов интегрирования в случае непериодических функций. ДАН СССР, 1960, **132**, № 1.
9. Н. М. Коробов. О приближенном решении интегральных уравнений. ДАН СССР, 1959, **128**, № 2.
10. Ю. Н. Шахов. О приближенном решении уравнений Вольтерра методом итераций. ДАН СССР, 1959, **128**, № 6.
11. В. С. Рябенький. О таблицах и интерполяции функций из некоторого класса. ДАН СССР, 1960, **131**, № 5.

Николай Михайлович предложил также экономные алгоритмы для получения оптимальных коэффициентов теоретико-числовых сеток.

Nikolay Mikhailovich also offered the spering algorithms for getting optimal coefficients of number-theoretic frames.



ДОКЛАДЫ
АКАДЕМИИ НАУК СССР

1960

Том 132, № 5

Николай Михайлович предложил также экономные алгоритмы для получения оптимальных коэффициентов теоретико-числовых сеток.

Ni… offered… getting optimal coefficients of number-theoretic frames.

Доклады Академии наук СССР
1960. Том 132, № 5

МАТЕМАТИКА

Н. М. КОРОБОВ

СВОЙСТВА И ВЫЧИСЛЕНИЕ ОПТИМАЛЬНЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ

(*Представлено академиком И. М. Виноградовым 5 II 1960*)

Будем говорить, что функция

$$f(x_1, \ldots, x_s) = \sum_{m_1, \ldots, m_s = -\infty}^{\infty} C(m_1, \ldots, m_s)\, e^{2\pi i (m_1 x_1 + \ldots + m_s x_s)} \qquad (1)$$

принадлежит классу E_s^{α}, если $C(m_1, \ldots, m_s) = O((\bar{m}_1 \ldots \bar{m}_s)^{-\alpha})$, где $\alpha > 1$ и $\bar{m}_\nu = \max(1, |m_\nu|)$. Обозначим через $-R$ погрешность квадратурной формулы

$$H(z) = \frac{3^s}{p} \sum_{k=1}^{p} \left(1 - 2\left\{\frac{k}{p}\right\}\right)^2 \cdots \left(1 - 2\left\{\frac{kz^{s-1}}{p}\right\}\right)^2. \qquad (3)$$

Теорема 1. *Если при $z = a$ достигается минимум функции $H(z)$ на интервале $1 \leqslant z < p$, то целые $1, a, \ldots, a^{s-1}$ будут оптимальными коэффициентами для тех классов E_s^{α}, у которых $\alpha \geqslant 2$.*

эффициентами для тех классов E_s^{α}, у которых $\alpha \geqslant 2$.

Доказательство. Обозначим через $\delta_p(m)$ единицу или нуль, смотря по тому, выполняется сравнение $m \equiv 0 \pmod p$ или нет. Воспользуемся равенствами

$$\delta_p(m) = \frac{1}{p} \sum_{k=1}^{p} e^{2\pi i \frac{mk}{p}}, \quad 3(1 - 2\{x\})^2 = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{e^{2\pi i m x}}{\psi(m)}, \qquad (4)$$

где при $m \neq 0$ $\psi(m) = \frac{\pi^2}{6} m^2$ и $\psi(0) = 1$. Из (3) после преобразований, аналогичных проведенным в [1], так как $\psi(m) \geqslant \bar{m}^2$, получим

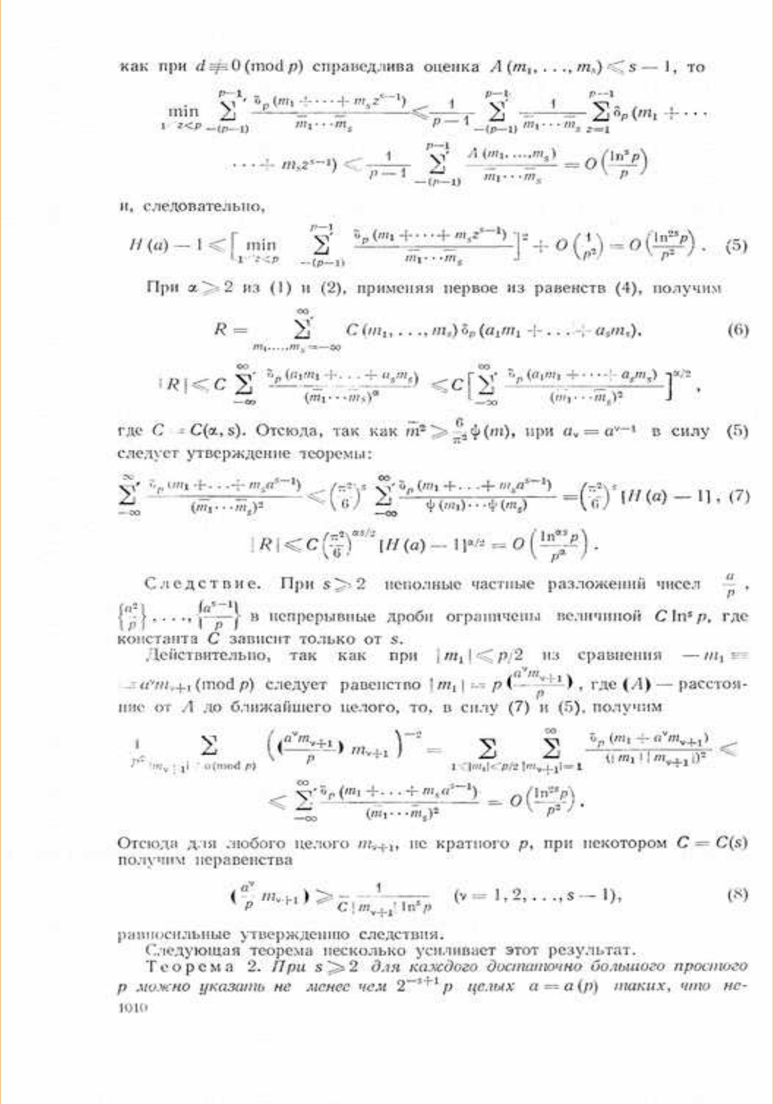
$$H(z) - 1 = \sum_{-\infty}^{\infty}{}' \frac{\delta_p(m_1 + \ldots + m_s z^{s-1})}{\psi(m_1) \cdots \psi(m_s)} \leqslant \sum_{-(p-1)}^{p-1}{}' \frac{\delta_p(m_1 + \ldots + m_s z^{s-1})}{(\bar{m}_1 \cdots \bar{m}_s)^2} + O\left(\frac{1}{p^2}\right),$$

где Σ' означает суммирование по системам $(m_1, \ldots, m_s) \neq (0, \ldots, 0)$, в которых соответственно $|m_\nu| \leqslant \infty$ или $|m_\nu| \leqslant p - 1$ $(\nu = 1, 2, \ldots, s)$.

Пусть d — общий наибольший делитель чисел $m_1, \ldots, m_s$ и $A(m_1, \ldots, m_s)$ — число решений сравнения $m_1 + \ldots + m_s z^{s-1} \equiv 0 \pmod p$. Так

Николай Михайлович предложил также экономные алгоритмы для получения оптимальных коэффициентов теоретико-числовых сеток.

Nikolay Mikhailovich also offered the spering algorithms for getting optimal coefficients of number-theoretic frames.



как при $d \not\equiv 0 \pmod p$ справедлива оценка $A(m_1, \ldots, m_s) \leqslant s-1$, то

$$\min_{1 \leqslant z < p} \sum_{-(p-1)}^{p-1}{}' \frac{\delta_p(m_1 + \cdots + m_s z^{s-1})}{\bar m_1 \cdots \bar m_s} \leqslant \frac{1}{p-1} \sum_{-(p-1)}^{p-1}{}' \frac{1}{\bar m_1 \cdots \bar m_s} \sum_{z=1}^{p-1} \delta_p(m_1 + \cdots$$

$$\cdots + m_s z^{s-1}) \leqslant \frac{1}{p-1} \sum_{-(p-1)}^{p-1}{}' \frac{A(m_1, \ldots, m_s)}{\bar m_1 \cdots \bar m_s} = O\left(\frac{\ln^s p}{p}\right)$$

и, следовательно,

$$H(a) - 1 \leqslant \left[\min_{1 \leqslant z < p} \sum_{-(p-1)}^{p-1}{}' \frac{\delta_p(m_1 + \cdots + m_s z^{s-1})}{\bar m_1 \cdots \bar m_s}\right]^2 + O\left(\frac{1}{p^2}\right) = O\left(\frac{\ln^{2s} p}{p^2}\right). \quad (5)$$

При $\alpha \geqslant 2$ из (1) и (2), применяя первое из равенств (4), получим

$$R = \sum_{m_1, \ldots, m_s = -\infty}^{\infty}{}' C(m_1, \ldots, m_s)\, \delta_p(a_1 m_1 + \ldots + a_s m_s), \quad (6)$$

$$|R| \leqslant C \sum_{-\infty}^{\infty}{}' \frac{\delta_p(a_1 m_1 + \ldots + a_s m_s)}{(\bar m_1 \cdots \bar m_s)^\alpha} \leqslant C \left[\sum_{-\infty}^{\infty}{}' \frac{\delta_p(a_1 m_1 + \cdots + a_s m_s)}{(\bar m_1 \cdots \bar m_s)^2}\right]^{\alpha/2},$$

где $C = C(\alpha, s)$. Отсюда, так как $\bar m^2 \geqslant \frac{6}{\pi^2}\psi(m)$, при $a_\nu = a^{\nu-1}$ в силу (5) следует утверждение теоремы:

$$\sum_{-\infty}^{\infty}{}' \frac{\delta_p(m_1 + \ldots + m_s a^{s-1})}{(\bar m_1 \cdots \bar m_s)^2} \leqslant \left(\frac{\pi^2}{6}\right)^s \sum_{-\infty}^{\infty}{}' \frac{\delta_p(m_1 + \ldots + m_s a^{s-1})}{\psi(m_1) \cdots \psi(m_s)} = \left(\frac{\pi^2}{6}\right)^s [H(a) - 1], \quad (7)$$

$$|R| \leqslant C \left(\frac{\pi^2}{6}\right)^{\alpha s/2} [H(a) - 1]^{\alpha/2} = O\left(\frac{\ln^{\alpha s} p}{p^\alpha}\right).$$

Следствие. При $s \geqslant 2$ неполные частные разложений чисел $\frac{a}{p}$, $\left\{\frac{a^2}{p}\right\}, \ldots, \left\{\frac{a^{s-1}}{p}\right\}$ в непрерывные дроби ограничены величиной $C \ln^s p$, где константа C зависит только от s.

Действительно, так как при $|m_1| \leqslant p/2$ из сравнения $-m_1 \equiv a^\nu m_{\nu+1} \pmod p$ следует равенство $|m_1| = p\left(\frac{a^\nu m_{\nu+1}}{p}\right)$, где (A) — расстояние от A до ближайшего целого, то, в силу (7) и (5), получим

$$\frac{1}{p^2} \sum_{m_{\nu+1} \not\equiv 0 \pmod p} \left(\left(\frac{a^\nu m_{\nu+1}}{p}\right) m_{\nu+1}\right)^{-2} = \sum_{1 \leqslant |m_1| < p/2} \sum_{|m_{\nu+1}|=1}^{\infty} \frac{\delta_p(m_1 + a^\nu m_{\nu+1})}{(|m_1|\,|m_{\nu+1}|)^2} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{-\infty}^{\infty}{}' \frac{\delta_p(m_1 + \ldots + m_s a^{s-1})}{(\bar m_1 \cdots \bar m_s)^2} = O\left(\frac{\ln^{2s} p}{p^2}\right).$$

Отсюда для любого целого $m_{\nu+1}$, не кратного p, при некотором $C = C(s)$ получим неравенства

$$\left(\frac{a^\nu}{p} m_{\nu+1}\right) \geqslant \frac{1}{C\,|m_{\nu+1}|\ln^s p} \quad (\nu = 1, 2, \ldots, s-1), \quad (8)$$

равносильные утверждению следствия.

Следующая теорема несколько усиливает этот результат.

Теорема 2. *При $s \geqslant 2$ для каждого достаточно большого простого p можно указать не менее чем $2^{-s+1} p$ целых $a = a(p)$ таких, что не-*

1010

Николай Михайлович предложил также экономные алгоритмы для получения оптимальных коэффициентов теоретико-числовых сеток.

Ni[...] offere[...] getting optimal coefficients of number-theoretic frames.

Теорема 2. *При $s \geqslant 2$ для каждого достаточно большого простого p можно указать не менее чем $2^{-s+1}p$ целых $a = a(p)$ таких, что неполные частные чисел $\frac{a}{p}, \left\{\frac{a^2}{p}\right\}, \ldots, \left\{\frac{a^{s-1}}{p}\right\}$ ограничены соответственно величинами $2(5 \ln p), 2(5 \ln p)^2, \ldots, 2(5 \ln p)^{s-1}$.*

полные частные чисел $\frac{a}{p}, \left\{\frac{a^2}{p}\right\}, \ldots, \left\{\frac{a^{s-1}}{p}\right\}$ ограничены соответственно величинами $2(5 \ln p), 2(5 \ln p)^2, \ldots, 2(5 \ln p)^{s-1}$.

Доказательство. Для $\nu = 1, 2, \ldots, s-1$ введем обозначения

$$p_\nu = \left[\frac{p}{2^\nu}\right], \quad q_\nu = \left[\frac{p}{2 \cdot 5^\nu \ln^\nu p}\right] + 1, \quad S_\nu(z) = \sum'_{\bar{m}_1 \ldots \bar{m}_{\nu+1} < q_\nu} \delta_p(m_1 + \cdots + m_{\nu+1} z^\nu).$$

Пусть $z_1, \ldots, z_{p-1}$ — такая перестановка чисел $1, 2, \ldots, p-1$, при которой $S_1(z_1) \geqslant S_1(z_2) \geqslant \cdots \geqslant S_1(z_{p-1})$. Тогда при достаточно больших p

$$S_1(z_{p_1}) \leqslant \frac{1}{p_1} \sum_{j=1}^{p_1} S_1(z_j) \leqslant \frac{1}{p_1} \sum'_{\bar{m}_1 \bar{m}_2 < q_1} 1 < 1,$$

и, в силу определения $S_\nu(z)$, получим $S_1(z_{p_1}) = \cdots = S_1(z_{p-1}) = 0$. Отсюда следует, что при $a = z_j$, где $p_1 \leqslant j < p$, для нетривиальных решений сравнения $m_1 + am_2 \equiv 0 \pmod p$ выполняется неравенство $\bar{m}_1 \bar{m}_2 \geqslant q_1$. Но тогда, так как $|m_1| = \left(\frac{am_2}{p}\right) p$, при $m_2 \not\equiv 0 \pmod p$ получим

$$\left(\frac{am_2}{p}\right) \geqslant \frac{q_1}{p\,|m_2|} > \frac{1}{10\,|m_2|\ln p}.$$

Из этого неравенства, так как $p - p_1 \geqslant p_1$, получаем утверждение теоремы для случая $s = 2$.

[...]

$\left\{\frac{a^k}{p}\right\}$ ограничены величиной $2 \cdot 5^k \ln^k p$ и, так как $p_{k-1} - p_k + 1 > p_k$, получаем утверждение теоремы.

Неравенства (8) и (9) можно рассматривать как следствия более общего утверждения, связывающего понятие оптимальных коэффициентов с вопросами линейных диофантовых приближений.

Теорема 3. *Пусть $(a_\nu, p) = 1$ и $a_\nu b_\nu \equiv 1 \pmod p$ $(\nu = 1, 2, \ldots, s)$. Необходимым и достаточным условием того, чтобы величины $a_1, \ldots, a_s$ были оптимальными коэффициентами, является выполнение неравенств*

$$\left|\frac{b_{\nu-1}a_\nu}{p} m_\nu + \ldots + \frac{b_{\nu-1}a_s}{p} m_s - n\right| > \frac{B}{\bar{m}_\nu \cdots \bar{m}_s \ln^\gamma p} \quad (\nu = 2, 3, \ldots, s) \qquad (10)$$

для любых целых $n, m_\nu, \ldots, m_s$, удовлетворяющих условию $a_\nu m_\nu + \ldots + a_s m_s \not\equiv 0 \pmod p$, где $B = B(s) > 0$ и $\gamma = \gamma(s) \geqslant 0$.

Доказательство основано на использовании соотношения

$$R = \sum_{-\infty}^{\infty}{}' \frac{\delta_p(a_1 m_1 + \ldots + a_s m_s)}{(\bar{m}_1 \cdots \bar{m}_s)^\alpha},$$

получающегося из (6) при $C(m_1, \ldots, m_s) = (\bar{m}_1 \ldots \bar{m}_s)^{-\alpha}$; при доказательстве достаточности условий (10) используется также теорема 2 работы ([8]).

Николай Михайлович предложил также экономные алгоритмы для получения оптимальных коэффициентов теоретико-числовых сеток.

Ni

offered

getting

number-theoretic frames.

полные частные чисел $\frac{a}{p}, \left\{\frac{a^2}{p}\right\}, \ldots, \left\{\frac{a^{s-1}}{p}\right\}$ *ограничены соответственно величинами* $2(5\ln p), 2(5\ln p)^2, \ldots, 2(5\ln p)^{s-1}$.

Доказательство. Для $\nu = 1, 2, \ldots, s-1$ введем обозначения

$$p_\nu = \left[\frac{p}{2^\nu}\right], \quad q_\nu = \left[\frac{p}{2\cdot 5^\nu \ln^\nu p}\right] + 1, \quad S_\nu(z) = \sum'_{\overline{m}_1\cdots\overline{m}_{\nu+1}<q_\nu} \delta_p(m_1 + \cdots + m_{\nu+1}z^\nu).$$

Пусть $z_1, \ldots, z_{p-1}$ — такая перестановка чисел $1, 2, \ldots, p-1$, при которой $S_1(z_1) \geqslant S_1(z_2) \geqslant \cdots \geqslant S_1(z_{p-1})$. Тогда при достаточно больших p

$$S_1(z_{p_1}) \leqslant \frac{1}{p_1}\sum_{j=1}^{p_1} S_1(z_j) \leqslant \frac{1}{p_1}\sum'_{\overline{m}_1\overline{m}_2<q_1} 1 < 1,$$

и, в силу определения $S_\nu(z)$, получим $S_1(z_{p_1}) = \cdots = S_1(z_{p-1}) = 0$. Отсюда следует, что при $a = z_j$, где $p_1 \leqslant j < p$, для нетривиальных решений сравнения $m_1 + am_2 \equiv 0 \pmod p$ выполняется неравенство $\overline{m}_1\overline{m}_2 \geqslant q_1$. Но тогда, так как $|m_1| = \left(\frac{am_2}{p}\right)p$, при $m_2 \not\equiv 0 \pmod p$ получим

Теорема 3. *Пусть* $(a_\nu, p) = 1$ *и* $a_\nu b_\nu \equiv 1 \pmod p$ $(\nu = 1, 2, \ldots, s)$. *Необходимым и достаточным условием того, чтобы величины* $a_1, \ldots, a_s$ *были оптимальными коэффициентами, является выполнение неравенств*

$$\left|\frac{b_{\nu-1}a_\nu}{p}m_\nu + \ldots + \frac{b_{\nu-1}a_s}{p}m_s - n\right| > \frac{B}{\overline{m}_\nu\cdots\overline{m}_s\ln^\gamma p} \quad (\nu = 2, 3, \ldots, s) \qquad (10)$$

для любых целых $n, m_\nu, \ldots, m_s$, *удовлетворяющих условию* $a_\nu m_\nu + \ldots + a_s m_s \not\equiv 0 \pmod p$, *где* $B = B(s) > 0$ *и* $\gamma = \gamma(s) \geqslant 0$.

Неравенства (8) и (9) можно рассматривать как следствия более общего утверждения, связывающего понятие оптимальных коэффициентов с вопросами линейных диофантовых приближений.

Теорема 3. *Пусть* $(a_\nu, p) = 1$ *и* $a_\nu b_\nu \equiv 1 \pmod p$ $(\nu = 1, 2, \ldots, s)$. *Необходимым и достаточным условием того, чтобы величины* $a_1, \ldots, a_s$ *были оптимальными коэффициентами, является выполнение неравенств*

$$\left|\frac{b_{\nu-1}a_\nu}{p}m_\nu + \ldots + \frac{b_{\nu-1}a_s}{p}m_s - n\right| > \frac{B}{\overline{m}_\nu\cdots\overline{m}_s\ln^\gamma p} \quad (\nu = 2, 3, \ldots, s) \qquad (10)$$

для любых целых $n, m_\nu, \ldots, m_s$, *удовлетворяющих условию* $a_\nu m_\nu + \ldots + a_s m_s \not\equiv 0 \pmod p$, *где* $B = B(s) > 0$ *и* $\gamma = \gamma(s) \geqslant 0$.

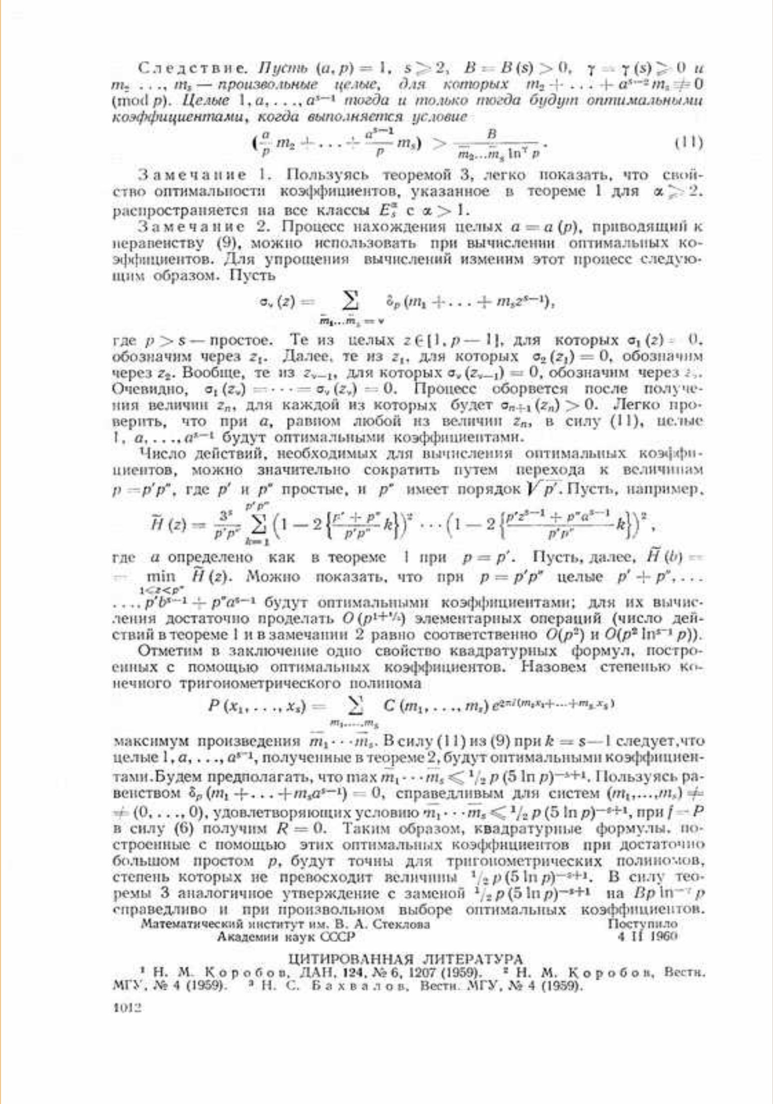
Доказательство основано на использовании соотношения

$$R = \sum_{-\infty}^{\infty}{}' \frac{\delta_p(a_1m_1 + \ldots + a_sm_s)}{(\overline{m}_1\cdots\overline{m}_s)^\alpha},$$

получающегося из (6) при $C(m_1, \ldots, m_s) = (\overline{m}_1\ldots\overline{m}_s)^{-\alpha}$; при доказательстве достаточности условий (10) используется также теорема 2 работы (8).

Николай Михайлович предложил также экономные алгоритмы для получения оптимальных коэффициентов теоретико-числовых сеток.

Nikolay Mikhailovich also offered the spering algorithms for getting optimal coefficients of number-theoretic frames.



Следствие. *Пусть* $(a, p) = 1$, $s \geqslant 2$, $B = B(s) > 0$, $\gamma = \gamma(s) \geqslant 0$ *и* $m_2, \ldots, m_s$ — *произвольные целые, для которых* $m_2 + \ldots + a^{s-2} m_s \not\equiv 0 \pmod p$. *Целые* $1, a, \ldots, a^{s-1}$ *тогда и только тогда будут оптимальными коэффициентами, когда выполняется условие*

$$\left(\frac{a}{p} m_2 + \ldots + \frac{a^{s-1}}{p} m_s\right) > \frac{B}{\bar m_2 \ldots \bar m_s \ln^{\gamma} p}. \qquad (11)$$

Замечание 1. Пользуясь теоремой 3, легко показать, что свойство оптимальности коэффициентов, указанное в теореме 1 для $\alpha \geqslant 2$, распространяется на все классы E_s^{α} с $\alpha > 1$.

Замечание 2. Процесс нахождения целых $a = a(p)$, приводящий к неравенству (9), можно использовать при вычислении оптимальных коэффициентов. Для упрощения вычислений изменим этот процесс следующим образом. Пусть

$$\sigma_{\nu}(z) = \sum_{\bar m_1 \ldots \bar m_s = \nu} \delta_p(m_1 + \ldots + m_s z^{s-1}),$$

где $p > s$ — простое. Те из целых $z \in [1, p-1]$, для которых $\sigma_1(z) = 0$, обозначим через z_1. Далее, те из z_1, для которых $\sigma_2(z_1) = 0$, обозначим через z_2. Вообще, те из $z_{\nu-1}$, для которых $\sigma_{\nu}(z_{\nu-1}) = 0$, обозначим через z_{ν}. Очевидно, $\sigma_1(z_{\nu}) = \cdots = \sigma_{\nu}(z_{\nu}) = 0$. Процесс оборвется после получения величин z_n, для каждой из которых будет $\sigma_{n+1}(z_n) > 0$. Легко проверить, что при a, равном любой из величин z_n, в силу (11), целые $1, a, \ldots, a^{s-1}$ будут оптимальными коэффициентами.

Число действий, необходимых для вычисления оптимальных коэффициентов, можно значительно сократить путем перехода к величинам $p = p'p''$, где p' и p'' простые, и p'' имеет порядок $\sqrt{p'}$. Пусть, например,

$$\tilde H(z) = \frac{3^s}{p'p''} \sum_{k=1}^{p'p''} \left(1 - 2\left\{\frac{p' + p''}{p'p''} k\right\}\right)^2 \cdots \left(1 - 2\left\{\frac{p'z^{s-1} + p''a^{s-1}}{p'p''} k\right\}\right)^2,$$

где a определено как в теореме 1 при $p = p'$. Пусть, далее, $\tilde H(b) = \min\limits_{1 \leqslant z < p''} \tilde H(z)$. Можно показать, что при $p = p'p''$ целые $p' + p'', \ldots, p'b^{s-1} + p''a^{s-1}$ будут оптимальными коэффициентами; для их вычисления достаточно проделать $O(p^{1+1/2})$ элементарных операций (число действий в теореме 1 и в замечании 2 равно соответственно $O(p^2)$ и $O(p^2 \ln^{s-1} p)$).

Отметим в заключение одно свойство квадратурных формул, построенных с помощью оптимальных коэффициентов. Назовем степенью конечного тригонометрического полинома

$$P(x_1, \ldots, x_s) = \sum_{m_1, \ldots, m_s} C(m_1, \ldots, m_s) e^{2\pi i (m_1 x_1 + \ldots + m_s x_s)}$$

максимум произведения $\bar m_1 \cdots \bar m_s$. В силу (11) из (9) при $k = s-1$ следует, что целые $1, a, \ldots, a^{s-1}$, полученные в теореме 2, будут оптимальными коэффициентами. Будем предполагать, что $\max \bar m_1 \cdots \bar m_s \leqslant {}^1\!/_2\, p (5 \ln p)^{-s+1}$. Пользуясь равенством $\delta_p(m_1 + \ldots + m_s a^{s-1}) = 0$, справедливым для систем $(m_1, \ldots, m_s) \neq (0, \ldots, 0)$, удовлетворяющих условию $\bar m_1 \cdots \bar m_s \leqslant {}^1\!/_2\, p (5 \ln p)^{-s+1}$, при $f = P$ в силу (6) получим $R = 0$. Таким образом, квадратурные формулы, построенные с помощью этих оптимальных коэффициентов при достаточно большом простом p, будут точны для тригонометрических полиномов, степень которых не превосходит величины ${}^1\!/_2\, p (5 \ln p)^{-s+1}$. В силу теоремы 3 аналогичное утверждение с заменой ${}^1\!/_2\, p (5 \ln p)^{-s+1}$ на $Bp \ln^{-\gamma} p$ справедливо и при произвольном выборе оптимальных коэффициентов.

Математический институт им. В. А. Стеклова
Академии наук СССР

Поступило
4 II 1960

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Н. М. Коробов, ДАН, 124, № 6, 1207 (1959). [2] Н. М. Коробов, Вестн. МГУ, № 4 (1959). [3] Н. С. Бахвалов, Вестн. МГУ, № 4 (1959).

Николай Михайлович предложил также экономные алгоритмы для получения оптимальных коэффициентов теоретико-числовых сеток.

ДОКЛАДЫ
АКАДЕМИИ НАУК СССР
1982
ТОМ 267 №2
(ОТДЕЛЬНЫЙ ОТТИСК)

Nikolay Mikhailovich also offered the spering algorithms for getting optimal coefficients of number-theoretic frames.

Николай Михайлович предложил также экономные алгоритмы для получения оптимальных коэффициентов теоретико-числовых сеток.

Ni

offered the spering algorithms for getting optimal coefficients of number-theoretic frames.

Т е о р е м а 1. *При произвольном натуральном n целые $a_1, a_2, \ldots, a_s$, определенные равенствами $a_1 = a_{1n}, a_2 = a_{2n}, \ldots, a_s = a_{sn}$, будут оптимальными коэффициентами по модулю $p = 2^n$.*

УДК 512

Н.М. КОРОБОВ

О ВЫЧИСЛЕНИИ ОПТИМАЛЬНЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ

(Представлено академиком А.А. Дородницыным 8 IV 1982)

В работе [1] было введено понятие оптимальных коэффициентов и указано их значение для приближенного вычисления многомерных интегралов произвольной кратности s. Различные алгоритмы для вычисления s-мерных оптимальных коэффициентов по модулю p, где p – число узлов квадратурной формулы, были получены в работах [1–3]. Для реализации этих алгоритмов требовалось выполнение $O(p^2)$ или $O(p^{1+1/3})$ элементарных арифметических операций.

В настоящей работе при $p = 2^n$ предложены более экономные алгоритмы, реализация которых требует выполнения $O(p)$ или $O(p \ln p)$ операций.

Пусть n, s – натуральные и $x_1, x_2, \ldots, x_s$ – нечетные числа. Через $\sum_m^*$ будем обозначать суммирование по нечетным m. При $\nu = 1, 2, \ldots, n$ определим функцию $h_\nu(x_1, x_2, \ldots, x_s)$ с помощью равенства

$$h_\nu(x_1, x_2, \ldots, x_s) = \frac{1}{2^\nu} \sum_{m=1}^{2^\nu}{}^* \left(2n - 2\nu + \frac{1}{\| mx_1/2^\nu \|}\right) \ldots \left(2n - 2\nu + \frac{1}{\| mx_s/2^\nu \|}\right),$$

где $\| mx_j/2^\nu \|$ – расстояние от $mx_j/2^\nu$ до ближайшего целого.

Т е о р е м а 1. *При произвольном натуральном n целые $a_1, a_2, \ldots, a_s$, определенные равенствами $a_1 = a_{1n}, a_2 = a_{2n}, \ldots, a_s = a_{sn}$, будут оптимальными коэффициентами по модулю $p = 2^n$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. При $\nu = 1, 2, \ldots, n$ введем обозначения

$$h_\nu = h_\nu(a_{1\nu}, a_{2\nu}, \ldots, a_{s\nu}),$$

$$H_\nu = \sum_{k=1}^{\nu-1} \sum_{m=1}^{2^k}{}^* \frac{1}{\| ma_{1k}/2^k \| \ldots \| ma_{sk}/2^k \|} + (2^{n+1} - 2^\nu) h_\nu.$$

Замечая, что при $\nu \geqslant 2$ для нечетных a и m выполняется оценка

$$(1) \quad \frac{1}{2} \sum_{z=0}^{1} \frac{1}{\| m(a + 2^{\nu-1}z)/2^\nu \|} \leqslant 2 + \frac{1}{\| ma/2^{\nu-1} \|},$$

получим

$$(2) \quad h_\nu \leqslant \frac{1}{2^s} \sum_{z_1, \ldots, z_s = 0}^{1} h_\nu(a_{1\nu-1} + 2^{\nu-1}z_1, \ldots, a_{s\nu-1} + 2^{\nu-1}z_s) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2^\nu} \sum_{m=1}^{2^\nu}{}^* \left(2n - 2\nu + 2 + \frac{1}{\| ma_{1\nu-1}/2^{\nu-1} \|}\right) \ldots \left(2n - 2\nu + 2 + \frac{1}{\| ma_{s\nu-1}/2^{\nu-1} \|}\right) = h_{\nu-1}.$$

Николай Михайлович предложил также экономные алгоритмы для получения оптимальных коэффициентов теоретико-числовых сеток.

Nikolay Mikhailovich also offered the spering algorithms for getting optimal coefficients of number-theoretic frames.

Так как $a_{11} = a_{21} = \ldots a_{s1} = 1$, то

$$h_1 = \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{2}{}^{*}\left(2n-2+\frac{1}{\| m/2 \|}\right)\ldots\left(2n-2+\frac{1}{\| m/2 \|}\right) = 2^{s-1}n^s,$$

и, следовательно, из (2) получим

$$h_n \leqslant h_{n-1} \leqslant \ldots \leqslant h_1 \leqslant 2^{s-1}n^s.$$

Оценим теперь величины H_ν. Очевидно,

$$H_1 = (2^{n+1}-2)\,h_1 = (2^n-1)\,2^s n^s < (2n)^s\,2^n.$$

Так как

$$h_\nu = \frac{1}{2^\nu}\sum_{m=1}^{2^\nu}{}^{*}\left(2n-2\nu+\frac{1}{\| ma_{1\nu}/2^\nu \|}\right)\ldots\left(2n-2\nu+\frac{1}{\| ma_{s\nu}/2^\nu \|}\right),$$

то при $\nu \geqslant 2$ получим

$$H_\nu \leqslant \sum_{k=1}^{\nu-2}\sum_{m=1}^{2^\nu}{}^{*}\frac{1}{\| ma_{1k}/2^k \| \ldots \| ma_{sk}/2^k \|} + 2^{\nu-1}h_{\nu-1} + (2^{n+1}-2^\nu)\,h_\nu \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{\nu-2}\sum_{m=1}^{2^k}{}^{*}\frac{1}{\| ma_{1k}/2^k \| \ldots \| ma_{sk}/2^k \|} + (2^{n+1}-2^{\nu-1})\,h_{\nu-1} = H_{\nu-1},$$

и, следовательно,

(3) $$H_n \leqslant H_{n-1} \leqslant \ldots \leqslant H_1 < (2n)^s\,2^n.$$

Согласно определению величин a_j и a_{jk} при $k = 1, 2, \ldots, n$ выполняются сравнения

$$a_1 \equiv a_{1k}, \ldots, a_s \equiv a_{sk} \pmod{2^k}.$$

Но тогда, очевидно,

$$\sum_{m=1}^{2^n-1}\frac{1}{\| ma_1/2^n \| \ldots \| ma_s/2^n \|} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{m=1}^{2^k}{}^{*}\frac{1}{\| ma_1/2^k \| \ldots \| ma_s/2^k \|} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1}\sum_{m=1}^{2^k}{}^{*}\frac{1}{\| ma_{1k}/2^k \| \ldots \| ma_{sk}/2^k \|} + \sum_{m=1}^{2^n}{}^{*}\frac{1}{\| ma_{1n}/2^n \| \ldots \| ma_{sn}/2^n \|} = H_n$$

Отсюда в силу (3) следует, что

(4) $$\sum_{m=1}^{2^n-1}\frac{1}{\| ma_1/2^n \| \ldots \| ma_s/2^n \|} < (2n)^s\,2^n.$$

Определим b и $b_2, \ldots, b_s$ с помощью сравнений

$$a_1 b \equiv 1,\ a_2 b \equiv b_2, \ldots,\ a_s b \equiv b_s \pmod{2^n}.$$

Тогда из (4) получим

$$\sum_{m=1}^{2^n-1}\frac{1}{\| m/2^n \| \cdot \| b_2 m/2^n \| \ldots \| b_s m/2^n \|} < (2n)^s\,2^n,$$

$$\sum_{m=1}^{2^n-1}\frac{1}{m\,\| b_2 m/2^n \| \ldots \| b_s m/2^n \|} < (2n)^s$$

290

Николай Михайлович предложил также экономные алгоритмы для получения оптим… теорет…

Ni… offered… getting… numbe…

и, следовательно, при $m = 1, 2, \dots, 2^{n-1}$ выполняется неравенство

$$m\left|\frac{b_2 m}{2^n}\right| \dots \left|\frac{b_s m}{2^n}\right| > \frac{1}{(2n)^s}.$$

Так как $p = 2^n$, то $2n < 3\ln p$ и

Пусть n, s — натуральные и $x_1, x_2, \dots, x_s$ — нечетные числа. При $\nu = 1, r = s$ и при $2 \leqslant \nu \leqslant n$, $1 \leqslant r \leqslant s$ определим функцию $h_{r\nu}(x_1, x_2, \dots, x_s)$ с помощью равенства

$$(6)\qquad h_{r\nu}(x_1, x_2, \dots, x_s) =$$

$$= \frac{1}{2^\nu} \sum_{m=1}^{2^\nu}{}^{*} \prod_{j=1}^{r}\left(2n - 2\nu + \frac{1}{\| m x_j / 2^\nu \|}\right) \prod_{j=r+1}^{s}\left(2n - 2\nu + 2 + \frac{1}{\| m x_j / 2^{\nu-1} \|}\right).$$

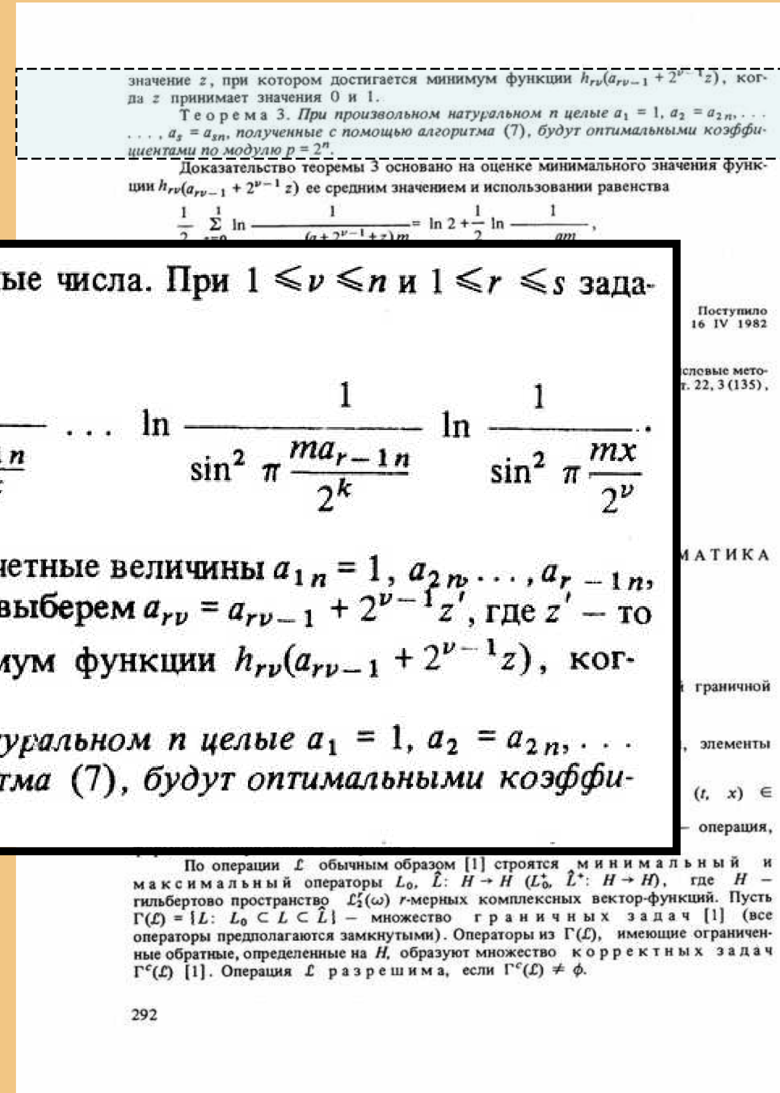
Выберем $a_{11} = a_{21} = \dots = a_{s1} = 1$. Пусть $r \geqslant 1$, $\nu \geqslant 2$ и известны нечетные величины $a_{1\nu-1}, \dots, a_{s\nu-1}, a_{1\nu}, \dots, a_{r-1\nu}$. Тогда при $2 \leqslant \nu \leqslant n$ определим $a_{r\nu}$ с помощью равенства $a_{r\nu} = a_{r\nu-1} + 2^{\nu-1} z'$, где z' — то значение z, при котором достигается минимум функции $h_{r\nu}(a_{1\nu}, \dots, a_{r-1\nu}, a_{r\nu-1} + 2^{\nu-1} z, a_{r+1\nu-1}, \dots, a_{s\nu-1})$, когда z принимает значения 0 и 1.

Теорема 2. *При произвольном натуральном n целые $a_1 = a_{1n}, \dots, a_s = a_{sn}$, полученные с помощью алгоритма (6), будут оптимальными коэффициентами по модулю $p = 2^n$.*

Предположим, что $r \geqslant 2$, $\nu \geqslant 2$ и известны нечетные величины $a_{1n} = 1, a_{2n}, \dots, a_{r-1n}$, $a_{r1} = 1, a_{r2}, \dots, a_{r\nu-1}$. Тогда при $2 \leqslant \nu \leqslant n$ выберем $a_{r\nu} = a_{r\nu-1} + 2^{\nu-1} z'$, где z' — то

Николай Михайлович предложил также экономные алгоритмы для получения оптимальных коэффициентов теорет

Ni
offered
getting
numbe



значение z, при котором достигается минимум функции $h_{r\nu}(a_{r\nu-1}+2^{\nu-1}z)$, когда z принимает значения 0 и 1.

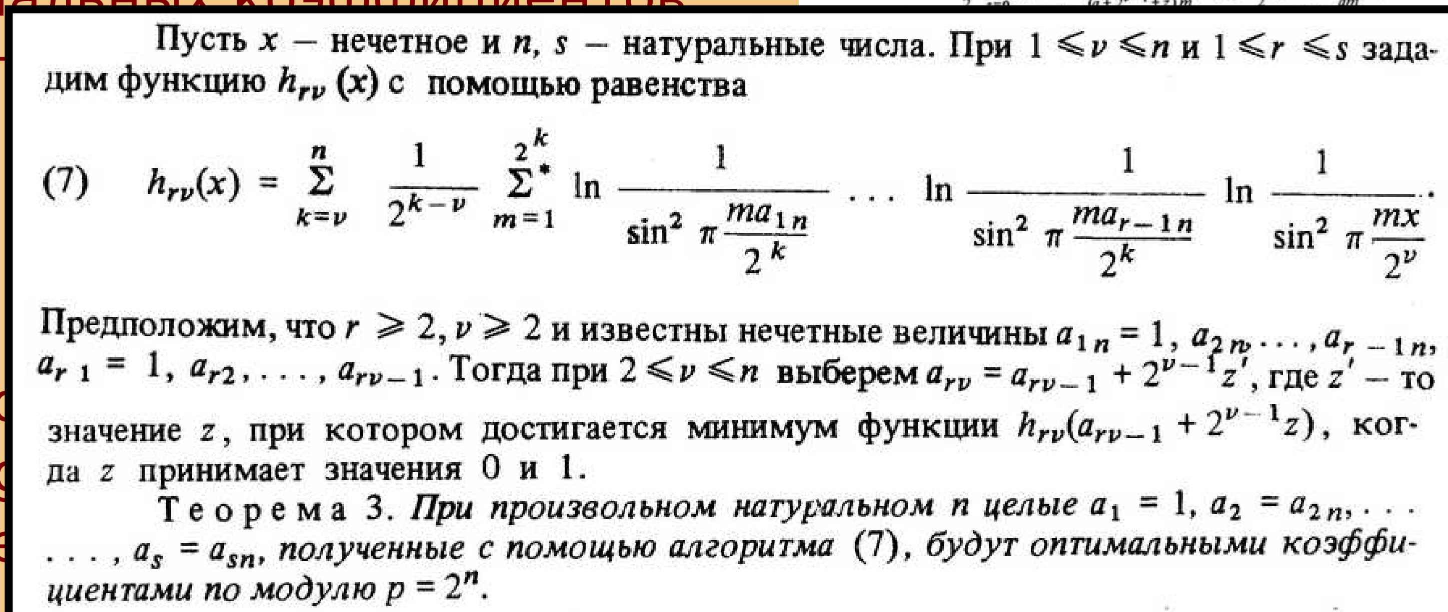
Теорема 3. *При произвольном натуральном n целые $a_1 = 1, a_2 = a_{2n}, \ldots, a_s = a_{sn}$, полученные с помощью алгоритма (7), будут оптимальными коэффициентами по модулю $p = 2^n$.*

Доказательство теоремы 3 основано на оценке минимального значения функции $h_{r\nu}(a_{r\nu-1}+2^{\nu-1}z)$ ее средним значением и использовании равенства

Поступило 16 IV 1982

По операции $\mathcal{L}$ обычным образом [1] строятся минимальный и максимальный операторы L_0, $\hat{L}$: $H \to H$ (L_0^+, $\hat{L}^+$: $H \to H$), где H — гильбертово пространство $\mathcal{L}_2^r(\omega)$ r-мерных комплексных вектор-функций. Пусть $\Gamma(\mathcal{L}) = \{L: L_0 \subset L \subset \hat{L}\}$ — множество граничных задач [1] (все операторы предполагаются замкнутыми). Операторы из $\Gamma(\mathcal{L})$, имеющие ограниченные обратные, определенные на H, образуют множество корректных задач $\Gamma^c(\mathcal{L})$ [1]. Операция $\mathcal{L}$ разрешима, если $\Gamma^c(\mathcal{L}) \neq \phi$.

292



Пусть x — нечетное и n, s — натуральные числа. При $1 \leqslant \nu \leqslant n$ и $1 \leqslant r \leqslant s$ зададим функцию $h_{r\nu}(x)$ с помощью равенства

(7) $$h_{r\nu}(x) = \sum_{k=\nu}^{n} \frac{1}{2^{k-\nu}} \sum_{m=1}^{2^k}{}^{*} \ln \frac{1}{\sin^2 \pi \frac{ma_{1n}}{2^k}} \cdots \ln \frac{1}{\sin^2 \pi \frac{ma_{r-1\,n}}{2^k}} \ln \frac{1}{\sin^2 \pi \frac{mx}{2^\nu}}.$$

Предположим, что $r \geqslant 2$, $\nu \geqslant 2$ и известны нечетные величины $a_{1n} = 1, a_{2n}, \ldots, a_{r-1\,n}$, $a_{r1} = 1, a_{r2}, \ldots, a_{r\nu-1}$. Тогда при $2 \leqslant \nu \leqslant n$ выберем $a_{r\nu} = a_{r\nu-1} + 2^{\nu-1}z'$, где z' — то значение z, при котором достигается минимум функции $h_{r\nu}(a_{r\nu-1} + 2^{\nu-1}z)$, когда z принимает значения 0 и 1.

Теорема 3. *При произвольном натуральном n целые $a_1 = 1$, $a_2 = a_{2n}, \ldots$ $\ldots, a_s = a_{sn}$, полученные с помощью алгоритма (7), будут оптимальными коэффициентами по модулю $p = 2^n$.*

Николай Михайлович предложил также экономные алгоритмы для получения оптимальных коэффициентов теоретико-числовых сеток.

Ni

offered the spering algorithms for getting optimal coefficients of number-theoretic frames.

THEOREM 1. *For an arbitrary positive integer n the integer $a_1, \ldots, a_s$ defined by the equalities $a_1 = a_{1n}, \ldots, a_s = a_{sn}$ are optimal coefficients modulo $p = 2^n$.*

Докл. Акад. Наук СССР
Том 267 (1982), № 2

Soviet Math. Dokl.
Vol. 26 (1982), No. 3

UDC 512

ON THE COMPUTATION OF OPTIMAL COEFFICIENTS

N. M. KOROBOV

The concept of optimal coefficients was introduced in [1], and their significance for the approximate computation of multidimensional integrals of arbitrary multiplicity s was indicated. Various algorithms for computing s-dimensional optimal coefficients modulo p, where p is the number of nodes of the quadrature formula, were obtained in [1]–[3]. The realization of these algorithms required the execution of $O(p^2)$ or $O(p^{1+1/3})$ elementary arithmetic operations.

In this note we present more economical algorithms for $p = 2^n$ whose realization requires the execution of $O(p)$ or $O(p \ln p)$ operations.

Let n and s be positive integers, and $x_1, \ldots, x_s$ odd integers. Summation over odd integers m is indicated by Σ_m^*. For $\nu = 1, \ldots, n$ we define the function $h_\nu(x_1, \ldots, x_s)$ by

where $z_1', \ldots, z_s'$ are those values of the variables at which the function

$$h_\nu(a_{1,\nu-1} + 2^{\nu-1}z_1, \ldots, a_{s,\nu-1} + 2^{\nu-1}z_s)$$

attains a minimum as the variables $z_1, \ldots, z_s$ run through the values 0 and 1 independently.

THEOREM 1. *For an arbitrary positive integer n the integer $a_1, \ldots, a_s$ defined by the equalities $a_1 = a_{1n}, \ldots, a_s = a_{sn}$ are optimal coefficients modulo $p = 2^n$.*

PROOF. For $\nu = 1, \ldots, n$ we introduce the notation

$$h_\nu = h_\nu(a_{1\nu}, a_{2\nu}, \ldots, a_{s\nu}),$$

$$H_\nu = \sum_{k=1}^{\nu-1} \sum_{m=1}^{2^k}{}^{*} \frac{1}{\|ma_{1k}/2^k\| \cdots \|ma_{sk}/2^k\|} + (2^{n+1} - 2^\nu)h_\nu.$$

Observing that if $\nu \geq 2$, then

$$(1) \qquad \frac{1}{2} \sum_{z=0}^{1} \frac{1}{\|m(a + 2^{\nu-1}z)/2^\nu\|} \leq 2 + \frac{1}{\|ma/2^{\nu-1}\|}$$

1980 *Mathematics Subject Classification*. Primary 65V05, 65D30.

Николай Михайлович предложил также экономные алгоритмы для получения оптимальных коэффициентов теоретико-числовых сеток.

Nikolay Mikhailovich also offered the spering algorithms for getting optimal coefficients of number-theoretic frames.

for odd a and m, we get

$$(2)\quad h_\nu \leqslant \frac{1}{2^s} \sum_{z_1,\dots,z_s=0}^{1} h_\nu(a_{1\nu-1} + 2^{\nu-1}z_1, \dots, a_{s\nu-1} + 2^{\nu-1}z_s)$$

$$\leqslant \frac{1}{2^\nu} \sum_{m=1}^{2^\nu}{}^{*} \left(2n - 2\nu + 2 + \frac{1}{\|ma_{1\nu-1}/2^{\nu-1}\|}\right) \cdots \left(2n - 2\nu + 2 + \frac{1}{\|ma_{s\nu-1}/2^{\nu-1}\|}\right)$$

$$= h_{\nu-1}.$$

Since $a_{11} = \cdots = a_{s1} = 1$, it follows that

$$h_1 = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{2}{}^{*} \left(2n - 2 + \frac{1}{\|m/2\|}\right) \cdots \left(2n - 2 + \frac{1}{\|m/2\|}\right) = 2^{s-1}n^s.$$

and, consequently, (2) gives us that

$$h_n \leqslant h_{n-1} \leqslant \cdots \leqslant h_1 \leqslant 2^{s-1}n^s.$$

We now estimate the quantities H_ν. Obviously,

$$H_1 = (2^{n+1} - 2)h_1 = (2^n - 1)2^s n^s < (2n)^s 2^n.$$

Since

$$h_\nu = \frac{1}{2^\nu} \sum_{m=1}^{2^\nu}{}^{*} \left(2n - 2\nu + \frac{1}{\|ma_{1\nu}/2^\nu\|}\right) \cdots \left(2n - 2\nu + \frac{1}{\|ma_{s\nu}/2^\nu\|}\right),$$

we get for $\nu \geqslant 2$ that

$$H_\nu \leqslant \sum_{k=1}^{\nu-2} \sum_{m=1}^{2^\nu}{}^{*} \frac{1}{\|ma_{1k}/2^k\| \cdots \|ma_{sk}/2^k\|} + 2^{\nu-1}h_{\nu-1} + (2^{n+1} - 2^\nu)h_\nu$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{\nu-2} \sum_{m=1}^{2^k}{}^{*} \frac{1}{\|ma_{1k}/2^k\| \cdots \|ma_{sk}/2^k\|} + (2^{n+1} - 2^{\nu-1})h_{\nu-1} = H_{\nu-1}.$$

and, consequently,

$$(3)\quad H_n \leqslant H_{n-1} \leqslant \cdots \leqslant H_1 < (2n)^s 2^n.$$

According to the definition of a_j and a_{jk},

$$a_1 \equiv a_{1k}, \dots, a_s \equiv a_{sk} \pmod{2^k}$$

for $k = 1, \dots, n$. But then it is obvious that

$$\sum_{m=1}^{2^n-1} \frac{1}{\|ma_1/2^n\| \cdots \|ma_s/2^n\|} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{m=1}^{2^k}{}^{*} \frac{1}{\|ma_1/2^k\| \cdots \|ma_s/2^k\|}$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{m=1}^{2^k}{}^{*} \frac{1}{\|ma_{1k}/2^k\| \cdots \|ma_{sk}/2^k\|} + \sum_{m=1}^{2^n}{}^{*} \frac{1}{\|ma_{1n}/2^n\| \cdots \|ma_{sn}/2^n\|} = H_n.$$

Hence by (3),

$$(4)\quad \sum_{m=1}^{2^n-1} \frac{1}{\|ma_1/2^n\| \cdots \|ma_s/2^n\|} < (2n)^s 2^n.$$

We determine b and $b_2, \dots, b_s$ with the help of the congruences

$$a_1 b \equiv 1, \quad a_2 b \equiv b_2, \dots, \quad a_s b \equiv b_s \pmod{2^n}.$$

591

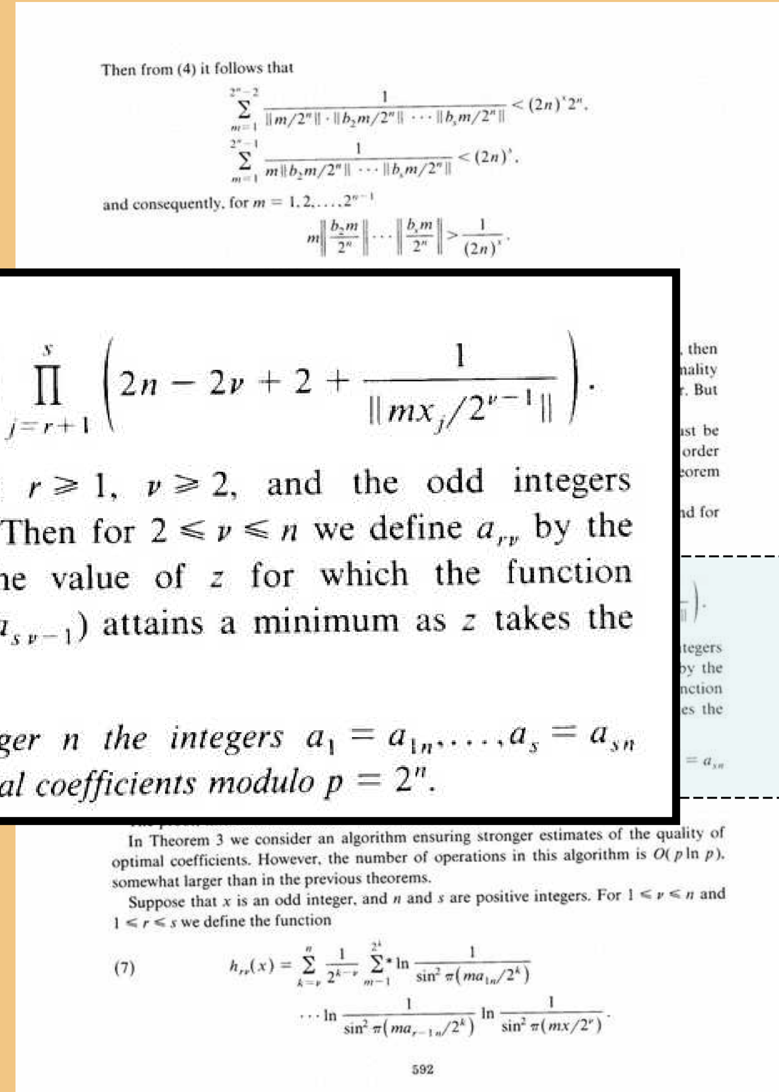
Николай Михайлович предложил также экономные алгоритмы для получения оптимальных коэффициентов теорет

Ni

offered

getting

numbe



Then from (4) it follows that

$$\sum_{m=1}^{2^n-2} \frac{1}{\|m/2^n\| \cdot \|b_2 m/2^n\| \cdots \|b_s m/2^n\|} < (2n)^s 2^n,$$

$$\sum_{m=1}^{2^n-1} \frac{1}{m\|b_2 m/2^n\| \cdots \|b_s m/2^n\|} < (2n)^s,$$

and consequently, for $m = 1, 2, \ldots, 2^{n-1}$

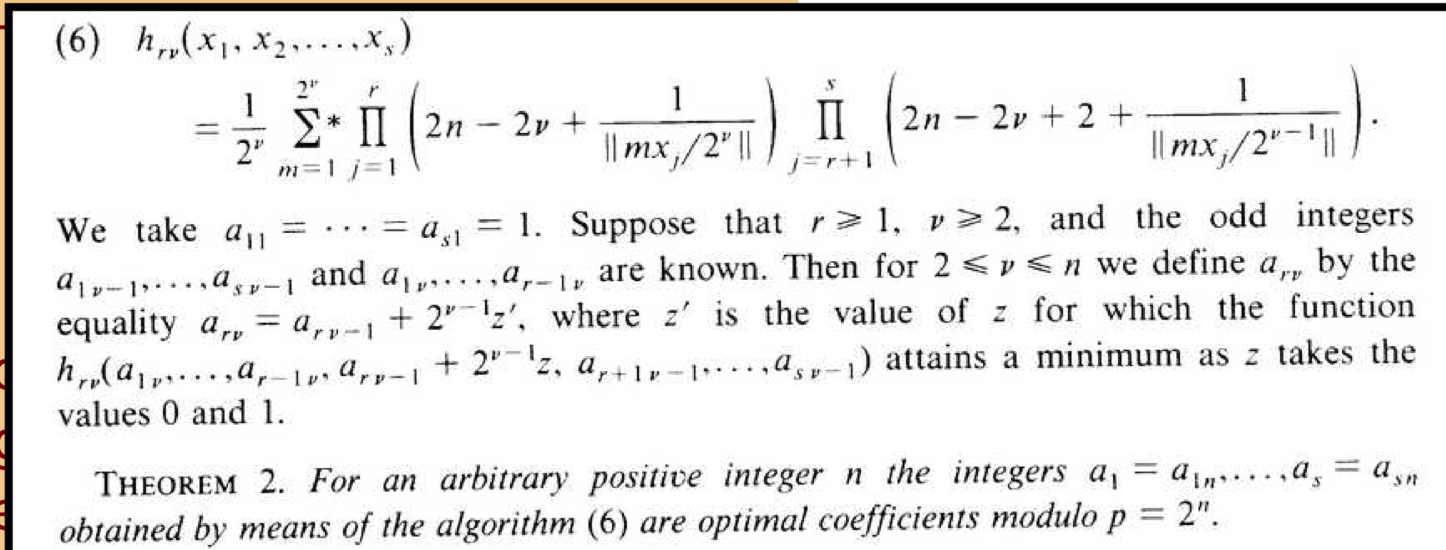
$$m\left\|\frac{b_2 m}{2^n}\right\| \cdots \left\|\frac{b_s m}{2^n}\right\| > \frac{1}{(2n)^s}.$$

In Theorem 3 we consider an algorithm ensuring stronger estimates of the quality of optimal coefficients. However, the number of operations in this algorithm is $O(p \ln p)$, somewhat larger than in the previous theorems.

Suppose that x is an odd integer, and n and s are positive integers. For $1 \leqslant \nu \leqslant n$ and $1 \leqslant r \leqslant s$ we define the function

$$(7) \qquad h_{r\nu}(x) = \sum_{k=\nu}^{n} \frac{1}{2^{k-\nu}} \sum_{m=1}^{2^k}{}^{*} \ln \frac{1}{\sin^2 \pi(m a_{1n}/2^k)} \cdots \ln \frac{1}{\sin^2 \pi(m a_{r-1\,n}/2^k)} \ln \frac{1}{\sin^2 \pi(mx/2^\nu)}.$$

592



$$(6) \quad h_{r\nu}(x_1, x_2, \ldots, x_s) = \frac{1}{2^\nu} \sum_{m=1}^{2^\nu}{}^{*} \prod_{j=1}^{r} \left(2n - 2\nu + \frac{1}{\|m x_j/2^\nu\|}\right) \prod_{j=r+1}^{s} \left(2n - 2\nu + 2 + \frac{1}{\|m x_j/2^{\nu-1}\|}\right).$$

We take $a_{11} = \cdots = a_{s1} = 1$. Suppose that $r \geqslant 1$, $\nu \geqslant 2$, and the odd integers $a_{1\,\nu-1}, \ldots, a_{s\,\nu-1}$ and $a_{1\nu}, \ldots, a_{r-1\,\nu}$ are known. Then for $2 \leqslant \nu \leqslant n$ we define $a_{r\nu}$ by the equality $a_{r\nu} = a_{r\,\nu-1} + 2^{\nu-1}z'$, where z' is the value of z for which the function $h_{r\nu}(a_{1\nu}, \ldots, a_{r-1\,\nu}, a_{r\,\nu-1} + 2^{\nu-1}z, a_{r+1\,\nu-1}, \ldots, a_{s\,\nu-1})$ attains a minimum as z takes the values 0 and 1.

THEOREM 2. *For an arbitrary positive integer n the integers $a_1 = a_{1n}, \ldots, a_s = a_{sn}$ obtained by means of the algorithm (6) are optimal coefficients modulo $p = 2^n$.*

Николай Михайлович предложил также экономные алгоритмы для получения оптимальных коэффициентов теоретико-числовых сеток.

Ni… offered… getting… number-theoretic frames.

Assume that $r \geqslant 2$, $\nu \geqslant 2$, and that the odd integers $a_{1n} = 1, a_{2n}, \ldots, a_{r-1\,n}$ and $a_{r1} = 1, a_{r2}, \ldots, a_{r\nu-1}$ are known. Then for $2 \leqslant \nu \leqslant n$ we take $a_{r\nu} = a_{r\nu-1} + 2^{\nu-1}z'$, where z' is the value of z for which the function $h_{r\nu}(a_{r\nu-1} + 2^{\nu-1}z)$ attains a minimum as z takes the values 0 and 1.

THEOREM 3. *For an arbitrary positive integer n the integers $a_1 = 1, a_2 = a_{2n}, \ldots, a_s = a_{sn}$ obtained by the algorithm (7) are optimal coefficients modulo $p = 2^n$.*

The proof is based on an estimate of the minimal value of $h_{r\nu}(a_{r\nu-1} + 2^{\nu-1}z)$ by its mean value and on the use of the equality

$$\frac{1}{2}\sum_{z=0}^{1} \ln \frac{1}{\sin^2 \pi((a + 2^{\nu-1} + z)m/2^\nu)} = \ln 2 + \frac{1}{2} \ln \frac{1}{\sin^2 \pi(am/2^{\nu-1})},$$

which is valid for $\nu \geqslant 2$ when a and m are odd.

Computation Center
Academy of Sciences of the USSR

Received 16/APR/82

$$(7) \qquad h_{r\nu}(x) = \sum_{k=\nu}^{n} \frac{1}{2^{k-\nu}} \sum_{m-1}^{2^k}{}^{*} \ln \frac{1}{\sin^2 \pi(ma_{1n}/2^k)} \cdots \ln \frac{1}{\sin^2 \pi(ma_{r-1\,n}/2^k)} \ln \frac{1}{\sin^2 \pi(mx/2^\nu)}.$$

THEOREM 3. *For an arbitrary positive integer n the integers $a_1 = 1, a_2 = a_{2n}, \ldots, a_s = a_{sn}$ obtained by the algorithm (7) are optimal coefficients modulo $p = 2^n$.*

Признанием научных заслуг Н. М. Коробова являются ***премия им. П. Л. Чебышёва АН СССР*** (1958) и исполнение им обязанностей учёного секретаря оргкомитета III Всесоюзного математического съезда в Москве в 1956 году.

Chebyshev Prize of USSR Academy of Sciences (1958) and the post of scientific secretary of organizational committee of The Third Moscow All-Union Mathematical Congress (1956) are acknowledgements of Korobov’s scientific accomplishments.

АКАДЕМИЯ НАУК СССР

ПРЕЗИДИУМ АКАДЕМИИ НАУК СОЮЗА СОВЕТСКИХ СОЦИАЛИСТИЧЕСКИХ РЕСПУБЛИК

в заседании своем от 31 января 1958 года присудил

ДОКТОРУ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

Николаю Михайловичу

КОРОБОВУ

ПРЕМИЮ имени П. Л. ЧЕБЫШЕВА

в размере 20 000 рублей

ЗА РАБОТЫ:

«ЧИСЛА С ОГРАНИЧЕННЫМ ОТНОШЕНИЕМ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ К ВОПРОСАМ ДИОФАНТОВЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ»,

«О ВПОЛНЕ РАВНОМЕРНОМ РАСПРЕДЕЛЕНИИ И СОВМЕСТНО НОРМАЛЬНЫХ ЧИСЛАХ»,

«ПРИБЛИЖЕННОЕ ВЫЧИСЛЕНИЕ КРАТНЫХ ИНТЕГРАЛОВ С ПОМОЩЬЮ МЕТОДОВ ТЕОРИИ ЧИСЕЛ»

ПРЕЗИДЕНТ АКАДЕМИИ НАУК СССР

ГЛАВНЫЙ УЧЕНЫЙ СЕКРЕТАРЬ ПРЕЗИДИУМА АКАДЕМИИ НАУК СССР

27 марта 1958 г. *г. МОСКВА*

№ 223

Николай Михайлович Коробов – автор более ***70 научных работ***, в том числе ***двух монографий***, в которых ярко раскрывается педагогический талант крупного учёного – понятно и просто излагать сложные и трудные вопросы теории чисел и её приложений к приближённому анализу.

Nikolay Mikhailovich Korobov wrote more than ***70 scientific publications*** including ***2 monographs***. In these publications we can see his greatest pedagogical talent, he wrote clearly and simply about difficult problems of Theory of Numbers and its applications to approximate analysis.

Первая монография – ***«Теоретико-числовые методы в приближенном анализе»*** – вышла двумя изданиями: в 1963 году и переработанное в 2004 году.

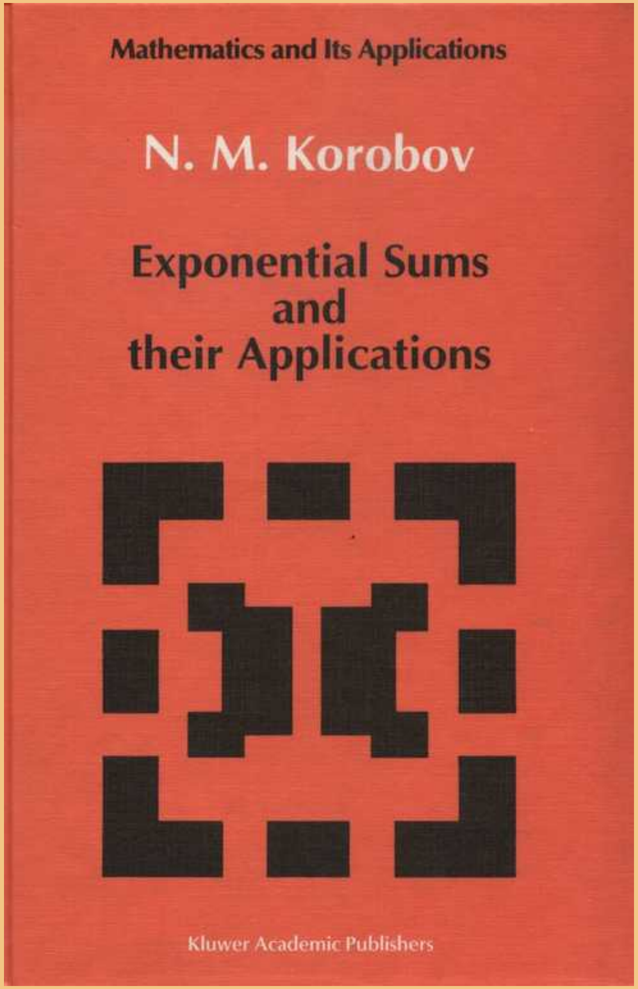
The first monograph ***«Number-theoretic methods in approximate analysis»*** was published in 1963. Then it was revised and republished in 2004.

Вторая монография Коробова – ***«Тригонометрические суммы и их приложения»*** – вышла на русском языке в 1989 году, переведена на английский язык в 1992 году и на испанский язык в 1993 году.

Korobov’s second monograph ***«Trigonometric sums and its applications»*** was published in Russian in 1989. It was translated into English (1992) and Spanish (1993).

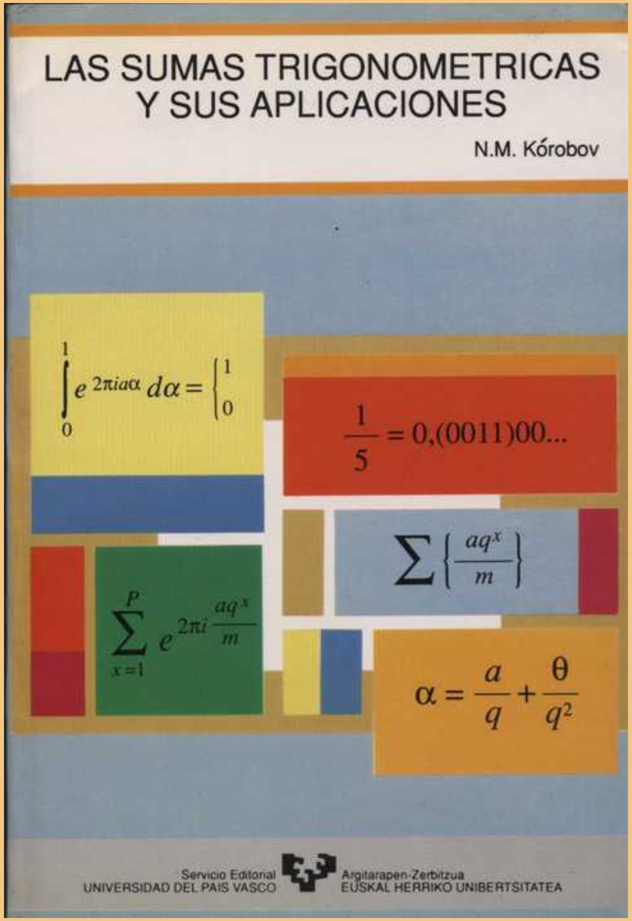
Вторая монография Коробова – ***«Тригонометрические суммы и их приложения»*** – вышла на русском языке в 1989 году, переведена на английский язык в 1992 году и на испанский язык в 1993 году.

Korobov's second monograph ***«Trigonometric sums and its applications»*** was published in Russian in 1989. It was translated into English (1992) and Spanish (1993).



Вторая монография Коробова – ***«Тригонометрические суммы и их приложения»*** – вышла на русском языке в 1989 году, переведена на английский язык в 1992 году и на испанский язык в 1993 году.

Korobov’s second monograph ***«Trigonometric sums and its applications»*** was published in Russian in 1989. It was translated into English (1992) and Spanish (1993).



Являясь долгие годы соруководителем научно-исследовательского семинара кафедры теории чисел МГУ, он остался в памяти участников как заинтересованный, внимательный, но строгий авторитет по оценке научной деятельности многих математиков из периферийных вузов, выступавших на семинаре в Москве.

Korobov was co-head of scientific-research seminar of MSU Theory of Numbers department many long years. The participants have remembered him as curious, attentive but strict authority when he valued scientific effort of mathematicians from provincial universities taking part in Moscow seminar.

Создание теоретико-числового метода в приближённом анализе неразрывно связано с работой в 1957–1961 годах в Математическом институте АН СССР семинара, которым руководили ***Н. М. Коробов***, ***Н. С. Бахвалов*** и ***Н. Н. Ченцов***.

Н. С. Бахвалов
N. S. Bahvalov

The development of the number-theoretic method in approximate analysis was allied to the seminar at the USSR Academy of Sciences Mathematical Institute. This seminar was held from 1957 to 1961, the seminar heads were ***N. M. Korobov***, ***N. S. Bahvalov*** and ***N. N. Chentsov***.

Н. Н. Ченцов
N. N. Chentsov

Тридцать лет без перерыва в МГУ им. Ломоносова работал под руководством Николая Михайловича Коробова семинар по тригонометрическим суммам и их приложениям для студентов, аспирантов и научных работников.

During thirty years the trigonometric sums and its applications seminar for students, post-graduate students and scientists worked at Lomonosov Moscow State University. Nikolay Mikhailovich was the head of this seminar.

За годы педагогической деятельности Н. М. Коробов подготовил многих учеников: более 20-ти из них защитили кандидатские диссертации, а 6 – докторские.

Среди них:

доктор физ.-мат. наук, профессор, заведующий отделом теории чисел Математического института им. В. А. Стеклова РАН ***А. А. Карацуба***.

А. А. Карацуба
А. А. Karatsuba

During his pedagogical effort Korobov has trained a lot of disciples. More than 20 of them defended Ph.D. theses and 6 of them defended doctoral theses.

One of them was

doctor of physico-mathematical sciences, professor, the head of Theory of Numbers department of Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences ***A. A. Karatsuba***.

За годы педагогической деятельности Н. М. Коробов подготовил многих учеников: более 20-ти из них защитили кандидатские диссертации, а 6 – докторские.

Среди них:

доктор физ.-мат. наук, профессор, заведующий кафедрой теории чисел Московского педагогического государственного университета ***Д. А. Митькин***.

During his pedagogical effort Korobov has trained a lot of disciples. More than 20 of them defended Ph.D. theses and 6 of them defended doctoral theses.

One of them was

doctor of physico-mathematical sciences, professor, the head of Theory of Numbers department of Moscow Pedagogical State University ***D. A. Mitkin***.

За годы педагогической деятельности Н. М. Коробов подготовил многих учеников: более 20-ти из них защитили кандидатские диссертации, а 6 – докторские.

Среди них:

доктор физ.-мат. наук, директор Хабаровского отделения Института прикладной математики Дальневосточного отделения РАН ***В. А. Быковский***.

В. А. Быковский
V. A. Bykovskiy

During his pedagogical effort Korobov has trained a lot of disciples. More than 20 of them defended Ph.D. theses and 6 of them defended doctoral theses.

One of them was

doctor of physico-mathematical sciences, the head of Habarovsk branch of the Applied Mathematics Institute of Far-Eastern branch of Russian Academy of Sciences ***V. A. Bykovskiy***.

За годы педагогической деятельности Н. М. Коробов подготовил многих учеников: более 20-ти из них защитили кандидатские диссертации, а 6 – докторские.

Среди них:

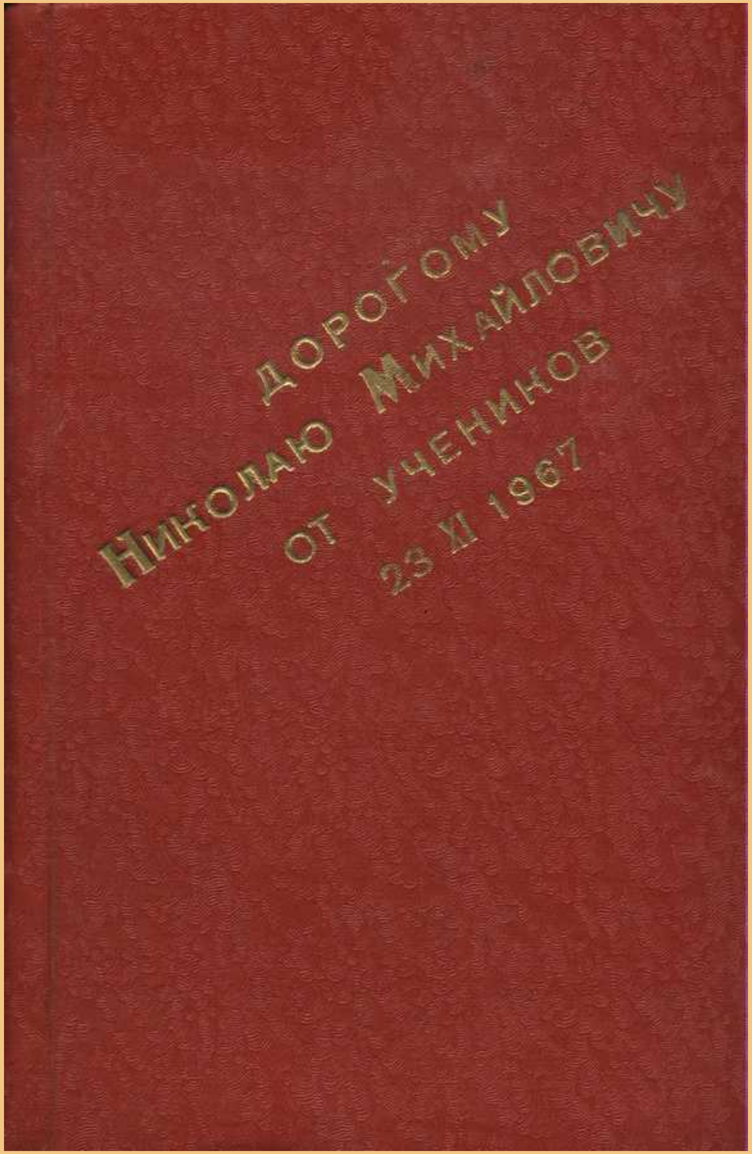
иностранный ученик, профессор ***Питер Цинтерхоф***, возглавляющий Исследовательский институт программных технологий Зальцбургского университета в Австрии.

П. Цинтерхоф
P. Tsynterhoff

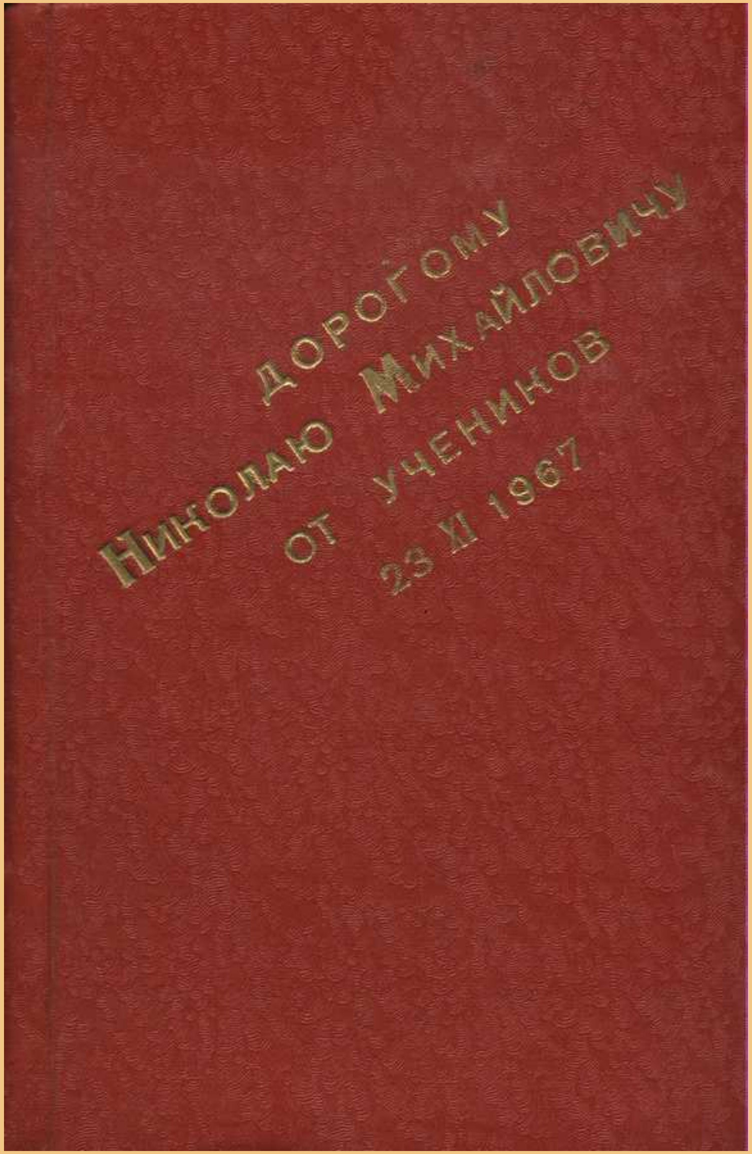
During his pedagogical effort Korobov has trained a lot of disciples. More than 20 of them defended Ph.D. theses and 6 of them defended doctoral theses.

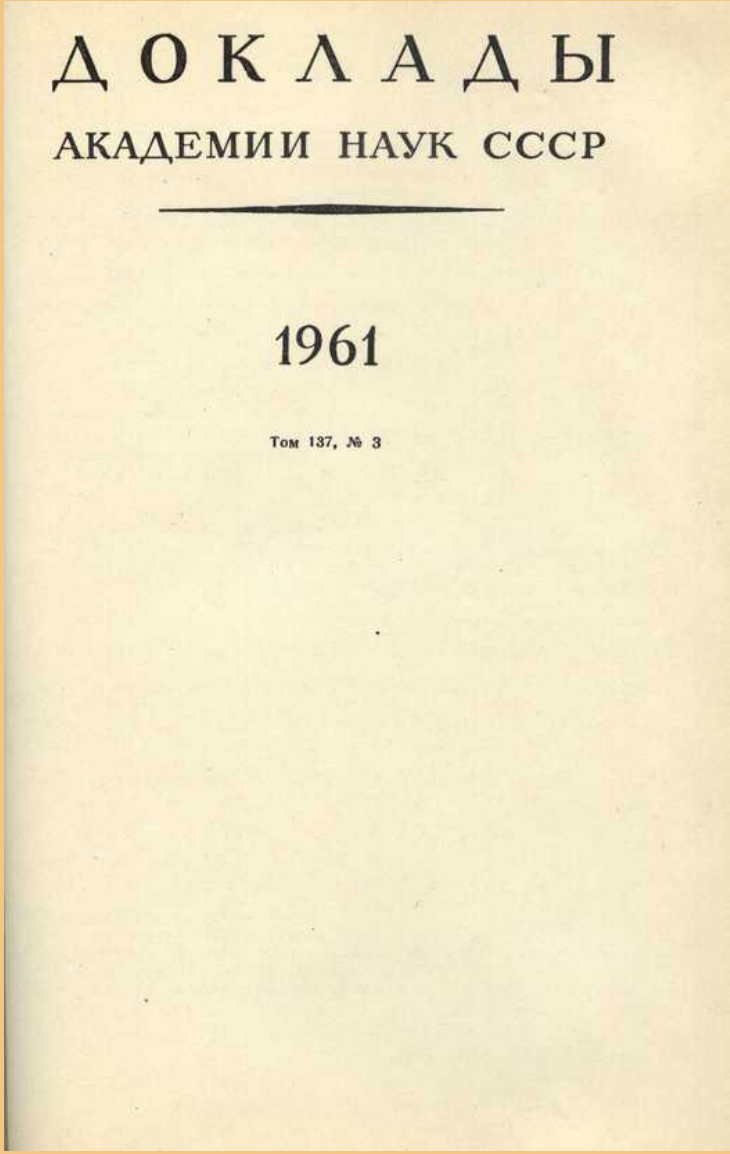
One of them was

the foreign disciple, professor ***Piter Tsynterhoff***, the head of program technologies Scientific Research Institute of Salzburg University in Austria.



To Dear
Nikolay Mikhailovich
from his progeny.
23.XI.1967

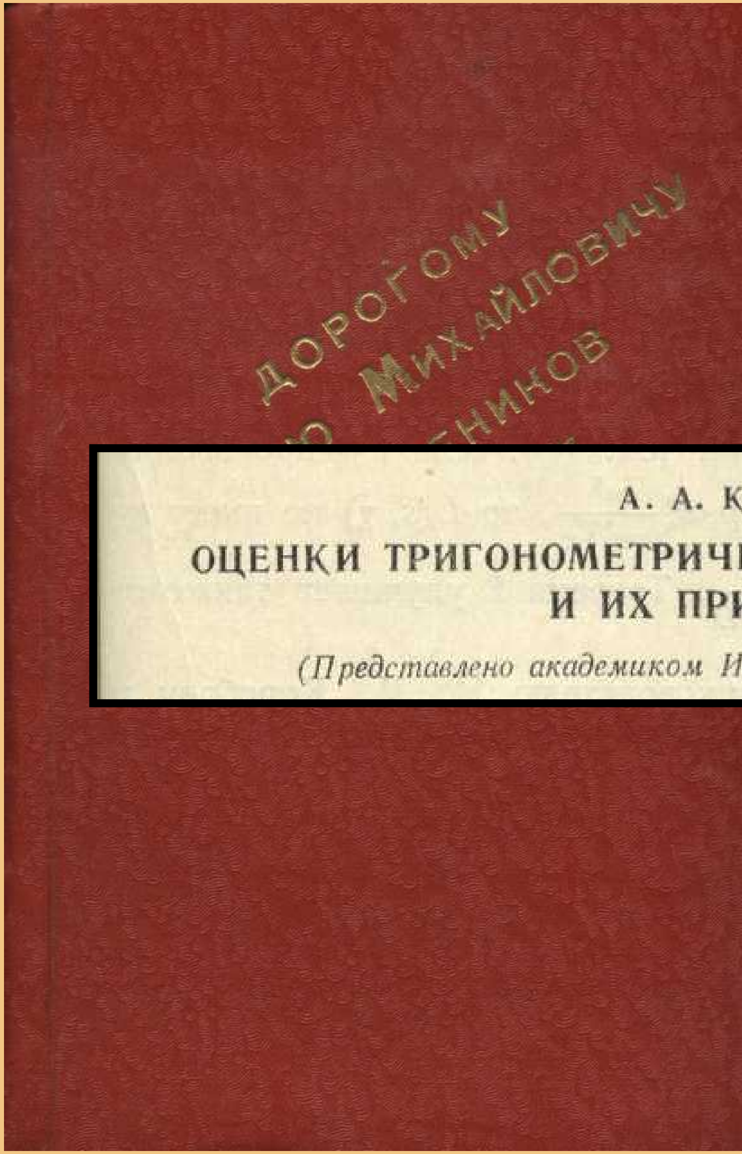


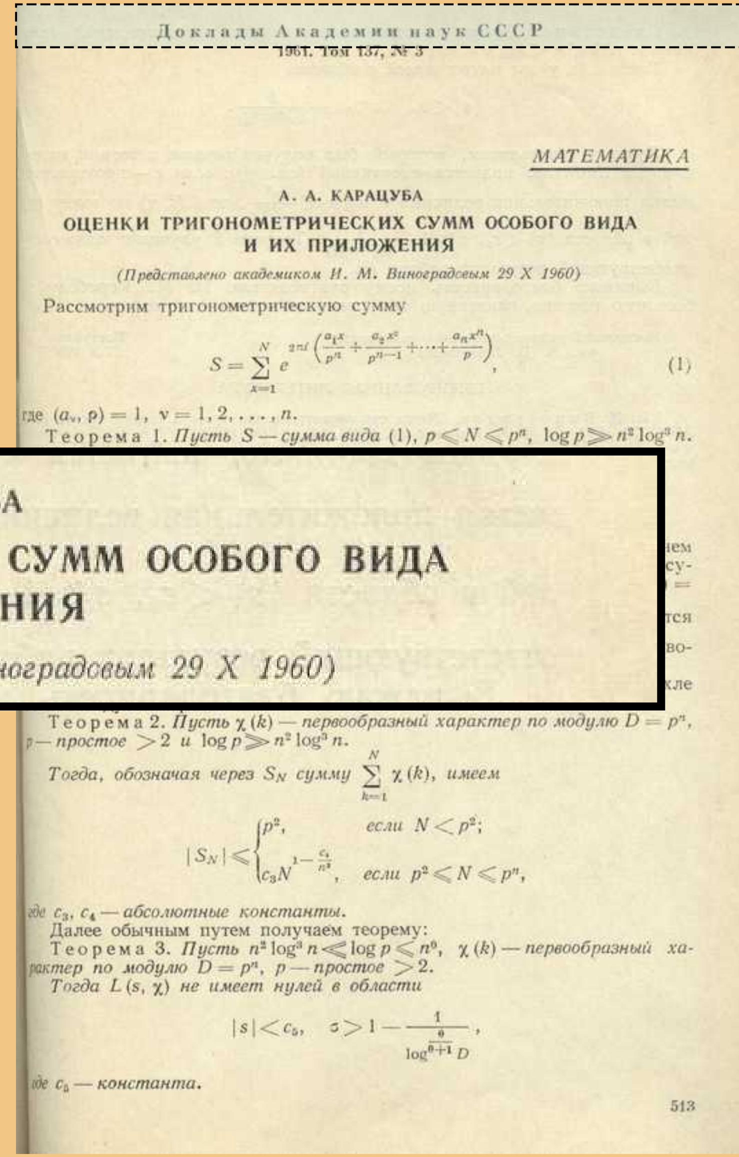


ДОКЛАДЫ
АКАДЕМИИ НАУК СССР

1961

Том 137, № 3





Доклады Академии наук СССР
1961. Том 137, № 3

МАТЕМАТИКА

А. А. КАРАЦУБА

ОЦЕНКИ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ СУММ ОСОБОГО ВИДА И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

(Представлено академиком И. М. Виноградовым 29 X 1960)

Рассмотрим тригонометрическую сумму

$$S = \sum_{x=1}^{N} e^{2\pi i\left(\frac{a_1x}{p^n} + \frac{a_2x^2}{p^{n-1}} + \cdots + \frac{a_nx^n}{p}\right)}, \qquad (1)$$

где $(a_\nu, p) = 1$, $\nu = 1, 2, \ldots, n$.

Теорема 1. *Пусть S — сумма вида (1), $p \leqslant N \leqslant p^n$, $\log p \gg n^2 \log^3 n$.*

Теорема 2. *Пусть $\chi(k)$ — первообразный характер по модулю $D = p^n$, p — простое > 2 и $\log p \gg n^2 \log^3 n$.*

Тогда, обозначая через S_N сумму $\sum_{k=1}^{N} \chi(k)$, имеем

$$|S_N| \leqslant \begin{cases} p^2, & \text{если } N < p^2; \\ c_3 N^{1-\frac{c_4}{n^2}}, & \text{если } p^2 \leqslant N \leqslant p^n, \end{cases}$$

где c_3, c_4 — абсолютные константы.

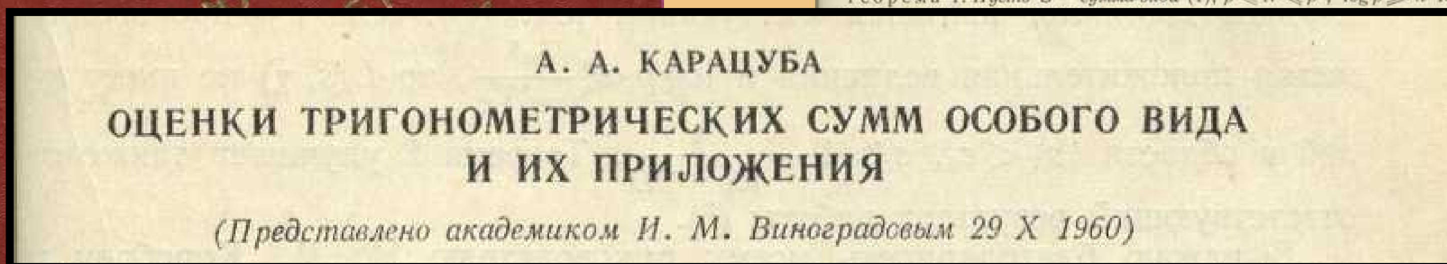
Далее обычным путем получаем теорему:

Теорема 3. *Пусть $n^2 \log^3 n \ll \log p \leqslant n^\theta$, $\chi(k)$ — первообразный характер по модулю $D = p^n$, p — простое > 2.*

Тогда $L(s, \chi)$ не имеет нулей в области

$$|s| < c_5, \quad \sigma > 1 - \frac{1}{\log^{\frac{\theta}{\theta+1}} D},$$

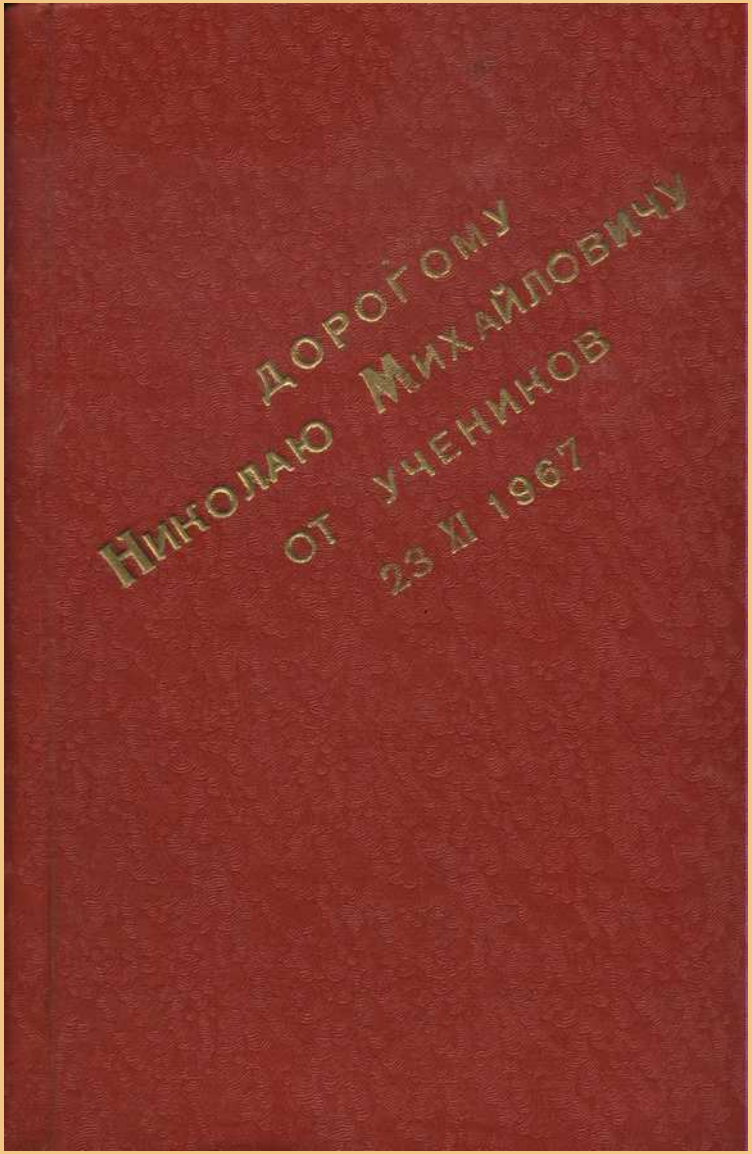
где c_5 — константа.

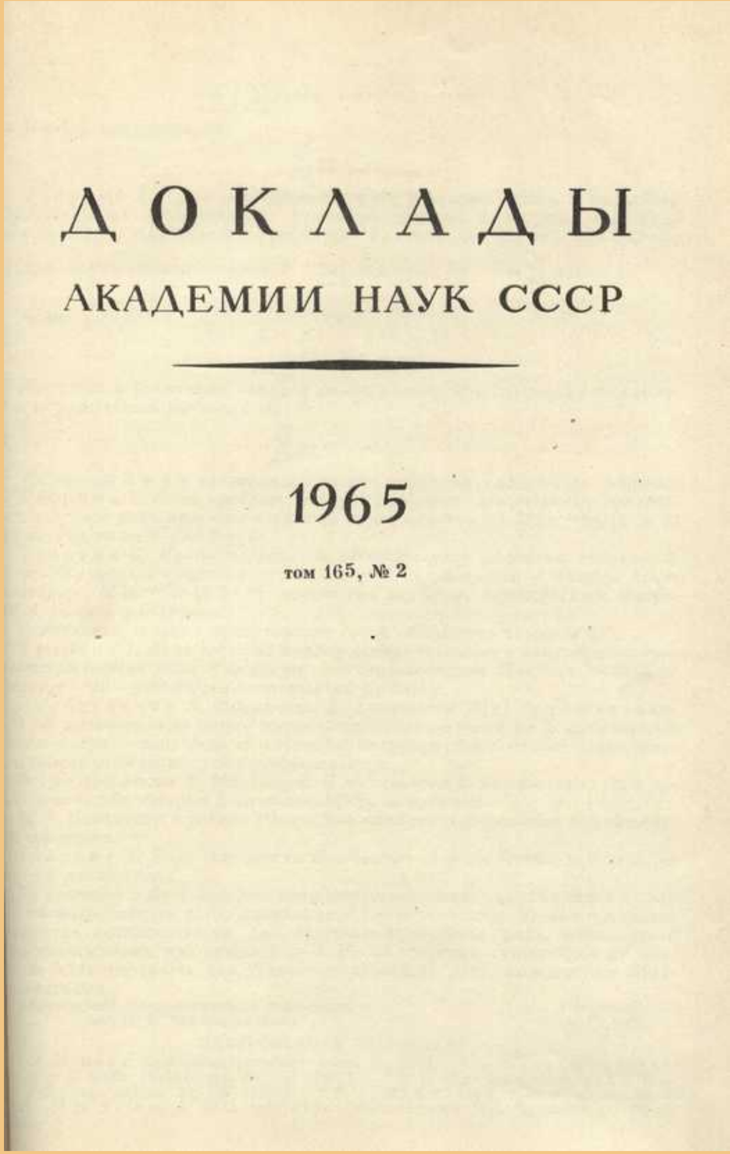


А. А. КАРАЦУБА

ОЦЕНКИ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ СУММ ОСОБОГО ВИДА И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

(Представлено академиком И. М. Виноградовым 29 X 1960)

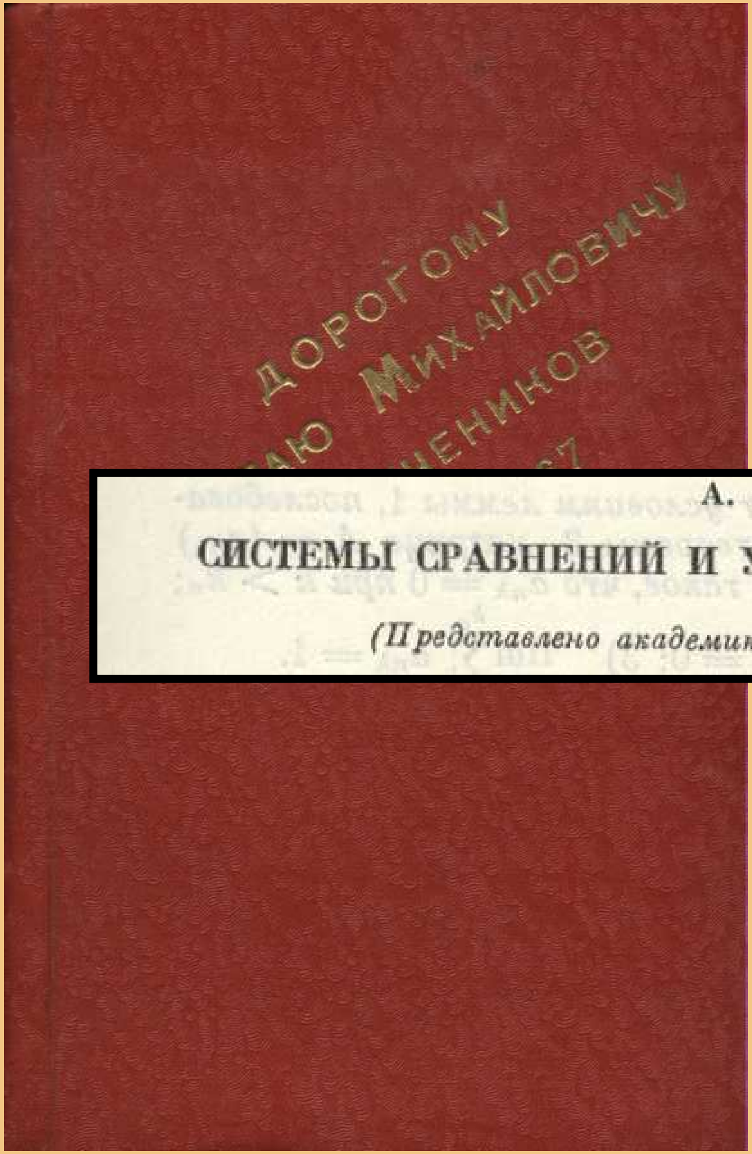



ДОКЛАДЫ

АКАДЕМИИ НАУК СССР

1965

том 165, № 2



Доклады Академии наук СССР
1965. Том 165, № 2

УДК 511.9

МАТЕМАТИКА

А. А. КАРАЦУБА

СИСТЕМЫ СРАВНЕНИЙ И УРАВНЕНИЯ ВАРИНГОВСКОГО ТИПА

(Представлено академиком И. М. Виноградовым 8 IV 1965)

Будем употреблять следующие обозначения. Все буквы, за исключением $\varepsilon, \varepsilon_0, \ldots, \delta, \delta_0, \ldots$ обозначают целые числа; $\varepsilon, \varepsilon_0, \ldots, \delta, \delta_0$ — действительные положительные величины; $n \geqslant 10$; $1 \leqslant r \leqslant n$; p — простое число. Запись $A \gg B$ означает, что $A \geqslant C(n)|B|$, где $C(n)$ — константа, зависящая только от n; $C, C_1, \ldots$ — абсолютные константы; $J_{k,n}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ — число решений системы уравнений

$$x_1 + \ldots - y_k = \lambda_1 \qquad (1)$$

$$x_1^{r+1} + \ldots - y_k^{r+1} \equiv 0 \pmod{q_{r+1}}, \qquad (1')$$

$$x_1^n + \ldots - y_k^n \equiv 0 \pmod{q_n},$$

$$1 \leqslant x_i,\ y_i \leqslant P; \quad i = 1, 2, \ldots, k.$$

Теорема о среднем И. М. Виноградова (1) утверждает, что при $k \geqslant n(n+1)/4 + n\tau$ имеет место неравенство

$$J_{k,n}(0, \ldots, 0) = J_{k,n} \ll P^{2k - n(n+1)/2 + \delta}, \qquad (2)$$

где $\delta = \frac{1}{2}n(n+1)/(1 - 1/n)^{\tau}$.

Из этой теоремы следует, что при $k \geqslant n(n+1)/4 + n\tau$ для $N_{k,n}$ имеет место оценка

$$N_{k,n} \ll P^{2k - r(r+1)/2 + \delta}(q_{r+1} \ldots q_n)^{-1}. \qquad (3)$$

При любом k тривиально имеем

$$N_{k,n} \gg P^{2k - n(n+1)/2}(q_{r+1} \ldots q_n)^{-1}.$$

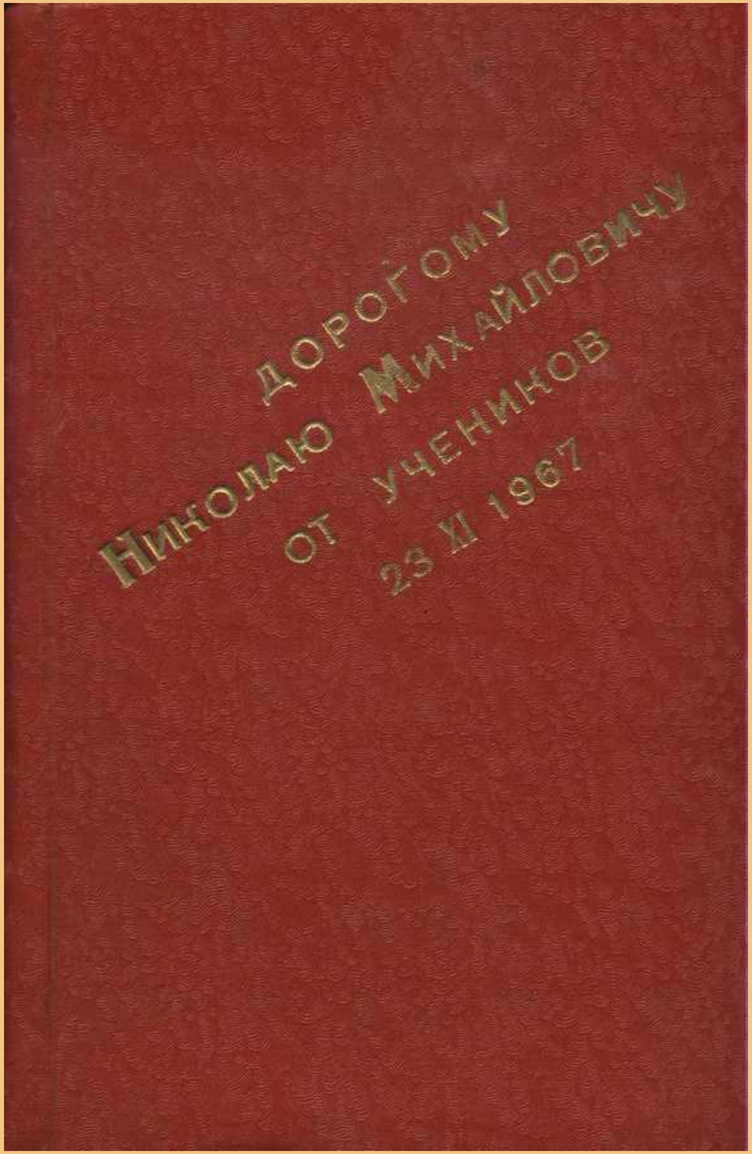
Таким образом, оценка (3) точная.

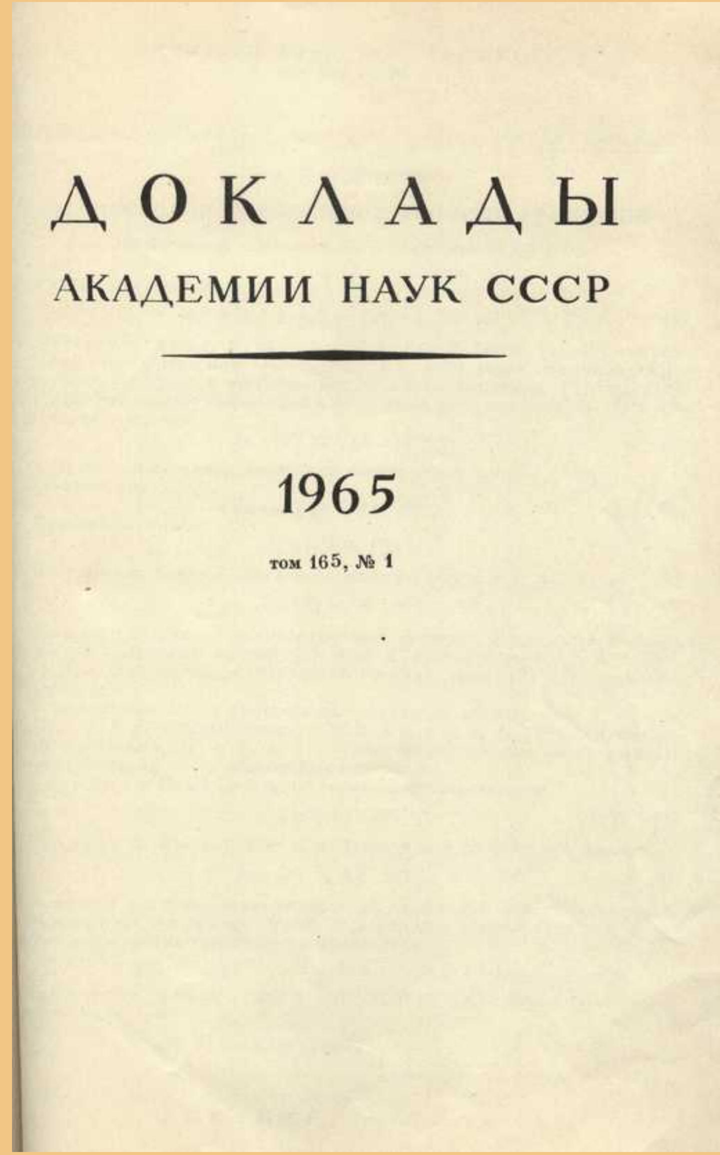
Возникает задача получения оценок вида (3) при меньшем значении k.

Пусть $1 \leqslant r \leqslant n$; $P^r \ll q \ll P^r$; $q \leqslant q_\nu < 2q$; $\nu = r = 1, \ldots, n$; $Q = q^{n-r}$. В (2) при некотором специальном q_0 и $q_{r+1} = \ldots = q_n = q_0$ получена оценка

$$N_{k,n} \ll P^{2k - rn + r(r-1)/2 + \varepsilon_1}, \qquad (4)$$

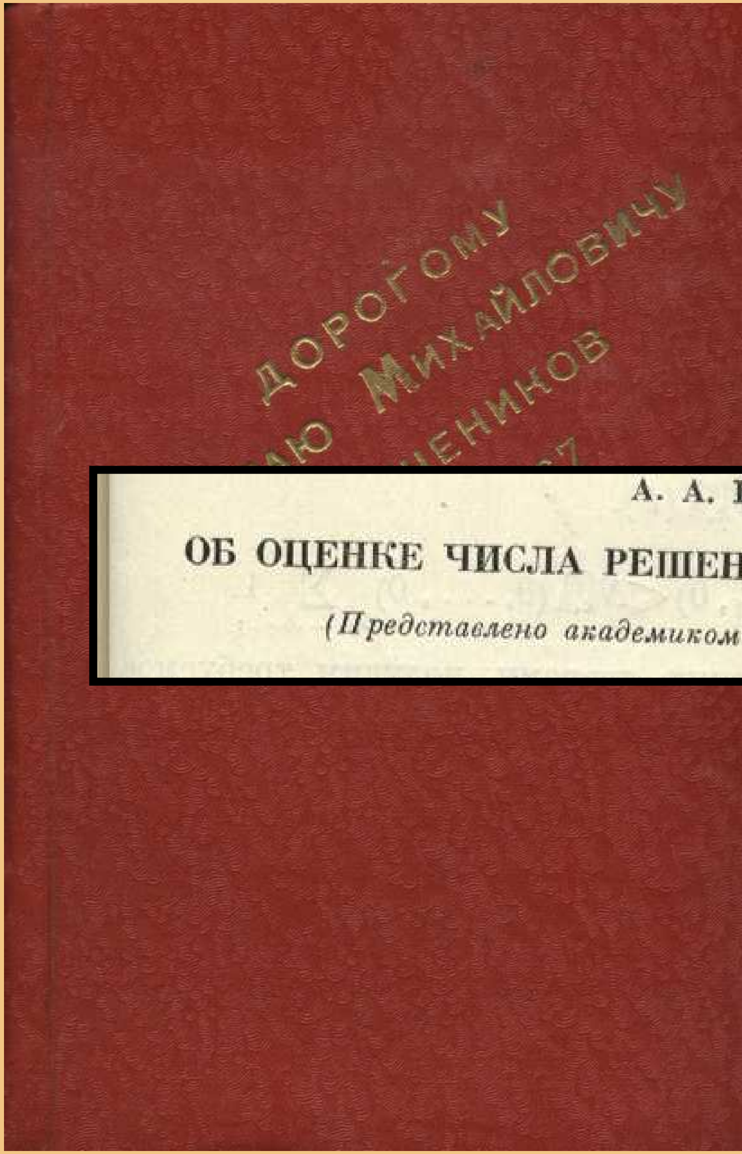
А. А. КАРАЦУБА
СИСТЕМЫ СРАВНЕНИЙ И УРАВНЕНИЯ ВАРИНГОВСКОГО ТИПА
(Представлено академиком И. М. Виноградовым 8 IV 1965)

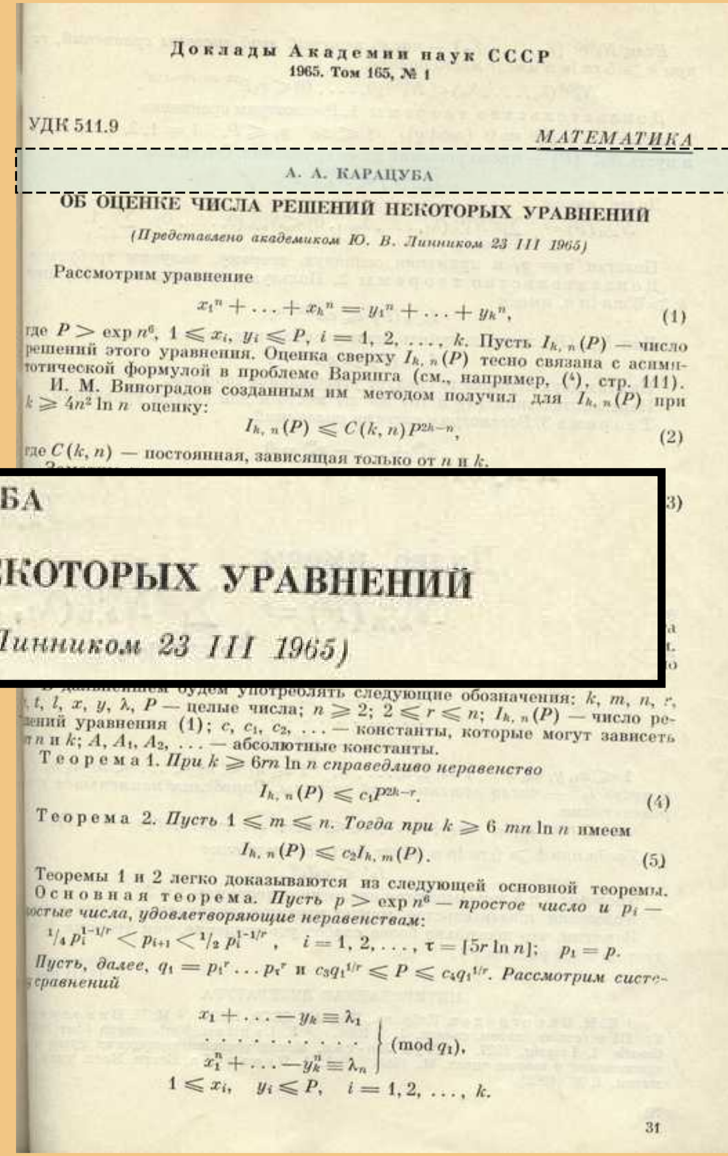



ДОКЛАДЫ
АКАДЕМИИ НАУК СССР

1965

том 165, № 1





Доклады Академии наук СССР
1965. Том 165, № 1

УДК 511.9

МАТЕМАТИКА

А. А. КАРАЦУБА

ОБ ОЦЕНКЕ ЧИСЛА РЕШЕНИЙ НЕКОТОРЫХ УРАВНЕНИЙ

(Представлено академиком Ю. В. Линником 23 III 1965)

Рассмотрим уравнение

$$x_1^n + \ldots + x_k^n = y_1^n + \ldots + y_k^n, \tag{1}$$

где $P > \exp n^6$, $1 \leqslant x_i$, $y_i \leqslant P$, $i = 1, 2, \ldots, k$. Пусть $I_{k,n}(P)$ — число решений этого уравнения. Оценка сверху $I_{k,n}(P)$ тесно связана с асимптотической формулой в проблеме Варинга (см., например, ([4]), стр. 111).

И. М. Виноградов созданным им методом получил для $I_{k,n}(P)$ при $k \geqslant 4n^2 \ln n$ оценку:

$$I_{k,n}(P) \leqslant C(k, n) P^{2k-n}, \tag{2}$$

где $C(k, n)$ — постоянная, зависящая только от n и k.

...

В дальнейшем будем употреблять следующие обозначения: $k, m, n, r, t, l, x, y, \lambda, P$ — целые числа; $n \geqslant 2$; $2 \leqslant r \leqslant n$; $I_{k,n}(P)$ — число решений уравнения (1); $c, c_1, c_2, \ldots$ — константы, которые могут зависеть от n и k; $A, A_1, A_2, \ldots$ — абсолютные константы.

Теорема 1. *При $k \geqslant 6rn \ln n$ справедливо неравенство*

$$I_{k,n}(P) \leqslant c_1 P^{2k-r}. \tag{4}$$

Теорема 2. *Пусть $1 \leqslant m \leqslant n$. Тогда при $k \geqslant 6\, mn \ln n$ имеем*

$$I_{k,n}(P) \leqslant c_2 I_{k,m}(P). \tag{5}$$

Теоремы 1 и 2 легко доказываются из следующей основной теоремы.

Основная теорема. *Пусть $p > \exp n^6$ — простое число и p_i — простые числа, удовлетворяющие неравенствам:*

$$\tfrac{1}{4} p_i^{1-1/r} < p_{i+1} < \tfrac{1}{2} p_i^{1-1/r}, \quad i = 1, 2, \ldots, \tau = [5r \ln n]; \quad p_1 = p.$$

Пусть, далее, $q_1 = p_1^r \ldots p_\tau^r$ и $c_3 q_1^{1/r} \leqslant P \leqslant c_4 q_1^{1/r}$. Рассмотрим систему сравнений

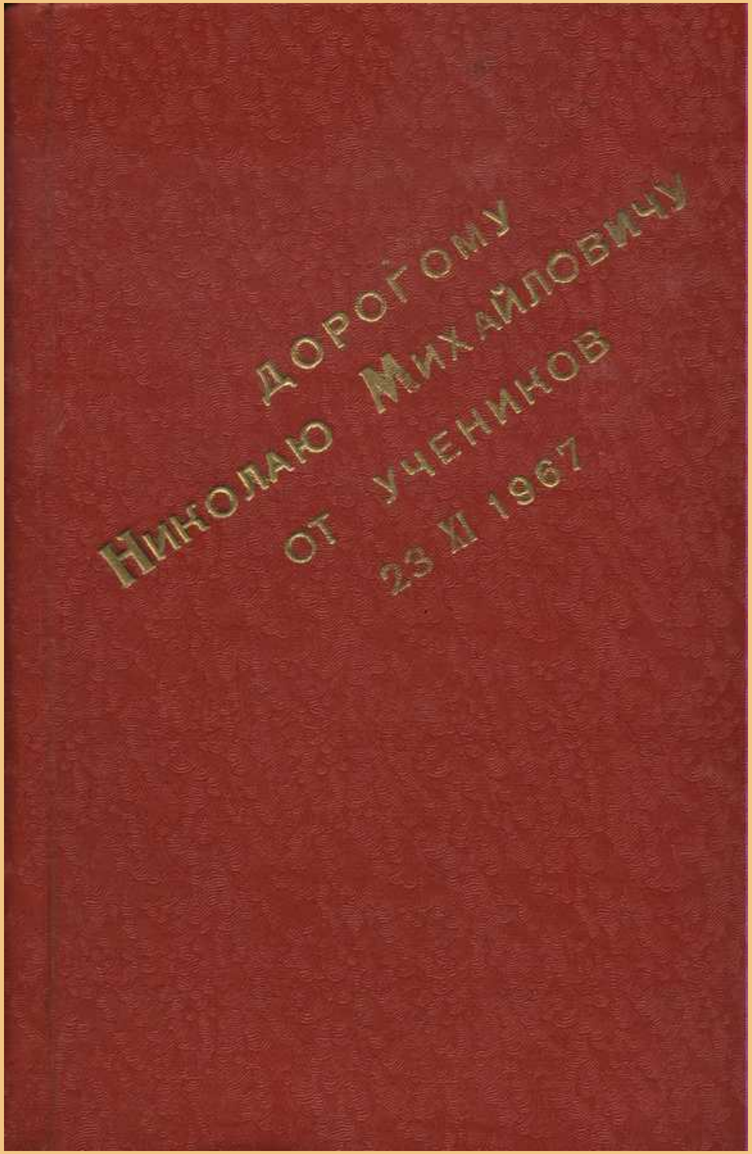
$$\left.\begin{array}{l} x_1 + \ldots - y_k \equiv \lambda_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_1^n + \ldots - y_k^n \equiv \lambda_n \end{array}\right\} \pmod{q_1},$$

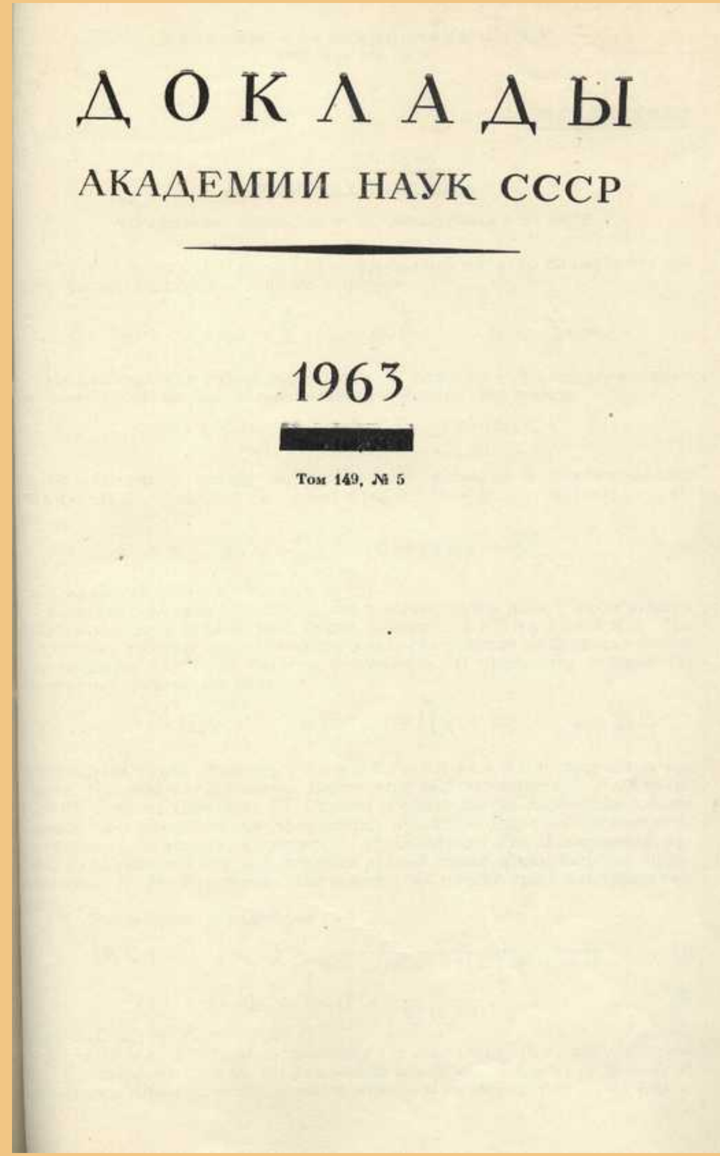
$$1 \leqslant x_i, \quad y_i \leqslant P, \quad i = 1, 2, \ldots, k.$$

А. А. КАРАЦУБА

ОБ ОЦЕНКЕ ЧИСЛА РЕШЕНИЙ НЕКОТОРЫХ УРАВНЕНИЙ

(Представлено академиком Ю. В. Линником 23 III 1965)





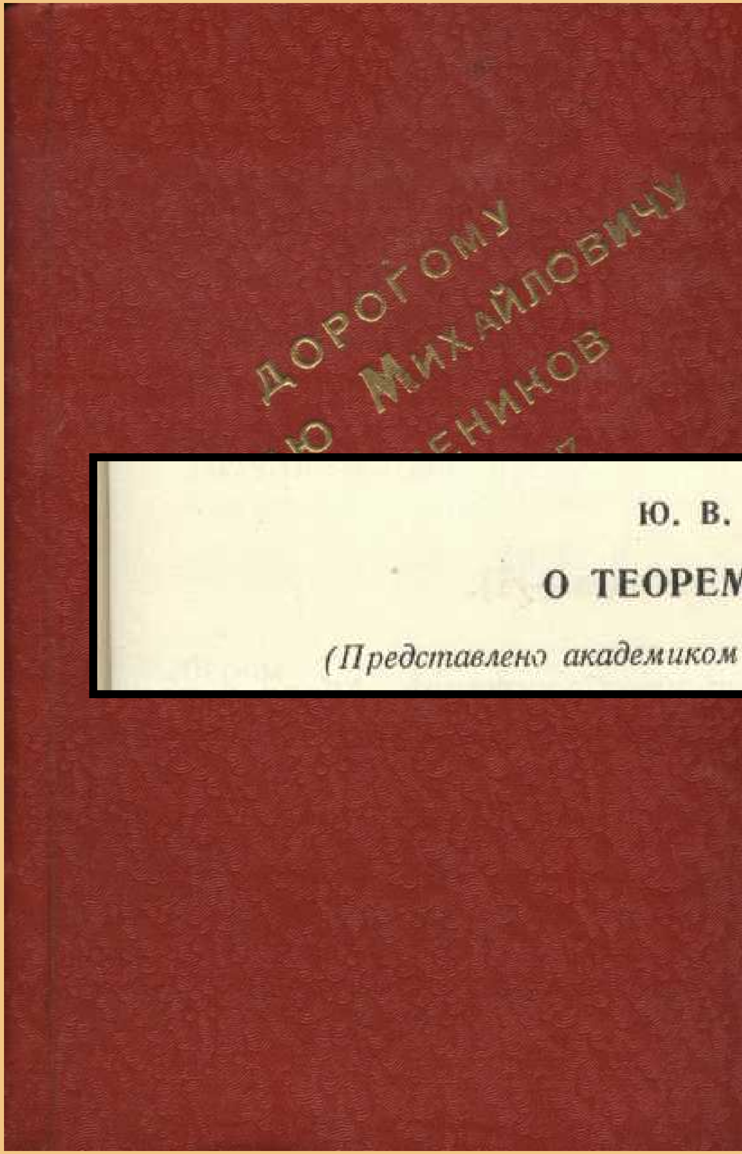
ДОКЛАДЫ

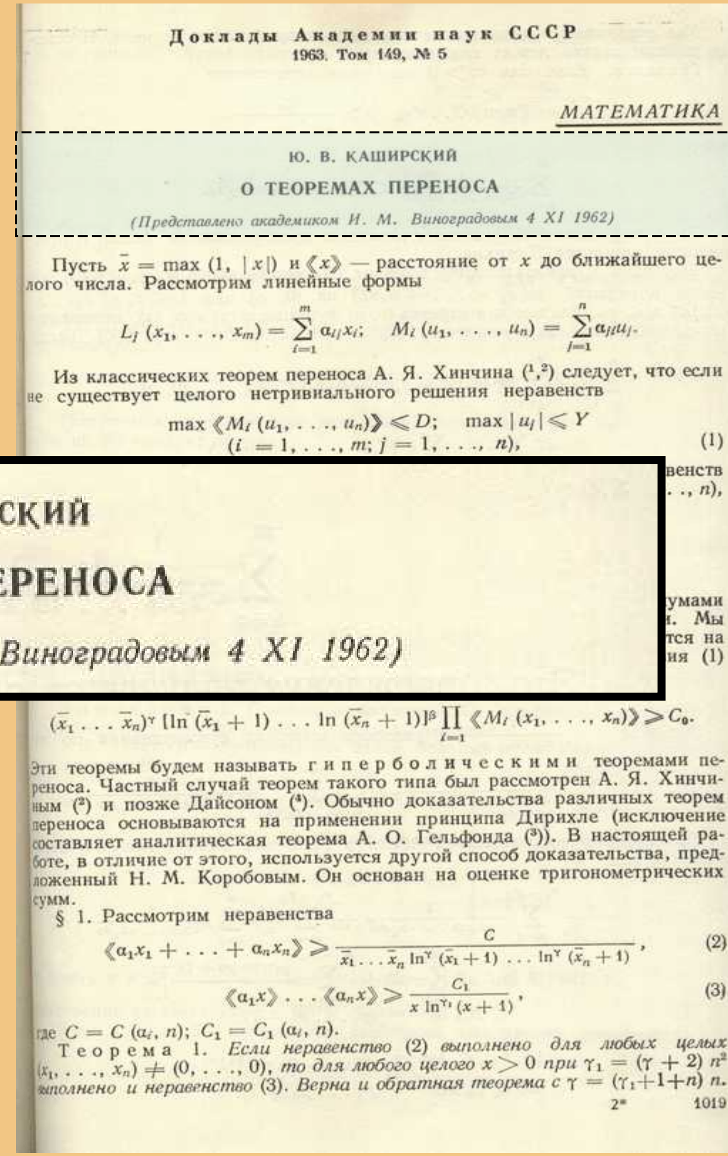
АКАДЕМИИ НАУК СССР

1963

[redacted]

Том 149, № 5





Доклады Академии наук СССР
1963. Том 149, № 5

МАТЕМАТИКА

Ю. В. КАШИРСКИЙ

О ТЕОРЕМАХ ПЕРЕНОСА

(Представлено академиком И. М. Виноградовым 4 XI 1962)

Ю. В. КАШИРСКИЙ

О ТЕОРЕМАХ ПЕРЕНОСА

(Представлено академиком И. М. Виноградовым 4 XI 1962)

Пусть $\bar{x} = \max(1, |x|)$ и $\langle\langle x \rangle\rangle$ — расстояние от x до ближайшего целого числа. Рассмотрим линейные формы

$$L_j(x_1, \dots, x_m) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} x_i; \quad M_i(u_1, \dots, u_n) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} u_j.$$

Из классических теорем переноса А. Я. Хинчина ([1,2]) следует, что если не существует целого нетривиального решения неравенств

$$\max \langle\langle M_i(u_1, \dots, u_n) \rangle\rangle \leqslant D; \quad \max |u_j| \leqslant Y \qquad (1)$$
$$(i = 1, \dots, m;\ j = 1, \dots, n),$$

...венств ..., n),

...умами ... Мы ...тся на ...ия (1)

$$(\bar{x}_1 \dots \bar{x}_n)^{\gamma} [\ln(\bar{x}_1 + 1) \dots \ln(\bar{x}_n + 1)]^{\beta} \prod_{i=1}^{m} \langle\langle M_i(x_1, \dots, x_n) \rangle\rangle \geqslant C_0.$$

Эти теоремы будем называть **гиперболическими** теоремами переноса. Частный случай теорем такого типа был рассмотрен А. Я. Хинчиным ([2]) и позже Дайсоном ([4]). Обычно доказательства различных теорем переноса основываются на применении принципа Дирихле (исключение составляет аналитическая теорема А. О. Гельфонда ([3])). В настоящей работе, в отличие от этого, используется другой способ доказательства, предложенный Н. М. Коробовым. Он основан на оценке тригонометрических сумм.

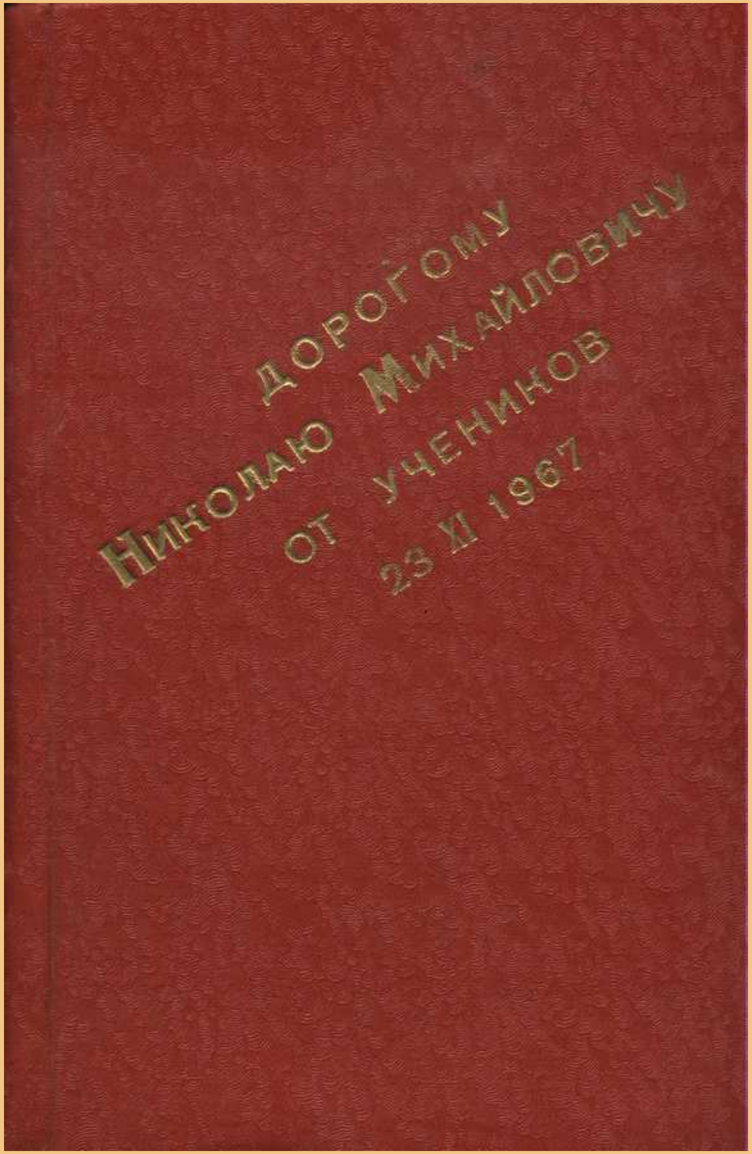
§ 1. Рассмотрим неравенства

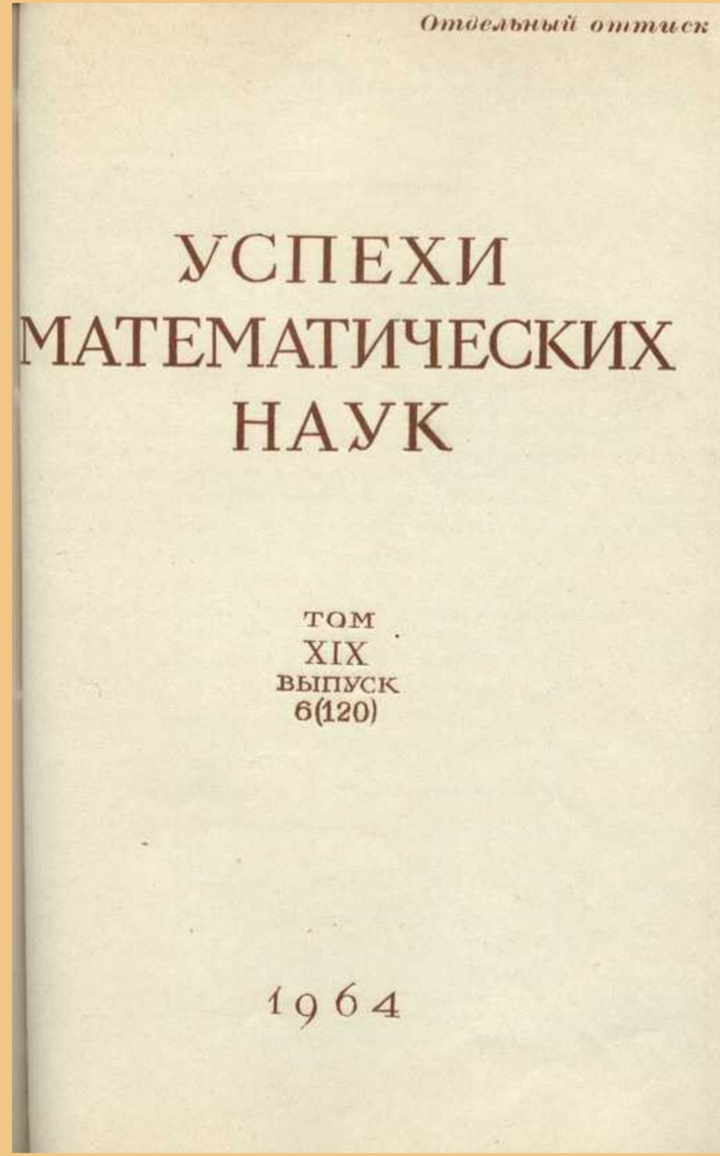
$$\langle\langle \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n \rangle\rangle \geqslant \frac{C}{\bar{x}_1 \dots \bar{x}_n \ln^{\gamma}(\bar{x}_1 + 1) \dots \ln^{\gamma}(\bar{x}_n + 1)}, \qquad (2)$$

$$\langle\langle \alpha_1 x \rangle\rangle \dots \langle\langle \alpha_n x \rangle\rangle \geqslant \frac{C_1}{x \ln^{\gamma_1}(x + 1)}, \qquad (3)$$

где $C = C(\alpha_i, n)$; $C_1 = C_1(\alpha_i, n)$.

Теорема 1. *Если неравенство* (2) *выполнено для любых целых* $(x_1, \dots, x_n) \neq (0, \dots, 0)$, *то для любого целого* $x > 0$ *при* $\gamma_1 = (\gamma + 2) n^2$ *выполнено и неравенство* (3). *Верна и обратная теорема с* $\gamma = (\gamma_1 + 1 + n)$ n.

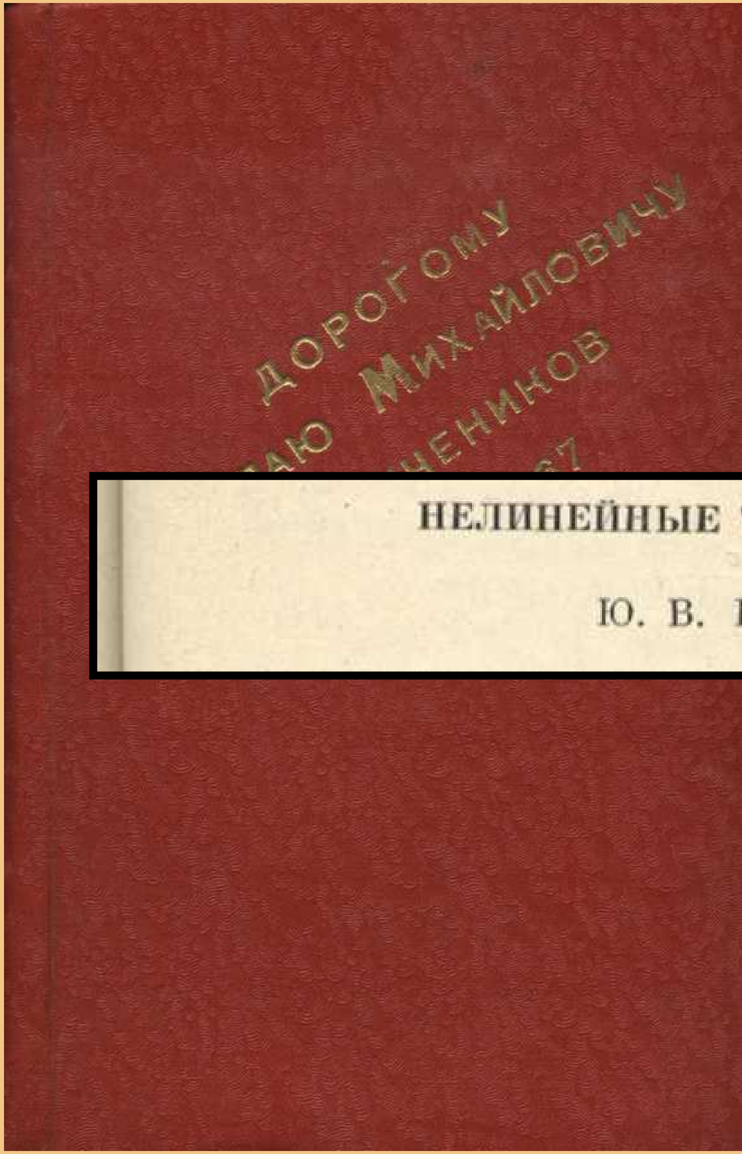


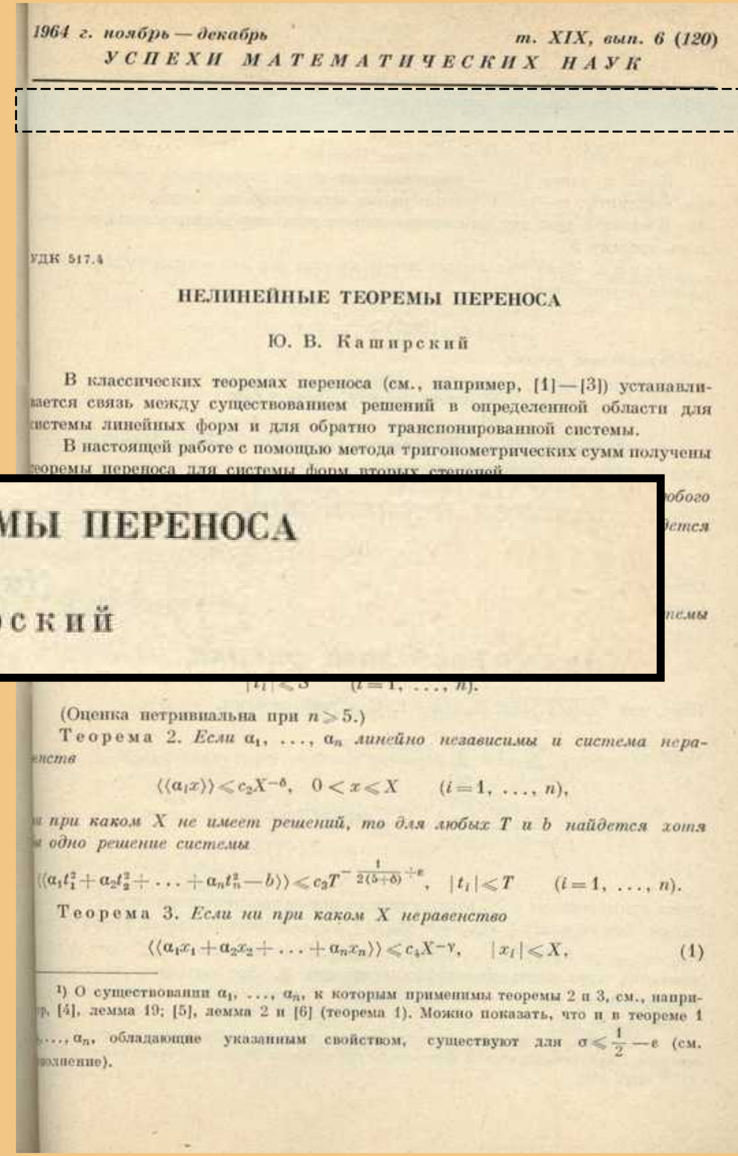

Отдельный оттиск

УСПЕХИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

ТОМ
XIX
ВЫПУСК
6(120)

1964





1964 г. ноябрь — декабрь *т. XIX, вып. 6 (120)*
УСПЕХИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

УДК 517.4

НЕЛИНЕЙНЫЕ ТЕОРЕМЫ ПЕРЕНОСА

Ю. В. Каширский

В классических теоремах переноса (см., например, [1]—[3]) устанавливается связь между существованием решений в определенной области для системы линейных форм и для обратно транспонированной системы.

В настоящей работе с помощью метода тригонометрических сумм получены теоремы переноса для системы форм вторых степеней.

(Оценка нетривиальна при $n > 5$.)

Теорема 2. *Если $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ линейно независимы и система неравенств*

$$\langle\langle \alpha_i x\rangle\rangle \leqslant c_2 X^{-\delta}, \quad 0 < x \leqslant X \qquad (i = 1, \ldots, n),$$

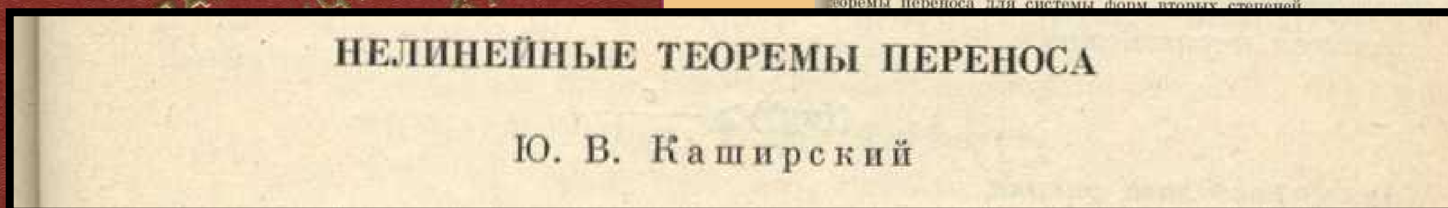
ни при каком X не имеет решений, то для любых T и b найдется хотя бы одно решение системы

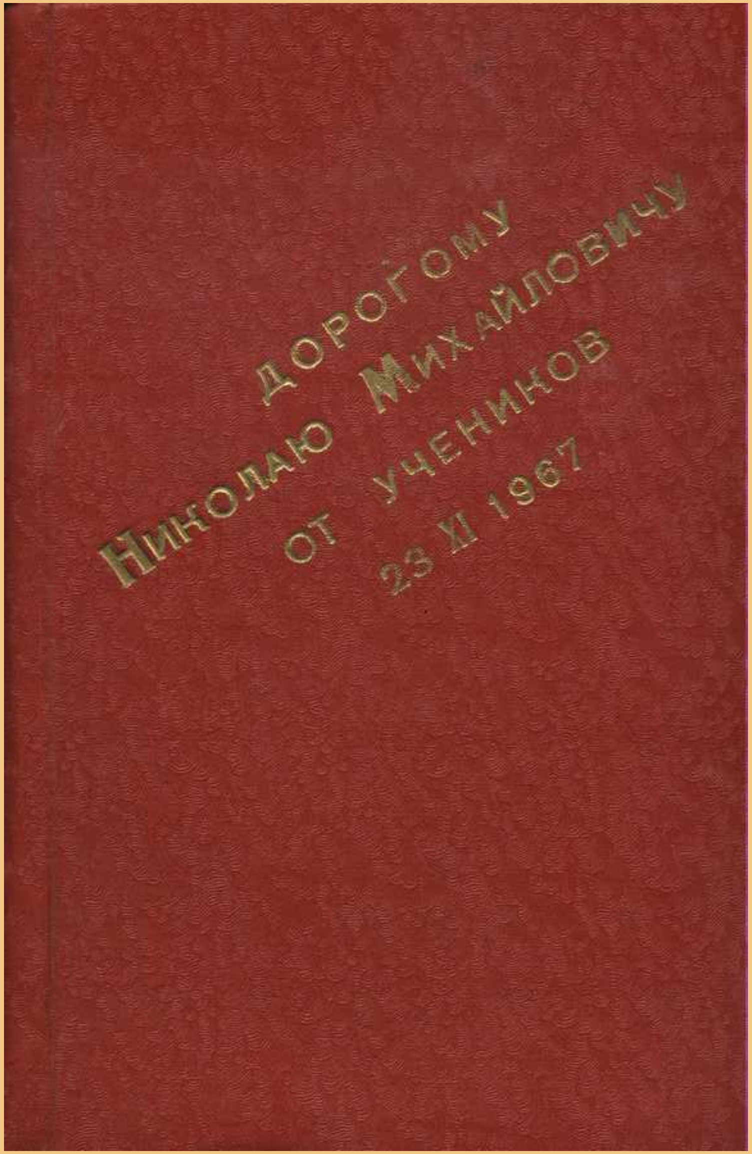
$$\langle\langle \alpha_1 t_1^2 + \alpha_2 t_2^2 + \ldots + \alpha_n t_n^2 - b\rangle\rangle \leqslant c_3 T^{-\frac{1}{2(5+\delta)}+\varepsilon}, \quad |t_i| \leqslant T \qquad (i = 1, \ldots, n).$$

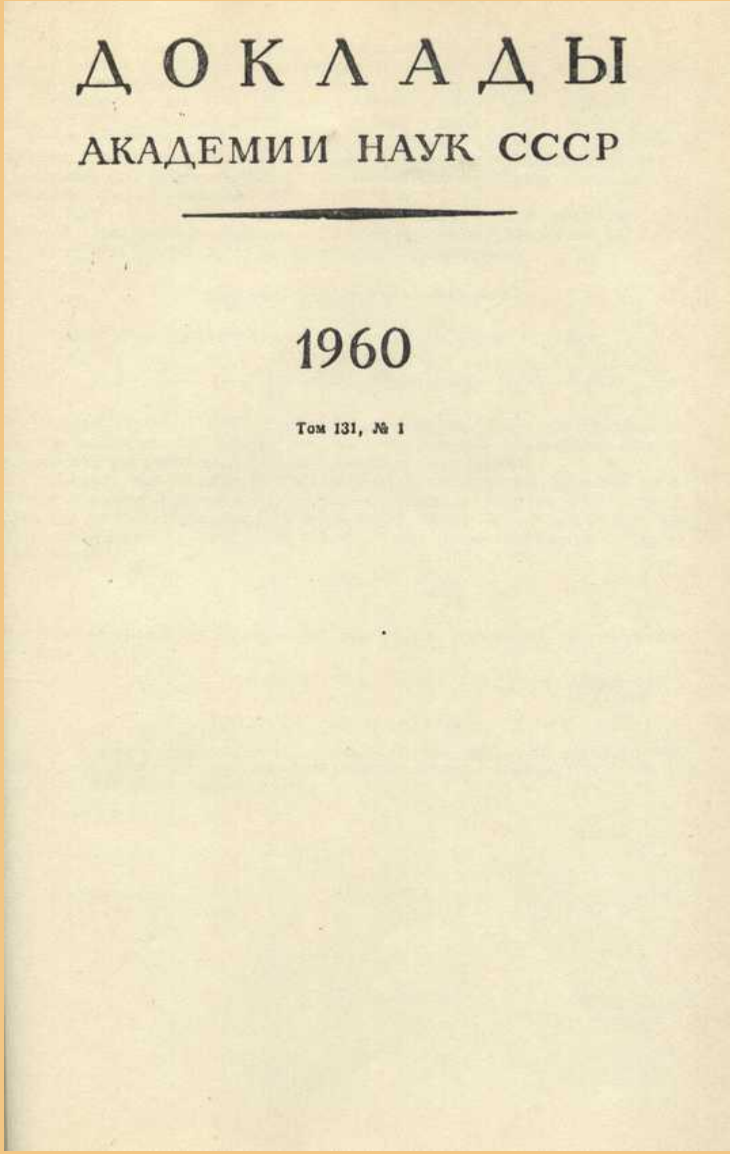
Теорема 3. *Если ни при каком X неравенство*

$$\langle\langle \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n\rangle\rangle \leqslant c_4 X^{-\gamma}, \quad |x_i| \leqslant X, \tag{1}$$

[1]) О существовании $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, к которым применимы теоремы 2 и 3, см., например, [4], лемма 19; [5], лемма 2 и [6] (теорема 1). Можно показать, что и в теореме 1 $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, обладающие указанным свойством, существуют для $\sigma \leqslant \frac{1}{2} - \varepsilon$ (см. дополнение).



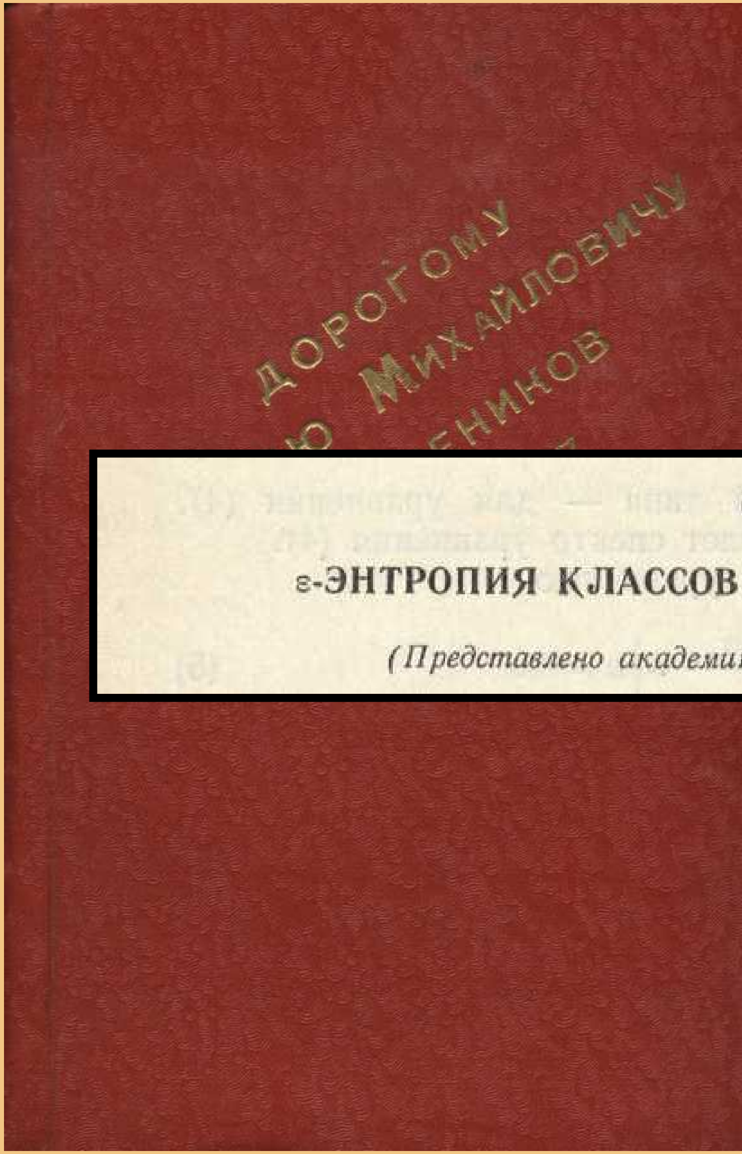


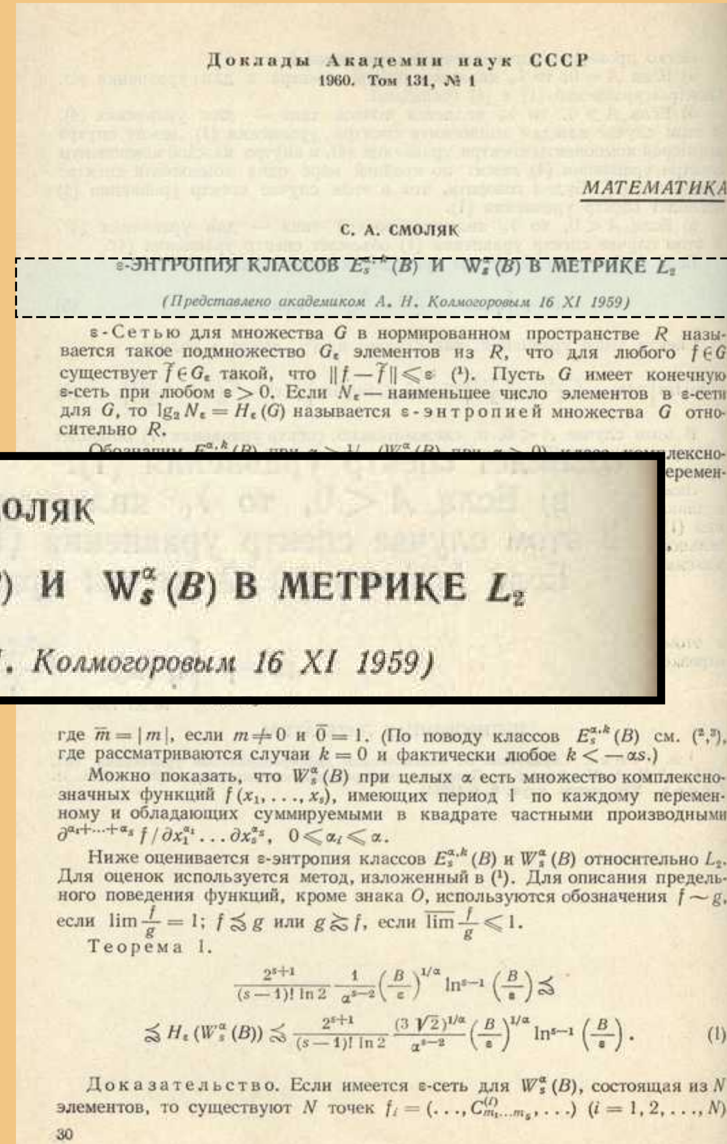


ДОКЛАДЫ
АКАДЕМИИ НАУК СССР

1960

Том 131, № 1





Доклады Академии наук СССР
1960. Том 131, № 1

МАТЕМАТИКА

С. А. СМОЛЯК

ε-ЭНТРОПИЯ КЛАССОВ $E_s^{\alpha,k}(B)$ И $W_s^{\alpha}(B)$ В МЕТРИКЕ L_2

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 16 XI 1959)

ε-Сетью для множества G в нормированном пространстве R называется такое подмножество G_ε элементов из R, что для любого $f \in G$ существует $\tilde{f} \in G_\varepsilon$ такой, что $\|f - \tilde{f}\| \leqslant \varepsilon$ (1). Пусть G имеет конечную ε-сеть при любом $\varepsilon > 0$. Если N_ε — наименьшее число элементов в ε-сети для G, то $\lg_2 N_\varepsilon = H_\varepsilon(G)$ называется ε-энтропией множества G относительно R.

Обозначим $E_s^{\alpha,k}(B)$ при $\alpha > 1/$ ($W_s^{\alpha}(B)$ при $\alpha > 0$) класс комплексно- ... [illegible] ... перемен- ...

где $\overline{m} = |m|$, если $m \neq 0$ и $\overline{0} = 1$. (По поводу классов $E_s^{\alpha,k}(B)$ см. (2,3), где рассматриваются случаи $k = 0$ и фактически любое $k < -\alpha s$.)

Можно показать, что $W_s^{\alpha}(B)$ при целых α есть множество комплекснозначных функций $f(x_1, \ldots, x_s)$, имеющих период 1 по каждому переменному и обладающих суммируемыми в квадрате частными производными $\partial^{\alpha_1 + \cdots + \alpha_s} f / \partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_s^{\alpha_s}$, $0 \leqslant \alpha_i \leqslant \alpha$.

Ниже оценивается ε-энтропия классов $E_s^{\alpha,k}(B)$ и $W_s^{\alpha}(B)$ относительно L_2. Для оценок используется метод, изложенный в (1). Для описания предельного поведения функций, кроме знака O, используются обозначения $f \sim g$, если $\lim \frac{f}{g} = 1$; $f \lesssim g$ или $g \gtrsim f$, если $\overline{\lim} \frac{f}{g} \leqslant 1$.

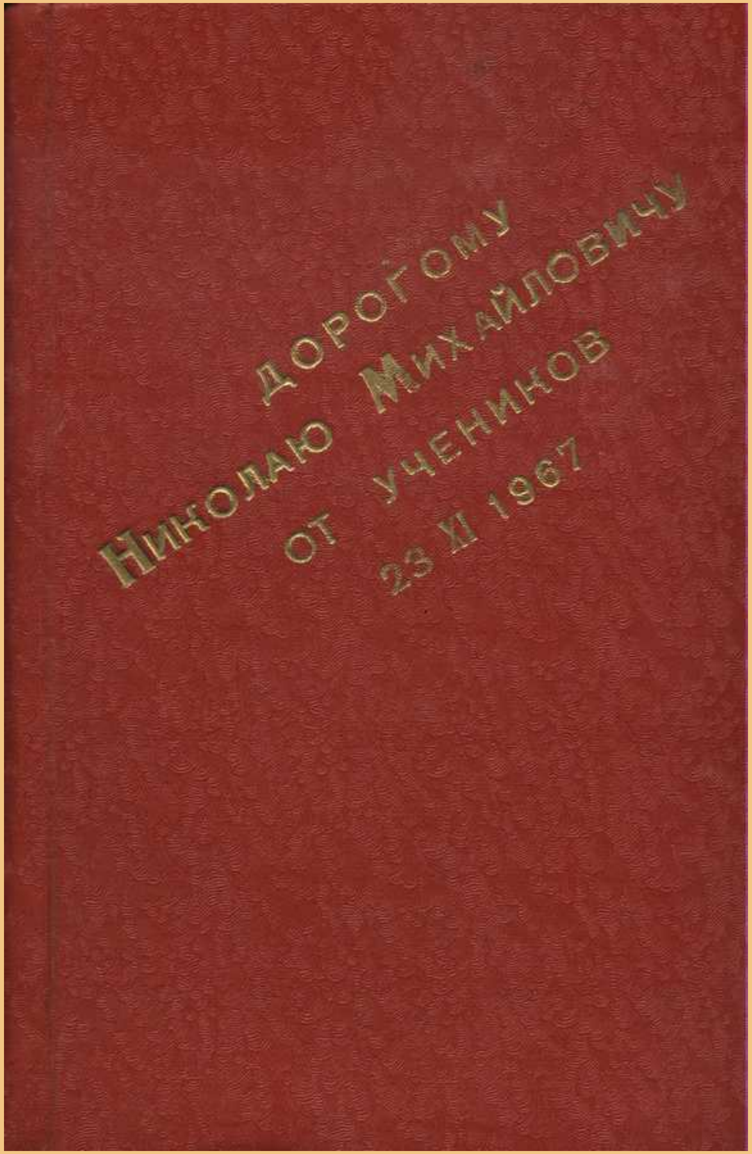
Теорема 1.

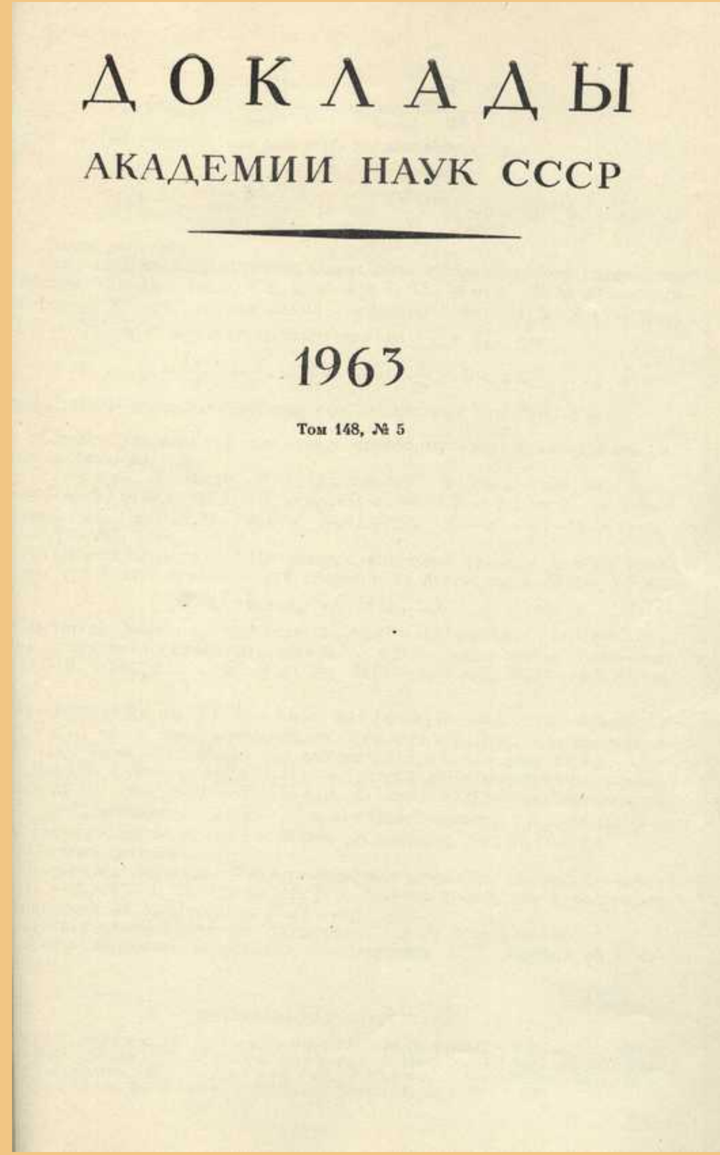
$$\frac{2^{s+1}}{(s-1)!\ln 2} \frac{1}{\alpha^{s-2}} \left(\frac{B}{\varepsilon}\right)^{1/\alpha} \ln^{s-1}\left(\frac{B}{\varepsilon}\right) \lesssim$$

$$\lesssim H_\varepsilon(W_s^{\alpha}(B)) \lesssim \frac{2^{s+1}}{(s-1)!\ln 2} \frac{(3\sqrt{2})^{1/\alpha}}{\alpha^{s-2}} \left(\frac{B}{\varepsilon}\right)^{1/\alpha} \ln^{s-1}\left(\frac{B}{\varepsilon}\right). \qquad (1)$$

Доказательство. Если имеется ε-сеть для $W_s^{\alpha}(B)$, состоящая из N элементов, то существуют N точек $f_i = (\ldots, C_{m_1 \ldots m_s}^{(i)}, \ldots)$ $(i = 1, 2, \ldots, N)$

С. А. СМОЛЯК
ε-ЭНТРОПИЯ КЛАССОВ $E_s^{\alpha,k}(B)$ И $W_s^{\alpha}(B)$ В МЕТРИКЕ L_2
(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 16 XI 1959)



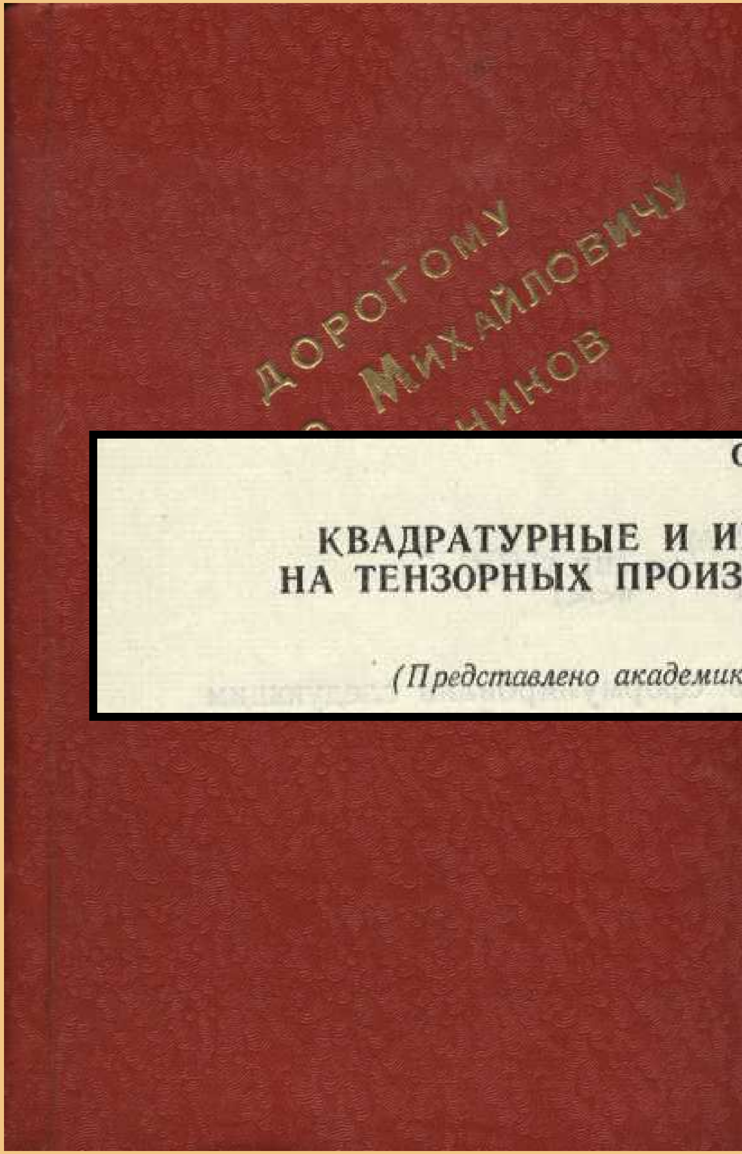


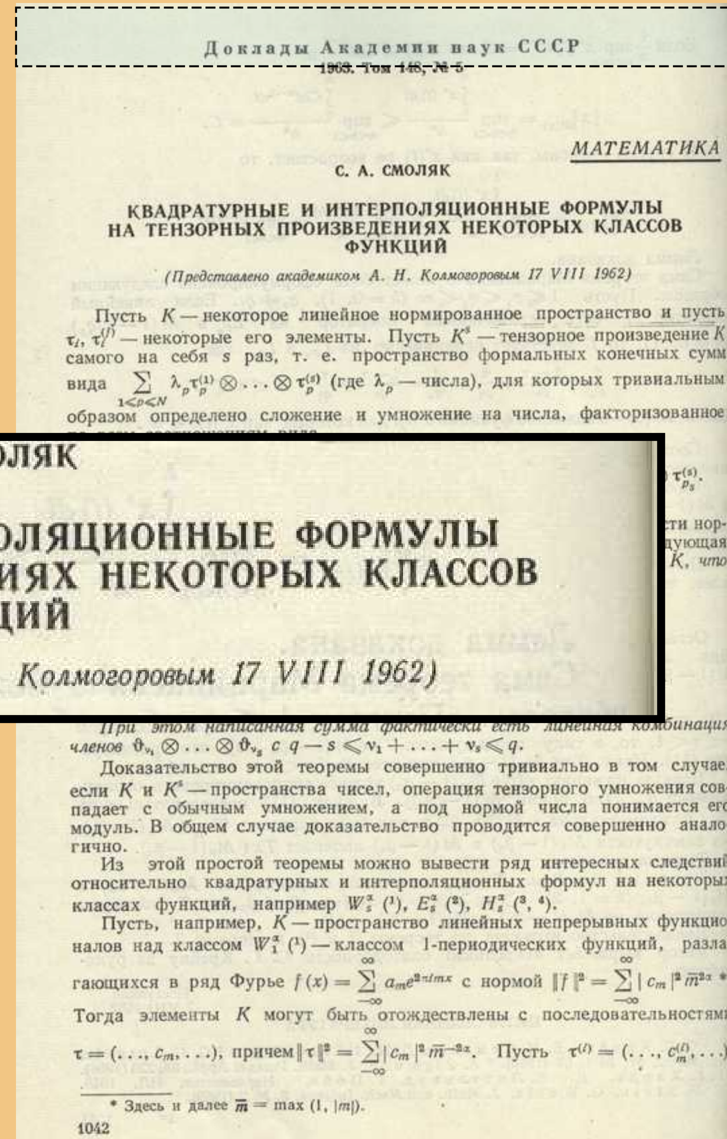
ДОКЛАДЫ

АКАДЕМИИ НАУК СССР

1963

Том 148, № 5





Доклады Академии наук СССР
1963. Том 148, № 5

МАТЕМАТИКА

С. А. СМОЛЯК

КВАДРАТУРНЫЕ И ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫЕ ФОРМУЛЫ НА ТЕНЗОРНЫХ ПРОИЗВЕДЕНИЯХ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ ФУНКЦИЙ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 17 VIII 1962)

Пусть K — некоторое линейное нормированное пространство и пусть $\tau_i, \tau_i^{(j)}$ — некоторые его элементы. Пусть K^s — тензорное произведение K самого на себя s раз, т. е. пространство формальных конечных сумм вида $\sum\limits_{1<p\leqslant N} \lambda_p \tau_p^{(1)} \otimes \ldots \otimes \tau_p^{(s)}$ (где λ_p — числа), для которых тривиальным образом определено сложение и умножение на числа, факторизованное ...

... $\tau_{p_s}^{(s)}$.

... ти нор- ... дующая ... K, что

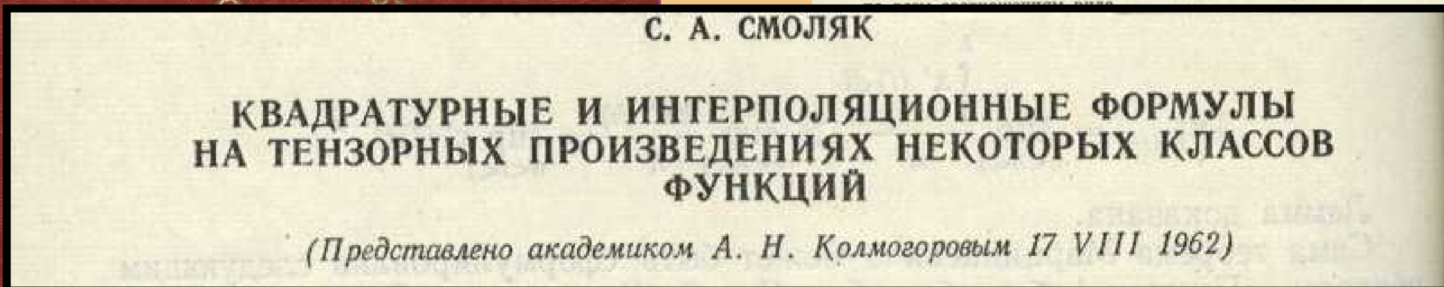
При этом написанная сумма фактически есть линейная комбинация членов $\vartheta_{\nu_1} \otimes \ldots \otimes \vartheta_{\nu_s}$ с $q - s \leqslant \nu_1 + \ldots + \nu_s \leqslant q$.

Доказательство этой теоремы совершенно тривиально в том случае, если K и K^s — пространства чисел, операция тензорного умножения совпадает с обычным умножением, а под нормой числа понимается его модуль. В общем случае доказательство проводится совершенно аналогично.

Из этой простой теоремы можно вывести ряд интересных следствий относительно квадратурных и интерполяционных формул на некоторых классах функций, например W_s^α ([1]), E_s^α ([2]), H_s^α ([3, 4]).

Пусть, например, K — пространство линейных непрерывных функционалов над классом W_1^α ([1]) — классом 1-периодических функций, разлагающихся в ряд Фурье $f(x) = \sum\limits_{-\infty}^{\infty} a_m e^{2\pi i m x}$ с нормой $\|f\|^2 = \sum\limits_{-\infty}^{\infty} |c_m|^2 \overline{m}^{2\alpha}$ *. Тогда элементы K могут быть отождествлены с последовательностями $\tau = (\ldots, c_m, \ldots)$, причем $\|\tau\|^2 = \sum\limits_{-\infty}^{\infty} |c_m|^2 \overline{m}^{-2\alpha}$. Пусть $\tau^{(l)} = (\ldots, c_m^{(l)}, \ldots)$.

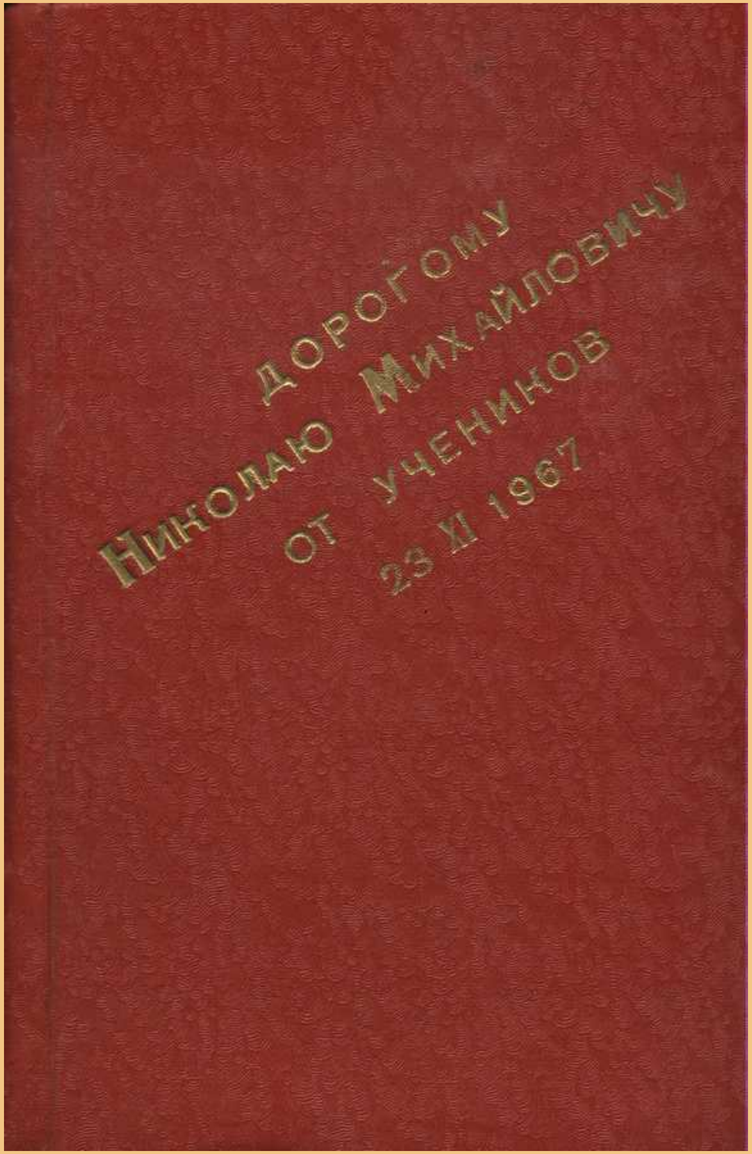
* Здесь и далее $\overline{m} = \max(1, |m|)$.

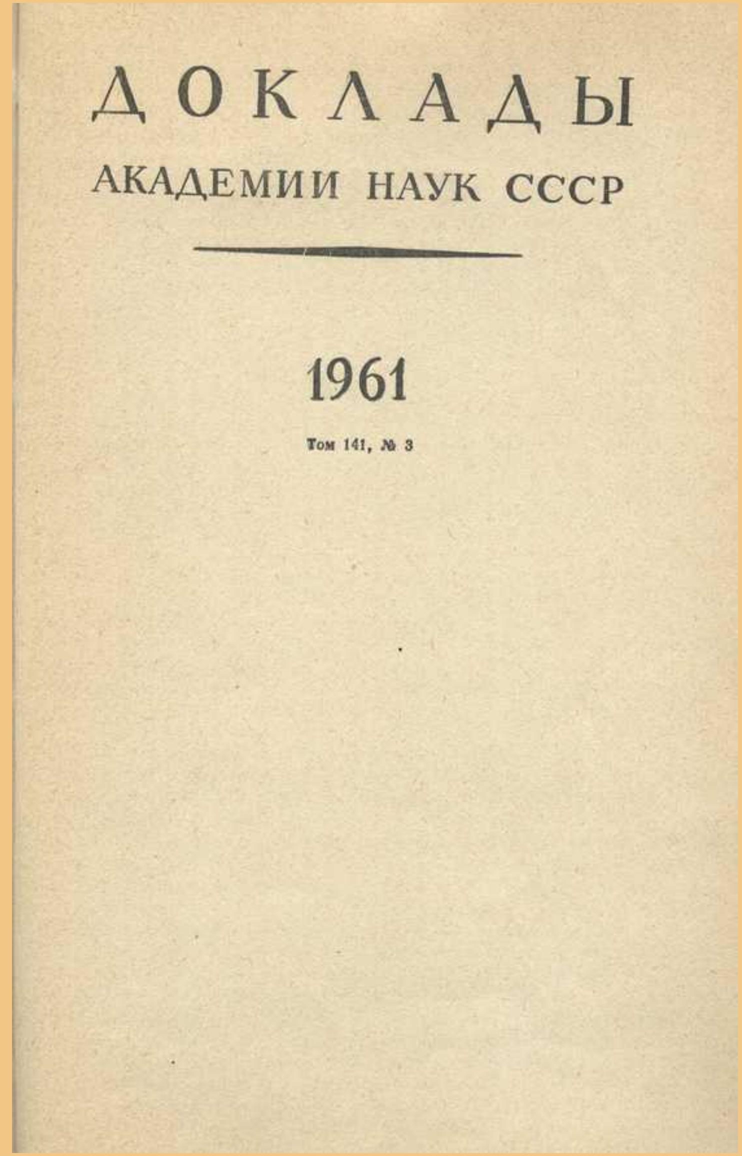


С. А. СМОЛЯК

КВАДРАТУРНЫЕ И ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫЕ ФОРМУЛЫ НА ТЕНЗОРНЫХ ПРОИЗВЕДЕНИЯХ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ ФУНКЦИЙ

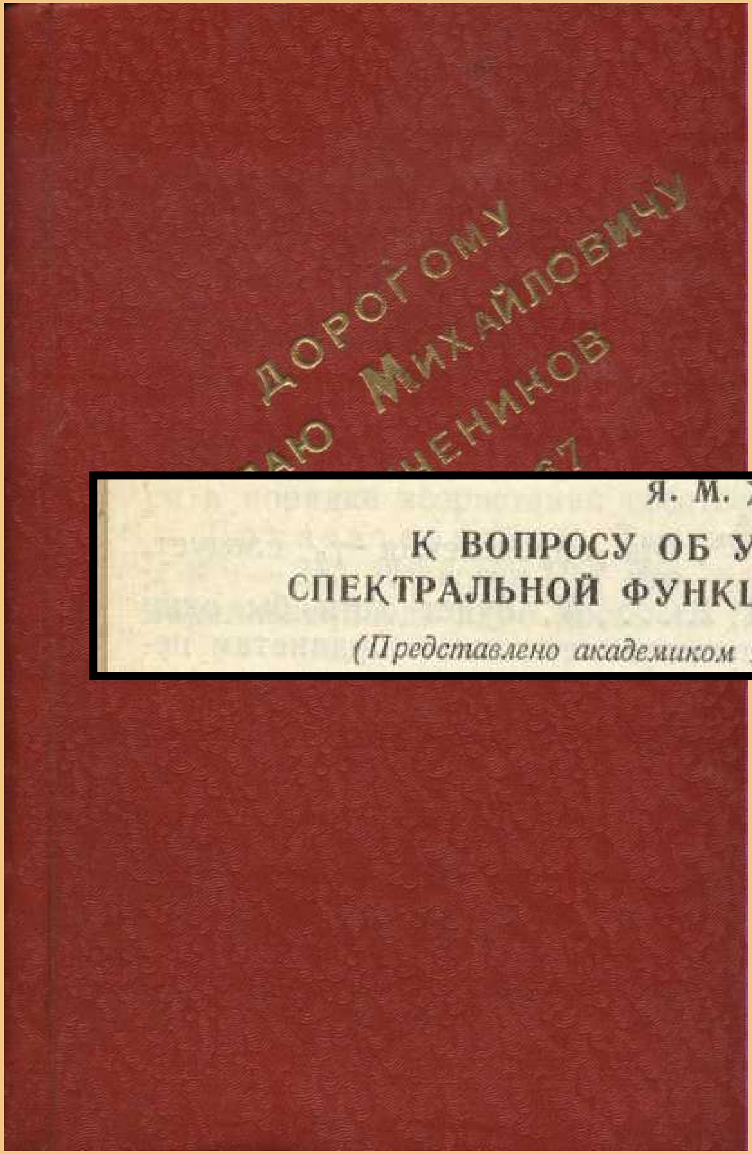
(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 17 VIII 1962)




ДОКЛАДЫ
АКАДЕМИИ НАУК СССР

1961

Том 141, № 3



Доклады Академии наук СССР
1961. Том 141, № 3

МАТЕМАТИКА

Я. М. ЖИЛЕЙКИН

К ВОПРОСУ ОБ УТОЧНЕНИИ ОЦЕНКИ СПЕКТРАЛЬНОЙ ФУНКЦИИ ОПЕРАТОРА ЛАПЛАСА

(Представлено академиком И. Г. Петровским 30 VI 1961)

Введем следующие обозначения. Пусть g — N-мерная область, для которой разрешима задача на собственные значения для оператора Лапласа при однородном краевом условии любого из трех родов; P — произвольная фиксированная точка области g; Q — любая точка области g; $u_i(x)$ — i-я собственная функция рассматриваемой задачи; λ_i — i-е собственное значение. Будем называть функцию $\theta(P, Q) = \sum\limits_{\sqrt{\lambda_i}<\mu} u_i(P)\, u_i(Q)$ спектральной функцией оператора Лапласа.

В качестве частного случая области g рассматривается произвольный N-мерный прямоугольный параллелепипед.

Теорема 1. *Для спектральной функции $\theta(P, Q)$ оператора Лапласа*

Я. М. ЖИЛЕЙКИН
К ВОПРОСУ ОБ УТОЧНЕНИИ ОЦЕНКИ
СПЕКТРАЛЬНОЙ ФУНКЦИИ ОПЕРАТОРА ЛАПЛАСА
(Представлено академиком И. Г. Петровским 30 VI 1961)

параллелепипед, из которого удалена сколь угодно малая окрестность точки $Q = P$.

Доказательство. Не ограничивая общности доказательства, рассмотрим N-мерный параллелепипед со сторонами $[0\, a_n]$ $(n = 1, 2, \ldots, N)$. Проведем доказательство для однородного краевого условия 1-го рода.

Собственными функциями задачи $\Delta u + \lambda u = 0$, $u|_\Gamma = 0$ в этом случае являются функции:

$$u_{k_1 \ldots k_N}(x_1, \ldots, x_N) = \prod_{n=1}^{N} \left(\sqrt{\frac{2}{a_n}}\right) \sin \frac{\pi k_n}{a_n} x_n,$$

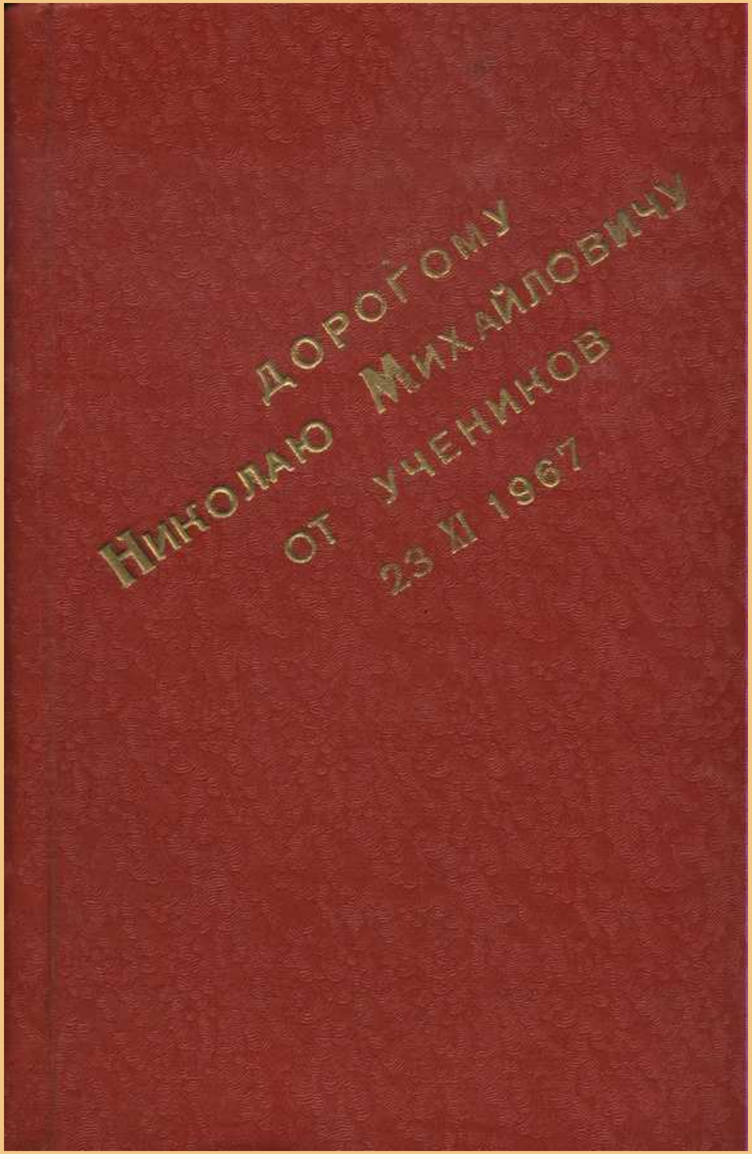
$$0 \leqslant x_n \leqslant a_n, \quad n = 1, 2, \ldots, N,$$

а собственными значениями — числа:

$$\lambda_{k_1, \ldots, k_N} = \pi^2 \sum_{n=1}^{N} \frac{k_n^2}{a_n^2}.$$

Пусть точки P и Q, принадлежащие нашему параллелепипеду, заданы соответственно координатами $x_1, x_2, \ldots, x_N$; $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_N$. Спектральная функция приобретает вид

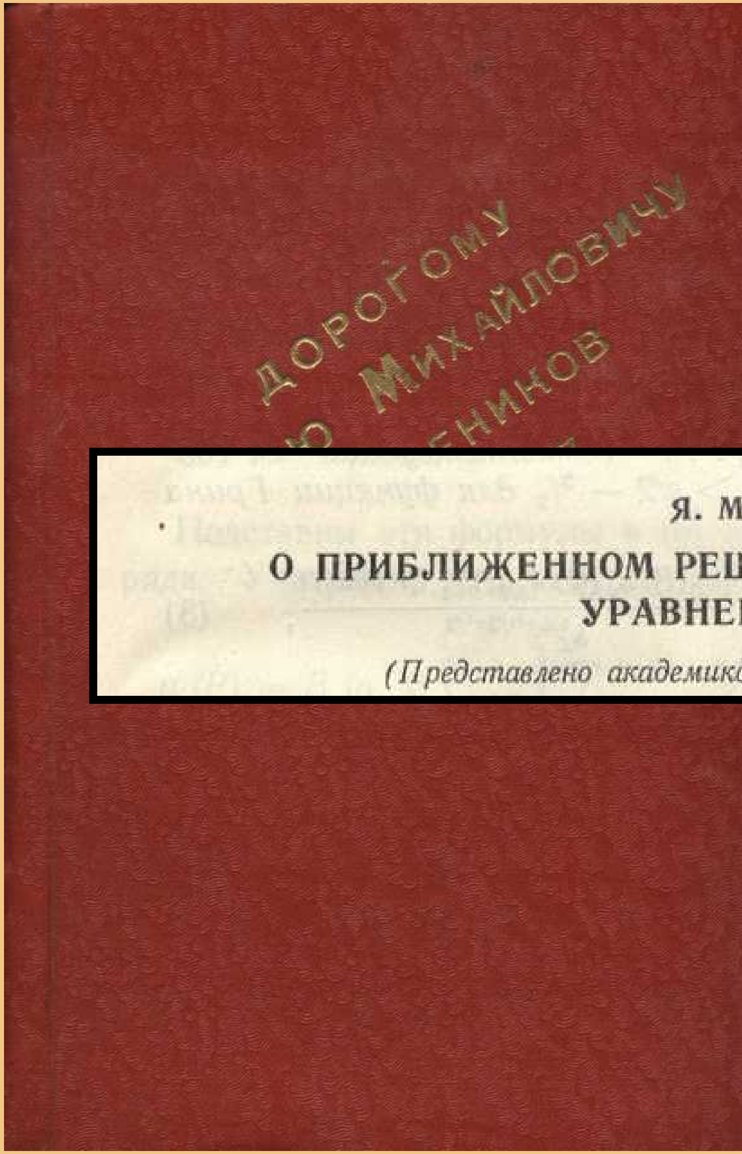
$$\theta(x_1, \ldots, x_N, \xi_1, \ldots, \xi_N) = \sum_{\sqrt{\lambda_i}<\mu} \prod_{n=1}^{N} \left(\frac{2}{a_n}\right) \sin \frac{k_n \pi}{a_n} x_n \cdot \sin \frac{k_n \pi}{a_n} \xi_n. \quad (3)$$

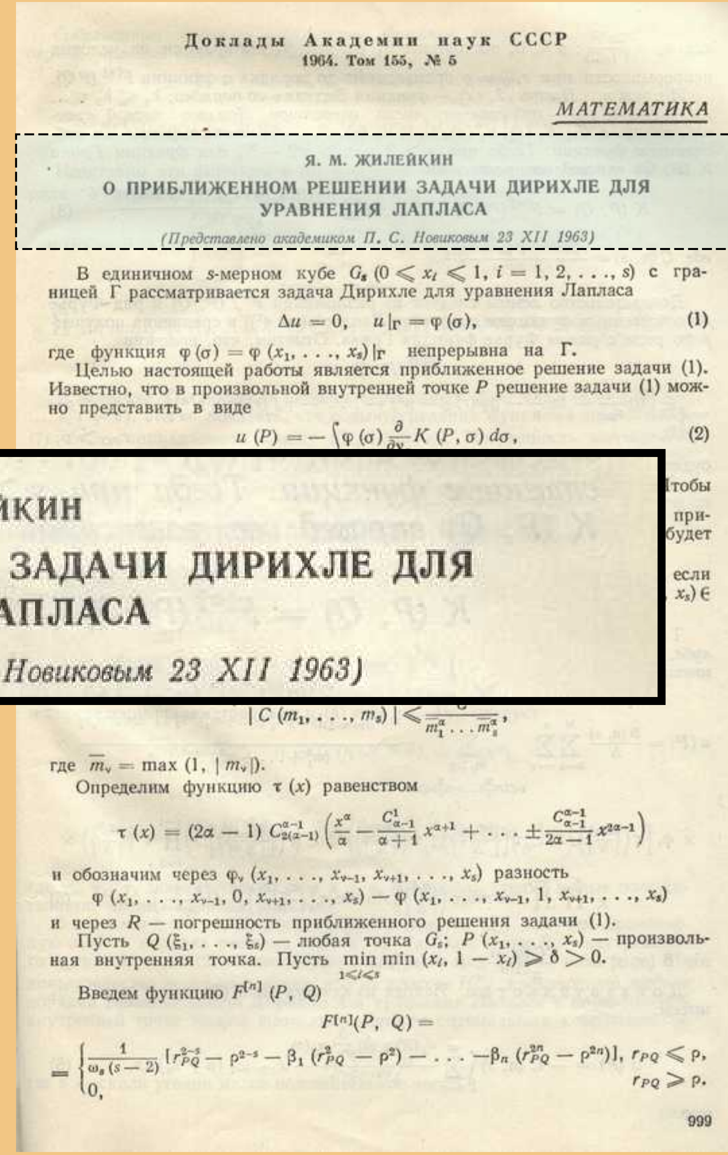


ДОКЛАДЫ
АКАДЕМИИ НАУК СССР

1964

т. 155, № 5





Доклады Академии наук СССР
1964. Том 155, № 5

МАТЕМАТИКА

Я. М. ЖИЛЕЙКИН

О ПРИБЛИЖЕННОМ РЕШЕНИИ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЛАПЛАСА

(*Представлено академиком П. С. Новиковым 23 XII 1963*)

В единичном s-мерном кубе G_s $(0 \leqslant x_i \leqslant 1,\ i = 1, 2, \ldots, s)$ с границей Γ рассматривается задача Дирихле для уравнения Лапласа

$$\Delta u = 0, \quad u|_\Gamma = \varphi(\sigma), \tag{1}$$

где функция $\varphi(\sigma) = \varphi(x_1, \ldots, x_s)|_\Gamma$ непрерывна на Γ.

Целью настоящей работы является приближенное решение задачи (1). Известно, что в произвольной внутренней точке P решение задачи (1) можно представить в виде

$$u(P) = -\int \varphi(\sigma) \frac{\partial}{\partial \nu} K(P, \sigma)\, d\sigma, \tag{2}$$

...Чтобы ... при- ... будет ... если ... $x_s) \in$

$$|C(m_1, \ldots, m_s)| \leqslant \frac{C}{\overline{m}_1^\alpha \ldots \overline{m}_s^\alpha},$$

где $\overline{m}_\nu = \max(1, |m_\nu|)$.

Определим функцию $\tau(x)$ равенством

$$\tau(x) = (2\alpha - 1)\, C_{2(\alpha-1)}^{\alpha-1} \left(\frac{x^\alpha}{\alpha} - \frac{C_{\alpha-1}^1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} + \ldots \pm \frac{C_{\alpha-1}^{\alpha-1}}{2\alpha-1} x^{2\alpha-1} \right)$$

и обозначим через $\varphi_\nu(x_1, \ldots, x_{\nu-1}, x_{\nu+1}, \ldots, x_s)$ разность

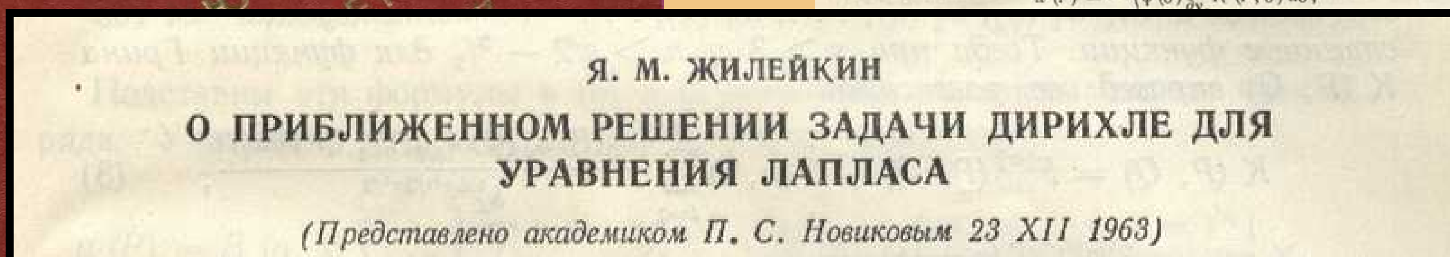
$$\varphi(x_1, \ldots, x_{\nu-1}, 0, x_{\nu+1}, \ldots, x_s) - \varphi(x_1, \ldots, x_{\nu-1}, 1, x_{\nu+1}, \ldots, x_s)$$

и через R — погрешность приближенного решения задачи (1).

Пусть $Q(\xi_1, \ldots, \xi_s)$ — любая точка G_s; $P(x_1, \ldots, x_s)$ — произвольная внутренняя точка. Пусть $\min_{1 \leqslant i \leqslant s} \min(x_i, 1 - x_i) \geqslant \delta > 0$.

Введем функцию $F^{[n]}(P, Q)$

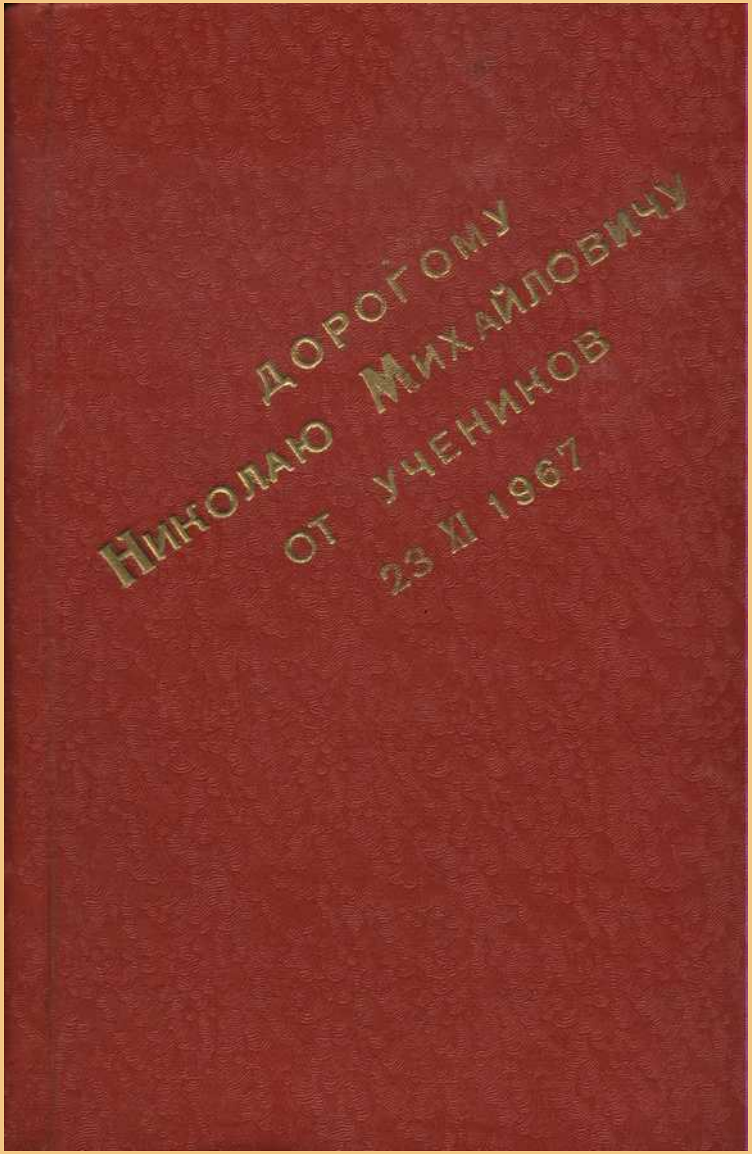
$$F^{[n]}(P, Q) = \begin{cases} \frac{1}{\omega_s(s-2)} [r_{PQ}^{2-s} - \rho^{2-s} - \beta_1 (r_{PQ}^2 - \rho^2) - \ldots - \beta_n (r_{PQ}^{2n} - \rho^{2n})], & r_{PQ} \leqslant \rho, \\ 0, & r_{PQ} \geqslant \rho. \end{cases}$$

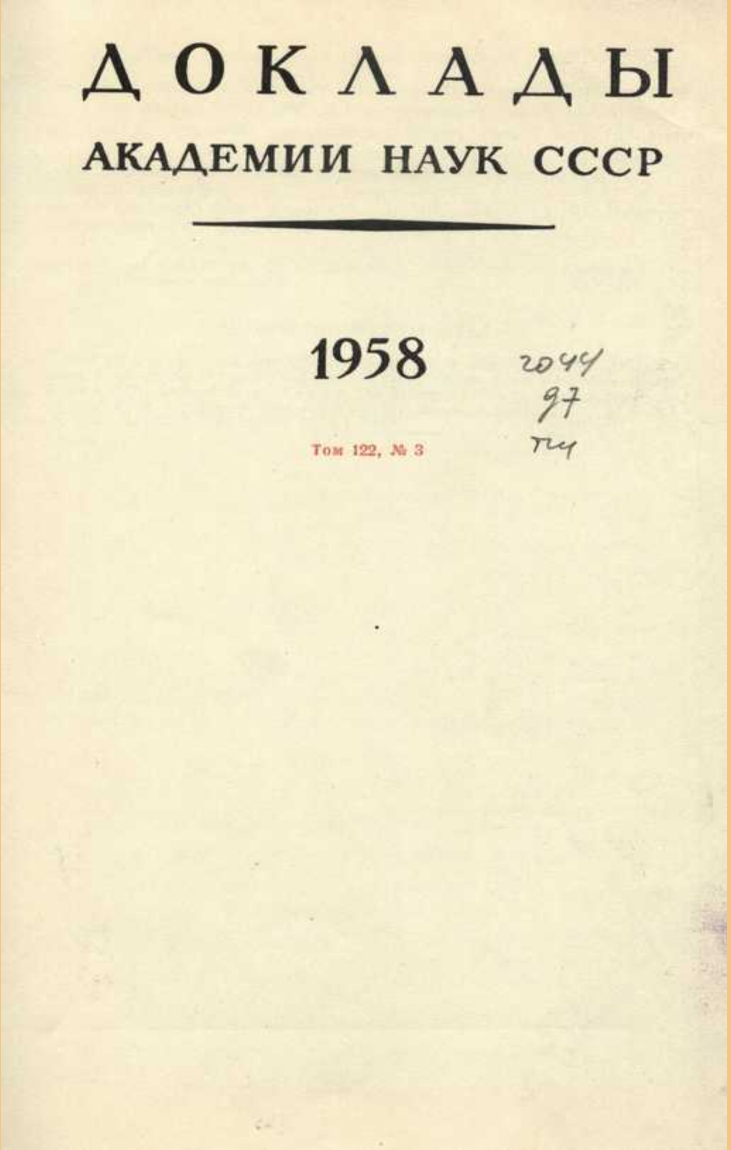


Я. М. ЖИЛЕЙКИН

О ПРИБЛИЖЕННОМ РЕШЕНИИ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЛАПЛАСА

(*Представлено академиком П. С. Новиковым 23 XII 1963*)



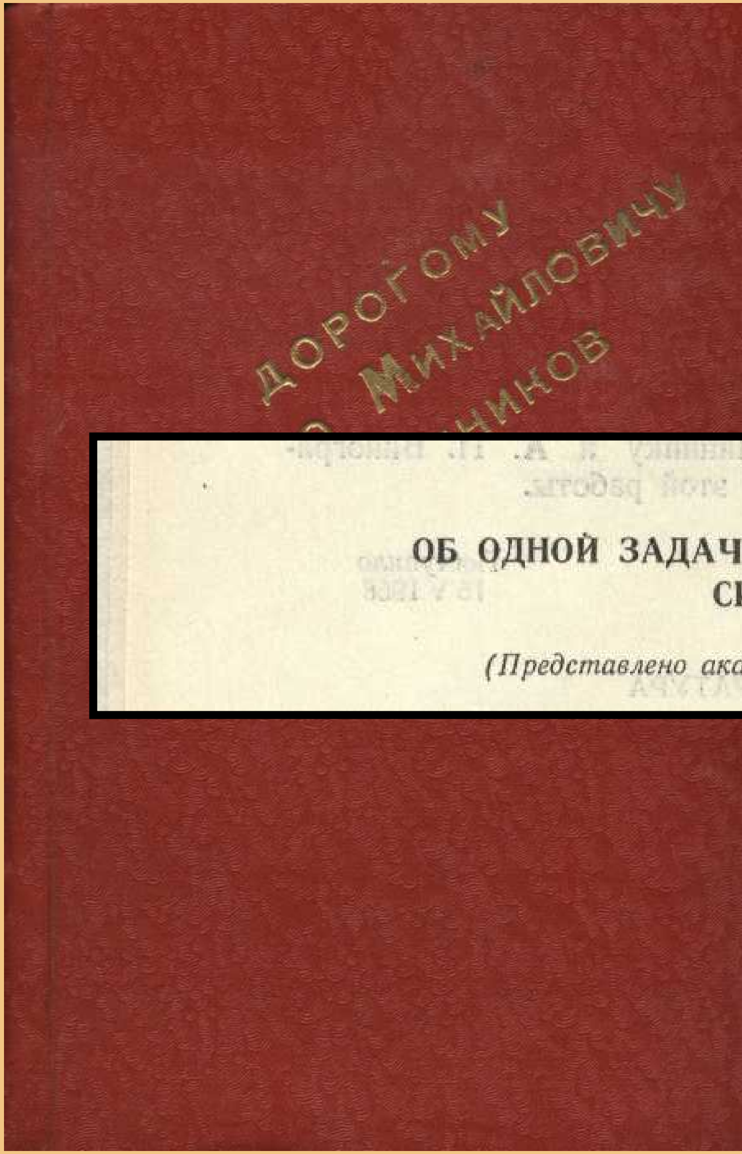


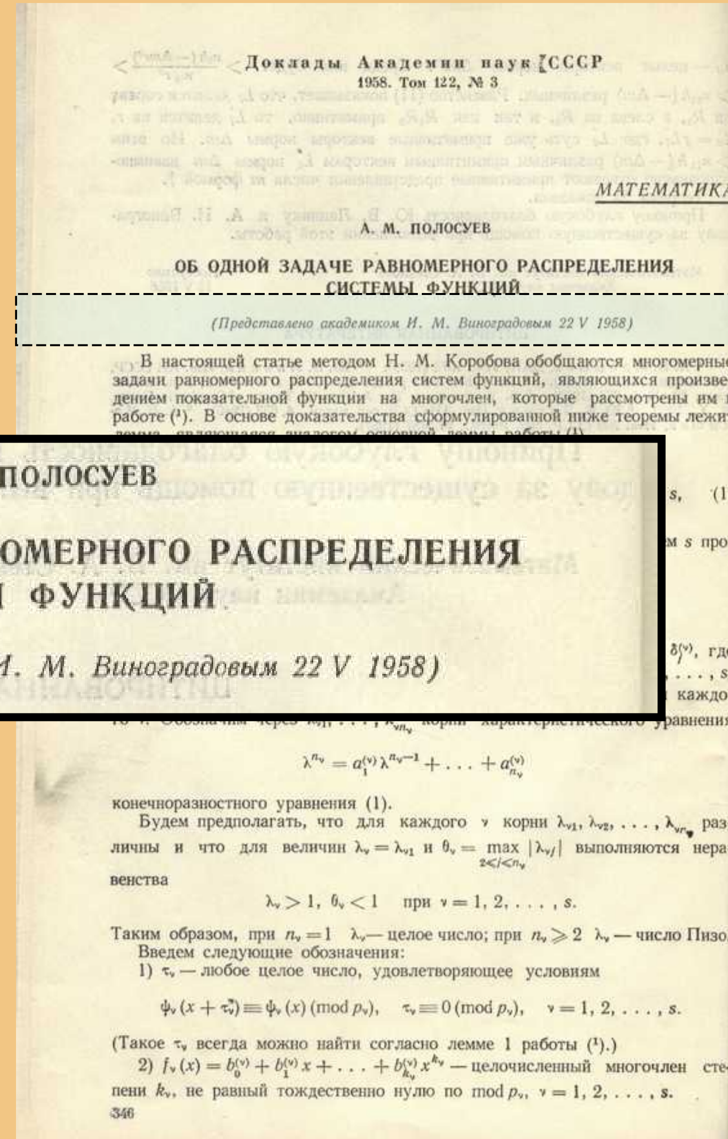
ДОКЛАДЫ
АКАДЕМИИ НАУК СССР

1958

2044
97

Том 122, № 3





Доклады Академии наук СССР
1958. Том 122, № 3

МАТЕМАТИКА

А. М. ПОЛОСУЕВ

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ РАВНОМЕРНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СИСТЕМЫ ФУНКЦИЙ

(Представлено академиком И. М. Виноградовым 22 V 1958)

В настоящей статье методом Н. М. Коробова обобщаются многомерные задачи равномерного распределения систем функций, являющихся произведением показательной функции на многочлен, которые рассмотрены им в работе (1). В основе доказательства сформулированной ниже теоремы лежит лемма, являющаяся аналогом основной леммы работы (1).

го ν. Обозначим через $\lambda_{\nu 1}, \ldots, \lambda_{\nu n_\nu}$ корни характеристического уравнения

$$\lambda^{n_\nu} = a_1^{(\nu)}\lambda^{n_\nu-1} + \ldots + a_{n_\nu}^{(\nu)}$$

конечноразностного уравнения (1).

Будем предполагать, что для каждого ν корни $\lambda_{\nu 1}, \lambda_{\nu 2}, \ldots, \lambda_{\nu n_\nu}$ различны и что для величин $\lambda_\nu = \lambda_{\nu 1}$ и $\theta_\nu = \max\limits_{2 \leqslant j \leqslant n_\nu} |\lambda_{\nu j}|$ выполняются неравенства

$$\lambda_\nu > 1, \ \theta_\nu < 1 \quad \text{при} \ \nu = 1, 2, \ldots, s.$$

Таким образом, при $n_\nu = 1$ λ_ν — целое число; при $n_\nu \geqslant 2$ λ_ν — число Пизо.

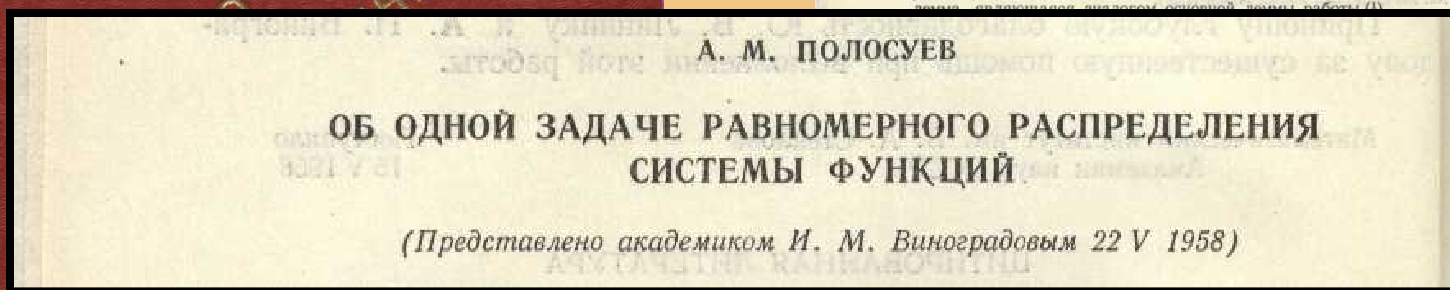
Введем следующие обозначения:

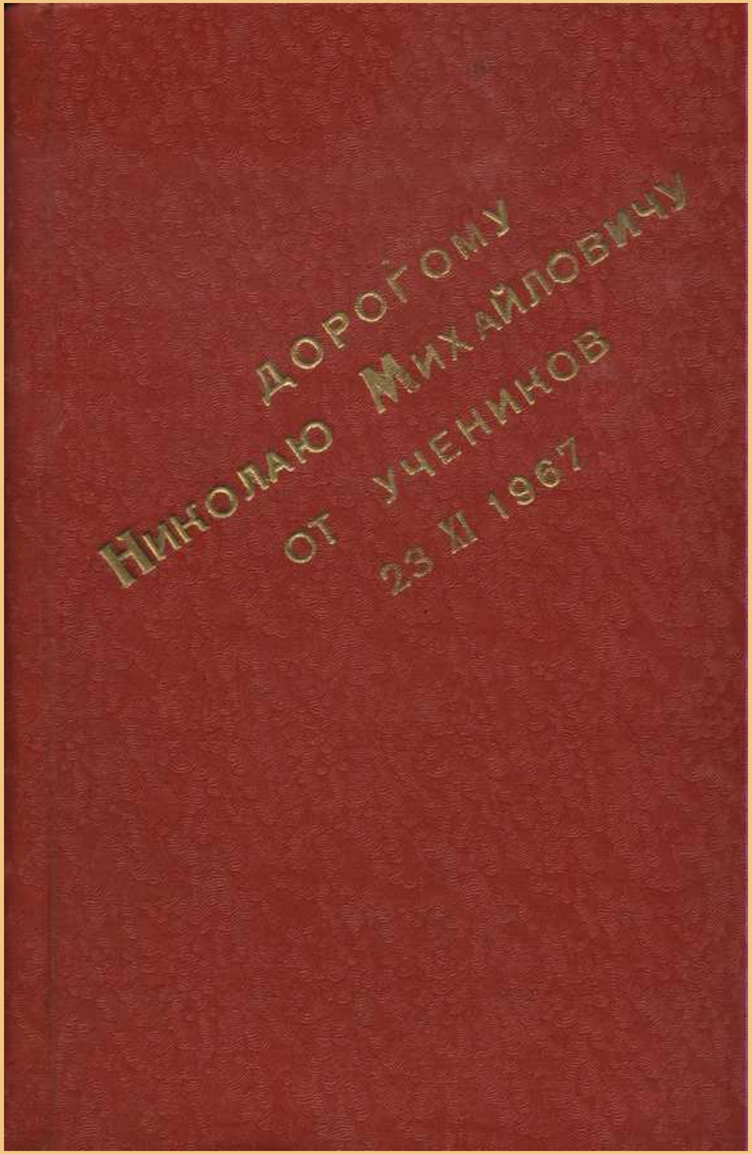
1) τ_ν — любое целое число, удовлетворяющее условиям

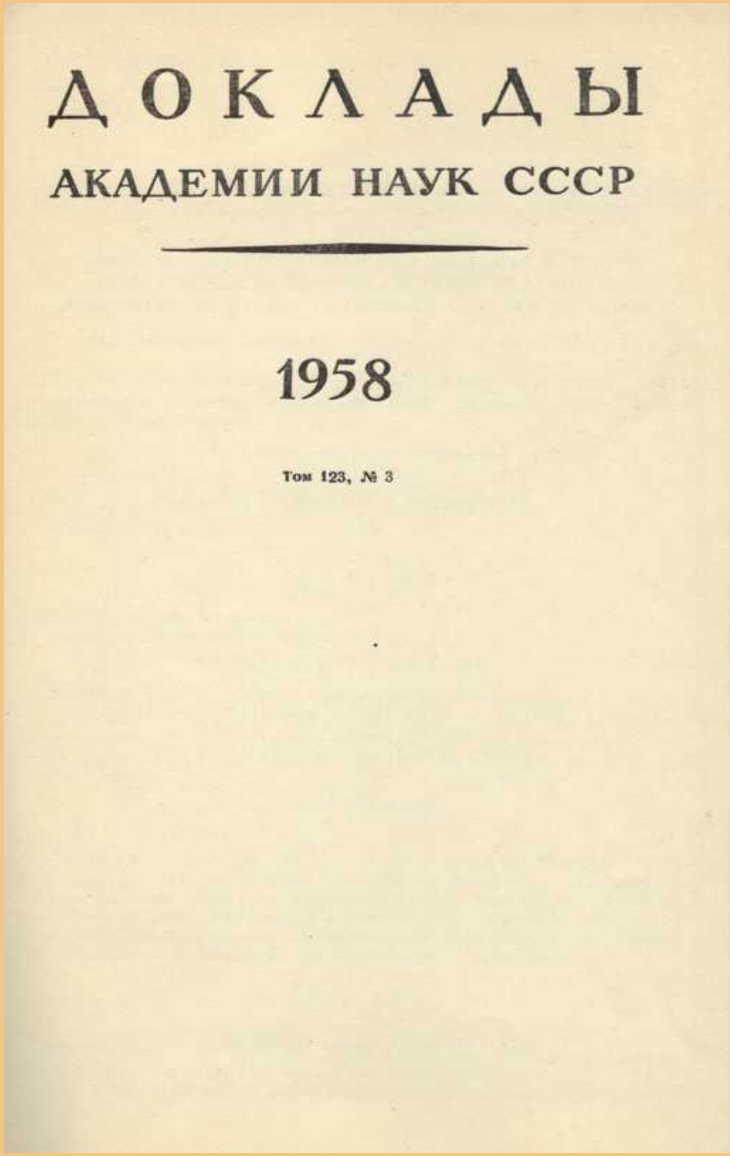
$$\psi_\nu(x + \tau_\nu) \equiv \psi_\nu(x) \ (\mathrm{mod}\ p_\nu), \quad \tau_\nu \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ p_\nu), \quad \nu = 1, 2, \ldots, s.$$

(Такое τ_ν всегда можно найти согласно лемме 1 работы (1).)

2) $f_\nu(x) = b_0^{(\nu)} + b_1^{(\nu)}x + \ldots + b_{k_\nu}^{(\nu)}x^{k_\nu}$ — целочисленный многочлен степени k_ν, не равный тождественно нулю по mod p_ν, $\nu = 1, 2, \ldots, s$.

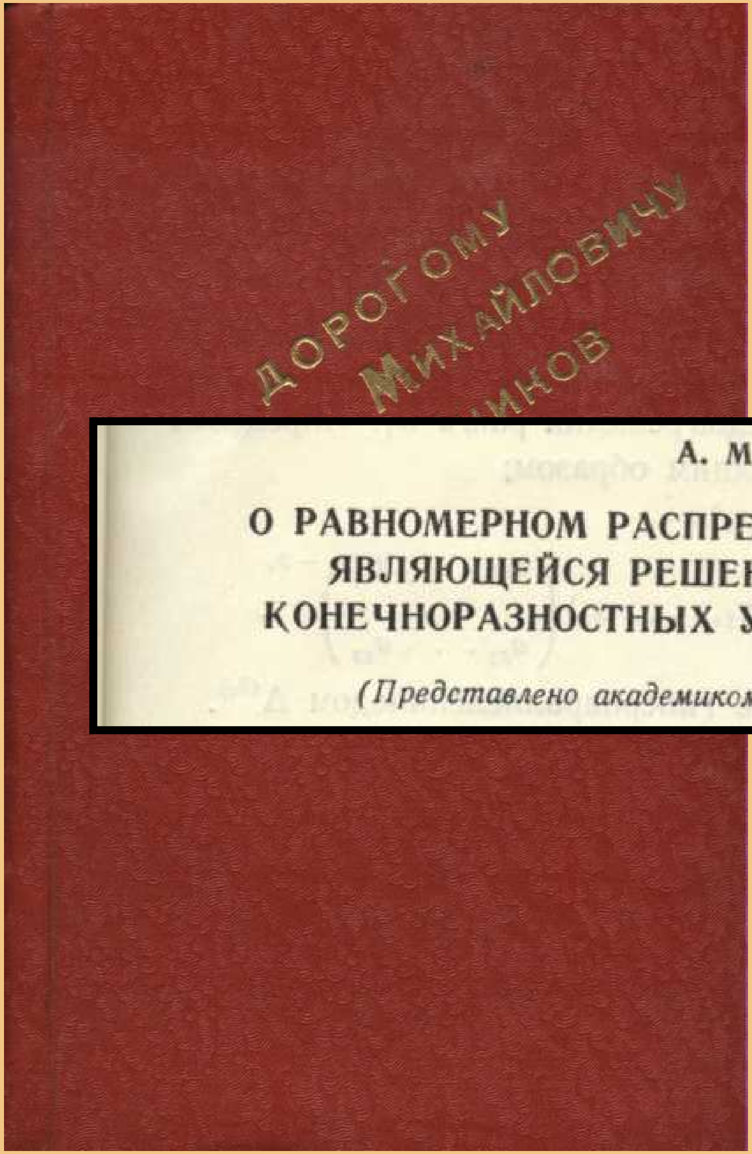

А. М. ПОЛОСУЕВ
ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ РАВНОМЕРНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СИСТЕМЫ ФУНКЦИЙ
(Представлено академиком И. М. Виноградовым 22 V 1958)




ДОКЛАДЫ
АКАДЕМИИ НАУК СССР

1958

Том 123, № 3



Доклады Академии наук СССР
1958. Том 123, № 3

МАТЕМАТИКА

А. М. ПОЛОСУЕВ

О РАВНОМЕРНОМ РАСПРЕДЕЛЕНИИ СИСТЕМЫ ФУНКЦИЙ, ЯВЛЯЮЩЕЙСЯ РЕШЕНИЕМ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ КОНЕЧНОРАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

(Представлено академиком И. М. Виноградовым 28 VI 1958)

Пусть система функций $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_s(x)$ является решением следующей системы s линейных конечноразностных уравнений первого порядка с целыми коэффициентами

(1)

(2)

(3)

...их в ... называется равномерно распределенной в s-мерном пространстве, если

$$\lim_{p\to\infty}\frac{N_p(v)}{p} = |v|$$

(см. [1]).

Теорема 1. *Система функций $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_s(x)$, являющаяся решением системы* (1), *равномерно распределена в s-мерном пространстве, если ни один из корней характеристического многочлена матрицы* (2) *по модулю не равен единице и если для любого гиперкуба объема $|v|$ со сторонами, параллельными координатным осям, целиком лежащего внутри единичного гиперкуба* (3), *выполняется соотношение*

$$\overline{\lim_{p\to\infty}}\frac{N_p(v)}{p} < c|v|,$$

где c — некоторая постоянная.

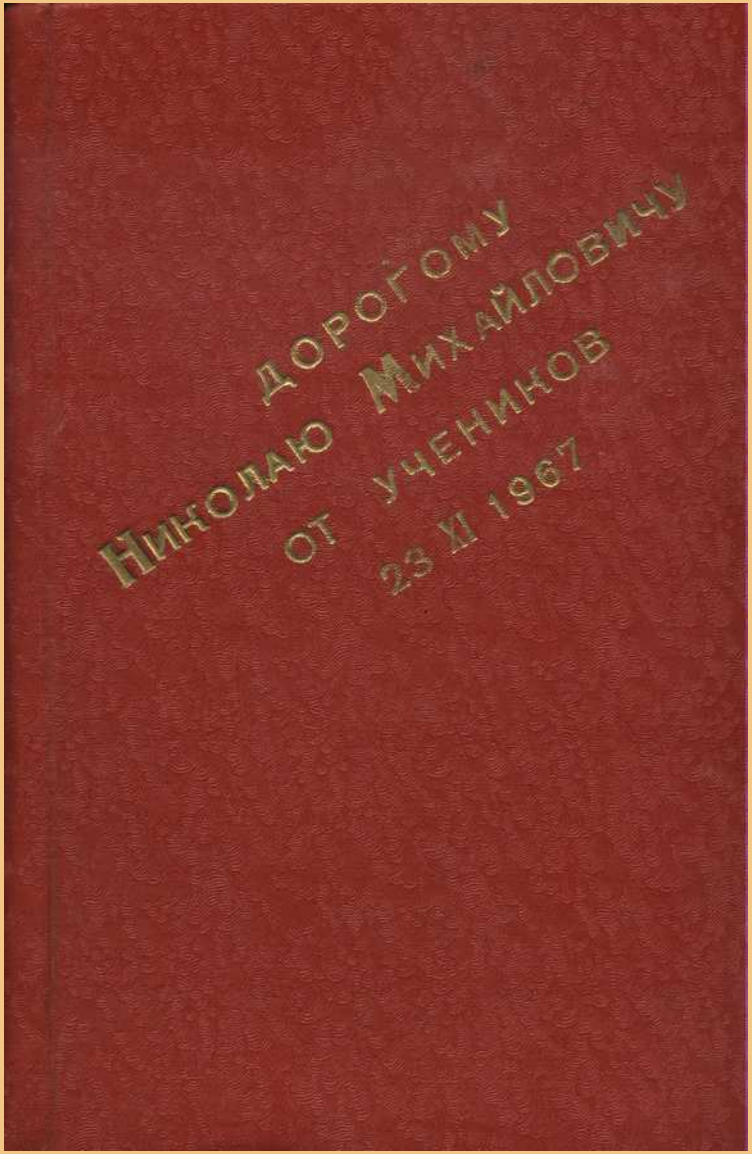
Для показательной функции подобная теорема была ранее доказана И. И. Шапиро-Пятецким [2] и А. Г. Постниковым [3, 4].

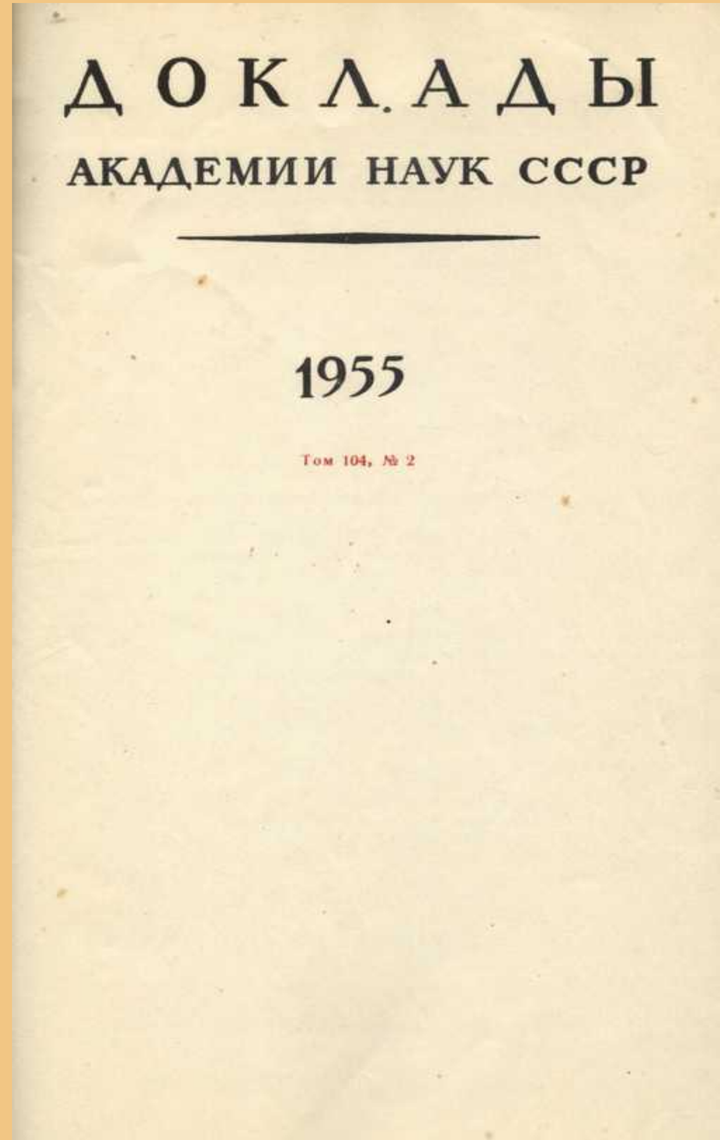
Пользуясь теоремой 1, можно доказать сформулированную ниже теорему 2.

А. М. ПОЛОСУЕВ

О РАВНОМЕРНОМ РАСПРЕДЕЛЕНИИ СИСТЕМЫ ФУНКЦИЙ, ЯВЛЯЮЩЕЙСЯ РЕШЕНИЕМ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ КОНЕЧНОРАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

(Представлено академиком И. М. Виноградовым 28 VI 1958)

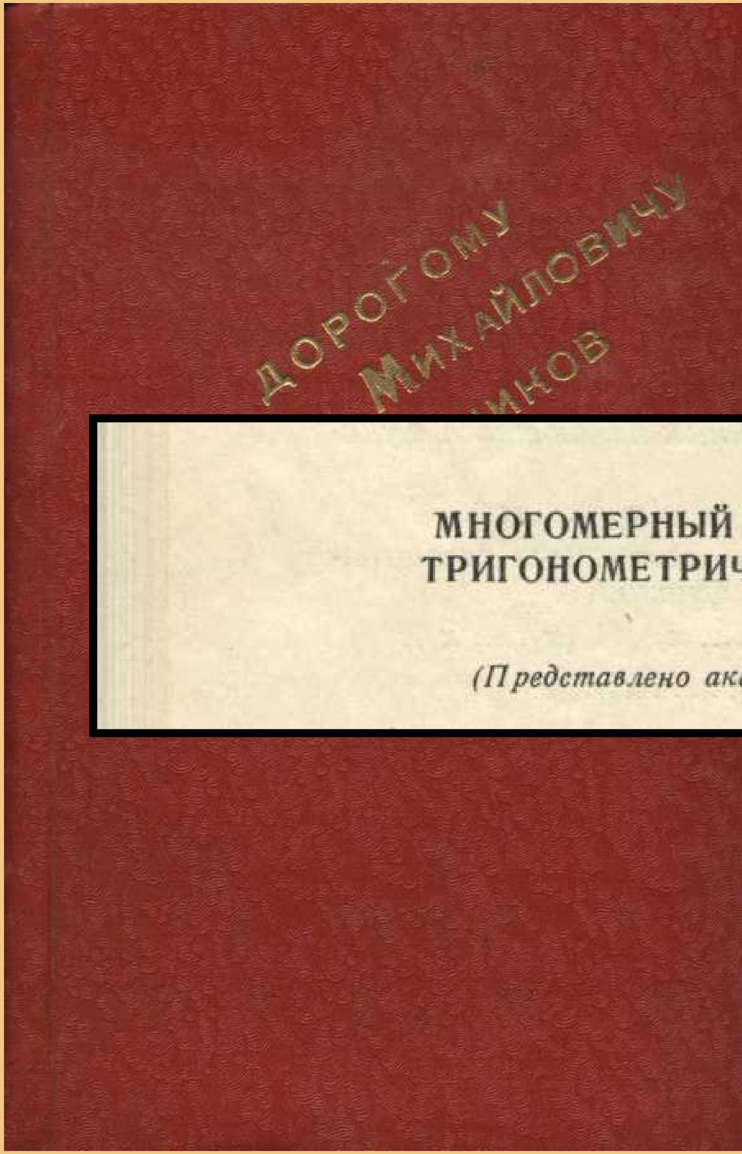


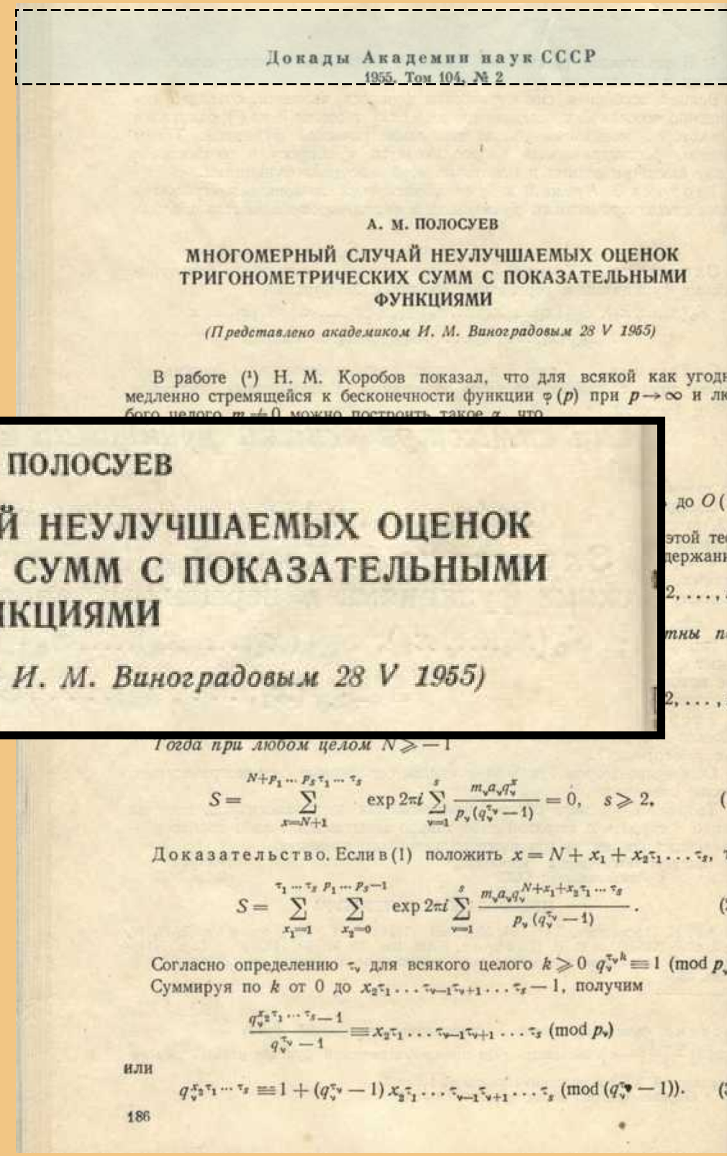


ДОКЛАДЫ
АКАДЕМИИ НАУК СССР

1955

Том 104, № 2





Докады Академии наук СССР
1955. Том 104, № 2

А. М. ПОЛОСУЕВ

МНОГОМЕРНЫЙ СЛУЧАЙ НЕУЛУЧШАЕМЫХ ОЦЕНОК ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ СУММ С ПОКАЗАТЕЛЬНЫМИ ФУНКЦИЯМИ

(Представлено академиком И. М. Виноградовым 28 V 1955)

В работе (1) Н. М. Коробов показал, что для всякой как угодно медленно стремящейся к бесконечности функции $\varphi(p)$ при $p \to \infty$ и любого целого $m \neq 0$ можно построить такое q, что

... до $O(1)$
... этой тео-
... держание
... $2, \ldots, s)$
... тны по-
... $2, \ldots, s)$

Тогда при любом целом $N \geqslant -1$

$$S = \sum_{x=N+1}^{N+p_1 \cdots p_s \tau_1 \cdots \tau_s} \exp 2\pi i \sum_{\nu=1}^{s} \frac{m_\nu a_\nu q_\nu^{x}}{p_\nu (q_\nu^{\tau_\nu} - 1)} = 0, \quad s \geqslant 2. \tag{1}$$

Доказательство. Если в (1) положить $x = N + x_1 + x_2\tau_1 \ldots \tau_s$, то

$$S = \sum_{x_1=1}^{\tau_1 \cdots \tau_s} \sum_{x_2=0}^{p_1 \cdots p_s - 1} \exp 2\pi i \sum_{\nu=1}^{s} \frac{m_\nu a_\nu q_\nu^{N+x_1+x_2\tau_1 \cdots \tau_s}}{p_\nu (q_\nu^{\tau_\nu} - 1)}. \tag{2}$$

Согласно определению τ_ν для всякого целого $k \geqslant 0$ $q_\nu^{\tau_\nu k} \equiv 1 \pmod{p_\nu}$. Суммируя по k от 0 до $x_2\tau_1 \ldots \tau_{\nu-1}\tau_{\nu+1} \ldots \tau_s - 1$, получим

$$\frac{q_\nu^{x_2\tau_1 \cdots \tau_s} - 1}{q_\nu^{\tau_\nu} - 1} \equiv x_2\tau_1 \ldots \tau_{\nu-1}\tau_{\nu+1} \ldots \tau_s \pmod{p_\nu}$$

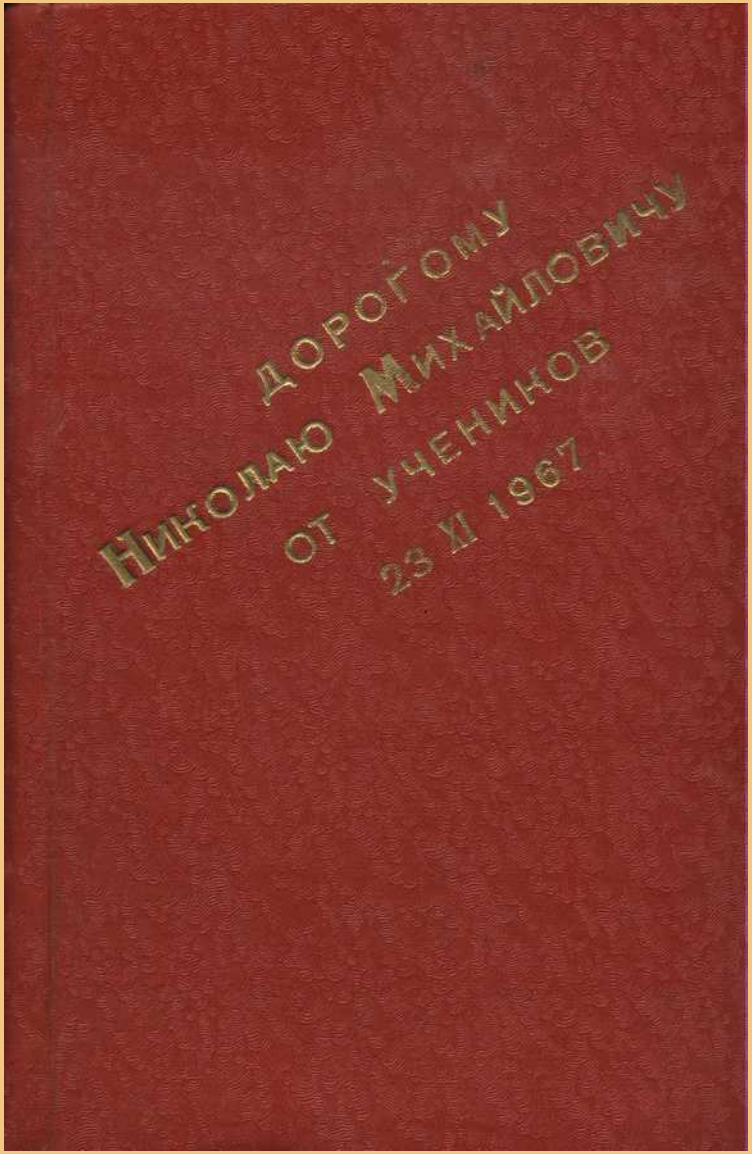
или

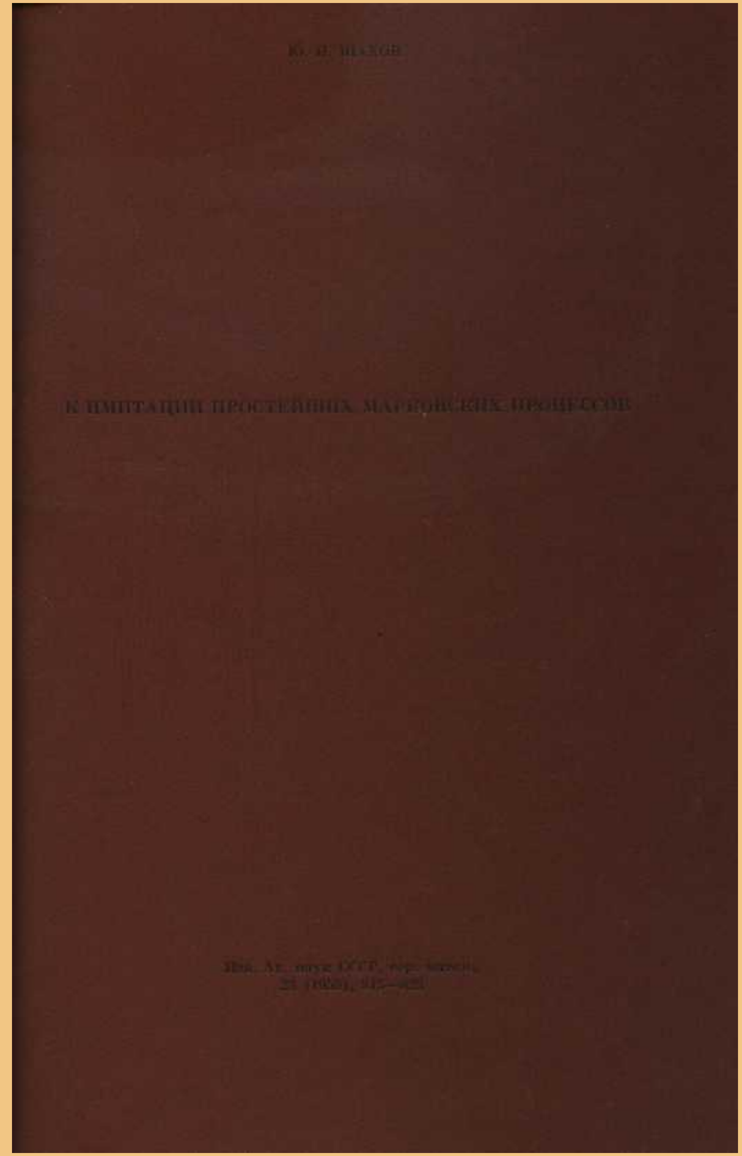
$$q_\nu^{x_2\tau_1 \cdots \tau_s} \equiv 1 + (q_\nu^{\tau_\nu} - 1)\, x_2\tau_1 \ldots \tau_{\nu-1}\tau_{\nu+1} \ldots \tau_s \pmod{(q_\nu^{\tau_\nu} - 1)}. \tag{3}$$

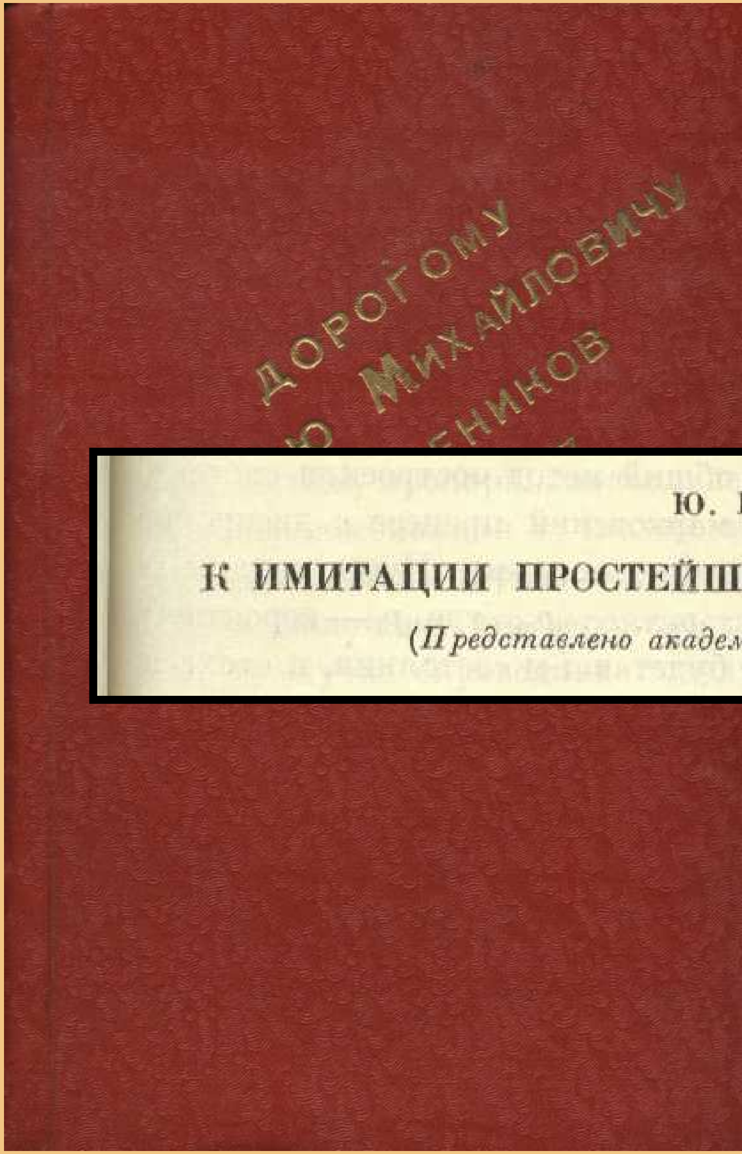
А. М. ПОЛОСУЕВ

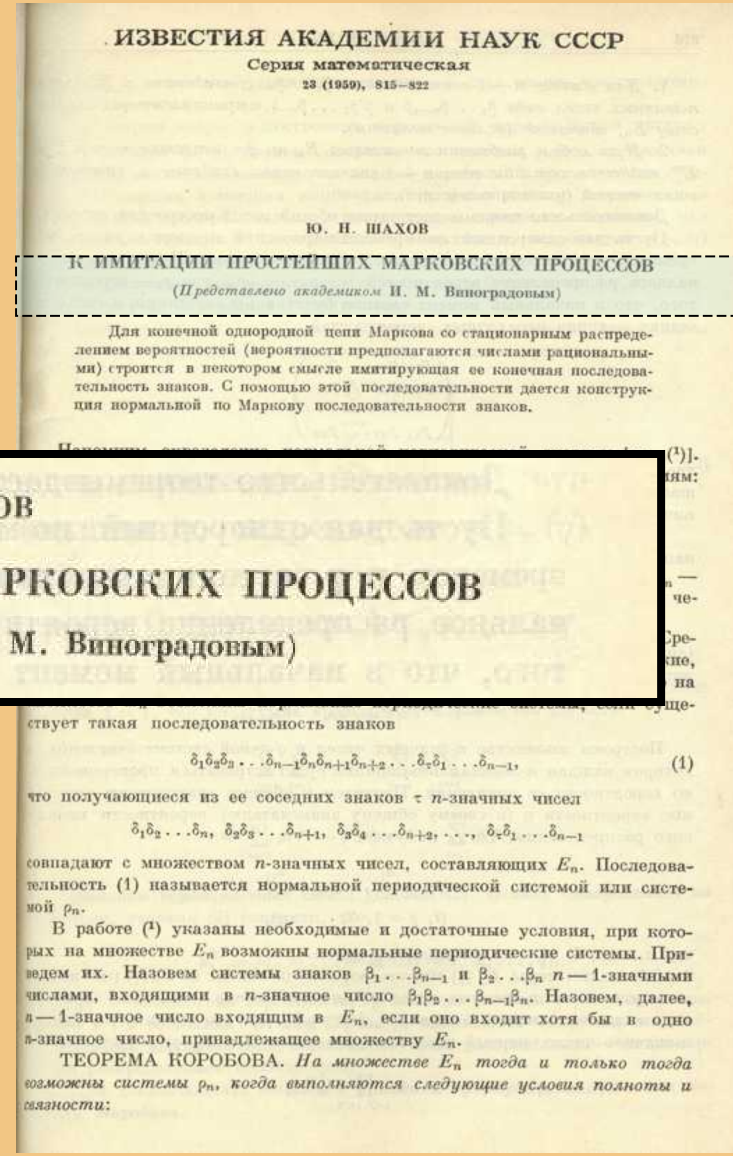
МНОГОМЕРНЫЙ СЛУЧАЙ НЕУЛУЧШАЕМЫХ ОЦЕНОК ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ СУММ С ПОКАЗАТЕЛЬНЫМИ ФУНКЦИЯМИ

(Представлено академиком И. М. Виноградовым 28 V 1955)




К ИМИТАЦИИ ПРОСТЕЙШИХ МАРКОВСКИХ ПРОЦЕССОВ





Ю. Н. ШАХОВ

К ИМИТАЦИИ ПРОСТЕЙШИХ МАРКОВСКИХ ПРОЦЕССОВ

(*Представлено академиком* И. М. Виноградовым)

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
23 (1959), 815–822

Ю. Н. ШАХОВ

К ИМИТАЦИИ ПРОСТЕЙШИХ МАРКОВСКИХ ПРОЦЕССОВ

(*Представлено академиком* И. М. Виноградовым)

Для конечной однородной цепи Маркова со стационарным распределением вероятностей (вероятности предполагаются числами рациональными) строится в некотором смысле имитирующая ее конечная последовательность знаков. С помощью этой последовательности дается конструкция нормальной по Маркову последовательности знаков.

ствует такая последовательность знаков

$$\delta_1\delta_2\delta_3\ldots\delta_{n-1}\delta_n\delta_{n+1}\delta_{n+2}\ldots\delta_\tau\delta_1\ldots\delta_{n-1}, \qquad (1)$$

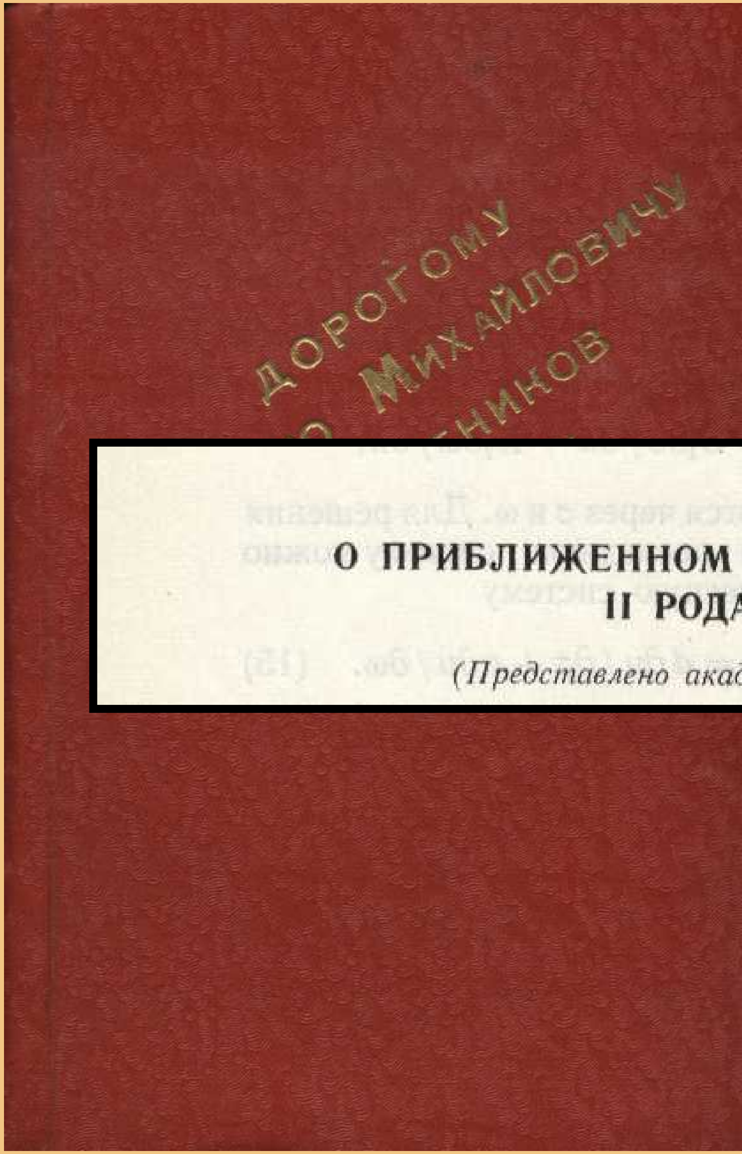
что получающиеся из ее соседних знаков τ n-значных чисел

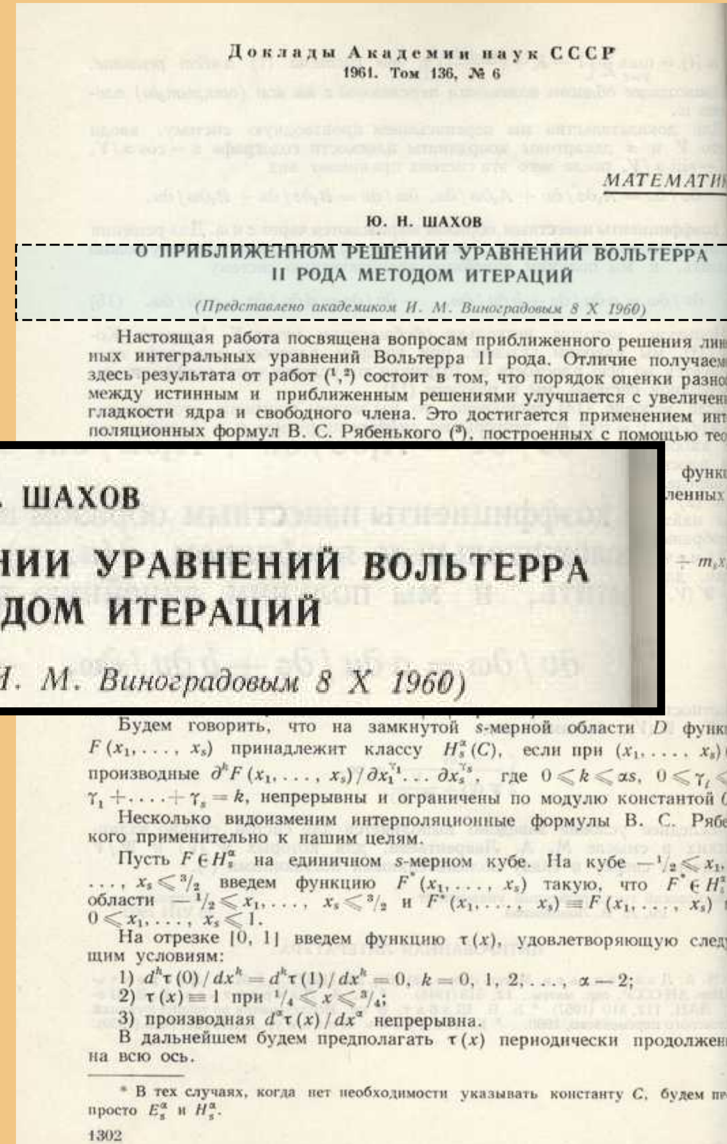
$$\delta_1\delta_2\ldots\delta_n,\ \delta_2\delta_3\ldots\delta_{n+1},\ \delta_3\delta_4\ldots\delta_{n+2},\ \ldots,\ \delta_\tau\delta_1\ldots\delta_{n-1}$$

совпадают с множеством n-значных чисел, составляющих E_n. Последовательность (1) называется нормальной периодической системой или системой ρ_n.

В работе (¹) указаны необходимые и достаточные условия, при которых на множестве E_n возможны нормальные периодические системы. Приведем их. Назовем системы знаков $\beta_1\ldots\beta_{n-1}$ и $\beta_2\ldots\beta_n$ $n-1$-значными числами, входящими в n-значное число $\beta_1\beta_2\ldots\beta_{n-1}\beta_n$. Назовем, далее, $n-1$-значное число входящим в E_n, если оно входит хотя бы в одно n-значное число, принадлежащее множеству E_n.

ТЕОРЕМА КОРОБОВА. *На множестве* E_n *тогда и только тогда возможны системы* ρ_n, *когда выполняются следующие условия полноты и связности:*





Доклады Академии наук СССР
1961. Том 136, № 6

МАТЕМАТИК

Ю. Н. ШАХОВ

О ПРИБЛИЖЕННОМ РЕШЕНИИ УРАВНЕНИЙ ВОЛЬТЕРРА II РОДА МЕТОДОМ ИТЕРАЦИЙ

(Представлено академиком И. М. Виноградовым 8 X 1960)

Настоящая работа посвящена вопросам приближенного решения лин ных интегральных уравнений Вольтерра II рода. Отличие получаем здесь результата от работ ([1,2]) состоит в том, что порядок оценки разнос между истинным и приближенным решениями улучшается с увеличени гладкости ядра и свободного члена. Это достигается применением инт поляционных формул В. С. Рябенького ([3]), построенных с помощью тео

Будем говорить, что на замкнутой s-мерной области D функ $F(x_1, \dots, x_s)$ принадлежит классу $H_s^\alpha(C)$, если при $(x_1, \dots, x_s)$ производные $\partial^k F(x_1, \dots, x_s)/\partial x_1^{\gamma_1} \dots \partial x_s^{\gamma_s}$, где $0 \leqslant k \leqslant \alpha s$, $0 \leqslant \gamma_i$ $\gamma_1 + \dots + \gamma_s = k$, непрерывны и ограничены по модулю константой C

Несколько видоизменим интерполяционные формулы В. С. Рябе кого применительно к нашим целям.

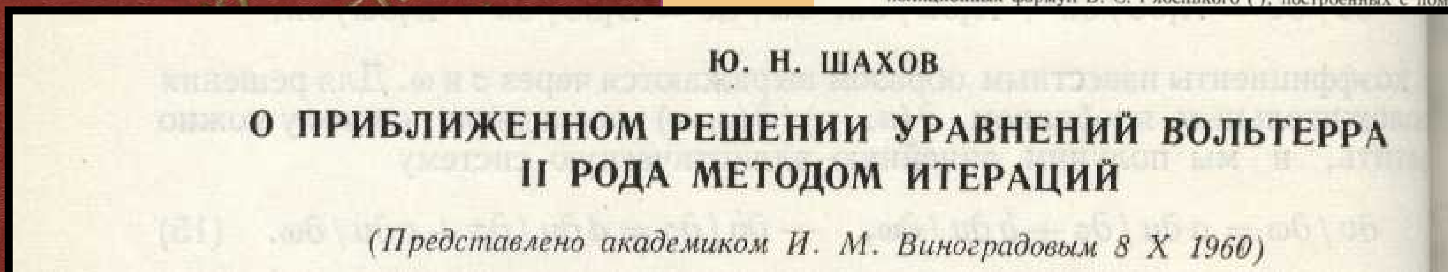
Пусть $F \in H_s^\alpha$ на единичном s-мерном кубе. На кубе $-1/2 \leqslant x_1, \dots, x_s \leqslant 3/2$ введем функцию $F^*(x_1, \dots, x_s)$ такую, что $F^* \in H_s^\alpha$ области $-1/2 \leqslant x_1, \dots, x_s \leqslant 3/2$ и $F^*(x_1, \dots, x_s) \equiv F(x_1, \dots, x_s)$ п $0 \leqslant x_1, \dots, x_s \leqslant 1$.

На отрезке $[0, 1]$ введем функцию $\tau(x)$, удовлетворяющую следу щим условиям:

1) $d^k\tau(0)/dx^k = d^k\tau(1)/dx^k = 0$, $k = 0, 1, 2, \dots, \alpha - 2$;
2) $\tau(x) \equiv 1$ при $1/4 \leqslant x \leqslant 3/4$;
3) производная $d^\alpha\tau(x)/dx^\alpha$ непрерывна.

В дальнейшем будем предполагать $\tau(x)$ периодически продолженн на всю ось.

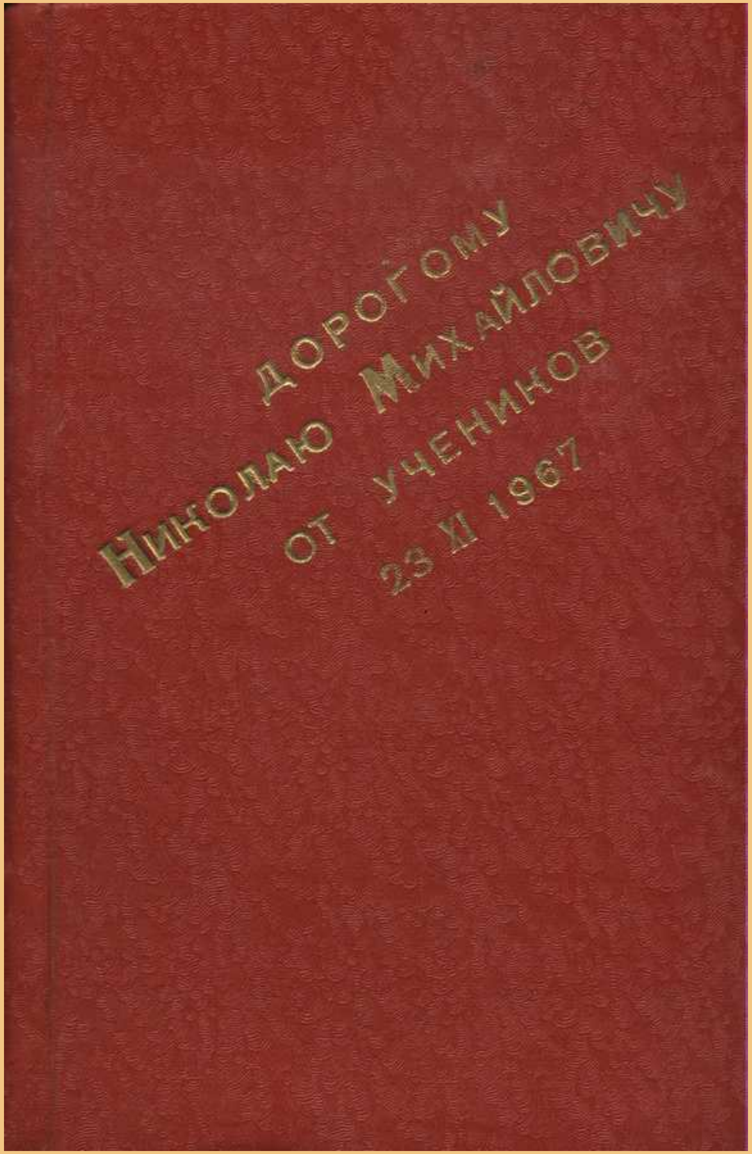
* В тех случаях, когда нет необходимости указывать константу C, будем пис просто E_s^α и H_s^α.

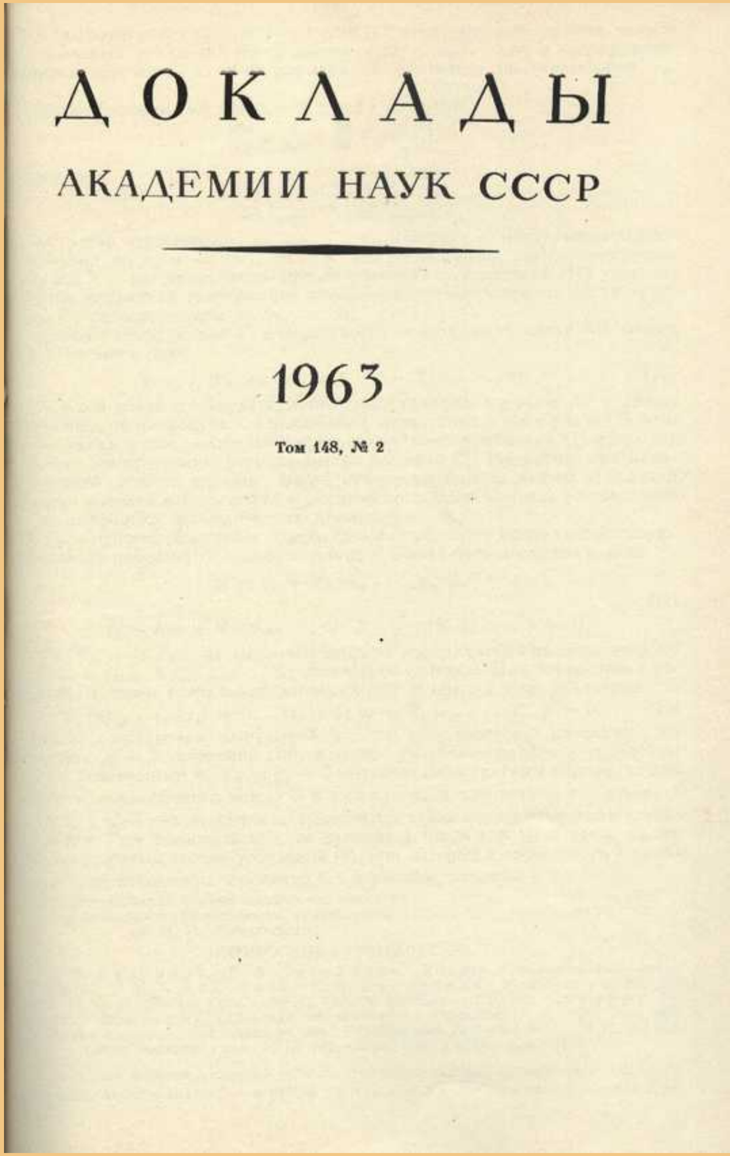


Ю. Н. ШАХОВ

О ПРИБЛИЖЕННОМ РЕШЕНИИ УРАВНЕНИЙ ВОЛЬТЕРРА II РОДА МЕТОДОМ ИТЕРАЦИЙ

(Представлено академиком И. М. Виноградовым 8 X 1960)

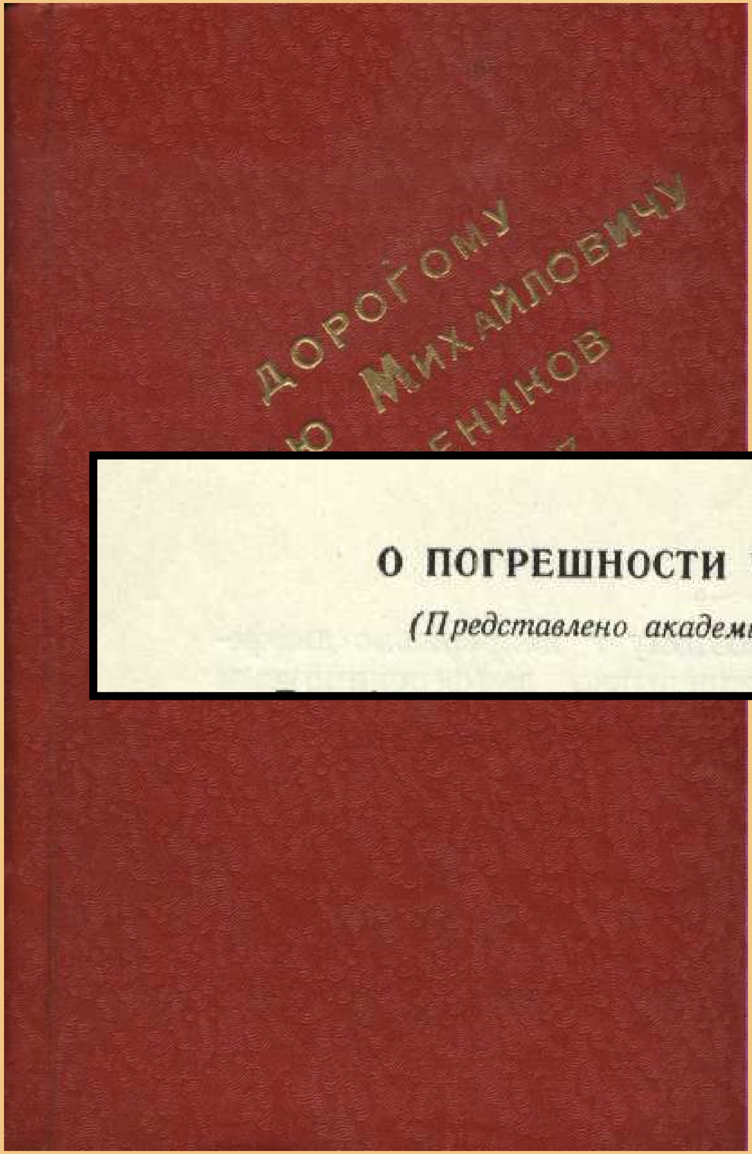



ДОКЛАДЫ

АКАДЕМИИ НАУК СССР

1963

Том 148, № 2



Доклады Академии наук СССР
1963. Том 148, № 2

МАТЕМАТИК

В. М. СОЛОДОВ

О ПОГРЕШНОСТИ ЧИСЛЕННОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ

(Представлено академиком А. А. Дородницыным 9 VII 1962)

В. М. СОЛОДОВ
О ПОГРЕШНОСТИ ЧИСЛЕННОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ
(Представлено академиком А. А. Дородницыным 9 VII 1962)

В работе получена неулучшаемая в смысле порядка оценка погрешнос
численного интегрирования для некоторого класса функций. Методы пол
чения результатов такие же, как в работах Н. М. Коробова ([1,2]).

Функции $f(x_1, \ldots, x_s)$ предполагаются периодическими, с периоди
равным единице по каждой из переменных, и разлагающимися в абсолют
сходящийся ряд Фурье:

$$f(x_1, \ldots, x_s) = \sum_{m_1, \ldots, m_s = -\infty}^{\infty} c(m_1, \ldots, m_s) \exp [2\pi i (m_1 x_1 + \ldots + m_s x_s)]$$

в целых $m_1, \ldots, m_s$ не превосходит $c_1(s)\,q$.

Доказательство по индукции.

Лемма 2. *Пусть $p > s$ — простое. Существует целое a ($1 < a <$ такое, что сравнение $m_1 + am_2 + \ldots + a^{s-1}m_s \equiv 0 \pmod p$ не имее решения, кроме тривиального, в области (2) с $q \leqslant [sc_1(s)]^{-1}p$.*

Доказательство. Введем обозначение

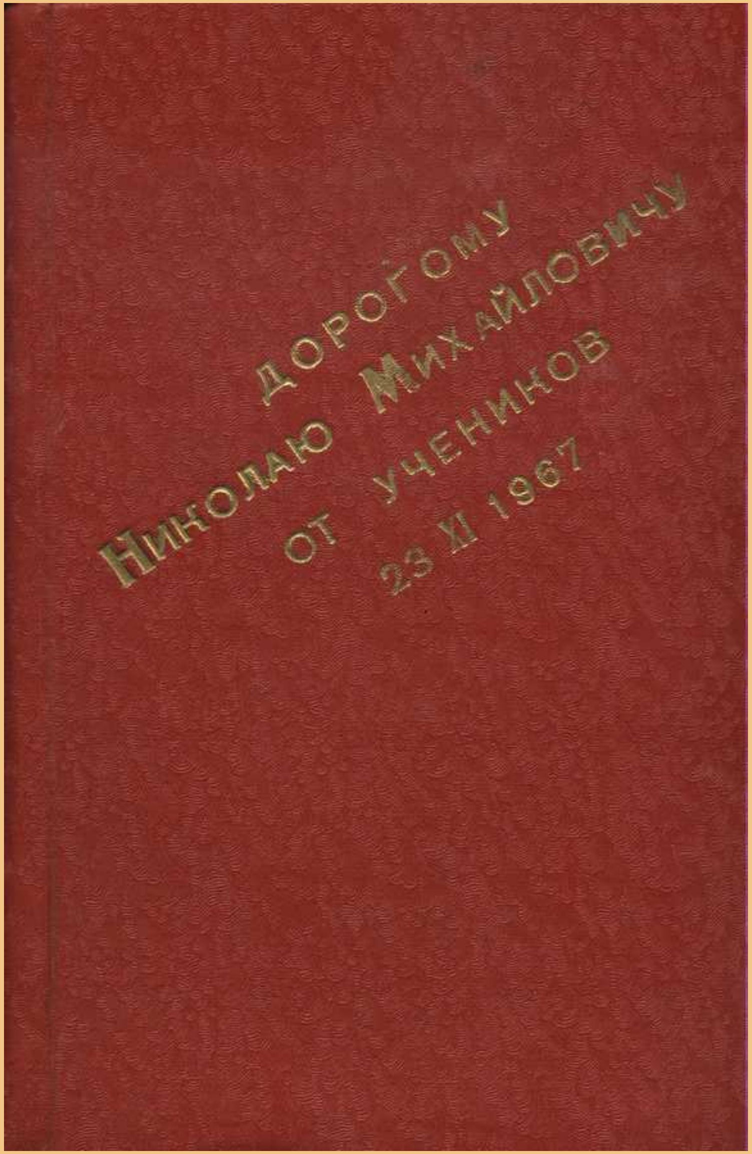
$$\delta_p(n) = \begin{cases} 1, & \text{если } n \equiv 0 \pmod p, \\ 0, & \text{если } n \not\equiv 0 \pmod p. \end{cases} \quad (3)$$

Лемма утверждает, что при некотором a

$$\sum_{(2)}{}' \delta_p(m_1 + am_2 + \ldots + a^{s-1}m_s) = 0,$$

где $\sum_{(2)}'$ означает суммирование по области (2), исключая набор $(m_1, \ldots, m_s) = (0, \ldots, 0)$. Выберем a из условия

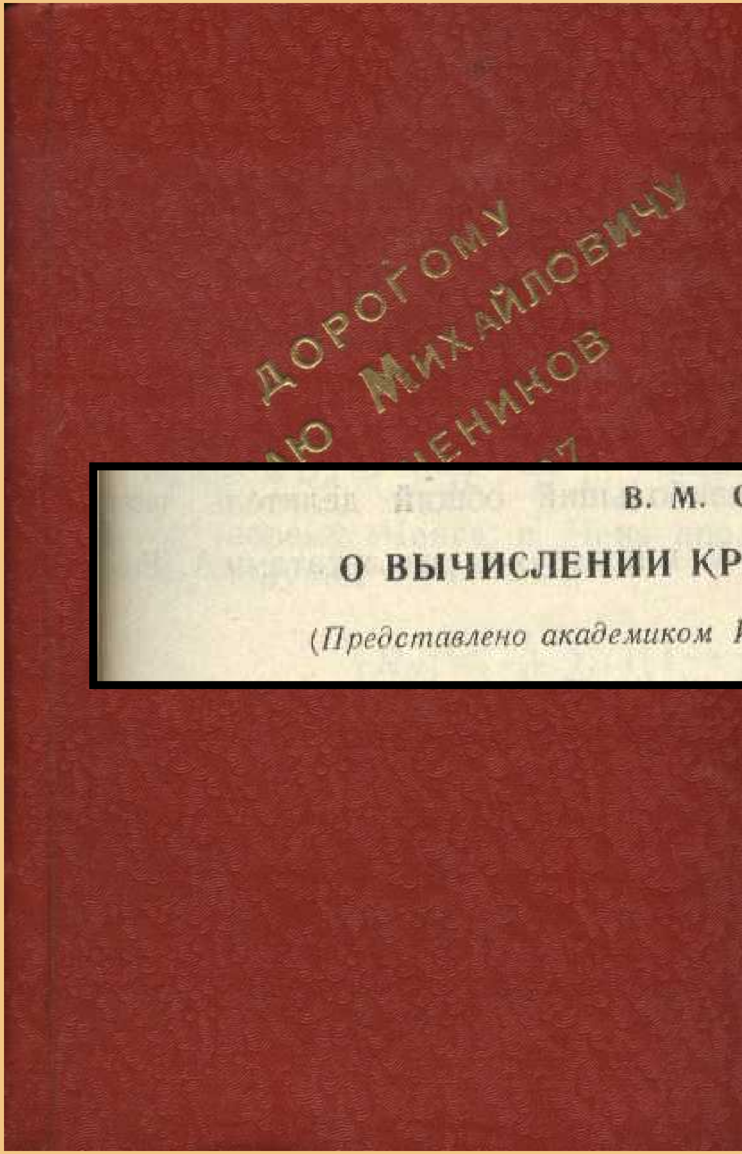
$$\sum_{(2)}{}' \delta_p(m_1 + am_2 + \ldots + a^{s-1}m_s) = \min_{1 \leqslant z \leqslant p} \sum_{(2)}{}' \delta_p(m_1 + zm_2 + \ldots + z^{s-1}m_s). \quad (4)$$



ДОКЛАДЫ
АКАДЕМИИ НАУК СССР

1959

Том 127, № 4



Доклады Академии наук СССР
1959. Том 127, № 4

МАТЕМАТИКА

В. М. СОЛОДОВ

О ВЫЧИСЛЕНИИ КРАТНЫХ ИНТЕГРАЛОВ

(Представлено академиком И. М. Виноградовым 25 VI 1959)

В. М. СОЛОДОВ

О ВЫЧИСЛЕНИИ КРАТНЫХ ИНТЕГРАЛОВ

(Представлено академиком И. М. Виноградовым 25 VI 1959)

В настоящей работе для получения квадратурных формул применяются методы, разработанные Н. М. Коробовым ([1], [2]). Кроме того, существенно используются результаты Ченга и Чена ([3]) в форме, сходной с той, которая применена в работе Хсу и Лина ([4]).

Всюду в дальнейшем функции $f(x_1, \ldots, x_s)$ предполагаются периодическими с периодом, равным единице по каждой из переменных, и разлагающимися в абсолютно сходящийся ряд Фурье:

$$f(x_1, \ldots, x_s) = \sum^{\infty} C(m_1, \ldots, m_s) \exp[2\pi i(m_1 x_1 + \cdots + m_s x_s)],$$

...ам

Пусть $N > s$ — простое число. Выберем точки M_n следующим способом:

$$M_n = \left(\frac{n}{N}, \frac{n^2}{N}, \ldots, \frac{n^s}{N}\right), \qquad n = 1, 2, \ldots, N. \tag{1}$$

Теорема 1. *Для функций $f(x_1, \ldots, x_s)$, удовлетворяющих условию Липшица порядка $\alpha \leqslant 1$:*

$$|f(x_1, \ldots, x_s) - f(x_1', \ldots, x_s')| \leqslant C\rho^\alpha \text{ при } (x_1 - x_1')^2 + \ldots + (x_s - x_s')^2 \leqslant \rho^2,$$

справедлива оценка

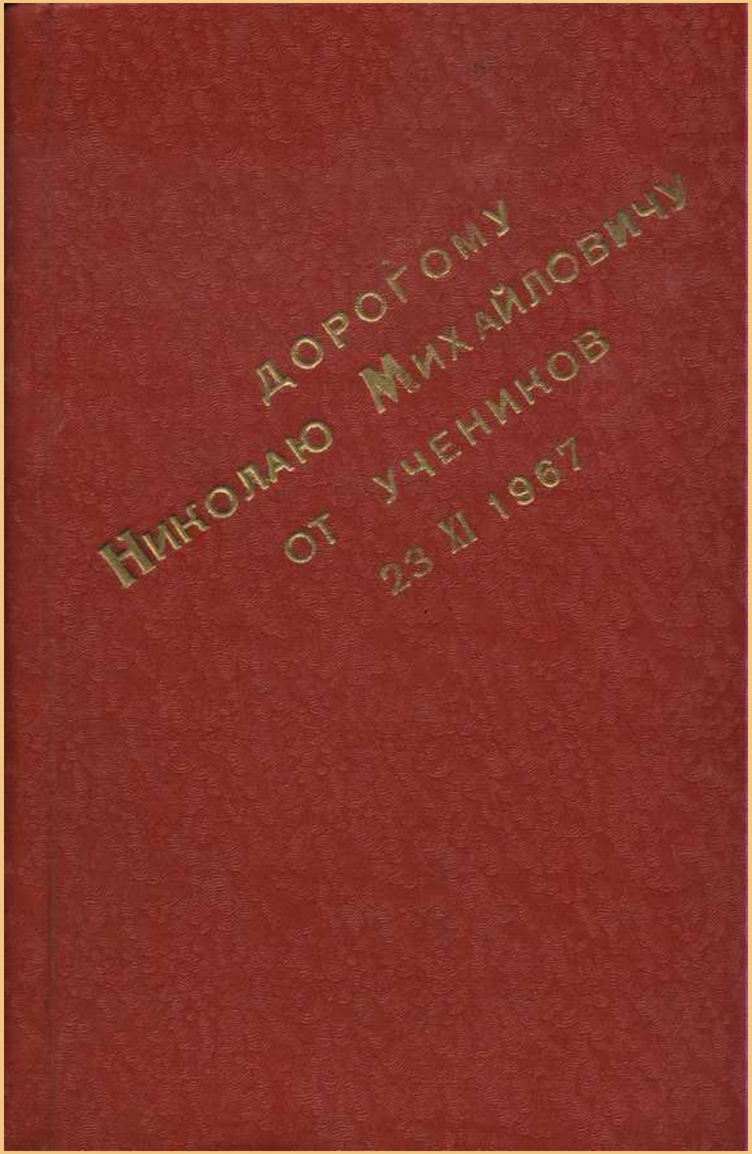
$$\left| \int_0^1 \cdots \int_0^1 f(x_1, \ldots x_s)\, dx_1 \ldots dx_s - \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} f(M_n) \right| \leqslant \frac{(s-1)\sigma}{\sqrt{N}} + \frac{CA}{N^\alpha},$$

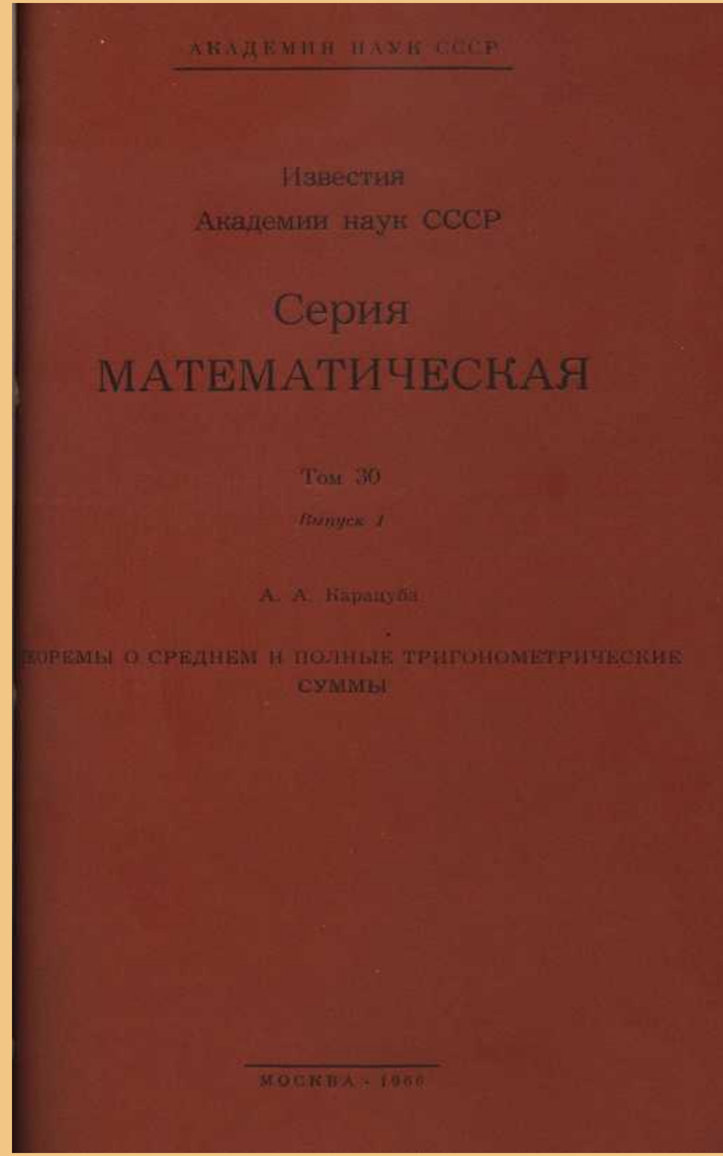
где A зависит только от s.

Доказательство. Согласно теореме Ченга и Чена ([3]), являющейся обобщением теоремы Зигмунда ([5]), справедливо равенство

$$f(x_1, \ldots, x_s) - S_r(x_1, \ldots, x_s) = \theta(x_1, \ldots, x_s)\, CAr^{-\alpha},$$

где $|\theta(x_1, \ldots, x_s)| \leqslant 1$ и A зависит только от s.




АКАДЕМИЯ НАУК СССР

Известия
Академии наук СССР

Серия
МАТЕМАТИЧЕСКАЯ

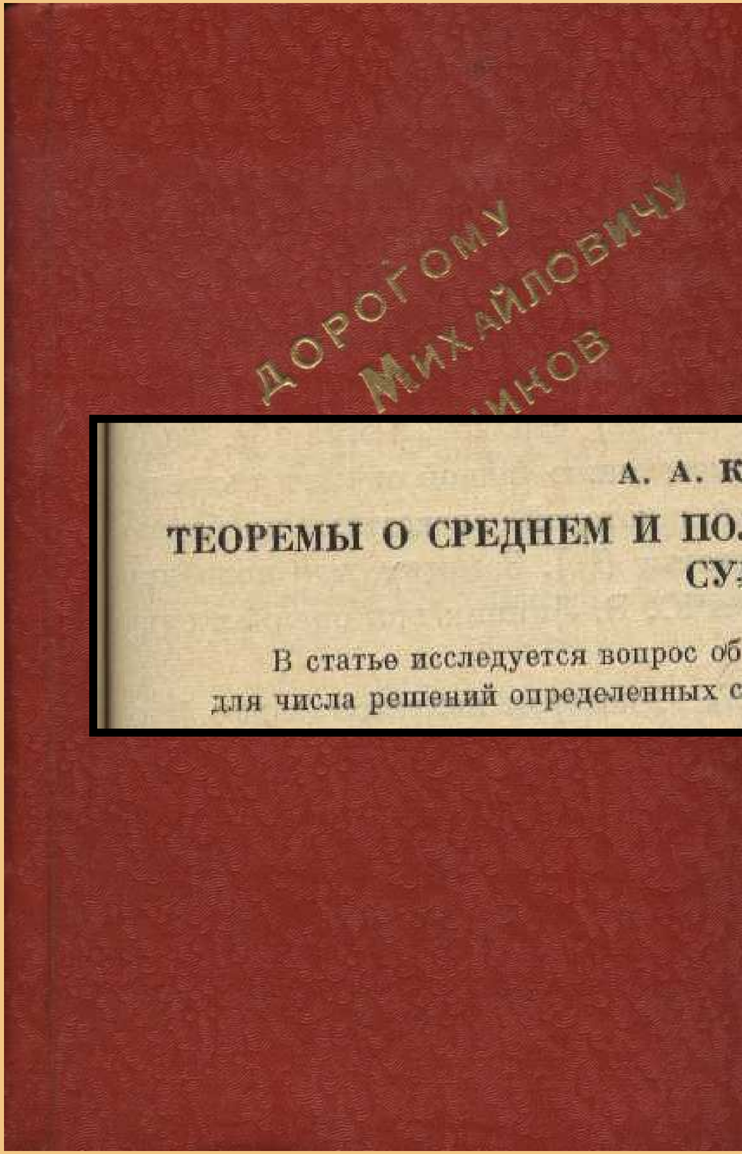
Том 30

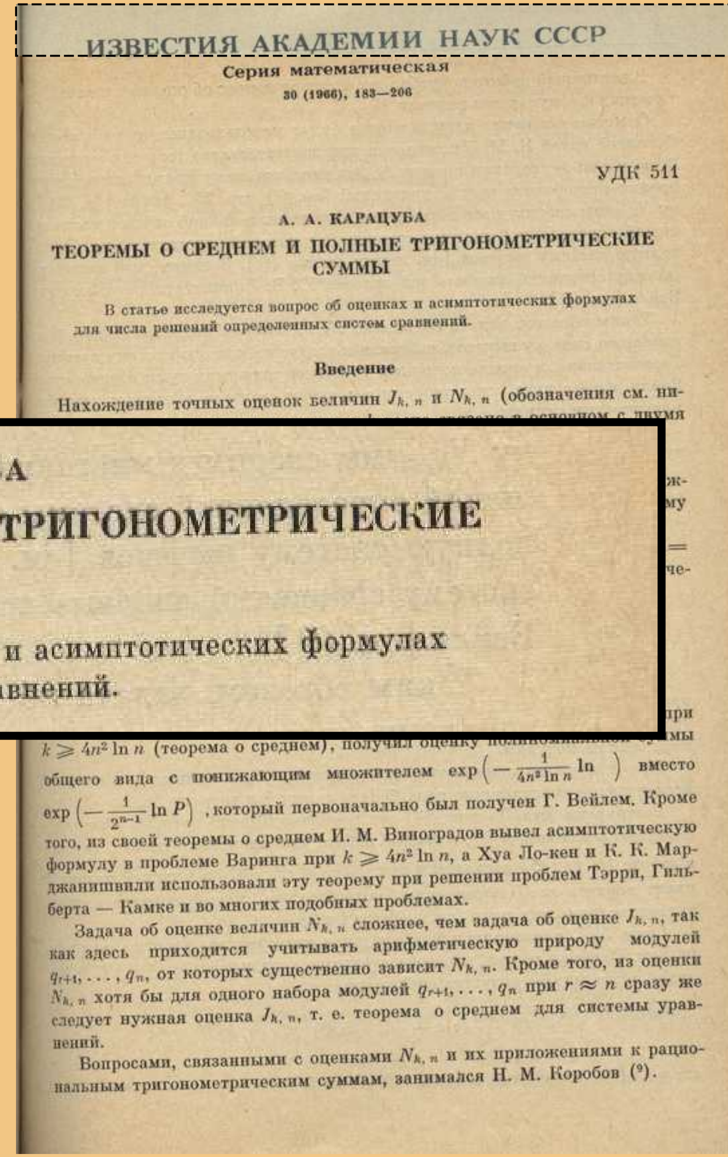
Выпуск 1

А. А. Карацуба

ЕОРЕМЫ О СРЕДНЕМ И ПОЛНЫЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ
СУММЫ

МОСКВА · 1966





ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
30 (1966), 183—206

УДК 511

А. А. КАРАЦУБА

ТЕОРЕМЫ О СРЕДНЕМ И ПОЛНЫЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ СУММЫ

В статье исследуется вопрос об оценках и асимптотических формулах для числа решений определенных систем сравнений.

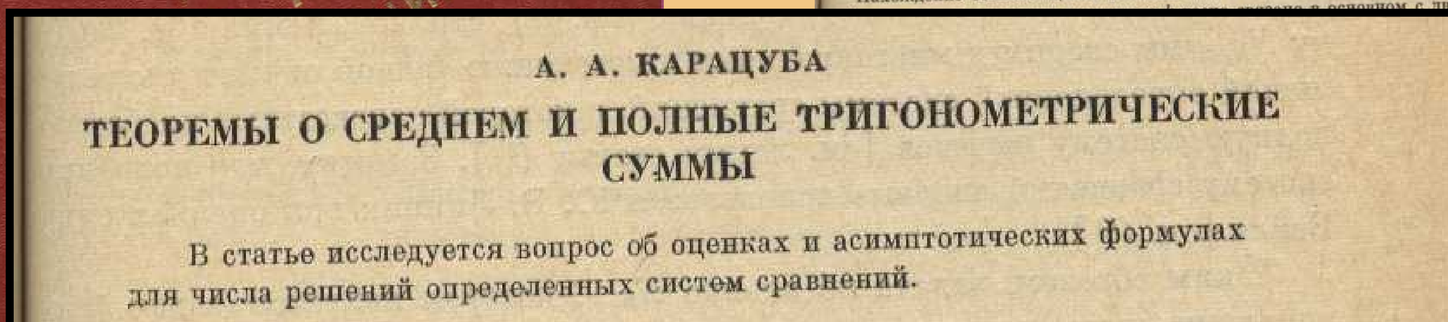
Введение

Нахождение точных оценок величин $J_{k,n}$ и $N_{k,n}$ (обозначения см. ни-

... при $k \geqslant 4n^2 \ln n$ (теорема о среднем), получил оценку ... суммы общего вида с понижающим множителем $\exp\left(-\frac{1}{4n^2 \ln n} \ln\ \right)$ вместо $\exp\left(-\frac{1}{2^{n-1}} \ln P\right)$, который первоначально был получен Г. Вейлем. Кроме того, из своей теоремы о среднем И. М. Виноградов вывел асимптотическую формулу в проблеме Варинга при $k \geqslant 4n^2 \ln n$, а Хуа Ло-кен и К. К. Марджанишвили использовали эту теорему при решении проблем Тэрри, Гильберта — Камке и во многих подобных проблемах.

Задача об оценке величин $N_{k,n}$ сложнее, чем задача об оценке $J_{k,n}$, так как здесь приходится учитывать арифметическую природу модулей $q_{r+1}, \ldots, q_n$, от которых существенно зависит $N_{k,n}$. Кроме того, из оценки $N_{k,n}$ хотя бы для одного набора модулей $q_{r+1}, \ldots, q_n$ при $r \approx n$ сразу же следует нужная оценка $J_{k,n}$, т. е. теорема о среднем для системы уравнений.

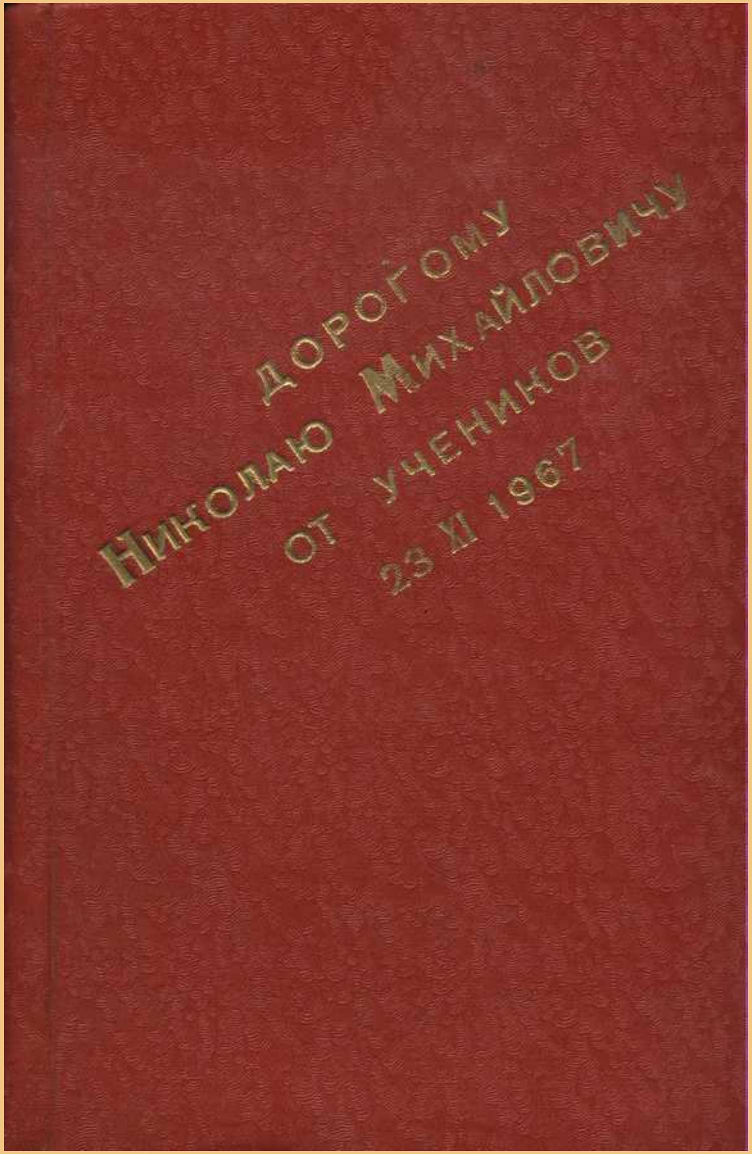
Вопросами, связанными с оценками $N_{k,n}$ и их приложениями к рациональным тригонометрическим суммам, занимался Н. М. Коробов (9).

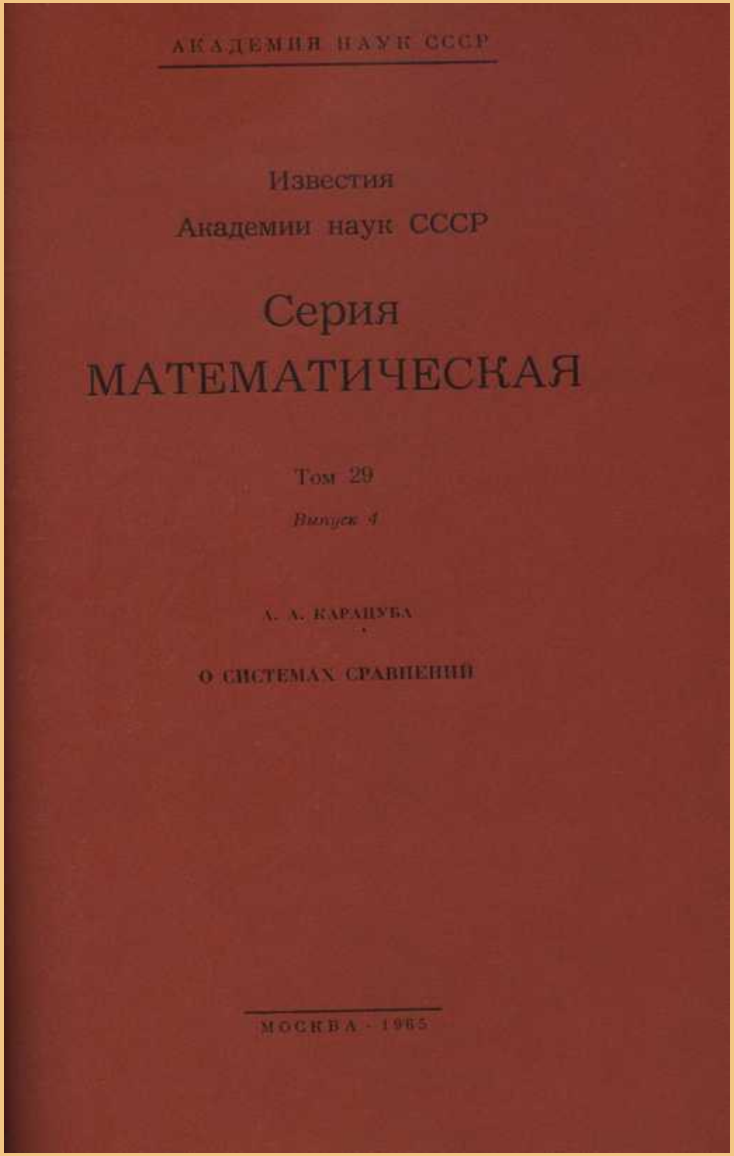


А. А. КАРАЦУБА

ТЕОРЕМЫ О СРЕДНЕМ И ПОЛНЫЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ СУММЫ

В статье исследуется вопрос об оценках и асимптотических формулах для числа решений определенных систем сравнений.




АКАДЕМИЯ НАУК СССР

Известия
Академии наук СССР

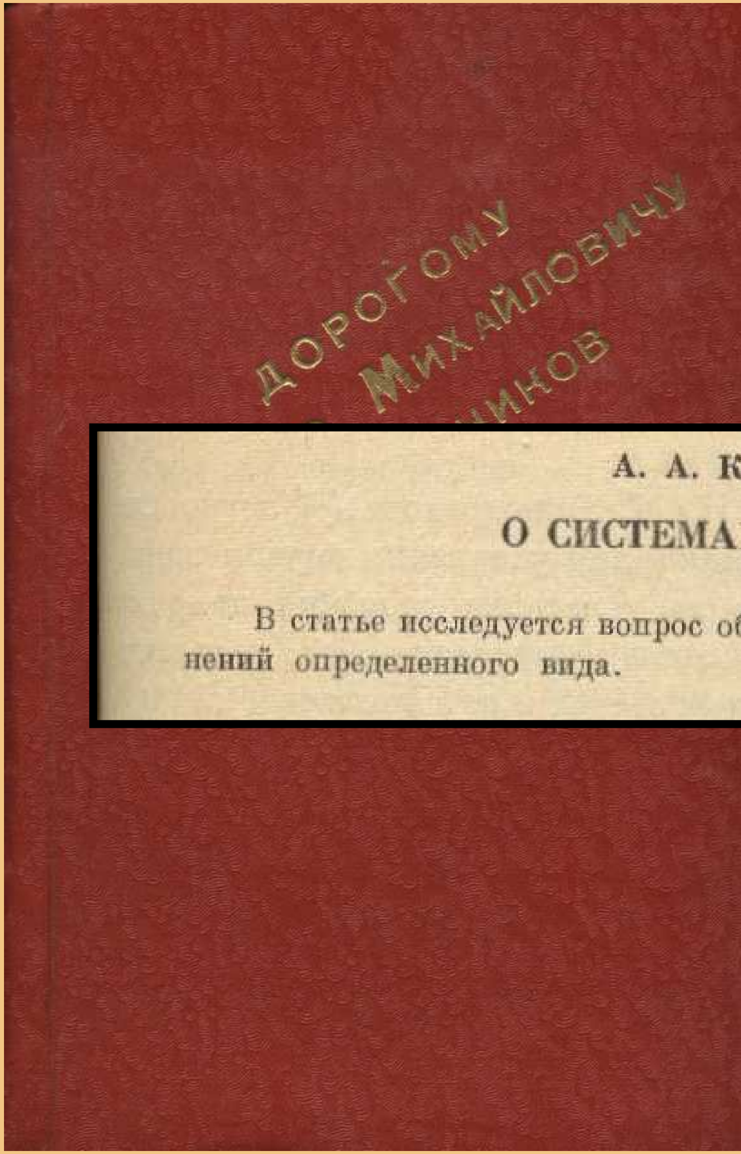
Серия
МАТЕМАТИЧЕСКАЯ

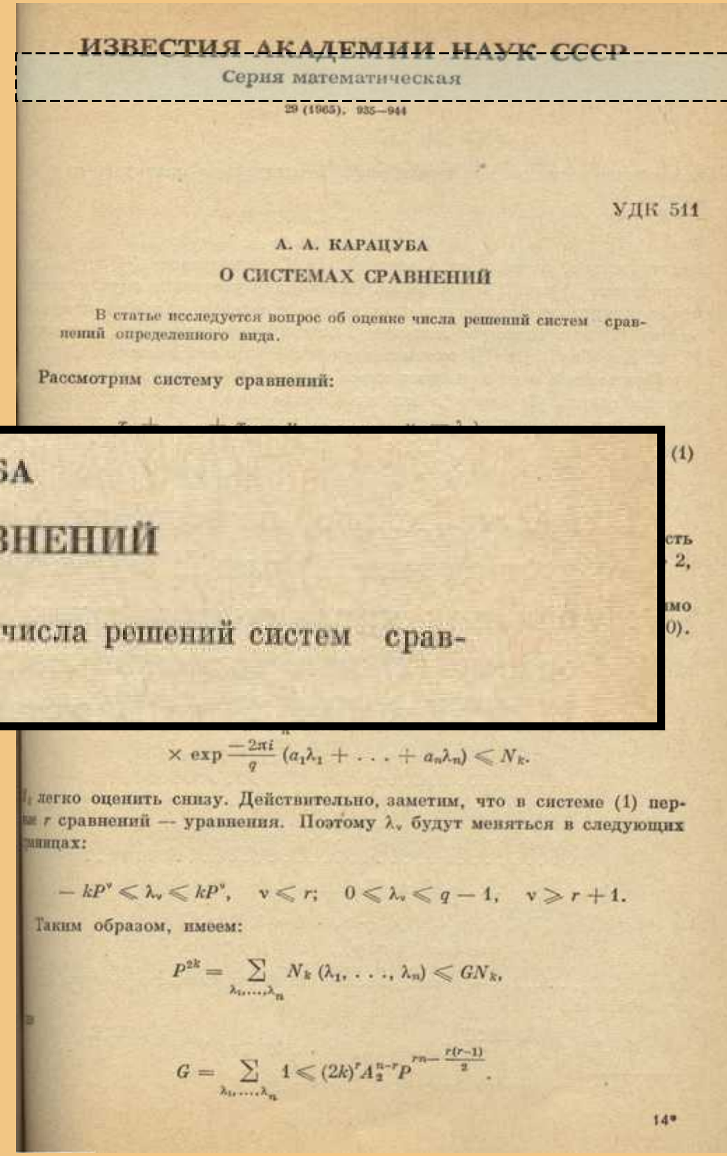
Том 29
Выпуск 4

А. А. КАРАЦУБА

О СИСТЕМАХ СРАВНЕНИЙ

МОСКВА · 1965




ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
29 (1965), 935—944

УДК 511

А. А. КАРАЦУБА

О СИСТЕМАХ СРАВНЕНИЙ

В статье исследуется вопрос об оценке числа решений систем сравнений определенного вида.

Рассмотрим систему сравнений:

$$\times \exp \frac{-2\pi i}{q} (a_1\lambda_1 + \ldots + a_n\lambda_n) \leqslant N_k.$$

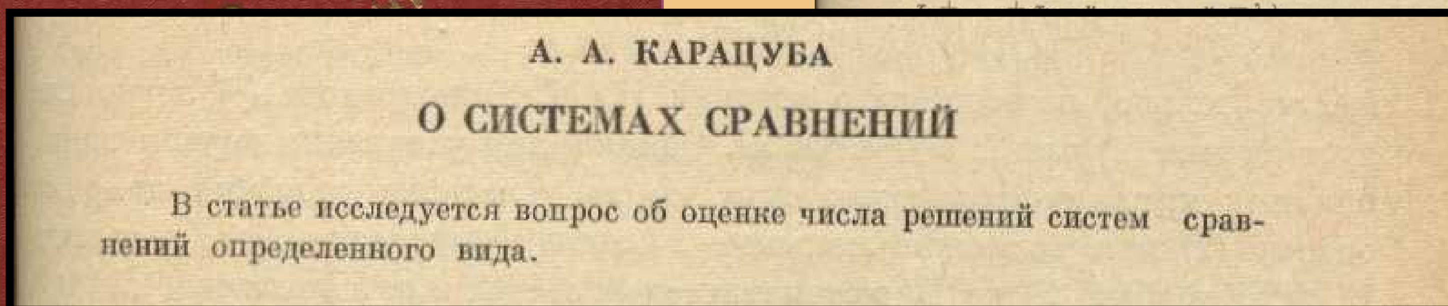
легко оценить снизу. Действительно, заметим, что в системе (1) пер-
r сравнений — уравнения. Поэтому λ_ν будут меняться в следующих
ницах:

$$-kP^\nu \leqslant \lambda_\nu \leqslant kP^\nu, \quad \nu \leqslant r; \quad 0 \leqslant \lambda_\nu \leqslant q-1, \quad \nu \geqslant r+1.$$

Таким образом, имеем:

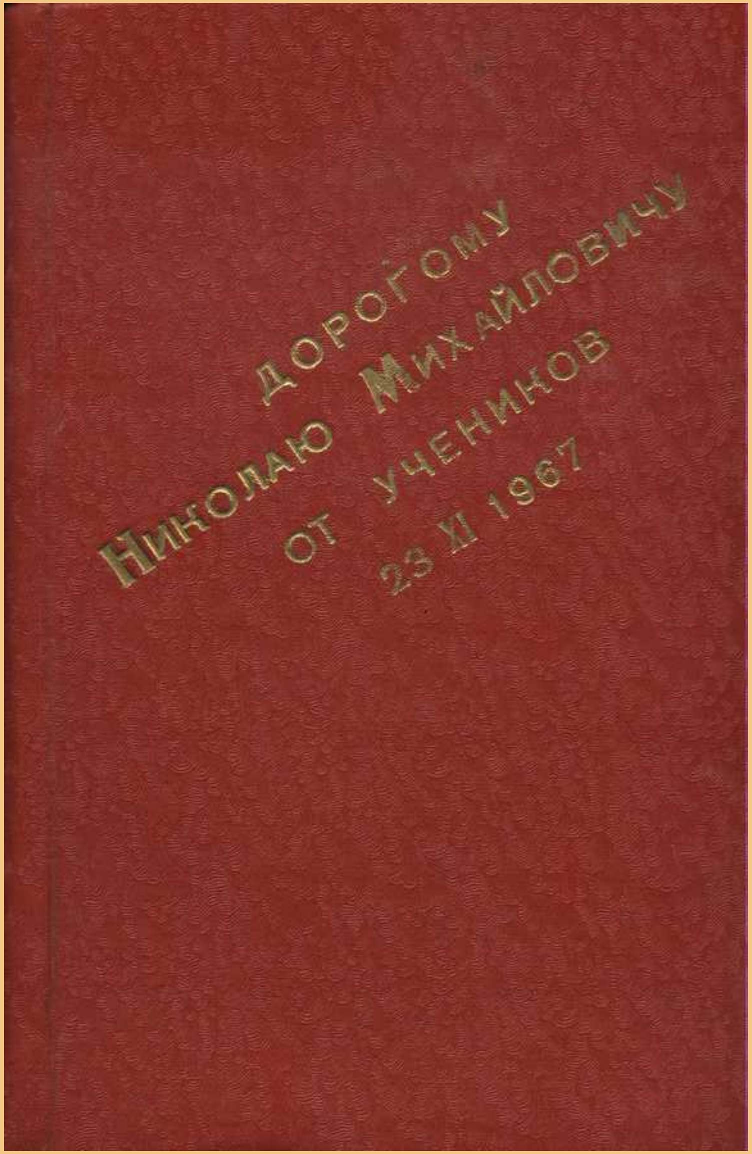
$$P^{2k} = \sum_{\lambda_1, \ldots, \lambda_n} N_k(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \leqslant GN_k,$$

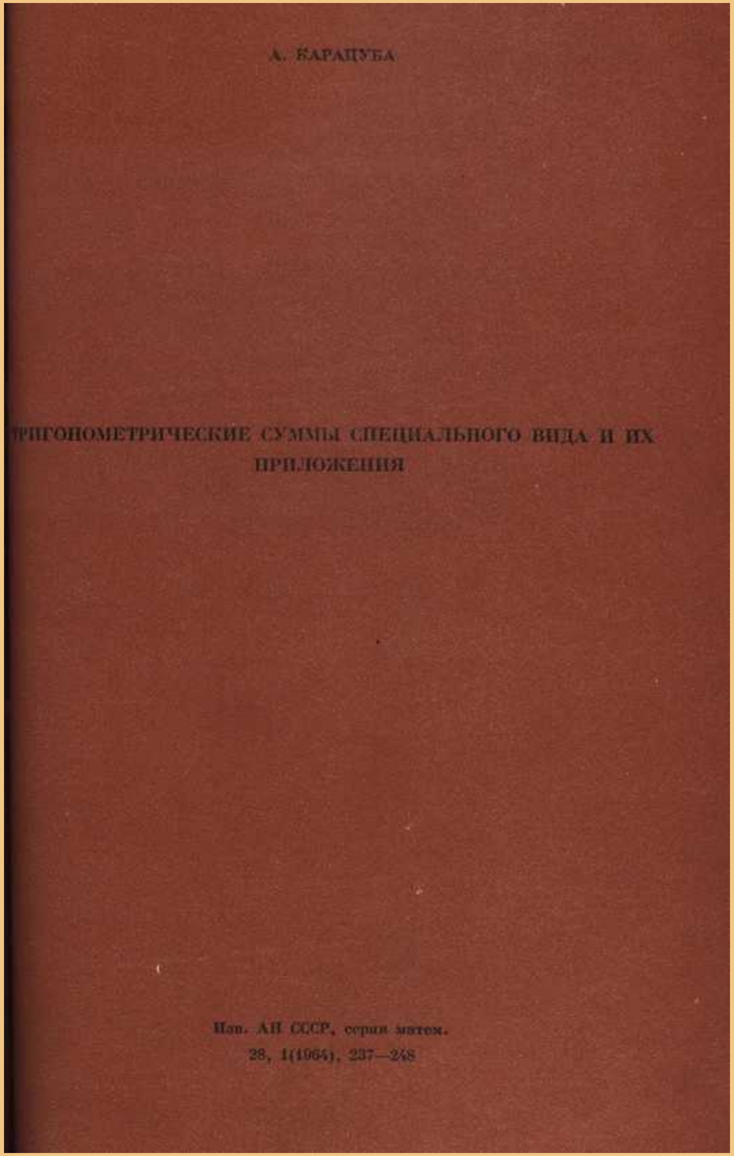
$$G = \sum_{\lambda_1, \ldots, \lambda_n} 1 \leqslant (2k)^r A_2^{n-r} P^{rn - \frac{r(r-1)}{2}}.$$


А. А. КАРАЦУБА

О СИСТЕМАХ СРАВНЕНИЙ

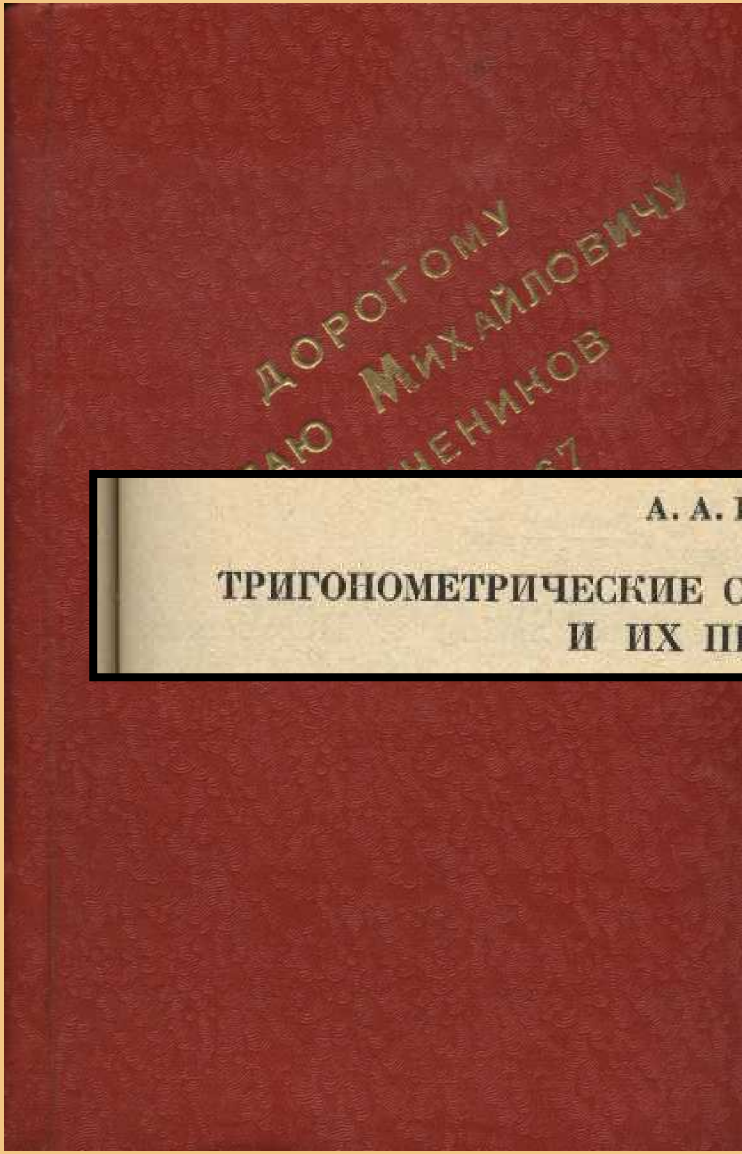
В статье исследуется вопрос об оценке числа решений систем сравнений определенного вида.

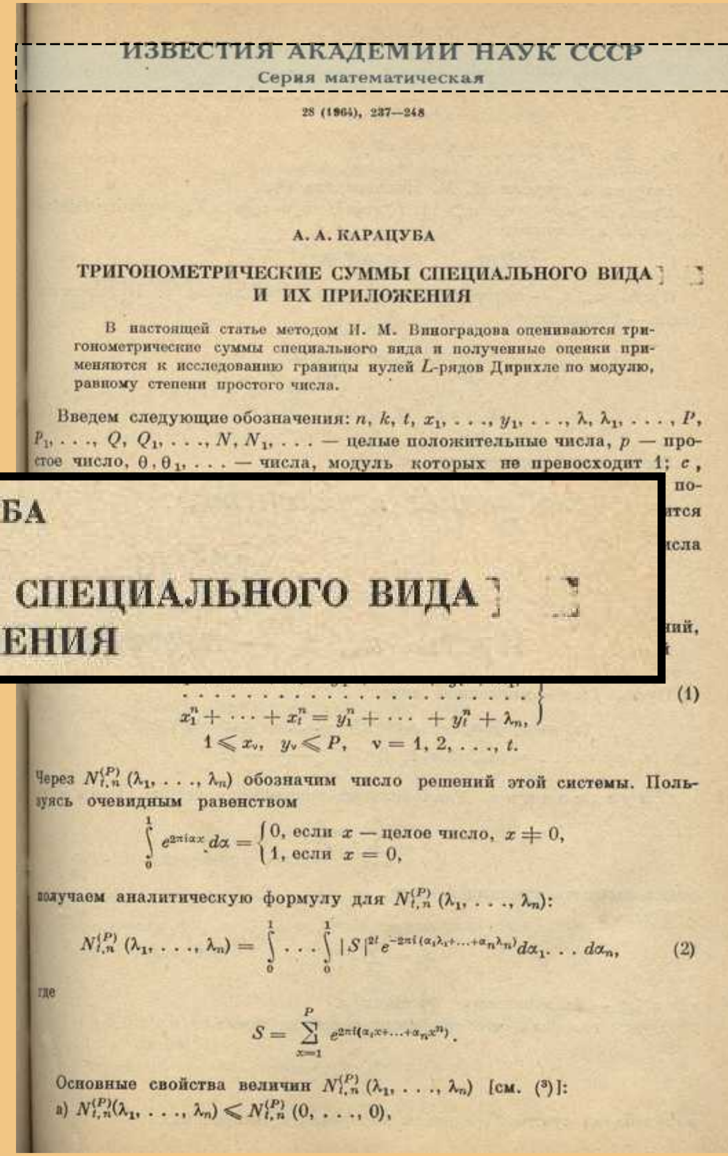



А. КАРАЦУБА

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ СУММЫ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

Изв. АН СССР, серия матем.
28, 1(1964), 237—248




ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая

28 (1964), 237—248

А. А. КАРАЦУБА

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ СУММЫ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

В настоящей статье методом И. М. Виноградова оцениваются тригонометрические суммы специального вида и полученные оценки применяются к исследованию границы нулей L-рядов Дирихле по модулю, равному степени простого числа.

Введем следующие обозначения: $n, k, t, x_1, \ldots, y_1, \ldots, \lambda, \lambda_1, \ldots, P, P_1, \ldots, Q, Q_1, \ldots, N, N_1, \ldots$ — целые положительные числа, p — простое число, $\theta, \theta_1, \ldots$ — числа, модуль которых не превосходит 1; c,

$$\begin{rmatrix} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_1^n + \cdots + x_t^n = y_1^n + \cdots + y_t^n + \lambda_n, \end{rmatrix} \qquad (1)$$

$$1 \leqslant x_\nu,\ y_\nu \leqslant P, \quad \nu = 1, 2, \ldots, t.$$

Через $N_{t,n}^{(P)}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ обозначим число решений этой системы. Пользуясь очевидным равенством

$$\int_0^1 e^{2\pi i\alpha x}\, d\alpha = \begin{cases} 0, \text{ если } x \text{ — целое число, } x \neq 0, \\ 1, \text{ если } x = 0, \end{cases}$$

получаем аналитическую формулу для $N_{t,n}^{(P)}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$:

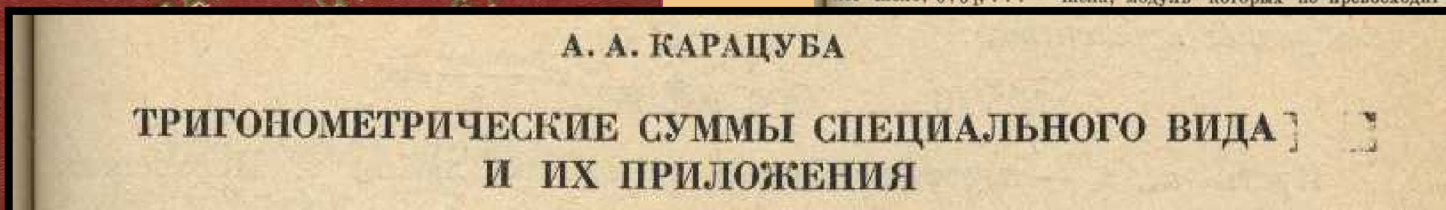
$$N_{t,n}^{(P)}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = \int_0^1 \cdots \int_0^1 |S|^{2t} e^{-2\pi i(\alpha_1\lambda_1 + \ldots + \alpha_n\lambda_n)} d\alpha_1 \ldots d\alpha_n, \qquad (2)$$

где

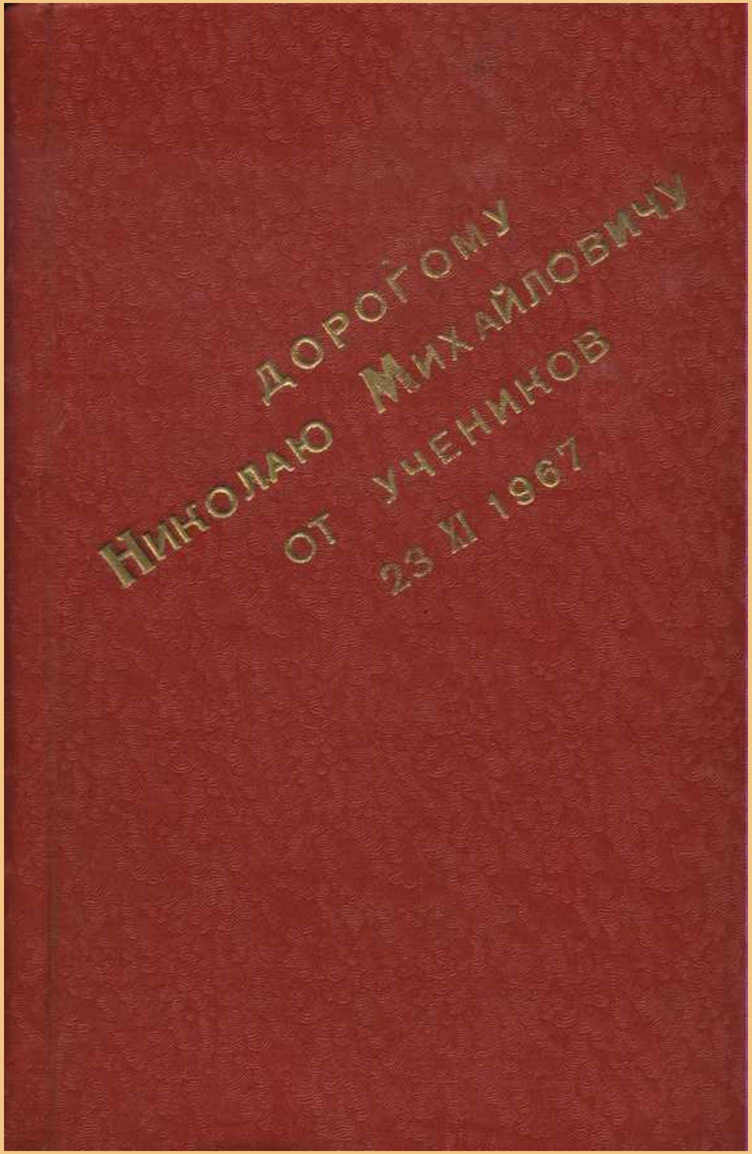
$$S = \sum_{x=1}^{P} e^{2\pi i(\alpha_1 x + \ldots + \alpha_n x^n)}.$$

Основные свойства величин $N_{t,n}^{(P)}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ [см. ([3])]:

а) $N_{t,n}^{(P)}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \leqslant N_{t,n}^{(P)}(0, \ldots, 0)$,


А. А. КАРАЦУБА

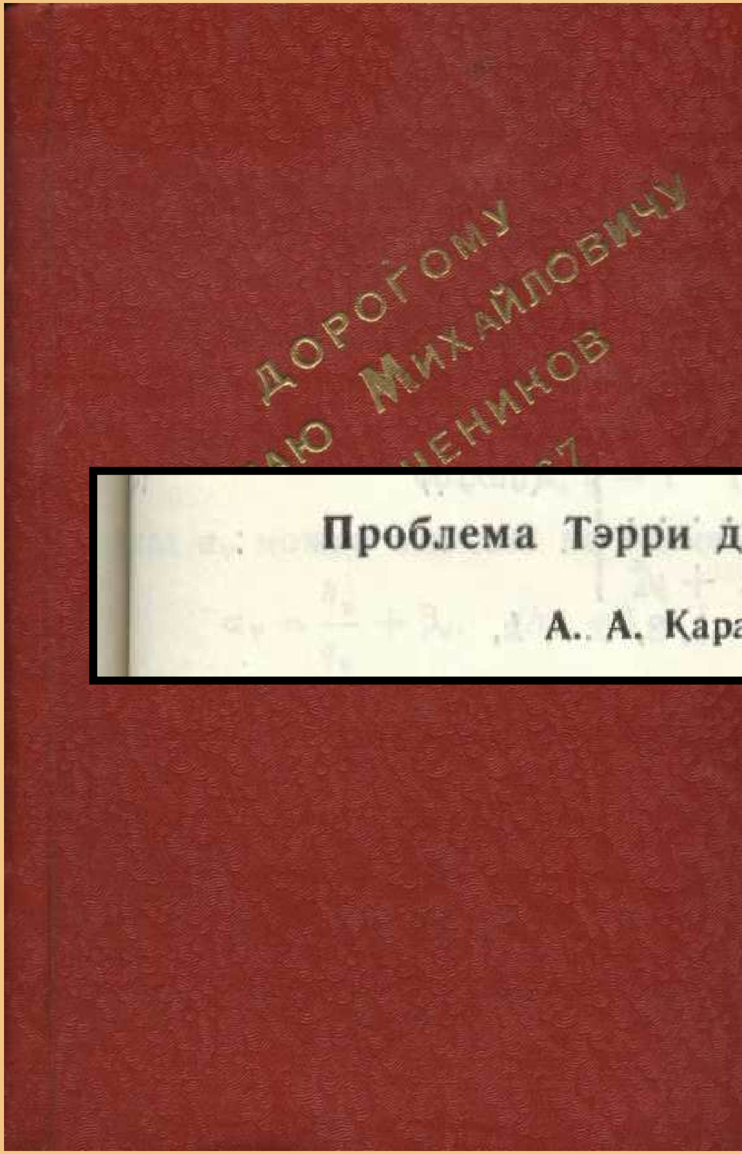
ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ СУММЫ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

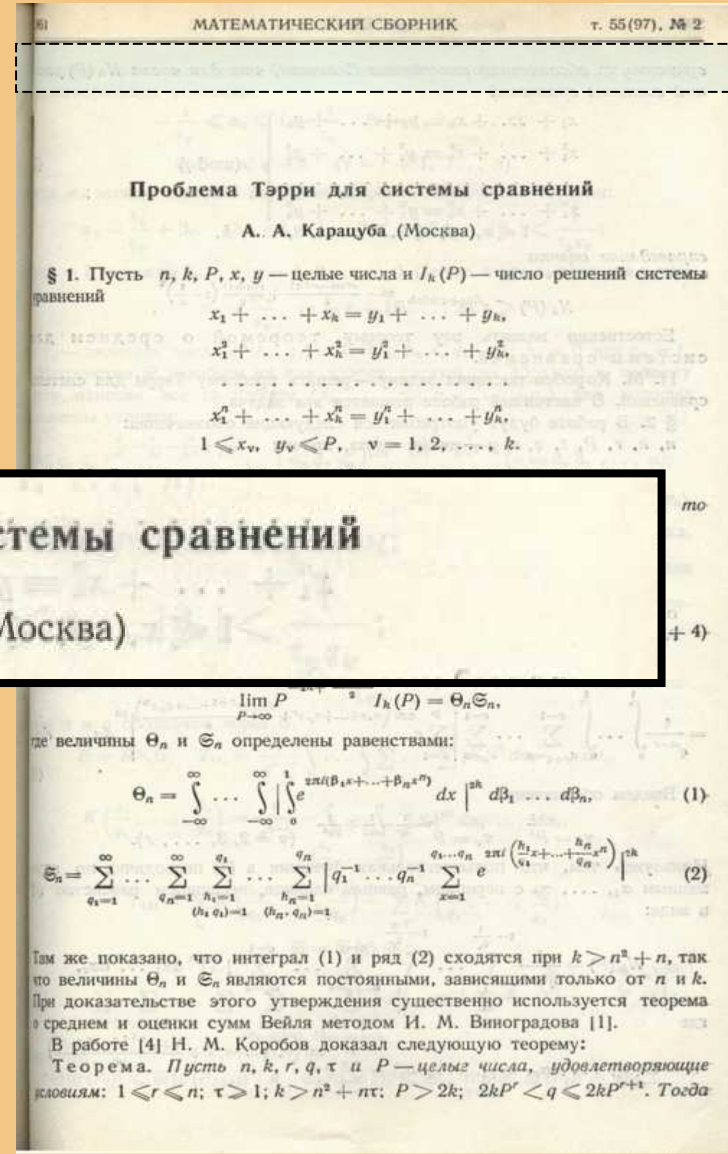


МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК

№ 10

МОСКВА. 1961





Проблема Тэрри для системы сравнений

А. А. Карацуба (Москва)

§ 1. Пусть n, k, P, x, y — целые числа и $I_k(P)$ — число решений системы сравнений

$$x_1 + \dots + x_k = y_1 + \dots + y_k,$$
$$x_1^2 + \dots + x_k^2 = y_1^2 + \dots + y_k^2,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$x_1^n + \dots + x_k^n = y_1^n + \dots + y_k^n,$$
$$1 \leqslant x_\nu,\ y_\nu \leqslant P,\quad \nu = 1, 2, \dots, k.$$

то

$+ 4)$

$$\lim_{P\to\infty} P \quad I_k(P) = \Theta_n \mathfrak{S}_n,$$

где величины Θ_n и $\mathfrak{S}_n$ определены равенствами:

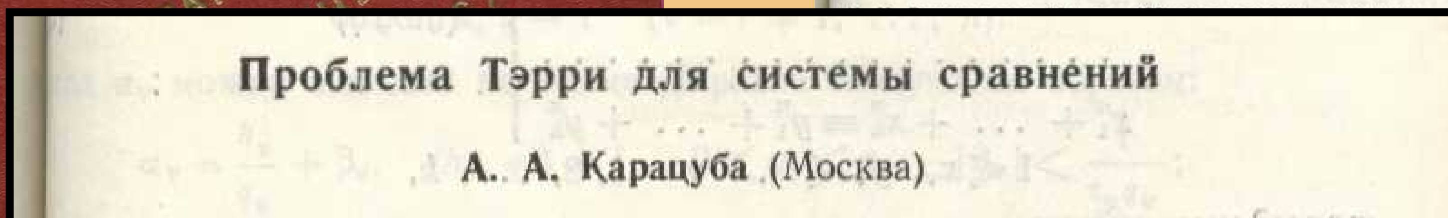
$$\Theta_n = \int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}\left|\int_0^1 e^{2\pi i(\beta_1 x+\dots+\beta_n x^n)}\,dx\right|^{2k} d\beta_1\dots d\beta_n, \tag{1}$$

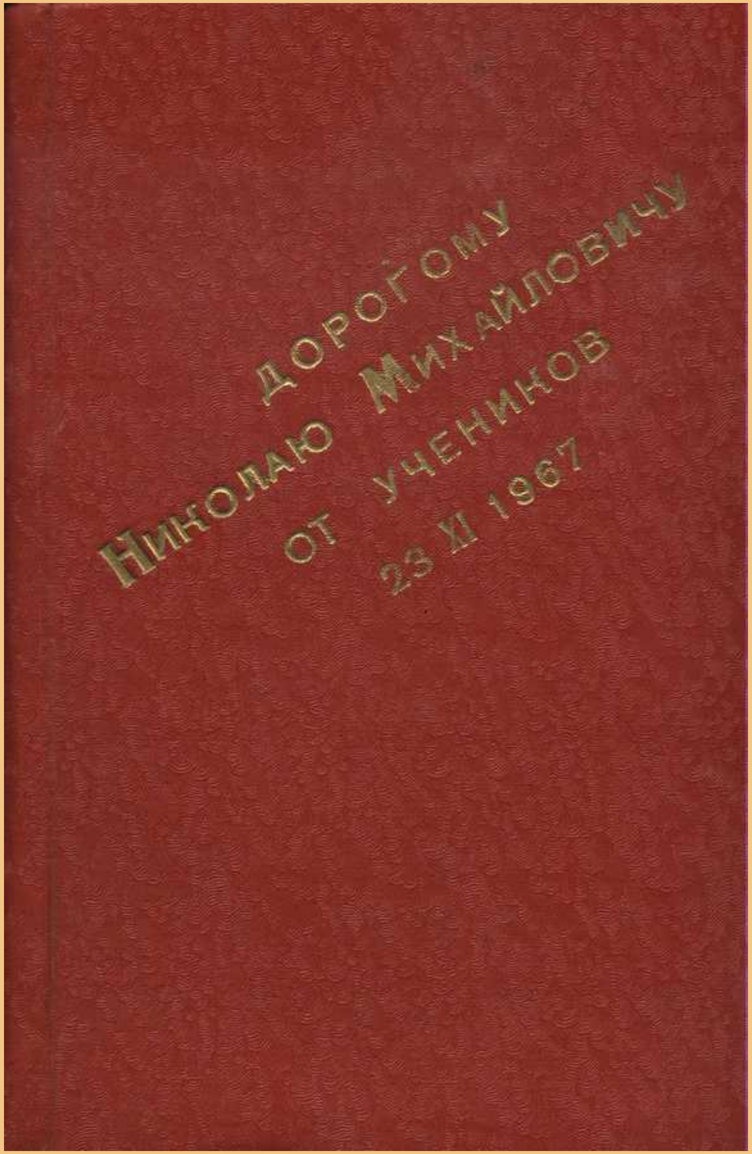
$$\mathfrak{S}_n = \sum_{q_1=1}^{\infty}\cdots\sum_{q_n=1}^{\infty}\sum_{\substack{h_1=1\\(h_1,q_1)=1}}^{q_1}\cdots\sum_{\substack{h_n=1\\(h_n,q_n)=1}}^{q_n}\left|q_1^{-1}\cdots q_n^{-1}\sum_{x=1}^{q_1\cdots q_n} e^{2\pi i\left(\frac{h_1}{q_1}x+\dots+\frac{h_n}{q_n}x^n\right)}\right|^{2k} \tag{2}$$

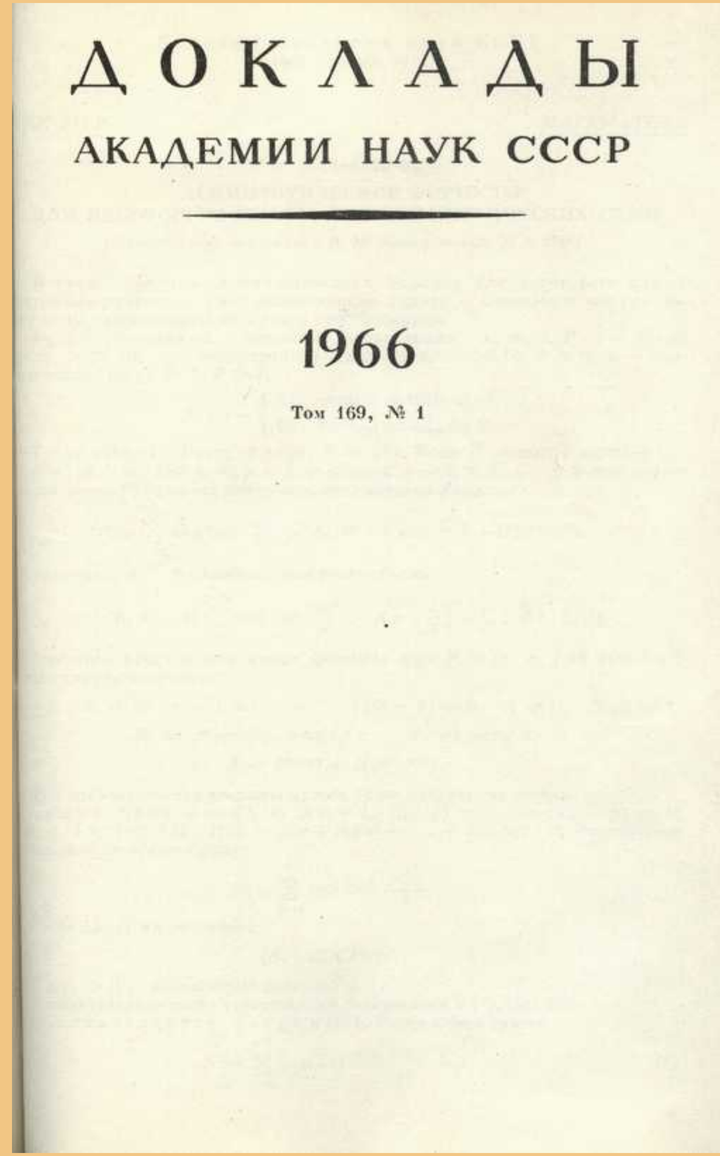
Там же показано, что интеграл (1) и ряд (2) сходятся при $k > n^2 + n$, так что величины Θ_n и $\mathfrak{S}_n$ являются постоянными, зависящими только от n и k. При доказательстве этого утверждения существенно используется теорема о среднем и оценки сумм Вейля методом И. М. Виноградова [1].

В работе [4] Н. М. Коробов доказал следующую теорему:

Теорема. *Пусть* n, k, r, q, τ *и* P — *целые числа, удовлетворяющие условиям:* $1 \leqslant r \leqslant n$; $\tau \geqslant 1$; $k > n^2 + n\tau$; $P > 2k$; $2kP^r < q \leqslant 2kP^{r+1}$. *Тогда*



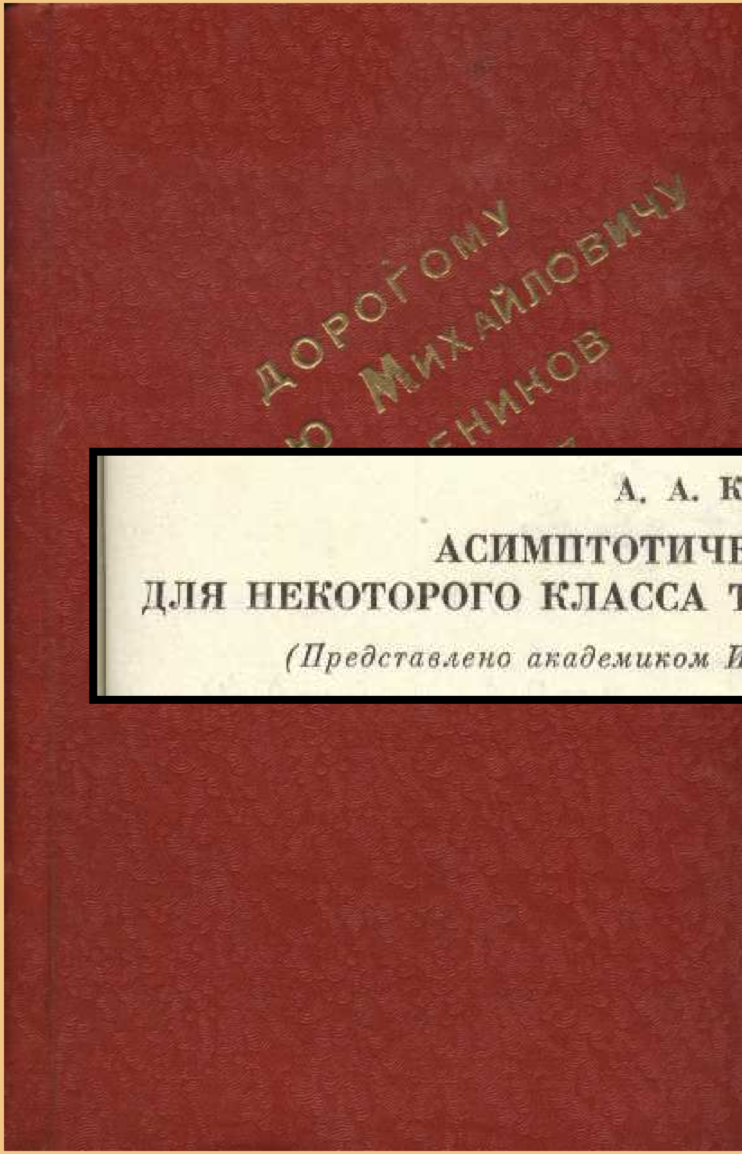


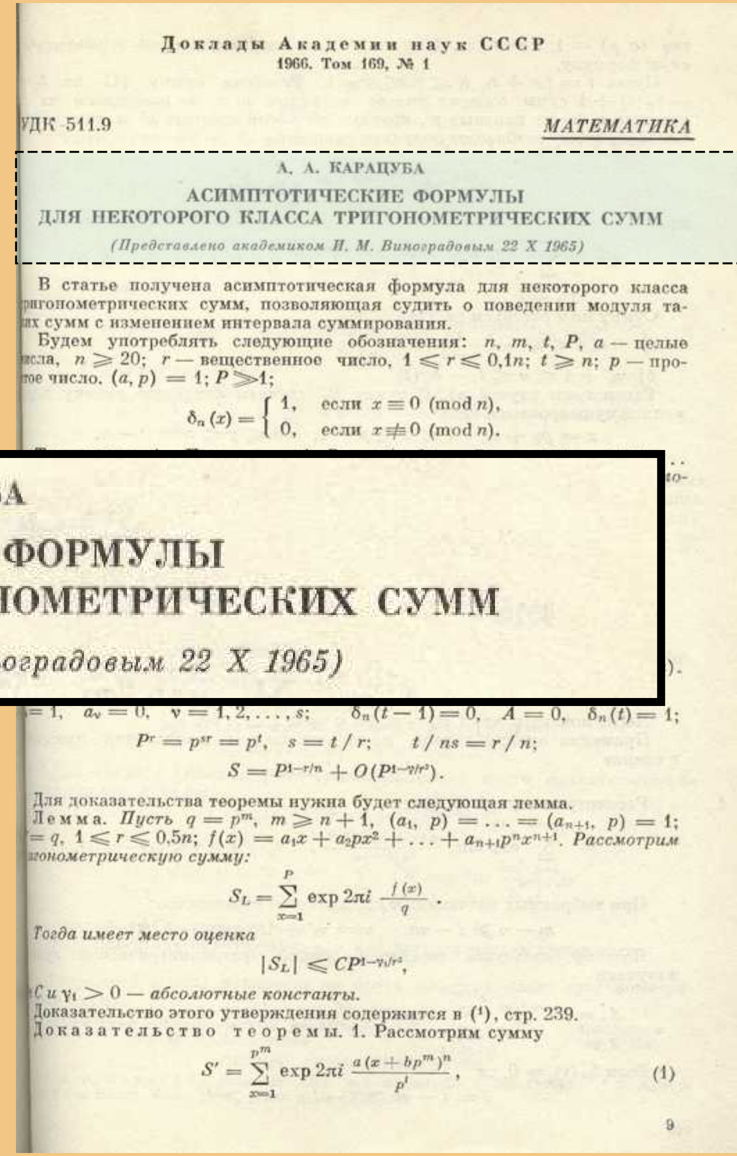


ДОКЛАДЫ
АКАДЕМИИ НАУК СССР

1966

Том 169, № 1





Доклады Академии наук СССР
1966. Том 169, № 1

УДК 511.9

МАТЕМАТИКА

А. А. КАРАЦУБА

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ НЕКОТОРОГО КЛАССА ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ СУММ

(Представлено академиком И. М. Виноградовым 22 X 1965)

В статье получена асимптотическая формула для некоторого класса тригонометрических сумм, позволяющая судить о поведении модуля таких сумм с изменением интервала суммирования.

Будем употреблять следующие обозначения: n, m, t, P, a — целые числа, $n \geqslant 20$; r — вещественное число, $1 \leqslant r \leqslant 0{,}1n$; $t \geqslant n$; p — простое число. $(a, p) = 1$; $P \gg 1$;

$$\delta_n(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \equiv 0 \pmod{n}, \\ 0, & \text{если } x \not\equiv 0 \pmod{n}. \end{cases}$$

...

$$= 1, \quad a_\nu = 0, \quad \nu = 1, 2, \ldots, s; \qquad \delta_n(t-1) = 0, \quad A = 0, \quad \delta_n(t) = 1;$$

$$P^r = p^{sr} = p^t, \quad s = t / r; \qquad t / ns = r / n;$$

$$S = P^{1-r/n} + O(P^{1-\gamma/r^2}).$$

Для доказательства теоремы нужна будет следующая лемма.

Лемма. *Пусть* $q = p^m$, $m \geqslant n + 1$, $(a_1, p) = \ldots = (a_{n+1}, p) = 1$; $= q$, $1 \leqslant r \leqslant 0{,}5n$; $f(x) = a_1x + a_2px^2 + \ldots + a_{n+1}p^nx^{n+1}$. *Рассмотрим тригонометрическую сумму:*

$$S_L = \sum_{x=1}^{P} \exp 2\pi i \frac{f(x)}{q}.$$

Тогда имеет место оценка

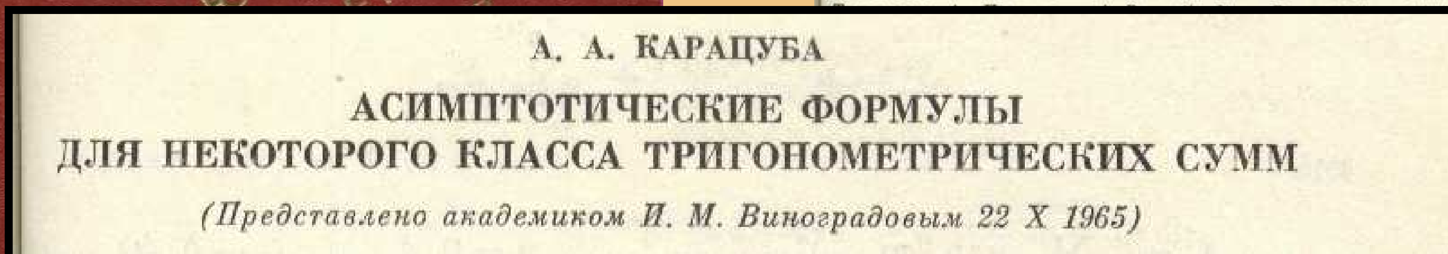
$$|S_L| \leqslant CP^{1-\gamma_1/r^2},$$

C и $\gamma_1 > 0$ — абсолютные константы.

Доказательство этого утверждения содержится в ([1]), стр. 239.

Доказательство теоремы. 1. Рассмотрим сумму

$$S' = \sum_{x=1}^{p^m} \exp 2\pi i \frac{a(x + bp^m)^n}{p^t}, \tag{1}$$



А. А. КАРАЦУБА

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ФОРМУЛЫ
ДЛЯ НЕКОТОРОГО КЛАССА ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ СУММ

(Представлено академиком И. М. Виноградовым 22 X 1965)

С 1 февраля 1988 года Н. М. Коробов по приглашению Адольфа Павловича Юшкевича начал работать в секторе истории математики ***Института истории естествознания и техники РАН им. С. И. Вавилова***. Сотрудничество Николая Михайловича с Институтом не только не прекратило его теоретико-числовых исследований, но и расширило их за счёт исторических аспектов.

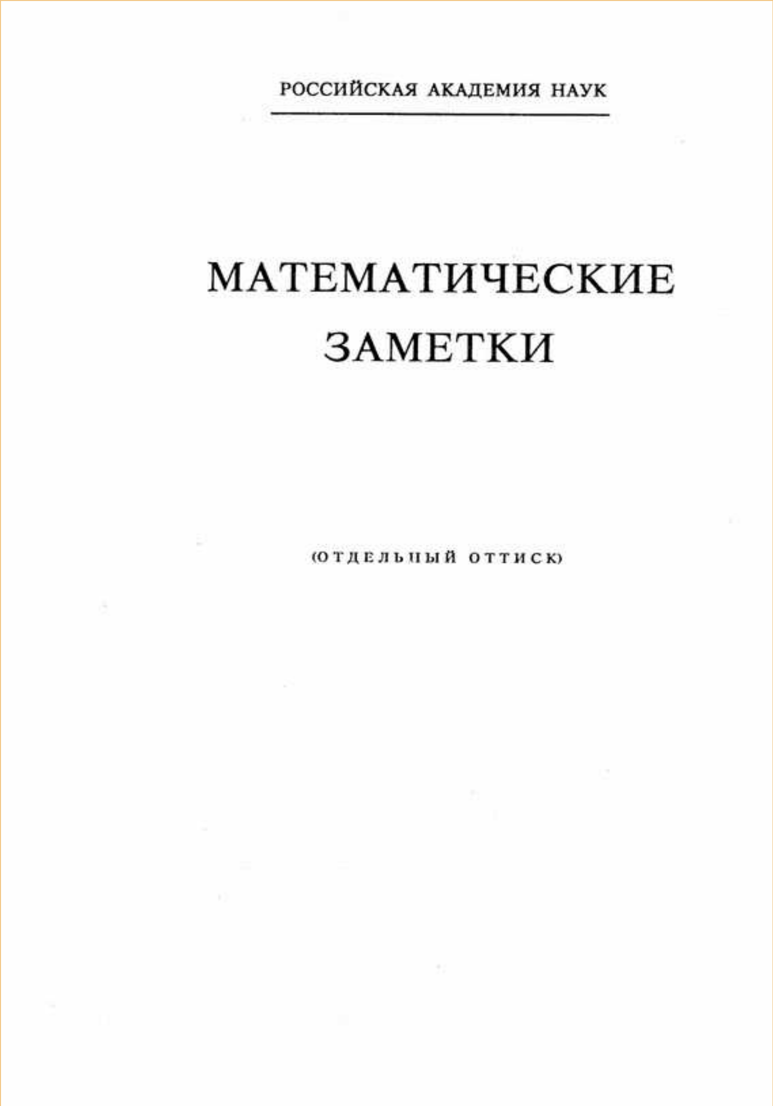
On February 1, 1988 N. M. Korobov began to work at the mathematical history department of ***Vavilov Natural History and Technics Institute of Russian Academy of Sciences*** by offer of Adolf Pavlovich Uyshkevich. Korobov’s cooperation with Institute didn’t finish his number-theoretic research but extended his research thanks to using of historical knowledge base.

Работы Николая Михайловича Коробова в области истории математики такие, как ***«О теоретико-числовых методах приближенного интегрирования»*** (1994) и ***«О теоретико-числовых интерполяционных формулах»*** (2001), способствовали появлению интересных исследований по истории математического анализа и теории чисел.

The interesting researches into history of mathematical analysis and theory of numbers appeared after Korobov’s publications in the field of mathematical history ***«About number-theoretic methods of approximate integration»*** (1994) and ***«About number-theoretic interpolation formulas»*** (2001).

В последние годы жизни
Николай Михайлович Коробов:
разрабатывал новые
направления исследований по
развитию теоретико-числового
метода – ***специальные полиномы и комбинированные сетки***

In his last years
Nikolay Mikhailovich Korobov
worked up the new research
directions for development of
number-theoretic method – ***special polynomials and combined frames***



РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ
ЗАМЕТКИ

(ОТДЕЛЬНЫЙ ОТТИСК)

В последние годы жизни Николай Михайлович Коробов: разрабатывал новые направления исследований по развитию теоретико-числового метода – ***специальные полиномы и комбинированные сетки***

In his last years Nikolay Mikhailovich Korobov worked up the new research directions for development of number-theoretic method – ***special polynomials and combined frames***

Математические заметки

том 55 выпуск 2 февраль 1994

КВАДРАТУРНЫЕ ФОРМУЛЫ С КОМБИНИРОВАННЫМИ СЕТКАМИ

Н. М. Коробов

Рассмотрим квадратурную формулу, построенную с помощью сетки $M(\xi_1(k),\dots,\xi_s(k))$ $(k=1,2,\dots,N)$:

$$\int_0^1\cdots\int_0^1 f(x_1,\dots,x_s)\,dx_1\dots dx_s=\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} f(\xi_1(k),\dots,\xi_s(k))-R_N[f]. \tag{1}$$

Будем предполагать, что функция f принадлежит классу $E_s^\alpha(C)$, т.е. коэффициенты ее ряда Фурье

$$f(x_1,\dots,x_s)=\sum_{m_1,\dots,m_s=-\infty}^{\infty} C(m_1,\dots,m_s)e^{2\pi i(m_1x_1+\dots+m_sx_s)}$$

удовлетворяют условиям

$$|C(m_1,\dots,m_s)|\le\frac{C}{(\overline{m}_1\cdot\ldots\cdot\overline{m}_s)^\alpha},$$

где $\alpha>1$, $\overline{m}=\max(1,m)$ и C – константа, не зависящая от $m_1,\dots,m_s$.

Определим величину $\delta_p(a)$ равенствами

$$\delta_p(a)=\begin{cases}1, & \text{если } a\equiv 0 \pmod p,\\ 0, & \text{если } a\not\equiv 0 \pmod p.\end{cases}$$

Целые $a_1=a_1(p),\dots,a_s=a_s(p)$ называются *оптимальными коэффициентами по модулю* p, если при некотором $\beta=\beta(s)$ для бесконечной последовательности натуральных p выполнена оценка[1]

$$\sum_{m_1,\dots,m_s=-(p-1)}^{p-1}{}' \frac{\delta_p(\alpha_1m_1+\dots+\alpha_sm_s)}{\overline{m}_1\dots\overline{m}_s}\ll\frac{\ln^\beta p}{p}.$$

[1] суммирование $\sum'$ проводится по целым $m_1,\dots,m_s$ не равным одновременно нулю

В последние годы жизни Николай Михайлович Коробов: разрабатывал новые направления исследований по развит

ме

полино

Niko

work

directions for development of number-theoretic method – ***special polynomials and combined frames***

При $f \in E_s^\alpha(C)$ наиболее точные квадратурные формулы вида (1) получены (см. [1]–[3]) с помощью оптимальных параллелепипедальных сеток

$$M\left[\left\{\frac{a_1k}{N}\right\},\ldots,\left\{\frac{a_sk}{N}\right\}\right] \quad (k=1,2,\ldots,N),$$

где $\left\{\frac{a_\nu k}{N}\right\}$ – дробные доли чисел $\frac{a_\nu k}{N}$, $N=p$ и $a_1,\ldots,a_s$ — оптимальные коэффициенты по модулю p.

Теорема 1. *Пусть p пробегает последовательность простых чисел. Существуют оптимальные коэффициенты $a_1,\ldots,a_s$ такие, что для любого $\alpha>1$ выполняются оценки*

$$\sum_{m_1,\ldots,m_s=-\infty}^{\infty}{}_r \frac{\delta_p(a_1m_1+\cdots+a_sm_s)}{(\overline{m}_1\cdot\ldots\cdot\overline{m}_s)^\alpha} \ll \frac{(\ln p)^{\alpha(r-1)}}{p^\alpha} \quad (r=1,2,\ldots,s), \qquad (2)$$

где сумма $\sum_r$ распространена на системы целых $(m_1,\ldots,m_s)$, содержащие ровно r величин m_j, отличных от нуля.

Действительно, определим t_r и $\sigma(z)$ равенствами

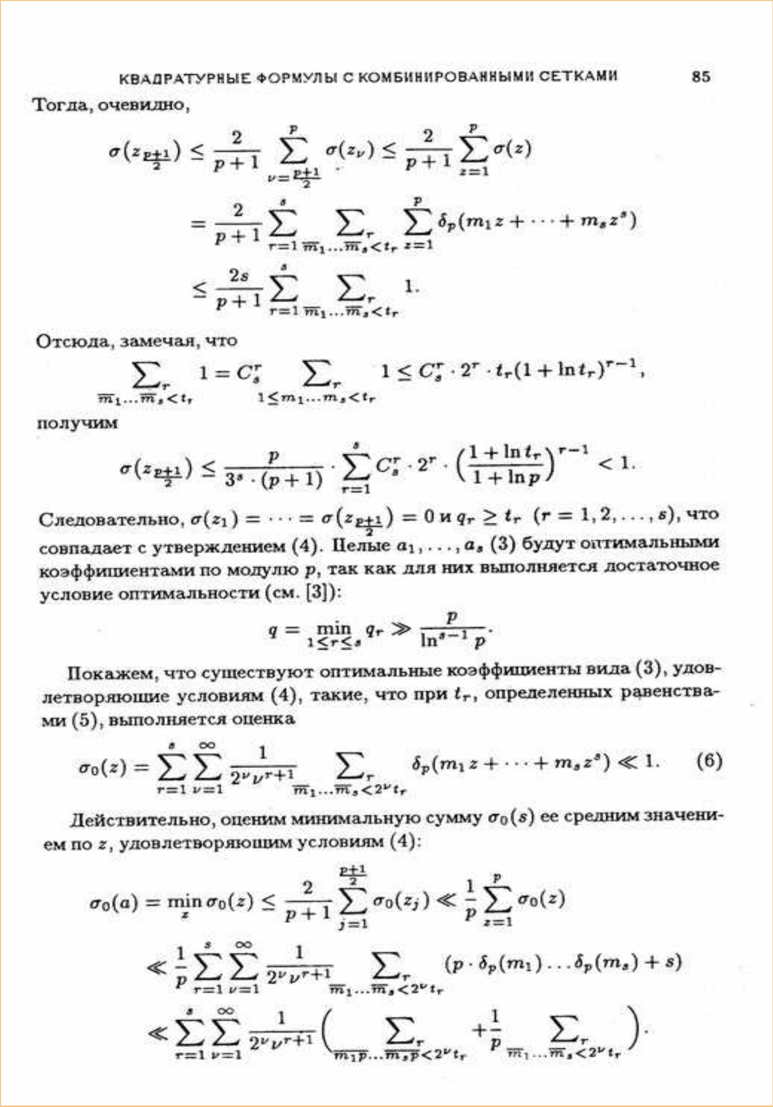
$$t_r=\frac{1}{2s\cdot 3^s}\cdot\frac{p}{(1+\ln p)^{r-1}}, \quad \sigma(z)=\sum_{r=1}^{s}\sum_{\overline{m}_1\ldots\overline{m}_s<t_r}{}_r\,\delta_p(m_1z+\cdots+m_sz^s), \qquad (5)$$

где суммы $\sum_r$ распространены на системы целых $m_1,\ldots,m_s$, удовлетворяющие условию $\overline{m}_1,\ldots,\overline{m}_s<t_r$ и содержащие ровно r величин m_j отличных от нуля. Пусть $z_1,\ldots,z_p$ – перестановка чисел $1,2,\ldots,p$, при которой

$$\sigma(z_1)\le\cdots\le\sigma(z_p).$$

В последние годы жизни Николай Михайлович Коробов: разрабатывал новые направления исследований по развитию теоретико-числового метода – ***специальные полиномы и комбинированные сетки***

In his last years Nikolay Mikhailovich Korobov worked up the new research directions for development of number-theoretic method – ***special polynomials and combined frames***



КВАДРАТУРНЫЕ ФОРМУЛЫ С КОМБИНИРОВАННЫМИ СЕТКАМИ 85

Тогда, очевидно,

$$\sigma\left(z_{\frac{p+1}{2}}\right) \le \frac{2}{p+1} \sum_{\nu=\frac{p+1}{2}}^{p} \sigma(z_\nu) \le \frac{2}{p+1} \sum_{z=1}^{p} \sigma(z)$$

$$= \frac{2}{p+1} \sum_{r=1}^{s} \sum_{\overline{m}_1 \ldots \overline{m}_s < t_r}{}_{r} \sum_{z=1}^{p} \delta_p(m_1 z + \cdots + m_s z^s)$$

$$\le \frac{2s}{p+1} \sum_{r=1}^{s} \sum_{\overline{m}_1 \ldots \overline{m}_s < t_r}{}_{r} 1.$$

Отсюда, замечая, что

$$\sum_{\overline{m}_1 \ldots \overline{m}_s < t_r}{}_{r} 1 = C_s^r \sum_{1 \le m_1 \ldots m_s < t_r}{}_{r} 1 \le C_s^r \cdot 2^r \cdot t_r (1 + \ln t_r)^{r-1},$$

получим

$$\sigma\left(z_{\frac{p+1}{2}}\right) \le \frac{p}{3^s \cdot (p+1)} \cdot \sum_{r=1}^{s} C_s^r \cdot 2^r \cdot \left(\frac{1 + \ln t_r}{1 + \ln p}\right)^{r-1} < 1.$$

Следовательно, $\sigma(z_1) = \cdots = \sigma\left(z_{\frac{p+1}{2}}\right) = 0$ и $q_r \ge t_r$ $(r = 1, 2, \ldots, s)$, что совпадает с утверждением (4). Целые $a_1, \ldots, a_s$ (3) будут оптимальными коэффициентами по модулю p, так как для них выполняется достаточное условие оптимальности (см. [3]):

$$q = \min_{1 \le r \le s} q_r \gg \frac{p}{\ln^{s-1} p}.$$

Покажем, что существуют оптимальные коэффициенты вида (3), удовлетворяющие условиям (4), такие, что при t_r, определенных равенствами (5), выполняется оценка

$$\sigma_0(z) = \sum_{r=1}^{s} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{2^\nu \nu^{r+1}} \sum_{\overline{m}_1 \ldots \overline{m}_s < 2^\nu t_r}{}_{r} \delta_p(m_1 z + \cdots + m_s z^s) \ll 1. \qquad (6)$$

Действительно, оценим минимальную сумму $\sigma_0(s)$ ее средним значением по z, удовлетворяющим условиям (4):

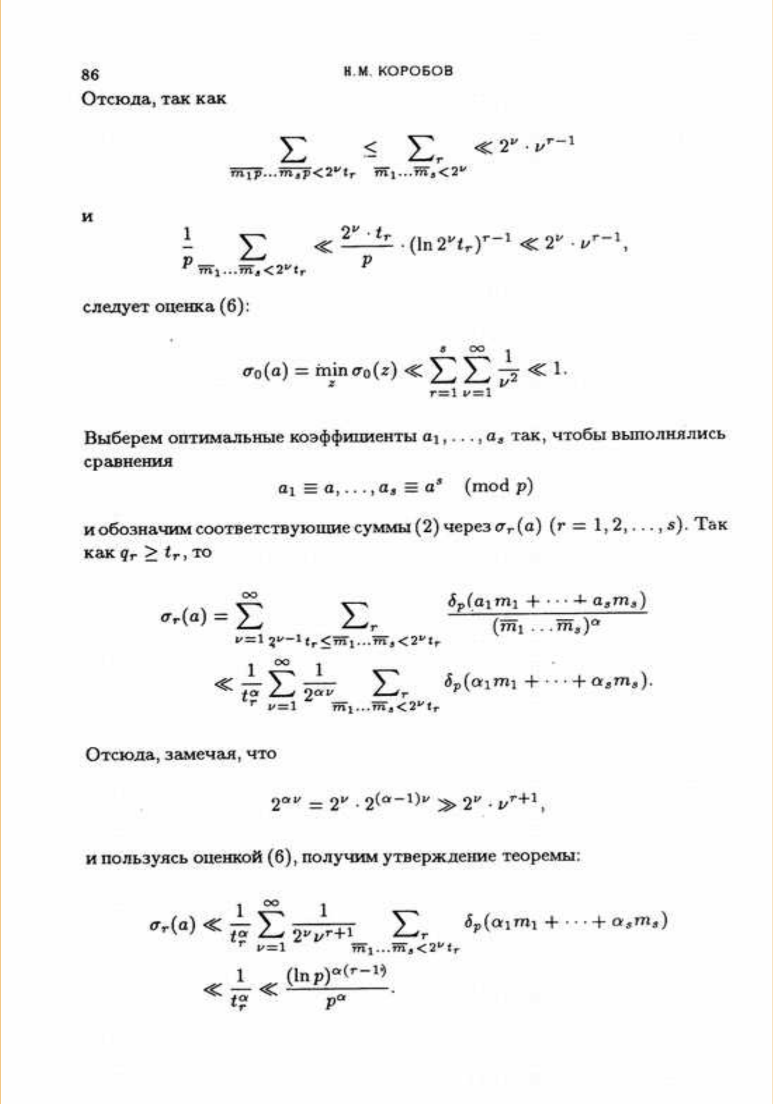
$$\sigma_0(a) = \min_z \sigma_0(z) \le \frac{2}{p+1} \sum_{j=1}^{\frac{p+1}{2}} \sigma_0(z_j) \ll \frac{1}{p} \sum_{z=1}^{p} \sigma_0(z)$$

$$\ll \frac{1}{p} \sum_{r=1}^{s} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{2^\nu \nu^{r+1}} \sum_{\overline{m}_1 \ldots \overline{m}_s < 2^\nu t_r}{}_{r} (p \cdot \delta_p(m_1) \ldots \delta_p(m_s) + s)$$

$$\ll \sum_{r=1}^{s} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{2^\nu \nu^{r+1}} \left(\sum_{\overline{m_1 p} \ldots \overline{m_s p} < 2^\nu t_r}{}_{r} + \frac{1}{p} \sum_{\overline{m}_1 \ldots \overline{m}_s < 2^\nu t_r}{}_{r} \right).$$

В последние годы жизни Николай Михайлович Коробов: разрабатывал новые направления исследований по развитию теоретико-числового метода – ***специальные полиномы и комбинированные сетки***

In his last years Nikolay Mikhailovich Korobov worked up the new research directions for development of number-theoretic method – ***special polynomials and combined frames***



86 Н.М. КОРОБОВ

Отсюда, так как

$$\sum_{\overline{m_1 p}\ldots\overline{m_s p}<2^\nu t_r} \leq \sum\nolimits_{\overline{m}_1\ldots\overline{m}_s<2^\nu}^{r} \ll 2^\nu \cdot \nu^{r-1}$$

и

$$\frac{1}{p}\sum_{\overline{m}_1\ldots\overline{m}_s<2^\nu t_r} \ll \frac{2^\nu \cdot t_r}{p}\cdot(\ln 2^\nu t_r)^{r-1} \ll 2^\nu\cdot\nu^{r-1},$$

следует оценка (6):

$$\sigma_0(a) = \min_z \sigma_0(z) \ll \sum_{r=1}^{s}\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\nu^2} \ll 1.$$

Выберем оптимальные коэффициенты $a_1,\ldots,a_s$ так, чтобы выполнялись сравнения

$$a_1 \equiv a,\ldots,a_s \equiv a^s \pmod p$$

и обозначим соответствующие суммы (2) через $\sigma_r(a)$ $(r = 1, 2, \ldots, s)$. Так как $q_r \geq t_r$, то

$$\sigma_r(a) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum\nolimits_{2^{\nu-1}t_r\leq\overline{m}_1\ldots\overline{m}_s<2^\nu t_r}^{r} \frac{\delta_p(a_1m_1+\cdots+a_sm_s)}{(\overline{m}_1\ldots\overline{m}_s)^\alpha}$$
$$\ll \frac{1}{t_r^\alpha}\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{2^{\alpha\nu}}\sum\nolimits_{\overline{m}_1\ldots\overline{m}_s<2^\nu t_r}^{r}\delta_p(\alpha_1m_1+\cdots+\alpha_sm_s).$$

Отсюда, замечая, что

$$2^{\alpha\nu} = 2^\nu\cdot 2^{(\alpha-1)\nu} \gg 2^\nu\cdot\nu^{r+1},$$

и пользуясь оценкой (6), получим утверждение теоремы:

$$\sigma_r(a) \ll \frac{1}{t_r^\alpha}\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{2^\nu\nu^{r+1}}\sum\nolimits_{\overline{m}_1\ldots\overline{m}_s<2^\nu t_r}^{r}\delta_p(\alpha_1m_1+\cdots+\alpha_sm_s)$$
$$\ll \frac{1}{t_r^\alpha} \ll \frac{(\ln p)^{\alpha(r-1)}}{p^\alpha}.$$

В последние годы жизни Николай Михайлович Коробов: разрабатывал новые направления исследований по развит…
ме…
полино…

Niko…
work…
direc…
number-theoretic method – ***special polynomials and combined frames***

Следствие. *Пусть $b_1, \ldots, b_r$ – любые r из чисел $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$, удовлетворяющих условиям теоремы 1. Тогда при $f \in E_r^\alpha(C)$ и $N = p$ для погрешности квадратурной формулы*

$$\int_0^1 \cdots \int_0^1 f(x_1, \ldots, x_r)\, dx_1 \ldots dx_r = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} f\left(\frac{b_1 k}{N}, \ldots, \frac{b_r k}{N}\right) - R_N[f]$$

выполняются оценки

$$R_N[f] \ll \frac{(\ln N)^{\alpha(r-1)}}{N^\alpha} \qquad (r = 1, 2, \ldots, s). \tag{7}$$

В последние годы жизни
Николай Михайлович Коробов:

р

напра

развит

ме

полино

Niko

work

direc

number-

polyn

frames

Следствие. *Пусть $b_1, \dots, b_r$ – любые r из чисел $a_1, \dots, a_s$, удовле-*

p для

$$\sum_{m_1,\dots,m_s=-\infty}^{\infty}{}_r \frac{\delta_p(a_1 m_1 + \dots + a_s m_s)}{(\overline{m}_1 \cdot \ldots \cdot \overline{m}_s)^\alpha} \ll \frac{(\ln p)^{\alpha(r-1)}}{p^\alpha} \quad (r = 1, 2, \dots, s), \tag{2}$$

Теорема 2. *Пусть p – простое, $(n,p) = 1$ и $N = n^s p$. Если оптимальные коэффициенты $a_1, \dots, a_s$ удовлетворяют условию* (2), $n \ll \ln p$ *и* $f \in E_s^\alpha(C)$, *то для погрешности квадратурной формулы*

$$\int_0^1 \cdots \int_0^1 f(x_1, \dots, x_s)\, dx_1 \dots dx_s$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{p} \sum_{k_1,\dots,k_s=1}^{n} f\left(\frac{k_1}{n} + \frac{a_1 k}{p}, \dots, \frac{k_s}{n} + \frac{a_s k}{p}\right) - R_N[f] \tag{8}$$

выполняется оценка

$$R_N[f] \ll \frac{\ln^{\alpha(s-1)} N}{N^\alpha}.$$

$_N[f]$

(7)

$r = s,$

$\alpha_0.$

опти-

$, n \ll$

(8)

$$R_N[f] \ll \frac{\ln^{\alpha(s-1)} N}{N^\alpha}.$$

В последние годы жизни
Николай Михайлович Коробов:
разрабатывал новые
направления исследований по
развитию теоретико-числового
метода – ***специальные
полиномы и комбинированные
сетки***

In his last years
Nikolay Mikhailovich Korobov
worked up the new research
directions for development of
number-theoretic method – ***special
polynomials and combined
frames***

88 Н.М. КОРОБОВ

Доказательство. Известно (см. [3]), что при $f \in E_s^\alpha(C)$ для погрешности квадратурной формулы (1) выполняется оценка

$$R_N[f] \leq \frac{C}{N} \sum_{m_1,\ldots,m_s=-\infty}^{\infty}{}' \frac{S(m_1,\ldots,m_s)}{(\overline{m}_1\ldots\overline{m}_s)^\alpha}, \tag{9}$$

где $S(m_1,\ldots,m_s)$ – тригонометрические суммы, соответствующие сетке $M(\xi_1(k),\ldots,\xi(k))$ $(k=1,2,\ldots,N)$:

$$S(m_1,\ldots,m_s) = \sum_{k=1}^{N} e^{2\pi i[m_1\xi_1(k)+\cdots+m_s\xi_s(k)]}.$$

В частности, для комбинированных сеток

$$\begin{aligned} S(m_1,\ldots,m_s) &= \sum_{k_1,\ldots,k_s=1}^{n} \sum_{k=1}^{p} e^{2\pi i\left[m_1\left(\frac{k_1}{n}+\frac{a_1k}{p}\right)+\cdots+m_s\left(\frac{k_s}{n}+\frac{a_sk}{p}\right)\right]} \\ &= \left(\sum_{k_1=1}^{n} e^{2\pi i\frac{m_1k_1}{n}}\right)\ldots\left(\sum_{k_s=1}^{n} e^{2\pi i\frac{m_sk_s}{n}}\right)\sum_{k=1}^{p} e^{2\pi i\frac{(a_1m_1+\cdots+a_sm_s)k}{p}} \\ &= N\cdot\delta_n(m_1)\ldots\delta_n(m_s)\cdot\delta_p(a_1m_1+\cdots+a_sm_s). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} R_N[f] &\leq C \sum_{m_1,\ldots,m_s=-\infty}^{\infty}{}' \frac{\delta_n(m_1)\ldots\delta_n(m_s)\cdot\delta_p(a_1m_1+\cdots+a_sm_s)}{(\overline{m}_1\ldots\overline{m}_s)^\alpha} \\ &= C \sum_{m_1,\ldots,m_s=-\infty}^{\infty}{}' \frac{\delta_p(a_1m_1n+\cdots+a_sm_sn)}{(\overline{m_1n}\ldots\overline{m_sn})^\alpha} \\ &= C\sum_{r=1}^{s}\frac{1}{n^{\alpha r}} \sum_{m_1,\ldots,m_s=-\infty}^{\infty}{}_r \frac{\delta_p(a_1m_1+\cdots+a_sm_s)}{(\overline{m}_1\ldots\overline{m}_s)^\alpha}. \end{aligned}$$

Отсюда в силу (2) при $n \ll \ln p$ получаем утверждение теоремы:

$$R_N[f] \ll \sum_{r=1}^{s}\frac{1}{n^{\alpha r}}\cdot\frac{(\ln p)^{\alpha(r-1)}}{p^\alpha} \ll \frac{(\ln N)^{\alpha(s-1)}}{N^\alpha}. \tag{10}$$

Заметим, что оценка (10) совпадает с лучшими из известных оценок, получающихся с помощью оптимальных параллелепипедальных сеток. Численные эксперименты показывают, что в некоторых случаях (например,

В последние годы жизни Николай Михайлович Коробов: разрабатывал новые направления исследований по развитию теоретико-числового метода – ***специальные полиномы и комбинированные сетки***

In his last years Nikolay Mikhailovich Korobov worked up the new research directions for development of number-theoretic method – ***special polynomials and combined frames***

КВАДРАТУРНЫЕ ФОРМУЛЫ С КОМБИНИРОВАННЫМИ СЕТКАМИ 89

при $n = 2$) квадратурные формулы (8) точнее квадратурных формул с параллелепипедальными сетками. Кроме того, число элементарных арифметических операций, необходимое для вычисления коэффициентов комбинированных сеток по крайней мере в 2^s раз меньше числа операций, необходимых для вычисления коэффициентов параллелепипедальных сеток с тем же числом узлов.

Известно (см. [4]), что при любом выборе сетки квадратурной формулы (1) оценка погрешности (9) достигается для некоторой функции $f_0 \in E_s^\alpha(C)$:

$$R_N[f_0] = \frac{C}{N} \sum_{m_1,\ldots,m_s=-\infty}^{\infty}{}' \frac{S(m_1,\ldots,m_s)}{(\overline{m}_1\ldots\overline{m}_s)^\alpha}.$$

Функцию $f_0(x_1,\ldots,x_s)$ будем называть *граничной функцией* класса $E_s^\alpha(C)$, соответствующей сетке квадратурной формулы (1). Легко показать, что как для параллелепипедальных, так и для комбинированных сеток граничная функция не зависит от сетки и определяется равенством

$$f_0(x_1,\ldots,x_s) = C \sum_{m_1,\ldots,m_s=-\infty}^{\infty} \frac{e^{2\pi i(m_1x_1+\cdots+m_sx_s)}}{(\overline{m}_1\ldots\overline{m}_s)^\alpha}.$$

При целом четном α эту функцию можно выразить через произведение полиномов Бернулли. В частности, при $C = 1$ и $\alpha = 2$ получим

$$f_0(x_1,\ldots,x_s) = \prod_{\nu=1}^{s}\Bigl(1 + \sum_{m=-\infty}^{\infty}{}' \frac{e^{2\pi i m x_\nu}}{m^2}\Bigr) = \prod_{\nu=1}^{s}(1 + 2\cdot\pi^2\cdot B_2(x_\nu)),$$

где $B_2(x) = x^2 - x + \frac{1}{6}$ – второй полином Бернулли. Соответственно для погрешности квадратурной формулы с комбинированной сеткой вида

$$M\Bigl(\Bigl\{\frac{k_1}{n} + \frac{zk}{p}\Bigr\},\ldots,\Bigl\{\frac{k_s}{n} + \frac{z^s k}{p}\Bigr\}\Bigr), \quad N = n^s p,$$

$k = 1,2,\ldots,p$, $k_\nu = 1,2,\ldots,n$, $(n,p) = 1$, будет выполняться равенство

$$R_N[f]_0 = -1 + \frac{1}{p}\sum_{k=1}^{p}\Bigl[1 + \frac{2\pi^2}{n^2}B_2\Bigl(\Bigl\{\frac{zk}{p}\Bigr\}\Bigr)\Bigr]\ldots\Bigl[1 + \frac{2\pi^2}{n^2}B_2\Bigl(\Bigl\{\frac{z^s k}{p}\Bigr\}\Bigr)\Bigr]. \qquad (11)$$

Согласно теореме 2, существует значение $z = a$, при котором выполняется оценка

$$R_N[f_0] \ll \frac{(\ln N)^{2(s-1)}}{N^2}.$$

В последние годы жизни

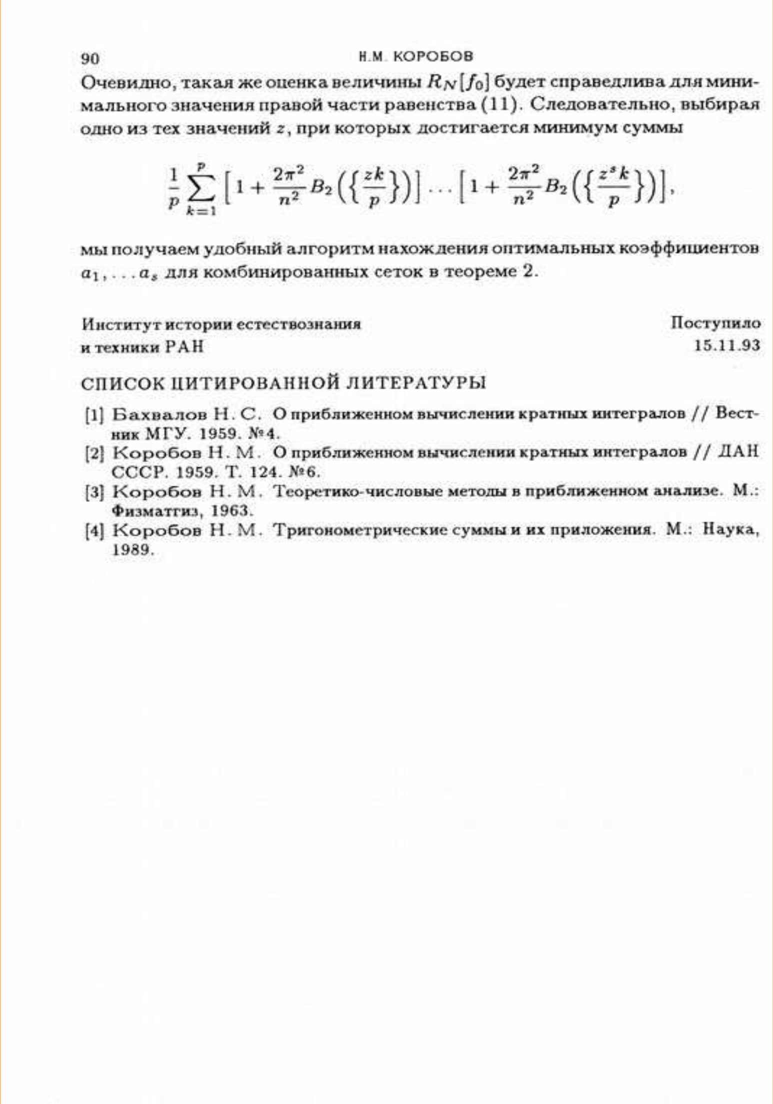
Николай Михайлович Коробов:

разрабатывал новые направления исследований по развитию теоретико-числового метода – ***специальные полиномы и комбинированные сетки***

In his last years

Nikolay Mikhailovich Korobov

worked up the new research directions for development of number-theoretic method – ***special polynomials and combined frames***



Очевидно, такая же оценка величины $R_N[f_0]$ будет справедлива для минимального значения правой части равенства (11). Следовательно, выбирая одно из тех значений z, при которых достигается минимум суммы

$$\frac{1}{p}\sum_{k=1}^{p}\left[1+\frac{2\pi^2}{n^2}B_2\left(\left\{\frac{zk}{p}\right\}\right)\right]\ldots\left[1+\frac{2\pi^2}{n^2}B_2\left(\left\{\frac{z^s k}{p}\right\}\right)\right],$$

мы получаем удобный алгоритм нахождения оптимальных коэффициентов $a_1,\ldots a_s$ для комбинированных сеток в теореме 2.

Институт истории естествознания и техники РАН

Поступило 15.11.93

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Бахвалов Н. С. О приближенном вычислении кратных интегралов // Вестник МГУ. 1959. №4.
[2] Коробов Н. М. О приближенном вычислении кратных интегралов // ДАН СССР. 1959. Т. 124. №6.
[3] Коробов Н. М. Теоретико-числовые методы в приближенном анализе. М.: Физматгиз, 1963.
[4] Коробов Н. М. Тригонометрические суммы и их приложения. М.: Наука, 1989.

В последние годы жизни Николай Михайлович Коробов: разрабатывал новые направления исследований по развитию теоретико-числового метода – ***специальные полиномы и комбинированные сетки***

In his last years Nikolay Mikhailovich Korobov worked up the new research directions for development of number-theoretic method – ***special polynomials and combined frames***

УДК 511.217

Специальные полиномы и их приложения

Н. М. Коробов

В первом параграфе настоящей работы вводятся полиномы специального вида, устанавливаются свойства этих полиномов и выясняются их связи с полиномами Бернулли. Второй параграф содержит приложения специальных полиномов к выводу новых интерполяционных формул для функций многих переменных.

Библиография: 2 названия.

§1. Специальные полиномы

Пусть $n \geqslant 0, p \geqslant 2$ — целые и при любом действительном x числа P_n и полиномы $P_n(x)$ определены равенствами

$$\begin{gathered} P_0=1, \quad C_p^1 P_n+\cdots+C_p^{n+1} P_0=0 \quad (n \geqslant 1), \\ P_0(x)=1, \quad P_n(x)=P_0 C_x^n+\cdots+P_{n-1} C_x^1+P_n \quad (n \geqslant 1). \end{gathered} \tag{1}$$

Отсюда, в частности, получим

$$\begin{gathered} P_1=-\frac{p-1}{2}, \quad P_2=\frac{p^2-1}{12}, \quad P_3=-\frac{p^2-1}{24}, \\ P_1(x)=x-\frac{p-1}{2}, \quad P_2(x)=\frac{1}{2}x^2-\frac{p}{2}x+\frac{p^2-1}{12}, \\ P_3(x)=\frac{1}{6}x^3-\frac{p+1}{4}x^2+\frac{p^2+3p}{12}x-\frac{p^2-1}{24}. \end{gathered} \tag{2}$$

Заметим, что из определения P_n и $P_n(x)$ непосредственно следуют равенства

$$\begin{gathered} P_n(p)-P_n(0)=\begin{cases} 0, & \text{если } n \neq 1, n \geqslant 0; \\ p, & \text{если } n=1, \end{cases} \\ P_n(0)=P_n \quad (n \geqslant 0). \end{gathered} \tag{3}$$

Для всякой функции $f(x)$ через $\Delta f(x)$ будем обозначать ее конечную разность:

$$\Delta f(x)=f(x+1)-f(x).$$

В последние годы жизни
Николай Михайлович Коробов:
разрабатывал новые
направления исследований по
развитию теоретико-числового
метода – ***специальные
полиномы и комбинированные
сетки***

In his last years
Nikolay Mikhailovich Korobov
worked up the new research
directions for development of
number-theoretic method – ***special
polynomials and combined
frames***

78 Н.М. КОРОБОВ

Легко показать, что для специальных полиномов $P_n(x)$ выполняются следующие равенства.

1°. $\Delta P_n(x) = P_{n-1}(x) \quad (n \geqslant 1)$.

2°. $\sum_{z=0}^{x-1} P_n(z) = P_{n+1}(x) - P_{n+1} \quad (n \geqslant 0), \quad \sum_{z=0}^{p-1} P_n(z) = 0 \quad (n \geqslant 1)$.

3°. $C_p^1 P_n(x) + \cdots + C_p^{n+1} P_0(x) = pC_x^n \quad (n \geqslant 1)$.

4°. При целом $x \in [0, p+n-2]$

$$P_n(x) = -\sum_{m=1}^{p-1} \frac{e^{2\pi i \frac{m}{p}}}{(e^{2\pi i \frac{m}{p}} - 1)^n} e^{2\pi i \frac{mx}{p}} \quad (n \geqslant 0).$$

Действительно, так как

$$\Delta C_x^n = C_x^{n-1} \quad (n \geqslant 1),$$

то равенство 1° непосредственно следует из определения (1):

$$\begin{aligned}\Delta P_n(x) &= \Delta(P_0 C_x^n + \cdots + P_{n-1} C_x^1 + P_n) \\ &= P_0 C_x^{n-1} + \cdots + P_{n-2} C_x^1 + P_{n-1} = P_{n-1}(x).\end{aligned}$$

Равенства 2° — очевидные следствия 1° и (3):

$$\sum_{z=0}^{x-1} P_n(z) = \sum_{z=0}^{x-1} \Delta P_{n+1}(z) = P_{n+1}(x) - P_{n+1},$$
$$\sum_{z=0}^{p-1} P_n(z) = P_{n+1}(p) - P_{n+1} = 0.$$

Докажем равенство 3°. Так как

$$P_1(x) = x - \frac{p-1}{2},$$

то 3°, очевидно, выполняется при $n = 1$. Применим индукцию. Пусть равенство 3° справедливо при некотором $n \geqslant 1$:

$$C_p^1 P_n(z) + \cdots + C_p^{n+1} P_0(z) = pC_z^n.$$

Суммируя по z от 0 до $x-1$, в силу первого из равенств 2° получим

$$C_p^1 [P_{n+1}(x) - P_{n+1}] + \cdots + C_p^{n+1} [P_1(x) - P_1] = pC_x^{n+1}.$$

Согласно определению чисел P_ν

$$C_p^1 P_{n+1} + \cdots + C_p^{n+1} P_1 + C_p^{n+2} = 0.$$

В последние годы жизни Николай Михайлович Коробов: разрабатывал новые направления исследований по развитию теоретико-числового метода – ***специальные полиномы и комбинированные сетки***

In his last years Nikolay Mikhailovich Korobov worked up the new research directions for development of number-theoretic method – ***special polynomials and combined frames***

СПЕЦИАЛЬНЫЕ ПОЛИНОМЫ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ 79

Складывая последние два равенства получим

$$C_p^1 P_{n+1}(x) + \cdots + C_p^{n+1} P_1(x) + C_p^{n+2} P_0(x) = pC_x^{n+1},$$

чем свойство 3° доказано.

Докажем равенство 4°. Рассмотрим сперва случай $n = 0$. Тогда $x \in [0, p-2]$ и, следовательно, $x+1$ не делится на p. Так как, по определению, $P_0(x) = 1$, то

$$-\sum_{m=1}^{p-1} \frac{e^{2\pi i \frac{m}{p}}}{(e^{2\pi i \frac{m}{p}} - 1)^n} e^{2\pi i \frac{mx}{p}} = 1 - \sum_{m=0}^{p-1} e^{2\pi i \frac{(x+1)m}{p}} = 1,$$

чем равенство 4° доказано для $n = 0$. Применим индукцию. Пусть $x \in [1, p+n-1]$, $z \in [0, p+n-2]$ и равенство 4° доказано для некоторого $n \geqslant 0$:

$$P_n(z) = -\sum_{m=1}^{p-1} \frac{e^{2\pi i \frac{m}{p}}}{(e^{2\pi i \frac{m}{p}} - 1)^n} e^{2\pi i \frac{mz}{p}}.$$

Отсюда, пользуясь первым из равенств 2°, получим

$$\sum_{z=0}^{x-1} P_n(z) = -\sum_{m=1}^{p-1} \frac{e^{2\pi i \frac{m}{p}}}{(e^{2\pi i \frac{m}{p}} - 1)^n} \sum_{z=0}^{x-1} e^{2\pi i \frac{mz}{p}},$$

$$P_{n+1}(x) - P_{n+1} = -\sum_{m=1}^{p-1} \frac{e^{2\pi i \frac{m}{p}}}{(e^{2\pi i \frac{m}{p}} - 1)^n} \frac{e^{2\pi i \frac{mx}{p}} - 1}{e^{2\pi i \frac{m}{p}} - 1}. \qquad (4)$$

Равенство (4) выполняется, очевидно, и при $x = 0$. Следовательно, согласно второму из равенств 2°,

$$\sum_{x=0}^{p-1} [P_{n+1}(x) - P_{n+1}] = -\sum_{m=1}^{p-1} \frac{e^{2\pi i \frac{m}{p}}}{(e^{2\pi i \frac{m}{p}} - 1)^{n+1}} \sum_{x=0}^{p-1} (e^{2\pi i \frac{mx}{p}} - 1),$$

$$P_{n+1} = -\sum_{m=1}^{p-1} \frac{e^{2\pi i \frac{m}{p}}}{(e^{2\pi i \frac{m}{p}} - 1)^{n+1}}. \qquad (5)$$

Подставляя этот результат в (4) при $x \in [0, p+n-1]$ получим

$$P_{n+1}(x) = -\sum_{m=1}^{p-1} \frac{e^{2\pi i \frac{m}{p}}}{(e^{2\pi i \frac{m}{p}} - 1)^{n+1}} e^{2\pi i \frac{mx}{p}},$$

чем свойство 4° доказано при любом $n \geqslant 0$.

В последние годы жизни Николай Михайлович Коробов: разрабатывал новые направления исследований по развитию теоретико-числового метода – ***специальные полиномы и комбинированные сетки***

In his last years Nikolay Mikhailovich Korobov worked up the new research directions for development of number-theoretic method – ***special polynomials and combined frames***

80 Н.М. КОРОБОВ

Рассмотрим теперь связи между специальными полиномами и полиномами Бернулли. Напомним, что числа и полиномы Бернулли определяются равенствами

$$B_0 = 1, \quad C_{n+1}^1 B_n + \dots + C_{n+1}^n B_1 + C_{n+1}^{n+1} B_0 = 0 \quad (n \geqslant 1),$$
$$B_0(x) = 1, \quad B_n(x) = C_n^0 B_0 x^n + \dots + C_n^{n-1} B_{n-1} x + B_n \quad (n \geqslant 1).$$

В частности

$$B_1 = -\frac{1}{2}, \quad B_2 = \frac{1}{6}, \quad B_3 = 0,$$
$$B_1(x) = x - \frac{1}{2}, \quad B_2(x) = x^2 - x + \frac{1}{6},$$
$$B_3(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x.$$

Приведем некоторые известные свойства полиномов Бернулли:

$$B_n(1) - B_n(0) = \begin{cases} 0, & \text{если } n \neq 1; \\ 1, & \text{если } n = 1 \end{cases} \quad (n \geqslant 0),$$
$$B_n'(x) = nB_{n-1}(x), \quad \int_0^1 B_n(x)dx = 0 \quad (n \geqslant 1).$$

Для специальных полиномов аналогом этих свойств являются свойства (3), 1° и 2°:

$$\frac{1}{p}[P_n(p) - P_n(0)] = \begin{cases} 0, & \text{если } n \neq 1; \\ 1, & \text{если } n = 1 \end{cases} \quad (n \geqslant 0),$$
$$\Delta P_n(x) = P_{n-1}(x), \quad \sum_{z=0}^{p-1} P_n(z) = 0 \quad (n \geqslant 1).$$

Общая основа этих аналогий состоит в замене непрерывных объектов на дискретные: производных на конечные разности, интегралов на конечные суммы, рядов Фурье на конечные преобразования Фурье.

Приведем еще некоторые тождества непосредственно следующие из вида полиномов $P_\nu(x)$ и $B_\nu(x)$ $(\nu = 1, 2, 3)$:

$$P_1(x) = pB_1\left(\frac{x}{p}\right) + \frac{1}{2}, \quad P_2(x) = \frac{p^2}{2}B_2\left(\frac{x}{p}\right) - \frac{1}{12},$$
$$P_3(x) = \frac{p^3}{6}B_3\left(\frac{x}{p}\right) - \frac{p^2}{4}B_2\left(\frac{x}{p}\right) + \frac{1}{24}.$$

В последние годы жизни Николай Михайлович Коробов: разрабатывал новые направления исследований по развитию теоретико-числового метода – ***специальные***

полино

Niko

worked up the new research directions for development of number-theoretic method – ***special polynomials and combined frames***

Теорема 1. *При $n \geqslant 1$ справедливо равенство*

$$n!P_{n+1}(x) = A_1(n)\frac{p^{n+1}B_{n+1}\left(\frac{x}{p}\right) - B_{n+1}}{n+1} - \cdots \pm A_n(n)\frac{p^2 B_2\left(\frac{x}{p}\right) - B_2}{2},$$

где $A_\nu(n)$ — числа Стирлинга, а B_ν и $B_\nu(x)$ соответственно числа и полиномы Бернулли.

Эти равенства представляют собой частные случаи общей теоремы, связывающей специальные полиномы с полиномами Бернулли.

Пусть при $\nu = 1, 2, \ldots, n$ величины $A_\nu(n)$ определены тождеством

$$x(x-1)\cdots(x-n+1) = A_1(n)x^n - A_2(n)x^{n-1} + \cdots \pm A_n(n)x. \quad (6)$$

Заметим, что числа $A_\nu(n)$ (числа Стирлинга) удовлетворяют соотношениям

$$A_\nu(n+1) = nA_{\nu-1}(n) + A_\nu(n),$$
$$A_0(n) = A_{n+1}(n) = 0, \quad A_1(n) = 1,$$

упрощающим вычисление коэффициентов разложения (6).

Теорема 1. *При $n \geqslant 1$ справедливо равенство*

Так как при x кратном p, и m не делящемся на p

$$\sum_{z=0}^{x-1} e^{-2\pi i \frac{mz}{p}} = 0,$$

то из (7) следует,что

$$\sum_{z=0}^{x-1} C_z^n e^{-2\pi i \frac{mz}{p}} = -\sum_{z=0}^{x-1} C_z^{n-1} \frac{e^{-2\pi i \frac{mz}{p}} - e^{2\pi i \frac{m}{p}}}{1 - e^{2\pi i \frac{m}{p}}}$$
$$= -\frac{e^{2\pi i \frac{m}{p}}}{e^{2\pi i \frac{m}{p}} - 1} C_x^n + \frac{1}{e^{2\pi i \frac{m}{p}} - 1} \sum_{z=0}^{x-1} C_z^{n-1} e^{-2\pi i \frac{mz}{p}}.$$

В последние годы жизни
Николай Михайлович Коробов:
разрабатывал новые
направления исследований по
развитию теоретико-числового
метода – ***специальные
полиномы и комбинированные
сетки***

In his last years
Nikolay Mikhailovich Korobov
worked up the new research
directions for development of
number-theoretic method – ***special
polynomials and combined
frames***

Отсюда, очевидно, следует утверждение леммы 1.

Перейдем теперь к доказательству теоремы. При целом z обозначим через $\delta_p(z)$ характеристическую функцию делимости на p:

$$\delta_p(z) = \frac{1}{p}\sum_{m=0}^{p-1} e^{2\pi i \frac{mz}{p}} = \begin{cases} 1, & \text{если } z \text{ кратно } p; \\ 0, & \text{если } z \text{ не кратно } p. \end{cases} \tag{8}$$

Покажем, что при любых натуральных $p \geqslant 2$, n и x выполняется равенство

$$p\sum_{z=0}^{x-1} C_{pz}^n = P_{n+1}(px) - P_{n+1}. \tag{9}$$

Действительно, согласно (8)

$$p\sum_{z=0}^{x-1} C_{pz}^n = p\sum_{z=0}^{px-1} C_z^n \delta_p(z) = \sum_{m=0}^{p-1}\sum_{z=0}^{px-1} C_z^n e^{2\pi i \frac{mz}{p}}$$
$$= C_{px}^{n+1} + \sum_{m=1}^{p-1}\sum_{z=0}^{px-1} C_z^n e^{-2\pi i \frac{mz}{p}}.$$

Отсюда, пользуясь леммой 1 и равенством (5), получим

$$p\sum_{z=o}^{x-1} C_{pz}^n = C_{px}^{n+1} - \sum_{m=1}^{p-1}\left(\frac{e^{2\pi i \frac{m}{p}}}{e^{2\pi i \frac{m}{p}} - 1} C_{px}^n + \cdots + \frac{e^{2\pi i \frac{m}{p}}}{(e^{2\pi i \frac{m}{p}} - 1)^n} C_{px}^1\right)$$
$$= C_{px}^{n+1} + P_1 C_{px}^n + \cdots + P_n C_{px}^1.$$

Но, согласно (1),

$$C_{px}^{n+1} + P_1 C_{px}^n + \cdots + P_n C_{px}^1 = P_{n+1}(px) - P_{n+1}$$

и, следовательно,

$$p\sum_{z=0}^{x-1} C_{pz}^n = P_{n+1}(px) - P_{n+1}.$$

Покажем теперь, что при любых натуральных n и x справедливо равенство

$$n!(P_{n+1}(px) - P_{n+1}) = A_1(n)p^{n+1}\frac{B_{n+1}(x) - B_{n+1}}{n+1} - \cdots$$
$$\pm A_n(n)p^2\frac{B_2(x) - B_2}{2}. \tag{10}$$

В последние годы жизни
Николай Михайлович Коробов:
разрабатывал новые
направления исследований по
развитию теоретико-числового
метода – ***специальные
полиномы и комбинированные
сетки***

In his last years
Nikolay Mikhailovich Korobov
worked up the new research
directions for development of
number-theoretic method – ***special
polynomials and combined
frames***

Действительно, согласно (9) и (6), получим

$$n!\big(P_{n+1}(px) - P_{n+1}\big) = p\sum_{z=0}^{x-1} pz(pz-1)\cdots(pz-n+1)$$
$$= A_1(n)p^{n+1}\sum_{z=0}^{x-1} z^n - \cdots \pm A_n(n)p^2\sum_{z=0}^{x-1} z.$$

Отсюда, так как

$$\sum_{z=0}^{x-1} z^\nu = \frac{B_{\nu+1}(x) - B_{\nu+1}}{\nu+1},$$

следует равенство (10).

Равенство полиномов (10), доказанное для натуральных x, будет, очевидно, справедливо и при произвольных значениях x. Заменим в (10) x на $\frac{x}{p}$:

$$n!\big(P_{n+1}(x) - P_{n+1}\big) = A_1(n)p^{n+1}\frac{B_{n+1}\left(\frac{x}{p}\right) - B_{n+1}}{n+1} - \cdots$$
$$\pm A_n(n)p^2\frac{B_2\left(\frac{x}{p}\right) - B_2}{2}. \qquad (11)$$

Проводя суммирование по x и пользуясь вторым из равенств 2°, получим

$$-n!pP_{n+1} = \sum_{x=0}^{p-1}\left(A_1(n)p^{n+1}\frac{B_{n+1}\left(\frac{x}{p}\right) - B_{n+1}}{n+1} - \cdots \pm A_n(n)p^2\frac{B_2\left(\frac{x}{p}\right) - B_2}{2}\right).$$

Отсюда, так как

$$B_\nu = p^{\nu-1}\sum_{x=0}^{p-1} B_\nu\left(\frac{x}{p}\right),$$

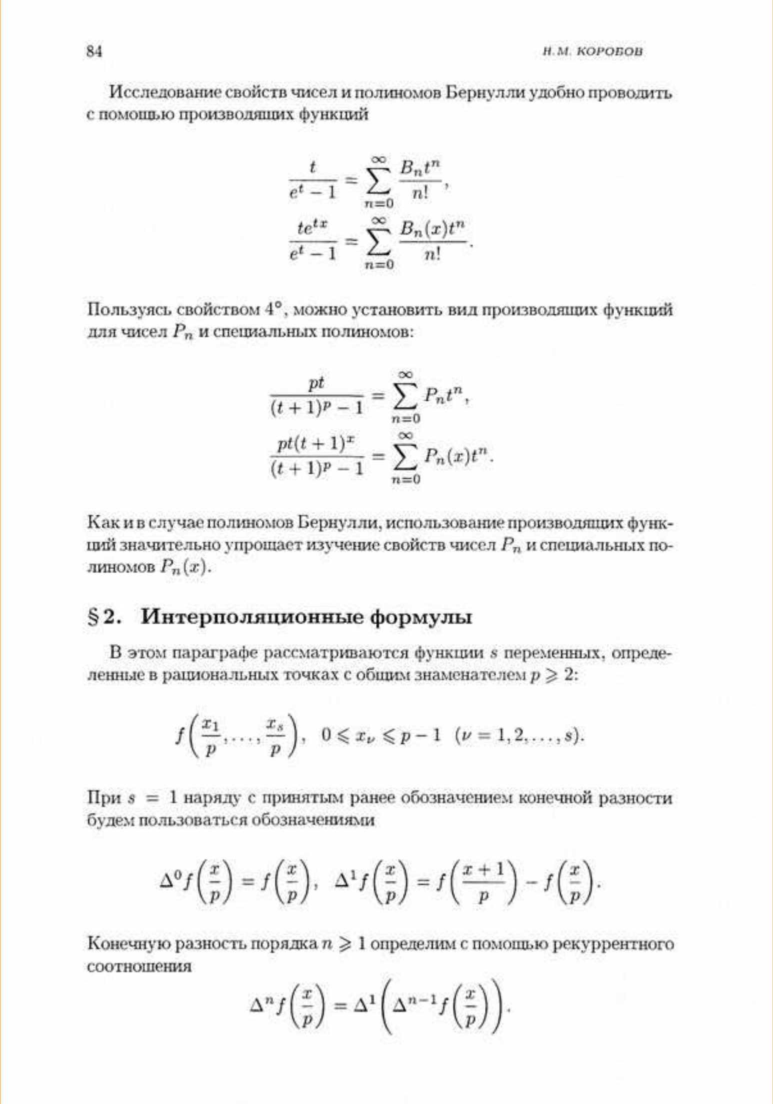
следует, что

$$n!P_{n+1} = A_1(n)\frac{p^{n+1}-1}{n+1}B_{n+1} - \cdots \pm A_n(n)\frac{p^2-1}{2}B_2.$$

Подставляя этот результат в равенство (11), получаем утверждение теоремы 1. э

В последние годы жизни
Николай Михайлович Коробов:
разрабатывал новые
направления исследований по
развитию теоретико-числового
метода – ***специальные полиномы и комбинированные сетки***

In his last years
Nikolay Mikhailovich Korobov
worked up the new research
directions for development of
number-theoretic method – ***special polynomials and combined frames***



Исследование свойств чисел и полиномов Бернулли удобно проводить с помощью производящих функций

$$\frac{t}{e^t-1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n t^n}{n!},$$
$$\frac{te^{tx}}{e^t-1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n(x)t^n}{n!}.$$

Пользуясь свойством 4°, можно установить вид производящих функций для чисел P_n и специальных полиномов:

$$\frac{pt}{(t+1)^p-1}=\sum_{n=0}^{\infty}P_n t^n,$$
$$\frac{pt(t+1)^x}{(t+1)^p-1}=\sum_{n=0}^{\infty}P_n(x)t^n.$$

Как и в случае полиномов Бернулли, использование производящих функций значительно упрощает изучение свойств чисел P_n и специальных полиномов $P_n(x)$.

§ 2. Интерполяционные формулы

В этом параграфе рассматриваются функции s переменных, определенные в рациональных точках с общим знаменателем $p \geqslant 2$:

$$f\left(\frac{x_1}{p},\dots,\frac{x_s}{p}\right),\quad 0\leqslant x_\nu\leqslant p-1\quad (\nu=1,2,\dots,s).$$

При $s=1$ наряду с принятым ранее обозначением конечной разности будем пользоваться обозначениями

$$\Delta^0 f\left(\frac{x}{p}\right)=f\left(\frac{x}{p}\right),\quad \Delta^1 f\left(\frac{x}{p}\right)=f\left(\frac{x+1}{p}\right)-f\left(\frac{x}{p}\right).$$

Конечную разность порядка $n\geqslant 1$ определим с помощью рекуррентного соотношения

$$\Delta^n f\left(\frac{x}{p}\right)=\Delta^1\left(\Delta^{n-1} f\left(\frac{x}{p}\right)\right).$$

В последние годы жизни Николай Михайлович Коробов: разрабатывал новые направления исследований по развитию теоретико-числового метода – ***специальные полиномы и комбинированные сетки***

In his last years Nikolay Mikhailovich Korobov worked up the new research directions for development of number-theoretic method – ***special polynomials and combined frames***

В случае функции двух переменных будем применять следующие обозначения

$$\Delta^{1,0} f\left(\frac{x_1}{p}, \frac{x_2}{p}\right) = f\left(\frac{x_1+1}{p}, \frac{x_2}{p}\right) - f\left(\frac{x_1}{p}, \frac{x_2}{p}\right),$$

$$\Delta^{0,1} f\left(\frac{x_1}{p}, \frac{x_2}{p}\right) = f\left(\frac{x_1}{p}, \frac{x_2+1}{p}\right) - f\left(\frac{x_1}{p}, \frac{x_2}{p}\right),$$

$$\Delta^{n_1,n_2} f\left(\frac{x_1}{p}, \frac{x_2}{p}\right) = \begin{cases} \Delta^{1,0}\left(\Delta^{n_1-1,n_2} f\left(\frac{x_1}{p}, \frac{x_2}{p}\right)\right); \\ \Delta^{0,1}\left(\Delta^{n_1,n_2-1} f\left(\frac{x_1}{p}, \frac{x_2}{p}\right)\right). \end{cases}$$

Аналогично определяются конечные разности для функций многих переменных.

Лемма 2. *Пусть функция $f\left(\frac{x}{p}\right)$ определена для целых x и имеет период равный p. Тогда для любого натурального n выполняется равенство*

$$f\left(\frac{x}{p}\right) = \frac{1}{p}\sum_{k=0}^{p-1} f\left(\frac{k}{p}\right) + \frac{(-1)^{n-1}}{p}\sum_{k=0}^{p-1} \Delta^n f\left(\frac{k+x+1-n}{p}\right) P_n(k).$$

Доказательство. Пользуясь преобразованием Абеля

$$\sum_{k=0}^{p-1} F(k)\varphi(k) = F(p)\sum_{k=0}^{p-1}\varphi(k) - \sum_{k=0}^{p-1}\left(F(k+1) - F(k)\right)\sum_{z=0}^{k}\varphi(z)$$

при $F(k) = f\left(\frac{k+x}{p}\right)$ и $\varphi(k) = 1$, получим

$$\sum_{k=0}^{p-1} f\left(\frac{k+x}{p}\right) = pf\left(\frac{x}{p}\right) - \sum_{k=0}^{p-1}\Delta^1 f\left(\frac{k+x}{p}\right)(k+1). \qquad (12)$$

В силу периодичности функции $f\left(\frac{x}{p}\right)$ справедливы равенства

$$\sum_{k=0}^{p-1} f\left(\frac{k+x}{p}\right) = \sum_{k=0}^{p-1} f\left(\frac{k}{p}\right), \quad \sum_{k=0}^{p-1}\Delta^1 f\left(\frac{k+x}{p}\right) = 0.$$

Пользуясь этими равенствами, получим из (12)

$$f\left(\frac{x}{p}\right) = \frac{1}{p}\sum_{k=0}^{p-1} f\left(\frac{k}{p}\right) + \frac{1}{p}\sum_{k=0}^{p-1}\Delta^1 f\left(\frac{k+x}{p}\right)\left(k - \frac{p-1}{2}\right),$$

В последние годы жизни Николай Михайлович Коробов: разрабатывал новые направления исследований по развитию теоретико-числового метода – ***специальные полиномы и комбинированные сетки***

In his last years Nikolay Mikhailovich Korobov worked up the new research directions for development of number-theoretic method – ***special polynomials and combined frames***

что совпадает с утверждением леммы при $n = 1$:

$$f\left(\frac{x}{p}\right) = \frac{1}{p}\sum_{k=0}^{p-1} f\left(\frac{k}{p}\right) + \frac{1}{p}\sum_{k=0}^{p-1} \Delta^1 f\left(\frac{k+x}{p}\right) P_1(k).$$

Применим индукцию. Пусть лемма верна при некотором $n \geqslant 1$:

$$f\left(\frac{x}{p}\right) = \frac{1}{p}\sum_{k=0}^{p-1} f\left(\frac{k}{p}\right) + \frac{(-1)^{n-1}}{p}\sum_{k=0}^{p-1} \Delta^n f\left(\frac{k+x+1-n}{p}\right) P_n(k). \quad (13)$$

Применяя преобразование Абеля и пользуясь свойствами 2°, получим

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{p-1} \Delta^n f\left(\frac{k+x+1-n}{p}\right) P_n(k) \\
&= \Delta^n f\left(\frac{x+1-n}{p}\right) \sum_{k=0}^{p-1} P_n(k) \\
&\quad - \sum_{k=0}^{p-1} \Delta^{n+1} f\left(\frac{k+x+1-n}{p}\right) \sum_{z=0}^{k} P_n(z) \\
&= -\sum_{k=0}^{p-1} \Delta^{n+1} f\left(\frac{k+x+1-n}{p}\right) \left(P_{n+1}(k+1) - P_{n+1}\right) \\
&= -\sum_{k=0}^{p-1} \Delta^{n+1} f\left(\frac{k+x-n}{p}\right) P_{n+1}(k).
\end{aligned}$$

э Подставляя этот результат в равенство (13), получим

$$f\left(\frac{x}{p}\right) = \frac{1}{p}\sum_{k=0}^{p-1} f\left(\frac{k}{p}\right) + \frac{(-1)^{n}}{p}\sum_{k=0}^{p-1} \Delta^{n+1} f\left(\frac{k+x-n}{p}\right) P_{n+1}(k),$$

чем лемма 2 доказана для любого $n \geqslant 1$.

Определим функции $\varphi_n(x)$ с помощью равенств

$$\varphi_n(x) = (-1)^{n-1} P_n\left(p\left\{\frac{x+n-1}{p}\right\}\right) \quad (n = 1, 2, \ldots), \qquad (14)$$

где $\left\{\frac{x+n-1}{p}\right\}$ — дробная доля числа $\frac{x+n-1}{p}$.

В последние годы жизни
Николай Михайлович Коробов:
разрабатывал новые
направления исследований по
развитию теоретико-числового
метода – ***специальные
полиномы и комбинированные
сетки***

In his last years
Nikolay Mikhailovich Korobov
worked up the new research
directions for development of
number-theoretic method – ***special
polynomials and combined
frames***

СПЕЦИАЛЬНЫЕ ПОЛИНОМЫ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ 87

Лемма 3. *Пусть функция* $f\left(\frac{x_1}{p},\ldots,\frac{x_s}{p}\right)$ *периодична с периодом* p *по каждой из переменных* $x_1,\ldots,x_s$. *Тогда при любом* $n \geqslant 1$ *справедливо равенство*

$$f\left(\frac{x_1}{p},\ldots,\frac{x_s}{p}\right) = \frac{1}{p^s} \sum_{\tau_1,\ldots,\tau_s=0}^{1} \sum_{k_1,\ldots,k_s=0}^{p-1} \Delta^{n\tau_1,\ldots,n\tau_s} f\left(\frac{k_1}{p},\ldots,\frac{k_s}{p}\right) \times \prod_{\nu=1}^{s} \varphi_n^{\tau_\nu}(k_\nu - x_\nu). \quad (15)$$

Доказательство. Покажем, что утверждение леммы 2 можно записать в виде

$$f\left(\frac{x}{p}\right) = \frac{1}{p}\sum_{\tau=0}^{1}\sum_{k=0}^{p-1} \Delta^{n\tau} f\left(\frac{k}{p}\right)\varphi_n^{\tau}(k-x). \quad (16)$$

Действительно, согласно (14)

$$\Delta^{n\tau} f\left(\frac{k}{p}\right)\varphi_n^{\tau}(k-x) = \begin{cases} f\left(\frac{k}{p}\right), & \text{если } \tau = 0; \\ (-1)^{n-1}\Delta^n f\left(\frac{k}{p}\right) P_n\left(p\left\{\frac{k-x+n-1}{p}\right\}\right), & \text{если } \tau = 1. \end{cases}$$

Следовательно,

$$\frac{1}{p}\sum_{\tau=0}^{1}\sum_{k=0}^{p-1} \Delta^{n\tau} f\left(\frac{k}{p}\right)\varphi_n^{\tau}(k-x) = \frac{1}{p}\sum_{k=0}^{p-1} f\left(\frac{k}{p}\right) + \frac{(-1)^{n-1}}{p}\sum_{k=0}^{p-1}\Delta^n f\left(\frac{k}{p}\right) P_n\left(p\left\{\frac{k-x+n-1}{p}\right\}\right). \quad (17)$$

Теперь, пользуясь леммой 2 и замечая, что

$$\sum_{k=0}^{p-1}\Delta^n f\left(\frac{k}{p}\right) P_n\left(p\left\{\frac{k-x+n-1}{p}\right\}\right) = \sum_{k=0}^{p-1}\Delta^n f\left(\frac{k+x+1-n}{p}\right) P_n(k),$$

В последние годы жизни Николай Михайлович Коробов: разрабатывал новые направления исследований по развит...

ме...

полино...

из (17) получаем равенство (16):

$$\frac{1}{p}\sum_{\tau=0}^{1}\sum_{k=0}^{p-1}\Delta^{n\tau} f\left(\frac{k}{p}\right)\varphi_n^{\tau}(k-x)$$

$$= \frac{1}{p}\sum_{k=0}^{p-1} f\left(\frac{k}{p}\right) + \frac{(-1)^{n-1}}{p}\sum_{k=0}^{p-1}\Delta^n f\left(\frac{k+x+1-n}{p}\right)P_n(k)$$

$$= f\left(\frac{x}{p}\right).$$

Теорема 2. *Пусть $\alpha \geqslant 2$ — четное, $n = \alpha/2$, $f(y_1,\ldots,y_s)$ — периодическая функция из класса H_s^α и индекс оптимальных коэффициентов $a_1,\ldots,a_s$ равен s. Тогда справедлива интерполяционная формула*

$$f\left(\frac{x_1}{p},\ldots,\frac{x_s}{p}\right) = \frac{1}{p}\sum_{\tau_1,\ldots,\tau_s=0}^{1}\sum_{k=1}^{p}\Delta^{n\tau_1,\ldots,n\tau_s} f\left(\frac{a_1k}{p},\ldots,\frac{a_sk}{p}\right) \times \prod_{\nu=1}^{s}\varphi_n^{\tau_\nu}(a_\nu k - x_\nu) + O(p^{-n}\ln^{sn} p). \quad (19)$$

Доказательство. Согласно теореме 28 из [2] для периодических функций $f \in H_s^\alpha$ при четном $\alpha \geqslant 4$ и $n = \alpha/2$ справедлива интерполяционная формула

$$f\left(\frac{x_1}{p},\ldots,\frac{x_s}{p}\right) = \frac{1}{p}\sum_{\tau_1,\ldots,\tau_s=0}^{1}\sum_{k=1}^{p} f^{n\tau_1,\ldots,n\tau_s}\left(\frac{a_1k}{p},\ldots,\frac{a_sk}{p}\right) \times \prod_{\nu=1}^{s}\psi_n^{\tau_\nu}\left(\frac{a_\nu k - x_\nu}{p}\right) + O(p^{-n}\ln^{sn} p). \quad (20)$$

Niko...

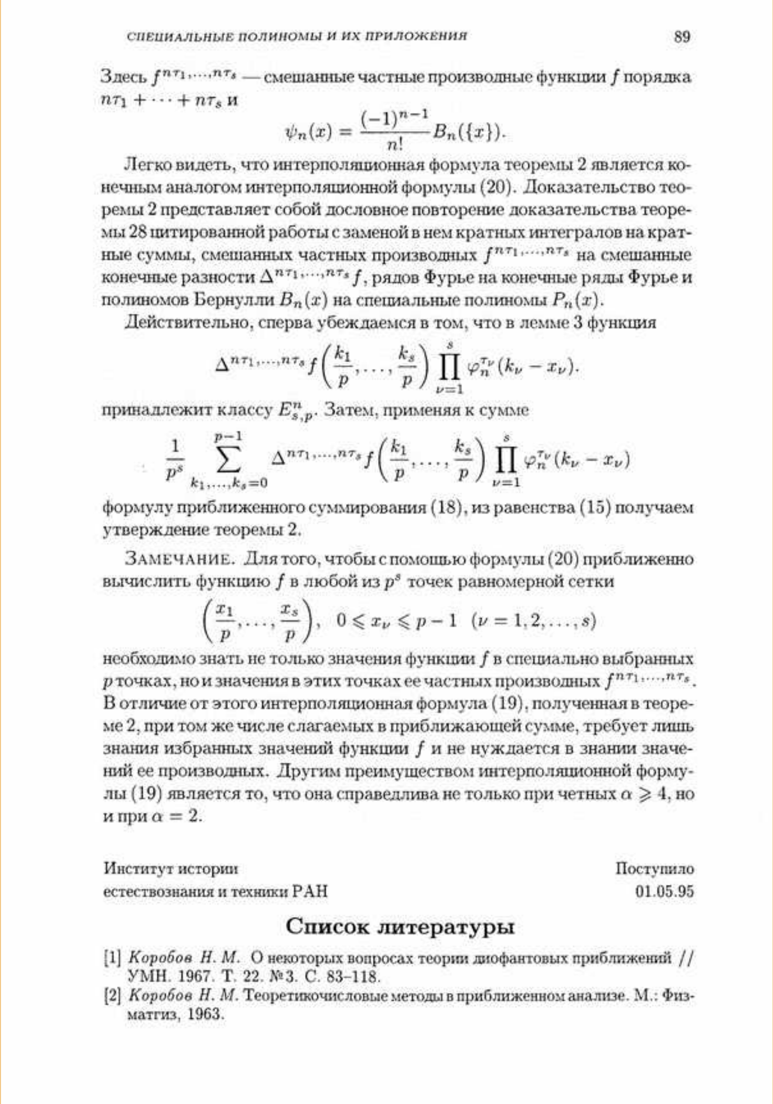
work...

direc...

number-theoretic method – ***special polynomials and combined frames***

В последние годы жизни
Николай Михайлович Коробов:
разрабатывал новые
направления исследований по
развитию теоретико-числового
метода – ***специальные
полиномы и комбинированные
сетки***

In his last years
Nikolay Mikhailovich Korobov
worked up the new research
directions for development of
number-theoretic method – ***special
polynomials and combined
frames***



Здесь $f^{n\tau_1,\dots,n\tau_s}$ — смешанные частные производные функции f порядка $n\tau_1+\dots+n\tau_s$ и

$$\psi_n(x)=\frac{(-1)^{n-1}}{n!}B_n(\{x\}).$$

Легко видеть, что интерполяционная формула теоремы 2 является конечным аналогом интерполяционной формулы (20). Доказательство теоремы 2 представляет собой дословное повторение доказательства теоремы 28 цитированной работы с заменой в нем кратных интегралов на кратные суммы, смешанных частных производных $f^{n\tau_1,\dots,n\tau_s}$ на смешанные конечные разности $\Delta^{n\tau_1,\dots,n\tau_s}f$, рядов Фурье на конечные ряды Фурье и полиномов Бернулли $B_n(x)$ на специальные полиномы $P_n(x)$.

Действительно, сперва убеждаемся в том, что в лемме 3 функция

$$\Delta^{n\tau_1,\dots,n\tau_s}f\left(\frac{k_1}{p},\dots,\frac{k_s}{p}\right)\prod_{\nu=1}^{s}\varphi_n^{\tau_\nu}(k_\nu-x_\nu).$$

принадлежит классу $E^n_{s,p}$. Затем, применяя к сумме

$$\frac{1}{p^s}\sum_{k_1,\dots,k_s=0}^{p-1}\Delta^{n\tau_1,\dots,n\tau_s}f\left(\frac{k_1}{p},\dots,\frac{k_s}{p}\right)\prod_{\nu=1}^{s}\varphi_n^{\tau_\nu}(k_\nu-x_\nu)$$

формулу приближенного суммирования (18), из равенства (15) получаем утверждение теоремы 2.

Замечание. Для того, чтобы с помощью формулы (20) приближенно вычислить функцию f в любой из p^s точек равномерной сетки

$$\left(\frac{x_1}{p},\dots,\frac{x_s}{p}\right),\quad 0\leqslant x_\nu\leqslant p-1\quad(\nu=1,2,\dots,s)$$

необходимо знать не только значения функции f в специально выбранных p точках, но и значения в этих точках ее частных производных $f^{n\tau_1,\dots,n\tau_s}$. В отличие от этого интерполяционная формула (19), полученная в теореме 2, при том же числе слагаемых в приближающей сумме, требует лишь знания избранных значений функции f и не нуждается в знании значений ее производных. Другим преимуществом интерполяционной формулы (19) является то, что она справедлива не только при четных $\alpha\geqslant 4$, но и при $\alpha=2$.

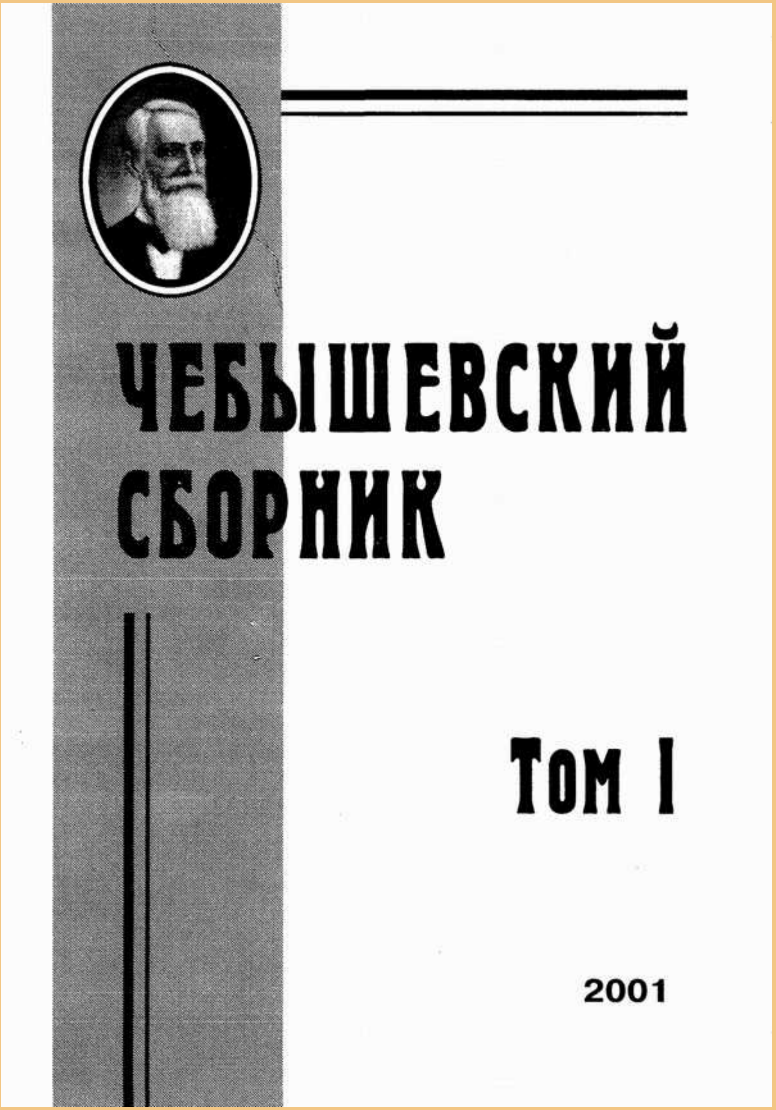
Институт истории
естествознания и техники РАН
Поступило
01.05.95

Список литературы

[1] *Коробов Н. М.* О некоторых вопросах теории диофантовых приближений // УМН. 1967. Т. 22. №3. С. 83–118.
[2] *Коробов Н. М.* Теоретикочисловые методы в приближенном анализе. М.: Физматгиз, 1963.

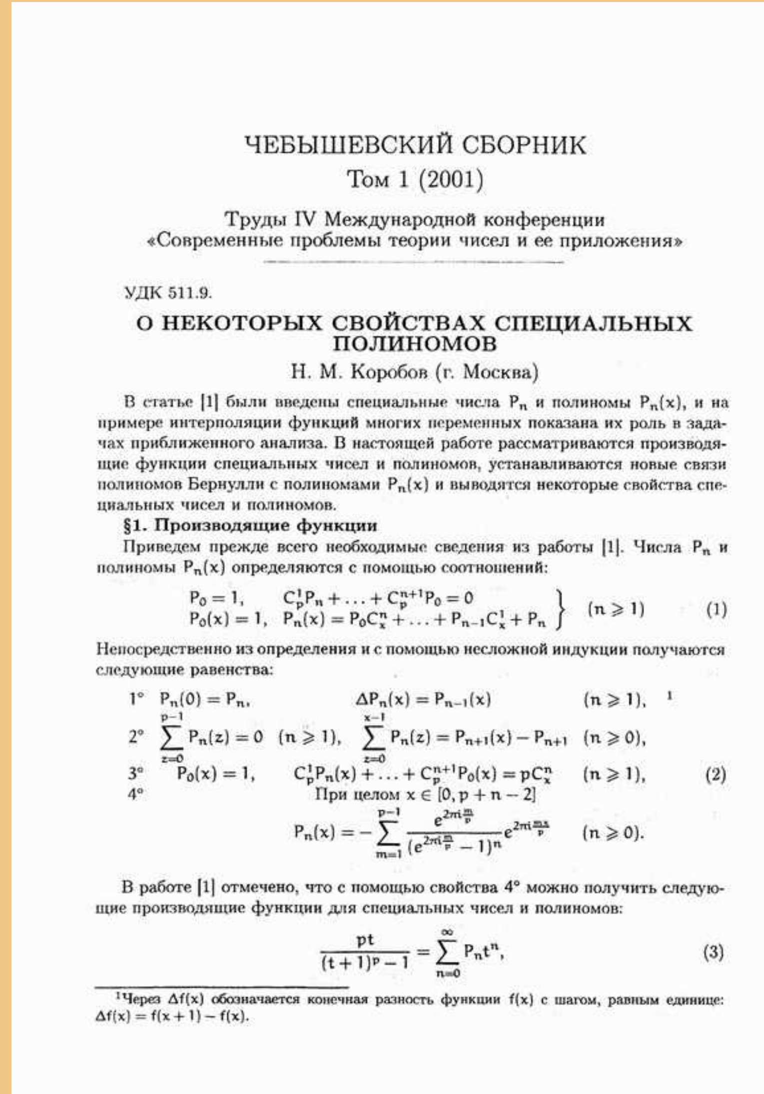
В последние годы жизни
Николай Михайлович Коробов:
разрабатывал новые направления исследований по развитию теоретико-числового метода – ***специальные полиномы и комбинированные сетки***

In his last years
Nikolay Mikhailovich Korobov
worked up the new research directions for development of number-theoretic method – ***special polynomials and combined frames***



В последние годы жизни Николай Михайлович Коробов: разрабатывал новые направления исследований по развитию теоретико-числового метода – ***специальные полиномы и комбинированные сетки***

In his last years Nikolay Mikhailovich Korobov worked up the new research directions for development of number-theoretic method – ***special polynomials and combined frames***



ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 1 (2001)

Труды IV Международной конференции «Современные проблемы теории чисел и ее приложения»

УДК 511.9.

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ СПЕЦИАЛЬНЫХ ПОЛИНОМОВ

Н. М. Коробов (г. Москва)

В статье [1] были введены специальные числа P_n и полиномы $P_n(x)$, и на примере интерполяции функций многих переменных показана их роль в задачах приближенного анализа. В настоящей работе рассматриваются производящие функции специальных чисел и полиномов, устанавливаются новые связи полиномов Бернулли с полиномами $P_n(x)$ и выводятся некоторые свойства специальных чисел и полиномов.

§1. Производящие функции

Приведем прежде всего необходимые сведения из работы [1]. Числа P_n и полиномы $P_n(x)$ определяются с помощью соотношений:

$$\left.\begin{array}{ll} P_0 = 1, & C_p^1 P_n + \ldots + C_p^{n+1} P_0 = 0 \\ P_0(x) = 1, & P_n(x) = P_0 C_x^n + \ldots + P_{n-1} C_x^1 + P_n \end{array}\right\} \quad (n \geqslant 1) \qquad (1)$$

Непосредственно из определения и с помощью несложной индукции получаются следующие равенства:

$$\begin{array}{llll} 1^\circ & P_n(0) = P_n, & \Delta P_n(x) = P_{n-1}(x) & (n \geqslant 1),^{1} \\ 2^\circ & \sum_{z=0}^{p-1} P_n(z) = 0 \quad (n \geqslant 1), & \sum_{z=0}^{x-1} P_n(z) = P_{n+1}(x) - P_{n+1} & (n \geqslant 0), \\ 3^\circ & P_0(x) = 1, & C_p^1 P_n(x) + \ldots + C_p^{n+1} P_0(x) = p C_x^n & (n \geqslant 1), \qquad (2) \\ 4^\circ & & \text{При целом } x \in [0, p+n-2] & \end{array}$$

$$P_n(x) = -\sum_{m=1}^{p-1} \frac{e^{2\pi i \frac{m}{p}}}{(e^{2\pi i \frac{m}{p}} - 1)^n} e^{2\pi i \frac{mx}{p}} \qquad (n \geqslant 0).$$

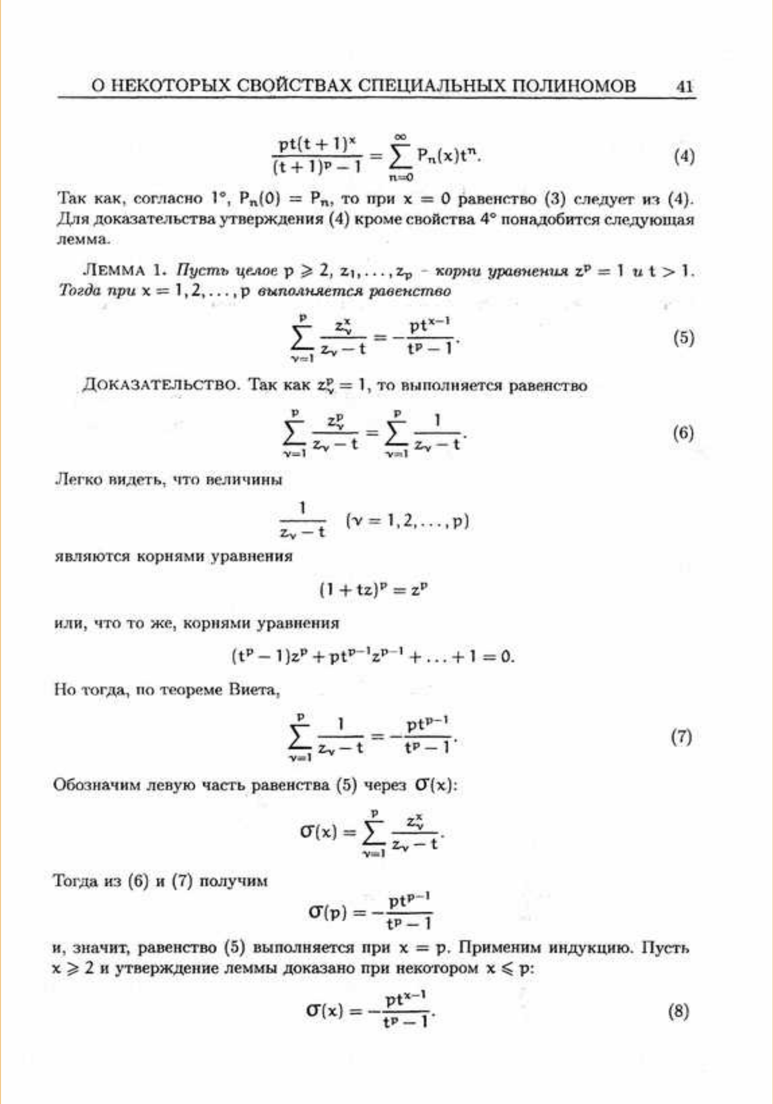
В работе [1] отмечено, что с помощью свойства 4° можно получить следующие производящие функции для специальных чисел и полиномов:

$$\frac{pt}{(t+1)^p - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n t^n, \qquad (3)$$

[1]Через $\Delta f(x)$ обозначается конечная разность функции $f(x)$ с шагом, равным единице: $\Delta f(x) = f(x+1) - f(x)$.

В последние годы жизни Николай Михайлович Коробов: разрабатывал новые направления исследований по развитию теоретико-числового метода – ***специальные полиномы и комбинированные сетки***

In his last years Nikolay Mikhailovich Korobov worked up the new research directions for development of number-theoretic method – ***special polynomials and combined frames***



$$\frac{pt(t+1)^x}{(t+1)^p - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n. \qquad (4)$$

Так как, согласно 1°, $P_n(0) = P_n$, то при $x = 0$ равенство (3) следует из (4). Для доказательства утверждения (4) кроме свойства 4° понадобится следующая лемма.

Лемма 1. *Пусть целое* $p \geqslant 2$, $z_1, \ldots, z_p$ *– корни уравнения* $z^p = 1$ *и* $t > 1$. *Тогда при* $x = 1, 2, \ldots, p$ *выполняется равенство*

$$\sum_{\nu=1}^{p} \frac{z_\nu^x}{z_\nu - t} = -\frac{pt^{x-1}}{t^p - 1}. \qquad (5)$$

Доказательство. Так как $z_\nu^p = 1$, то выполняется равенство

$$\sum_{\nu=1}^{p} \frac{z_\nu^p}{z_\nu - t} = \sum_{\nu=1}^{p} \frac{1}{z_\nu - t}. \qquad (6)$$

Легко видеть, что величины

$$\frac{1}{z_\nu - t} \quad (\nu = 1, 2, \ldots, p)$$

являются корнями уравнения

$$(1 + tz)^p = z^p$$

или, что то же, корнями уравнения

$$(t^p - 1)z^p + pt^{p-1}z^{p-1} + \ldots + 1 = 0.$$

Но тогда, по теореме Виета,

$$\sum_{\nu=1}^{p} \frac{1}{z_\nu - t} = -\frac{pt^{p-1}}{t^p - 1}. \qquad (7)$$

Обозначим левую часть равенства (5) через $\sigma(x)$:

$$\sigma(x) = \sum_{\nu=1}^{p} \frac{z_\nu^x}{z_\nu - t}.$$

Тогда из (6) и (7) получим

$$\sigma(p) = -\frac{pt^{p-1}}{t^p - 1}$$

и, значит, равенство (5) выполняется при $x = p$. Применим индукцию. Пусть $x \geqslant 2$ и утверждение леммы доказано при некотором $x \leqslant p$:

$$\sigma(x) = -\frac{pt^{x-1}}{t^p - 1}. \qquad (8)$$

В последние годы жизни Николай Михайлович Коробов: разрабатывал новые направления исследований по развитию теоретико-числового метода – ***специальные полиномы и комбинированные сетки***

In his last years Nikolay Mikhailovich Korobov worked up the new research directions for development of number-theoretic method – ***special polynomials and combined frames***

Так как $1 \leqslant x-1 < p$, то

$$\sigma(x) - t\sigma(x-1) = \sum_{\nu=1}^{p} \frac{z_\nu^x - tz_\nu^{x-1}}{z_\nu - t} =$$

$$= \sum_{\nu=1}^{p} z_\nu^{x-1} = \sum_{\nu=1}^{p} e^{2\pi i \frac{(x-1)\nu}{p}} = 0.$$

Теперь, пользуясь равенством (8), получим аналогичное равенство для $\sigma(x-1)$:

$$\sigma(x-1) = \frac{1}{t}\sigma(x) = -\frac{pt^{x-2}}{t^p - 1},$$

чем утверждение леммы доказано для любого целого x из интервала $1 \leqslant x \leqslant p$.

Теорема 1. *Пусть* $p \geqslant 2$ *- целое и* $0 < t < 2\sin\frac{\pi}{p}$. *Тогда при* $x = 0, 1, \ldots, p-1$ *выполняется равенство (4):*

$$\frac{pt(t+1)^x}{(t+1)^p - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) t^n.$$

Доказательство. Согласно свойству 4° при $x = 0, 1, \ldots, p-1$ выполняется равенство

$$P_n(x) = -\sum_{m=1}^{p-1} \frac{e^{2\pi i \frac{m(x+1)}{p}}}{(e^{2\pi i \frac{m}{p}} - 1)^n} \qquad (n \geqslant 1). \tag{9}$$

Так как при $m = 1, 2, \ldots, p-1$

$$\left|e^{2\pi i \frac{m}{p}} - 1\right| = 2\sin\frac{\pi m}{p} \geqslant 2\sin\frac{\pi}{p},$$

то, пользуясь равенством (9), получим

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) t^n &= 1 - \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{p-1} \frac{e^{2\pi i \frac{m(x+1)}{p}}}{(e^{2\pi i \frac{m}{p}} - 1)^n} t^n = \\ &= 1 - \sum_{m=1}^{p-1} e^{2\pi i \frac{m(x+1)}{p}} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{t}{e^{2\pi i \frac{m}{p}} - 1}\right)^n = \\ &= 1 - t\sum_{m=1}^{p-1} \frac{e^{2\pi i \frac{m(x+1)}{p}}}{e^{2\pi i \frac{m}{p}} - (t+1)} = -t\sum_{m=0}^{p-1} \frac{e^{2\pi i \frac{m(x+1)}{p}}}{e^{2\pi i \frac{m}{p}} - (t+1)}. \end{aligned} \tag{10}$$

Заменяя в лемме 1 x на $x+1$ и t на $t+1$, получим равенство

$$\sum_{m=0}^{p-1} \frac{e^{2\pi i \frac{m(x+1)}{p}}}{e^{2\pi i \frac{m}{p}} - (t+1)} = -\frac{p(t+1)^x}{(t+1)^p - 1},$$

В последние годы жизни Николай Михайлович Коробов: разрабатывал новые направления исследований по развитию теоретико-числового метода – ***специальные полиномы и комбинированные сетки***

In his last years Nikolay Mikhailovich Korobov worked up the new research directions for development of number-theoretic method – ***special polynomials and combined frames***

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ СПЕЦИАЛЬНЫХ ПОЛИНОМОВ 43

справедливое при $x = 0, 1, \dots, p-1$ и $t > 0$. Подставляя это равенство в соотношение (10), получаем утверждение теоремы 1:

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n = -t\sum_{m=0}^{p-1} \frac{e^{2\pi i\frac{m(x+1)}{p}}}{e^{2\pi i\frac{m}{p}} - (t+1)} = \frac{pt(t+1)^x}{(t+1)^p - 1}.$$

Замечание. После того, как вид производящей функции специальных полиномов установлен, доказательство равенства (4) для любого целого $x \geqslant 0$ можно получить совсем просто.

Действительно, при достаточно малом положительном t разложим функцию

$$F(x,t) = \frac{pt(t+1)^x}{(t+1)^p - 1}$$

в ряд по степеням t:

$$\frac{pt(t+1)^x}{(t+1)^p - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} Q_n(x)t^n. \qquad (11)$$

Так как

$$\frac{pt(t+1)^x}{(t+1)^p - 1} = \frac{p(1 + C_x^1 t + \dots + C_x^{x-1}t^{x-1} + t^x)}{C_p^1 + C_p^2 t + \dots + C_p^{p-1}t^{p-2} + t^{p-1}},$$

то из (11) следует, что

$$p(1 + C_x^1 t + \dots + C_x^{x-1}t^{x-1} + t^x) = \\ = \sum_{n=0}^{\infty} Q_n(x)(C_p^1 + C_p^2 t + \dots + C_p^{p-1}t^{p-2} + t^{p-1})t^n.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях t, получим

$$Q_0(x) = 1, \quad C_p^1 Q_n(x) + \dots + C_p^{n+1}Q_0(x) = pC_x^n \qquad (n \geqslant 1).$$

Эти равенства, очевидно, единственным образом определяют функции $Q_n(x)$. Согласно 3° такие же равенства выполняются для полиномов $P_n(x)$:

$$P_0(x) = 1, \quad C_p^1 P_n(x) + \dots + C_p^{n+1}P_0(x) = pC_x^n \qquad (n \geqslant 1).$$

Следовательно,

$$Q_n(x) = P_n(x) \qquad (n \geqslant 0)$$

и из (11) получаем утверждение теоремы:

$$\frac{pt(t+1)^x}{(t+1)^p - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n.$$

В последние годы жизни Николай Михайлович Коробов: разрабатывал новые направления исследований по развитию теоретико-числового метода – ***специальные полиномы и комбинированные сетки***

In his last years Nikolay Mikhailovich Korobov worked up the new research directions for development of number-theoretic method – ***special polynomials and combined frames***

§2. Свойства чисел P_n и полиномов $P_n(x)$

В этом параграфе в дополнение к свойствам $1^\circ - 4^\circ$, указанным в равенствах (2), получены новые свойства $5^\circ - 8^\circ$ и доказаны две теоремы о связях полиномов Бернулли $B_n(x)$ со специальными полиномами $P_n(x)$.

Покажем, что при $n \geqslant 1$ справедливы равенства:

$$\begin{aligned} &5^\circ \quad P_n(p-x) = (-1)^n P_n(x+n-2), \\ &6^\circ \quad P_n(x+p) - P_n(x) = pC_x^{n-1}, \\ &7^\circ \quad P_2 + C_{n-1}^1 P_3 + \ldots + C_{n-1}^{n-2} P_n + P_{n+1} = (-1)^{n+1} P_{n+1}, \\ &8^\circ \quad P_{n+1} + (C_{n-1}^0 + C_n^1) P_{n+2} + \ldots + (C_{n-1}^{n-1} + C_n^n) P_{2n+1} = 0. \end{aligned} \tag{12}$$

Действительно, согласно свойству 4°, при $x = 0, 1, \ldots, p+n-2$ выполняется равенство

$$P_n(x) = -\sum_{m=1}^{p-1} \frac{e^{2\pi i \frac{m}{p}}}{(e^{2\pi i \frac{m}{p}} - 1)^n} e^{2\pi i \frac{mx}{p}}.$$

Следовательно, при $0 \leqslant x \leqslant p-1$ и $n \geqslant 1$

$$P_n(x+n-2) = -\sum_{m=1}^{p-1} \frac{e^{2\pi i \frac{m}{p}}}{(e^{2\pi i \frac{m}{p}} - 1)^n} e^{2\pi i \frac{m(x+n-2)}{p}} =$$

$$= -\sum_{m=1}^{p-1} \frac{e^{-2\pi i \frac{m}{p}} e^{2\pi i \frac{mx}{p}}}{(e^{2\pi i \frac{m}{p}} - 1)^n e^{-2\pi i \frac{mn}{p}}} = -\sum_{m=1}^{p-1} \frac{e^{-2\pi i \frac{m}{p}}}{(1 - e^{-2\pi i \frac{m}{p}})^n} e^{2\pi i \frac{mx}{p}}.$$

Заменяя в последней сумме m на $p - m$ получим равенство 5°:

$$P_n(x+n-2) = -\sum_{m=1}^{p-1} \frac{e^{2\pi i \frac{m}{p}}}{(1 - e^{2\pi i \frac{m}{p}})^n} e^{-2\pi i \frac{mx}{p}} =$$

$$= -(-1)^n \sum_{m=1}^{p-1} \frac{e^{2\pi i \frac{m}{p}}}{(e^{2\pi i \frac{m}{p}} - 1)^n} e^{2\pi i \frac{m(p-x)}{p}} = (-1)^n P_n(p-x).$$

Замечание. При нечетном n из 5° следует, что

$$P_n\left(\frac{p+n-2}{2}\right) = 0. \tag{13}$$

Действительно, согласно 5°

$$P_n(p-x) = -P_n(x+n-2) \qquad n \equiv 1 \pmod 2.$$

Отсюда, так как при $x = \frac{p-n+2}{2}$

$$p - x = x + n - 2 = \frac{p+n-2}{2},$$

В последние годы жизни Николай Михайлович Коробов: разрабатывал новые направления исследований по развитию теоретико-числового метода – ***специальные полиномы и комбинированные сетки***

In his last years Nikolay Mikhailovich Korobov worked up the new research directions for development of number-theoretic method – ***special polynomials and combined frames***

получаем равенство (11).

Докажем равенство 6°. Так как, согласно (4),

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n = \frac{pt(t+1)^x}{(t+1)^p - 1},$$

то при целом $x \geqslant 0$ получим

$$\sum_{n=0}^{\infty} [P_n(x+p) - P_n(x)]\, t^n = \frac{pt[(t+1)^{x+p} - (t+1)^x]}{(t+1)^p - 1} =$$

$$= pt(t+1)^x = p(t + C_x^1 t^2 + \ldots + C_x^x t^{x+1}).$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях t, приходим к равенству 6°:

$$P_n(x+p) - P_n(x) = pC_x^{n-1} \quad (n \geqslant 1).$$

Прежде, чем перейти к доказательству свойств 7° и 8°, заметим, что определение специальных чисел P_n (см. (1)) можно записать в виде

$$P_0 = 1, \quad P_n + \frac{p-1}{2}P_{n-1} + \ldots + \frac{(p-1)(p-2)\ldots(p-n)}{(n+1)!}P_0 = 0 \quad (n \geqslant 1).$$

Отсюда следует, что при $n \geqslant 0$ P_n – полиномы от p, степень которых не превосходит n. В частности,

$$P_0 = 1, \quad P_1 = -\frac{p-1}{2}, \quad P_2 = \frac{p^2-1}{12}, \quad P_3 = -\frac{p^2-1}{24},$$

$$P_4 = -\frac{(p^2-1)(p^2-19)}{720}, \quad P_5 = \frac{(p^2-1)(p^2-9)}{480}.$$

Эти примеры позволяют предположить, что при $n \neq 1$ степень P_n равна n или $n-1$, смотря по тому, будет ли n четным или нечетным числом. Свойство 7° показывает, что это предположение действительно справедливо.

Докажем соотношение 7°:

$$P_2 + C_{n-1}^1 P_3 + \ldots + C_{n-1}^{n-1} P_{n+1} = (-1)^{n+1} P_{n+1} \qquad (n \geqslant 1).$$

Действительно, перепишем свойства 1°, 5° и 6° в виде

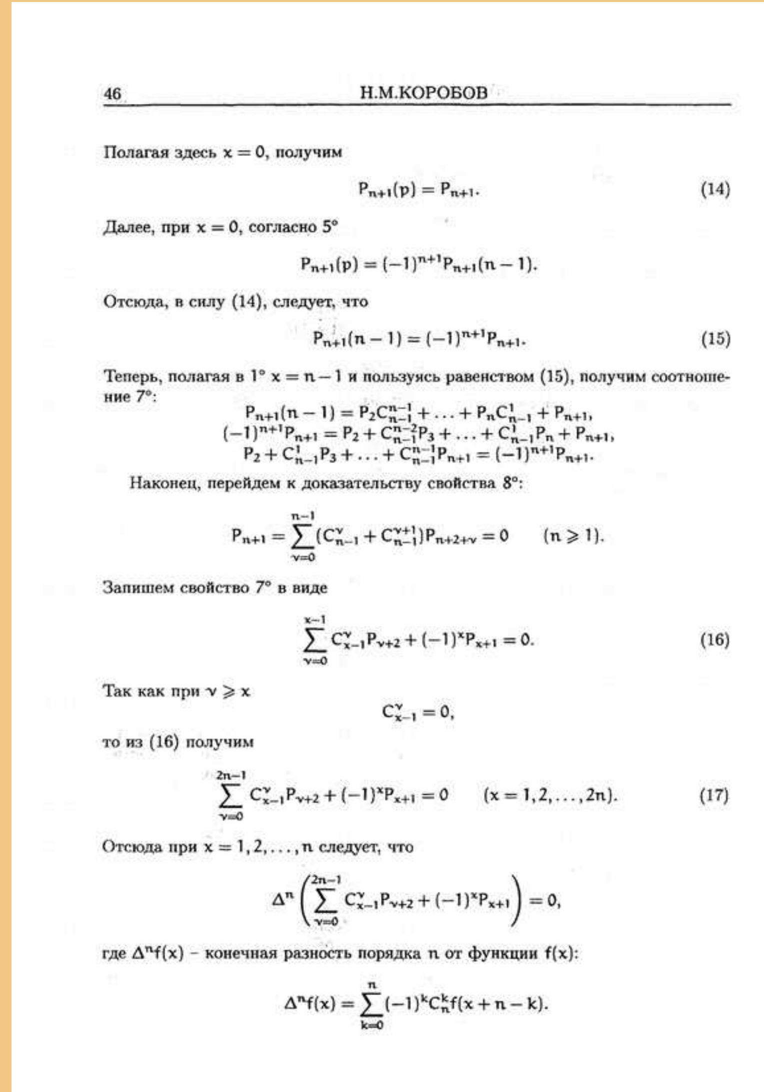
$$\begin{aligned} &1°.\ \ P_{n+1}(x) = P_0 C_x^{n+1} + \ldots + P_n C_x^1 + P_{n+1},\\ &5°.\ \ P_{n+1}(p-x) = (-1)^{n+1} P_{n+1}(x+n-1),\\ &6°.\ \ P_{n+1}(x+p) = P_{n+1}(x) + pC_x^n. \end{aligned}$$

При $0 \leqslant x \leqslant n-1$ из 6° следует, что

$$P_{n+1}(x+p) = P_{n+1}(x).$$

В последние годы жизни Николай Михайлович Коробов: разрабатывал новые направления исследований по развитию теоретико-числового метода – ***специальные полиномы и комбинированные сетки***

In his last years Nikolay Mikhailovich Korobov worked up the new research directions for development of number-theoretic method – ***special polynomials and combined frames***



46 Н.М.КОРОБОВ

Полагая здесь $x = 0$, получим

$$P_{n+1}(p) = P_{n+1}. \tag{14}$$

Далее, при $x = 0$, согласно 5°

$$P_{n+1}(p) = (-1)^{n+1} P_{n+1}(n-1).$$

Отсюда, в силу (14), следует, что

$$P_{n+1}(n-1) = (-1)^{n+1} P_{n+1}. \tag{15}$$

Теперь, полагая в 1° $x = n - 1$ и пользуясь равенством (15), получим соотношение 7°:

$$\begin{gathered} P_{n+1}(n-1) = P_2 C_{n-1}^{n-1} + \ldots + P_n C_{n-1}^1 + P_{n+1}, \\ (-1)^{n+1} P_{n+1} = P_2 + C_{n-1}^{n-2} P_3 + \ldots + C_{n-1}^1 P_n + P_{n+1}, \\ P_2 + C_{n-1}^1 P_3 + \ldots + C_{n-1}^{n-1} P_{n+1} = (-1)^{n+1} P_{n+1}. \end{gathered}$$

Наконец, перейдем к доказательству свойства 8°:

$$P_{n+1} = \sum_{\nu=0}^{n-1} (C_{n-1}^{\nu} + C_{n-1}^{\nu+1}) P_{n+2+\nu} = 0 \qquad (n \geqslant 1).$$

Запишем свойство 7° в виде

$$\sum_{\nu=0}^{x-1} C_{x-1}^{\nu} P_{\nu+2} + (-1)^x P_{x+1} = 0. \tag{16}$$

Так как при $\nu \geqslant x$

$$C_{x-1}^{\nu} = 0,$$

то из (16) получим

$$\sum_{\nu=0}^{2n-1} C_{x-1}^{\nu} P_{\nu+2} + (-1)^x P_{x+1} = 0 \qquad (x = 1, 2, \ldots, 2n). \tag{17}$$

Отсюда при $x = 1, 2, \ldots, n$ следует, что

$$\Delta^n \left(\sum_{\nu=0}^{2n-1} C_{x-1}^{\nu} P_{\nu+2} + (-1)^x P_{x+1} \right) = 0,$$

где $\Delta^n f(x)$ – конечная разность порядка n от функции $f(x)$:

$$\Delta^n f(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k f(x + n - k).$$

В последние годы жизни
Николай Михайлович Коробов:
разрабатывал новые
направления исследований по
развитию теоретико-числового
метода – ***специальные
полиномы и комбинированные
сетки***

In his last years
Nikolay Mikhailovich Korobov
worked up the new research
directions for development of
number-theoretic method – ***special
polynomials and combined
frames***

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ СПЕЦИАЛЬНЫХ ПОЛИНОМОВ 47

Так как очевидно, что

$$\Delta^n C_x^\nu = \begin{cases} 0 & \text{при } \nu < n \\ C_x^{\nu-n} & \text{при } \nu \geqslant n \end{cases},$$

то справедливо равенство

$$0 = \sum_{\nu=0}^{2n-1} P_{\nu+2}\Delta^n C_{x-1}^\nu + \Delta^n [(-1)^x P_{x+1}] =$$

$$= \sum_{\nu=n}^{2n-1} P_{\nu+2} C_{x-1}^{\nu-n} + \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k (-1)^{x+n-k} P_{x+1+n-k}.$$

Полагая здесь $x = n$, получим свойство 8°:

$$0 = \sum_{\nu=n}^{2n-1} P_{\nu+2} C_{n-1}^{\nu-n} + \sum_{k=0}^{n} C_n^k P_{2n+1-k} =$$

$$= P_{n+1} + \sum_{\nu=0}^{n-1} P_{n+2+\nu} C_{n-1}^\nu + \sum_{\nu=0}^{n-1} C_n^{\nu+1} P_{n+2+\nu} =$$

$$= P_{n+1} + \sum_{\nu=0}^{n-1} \left(C_{n-1}^\nu + C_n^{\nu+1}\right) P_{n+2+\nu}.$$

Приведем сведения, необходимые для дальнейшего изложения. Пусть при $\nu = 0, 1, \ldots, n$ величины $M_\nu(x)$ определены тождеством

$$x^n = M_1(n) C_x^1 + \ldots + M_n(n) C_x^n. \qquad (18)$$

Числа $M_\nu(n)$ (числа Моргана) удовлетворяют соотношениям:

$$M_\nu(n+1) = \nu[M_\nu(n) + M_{\nu-1}(n)],$$

$$M_0(n) = M_{n+1}(n) = 0, \quad M_1(n) = 1.$$

Напомним, что числа и полиномы Бернулли определяются равенствами:

$$B_0 = 1, \qquad C_{n+1}^1 B_n + \ldots + C_{n+1}^n B_1 + C_{n+1}^{n+1} B_0 = 0 \qquad (n \geqslant 1);$$
$$B_0(x) = 1, \quad B_n(x) = C_n^0 B_0 x^n + \ldots + C_n^{n-1} B_{n-1} x + B_n \quad (n \geqslant 1).$$

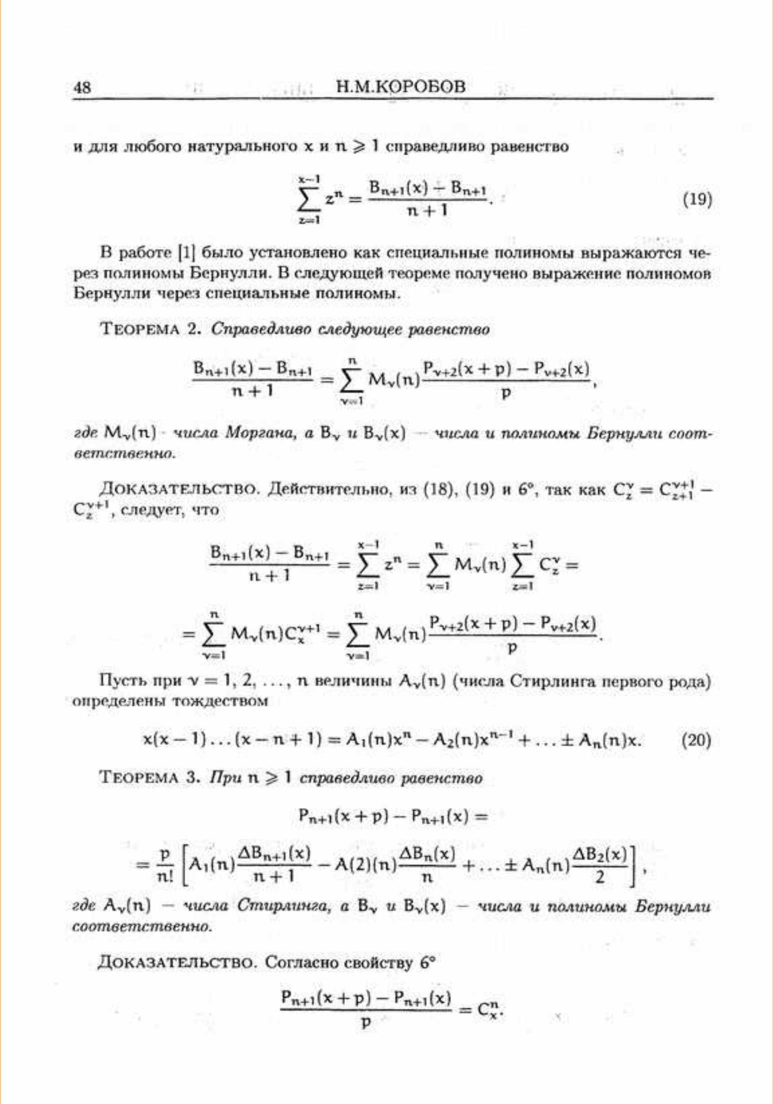
В частности,

$$B_1 = -\frac{1}{2}, \quad B_2 = \frac{1}{6}, \quad B_3 = 0,$$

$$B_1(x) = x - \frac{1}{2}, \quad B_2(x) = x^2 - x + \frac{1}{6}, \quad B_3(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x,$$

В последние годы жизни
Николай Михайлович Коробов:
разрабатывал новые направления исследований по развитию теоретико-числового метода – ***специальные полиномы и комбинированные сетки***

In his last years
Nikolay Mikhailovich Korobov
worked up the new research directions for development of number-theoretic method – ***special polynomials and combined frames***


48 Н.М.КОРОБОВ

и для любого натурального x и $n \geqslant 1$ справедливо равенство

$$\sum_{z=1}^{x-1} z^n = \frac{B_{n+1}(x) - B_{n+1}}{n+1}. \tag{19}$$

В работе [1] было установлено как специальные полиномы выражаются через полиномы Бернулли. В следующей теореме получено выражение полиномов Бернулли через специальные полиномы.

Теорема 2. *Справедливо следующее равенство*

$$\frac{B_{n+1}(x) - B_{n+1}}{n+1} = \sum_{\nu=1}^{n} M_\nu(n) \frac{P_{\nu+2}(x+p) - P_{\nu+2}(x)}{p},$$

где $M_\nu(n)$ *· числа Моргана, а* B_ν *и* $B_\nu(x)$ *— числа и полиномы Бернулли соответственно.*

Доказательство. Действительно, из (18), (19) и 6°, так как $C_z^\nu = C_{z+1}^{\nu+1} - C_z^{\nu+1}$, следует, что

$$\frac{B_{n+1}(x) - B_{n+1}}{n+1} = \sum_{z=1}^{x-1} z^n = \sum_{\nu=1}^{n} M_\nu(n) \sum_{z=1}^{x-1} C_z^\nu =$$

$$= \sum_{\nu=1}^{n} M_\nu(n) C_x^{\nu+1} = \sum_{\nu=1}^{n} M_\nu(n) \frac{P_{\nu+2}(x+p) - P_{\nu+2}(x)}{p}.$$

Пусть при $\nu = 1, 2, \ldots, n$ величины $A_\nu(n)$ (числа Стирлинга первого рода) определены тождеством

$$x(x-1)\ldots(x-n+1) = A_1(n)x^n - A_2(n)x^{n-1} + \ldots \pm A_n(n)x. \tag{20}$$

Теорема 3. *При* $n \geqslant 1$ *справедливо равенство*

$$P_{n+1}(x+p) - P_{n+1}(x) =$$

$$= \frac{p}{n!}\left[A_1(n)\frac{\Delta B_{n+1}(x)}{n+1} - A(2)(n)\frac{\Delta B_n(x)}{n} + \ldots \pm A_n(n)\frac{\Delta B_2(x)}{2}\right],$$

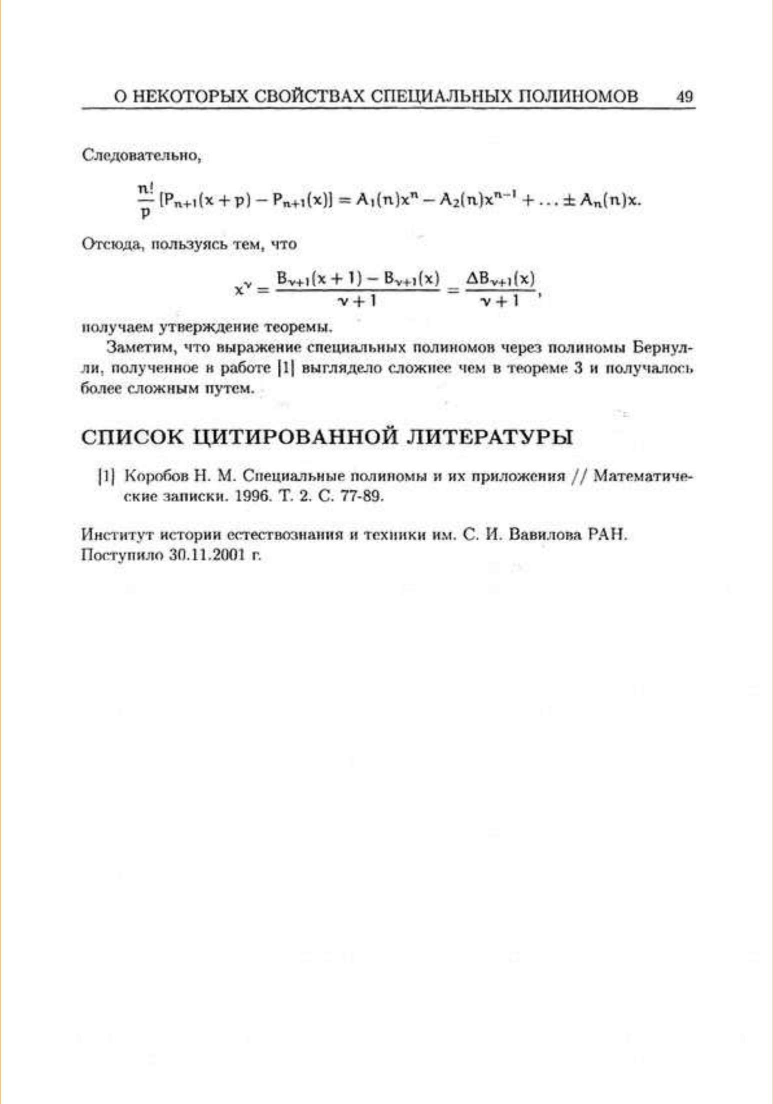
где $A_\nu(n)$ *— числа Стирлинга, а* B_ν *и* $B_\nu(x)$ *— числа и полиномы Бернулли соответственно.*

Доказательство. Согласно свойству 6°

$$\frac{P_{n+1}(x+p) - P_{n+1}(x)}{p} = C_x^n.$$

В последние годы жизни Николай Михайлович Коробов: разрабатывал новые направления исследований по развитию теоретико-числового метода – ***специальные полиномы и комбинированные сетки***

In his last years Nikolay Mikhailovich Korobov worked up the new research directions for development of number-theoretic method – ***special polynomials and combined frames***



Следовательно,

$$\frac{n!}{p}\left[P_{n+1}(x+p) - P_{n+1}(x)\right] = A_1(n)x^n - A_2(n)x^{n-1} + \ldots \pm A_n(n)x.$$

Отсюда, пользуясь тем, что

$$x^\nu = \frac{B_{\nu+1}(x+1) - B_{\nu+1}(x)}{\nu+1} = \frac{\Delta B_{\nu+1}(x)}{\nu+1},$$

получаем утверждение теоремы.

Заметим, что выражение специальных полиномов через полиномы Бернулли, полученное в работе [1] выглядело сложнее чем в теореме 3 и получалось более сложным путем.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

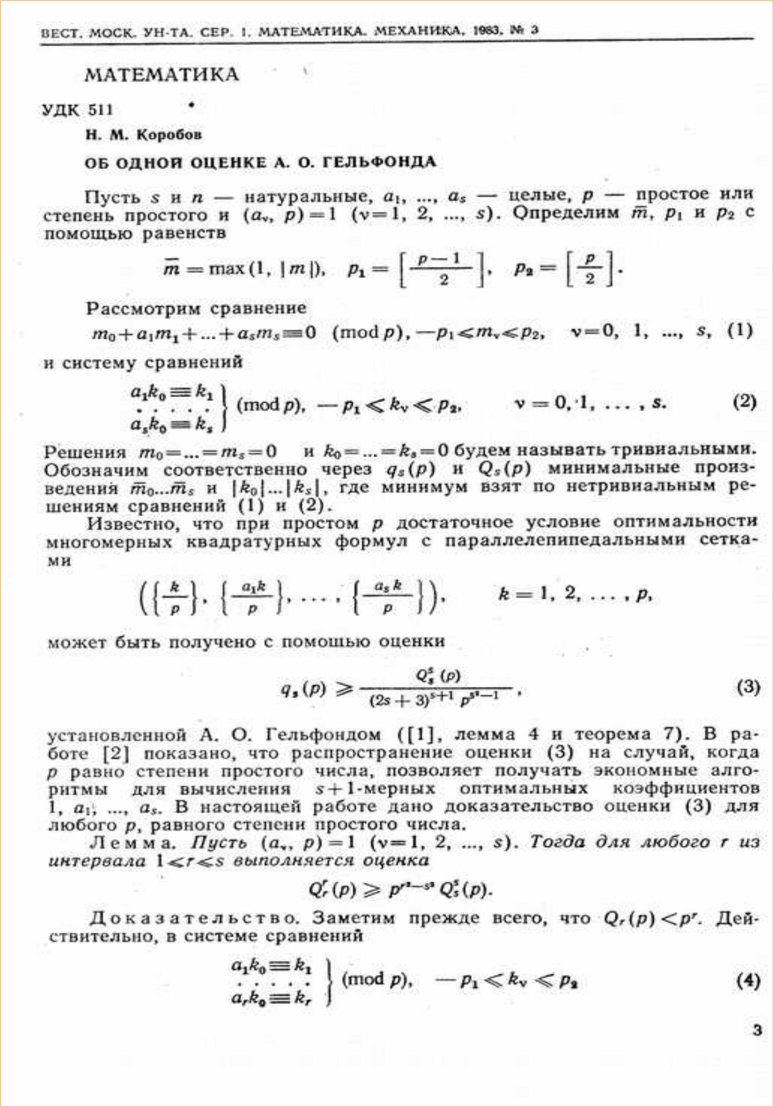
[1] Коробов Н. М. Специальные полиномы и их приложения // Математические записки. 1996. Т. 2. С. 77-89.

Институт истории естествознания и техники им. С. И. Вавилова РАН.
Поступило 30.11.2001 г.

В последние годы жизни

Николай Михайлович Коробов:

совершенствовал алгоритмы вычисления оптимальных коэффициентов



ВЕСТ. МОСК. УН-ТА. СЕР. 1. МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. 1983. № 3

МАТЕМАТИКА

УДК 511

Н. М. Коробов

ОБ ОДНОЙ ОЦЕНКЕ А. О. ГЕЛЬФОНДА

Пусть s и n — натуральные, $a_1, \ldots, a_s$ — целые, p — простое или степень простого и $(a_\nu, p)=1$ $(\nu=1, 2, \ldots, s)$. Определим $\overline{m}$, p_1 и p_2 с помощью равенств

$$\overline{m} = \max(1, |m|), \quad p_1 = \left[\frac{p-1}{2}\right], \quad p_2 = \left[\frac{p}{2}\right].$$

Рассмотрим сравнение

$$m_0+a_1m_1+\ldots+a_sm_s\equiv 0 \pmod p, \; -p_1\leqslant m_\nu\leqslant p_2, \quad \nu=0, 1, \ldots, s, \tag{1}$$

и систему сравнений

$$\left.\begin{array}{l} a_1k_0\equiv k_1 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_sk_0\equiv k_s \end{array}\right\} \pmod p, \; -p_1\leqslant k_\nu\leqslant p_2, \qquad \nu=0, 1, \ldots, s. \tag{2}$$

Решения $m_0=\ldots=m_s=0$ и $k_0=\ldots=k_s=0$ будем называть тривиальными. Обозначим соответственно через $q_s(p)$ и $Q_s(p)$ минимальные произведения $\overline{m}_0\ldots\overline{m}_s$ и $|k_0|\ldots|k_s|$, где минимум взят по нетривиальным решениям сравнений (1) и (2).

Известно, что при простом p достаточное условие оптимальности многомерных квадратурных формул с параллелепипедальными сетками

$$\left(\left\{\frac{k}{p}\right\}, \left\{\frac{a_1k}{p}\right\}, \ldots, \left\{\frac{a_sk}{p}\right\}\right), \qquad k=1, 2, \ldots, p,$$

может быть получено с помощью оценки

$$q_s(p) \geqslant \frac{Q_s^s(p)}{(2s+3)^{s+1}\, p^{s^2-1}}, \tag{3}$$

установленной А. О. Гельфондом ([1], лемма 4 и теорема 7). В работе [2] показано, что распространение оценки (3) на случай, когда p равно степени простого числа, позволяет получать экономные алгоритмы для вычисления $s+1$-мерных оптимальных коэффициентов $1, a_1, \ldots, a_s$. В настоящей работе дано доказательство оценки (3) для любого p, равного степени простого числа.

Лемма. *Пусть $(a_\nu, p)=1$ $(\nu=1, 2, \ldots, s)$. Тогда для любого r из интервала $1\leqslant r\leqslant s$ выполняется оценка*

$$Q_r^r(p) \geqslant p^{r^2-s^2}\, Q_s^s(p).$$

Доказательство. Заметим прежде всего, что $Q_r(p)<p^r$. Действительно, в системе сравнений

$$\left.\begin{array}{l} a_1k_0\equiv k_1 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_rk_0\equiv k_r \end{array}\right\} \pmod p, \quad -p_1\leqslant k_\nu\leqslant p_2 \tag{4}$$

In his last years

Nikolay Mikhailovich Korobov

improved procedures of optimum factors evaluation

В последние годы жизни Николай Михайлович Коробов:

совершенствовал алгоритмы вычисления оптимальных коэффициентов

Niko

improved procedures of optimum factors evaluation

Теорема. *Если p — степень простого числа и $(a_\nu, p)=1$ $(\nu=1, 2, ..., s)$, то справедлива оценка*

$$q_s(p) \geqslant \frac{Q_s^s(p)}{C_s\, p^{s^2-1}},$$

где $C_s=(2s+3)^{s+1}$.

выберем решение $k_0, ..., k_r$ с $k_0=1$. Тогда получим

$$Q_r(p) \leqslant |k_0|...|k_r| \leqslant p_2{}^r < p^r. \quad (5)$$

Так как при $r=s$ утверждение леммы тривиально, то можно считать, что $1 \leqslant r \leqslant s-1$. Рассмотрим систему сравнений

$$\left.\begin{array}{l} a_1 k_0 \equiv k_1 \\ \cdots\cdots \\ a_r k_0 \equiv k_r \\ a_{r+1} k_0 \equiv k_{r+1} \end{array}\right\} \pmod p, \quad -p_1 \leqslant k_\nu \leqslant p_2. \quad (6)$$

Пусть $k_0, ..., k_r$ — то решение системы (4), для которого выполняется равенство

$$Q_r(p)=|k_0|...|k_r|.$$

Очевидно, что при таком выборе $k_0, ..., k_r$ выполняются первые r сравнений системы (6). Определим k_{r+1} так, чтобы выполнялось также и $r+1$-е сравнение этой системы. Тогда получим

$=1$ $(\nu=$

вательно,

$$q_s(p) \geqslant \frac{p}{(2s+3)\,p^{s^2-1}} > \frac{Q_s(p)}{(2s+3)\,p^{s^2-1}} > \frac{Q_s(p)}{C_s\, p^{s^2-1}}.$$

Пусть

$$q_s(p) < \frac{p}{2s+3} \quad (7)$$

и $m_0, ..., m_s$ — то решение сравнения (1), для которого достигается равенство $q_s(p)=\bar{m}_0...\bar{m}_s$.

Рассмотрим сначала случай $(|m_0|, ..., |m_s|, p)=1$. Так как p — степень простого числа, то хотя бы одно из чисел $|m_0|, ..., |m_s|$ взаимно просто с p. Будем для определенности считать, что $(|m_s|, p)=1$. Выберем целые x_ν из интервалов

$$0 \leqslant x_\nu \leqslant \frac{(2s+3)^{1/s}\, q_s^{1/s}(p)\, p^{1-\frac{1}{s}}}{\bar{m}_\nu}, \qquad \nu=0, 1, \ldots, s, \quad (8)$$

В последние годы жизни
Николай Михайлович Коробов:
совершенствовал алгоритмы вычисления оптимальных коэффициентов

In his last years
Nikolay Mikhailovich Korobov
improved procedures of optimum factors evaluation

и определим $n, n_1, \ldots, n_{s-1}$ с помощью соотношений

$$n = m_0 x_0 + \ldots + m_s x_s,$$

$$0 \leqslant n_\nu < p, \quad a_\nu x_0 - x_\nu \equiv n_\nu \pmod p, \qquad \nu = 1, 2, \ldots, s-1.$$

Очевидно,

$$|n| \leqslant \sum_{\nu=0}^{s} |m_\nu| \frac{(2s+3)^{1/s} q_s^{1/s}(p)\, p^{1-\frac{1}{s}}}{\overline{m}_\nu} \leqslant (s+1)(2s+3)^{1/s} q_s^{1/s}(p)\, p^{1-\frac{1}{s}},$$

и, следовательно, n может принимать не более чем

$$1 + 2(s+1)(2s+3)^{1/s} q_s^{1/s}(p)\, p^{1-\frac{1}{s}} < (2s+3)^{1+\frac{1}{s}} q_s^{1/s}(p)\, p^{1-\frac{1}{s}}$$

значений, так что число различных систем $n, n_1, \ldots, n_{s-1}$ меньше, чем

$$(2s+3)^{1+\frac{1}{s}} q_s^{\frac{1}{s}}(p) p^{1-\frac{1}{s}} p^{s-1} = (2s+3)^{1+\frac{1}{s}} q_s^{\frac{1}{s}}(p)\, p^{s-\frac{1}{s}}.$$

Так как число различных систем $x_0, \ldots, x_s$ не меньше, чем

$$\frac{[(2s+3)^{1/s} q_s^{1/s}(p)\, p^{1-\frac{1}{s}}]^{s+1}}{\overline{m}_0 \ldots \overline{m}_s} = (2s+3)^{1+\frac{1}{s}} q_s^{1/s}(p)\, p^{s-\frac{1}{s}},$$

то найдутся две системы

$$(x_0, \ldots, x_s) \neq (x_0', \ldots, x_s'), \tag{9}$$

которым соответствует одна и та же система $n, n_1, \ldots, n_{s-1}$:

$$\left.\begin{aligned} &n = m_0 x_0 + \ldots + m_s x_s = m_0 x_0' + \ldots + m_s x_s', \\ &n_\nu \equiv a_\nu x_0 - x_\nu \equiv a_\nu x_0' - x_\nu' \pmod p, \qquad \nu = 1, 2, \ldots, s-1. \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Определим $k_0, \ldots, k_s$ с помощью равенств

$$k_0 = x_0 - x_0', \ \ldots, \ k_s = x_s - x_s'. \tag{11}$$

Тогда соотношения (10) примут вид

$$m_0 k_0 + \ldots + m_s k_s = 0 \qquad \left.\begin{aligned} &a_1 k_0 \equiv k_1 \\ &\ldots\ldots\ldots \\ &a_{s-1} k_0 \equiv k_{s-1} \end{aligned}\right\} \pmod p. \tag{12}$$

Отсюда, пользуясь тождеством

$$(m_0 + a_1 m_1 + \ldots + a_s m_s) k_0 =$$
$$= m_0 k_0 + \ldots + m_s k_s + m_1(a_1 k_0 - k_1) + \ldots + m_s(a_s k_0 - k_s)$$

и замечая, что

$$m_0 + a_1 m_1 + \ldots + a_s m_s \equiv 0 \pmod p,$$

получаем

$$m_s(a_s k_0 - k_s) \equiv 0 \pmod p.$$

Так как $(m_s, p) = 1$, то

$$a_s k_0 \equiv k_s \pmod p.$$

Это сравнение вместе со сравнениями (12) показывает, что величины $k_0, \ldots, k_s$, определенные равенствами (11), образуют решение системы

5

В последние годы жизни
Николай Михайлович Коробов:
совершенствовал алгоритмы вычисления оптимальных коэффициентов

In his last years
Nikolay Mikhailovich Korobov
improved procedures of optimum factors evaluation

(2). Покажем, что полученное решение будет нетривиальным. Действительно, из (7) и (8) следует:

$$0 \leqslant x_\nu < p, \quad 0 \leqslant x_\nu' < p$$

и в случае тривиального решения было бы

$$\left.\begin{array}{c} k_\nu \equiv 0 \pmod p \\ |k_\nu| = |x_\nu - x_\nu'| < p \end{array}\right\} \Rightarrow k_\nu = 0, \qquad \nu = 0, 1, \ldots, s,$$

что противоречит (9). Но тогда в силу (8) получим

$$Q_s(p) \leqslant |k_0| \ldots |k_s| =$$

$$= |x_0 - x_0'| \ldots |x_s - x_s'| \leqslant \frac{[(2s+3)^{1/s} q_s^{1/s}(p)\, p^{1-\frac{1}{s}}]^{s+1}}{\bar{m}_0 \ldots \bar{m}_s} =$$

$$= (2s+3)^{1+\frac{1}{s}} q_s^{1/s}(p)\, p^{s-\frac{1}{s}}$$

и, следовательно,

$$q_s(p) \geqslant \frac{Q_s^s(p)}{(2s+3)^{s+1} p^{s^2-1}} = \frac{Q_s^s(p)}{C_s p^{s^2-1}}.$$

Рассмотрим теперь случай $(|m_0|, \ldots, |m_s|, p) = d > 1$. Пусть среди величин $m_0, \ldots, m_s$ число отличных от нуля равно $r+1$ $(1 \leqslant r \leqslant s)$. Будем для определенности считать, что отличны от нуля величины $m_0, \ldots, m_r$. Определим $m_0', \ldots, m_r'$ и p' с помощью равенств

$$m_0 = m_0' d, \ \ldots, \ m_r = m_r' d, \quad p = p' d.$$

Очевидно,

$$q_s(p) = |m_0'| \ldots |m_r'|\, d^{r+1}, \tag{13}$$

$$(|m_0'|, \ldots, |m_r'|, p') = 1, \ m_0' + a_1 m_1' + \ldots + a_r m_r' \equiv 0 \pmod{p'} \tag{14}$$

и, следовательно,

$$q_r(p') \leqslant |m_0'| \ldots |m_r'|.$$

Допустим, что имеет место строгое неравенство

$$q_r(p') < |m_0'| \ldots |m_r'|.$$

Обозначим через $m_0'', \ldots, m_r''$ то решение сравнения (14), для которого

$$q_r(p') = \bar{m}_0'' \ldots \bar{m}_r''.$$

Тогда, очевидно,

$$m_0'' + a_1 m_1'' + \ldots + a_r m_r'' \equiv 0 \pmod{p'},$$

$$m_0'' d + a_1 m_1'' d + \ldots + a_r m_r'' d \equiv 0 \pmod p.$$

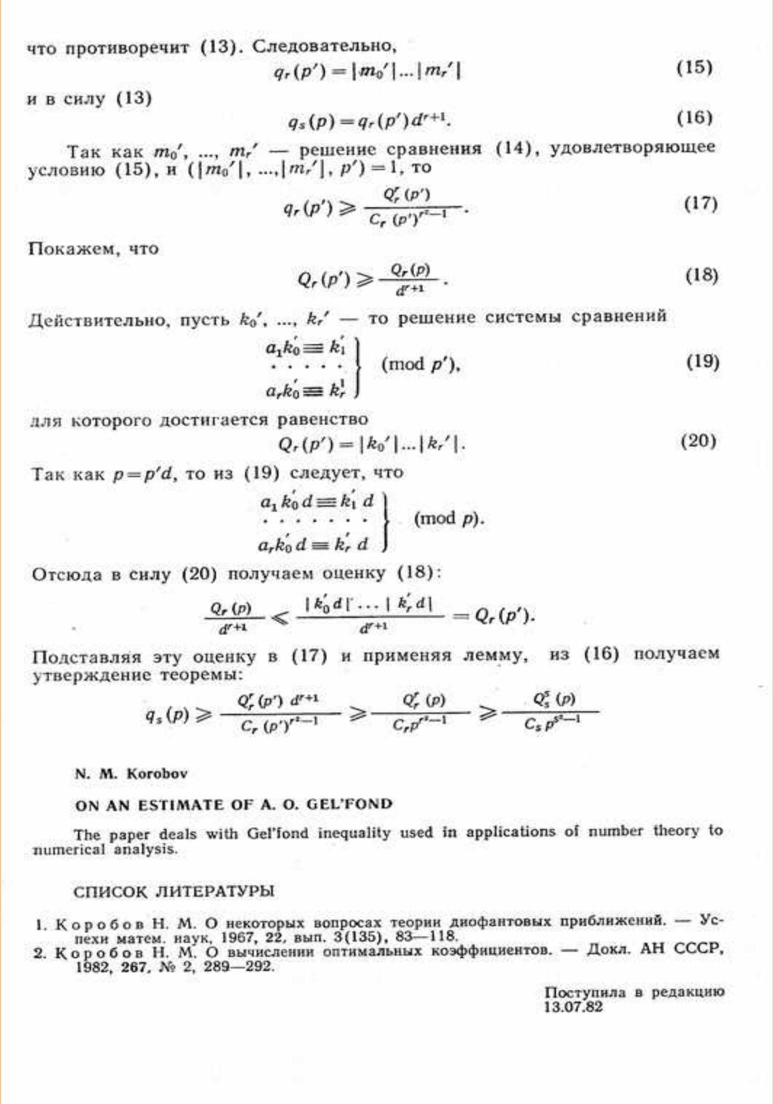
Отсюда, пользуясь оценкой $\overline{md} \leqslant \bar{m} d$, получаем

$$q_s(p) \leqslant \overline{m_0'' d} \ldots \overline{m_r'' d} \leqslant \bar{m}_0'' \ldots \bar{m}_r'' d^{r+1} =$$

$$= q_r(p')\, d^{r+1} < |m_0'| \ldots |m_r'|\, d^{r+1},$$

В последние годы жизни Николай Михайлович Коробов: ***совершенствовал алгоритмы вычисления оптимальных коэффициентов***

In his last years Nikolay Mikhailovich Korobov ***improved procedures of optimum factors evaluation***



что противоречит (13). Следовательно,

$$q_r(p') = |m_0'| \dots |m_r'| \tag{15}$$

и в силу (13)

$$q_s(p) = q_r(p') d^{r+1}. \tag{16}$$

Так как $m_0', \dots, m_r'$ — решение сравнения (14), удовлетворяющее условию (15), и $(|m_0'|, \dots, |m_r'|, p') = 1$, то

$$q_r(p') \geqslant \frac{Q_r^r(p')}{C_r (p')^{r^2-1}}. \tag{17}$$

Покажем, что

$$Q_r(p') \geqslant \frac{Q_r(p)}{d^{r+1}}. \tag{18}$$

Действительно, пусть $k_0', \dots, k_r'$ — то решение системы сравнений

$$\left.\begin{array}{l} a_1 k_0' \equiv k_1' \\ \cdots\cdots \\ a_r k_0' \equiv k_r' \end{array}\right\} \pmod{p'}, \tag{19}$$

для которого достигается равенство

$$Q_r(p') = |k_0'| \dots |k_r'|. \tag{20}$$

Так как $p = p'd$, то из (19) следует, что

$$\left.\begin{array}{l} a_1 k_0' d \equiv k_1' d \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_r k_0' d \equiv k_r' d \end{array}\right\} \pmod{p}.$$

Отсюда в силу (20) получаем оценку (18):

$$\frac{Q_r(p)}{d^{r+1}} \leqslant \frac{|k_0' d| \dots |k_r' d|}{d^{r+1}} = Q_r(p').$$

Подставляя эту оценку в (17) и применяя лемму, из (16) получаем утверждение теоремы:

$$q_s(p) \geqslant \frac{Q_r^r(p') d^{r+1}}{C_r (p')^{r^2-1}} \geqslant \frac{Q_r^r(p)}{C_r p^{r^2-1}} \geqslant \frac{Q_s^s(p)}{C_s p^{s^2-1}}$$

N. M. Korobov

ON AN ESTIMATE OF A. O. GEL'FOND

The paper deals with Gel'fond inequality used in applications of number theory to numerical analysis.

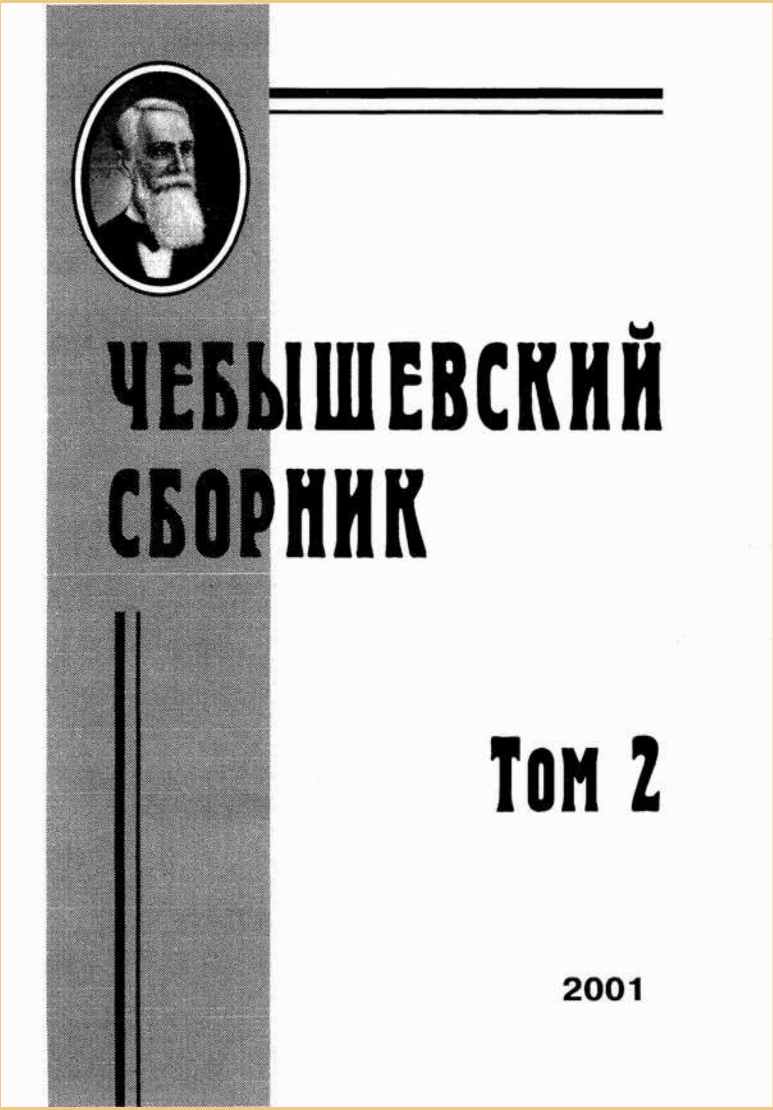
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Коробов Н. М. О некоторых вопросах теории диофантовых приближений. — Успехи матем. наук, 1967, 22, вып. 3(135), 83—118.
2. Коробов Н. М. О вычислении оптимальных коэффициентов. — Докл. АН СССР, 1982, 267, № 2, 289—292.

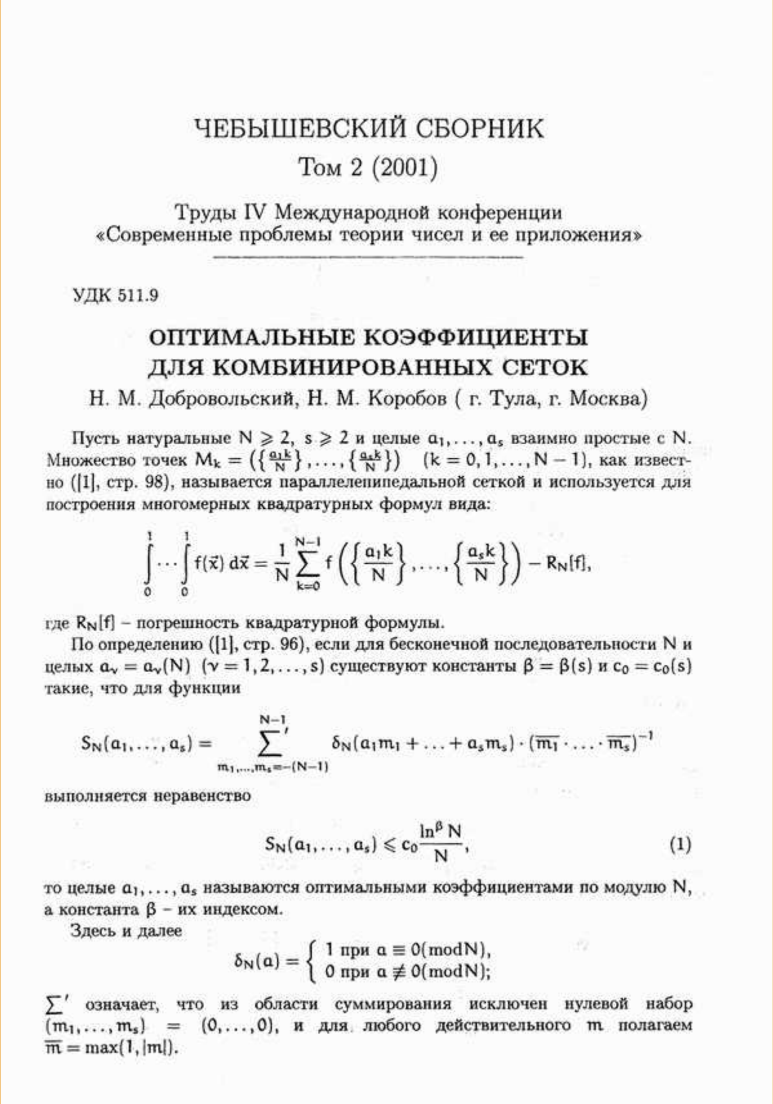
Поступила в редакцию 13.07.82

В последние годы жизни
Николай Михайлович Коробов:
совершенствовал алгоритмы вычисления оптимальных коэффициентов

In his last years
Nikolay Mikhailovich Korobov
improved procedures of optimum factors evaluation



В последние годы жизни
Николай Михайлович Коробов:
совершенствовал алгоритмы вычисления оптимальных коэффициентов



ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 2 (2001)

Труды IV Международной конференции
«Современные проблемы теории чисел и ее приложения»

УДК 511.9

ОПТИМАЛЬНЫЕ КОЭФФИЦИЕНТЫ ДЛЯ КОМБИНИРОВАННЫХ СЕТОК

Н. М. Добровольский, Н. М. Коробов (г. Тула, г. Москва)

Пусть натуральные $N \geqslant 2$, $s \geqslant 2$ и целые $a_1, \dots, a_s$ взаимно простые с N. Множество точек $M_k = \left(\left\{\frac{a_1 k}{N}\right\}, \dots, \left\{\frac{a_s k}{N}\right\}\right)$ $(k = 0, 1, \dots, N-1)$, как известно ([1], стр. 98), называется параллелепипедальной сеткой и используется для построения многомерных квадратурных формул вида:

$$\int_0^1 \cdots \int_0^1 f(\vec{x})\, d\vec{x} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f\left(\left\{\frac{a_1 k}{N}\right\}, \dots, \left\{\frac{a_s k}{N}\right\}\right) - R_N[f],$$

где $R_N[f]$ – погрешность квадратурной формулы.

По определению ([1], стр. 96), если для бесконечной последовательности N и целых $a_\nu = a_\nu(N)$ $(\nu = 1, 2, \dots, s)$ существуют константы $\beta = \beta(s)$ и $c_0 = c_0(s)$ такие, что для функции

$$S_N(a_1, \dots, a_s) = \sideset{}{'}\sum_{m_1, \dots, m_s = -(N-1)}^{N-1} \delta_N(a_1 m_1 + \dots + a_s m_s) \cdot (\overline{m_1} \cdot \ldots \cdot \overline{m_s})^{-1}$$

выполняется неравенство

$$S_N(a_1, \dots, a_s) \leqslant c_0 \frac{\ln^\beta N}{N}, \qquad (1)$$

то целые $a_1, \dots, a_s$ называются оптимальными коэффициентами по модулю N, а константа β – их индексом.

Здесь и далее

$$\delta_N(a) = \begin{cases} 1 & \text{при } a \equiv 0 (\operatorname{mod} N), \\ 0 & \text{при } a \not\equiv 0 (\operatorname{mod} N); \end{cases}$$

$\sum'$ означает, что из области суммирования исключен нулевой набор $(m_1, \dots, m_s) = (0, \dots, 0)$, и для любого действительного m полагаем $\overline{m} = \max(1, |m|)$.

In his last years
Nikolay Mikhailovich Korobov
improved procedures of optimum factors evaluation

В последние годы жизни Николай Михайлович Коробов:

совершенствовал алгоритмы вычисления оптимальных

Niko...

imp...

optimum factors evaluation

Рассмотрим две функции

$$T^*_N(a_1,\dots,a_s)=\sum_{k=1}^{N-1}\prod_{\nu=1}^{s}\left[1-2\ln\left(2\sin\pi\left\{\frac{a_\nu k}{N}\right\}\right)\right],$$

$$T_N(a_1,\dots,a_s)=\sum_{k=1}^{N-1}\prod_{\nu=1}^{s}\left[\ln N-2\ln\left(2\sin\pi\left\{\frac{a_\nu k}{N}\right\}\right)\right].$$

Теорема 1. *Необходимым и достаточным условием того, чтобы целые $a_1,\dots,a_s$ были оптимальными коэффициентами, является существование констант $\beta_2=\beta_2(s)$ и $c_2=c_2(s)$ таких, что оценка*

$$T_N(a_1,\dots,a_s)\leqslant N\ln^s N+c_2\ln^{\beta_2}N \tag{2}$$

выполняется для бесконечной последовательности целых N.

При этом если выполнена оценка (2), то каждый набор коэффициентов $a_{j_1},\dots,a_{j_t}$ $(1\leqslant j_1<\dots<j_t\leqslant s), t\geqslant 2$ будет оптимальным с индексом $\max(t+\beta_2-s,t)$.

$$T_N(a_1,\dots,a_s)\leqslant N\ln^s N. \tag{3}$$

Значение именно таких наборов оптимальных коэффициентов для комбинированных сеток (см. [2])

$$M(k,k_1,\dots,k_s)=\left(\left\{\frac{a_1k}{N}+\frac{k_1}{M}\right\},\dots,\left\{\frac{a_sk}{N}+\frac{k_1}{M}\right\}\right)$$

$$(k=0,1,\dots,N-1;k_1,\dots,k_s=0,1,\dots,M-1),$$

где M - произвольное натуральное, взаимно простое с N, определяется следующей теоремой.

В последние годы жизни Николай Михайлович Коробов:

совершенствовал алгоритмы

вычи

Niko

imp

optim

ОПТИМАЛЬНЫЕ КОЭФФИЦИЕНТЫ КОМБИНИРОВАННЫХ СЕТОК 43

Теорема 2. *Если оптимальные коэффициенты* $a_1, \ldots, a_s$ *удовлетворяют условию (3),* $M << \ln N$ *и* $f \in E_s^\alpha(C)$, *то для погрешности* $R_{NM^s}[f]$ *квадратурной формулы*

$$T_N(a_1, \ldots, a_s) \leqslant N \ln^s N. \tag{3}$$

Теорема 2. *Если оптимальные коэффициенты* $a_1, \ldots, a_s$ *удовлетворяют условию (3),* $M << \ln N$ *и* $f \in E_s^\alpha(C)$, *то для погрешности* $R_{NM^s}[f]$ *квадратурной формулы*

$$\int_0^1 \cdots \int_0^1 f(\vec{x})\, d\vec{x} =$$

$$= \frac{1}{NM^s} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{k_1, \ldots, k_s = 0}^{M-1} f\left(\left\{\frac{a_1 k}{N} + \frac{k_1}{M}\right\}, \ldots, \left\{\frac{a_s k}{N} + \frac{k_s}{M}\right\}\right) - R_{NM^s}[f] \tag{4}$$

выполняется оценка

$$|R_{NM^s}[f]| << \frac{\ln^{\alpha s} N}{(NM^s)^\alpha}.$$

чений

смот-

$(j\lambda)$,

ведем

ощью

ю ра-

$$\varepsilon_{j\lambda} = \left\{ \begin{array}{ll} & \\ 0 & \text{при} \quad \lambda > 0; \end{array} \right.$$

$$T_N^{(s\,h-1)}(a_{s\,h-1}) = T_N\left(\sum_{\lambda=0}^{h-1} a_{1\lambda} p^\lambda, \ldots, \sum_{\lambda=0}^{h-1} a_{s\lambda} p^\lambda\right) \quad (\varepsilon_{s\,h-1} \leqslant a_{s\,h-1} < p); \tag{5}$$

$$T_N^{(j\lambda)^*}(a_{(j\lambda)^*}) = \frac{1}{p - \varepsilon_{j\lambda}} \sum_{a_{(j\lambda)} = \varepsilon_{j\lambda}}^{p-1} T_N^{(j\lambda)}(a_{j\lambda}) \quad (\varepsilon_{j\lambda^*} \leqslant a_{(j\lambda)^*} < p), \tag{6}$$

В последние годы жизни Николай Михайлович Коробов:

совершенствовал алгоритмы вычисления оптимальных коэффициентов

In his last years Nikolay Mikhailovich Korobov

improved procedures of optimum factors evaluation

44 Н. М. ДОБРОВОЛЬСКИЙ, Н. М. КОРОБОВ

где $(1\,0) < (j\lambda) \leqslant (s\,h-1)$;

$$T_N = \frac{1}{p-1}\sum_{a_{10}=1}^{p-1} T_N^{(10)}(a_{10}). \tag{7}$$

Алгоритм вычисления величин $a_{10}, \ldots a_{s\,h-1}$ состоит в последовательном вычислении от меньшего набора индексов к большему по формулам:

$$\begin{cases} \varepsilon_{j\lambda} \leqslant a_{j\lambda} \leqslant p-1 \\ T_N^{(j\lambda)}(a_{j\lambda}) = \min\limits_{\varepsilon_{j\lambda}\leqslant z\leqslant p-1} T_N^{(j\lambda)}(z). \end{cases} \tag{8}$$

Таким образом, $a_{j\lambda}$ находится уже при вычисленных $a_{10}, \ldots a_{(j\lambda)^*}$.

Из свойств минимума и определений (6) – (8) следует, что

$$T_N^{(10)}(a_{10}) \leqslant \frac{1}{p-1}\sum_{z=1}^{p-1} T_N^{(10)}(z) = T_N, \tag{9}$$

$$T_N^{(j\lambda)}(a_{j\lambda}) \leqslant \frac{1}{p-\varepsilon_{j\lambda}}\sum_{z=\varepsilon_{j\lambda}}^{p-1} T_N^{(j\lambda)}(z) = T_N^{(j\lambda)^*}(a_{(j\lambda)^*}). \tag{10}$$

Из (5), (9) и (10) заключаем, что

$$T_N(a_1, \ldots, a_s) = T_N^{(s\,h-1)}(a_{s\,h-1}) \leqslant \ldots \leqslant T_N^{(10)}(a_{10}) \leqslant T_N. \tag{11}$$

Теорема 3. *Для любого набора индексов $(r\lambda)$ из промежутка $(1\,0) \leqslant (r\lambda) \leqslant (s\,h-1)$ справедливо равенство*

$$T_N^{(r\lambda)}(z) = U_N^{\lambda} + V_N^{r\lambda+1}(z), \tag{12}$$

где

$$U_N^{\lambda} = \sum_{m=1}^{p^{\lambda}-1}\prod_{j=1}^{s}\left[\ln N - 2\ln\left(2\sin\pi\left\{\frac{m}{p^{\lambda}}\sum_{\nu=0}^{\lambda-1} z_{j\nu}p^{\nu}\right\}\right)\right], \tag{13}$$

и при $\lambda > 0$

$$\begin{gathered} V_N^{r\lambda+1}(z) = \sum_{\mu=0}^{h-\lambda-1} p^{\mu}\times \\ \times\sum_{l=1}^{p-1}\sum_{m=0}^{p^{\lambda}-1}\prod_{j=1}^{r}\left[\ln N - \frac{2}{p^{\mu}}\ln\left(2\sin\pi\left\{\frac{l+mp}{p^{\lambda+1}}\sum_{\nu=0}^{\lambda} z_{j\nu}p^{\nu}\right\}\right)\right]\times \\ \times\prod_{j=r+1}^{s}\left[\ln N - \frac{2}{p^{\mu+1}}\ln\left(2\sin\pi\left\{\frac{l+mp}{p^{\lambda}}\sum_{\nu=0}^{\lambda-1} z_{j\nu}p^{\nu}\right\}\right)\right], \end{gathered} \tag{14}$$

В последние годы жизни Николай Михайлович Коробов:

совершенствовал алгоритмы вычисления оптимальных коэффициентов

In his last years Nikolay Mikhailovich Korobov

improved procedures of optimum factors evaluation

а при $\lambda = 0$

$$V_N^{r,1}(z) = \sum_{\mu=0}^{h-1} p^{\mu} \left(\ln N - \frac{2\ln p}{\varphi(p^{\mu+1})} \right)^{s-r} \times \\ \times \sum_{l=1}^{p-1} \prod_{j=1}^{r} \left[\ln N - \frac{2}{p^{\mu}} \ln \left(2 \sin \pi \left\{ \frac{l \cdot z_{j0}}{p} \right\} \right) \right]. \tag{15}$$

Кроме того, справедливо равенство

$$T_N = (N-1)\ln^s N + \sum_{\lambda=1}^{h} \varphi(p^{\lambda}) \left[\left(\ln N - \frac{2\ln p}{\varphi(p^{\lambda})} \right)^s - \ln^s N \right]. \tag{16}$$

Из (11) и (16) следует, что описанный алгоритм позволяет за $O(s^2pN)$ операций найти набор оптимальных коэффициентов, для которых соответствующая комбинированная сетка удовлетворяет теореме 2.

Для доказательства теоремы 1 приведем необходимые леммы, доказанные в работе [3].

ЛЕММА 1. *При* $k \not\equiv 0 (\operatorname{mod} N)$ *справедливо равенство*

$$-2\ln \left(2 \sin \pi \left\{ \frac{k}{N} \right\} \right) = \sum_{1 \leqslant |m| \leqslant N-1} C_m^* e^{2\pi i \frac{mk}{N}},$$

где для коэффициентов

$$C_m^* = \frac{1}{|m|} - \frac{|m|}{N^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \left(n + \frac{|m|}{N} \right)}$$

выполнены соотношения

$$\max \left(\frac{\pi^2}{6N^2}, \frac{1}{|m|} - \frac{1}{N} \right) < C_m^* = \frac{1}{|m|} - \frac{|m|}{N^2} \theta(m) \text{ и } 1 < \theta(m) < \frac{\pi^2}{6},$$

$$C_m^* = C_{-m}^* \quad (1 \leqslant |m| \leqslant N-1), \quad \sum_{m=1}^{N-1} C_m^* = \ln N.$$

Определим величины

$$U(\vec{a}) = \sum_{1 \leqslant |m_1|, \ldots, |m_s| \leqslant (N-1)} \frac{\delta_N(a_1 m_1 + \ldots + a_s m_s)}{\overline{m}_1 \cdot \ldots \cdot \overline{m}_s},$$

$$V(\vec{a}) = (-2)^s \sum_{k=1}^{N-1} \prod_{\nu=1}^{s} \ln \left(2 \sin \pi \left\{ \frac{a_{\nu} k}{N} \right\} \right),$$

$$W(\vec{a}) = \sum_{1 \leqslant |m_1|, \ldots, |m_s| \leqslant N-1} C_{m_1}^* \cdot \ldots \cdot C_{m_s}^* \delta_N(a_1 m_1 + \ldots + a_s m_s).$$

В последние годы жизни
Николай Михайлович Коробов:
совершенствовал алгоритмы вычисления оптимальных коэффициентов

In his last years
Nikolay Mikhailovich Korobov
improved procedures of optimum factors evaluation

46 Н. М. ДОБРОВОЛЬСКИЙ, Н. М. КОРОБОВ

Лемма 2. *Справедливо равенство*

$$V(\vec{a}) = N \cdot W(\vec{a}) - 2^s \ln^s N.$$

Определим для $t = 0, 1, 2, \ldots, s$ величины

$$W_t(\vec{a}) = \sum_{1 \leqslant |m_1|, \ldots, |m_s| \leqslant N-1} \left(\prod_{\nu=1}^{t} C^{*}_{m_\nu} \right) \left(\prod_{\nu=t+1}^{s} |m_\nu| \right)^{-1} \delta_N(a_1 m_1 + \ldots + a_s m_s).$$

Из определения следует, что $W_0(\vec{a}) = U(\vec{a})$, $W_s(\vec{a}) = W(\vec{a})$.

Лемма 3. *Для* $t = 1, 2, \ldots, s$ *справедливы равенства*

$$W_t(\vec{a}) = W_{t-1}(\vec{a}) + O\left(\frac{\ln^{s-1} N}{N}\right).$$

Лемма 4. *Справедливо асимптотическое равенство*

$$W(\vec{a}) = U(\vec{a}) + O\left(\frac{\ln^{s-1} N}{N}\right).$$

Пусть $\vec{j}_t = (j_1, \ldots, j_s)$ — произвольный целочисленный вектор, удовлетворяющий условиям

$$1 \leqslant j_1 < \ldots < j_t \leqslant s, \quad 1 \leqslant j_{t+1} < \ldots < j_s \leqslant s, \quad \{j_1, \ldots, j_s\} = \{1, \ldots, s\}.$$

Другими словами, координаты вектора $\vec{j}_t$ – это натуральные числа от 1 до s без повторений и с указанным ограничением на упорядоченность. Если J_t – множество всех таких векторов, то очевидно $|J_t| = C_s^t$. Ясно, что $\vec{j}_0 = \vec{j}_s = (1, 2, \ldots, s)$ и $J_0 = J_s = \{(1, 2, \ldots, s)\}$. В этих обозначениях произведение $(B + A_1) \cdot \ldots \cdot (B + A_s)$ можно раскрыть следующим образом

$$\prod_{\nu=1}^{s} (B + A_\nu) = B^s + \sum_{t=1}^{s} \sum_{\vec{j}_t \in J_t} B^{s-t} \prod_{\nu=1}^{t} A_{j_\nu}.$$

Введем обозначения

$$U(\vec{a}, \vec{j}_t) = U(a_{j_1}, \ldots, a_{j_t}) \quad (1 \leqslant t \leqslant s),$$
$$W(\vec{a}, \vec{j}_t) = W(a_{j_1}, \ldots, a_{j_t}) \quad (1 \leqslant t \leqslant s),$$
$$V(\vec{a}, \vec{j}_t) = V(a_{j_1}, \ldots, a_{j_t}) \quad (1 \leqslant t \leqslant s),$$

тогда функции $S_N(\vec{a})$ и $T_N(\vec{a})$ можно записать в виде

$$S_N(\vec{a}) = \sum_{t=1}^{s} \sum_{\vec{j}_t \in J_t} U(\vec{a}, \vec{j}_t),$$

$$T_N(\vec{a}) = (N-1) \ln^s N + \sum_{t=1}^{s} \ln^{s-t} N \sum_{\vec{j}_t \in J_t} V(\vec{a}, \vec{j}_t).$$

В последние годы жизни
Николай Михайлович Коробов:
совершенствовал алгоритмы вычисления оптимальных коэффициентов

In his last years
Nikolay Mikhailovich Korobov
improved procedures of optimum factors evaluation

Лемма 5. *Справедливы равенства*

$$\sum_{\vec{j}_1 \in J_1} U(\vec{a}, \vec{j}_1) = \sum_{\vec{j}_1 \in J_1} W(\vec{a}, \vec{j}_1) = 0,$$

$$\sum_{\vec{j}_1 \in J_1} V(\vec{a}, \vec{j}_1) = -s \cdot 2 \cdot \ln N.$$

Докажем следующую лемму.

Лемма 6. *Справедливо асимптотическое равенство*

$$T_N(\vec{a}) = N \ln^s N - 3^s \ln^s N + N \cdot \sum_{t=2}^{s} \ln^{s-t} N \sum_{\vec{j}_t \in J_t} U(\vec{a}, \vec{j}_t) + O\left(\ln^{s-1} N\right).$$

Доказательство. Из лемм 5 и 2 вытекает, что

$$T_N(\vec{a}) = (N-1) \ln^s N + \sum_{t=1}^{s} \ln^{s-t} N \sum_{\vec{j}_t \in J_t} V(\vec{a}, \vec{j}_t) =$$

$$= (N-1) \ln^s N + \sum_{t=1}^{s} \ln^{s-t} N \sum_{\vec{j}_t \in J_t} (N \cdot W(\vec{a}, \vec{j}_t) - 2^t \ln^t N) =$$

$$= N \ln^s N - \sum_{t=0}^{s} C_s^t \ln^{s-t} N \cdot 2^t \ln^t N + N \cdot \sum_{t=1}^{s} \ln^{s-t} N \sum_{\vec{j}_t \in J_t} W(\vec{a}, \vec{j}_t) =$$

$$= N \ln^s N - 3^s \ln^s N + N \cdot \sum_{t=2}^{s} \ln^{s-t} N \sum_{\vec{j}_t \in J_t} W(\vec{a}, \vec{j}_t).$$

По лемме 4 имеем

$$N \cdot \sum_{t=2}^{s} \ln^{s-t} N \sum_{\vec{j}_t \in J_t} W(\vec{a}, \vec{j}_t) = N \cdot \sum_{t=2}^{s} \ln^{s-t} N \sum_{\vec{j}_t \in J_t} \left(U(\vec{a}, \vec{j}_t) + O\left(\frac{\ln^{t-1} N}{N}\right)\right) =$$

$$= N \sum_{t=2}^{s} \ln^{s-t} N \sum_{\vec{j}_t \in J_t} U(\vec{a}, \vec{j}_t) + O\left(\ln^{s-1} N\right),$$

и лемма тем самым доказана.

Доказательство теоремы 1. Достаточность. Действительно, если $T_N(\vec{a}) \leqslant N \ln^s N + c_2 \ln^{\beta_2} N$, то из леммы 6 следует, что

$$N \cdot \sum_{t=2}^{s} \ln^{s-t} N \sum_{\vec{j}_t \in J_t} U(\vec{a}, \vec{j}_t) \leqslant 3^s \ln^s N + c_2 \ln^{\beta_2} N + O\left(\ln^{s-1} N\right).$$

В последние годы жизни Николай Михайлович Коробов:

совершенствовал алгоритмы вычисления оптимальных коэффициентов

In his last years Nikolay Mikhailovich Korobov

improved procedures of optimum factors evaluation

48 Н. М. ДОБРОВОЛЬСКИЙ, Н. М. КОРОБОВ

Отсюда получаем неравенство

$$\sum_{\vec{j}_t \in J_t} U(\vec{a}, \vec{j}_t) \leqslant \frac{3^s \ln^t N + O\left(\ln^{t-1} N\right) + c_2 \ln^{\beta_2+t-s} N}{N} \quad (2 \leqslant t \leqslant s), \qquad (17)$$

а значит,

$$S_N(a_{j_1}, \ldots, a_{j_t}) \leqslant \frac{1}{N} \sum_{q=2}^{t} \left(3^s \ln^q N + O\left(\ln^{q-1} N\right) + c_2 \ln^{\beta_2+q-s} N\right) =$$

$$= \frac{1}{N}\left(3^s \ln^t N + O\left(\ln^{t-1} N\right) + c_2 \ln^{\beta_2+t-s} N + O\left(\ln^{\beta_2+t-1-s} N\right)\right).$$

Отсюда следует, что $a_{j_1}, \ldots, a_{j_t}$ – оптимальные коэффициенты индекса $\max(t+\beta_2-s, t)$.

Необходимость. Если выполнена оценка (1), то справедливо неравенство

$$\sum_{\vec{j}_t \in J_t} U(\vec{a}, \vec{j}_t) \leqslant c_0 \frac{\ln^\beta N}{N},$$

и, следовательно, по лемме 6

$$T_N(\vec{a}) \leqslant N \ln^s N - 3^s \ln^s N + c_0 \ln^\beta N \cdot \sum_{t=2}^{s} \ln^{s-t} N = N \ln^s N + O\left(\ln^{\beta+s-2} N\right).$$

Доказательство теоремы 2. Известно (см.[1] с.44 и [2] с.88), что при $f \in E_s^\alpha(C)$ для погрешности квадратурной формулы (4) выполняется оценка

$$R_{NM^s}[f] \leqslant C \sum_{m_1,\ldots,m_s=-\infty}^{\infty}{}' \frac{\delta_N(a_1 \cdot m_1 + \ldots + a_s \cdot m_s)}{(\overline{Mm_1} \cdot \ldots \cdot \overline{Mm_s})^\alpha} =$$

$$= C\left(\sum_{t=2}^{s} \frac{1}{M^{t\alpha}} \sum_{\vec{j}_t \in J_t} \sum_{m_1,\ldots,m_t=-\infty}^{\infty}{}^{*} \frac{\delta_N(a_{j_1} \cdot m_1 + \ldots + a_{j_t} \cdot m_t)}{(\overline{m_1} \cdot \ldots \cdot \overline{m_t})^\alpha} + \frac{2s \cdot \zeta(\alpha)}{(M \cdot N)^\alpha}\right),$$

где $\sum^{*}$ означает, что все переменные суммирования отличны от нуля, и $\zeta(\alpha)$ – значение дзета-функции Римана в точке α. Применяя лемму 22 из [1], получим

$$R_{NM^s}[f] \leqslant C\left[\frac{2s \cdot \zeta(\alpha)}{(M \cdot N)^\alpha} + \sum_{t=2}^{s} \frac{1}{M^{t\alpha}} \times\right.$$

$$\left. \times \sum_{\vec{j}_t \in J_t}\left(\sum_{m_1,\ldots,m_t=-(N-1)}^{N-1}{}^{*} \frac{\delta_N(a_{j_1} \cdot m_1 + \ldots + a_{j_t} \cdot m_t)}{(\overline{m_1} \cdot \ldots \cdot \overline{m_t})^\alpha} + O\left(N^{-\alpha}\right)\right)\right] \leqslant$$

В последние годы жизни
Николай Михайлович Коробов:
совершенствовал алгоритмы вычисления оптимальных коэффициентов

In his last years
Nikolay Mikhailovich Korobov
improved procedures of optimum factors evaluation

$$\leqslant C\left[\frac{2s\cdot\zeta(\alpha)}{(M\cdot N)^{\alpha}}+\sum_{t=2}^{s}\frac{1}{M^{t\alpha}}\times\right.$$

$$\left.\times\left(\left(\sum_{j_t\in J_t}\ \sum_{m_1,\dots,m_t=-(N-1)}^{N-1}{}^{*}\ \frac{\delta_N(a_{j_1}\cdot m_1+\ldots+a_{j_t}\cdot m_t)}{\overline{m_1}\cdot\ldots\cdot\overline{m_t}}\right)^{\alpha}+O\left(N^{-\alpha}\right)\right)\right].$$

Из условия теоремы и неравенства (17) вытекает, что

$$\sum_{j_t\in J_t}\ \sum_{m_1,\dots,m_t=-(N-1)}^{N-1}{}^{*}\ \frac{\delta_N(a_{j_1}\cdot m_1+\ldots+a_{j_t}\cdot m_t)}{\overline{m_1}\cdot\ldots\cdot\overline{m_t}}\leqslant\frac{3^s\ln^t N}{N}+O\left(\frac{\ln^{t-1}N}{N}\right).$$

Отсюда следует, что

$$R_{NM^s}[f]<<\frac{1}{(MN)^{\alpha}}+\sum_{t=2}^{s}\frac{1}{M^{t\alpha}}\frac{\ln^{t\alpha}N}{N^{\alpha}}=$$

$$=\frac{1}{(NM^s)^{\alpha}}\left(M^{(s-1)\alpha}+\sum_{t=2}^{s}M^{(s-t)\alpha}\ln^{t\alpha}N\right)<<\frac{\ln^{s\alpha}N}{(NM^s)^{\alpha}},$$

и теорема 2 полностью доказана.

Для доказательства теоремы 3 понадобятся три леммы. Пусть p – натуральное, β – вещественное и

$$S(p,\beta)=\prod_{j=0}^{p-1}2\sin\pi\left\{\beta+\frac{j}{p}\right\}, \tag{18}$$

$$S^{*}(p,\beta)=\prod_{j=1}^{p-1}2\sin\pi\left\{\beta+\frac{j}{p}\right\}. \tag{19}$$

Лемма 7. *Справедливо равенство*

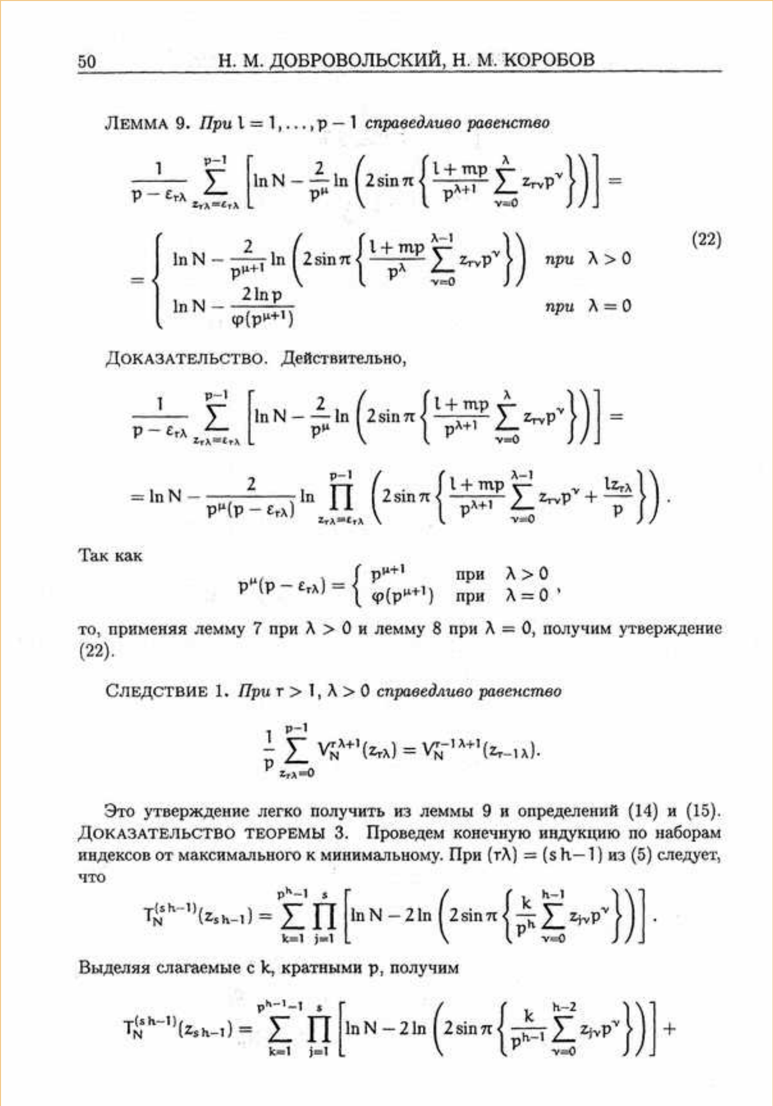
$$S(p,\beta)=2\sin\pi\{p\beta\}. \tag{20}$$

Лемма 8. *Справедливо равенство*

$$S^{*}(p,\beta)=\begin{cases}\dfrac{\sin\pi\{p\beta\}}{\sin\pi\{\beta\}} & \textit{при}\quad \{\beta\}\neq 0,\\ p & \textit{при}\quad \{\beta\}=0.\end{cases} \tag{21}$$

Леммы 7 и 8 доказываются аналогично лемме 25 из [1].

В последние годы жизни
Николай Михайлович Коробов:
совершенствовал алгоритмы вычисления оптимальных коэффициентов



50 Н. М. ДОБРОВОЛЬСКИЙ, Н. М. КОРОБОВ

ЛЕММА 9. *При* $l = 1, \ldots, p-1$ *справедливо равенство*

$$\frac{1}{p-\varepsilon_{\tau\lambda}} \sum_{z_{\tau\lambda}=\varepsilon_{\tau\lambda}}^{p-1} \left[\ln N - \frac{2}{p^{\mu}} \ln\left(2\sin\pi\left\{\frac{l+mp}{p^{\lambda+1}} \sum_{\nu=0}^{\lambda} z_{\tau\nu} p^{\nu}\right\}\right)\right] =$$

$$= \begin{cases} \ln N - \dfrac{2}{p^{\mu+1}} \ln\left(2\sin\pi\left\{\dfrac{l+mp}{p^{\lambda}} \sum\limits_{\nu=0}^{\lambda-1} z_{\tau\nu} p^{\nu}\right\}\right) & \textit{при} \quad \lambda > 0 \\ \ln N - \dfrac{2\ln p}{\varphi(p^{\mu+1})} & \textit{при} \quad \lambda = 0 \end{cases} \qquad (22)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно,

$$\frac{1}{p-\varepsilon_{\tau\lambda}} \sum_{z_{\tau\lambda}=\varepsilon_{\tau\lambda}}^{p-1} \left[\ln N - \frac{2}{p^{\mu}} \ln\left(2\sin\pi\left\{\frac{l+mp}{p^{\lambda+1}} \sum_{\nu=0}^{\lambda} z_{\tau\nu} p^{\nu}\right\}\right)\right] =$$

$$= \ln N - \frac{2}{p^{\mu}(p-\varepsilon_{\tau\lambda})} \ln \prod_{z_{\tau\lambda}=\varepsilon_{\tau\lambda}}^{p-1} \left(2\sin\pi\left\{\frac{l+mp}{p^{\lambda+1}} \sum_{\nu=0}^{\lambda-1} z_{\tau\nu} p^{\nu} + \frac{l z_{\tau\lambda}}{p}\right\}\right).$$

Так как

$$p^{\mu}(p-\varepsilon_{\tau\lambda}) = \begin{cases} p^{\mu+1} & \text{при} \quad \lambda > 0 \\ \varphi(p^{\mu+1}) & \text{при} \quad \lambda = 0 \end{cases},$$

то, применяя лемму 7 при $\lambda > 0$ и лемму 8 при $\lambda = 0$, получим утверждение (22).

СЛЕДСТВИЕ 1. *При* $\tau > 1$, $\lambda > 0$ *справедливо равенство*

$$\frac{1}{p} \sum_{z_{\tau\lambda}=0}^{p-1} V_N^{\tau\,\lambda+1}(z_{\tau\lambda}) = V_N^{\tau-1\,\lambda+1}(z_{\tau-1\,\lambda}).$$

Это утверждение легко получить из леммы 9 и определений (14) и (15). ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. Проведем конечную индукцию по наборам индексов от максимального к минимальному. При $(\tau\lambda) = (s\,h-1)$ из (5) следует, что

$$T_N^{(s\,h-1)}(z_{s\,h-1}) = \sum_{k=1}^{p^h-1} \prod_{j=1}^{s} \left[\ln N - 2\ln\left(2\sin\pi\left\{\frac{k}{p^h} \sum_{\nu=0}^{h-1} z_{j\nu} p^{\nu}\right\}\right)\right].$$

Выделяя слагаемые с k, кратными p, получим

$$T_N^{(s\,h-1)}(z_{s\,h-1}) = \sum_{k=1}^{p^{h-1}-1} \prod_{j=1}^{s} \left[\ln N - 2\ln\left(2\sin\pi\left\{\frac{k}{p^{h-1}} \sum_{\nu=0}^{h-2} z_{j\nu} p^{\nu}\right\}\right)\right] +$$

In his last years
Nikolay Mikhailovich Korobov
improved procedures of optimum factors evaluation

В последние годы жизни
Николай Михайлович Коробов:
совершенствовал алгоритмы вычисления оптимальных коэффициентов

In his last years
Nikolay Mikhailovich Korobov
improved procedures of optimum factors evaluation

$$+\sum_{l=1}^{p-1}\sum_{m=0}^{p^{h-1}-1}\prod_{j=1}^{s}\left[\ln N-2\ln\left(2\sin\pi\left\{\frac{l+mp}{p^h}\sum_{\nu=0}^{h-1}z_{j\nu}p^{\nu}\right\}\right)\right]=$$
$$=U_N^{h-1}+V_N^{sh}(z_{s\,h-1}),$$

чем теорема доказана для случая $(r\lambda)=(s\,h-1)$.

Пусть теперь формула (12) установлена при $r>1$, $\lambda>0$. Тогда, применяя следствие из леммы 9, получим

$$T_N^{(r-1\lambda)}(z_{r-1\lambda})=\frac{1}{p}\sum_{z_{r\lambda}=0}^{p-1}T_N^{(r\lambda)}(z_{r\lambda})=\frac{1}{p}\sum_{z_{r\lambda}=0}^{p-1}\left(U_N^{\lambda}+V_N^{r\lambda+1}(z_{r\lambda})\right)=$$

$$=U_N^{\lambda}+\frac{1}{p}\sum_{z_{r\lambda}=0}^{p-1}V_N^{r\lambda+1}(z_{r\lambda})=U_N^{\lambda}+V_N^{r-1\lambda+1}(z_{r-1\lambda}),$$

и утверждение теоремы справедливо для $T_N^{(r-1\lambda)}(z_{r-1\lambda})$.

Если $r=1$, $\lambda>0$, то, аналогично, получим

$$T_N^{(s\lambda-1)}(z_{s\lambda-1})=\frac{1}{p}\sum_{z_{1\lambda}=0}^{p-1}T_N^{(1\lambda)}(z_{1\lambda})=$$

$$=\frac{1}{p}\sum_{z_{1\lambda}=0}^{p-1}\left(U_N^{\lambda}+V_N^{1\lambda+1}(z_{1\lambda})\right)=U_N^{\lambda}+\frac{1}{p}\sum_{z_{1\lambda}=0}^{p-1}V_N^{1\lambda+1}(z_{1\lambda})=U_N^{\lambda}+$$
$$+\sum_{\mu=0}^{h-\lambda-1}p^{\mu}\sum_{l=1}^{p-1}\sum_{m=0}^{p^{\lambda}-1}\prod_{j=1}^{s}\left[\ln N-\frac{2}{p^{\mu+1}}\ln\left(2\sin\pi\left\{\frac{l+mp}{p^{\lambda}}\sum_{\nu=0}^{\lambda-1}z_{j\nu}p^{\nu}\right\}\right)\right].$$

Так как

$$U_N^{\lambda}=\sum_{m=1}^{p^{\lambda}-1}\prod_{j=1}^{s}\left[\ln N-2\ln\left(2\sin\pi\left\{\frac{m}{p^{\lambda}}\sum_{\nu=0}^{\lambda-1}z_{j\nu}p^{\nu}\right\}\right)\right]=$$
$$=U_N^{\lambda-1}+\sum_{l=1}^{p-1}\sum_{m=1}^{p^{\lambda-1}-1}\prod_{j=1}^{s}\left[\ln N-2\ln\left(2\sin\pi\left\{\frac{l+mp}{p^{\lambda}}\sum_{\nu=0}^{\lambda-1}z_{j\nu}p^{\nu}\right\}\right)\right] \qquad (23)$$

и

$$\sum_{\mu=0}^{h-\lambda-1}p^{\mu}\sum_{l=1}^{p-1}\sum_{m=0}^{p^{\lambda}-1}\prod_{j=1}^{s}\left[\ln N-\frac{2}{p^{\mu+1}}\ln\left(2\sin\pi\left\{\frac{l+mp}{p^{\lambda}}\sum_{\nu=0}^{\lambda-1}z_{j\nu}p^{\nu}\right\}\right)\right]=$$
$$=\sum_{\mu=1}^{h-\lambda}p^{\mu}\sum_{l=1}^{p-1}\sum_{m=0}^{p^{\lambda-1}-1}\prod_{j=1}^{s}\left[\ln N-\frac{2}{p^{\mu}}\ln\left(2\sin\pi\left\{\frac{l+mp}{p^{\lambda}}\sum_{\nu=0}^{\lambda-1}z_{j\nu}p^{\nu}\right\}\right)\right], \qquad (24)$$

В последние годы жизни
Николай Михайлович Коробов:
совершенствовал алгоритмы вычисления оптимальных коэффициентов

In his last years
Nikolay Mikhailovich Korobov
improved procedures of optimum factors evaluation

то отсюда вытекает, что

$$T_N^{(s\lambda-1)}(z_{s\lambda-1}) = U_N^{\lambda} + \sum_{\mu=0}^{h-\lambda-1} p^{\mu} \times$$
$$\times \sum_{l=1}^{p-1} \sum_{m=0}^{p^{\lambda}-1} \prod_{j=1}^{s} \left[\ln N - \frac{2}{p^{\mu+1}} \ln\left(2\sin\pi\left\{\frac{l+mp}{p^{\lambda}} \sum_{\nu=0}^{\lambda-1} z_{j\nu} p^{\nu}\right\}\right)\right] = U_N^{\lambda-1} +$$
$$+ \sum_{\mu=0}^{h-\lambda} p^{\mu} \sum_{l=1}^{p-1} \sum_{m=0}^{p^{\lambda-1}-1} \prod_{j=1}^{s} \left[\ln N - \frac{2}{p^{\mu}} \ln\left(2\sin\pi\left\{\frac{l+mp}{p^{\lambda}} \sum_{\nu=0}^{\lambda-1} z_{j\nu} p^{\nu}\right\}\right)\right] =$$
$$= U_N^{\lambda-1} + V_N^{(s\lambda)}(z_{s\lambda-1}),$$

и утверждение теоремы установлено для любого набора индексов вида $(s\lambda)$, где $0 \leqslant \lambda \leqslant h-1$.

Пусть теперь формула (12) установлена при $r > 1$, $\lambda = 0$, тогда, применяя лемму 9 и замечая, что $U_N^0 = 0$, получим

$$T_N^{(r-1\,0)}(z_{r-1\,0}) = \frac{1}{p-1} \sum_{z_{r0}=1}^{p-1} T_N^{(r0)}(z_{r0}) =$$
$$= \frac{1}{p-1} \sum_{z_{r0}=1}^{p-1} \left(U_N^0 + V_N^{r1}(z_{r0})\right) = \frac{1}{p-1} \sum_{z_{r0}=1}^{p-1} V_N^{r1}(z_{r0}) =$$
$$= \frac{1}{p-1} \sum_{z_{r0}=1}^{p-1} \sum_{\mu=0}^{h-1} p^{\mu} \left(\ln N - \frac{2\ln p}{\varphi(p^{\mu+1})}\right)^{s-r} \times$$
$$\times \sum_{l=1}^{p-1} \prod_{j=1}^{r} \left[\ln N - \frac{2}{p^{\mu}} \ln\left(2\sin\pi\left\{\frac{l z_{j0}}{p}\right\}\right)\right] = U_N^0 + V_N^{r-1\,1}(z_{r-1\,0}),$$

и утверждение теоремы справедливо для $T_N^{(r-1\,0)}(z_{r-1\,0})$.

Наконец, аналогично, для T_N получим

$$T_N = \frac{1}{p-1} \sum_{u=1}^{p-1} T_N^{(10)}(u) = \sum_{\mu=0}^{h-1} p^{\mu} \left(\ln N - \frac{2\ln p}{\varphi(p^{\mu+1})}\right)^{s} \sum_{l=1}^{p-1} 1 =$$
$$= \sum_{\mu=0}^{h-1} \varphi(p^{\mu+1}) \left(\ln N - \frac{2\ln p}{\varphi(p^{\mu+1})}\right)^{s} =$$
$$= (N-1)\ln^s N + \sum_{\mu=1}^{h} \varphi(p^{\mu}) \left(\left(\ln N - \frac{2\ln p}{\varphi(p^{\mu})}\right)^{s} - \ln^s N\right),$$

чем теорема полностью доказана.

В последние годы жизни
Николай Михайлович Коробов:

совершенствовал алгоритмы вычисления оптимальных коэффициентов

In his last years
Nikolay Mikhailovich Korobov

improved procedures of optimum factors evaluation

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Коробов Н. М. Теоретико-числовые методы в приближенном анализе. М.: Физматгиз, 1963.

[2] Коробов Н. М. Квадратурные формулы с комбинированными сетками // Мат. заметки. 1994. Т. 55. Вып. 2. С. 83–90.

[3] Добровольский Н. М., Родионова О. В. Об одном конечном ряде Фурье и его приложениях //Изв. ТулГУ. Сер. Математика. Механика. Информатика. 1998. Т. 4. Вып. 3. С. 68-79.

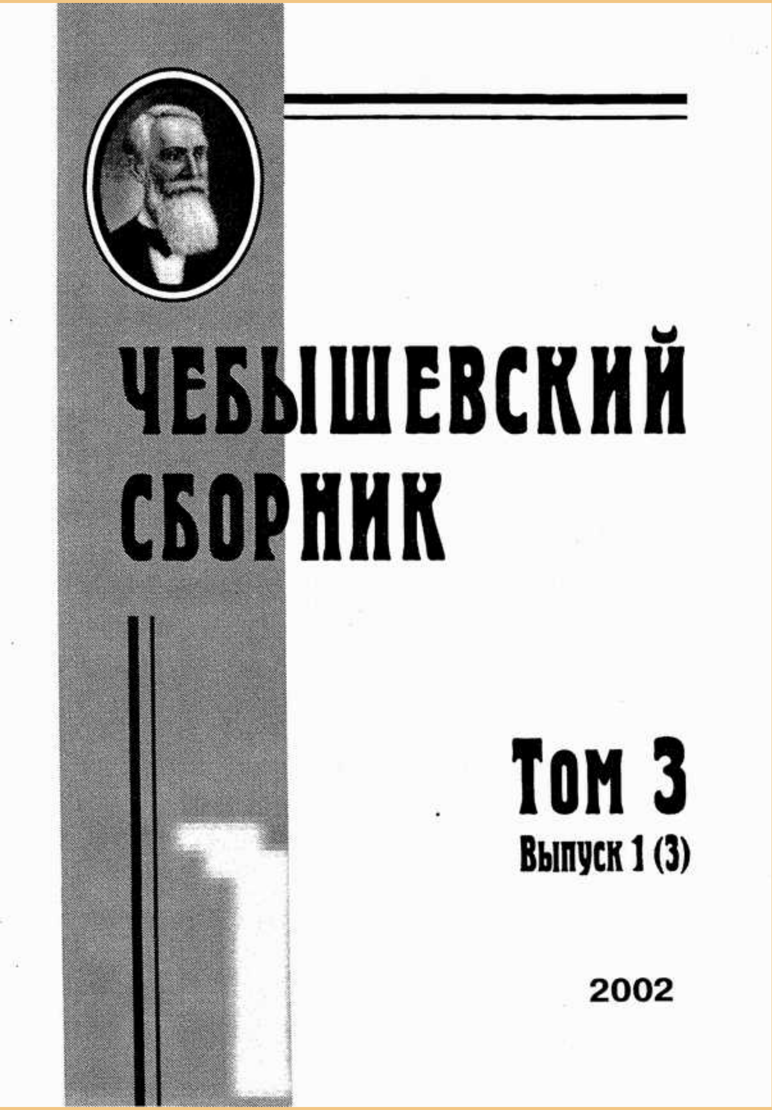
Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого.
Институт истории естествознания и техники им. С. И. Вавилова РАН.
Поступило 25.10.2001 г.

В последние годы жизни
Николай Михайлович Коробов:

получал новые оценки погрешности квадратурных формул с параллелепипедальными сетками

In his last years
Nikolay Mikhailovich Korobov

derived the new estimates of fallibility of quadrature formulas with parallelepiped frames



В последние годы жизни
Николай Михайлович Коробов:

получал новые оценки погрешности квадратурных формул с параллелепипедальными сетками

In his last years
Nikolay Mikhailovich Korobov

derived the new estimates of fallibility of quadrature formulas with parallelepiped frames

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 3 Выпуск 1 (2002)

УДК 511.9.

ОБ ОЦЕНКЕ ПОГРЕШНОСТИ КВАДРАТУРНЫХ ФОРМУЛ С ОПТИМАЛЬНЫМИ ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕДАЛЬНЫМИ СЕТКАМИ[1]

Н. М. Добровольский (г. Тула), Н. М. Коробов (г. Москва)

Аннотация

В работе получена новая оценка для погрешности квадратурных формул с оптимальными параллелепипедальными сетками.

Обозначим через $q = q(a_1, \ldots, a_s)$ минимальное значение произведения $\overline{m}_1, \ldots, \overline{m}_s$, где $m_1, \ldots, m_s$ — произвольное нетривиальное решение сравнения

$$a_1 m_1 + \ldots + a_s m_s \equiv 0 \pmod p. \tag{1}$$

Рассмотрим гиперболическую дзета-функцию решетки решений этого линейного сравнения

$$\zeta_H(\Lambda(a_1, \ldots, a_s; p)|\alpha) = {\sum_{m_1, \ldots, m_s = -\infty}^{\infty}}' \frac{\delta_p(a_1 m_1 + \ldots + a_s m_s)}{(\overline{m}_1 \ldots \overline{m}_s)^\alpha} \quad (\alpha > 1). \tag{2}$$

Введем обозначения

$$T_{r,t}^{(\alpha)}(a_1, \ldots, a_s) = {\sum_{r \leqslant \overline{m}_1 \ldots \overline{m}_s < t}}' \frac{\delta_p(a_1 m_1 + \ldots + a_s m_s)}{(\overline{m}_1 \ldots \overline{m}_s)^\alpha}, \tag{3}$$

тогда справедливо равенство

$$\zeta_H(\Lambda(a_1, \ldots, a_s; p)|\alpha) = T_{q,p}^{(\alpha)}(a_1, \ldots, a_s) + T_{p,\infty}^{(\alpha)}(a_1, \ldots, a_s). \tag{4}$$

Лемма 1. *Если для всякого нетривиального решения сравнения (1) выполняется неравенство $\overline{m}_1 \ldots \overline{m}_s \geqslant q$, то при любых целых λ, λ_ν, и $n_\nu \geqslant 1$ $(\nu = 1, 2, \ldots, s)$ справедлива оценка*

$$\sum_{k_1 = \lambda_1 + 1}^{\lambda_1 + n_1} \ldots \sum_{k_s = \lambda_s + 1}^{\lambda_s + n_s} \delta_p(a_1 k_1 + \ldots + a_s k_s + \lambda) \leqslant$$
$$\leqslant \begin{cases} 1 & \text{при } n_1 \ldots n_s \leqslant q, \\ \dfrac{4 n_1 \ldots n_s}{q} & \text{при } n_1 \ldots n_s > q. \end{cases} \tag{5}$$

[1]Работа выполнена по гранту РФФИ 02-01-00584

В последние годы жизни
Николай Михайлович Коробов:

получал новые оценки погрешности квадратурных формул с параллелепипедальными сетками

In his last years
Nikolay Mikhailovich Korobov

derived the new estimates of fallibility of quadrature formulas with parallelepiped frames

Доказательство см. [2] стр. 123.

Лемма 2. *При любых действительных* $\alpha > 1$ *и* $t \geqslant 1$ *справедлива оценка*

$$\sum_{m_1 \dots m_s \geqslant t} \frac{1}{(m_1 \dots m_s)^\alpha} \leqslant \alpha \left(\frac{\alpha}{\alpha - 1}\right)^s \frac{(1 + \ln t)^{s-1}}{t^{\alpha-1}}, \qquad (6)$$

где суммирование распространено на все системы целых положительных чисел $m_1, \dots, m_s$, *для которых произведение* $m_1 \dots m_s$ *больше или равно* t.

Доказательство см. [2] стр. 125.

Лемма 3. *Пусть для любого фиксированного* $\varepsilon > 0$ *неотрицательная функция* φ *удовлетворяет условию*

$$\sum_{|k_1| \leqslant n_1, \dots, |k_s| \leqslant n_s} \varphi(k_1, \dots, k_s) = O((n_1 \dots n_s)^{1+\varepsilon}).$$

Тогда при всяком $\alpha > 1$ *справедлива оценка*

$$\sum_{m_1, \dots, m_s = -\infty}^{\infty} \frac{\varphi(m_1, \dots, m_s)}{(\overline{m}_1 \dots \overline{m}_s)^\alpha} \leqslant$$
$$\leqslant \alpha^s \sum_{m_1, \dots, m_s = 1}^{\infty} \frac{1}{(m_1 \dots m_s)^{\alpha+1}} \sum_{|k_1| \leqslant m_1, \dots, |k_s| \leqslant m_s} \varphi(k_1, \dots, k_s).$$

Доказательство см. [2] стр. 87.

Лемма 4. *Справедливо неравенство*

$$\frac{s}{p^\alpha} < T_{p,\infty}^{(\alpha)}(a_1, \dots, a_s) \leqslant 4\alpha \left(\frac{3\alpha^2}{\alpha - 1}\right)^s \frac{(1 + \ln p)^{s-1}}{q p^{\alpha-1}}.$$

Доказательство. По определению $T_{p,\infty}^{(\alpha)}(a_1, \dots, a_s)$ можно записать в виде

$$T_{p,\infty}^{(\alpha)}(a_1, \dots, a_s) = {\sum_{\overline{m}_1 \dots \overline{m}_s \geqslant p}^{\infty}}' \frac{\delta_p(a_1 m_1 + \dots + a_s m_s)}{(\overline{m}_1 \dots \overline{m}_s)^\alpha}. \qquad (7)$$

Определим функцию $\varphi(m_1, \dots, m_s)$ равенствами

$$\varphi(m_1, \dots, m_s) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad \overline{m}_1 \dots \overline{m}_s < p, \\ \delta_p(a_1 m_1 + \dots + a_s m_s), & \text{если} \quad \overline{m}_1 \dots \overline{m}_s \geqslant p. \end{cases}$$

В последние годы жизни
Николай Михайлович Коробов:
получал новые оценки погрешности квадратурных формул с параллелепипедальными сетками

In his last years
Nikolay Mikhailovich Korobov
derived the new estimates of fallibility of quadrature formulas with parallelepiped frames

ОБ ОЦЕНКЕ ПОГРЕШНОСТИ КВАДРАТУРНЫХ ФОРМУЛ 43

Тогда, согласно лемме 3, получим

$$\sum_{\overline{m}_1\ldots\overline{m}_s\geqslant p}\frac{\delta_p(a_1m_1+\ldots+a_sm_s)}{(\overline{m}_1\ldots\overline{m}_s)^\alpha}=\sum_{m_1,\ldots,m_s=-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(m_1,\ldots,m_s)}{(\overline{m}_1\ldots\overline{m}_s)^\alpha}\leqslant$$

$$\leqslant\alpha^s\sum_{m_1,\ldots,m_s=1}^{\infty}\frac{1}{(m_1\ldots m_s)^{\alpha+1}}\sum_{|k_1|\leqslant m_1,\ldots,|k_s|\leqslant m_s}\varphi(k_1,\ldots,k_s)\leqslant$$

$$\leqslant\alpha^s\sum_{m_1\ldots m_s\geqslant p}\frac{1}{(m_1\ldots m_s)^{\alpha+1}}\sum_{|k_1|\leqslant m_1,\ldots,|k_s|\leqslant m_s}\delta_p(a_1k_1+\ldots+a_sk_s).\qquad(8)$$

Пусть $\lambda=0$, $\lambda_\nu=-(m_\nu+1)$ и $n_\nu=2m_\nu+1$ $(\nu=1,2,\ldots,s)$. Тогда при $m_1\ldots m_s\geqslant q$ утверждение леммы 1 можно записать в виде

$$\sum_{|k_1|\leqslant m_1}\ldots\sum_{|k_s|\leqslant m_s}\delta_p(a_1k_1+\ldots+a_sk_s)\leqslant$$

$$\leqslant 4\frac{(2m_1+1)\ldots(2m_s+1)}{q}\leqslant 4\cdot 3^s\frac{m_1\ldots m_s}{q}.$$

Пользуясь этой оценкой, получим из (8)

$$\sum_{\overline{m}_1\ldots\overline{m}_s\geqslant p}\frac{\delta_p(a_1m_1+\ldots+a_sm_s)}{(\overline{m}_1\ldots\overline{m}_s)^\alpha}\leqslant 4(3\alpha)^s\frac{1}{q}\sum_{m_1\ldots m_s\geqslant p}\frac{1}{(m_1\ldots m_s)^\alpha}.$$

Но согласно лемме 2

$$\sum_{m_1\ldots m_s\geqslant p}\frac{1}{(m_1\ldots m_s)^\alpha}\leqslant\alpha\left(\frac{\alpha}{\alpha-1}\right)^s\frac{(1+\ln p)^{s-1}}{p^{\alpha-1}}$$

и, следовательно,

$$\sum_{\overline{m}_1\ldots\overline{m}_s\geqslant p}\frac{\delta_p(a_1m_1+\ldots+a_sm_s)}{(\overline{m}_1\ldots\overline{m}_s)^\alpha}\leqslant 4\alpha\left(\frac{3\alpha^2}{\alpha-1}\right)^s\frac{(1+\ln p)^{s-1}}{qp^{\alpha-1}}.$$

Подставляя эту оценку в (7), получим утверждение леммы:

$$T_{p,\infty}^{(\alpha)}(a_1,\ldots,a_s)\leqslant 4\alpha\left(\frac{3\alpha^2}{\alpha-1}\right)^s\frac{(1+\ln p)^{s-1}}{qp^{\alpha-1}}.$$

При $p>2\cdot 3^s+1$ определим величину p^* из условий

$$N_s(p^*)<\frac{p-1}{2}\leqslant N_s(p^*+1),$$

где $N_s(t)$ – количество ненулевых наборов $(m_1,\ldots,m_s)$, удовлетворяющих неравенству $\overline{m}_1\ldots\overline{m}_s\leqslant t$. Так как $N_s(1)=3^s$ и $N_s(t)\leqslant t(3+2\ln t)^{s-1}$, то

$$p^*>\frac{p}{2(3+2\ln p)^{s-1}}.$$

В последние годы жизни
Николай Михайлович Коробов:
получал новые оценки погрешности квадратурных формул с параллелепипедальными сетками

In his last years
Nikolay Mikhailovich Korobov
derived the new estimates of fallibility of quadrature formulas with parallelepiped frames

Лемма 5. *Пусть* $p > 2\cdot 3^s+1$ – *простое, тогда среди* $P = (p-1)^s$ *различных наборов* $(a_1,\ldots,a_s)$ *с* $(1 \leqslant a_1,\ldots,a_s \leqslant p-1)$ *имеется не менее* $P/2+1$ *таких, что справедливо неравенство*

$$q = q(a_1,\ldots,a_s) \geqslant p^*. \tag{9}$$

Доказательство. Рассмотрим величину

$$T^{(0)}_{1,p^*}(a_1,\ldots,a_s) = \sideset{}{'}\sum_{1\leqslant \overline{m_1}\ldots\overline{m_s}<p^*} \delta_p(a_1m_1+\ldots+a_sm_s) \tag{10}$$

и перенумеруем наборы $\vec{a} = (a_1,\ldots,a_s)$ в порядке возрастания величины $T^{(0)}_{1,p^*}(\vec{a})$:

$$T^{(0)}_{1,p^*}(\vec{a}_1) \leqslant T^{(0)}_{1,p^*}(\vec{a}_2) \leqslant \ldots \leqslant T^{(0)}_{1,p^*}(\vec{a}_P).$$

Тогда, очевидно,

$$T^{(0)}_{1,p^*}(\vec{a}_{P/2+1}) \leqslant \frac{2}{P}\sum_{\nu=(P+2)/2}^{P} T^{(0)}_{1,p^*}(\vec{a}_\nu) \leqslant \frac{2}{P}\sum_{\nu=1}^{P} T^{(0)}_{1,p^*}(\vec{a}_\nu) =$$

$$= \frac{2}{P}\sideset{}{'}\sum_{\overline{m_1}\ldots\overline{m_s}<p^*}\sum_{\nu=1}^{P}\delta_p(m_1a_{\nu 1}+\ldots+m_sa_{\nu s}) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2}{P}\sideset{}{'}\sum_{\overline{m_1}\ldots\overline{m_s}<p^*}(p-1)^{s-1} = \frac{2}{p-1}\sideset{}{'}\sum_{\overline{m_1}\ldots\overline{m_s}<p^*} 1 < \frac{2}{p-1}\cdot\frac{p-1}{2} = 1.$$

Следовательно, $T^{(0)}_{1,p^*}(\vec{a}_1) = \ldots = T^{(0)}_{1,p^*}(\vec{a}_{P/2+1}) = 0$ и $q(\vec{a}_\nu) \geqslant p^*$ $(\nu = 1,2,\ldots,P/2+1)$, что совпадает с утверждением (9).

Лемма 6. *Пусть* $\vec{p}_s = (p,\ldots,p) \in \mathbb{Z}^s$ *и* $r \leqslant t$, *тогда справедливо неравенство*

$$T^{(1)}_{r,t}(\vec{p}_s) \leqslant 2s(5+2\ln t)^{s-1}\left(2+\ln\left(\frac{t}{r}\right)\right). \tag{11}$$

Доказательство. Из определения следует, что $T^{(1)}_{r,t}(\vec{p}_s)$ можно записать в виде

$$T^{(1)}_{r,t}(\vec{p}_s) = \sideset{}{'}\sum_{r\leqslant\overline{m_1}\ldots\overline{m_s}<t}\frac{1}{\overline{m_1}\ldots\overline{m_s}} = \sum_{k=1}^{s} C_s^k 2^k \sum_{r\leqslant m_1\ldots m_k<t}\frac{1}{m_1\ldots m_k} = \sum_{k=1}^{s} C_s^k 2^k\sigma_k(r,t), \tag{12}$$

где

$$\sigma_k(r,t) = \sum_{r\leqslant m_1\ldots m_k<t}\frac{1}{m_1\ldots m_k}$$

и суммирование проводится только по натуральным $m_1,\ldots,m_k$.

В последние годы жизни
Николай Михайлович Коробов:

получал новые оценки погрешности квадратурных формул с параллелепипедальными сетками

In his last years
Nikolay Mikhailovich Korobov

derived the new estimates of fallibility of quadrature formulas with parallelepiped frames

При $k = 1$ получим

$$\sigma_1(r,t) = \sum_{r \leqslant m < t} \frac{1}{m} = \sum_{1 \leqslant m < t} \frac{1}{m} - \sum_{1 \leqslant m < r} \frac{1}{m} =$$
$$= \left(\ln t + \gamma - \frac{\theta(t)}{t}\right) - \left(\ln r + \gamma - \frac{\theta(r)}{r}\right),$$

где $0 < |\theta(x)| \leqslant 1$ и γ- константа Эйлера (см.[1] стр. 108). Отсюда следует

$$\sigma_1(r,t) \leqslant \begin{cases} 2 + \ln\left(\frac{t}{r}\right) & \text{при} \quad r > 1, \\ 1 + \ln t & \text{при} \quad r = 1. \end{cases}$$

Применим индукцию. Пусть $k \geqslant 2$ и справедливо неравенство

$$\sigma_{k-1}(r,t) \leqslant \begin{cases} \left(2 + \ln\left(\frac{t}{r}\right)\right)(2+\ln t)^{k-2} & \text{при} \quad r > 1, \\ (1 + \ln t)^{k-1} & \text{при} \quad r = 1. \end{cases}$$

Тогда

$$\sigma_k(r,t) = \sum_{r \leqslant m_1 \ldots m_k < t} \frac{1}{m_1 \ldots m_k} = \sum_{1 \leqslant m_k < r} \frac{1}{m_k} \sum_{\frac{r}{m_k} \leqslant m_1 \ldots m_{k-1} < \frac{t}{m_k}} \frac{1}{m_1 \ldots m_{k-1}} +$$
$$+ \sum_{r \leqslant m_k < t} \frac{1}{m_k} \sum_{1 \leqslant m_1 \ldots m_{k-1} < \frac{t}{m_k}} \frac{1}{m_1 \ldots m_{k-1}} =$$
$$= \sum_{1 \leqslant m_k < r} \frac{1}{m_k} \sigma_{k-1}\left(\frac{r}{m_k}, \frac{t}{m_k}\right) + \sum_{r \leqslant m_k < t} \frac{1}{m_k} \sigma_{k-1}\left(1, \frac{t}{m_k}\right). \qquad (13)$$

Если $r = 1$, то

$$\sigma_k(1,t) = \sum_{1 \leqslant m_k < t} \frac{1}{m_k} \sigma_{k-1}\left(1, \frac{t}{m_k}\right) \leqslant \sigma_{k-1}(1,t) \sum_{1 \leqslant m_k < t} \frac{1}{m_k} \leqslant (1 + \ln t)^k. \qquad (14)$$

Если $r > 1$, то

$$\sigma_k(r,t) \leqslant \sum_{1 \leqslant m_k < r} \frac{1}{m_k} \sigma_{k-1}\left(\frac{r}{m_k}, \frac{t}{m_k}\right) + \sum_{r \leqslant m_k < t} \frac{1}{m_k} \sigma_{k-1}\left(1, \frac{t}{m_k}\right) \leqslant$$
$$\leqslant \left(2 + \ln\left(\frac{t}{r}\right)\right)(2 + \ln t)^{k-2} \sum_{1 \leqslant m_k < r} \frac{1}{m_k} + \left(1 + \ln\left(\frac{t}{r}\right)\right)^{k-1} \sum_{r \leqslant m_k < t} \frac{1}{m_k} \leqslant$$
$$\leqslant \left(2 + \ln\left(\frac{t}{r}\right)\right)(2 + \ln t)^{k-2}(1 + \ln r) + \left(1 + \ln\left(\frac{t}{r}\right)\right)^{k-1}\left(2 + \ln\left(\frac{t}{r}\right)\right) \leqslant$$
$$\leqslant \left(2 + \ln\left(\frac{t}{r}\right)\right)(2 + \ln t)^{k-2}\left(1 + \ln r + 1 + \ln\left(\frac{t}{r}\right)\right) \leqslant \left(2 + \ln\left(\frac{t}{r}\right)\right)(2 + \ln t)^{k-1}. \qquad (15)$$

В последние годы жизни
Николай Михайлович Коробов:

получал новые оценки погрешности квадратурных формул с параллелепипедальными сетками

In his last years
Nikolay Mikhailovich Korobov

derived the new estimates of fallibility of quadrature formulas with parallelepiped frames

Подставляя (15) в (12), получим

$$T^{(1)}_{r,t}(\vec{p}_s) \leqslant \sum_{k=1}^{s} C_s^k 2^k \left(2+\ln\left(\frac{t}{r}\right)\right)(2+\ln t)^{k-1} =$$

$$= 2\left(2+\ln\left(\frac{t}{r}\right)\right)\sum_{k=0}^{s-1}\frac{s}{k+1}C_{s-1}^k 2^k(2+\ln t)^k \leqslant 2s\left(2+\ln\left(\frac{t}{r}\right)\right)(5+2\ln t)^{s-1}, \tag{16}$$

и утверждение леммы доказано.

Лемма 7. *Для любого простого* $p > 2\cdot 3^s+1$ *среди* $P=(p-1)^s$ *различных наборов* $(a_1,\dots,a_s)$ *с* $(1 \leqslant a_1,\dots,a_s \leqslant p-1)$ *имеется не менее* $P/4+1$ *таких, что при* $\alpha > 1$ *справедлива оценка*

$$\zeta_H(\Lambda(a_1,\dots,a_s;p)|\alpha) \leqslant \frac{16s\left(2+\ln\left(\frac{p}{p^*}\right)\right)(5+2\ln p)^{s-1}}{pq^{\alpha-1}} + 4\alpha\left(\frac{3\alpha^2}{\alpha-1}\right)^s\frac{(1+\ln p)^{s-1}}{qp^{\alpha-1}} \tag{17}$$

Доказательство. Пусть существует $P_1 \geqslant P/2+1$ наборов $(a_1,\dots,a_s)$ таких, что $q=q(a_1,\dots,a_s)\geqslant p^*$. Перенумеруем их в порядке возрастания величины $T^{(1)}_{p^*,p}(\vec{a})$:

$$T^{(1)}_{p^*,p}(\vec{a}_1) \leqslant T^{(1)}_{p^*,p}(\vec{a}_2) \leqslant \dots \leqslant T^{(1)}_{p^*,p}(\vec{a}_{P_1}),$$

нумерацию оставшихся $P-P_1$ наборов продолжим произвольным способом.

Тогда, очевидно,

$$T^{(1)}_{p^*,p}(\vec{a}_{P/4+1}) \leqslant \frac{4}{4P_1-P}\sum_{\nu=(P+4)/4}^{P_1} T^{(1)}_{p^*,p}(\vec{a}_\nu) \leqslant \frac{4}{P}\sum_{\nu=1}^{P} T^{(1)}_{p^*,p}(\vec{a}_\nu) =$$

$$= \frac{4}{P}\sum_{p^*\leqslant\overline{m}_1\dots\overline{m}_s<p}{}' \sum_{\nu=1}^{P}\frac{\delta_p(m_1a_{\nu 1}+\dots+m_sa_{\nu s})}{\overline{m}_1\dots\overline{m}_s} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{4}{P}\sum_{p^*\leqslant\overline{m}_1\dots\overline{m}_s<p}\frac{(p-1)^{s-1}}{\overline{m}_1\dots\overline{m}_s} = \frac{4}{p-1}T^{(1)}_{p^*,p}(\vec{p}_s) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{16s\left(2+\ln\left(\frac{p}{p^*}\right)\right)(5+2\ln p)^{s-1}}{p}.$$

Следовательно,

$$T^{(1)}_{p^*,p}(\vec{a}_1) \leqslant \dots \leqslant T^{(1)}_{p^*,1}(\vec{a}_{P/4+1}) \leqslant \frac{16s\left(2+\ln\left(\frac{p}{p^*}\right)\right)(5+2\ln p)^{s-1}}{p}.$$

В последние годы жизни
Николай Михайлович Коробов:

получал новые оценки погрешности квадратурных формул с параллелепипедальными сетками

In his last years
Nikolay Mikhailovich Korobov

derived the new estimates of fallibility of quadrature formulas with parallelepiped frames

ОБ ОЦЕНКЕ ПОГРЕШНОСТИ КВАДРАТУРНЫХ ФОРМУЛ 47

Отсюда, равенства (4) и из леммы 4 для $\nu = 1, \ldots, P/4+1$ получаем:

$$\zeta_H(\Lambda(\vec{a}_\nu; p)|\alpha) = T^{(\alpha)}_{q,p}(a_1, \ldots, a_s) + T^{(\alpha)}_{p,\infty}(a_1, \ldots, a_s) \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{q^\alpha} T^{(1)}_{p^*,p}(a_1, \ldots, a_s) + T^{(\alpha)}_{p,\infty}(a_1, \ldots, a_s) \leqslant$$
$$\leqslant \frac{16s\left(2+\ln\left(\frac{p}{p^*}\right)\right)(5+2\ln p)^{s-1}}{pq^{\alpha-1}} + 4\alpha\left(\frac{3\alpha^2}{\alpha-1}\right)^s \frac{(1+\ln p)^{s-1}}{qp^{\alpha-1}}, \qquad (18)$$

что и доказывает утверждение леммы.

Теорема 1. *Для любого простого* $p > 2\cdot 3^s+1$ *среди* $P = (p-1)^s$ *различных наборов* $(a_1, \ldots, a_s)$ *с* $(1 \leqslant a_1, \ldots, a_s \leqslant p-1)$ *имеется не менее* $P/4+1$ *таких, что* $q = q(a_1, \ldots, a_s) \geqslant p^*$ *и при* $\alpha > 1$, $N = p$ *для* $f \in E^\alpha_s(C)$ *погрешность квадратурной формулы*

$$\int_0^1 \ldots \int_0^1 f(x_1, \ldots, x_s)dx_1 \ldots dx_s = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^N f\left(\left\{\frac{a_1 k}{p}\right\}, \ldots, \left\{\frac{a_s k}{p}\right\}\right) - R_N[f]$$

удовлетворяет неравенству

$$|R_N[f]| \leqslant C\frac{C(\alpha,s)(2+2s\ln\ln p)(5+2\ln p)^{s-1}}{pq^{\alpha-1}},$$

где константа $C(\alpha, s) > 0$ *зависит только от* α, s.

Доказательство. Известно, что

$$|R_N[f]| \leqslant C\zeta_H(\Lambda(\vec{a}; p)|\alpha).$$

Отсюда и из леммы 7 следует требуемая оценка:

$$|R_N[f]| \leqslant C\left(\frac{16s(2+2s\ln\ln p)(5+2\ln p)^{s-1}}{pq^{\alpha-1}} + 4\alpha\left(\frac{3\alpha^2}{\alpha-1}\right)^s\frac{(1+\ln p)^{s-1}}{qp^{\alpha-1}}\right) \leqslant$$
$$\leqslant C\frac{C(\alpha,s)(2+2s\ln\ln p)(5+2\ln p)^{s-1}}{pq^{\alpha-1}},$$

так как

$$\ln\left(\frac{p}{p^*}\right) \leqslant \ln(2(3+2\ln p)^{s-1}) < 2s\ln\ln p.$$

Заметим, что для всех наборов $(a_1, \ldots, a_s)$, удовлетворяющих условию теоремы, для которых $q \ll p/\ln\ln p$, оценка теоремы 1 лучше известной оценки (см. [2] стр. 126)

$$|R_N[f]| \leqslant 4C\alpha\left(\frac{3\alpha^2}{\alpha-1}\right)^s\frac{(1+\ln q)^{s-1}}{q^\alpha}.$$

Но вопрос о существовании наборов даже с $q \gg p\ln^{1-s+\epsilon} p$ для любого $\epsilon > 0$ остается открытым.

В последние годы жизни
Николай Михайлович Коробов:

получал новые оценки погрешности квадратурных формул с параллелепипедальными сетками

In his last years
Nikolay Mikhailovich Korobov

derived the new estimates of fallibility of quadrature formulas with parallelepiped frames

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Гельфонд А. О. Исчисление конечных разностей. М.: Наука, 1967.

[2] Коробов Н. М. Теоретико-числовые методы в приближенном анализе. М.: Физматгиз, 1963.

Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого.
Институт истории естествознания и техники им. С. И. Вавилова РАН.
Поступило 7.10.2002 г.

В последние годы жизни
Николай Михайлович Коробов:
изучал глубокие вопросы поведения неполных частных цепных дробей.

In his last years
Nikolay Mikhailovich Korobov
researched into characteristics of incomplete particular chain fractions very profoundly.

В 1994 году Николаю Михайловичу Коробову было присвоено звание ***заслуженного Соросовского профессора***.

In 1994 Nikolay Mikhailovich Korobov was confered the rank of ***George Soros Emeritus Professor***.

Николай Михайлович Коробов дома, 2004 год
Nikolay Mikhailovich Korobov at home, 2004

Презентация подготовлена магистрантами Тульского Государственного Университета.

Авторы выражают благодарность за предоставленные фотографии ***Анне Николаевне Коробовой***.

В презентации использовались музыкальные произведения ***Фредерика Шопена*** - любимого композитора Николая Михайловича Коробова.

This presentation was created by undergraduates from Tula State University.

Authors express their thanks to ***Anna Nikolaevna Korobova*** for vested photos.

The musical illustration consists of Chopin's musical compositions (***Frederic Chopin*** was N.M. Korobov's favourite composer).